





دانشکده : فیزیک

گروه : هسته ای

استفاده از رابطهی عدم قطعیت تعمیم یافته در بررسی ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی

دانشجو : پریسا هوشمند

استاد راهنما :

دکتر حسن حسن آبادی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریورماه ۱۳۹۳

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : فیزیک

گروه : هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم پریسا هوشمند

تحت عنوان: استفاده از رابطی عدم قطعیت تعمیم یافته در بررسی ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی

در تاریخ ۹۳/۰۶/۲۲ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تقدیم بہ تمام زندگی ام، پدر و مادر تا زینم

ہر چند کہ قابل تقدیم نیست۔

((خدایا، به خاطر حضور سبزت در خطبه بخطی زندگی نامه ام از تو سپاسگزارم))

شکر و قدردانی

برای تحقق این اثر مختصر به شاکردی در مکتب استاد بزرگوار جناب آقای دکتر حسن آبادی بودم و همیشه قدردان زحمات و راهنمایی های تمام وقت ایشان خواهم بود. از خداوند بزرگ، خیر و برکت برای ایشان و خانواده ی محترمشان خواهانم.

همچنین از همذی معلمان و اساتیدی که از دبستان تا کنون دلسوزانه به من علم و دانش آموختند، شکر می کنم. از آقای دکتر توکل علی صبران و خانم دکتر صداحی نیر به خاطر لطفی که در جهت اصلاح و تکمیل این پایان نامه داشته اند بسیار سپاس گزارم. از آقای دکتر سرکرده ای و آقای دکتر سوبانی نیز قدردانی می کنم.

بسیار دوست داشتم فرصتی پیش بیاید که از معلم پایی به نجم ابتدایی ام سرکار خانم سهیلا کیانی شکر کنم که هیچ گاه یادشان از خاطر من پاک نخواهد شد.

صورت ماه برادرهای مهربانم، آقای حاج امیر محمد و دکتر پرتان هوشمندرامی بوسم که همیشه در کنارم هستند و برایشان عاقبتی نیکو آرزو مندم.

هم چنین از محبت دوستانم که مراد این اثریاری رسانند صمیمانه سپاس گزارم؛ خانم زینب مرادی، خانم کزل شیدایی، آقای رضا اسماعیلی، حاجیه خانم محبوبه سبزواری، خانم شهرزاد کوثری، آقای محمد کنگولی، خانم مهین مجدزاده، خانم هنناز اکبری، خانم دکتر لیلا نادری و خانم دکتر آیدا آرمات. از آقای لطفی نیر به خاطر بکارشان شکر می کنم.

به امید موفقیت و کامروایی دوستان در تمامی مراحل زندگی و به امید دیدار در مقطع بالاتر...

باشد که خدمتگزار مردم سرزمینم باشم، پریا هوشمند- شهریور ۹۳

تعهد نامه

اینجانب پریسا هوشمند دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک هسته‌ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه استفاده از رابطه‌ی عدم قطعیت تعمیم‌یافته در بررسی ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی تحت راهنمایی دکتر حسن حسن آبادی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده:

به خوبی با اصل عدم قطعیت هایزنبرگ که اساس مکانیک کوانتومی را تشکیل می‌دهد، آشناییم. اصلی که از خواص موجی ذرات رونمایی می‌کند و نشان می‌دهد کمیت‌هایی که با یک دیگر جابجا نمی‌شود هم‌زمان قابل اندازه‌گیری نخواهند بود. می‌دانیم که بسیاری از فرضیات و اصول فیزیکی با گذشت زمان اصلاح و یا نقض شده است، مشاهده شده است که اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نیز نیاز به اصلاح شدن دارد و در انرژی‌های بالا عدم قطعیت هایزنبرگ حالت حدی از اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته می‌شود. هنگامی که انرژی افزایش می‌یابد اثر گرانشی ظاهر می‌شود و از یک کم‌ترین مقدار طول ممکن خبر می‌دهد. عدم قطعیت تعمیم‌یافته (GUP) باعث بازنگری در مکانیک کوانتومی و ضرورت استفاده از مکانیک کوانتومی تعمیم‌یافته شده است و یکی از به روزترین موضوعات مورد توجه فیزیک‌دانان در سه دهه‌ی اخیر است. این پایان‌نامه نیز بر اساس مطالعه‌ی ذرات نسبیتی و غیر نسبیتی در مکانیک کوانتوم تعمیم‌یافته نوشته شده است. در این پایان‌نامه روابط عدم قطعیت تعمیم‌یافته را به سه بعد تعمیم داده‌ایم، تغییرات زمانی سیستم نوسانی و خواص ترمودینامیکی سیستم‌های نوسانی N ذره‌ای را در حضور پدیده‌ی طول کمینه بازنگری کرده‌ایم.

همچنین به بررسی و مطالعه‌ی روابط در حوزه‌ی فیزیک هسته‌ای پرداخته‌ایم.

کلمات کلیدی: طول کمینه، اثر گرانشی، اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته، مکانیک کوانتوم تعمیم‌یافته

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه:

[۱] H. Hassanabadi, P. Hooshmand and S. Zarrinkamar, The generalized uncertainty principle and harmonic interaction in three spatial dimensions. Accepted in few body systems.

[۲] H. Hassanabadi, P. Hooshmand, Time evolution of the some nonrelativistic modified Hamiltonians with minimal length, ZNA, article in the press.

فهرست مطالب:

فصل اول: اصل عدم قطعیت تعمیم یافته	۱
۱-۱- اصل عدم قطعیت هایزنبرگ	۲
۱-۱-۱- تایید تجربی نظریه ی دوبروی توسط دیوسون گرمر	۲
۱-۲- آزمایش دو شکافه ی یانگ	۳
۲-۱- انگیزه ی ایجاد عدم قطعیت تعمیم یافته	۷
۳-۱- ارتباط سیاه چاله با طول کمینه	۸
۴-۱- اثبات روابط عدم قطعیت کمینه در یک بعد	۱۲
۵-۱- رفتار تابع موج در فضای مومنتوم در حضور یا در غیاب طول کمینه	۱۶
۶-۱- اصل عدم قطعیت تعمیم یافته با مراتب بالاتر	۲۱
۷-۱- بررسی نوسانگر هماهنگ با مراتب بالاتر از رابطه ی طول کمینه	۲۵
۸-۱- تراز لاندائوو	۳۱
۹-۱- سد پتانسیل	۳۳
۱۰-۱- نتیجه گیری	۳۵
فصل دوم: روابط عدم قطعیت تعمیم یافته در چند بعد	۳۷
۱-۲- نوسانگر هماهنگ تعمیم یافته در سه بعد	۳۸
۱-۱-۲- مطالعه ی نوسانگر هماهنگ غیر نسبیتی	۳۸
۲-۱-۲- حل معادله شروینگر تعمیم یافته به روش N-U	۴۱
۲-۲- مطالعه ی نوسانگر هماهنگ نسبیتی	۴۲
۱-۲-۲- معادله ی کلاین گوردن سه بعدی با حضور طول کمینه در فضای مومنتوم	۴۲
۲-۲-۲- اثر طول کمینه در بررسی ذرات نسبیتی در میدان مغناطیسی	۴۶
۳-۲- نتیجه گیری	۴۹
فصل سوم: مطالعه ی اتم هیدروژن در حضور طول کمینه	۵۱
۱-۳- مطالعه ی غیر نسبیتی اتم هیدروژن	۵۲
۲-۱-۳- محاسبه ی لمب شیفت با استفاده از هامیلتونی اختلال	۵۴
۳-۱-۳- حل معادله شروینگر برای اتم هیدروژن	۵۶
۴-۱-۳- نوسانگر هماهنگ تعمیم یافته و چند جمله ای های لاگر	۵۹
۵-۱-۳- نتیجه گیری	۶۱
۲-۳- مطالعه ی نسبیتی اتم هیدروژن	۶۱

۶۸	۳-۲-۱- نتیجه گیری
۷۱	فصل چهارم: حالت‌های پراکندگی در مکانیک کوانتوم تغییر شکل یافته
۷۴	۴-۱- محاسبه‌ی ضرائب عبور و بازتاب
۸۱	۴-۲- نتیجه گیری
	فصل پنجم: بررسی خواص ترمودینامیکی سیستمی با نوسانگرهای هارمونیک
۸۳	در مکانیک کوانتوم تغییر شکل یافته
۸۴	۵-۱- هامیلتونی تعمیم یافته و ویژه مقدار انرژی یک ذره در حضور طول کمینه
۸۵	۵-۲- بررسی خواص ترمودینامیکی سیستم با برهم کنش‌های نوسانگرهای هماهنگ
۸۶	۵-۲-۱- تابع پارش
۸۸	۵-۲-۲- انرژی داخلی سیستم، ظرفیت گرمایی، انرژی آزاد هلمهولتز و آنتروپی
۹۱	۵-۳- نتیجه گیری
۹۳	فصل ششم: تحول زمانی به‌ازای پتانسیل‌های مختلف در مکانیک کوانتوم تغییر شکل یافته
۹۴	۶-۱- تغییرات زمانی هامیلتونی‌های غیر نسبیتی
۹۵	۶-۱-۱- تغییرات زمانی ذره‌ی آزاد در حضور طول کمینه
۹۶	۶-۱-۲- تغییرات زمانی هامیلتونی تعمیم یافته با پتانسیل خطی
۹۷	۶-۱-۳- تغییرات زمانی نوسانگر هماهنگ ساده
۱۰۱	۶-۲- نتیجه گیری
۱۰۴	مراجع

فهرست اشکال:

- شکل ۱-۱: آزمایش دوبروی ۳
- شکل ۱-۲: آزمایش یانگ ۴
- شکل ۱-۳: آزمایش یانگ با حضور چشمه‌ی نور ۵
- شکل ۱-۴: اصل عدم قطعیت هایزنبرگ ۶
- شکل ۱-۵: میکروسکوپ هایزنبرگ ۹
- شکل ۱-۶: عدم قطعیت طول کمینه ۱۳
- شکل ۱-۷: رفتار تابع موج در حضور طول کمینه ۱۸
- شکل ۱-۸: رفتار تابع موج با بیشینه‌ی جایگزیدگی در حضور طول کمینه ۲۰
- شکل ۱-۹: محاسبه‌ی تغییرات نسبی انرژی بر حسب n ناشی از $GUP(1), GUP(2)$ ۳۱
- شکل ۱-۱۰: سد پتانسیل ۳۳
- شکل ۱-۲: رسم نمودار انرژی بر حسب پتانسیل در حالت پایه ۴۵
- شکل ۱-۴: پتانسیل وود-ساکسون بر حسب شعاع هسته ۷۳
- شکل ۱-۶: نمودار مکان بر حسب زمان (متر بر ثانیه) در غیاب طول کمینه ۹۷

فهرست جداول:

- جدول ۱-۱: رابطه‌ی GUP با انرژی نوسانگر هماهنگ ۳۰
- جدول ۱-۲: طیف انرژی به ازای هر مقدار n, l دلخواه ۴۵

فصل اول

اصل عدم قطعیت تعمیم یافته

۱- اصل عدم قطعیت تعمیم یافته^۱

۱-۱- اصل عدم قطعیت هایزنبرگ^۲

در ابتدا به تعریف اصل عدم قطعیت هایزنبرگ می پردازیم، اصلی که بیان می کند مکان و تکانه با هم جابجا نمی شوند پس به طور هم زمان قابل اندازه گیری نیستند.

$$[x, p] = i\hbar, \quad (1-1)$$

اصل عدم قطعیت در واقع توجیه رفتار موجی ذرات بود. می دانیم وقتی طول موج بیش تر از ابعاد ذره شود،

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad \vec{k} = \frac{\vec{p}}{\hbar} \text{ می دهد.}$$

با توجه به اینکه مکانیک کوانتومی بر پایه ی رفتار موجی ذرات استوار است در اینجا به بررسی برخی آزمایشاتی که منجر به تایید اصل عدم قطعیت و در نتیجه رفتار موجی ذرات شده است، می پردازیم. [۱]

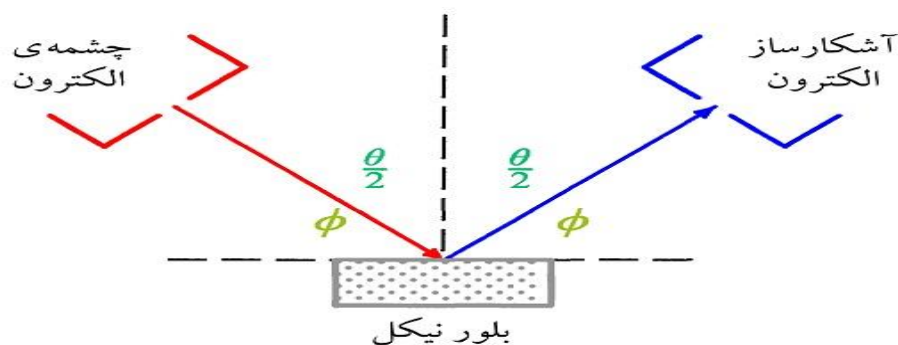
۱-۱-۱- تایید تجربی نظریه ی دوبروی توسط دیوسون گرمر^۳

اگر پرتو الکترون تک انرژی را به بلورنیکل بتابانیم، این پرتو بعد از برخورد به سطح بلور پراکنده می شود. چشمه ی بلور و آشکارساز مطابق شکل (۱-۱) رو به روی هم نسبت به خط عمود بر سطح بلور قرار داده شده است.

^۱ The Generalized Uncertainty Principle

^۲ The Heisenberg Uncertainty Principle

^۳ Davisson-Germer

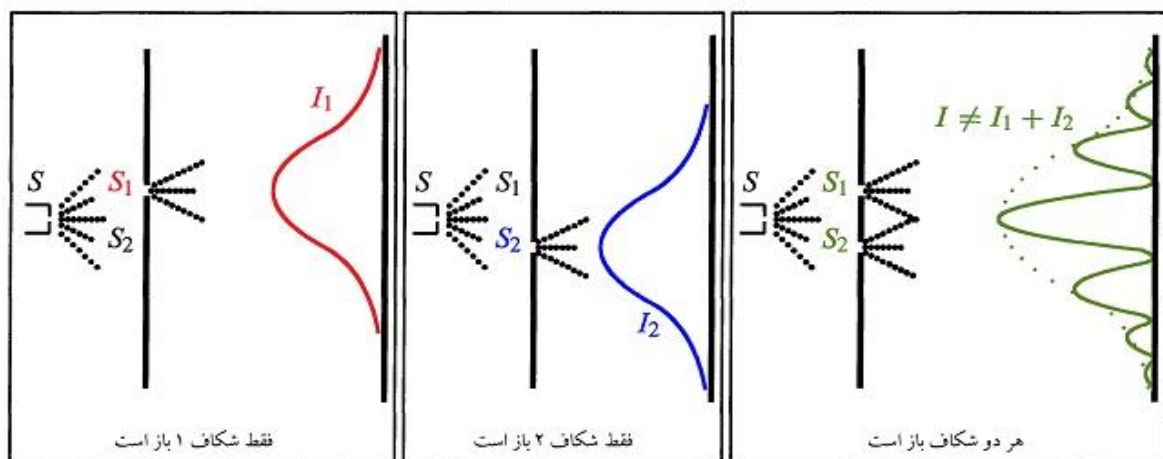


شکل ۱-۱: آزمایش دوبروی

θ زاویه ی بین الکترون برخوردی و پرتوی الکترون پراکنده شده است. نکته ی جالب آزمایش این بود که هر چند الکترون در همه ی جهات پراکنده می شود اما دارای بیشینه و کمینه است، شدت این ذرات در $\theta = 35^\circ$ کمینه و $\theta = 50^\circ$ بیشینه مقدار است. این نشان می دهد که تعداد زیادی الکترون فقط در یک جهت خاص پراکنده می شوند. حتی زمانی که الکترون ها با شدت کمتری فرستاده می شوند هنوز این الگوها پابرجاست.

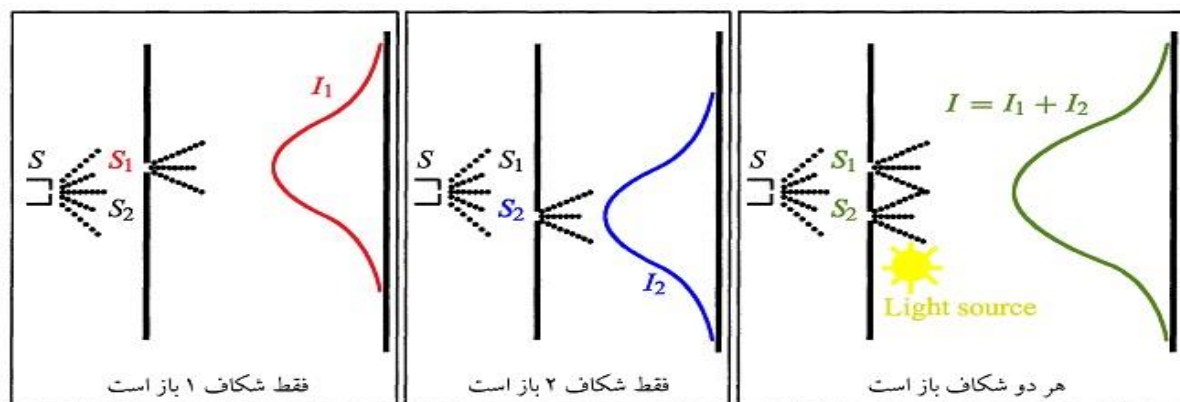
۲-۱-۱- آزمایش دو شکافه ی یانگ

می دانیم که الکترون یک ذره ی کوانتومی است، ماهیت موجی- ذره ای آن در آزمایش دو شکافه ی یانگ به خوبی بررسی شده است. از دیدگاه کلاسیکی این امواج هستند که الگوی پراش نشان می دهند نه ذرات؛ آن چه که در ترکیب ذرات قابل مشاهده است جمع شدت امواج آنهاست. در صورتی که در کوانتوم رفتار موجی شامل ذرات هم می شود. در شکل ۲-۱ آزمایش یانگ نشان داده شده است.



شکل ۱-۲: آزمایش یانگ

قبل از شروع آزمایش دو شکاف، انتظار می‌رفت که الکترون مانند یک ذره رفتار کند و نمی‌دانستیم، هنگامی که الکترون از منبع خارج می‌شود، پراش دارد. اگر رفتار الکترون را به صورت ذره‌ای در نظر می‌گرفتیم الکترون‌ها، همزمان نمی‌توانستند از دو شکاف عبور کند ولی این اتفاق می‌افتد. جالب‌تر اینکه این الگوی تداخلی کاری به شدت پرتوی الکترونی ندارد. در واقع آزمایش با پرتوهای ضعیف هم تکرار می‌شود با این تفاوت که برای رسیدن تعداد مناسبی الکترون به پرده و تشکیل الگوی پراش به زمان بیشتری نیاز داریم. اما حال پرسش اساسی این است: الکترون از کدام شکاف عبور کرده‌است؟ برای پاسخ به این سوال این بار آزمایش یانگ مطابق شکل ۱-۳ در حضور چشمه‌ی نور تکرار می‌شود.



شکل ۱-۴: آزمایش ینگ با حضور چشمه‌ی نور

چون بارهای الکتریکی نور را پراکنده می‌کند پس هنگامی که الکترون از میان یکی از شکاف‌ها عبور کند در مسیرش تا شمارنده به چشم ما نور می‌رسد.

اما صرف عمل نگاه کردن به الکترون‌ها توزیع آن را به شدت تحت تاثیر قرار می‌دهد. الگوی تداخل حذف و توزیع شدت شبیه گلوله‌های کلاسیکی می‌شود. تا کنون دو گروه الکترون داریم: الکترون‌هایی که دیده شده‌اند (رفتار ذره‌ای دارند) الکترون‌های که دیده نشده‌اند ولی توسط آشکارساز تشخیص داده شده‌اند (رفتار موجی دارند). این یک اصل کوانتومی است که اندازه‌گیری سیستم را مختل می‌کند.

آزمایشاتی نظیر دیوسون گرمر و ینگ، نشان دادند که علاوه بر مشخص بودن سرعت و شدت پرتوهای به کار برده شده؛ مکان دقیق ذره قابل اندازه‌گیری نیست. این آزمایشات ادله‌ی محکمی برای اثبات اصل عدم قطعیت می‌باشند.

در هر صورت اصل عدم قطعیت هایزنبرگ بیان می‌کند، که عملگرهایی که با هم جابجا نمی‌شوند با هم نمی‌توانند اندازه‌گیری شوند. جفت‌های مشخصی از خواص فیزیکی، مانند مکان و تکانه نمی‌توانند با دقتی دلخواه معلوم شوند. وقتی که یکی را با دقت بسیار زیاد اندازه‌گیری کنیم دقت اندازه‌گیری دیگری بسیار کم و به صفر میل می‌کند. غیر ممکن است که هم‌زمان تکانه و مکان ذرات کوانتومی با دقت کامل

مشخص شود.

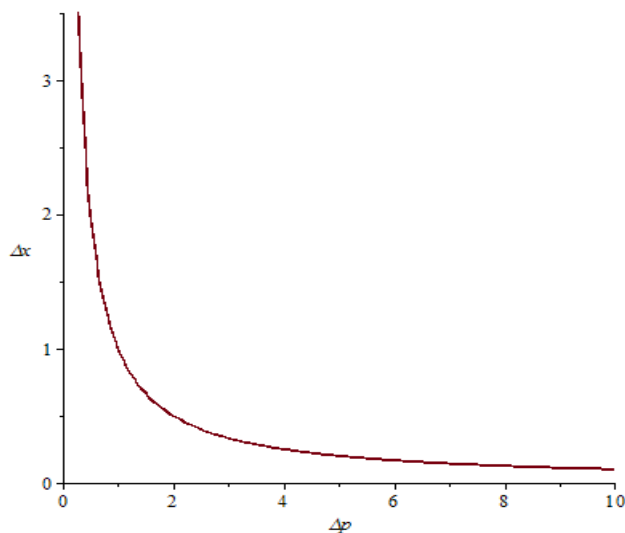
تنها ذره‌ای که مکان دقیق دارد، ذره‌ی متمرکز^۱ است که در یک نقطه است چنین موجی، طول موج معین دارد بنابراین تکانه نامعین دارد، اگر یک خاصیت سیستم، قابل اندازه‌گیری با دقتی بیش از حد معین نباشد، آن‌گاه این محدودیت سیستم است و نه محدودیت دستگاه‌های اندازه‌گیری است.

$$[A, B] \neq 0 \quad \Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (2-1)$$

پس با توجه به معادله‌ی بالا می‌توان برای مکان و تکانه نیز نوشت [۲]

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \quad (3-1)$$

در شکل ۴-۱ تغییرات Δx بر حسب Δp رسم شده است [۳].



شکل ۴-۱: اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

^۱ Localized particle

در شکل ۱-۴ رابطه‌ی عدم قطعیت بین تغییرات مکان و تکانه به‌خوبی نشان داده شده است. تکانه افزایش می‌یابد ولی جابجایی مکان کوچک‌تر می‌شود و برعکس.

این یک اصل است مکان و تکانه هم زمان قابل اندازه‌گیری نیستند.

۱-۲- انگیزه‌ی ایجاد عدم قطعیت تعمیم‌یافته

بسیاری از فرضیات و اصول فیزیکی با گذشت زمان اصلاح و یا نقض شده است. همان‌طور که می‌خواهیم نشان دهیم اصل عدم قطعیت هایزنبرگ نیز، در انرژی‌های بالا به تنهایی جوابگو نمی‌باشد و نیاز به اصلاح شدن دارد.

اوایل فکر می‌کردند که کم‌ترین بعد موجود در جهان یک اتم است و فاقد هر گونه زیر ساختاری است. اما همه‌ی ما می‌دانیم که نه‌تنها تاکنون به ابعاد ریزتری از اتم مانند نوکلئون‌ها دست یافته‌ایم بلکه خود پروتون‌ها و نوترون‌ها نیز، از زیرساختارهای مانند کوارک ساخته شده است.

سوالی که پیش می‌آید این است:

آیا می‌توان به زیر ساختارهای بیش‌تری دست یافت؟

آیا وجود زیرساختارها تنها مختص مواد است یا فضا زمان را نیز شامل می‌شود؟

آیا خود فضا زمان پایه و اساس هستند یا از یک سری جنبه‌های اساسی دیگر نشأت گرفته است؟

شواهد تجربی در گراننش، نظریه‌ی ریسمان و فیزیک سیاه‌چاله‌ها (که در بخش‌های بعدی توضیح خواهیم داد) حاکی از آن است که در انرژی‌های نزدیک به مقیاس پلانک Δx می‌تواند کوچک شود اما به صفر

نخواهد رسید و در یک جا متوقف خواهد شد؛ این فاصله که به طول کمینه^۱، طول ناشی از گرانش یا طول پلانک^۲ (از مرتبه‌ی $10^{-35}m$) معروف است عدم قطعیت را به هم می‌زند؛ به طوری که روابط قبلی دیگر پاسخ‌گو نخواهد بود و ما نیاز به معرفی یک رابطه‌ی جدید داریم که بصورت زیر تعریف می‌شود [۴].

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \text{const} G \cdot \Delta p, \quad (4-1)$$

که G در اینجا ثابت گرانش است و در واقع با افزایش انرژی ظاهر می‌شود. برای انرژی‌های کوچک‌تر از پلانک جمله‌ی دوم حذف خواهد شد و به همان رابطه‌ی عدم قطعیت معمول می‌رسیم. ولی با اعمال گرانش ارزش جمله‌ی دوم نیز بیش‌تر می‌شود.

۱-۳- ارتباط سیاه چاله با طول کمینه

می‌دانیم که در سیاه‌چاله‌ها جرم، بار و دما بسیار مهم است. مدل‌های مختلفی از سیاه‌چاله‌ها با توجه به انرژی و جرمشان داریم. در این بخش از تجربه‌ی گدان‌کن^۳ برای اندازه‌گیری ناحیه‌های مشخص افق سیاه‌چاله در گرانش کوانتومی بحث می‌کنیم. مادامی که برای ترکیب گرانش و نظریه‌ی کوانتوم تلاش می‌کنیم در نهایت به مرتبه‌ای از طول پلانک می‌رسیم. اگر یک سیاه‌چاله را با بار Q و جرم M در نظر بگیریم داریم [۵]:

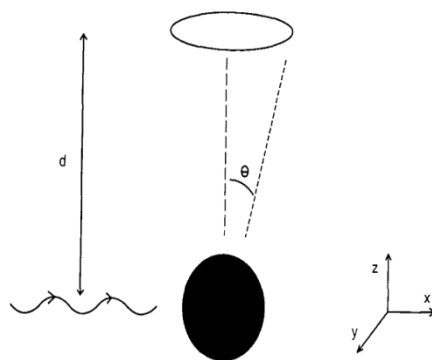
^۱ Minimal length

^۲ Planck length

^۳ Gedanken experiment

$$\begin{aligned}
 R_h &= GM + \sqrt{(GM)^2 - GQ^2} \\
 &= GM + \sqrt{(GM)^2 \left(1 - \frac{GQ^2}{(GM)^2}\right)} \\
 &= GM \left(1 + \sqrt{1 - \frac{Q^2}{GM^2}}\right), \tag{۵-۱}
 \end{aligned}$$

می‌دانیم که هر سیاه چاله یک افق دید دارد و هر ذره‌ای که وارد این ناحیه شود را جذب می‌کند در واقع سیاه‌چاله مثل یک جسم سیاه عمل می‌کند. حال اگر به سوی سیاه چاله یک بیم فوتونی یا هر ذره‌ی دیگر بتابانیم که فوتون‌ها تحت یک محدوده‌ی مشخص پراکنده می‌شود و بیشترین پراکندگی در زاویه‌ی ۹۰ درجه است. در شکل ۵-۱ میکروسکوپ هایزنبرگ را مشاهده می‌کنید.



شکل ۵-۱: میکروسکوپ هایزنبرگ

با استفاده از آنالیز هایزنبرگ کلاسیکی، خطا در اندازه‌گیری مکان زمانی که هیچ نوری جذب سیاه‌چاله نشده است به صورت زیر است

$$\Delta x^{(1)} \approx \frac{\lambda}{\sin \theta} \tag{۶-۱}$$

$$\Delta x \Delta p \approx \frac{\hbar}{2} \quad \Delta p \approx \frac{\hbar}{2 \Delta x} = \frac{\hbar \sin \theta}{2 \lambda} \tag{۷-۱}$$

می‌توان به شکل دیگری این معادله را بازنویسی کرد، فوتون به راحتی جذب سیاه‌چاله می‌شود پس اگر فوتونی به جرم ΔM جذب سیاه‌چاله شود، جرم سیاه‌چاله به اندازه‌ی $M + \Delta M$ افزایش خواهد یافت، در رابطه‌های قبلی فقط خود فوتون‌های نشر شده را در نظر گرفتیم ولی این دفعه، اثر فوتون‌هایی که توسط سیاه‌چاله جذب شده‌اند را بر روی میزان پراکندگی نیز لحاظ خواهیم کرد.

در نهایت اگر فوتون‌های زیادی نشر و ثبت شود یک تصویر از سیاه‌چاله به ما خواهد داد. گفتیم که در بین عملیات جذب و نشر جرم سیاه‌چاله تغییر خواهد کرد و جرم یکی از پارامترهای اساسی سیاه‌چاله‌ها است پس افق رویداد نیز تغییر خواهد کرد؛ به همین علت $\Delta x^{(2)}$ (خطای دومی) را نیز تعریف باید کرد. از معادله‌ی (۵-۱) داریم:

$$r_+(G + \Delta M) + r_+(G) = GM + G\Delta M + \sqrt{(G + \Delta M)^r - GQ^r} - (GM + \sqrt{(GM)^r - GQ^r})$$

$$G\Delta M + \sqrt{(G + \Delta M)^r - GQ^r} - \sqrt{(GM)^r - GQ^r} \geq 2G\Delta M \approx G\Delta M, \quad (۸-۱)$$

برای فوتونی که دارای جرم ΔM است می‌توان نوشت:

$$\hbar \nu = \Delta M c^r, \Delta M = \frac{h\nu}{c^r} = \frac{\frac{hc}{\lambda}}{c^r} = \frac{\hbar}{\lambda c}, \quad (۹-۱)$$

$$G\Delta M = \frac{G\hbar}{\lambda} \quad (۱۰-۱)$$

رابطه‌ی مربوط به ثابت گرانش و طول پلانک را می‌نویسیم:

$$l_{pl}^r = \frac{G\hbar}{c^r} \xrightarrow{(۹-۱), (۱۰-۱)} G\Delta M = \frac{l_{pl}^r c^r}{\lambda} \quad (۱۱-۱)$$

که البته می‌توان اینگونه نوشت:

$$\Delta x^{(r)} = G\Delta M = \frac{l_{pl}^r}{\lambda} \quad (12-1)$$

رابطه‌ی (۶-۱) را به صورت تقریبی می‌نویسیم:

$$\frac{\lambda}{\sin \theta} \approx \lambda, \quad (13-1)$$

با در نظر گرفتن معادلات (۱۳-۱) و (۱۲-۱)، Δx کلی به صورت زیر است.

$$\Delta x \geq \lambda + const. \frac{l_{pl}^r}{\lambda}, \quad (14-1)$$

در اینجا ثابت عددی نسبیتی بین دو تا جمله معرفی نشده است ولی مهم این است که یک خطای کمینه

از مرتبه‌ی پلانک را نشان می‌دهد. $\Delta x_{\min} \sim const. l_{pl}$

رابطه‌ی بدست آمده را می‌توان بر حسب Δp نیز نوشت. برای جمله‌ی اول و دوم رابطه‌ی بالا، با توجه به

اصل عدم قطعیت معمول داریم:

$$\lambda = \frac{\hbar}{\Delta p}, \quad (15-1)$$

فرمول (۱۵-۱) را در رابطه‌ی (۱۴-۱) جایگذاری کرده و به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \frac{l_{pl}^r \Delta p}{\hbar}, \quad (16-1)$$

با در نظر گرفتن معادله‌ی (۱۱-۱) خواهیم داشت:

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \frac{G\Delta p}{c^2 \hbar}, f = \frac{1}{c^2} \quad (17-1)$$

$$\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + f \frac{G\Delta p}{\hbar}, \quad (18-1)$$

f یک ثابت نسبیتی است. با توجه به رابطه‌ی بدست‌آمده ملاحظه می‌شود که هر چه انرژی بیش‌تر شود جمله‌ی اول کوچک‌تر و جمله‌ی دوم با ارزش‌تر خواهد شد، به همین خاطر مرتبه‌ی طول مشاهده شده در رابطه‌ی (۱۶-۱) را طول کمینه می‌نامیم، چون افزایش تکانه از طرفی با کاهش تکانه جبران می‌شود. در حقیقت وقتی گرانش نادیده گرفته شود هیچ محدودیتی نداریم فاصله‌ها کوچک و کوچک‌تر می‌شود و انرژی‌ها افزایش می‌یابد ولی در انرژی‌های بالا گرانش مهم می‌شود. گرانش بر روی عدم قطعیت تاثیر می‌گذارد، اگر انرژی پلانک را به عنوان یک مرز در نظر بگیریم با افزایش انرژی به انرژی‌های بالای پلانک و تمرکز انرژی بی‌نهایت در یک فضای کوچک، سیاه چاله ایجاد می‌شود؛ با یک افق رویداد پشت چیزهایی که ما نمی‌توانیم ببینیم. این نامعقول نیست که ما یک طول کمینه ذاتی را پیشنهاد دهیم.

۴-۱- اثبات روابط عدم قطعیت کمینه در یک بعد

۱-۴-۱- رابطه‌ی جابجایی طول کمینه

رابطه‌ی (۱۸-۱) را به صورت تابعی از p معرفی می‌کنیم [۶]

$$[x, p] = i\hbar f(p), \quad (19-1)$$

رابطه‌ی بالا را نتیجه‌ی یک بسط تیلور حول $p=0$ در نظر می‌گیریم که جمله‌ی اول را مساوی یک، جمله‌ی دوم را مساوی صفر و جمله‌ی سوم را یک ضریب در p^2 در نظر می‌گیریم و این ضریب را β می‌نامیم و می‌نویسیم:

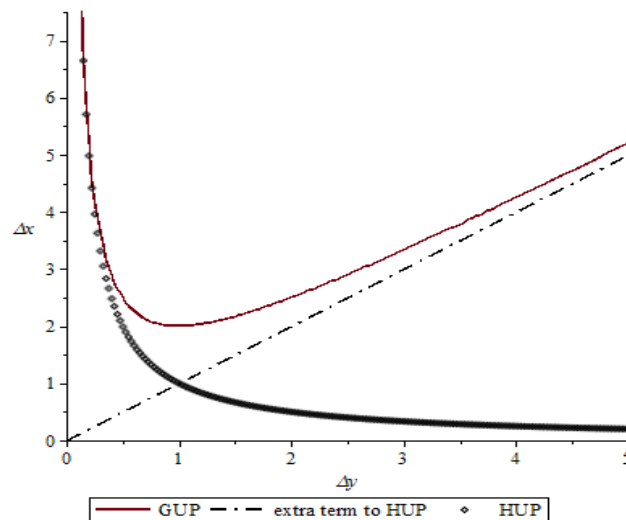
$$f(p) = f(p)|_{p=0} + pf'(p)|_{p=0} + \frac{1}{2}(p)^2 f''(p)$$

$$\frac{1}{2} f''(p) = \beta \Rightarrow f(p) = 1 + \beta p^2, \quad (20-1)$$

ملاحظه می‌شود با صرف‌نظر از β به همان روابط عدم قطعیت معمول خواهیم رسید یعنی $[x, p] = i\hbar$.

پس در نهایت می‌توان نوشت [۷]

$$[x, p] = i\hbar(1 + \beta p^2). \quad (21-1)$$



شکل ۱-۶: عدم قطعیت طول کمینه

در شکل ۱-۲ رابطه‌ی عدم قطعیت معمولی با رابطه‌ی عدم قطعیت تعمیم‌یافته رسم شده است و به خوبی

مشخص است که برای رشد تکانه محدودیت وجود دارد پس مکان تا حدی مشخص قابل کوچک‌تر شدن

است. مکان و تکانه مجاز به رفتار در یک ناحیه‌ی مشخص است که به ناحیه‌ی مجاز^۱ معروف است [۳].

۱-۴-۲- رابطه‌ی نامساوی طول کمینه

می‌دانیم که برای دو عملگر جابجاناپذیر داریم :

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} |\langle [A, B] \rangle|. \quad (22-1)$$

یک جمله‌ی جدید ناشی از طول کمینه را تعریف می‌کنیم [۳]

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} (1 + \beta p^2 + \gamma), \quad (23-1)$$

داریم که

$$\Delta x \Delta p \approx \frac{\hbar}{2} |\langle [x, p] \rangle|, \quad (24-1)$$

هدف بدست آوردن مقدار گاما و جایگذاری آن است. $(\Delta p)^2$ را در رابطه‌ی (۲۳-۱) قرار می‌دهیم:

$$[x, p] = i\hbar(1 + \beta(\Delta p)^2) + \beta \langle p^2 \rangle, \quad (25-1)$$

$$\frac{\hbar}{2} |\langle [x, p] \rangle| = \Delta x \Delta p, \quad (26-1)$$

$$\hbar |\langle [x, p] \rangle| = 2 \Delta x \Delta p, \quad (27-1)$$

از طرفی:

$$\frac{\hbar}{2} |\langle [x, p] \rangle| = \Delta x \Delta p, \quad (26-1)$$

$$\hbar |\langle [x, p] \rangle| = 2 \Delta x \Delta p, \quad (27-1)$$

^۱ Allowed region

می‌توان به جای جمله‌ی سمت راست از رابطه‌ی (۲۳-۱) استفاده کرد.

$$\begin{aligned}\hbar |\langle i\hbar(1 + \beta(\Delta p)^r + \beta \langle p \rangle^r) \rangle| &= \gamma \Delta x \Delta p \\ \gamma \Delta x \Delta p &= \hbar(1 + \beta(\Delta p)^r + \gamma) \\ \hbar |\langle i\hbar(1 + \beta(\Delta p)^r + \beta \langle p \rangle^r) \rangle| &= \hbar(1 + \beta(\Delta p)^r + \gamma),\end{aligned}\quad (28-1)$$

در نتیجه بدست می‌آوریم

$$\gamma = \beta \langle p \rangle^r, \quad (29-1)$$

اگر مقدار γ را در معادله‌ی (۲۸-۱) قرار دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{\gamma} (1 + \beta(\Delta p)^r + \beta \langle p \rangle^r), \\ \Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{\gamma} (1 + \beta p^r). \end{cases} \quad (30-1)$$

در ادامه می‌توان طول کمینه را از رابطه (۳۰-۱) استخراج کرد.

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{\gamma} (1 + \beta(\Delta p)^r + \beta \langle p \rangle^r), \quad (31-1)$$

$$\frac{\gamma}{\hbar} \Delta x \Delta p = 1 + \beta(\Delta p)^r + \beta \langle p \rangle^r$$

$$(\Delta p)^r - \frac{\gamma}{\hbar \beta} \Delta x \Delta p + (\langle p \rangle^r + \frac{1}{\beta}) = 0$$

$$\Delta p = (-\frac{\gamma}{\hbar \beta} \Delta x) \pm \sqrt{(\frac{\gamma}{\hbar \beta} \Delta x)^2 - 4(\langle p \rangle^r + \frac{1}{\beta})}$$

$$\Rightarrow \Delta p = \frac{\gamma}{\hbar \beta} \Delta x \pm \sqrt{(-\frac{\Delta x}{\hbar \beta})^2 - \langle p \rangle^r - \frac{1}{\beta}}, \quad (32-1)$$

با استفاده از

$$(\Delta p)^r - \langle p \rangle^r = \langle p^r \rangle, \quad (33-1)$$

رابطه‌ی (۳۱-۱) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\gamma} [1 + \beta < p^\gamma >], \quad (34-1)$$

و

$$\begin{aligned} (\Delta x)_{\min} &= \hbar \sqrt{\beta} \sqrt{1 + \beta < p^\gamma >} \\ \text{if } < p > \rightarrow \cdot \\ \Delta x &= \hbar \sqrt{\beta}, \end{aligned} \quad (35-1)$$

پارامتر β را تعریف می‌کنیم [۸]

$$\beta = \frac{\beta_0}{M_{pl} c^\gamma} \quad (36-1)$$

$M_{pl} c^\gamma = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$ انرژی پلانک است در اینجا β از مرتبه‌ی یک است.

۱-۵- رفتار تابع موج در فضای مومنتوم در حضور یا غیاب طول کمینه

می‌دانیم

$$\hat{P}\psi(p) = p\psi(p) \quad (37-1)$$

$$\hat{X}\psi(p) = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi(p) \quad (38-1)$$

با اعمال طول کمینه خواهیم داشت

$$\xrightarrow{GUP} \hat{X}\psi(p) = i\hbar(1 + \beta p^\gamma) \frac{\partial}{\partial p} \psi(p), \quad (39-1)$$

معادله‌ی ویژه مقداری اش را در فضای مومنتوم می‌نویسیم [۴]

$$i\hbar(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p} \psi_\lambda(p) = \lambda \psi_\lambda(p) \quad (40-1)$$

$$\frac{\partial \psi_\lambda(p)}{\partial p \psi_\lambda(p)} = \frac{-i\lambda}{\hbar(1 + \beta p^2)}$$

$$\ln \psi_\lambda(p) = \left(\frac{-i\lambda}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta} p \right)$$

$$\psi_\lambda(p) = \exp\left(\frac{-i\lambda}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta} p\right), \quad (41-1)$$

برای بدست آوردن ضریب بهنجارش از رابطه‌ی زیر کمک می‌گیریم

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \beta p^2} \psi_\lambda^*(p) \psi_\lambda(p) dp$$

$$cc^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \beta p^2} = 1$$

$$cc^* \frac{\pi}{\sqrt{\beta}} = 1 \Rightarrow c = \sqrt{\sqrt{\beta}/\pi}, \quad (42-1)$$

با جایگذاری در (41-1) تابع موج به صورت زیر بدست می‌آید

$$\psi_\lambda(p) = \sqrt{\sqrt{\beta}/\pi} \exp\left(\frac{-i\lambda}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan \sqrt{\beta} p\right). \quad (43-1)$$

با استفاده از رابطه‌ی زیر

$$p(1 + \beta p^2) \psi(p) = \lambda \psi(p), \quad (44-1)$$

که در واقع λ ویژه مقدار مومنتموم تعمیم‌یافته است. می‌توان حاصلضرب تابع موج و مزدوج آن را بدست

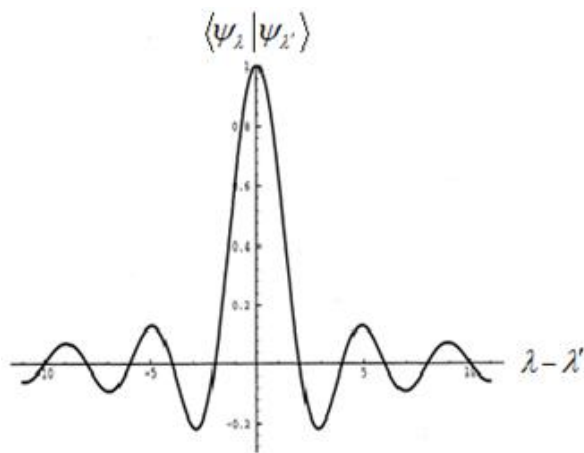
آورد

$$\begin{aligned}\psi^* \psi &= \sqrt{\beta} / \pi \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-i\lambda'}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta} p)\right) \exp\left(\frac{-i\lambda}{\hbar\sqrt{\beta}} \arctan(\sqrt{\beta} p)\right) \frac{dp}{(1+\beta p^2)} \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi(\lambda-\lambda')} \sin\left(\frac{\lambda-\lambda'}{\sqrt{\beta}} \pi\right).\end{aligned}\quad (45-1)$$

که در محاسبات از این رابطه استفاده کرده‌ایم

$$y = \int \frac{1}{1+\alpha x^2+bx+c} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \arctan \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2ax} + c. \quad (46-1)$$

شکل ۷-۱ رفتار تابع موج را بر حسب طول کمینه در واحد طول نشان می‌دهد و به خوبی می‌توان مشاهده کرد که بیش‌ترین جایگزیدگی حول مبدأ است.



شکل ۷-۱: رفتار تابع موج در حضور طول کمینه

حال می‌خواهیم بیش‌ترین جایگزیدگی را بدست بیاوریم. اگر حالت‌های $|\psi_\xi^{ML}\rangle$ را حول مکان ξ را بیش‌ترین جایگزیدگی معرفی کنیم، پس می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\zeta}^{ml} | X | \psi_{\zeta}^{ml} \rangle &= \zeta \\ \Rightarrow \Delta x | \psi_{\zeta}^{ml} \rangle &= \Delta x. \end{aligned} \quad (48-1)$$

به این نکته اشاره کنیم که $\langle [x, p] \rangle$ کمیتی موهومی است، پس می توان نوشت

$$\begin{aligned} \langle \psi | (x - \langle x \rangle)^r + \left(\frac{\langle [x, p] \rangle}{2(\Delta p)^r} \right)^r (p - \langle p \rangle)^r | \psi \rangle &\geq 0. \\ \Delta x \Delta p &\geq \frac{|\langle [x, p] \rangle|}{2} \\ (i\hbar(1 + \beta p^r) \partial p - \langle x \rangle + i\hbar \frac{1 + \beta(\Delta p)^r + \beta \langle p \rangle^r}{2\Delta p^r} (p - \langle p \rangle)) \psi(p) &= 0. \\ \frac{\partial \psi(p)}{\partial p} &= \frac{1}{i\hbar(1 + \beta p^r)} (\langle x \rangle - \frac{i\hbar(1 + \beta \Delta p^r + \beta \langle p \rangle^r)}{2\Delta p^r} (p - \langle p \rangle)) \psi(p). \end{aligned} \quad (49-1)$$

پس $\psi(p)$ را می توان نوشت

$$\begin{aligned} \psi(p) &= N(1 + \beta p^r)^{\frac{1 + \beta(\Delta p)^r + \beta \langle p \rangle^r}{2\beta(\Delta p)^r}} \\ &\times \exp\left[\left(\frac{\langle x \rangle}{i\hbar\sqrt{\beta}} - \frac{(1 + \beta(\Delta p)^r + \beta \langle p \rangle^r) \langle p \rangle}{2(\Delta p)^r\sqrt{\beta}}\right) \arctan(\sqrt{\beta} p)\right]. \end{aligned} \quad (50-1)$$

با محاسبه ی ضریب بهنجارش و جایگذاری آن داریم

$$\begin{aligned} \psi_{\zeta}^*(p) \psi_{\zeta}(p) &= N N^* \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^r)} = \frac{N^r \pi}{2\sqrt{\beta}} \\ \psi_{\zeta}(p) &= \sqrt{\frac{2\sqrt{\beta}}{\pi}} (1 + \beta p^r) \exp\left(\frac{-i\zeta \arctan(\sqrt{\beta} p)}{\hbar\sqrt{\beta}}\right). \end{aligned} \quad (51-1)$$

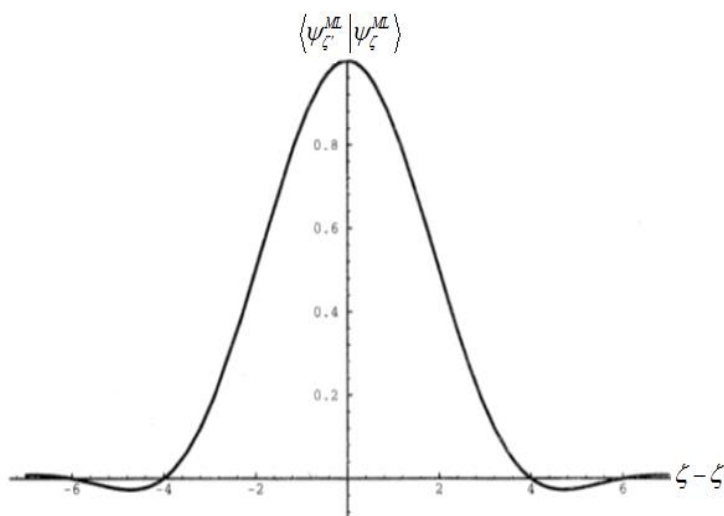
حالت بیش ترین جایگزیدگی، در واقع تعمیمی از شکل تابع موج در فضای تکانه یا در فضای مکان تابع دلتای دیراک، مربوط به مکانیک کوانتوم معمولی است. حالت های بیشینه با جایگزیدگی جدید (ناشی از طول کمینه)، حالت های فیزیکی جدیدی هستند که انرژی بینهایت ندارند، بلکه انرژی شان محدود است

چون فضا تا حد تعریف شده‌ای مجاز به جایگزیدگی است پس انرژی نیز تا حدی مجاز به افزایش است و به بینهایت نمی‌رسد. بر خلاف مکانیک کوانتومی معمولی که مکان بیشترین جایگزیدگی را داشت ، تکانه و به تبع انرژی به بینهایت می‌رسید.

$$\langle \psi_{\zeta}^{ML} | \frac{p^2}{2m} | \psi_{\zeta}^{ML} \rangle = \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \frac{p^2}{2m}, \quad (52-1)$$

می‌توان روابط را برای محاسبه‌ی $\langle \psi_{\zeta}^{ml} | \psi_{\zeta'}^{ml} \rangle$ ادامه داد

$$\begin{aligned} \langle \psi_{\zeta}^{ml} | \psi_{\zeta'}^{ml} \rangle &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{(1 + \beta p^2)} \exp(-i(\zeta - \zeta') \arctan(\frac{\sqrt{\beta} p}{\hbar\sqrt{\beta}})) \\ &= \frac{\sqrt{\beta}}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{d\tilde{p}}{\sqrt{\beta}} \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(\tilde{p})}{\cos^2(\tilde{p})}} \exp(\frac{-i(\zeta - \zeta')\tilde{p}}{\hbar\sqrt{\beta}}) \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(\zeta - \zeta')}{2\hbar\sqrt{\beta}} - \left(\frac{(\zeta - \zeta')}{2\hbar\sqrt{\beta}} \right)^2 \right]^{-1} \sin(\frac{(\zeta - \zeta')\pi}{2\hbar\sqrt{\beta}}), \end{aligned} \quad (53-1)$$



شکل ۱-۸: رفتار تابع موج با بیشینه‌ی جایگزیدگی در حضور طول کمینه

با در نظر گرفتن شکل‌های ۷- و ۸-۱ و مقایسه با اصل عدم قطعیت هایزنبرگ در می‌یابیم که وقتی طول کمینه را اعمال نکرده بودیم می‌توانستیم مکان دقیق x را مشخص کنیم کافی بود خطای اندازه‌گیری تکانه بی نهایت می‌شد خطای اندازه‌گیری مکان صفر می‌شد ولی اینجا همیشه یک کم‌ترین خطای اندازه‌گیری مکان خواهیم داشت به همین خاطر نمی‌توانیم مکان دقیق را بدست بیاوریم.

در واقع چون در عدم قطعیت تعمیم‌یافته با انرژی‌های بالا سر و کار داریم به نقطه‌ی غیر قابل کوچک شدنی^۱ می‌رسیم که بسیار کوچک است و رفتار تابع موج را در فضا جایگزیده‌تر می‌کند.

۱-۶- اصل عدم قطعیت تعمیم‌یافته با مراتب بالاتر

گفتیم که مدل‌های گوناگونی از روابط طول کمینه خواهیم داشت؛ ثابت‌های معمول طول کمینه α, β هستند که با مراتب بیشتر از یک نیز نشان داده می‌شود، گرچه به علت کوچک بودن این ثوابت تنها به مرتبه‌ی اول بسنده می‌شود، برای آشنایی بیشتر، مراتب بالاتر نیز در این بخش بررسی شده است. در این بخش به دو شکل روابط عدم قطعیت مراتب بالا، نمایش داده‌شده و با هم مقایسه شده است.

تا کنون با مرتبه‌ی اول رابطه‌ی زیر کار کرده‌ایم اما در این بخش مرتبه‌ی بالاتری را از رابطه‌ی جابجایی طول کمینه را معرفی می‌کنیم [۹]

$$[x_i, p_i] = i\hbar (\delta_{ij} + \beta(p^\gamma \delta_{ij} + \gamma p_i p_j)), \quad (۱-۵۴)$$

و همین‌طور

$$\Delta x_i \Delta p_i \geq \frac{\hbar}{\gamma} \left[1 + \beta \left((\Delta p)^\gamma + \langle p^\gamma \rangle \right) + \gamma \beta \left((\Delta p_i)^\gamma + \langle p_i^\gamma \rangle \right) \right], \quad (۱-۵۵)$$

^۱ Cut off

که در اینجا $x_i = x_i, p_i = p_i(1 + \beta p_i^2)$ است و x_i, p_i به ترتیب تکانه و مکان تعریف شده در مکانیک کوانتومی معمول است.

با در نظر گرفتن رابطه‌ی جدید، هامیلتونی نیز به صورت زیر نوشته می‌شود

$$H_1 = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{\beta p_i^4}{m} + \frac{\beta^2 p_i^6}{2m}, \quad (56-1)$$

در این بخش چون می‌خواهیم صورت دیگری از روابط طول کمینه را به کار ببریم، پس هامیلتونی ناشی از پارامتر تغییر شکل β را هامیلتونی عدم قطعیت تعمیم‌یافته‌ی شماره‌ی یک می‌نامیم و با GUP_1 نشان می‌دهیم. می‌توان با نمایش جدیدی از تکانه رابطه‌ی عدم قطعیت جدیدی را نیز معرفی کرد

$$p = p_i(1 - \alpha p_i + \beta \alpha^2 p_i^2) \quad (57-1)$$

α مقدار کوچکی است، این پارامتر به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\alpha = \frac{\alpha_i}{M_{pl} c^2} \quad \text{if} \quad \alpha_i \rightarrow 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{M_{pl} c^2} = \frac{1}{48 \times 10^{52}} \approx 0.2 \times 10^{-52}, \quad (58-1)$$

با در نظر گرفتن رابطه‌ی $(57-1)$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left(\delta_{ij} - \alpha \left(p \delta_{ij} + \frac{p_i p_j}{p} \right) + \alpha^2 (p^2 \delta_{ij} + 3 p_i p_j) \right), \quad (59-1)$$

هامیلتونی ناشی از پارامتر تغییر شکل α نیز به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}
H_{\gamma} &= \frac{p_{\gamma}^{\gamma} (1 - \gamma \alpha p_{\gamma}^{\gamma} + \Delta \alpha^{\gamma} p_{\gamma}^{\gamma} - \epsilon \alpha^{\gamma} p_{\gamma}^{\gamma} + \epsilon \alpha^{\gamma} p_{\gamma}^{\gamma})}{2m} + v(x) \frac{1}{\gamma} \\
&= \frac{p_{\gamma}^{\gamma}}{2m} - \frac{\alpha p_{\gamma}^{\gamma}}{m} + \frac{\Delta \alpha^{\gamma} p_{\gamma}^{\gamma}}{2m} - \frac{\gamma \alpha^{\gamma} p_{\gamma}^{\gamma}}{m} + \frac{\gamma \alpha^{\gamma} p_{\gamma}^{\gamma}}{m} + v(x) \\
&= H_{\gamma} - \frac{\alpha p_{\gamma}^{\gamma}}{m} + \frac{\Delta \alpha^{\gamma} p_{\gamma}^{\gamma}}{2m} + O(\alpha^{\gamma}) \approx H_{\gamma} - \frac{\alpha p_{\gamma}^{\gamma}}{m} + \frac{\Delta \alpha^{\gamma} p_{\gamma}^{\gamma}}{2m}, \quad (60-1)
\end{aligned}$$

هامیلتونی بدست آمده را هامیلتونی ناشی از عدم قطعیت تعمیم یافته‌ی شماره‌ی دو می‌نامیم و به اختصار با GUP نمایش می‌دهیم.

با صفر شدن پارامترهای تغییر شکل در هر دو رابطه‌ی GUP، به روابط استاندارد جابجایی خواهیم رسید

$$[x_i, p_i] = i\hbar \delta_{ij}$$

برای سیستم مختل نشده داریم:

$$\begin{aligned}
H \psi_n(x) &= E_n \psi_n(x) \\
\psi_n(0) &= \psi_n(L) = 0 \\
E_n^{(\gamma)} &= \frac{n^2 \pi^2}{2mL^2}, \quad (61-1)
\end{aligned}$$

در واقع جملات شامل α ها و β ها مانند جملات اختلالی هستند، پس می‌توان مراتب اختلال را بدست آورد.

$$\langle x | n \rangle = \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (62-1)$$

اولین مرتبه‌ی اختلال GUP¹ به صورت زیر است [۱۰]

$$\Delta E_{n(GUP)}^{(\gamma)} = \langle n | H_{\gamma} | n \rangle = \frac{\beta}{m} \langle n | p_{\gamma}^{\gamma} | n \rangle + \frac{\beta^{\gamma}}{2m} \langle n | p_{\gamma}^{\gamma} | n \rangle, \quad (63-1)$$

با جایگذاری رابطه‌ی زیر

$$\hat{p}f(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f(x), \quad (۶۴-۱)$$

می‌توان معادله‌ی (۶۳-۱) را به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} \Delta E_{n(GUP)}^{(۱)} &= \left(\frac{\beta}{m} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\partial}{\partial x} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) - \left(\frac{\beta}{m} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} \frac{\partial}{\partial x} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right) \hbar \\ \Delta E_{n(GUP)}^{(۱)} &= \left(\frac{\beta \hbar^2 \pi^2 n^2}{mL^2} \int_0^L (1 - \cos \frac{n\pi x}{L}) dx \right) - \left(\frac{\beta \hbar^2 \pi^2 n^2}{mL^2} \int_0^L (1 - \cos \frac{n\pi x}{L}) dx \right) \\ &= \frac{\beta \hbar^2 \pi^2 n^2}{mL^2} - \frac{\beta \hbar^2 \pi^2 n^2}{mL^2}, \end{aligned} \quad (۶۵-۱)$$

برای بدست آوردن اختلال مرتبه‌ی دوم GUP داریم

$$\begin{aligned} E_{(GUP)p}^{(۲)} &= \frac{\beta}{m} \sum_{k \neq n} \frac{(\langle k | p | n \rangle)^2}{E_k - E_n} \quad E_n = \frac{n^2 \pi^2}{mL^2}, E_k = \frac{k^2 \pi^2}{mL^2}, \\ E_{(GUP)p}^{(۲)} &= \frac{\beta L^2}{\pi^2 (k^2 - n^2)} \left(\int_0^L \sin \frac{k\pi x}{L} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right)^2 \\ &= \frac{\beta \hbar^2 n^2 \pi^2}{mL^2 (k^2 - n^2)} \left(\int_0^L \sin \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (۶۶-۱)$$

9

$$\begin{aligned} E_{(GUP)p}^{(۲)} &= \frac{\beta}{m} \sum_{k \neq n} \frac{(\langle k | p | n \rangle)^2}{E_k - E_n} \\ E_{(GUP)p}^{(۲)} &= \frac{L^2 \beta}{\pi^2 (k^2 - n^2)} \left(\int_0^L \sin \frac{k\pi x}{L} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right)^2 \\ &= \frac{\beta \hbar^2 n^2 \pi^2}{mL^2 (k^2 - n^2)} \left(\int_0^L \sin \frac{k\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (۶۷-۱)$$

به همین ترتیب مراتب اختلال GUP_۲ نیز بدست می‌آید

$$E_{(GUP_2)p^\gamma}^{(1)} = \alpha \langle n | -\frac{p^\gamma}{m} | n \rangle = -\frac{\alpha}{m} \langle n | p^\gamma | n \rangle$$

$$E_{(GUP_2)p^\gamma}^{(1)} = -\frac{i n^\gamma \pi^\gamma \hbar^\gamma \alpha^\gamma}{m L^\gamma} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0 \quad (۶۸-۱)$$

۹

$$E_{(GUP_2)p^\gamma}^{(1)} = \frac{\Delta \alpha^\gamma}{\gamma m} \langle n | p^\gamma | n \rangle$$

$$E_{(GUP_2)p^\gamma}^{(1)} = \frac{\Delta \alpha^\gamma}{\gamma m} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{\partial^\gamma}{\partial x^\gamma} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$= \frac{\Delta \alpha^\gamma \hbar^\gamma n^\gamma \pi^\gamma}{\gamma m L^\gamma} \int_0^L (1 - \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)) dx = \frac{\Delta \alpha^\gamma \hbar^\gamma n^\gamma \pi^\gamma}{\gamma m L^\gamma}, \quad (۶۹-۱)$$

و همین‌طور برای اختلال مرتبه‌ی دوم داریم

$$E_{(GUP_2)p^\gamma}^{(2)} = \frac{\alpha}{m} \sum_{k \neq n} \frac{(\langle k | H_n | n \rangle)^\gamma}{E_k - E_n},$$

$$E_{(GUP_2)p^\gamma}^{(2)} = \frac{\gamma \alpha L^\gamma}{\pi^\gamma (k^\gamma - n^\gamma)} \left(\int_0^L \sin \frac{k\pi x}{L} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})^\gamma \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right)^\gamma$$

$$E_{(GUP_2)p^\gamma}^{(2)} = \frac{\hbar^\gamma \pi^\gamma n^\gamma \alpha^\gamma}{\gamma L^\gamma (k^\gamma - n^\gamma)} \left(\int_0^L \sin \frac{k\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx \right)^\gamma = 0, \quad (۷۰-۱)$$

اختلال مرتبه‌ی دوم p^γ نیز به‌طور مشابه رابطه‌ی (۷۰-۱) صفر می‌شود.

۷-۱- بررسی نوسانگر هماهنگ با مراتب بالاتر از رابطه‌ی طول کمینه

می‌دانیم که نوسانگر هماهنگ یک مدل خوب برای بسیاری از سیستم‌ها است. در این بخش دو رابطه‌ی

GUP معرفی شده را، این بار برای نوسانگر هماهنگ بررسی و روابط را با هم مقایسه می‌کنیم. اخیراً

آزمایشات اپتیک کوانتومی پیشنهاد شده، در رابطه‌ی جابجایی نوسانگر مکانیکی با جرمی نزدیک به جرم

پلانک بررسی شده است. با توجه به اینکه پارامترهای تغییر شکل طول کمینه از مقادیر بسیار کوچکی هستند پس اثر می‌توانیم از روابط نظریه‌ی اختلال نیز استفاده کنیم. در این بخش نیز، ما اولین و دومین مراتب اختلال را برای هر دو هامیلتونی بدست آورده و از روش عملگر نردبانی استفاده کرده‌ایم که به مراتب از دیگر روشها ساده‌تر است.

۱-۷-۱- اولین مرتبه‌ی اختلال ۱ GUP

هامیلتونی شماره‌ی یک برای نوسانگر در حضور طول کمینه را به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$H = H_0 + H', \quad (71-1)$$

پس هامیلتونی اختلال به صورت زیر است

$$H' = \frac{\beta p_x^2}{m} + \frac{\beta p_y^2}{2m}, \quad (72-1)$$

با بکارگیری مومنوم بر حسب عملگرهای خلق و نابودی

$$p_x = i\sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}}(a^\dagger - a), \quad (73-1)$$

اولین مرتبه‌ی اختلال را به صورت زیر، بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{aligned} \Delta E_{n(GUP)}^{(1)} &= \langle n | H' | n \rangle = \frac{\beta}{m} \left(\frac{\hbar m \omega}{2} \right)^2 \langle n | (a^\dagger - a)^2 | n \rangle \\ &= -\frac{\beta^2}{2m} \left(\frac{\hbar m \omega}{2} \right)^2 \langle n | (a^\dagger - a)^4 | n \rangle, \end{aligned} \quad (74-1)$$

پس از اثر دادن عملگرهای بالا برنده و پایین آورنده به رابطه‌ی زیر خواهیم رسید:

$$\Delta E_{n(GUP)}^{(1)} = \frac{3\beta^2 \ell_p^2}{4} m \omega^2 (2n^2 + 2n + 1) + \frac{5\beta^2 \ell_p^2}{16\hbar} m^2 \omega^2 (4n^2 + 6n^2 + 8n + 3), \quad (75-1)$$

با صفر شدن پارامتر تغییر شکل طول کمینه در رابطه‌ی (۷۵-۱) اثر اختلال از بین می‌رود و نوسانگر به حالت اولیه‌ی خود باز می‌گردد. در ضمن هر چه که پارامتر β کوچکتر شود اثر اختلال نیز کم‌تر می‌شود.

۲-۷-۱- دومین مرتبه‌ی اختلال ۱ GUP

روابط مربوط به اختلال مرتبه‌ی دوم را می‌نویسیم

$$\Delta E_{n(GUP)}^{(\gamma)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | H' | n \rangle|^\gamma}{E_n^{(\cdot)} - E_m^{(\cdot)}}, \quad H' = \frac{\beta}{m} p^\gamma, \quad (76-1)$$

مجموع را بر حسب عملگرهای خلق و نابودی گسترش می‌دهیم

$$\begin{aligned} \langle m | H' | n \rangle = & \frac{\beta}{m} \left(\frac{\hbar m \omega}{\gamma} \right)^\gamma \langle m | a^\dagger a^\dagger a^\dagger a^\dagger - a^\dagger a^\dagger a^\dagger a - a^\dagger a^\dagger a a^\dagger \\ & - a^\dagger a a^\dagger a^\dagger - a^\dagger a a a - a a^\dagger a^\dagger a - a a^\dagger a a - a a a^\dagger a - a a a a^\dagger + a a a a | n \rangle, \end{aligned} \quad (77-1)$$

با اثر دادن عملگرهای بالا برنده و پایین آورنده بر معادله‌ی بالا داریم

$$\begin{aligned} \langle m | H' | n \rangle = & \frac{\beta}{m} \left(\frac{\hbar m \omega}{\gamma} \right)^\gamma \left(\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} \delta_{m,n+4} - (4n+6) \sqrt{(n+1)(n+2)} \delta_{m,n+2} \right. \\ & \left. - (4n-2) \sqrt{n(n-1)(n+2)} \delta_{m,n-2} + \sqrt{n(n-1)(n-2)(n-3)} \delta_{m,n-4} \right), \end{aligned} \quad (78-1)$$

پس می‌توان نوشت

$$\frac{\Delta E_{n(GUP)}^{(\gamma)}}{E_n} = \frac{-m \omega^\gamma l_p^\gamma \beta^\gamma}{\lambda \hbar^\gamma} \left(\frac{34n^3 + 51n^2 + 59n + 21}{n + \frac{1}{2}} \right), \quad (79-1)$$

۳-۷-۱- اولین مرتبه‌ی اختلال GUP_2

به طور مشابه هامیلتونی اختلال را اینگونه بیان می‌کنیم

$$H' = -\frac{\alpha}{m} p_x^2 + \frac{\Delta\alpha^x}{m} p_x^2 - \frac{\gamma\alpha^x}{m} p_x^2 + \frac{\gamma\alpha^x}{m} p_x^2, \quad (۸۰-۱)$$

به علت اینکه این توابع فرد هستند، تصحیح مرتبه‌ی اول برای p_x^2 و p_x^4 با معادله‌ی (۷۶-۱) مشابه است با

$$\beta \rightarrow \frac{\Delta\alpha^x}{2}, \beta^2 \rightarrow 4\alpha^x$$

در نتیجه می‌توان انرژی نسبی را به این صورت نوشت

$$\frac{\Delta E_{n(\text{GUP}_2) p_x^2}^{(1)}}{E_n} = \frac{\gamma \Delta l_p^x \alpha^x m \omega (\gamma n^2 + \gamma n + 1)}{\lambda \hbar (n + \frac{1}{2})} + \frac{\Delta\alpha^x l_p^x m^2 \omega^2 (\epsilon n^2 + \epsilon n + \lambda n + 3)}{4 \hbar^2 (n + \frac{1}{2})}, \quad (۸۱-۱)$$

۴-۷-۱- دومین مرتبه‌ی اختلال GUP_2

به طور مشابه برای اختلال مرتبه‌ی دوم نیز می‌نویسیم

$$\Delta E_{n(\text{GUP}_2) p_x^2}^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | H' | n \rangle|^2}{E_n^{(1)} - E_m^{(1)}}, \quad (۸۲-۱)$$

هامیلتونی اختلال را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$H' = \frac{-\alpha}{m} p_x^2 + \frac{\Delta\alpha^x}{2m} p_x^2, \quad (۸۳-۱)$$

از جمله‌ی دوم هامیلتونی اختلال صرف نظر می‌کنیم و $\langle m | H' | n \rangle$ را بدست می‌آوریم، که به صورت

زیر است

$$\begin{aligned} \langle m | H' | n \rangle = & \frac{i\alpha}{m} \left(\frac{\hbar m \omega}{2} \right)^{\frac{r}{2}} \left(\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)} \delta_{m,n+3} - 3(n+1)\sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} \right. \\ & \left. + 3n\sqrt{n} \delta_{m,n-1} - \sqrt{n(n-1)(n-2)} \delta_{m,n-3} \right), \end{aligned} \quad (84-1)$$

با قرار دادن و جایگذاری در معادله‌ی (81-1) داریم

$$\Delta E_{n(GUPr)p_r}^{(r)} = \frac{\alpha^r}{m^r} \left(\frac{\hbar m \omega}{2} \right)^{\frac{r}{2}} \left[\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{-3\hbar\omega} - \frac{9(n+1)^r}{-\hbar\omega} + \frac{9n^r}{-\hbar\omega} + \frac{n(n-1)(n-2)}{-3\hbar\omega} \right], \quad (85-1)$$

تغییرات نسبی این انرژی نیز، به صورت زیر است

$$\frac{\Delta E_{n(GUPr)p_r}^{(r)}}{E_n} = \frac{-m\omega l_p^r \alpha^r (3 \cdot n^r + 3 \cdot n + 1)}{3\hbar(n + \frac{1}{2})}, \quad (86-1)$$

تصحیح مرتبه‌ی دوم برای p_r مانند معادله‌ی (74-1) است.

$$\frac{\Delta E_{n(GUPr)p_r}^{(r)}}{E_n} = \frac{-2\Delta m^r \omega^r l_p^r \alpha^r (34n^r + 51n^r + 59n + 21)}{32\hbar^r(n + \frac{1}{2})}, \quad (87-1)$$

با اضافه کردن معادلات (79-1) و (81-1) برای 1 GUP داریم

$$\frac{\Delta E_{n(GUP1)p_r}^{(r)}}{E_n} = \frac{3\beta^r l_p^r m \omega (2n^r + 2n + 1)}{4\hbar(n + \frac{1}{2})} - \frac{3\beta^r l_p^r m^r \omega^r (16n^r + 24n^r + 26n + 9)}{16\hbar^r(n + \frac{1}{2})}, \quad (88-1)$$

و همین طور برای 2 GUP خواهیم داشت

$$\frac{\Delta E_{n(GUP2)p_r}^{(r)}}{E_n} = \frac{l_p^r m \omega \alpha^r}{2\hbar(n + \frac{1}{2})} - \frac{1\Delta l_p^r m^r \omega^r \alpha^r (46n^r + 69n^r + 77n + 9)}{32\hbar^r(n + \frac{1}{2})}, \quad (89-1)$$

با مقایسه‌ی نتایج حاصل از این دو معادله با نتایج تجربی، یک یون در تله‌ی پنینگ^۱ در نظر می‌گیریم.

(تله‌ی پنینگ در اصل دستگاهی برای ذخیره‌سازی بار ذرات در یک میدان مغناطیسی یکنواخت ایستا و

^۱ Penning trap

به مراتب یک میدان الکتریکی ایستای غیر یکنواخت می‌باشد و روش بسیار مناسبی برای مطالعه‌ی خواص یون و ذرات درون اتمی، با بار غیر صفر می‌باشد. این حرکت برای نوسانگر هماهنگ یک بعدی نیز، موثر است. دقت تعیین جرم به طور خطی با بار افزایش می‌یابد؛ بنابراین اجازه دهید تا فرض کنیم که می‌توانیم از اتم‌های عدد اتمی ۸۲، با شرط کاملاً صلب و یونیزه بودن استفاده کرد.

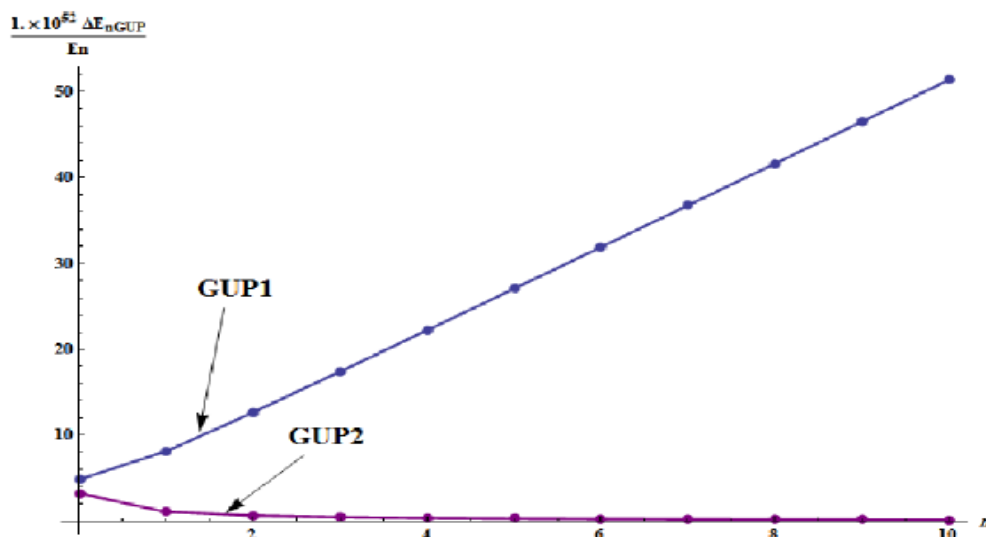
یک میدان مغناطیسی در تله‌ی پنینگ با قدرت $B=10T$ در نظر می‌گیریم. فرکانس سیکلوترون

است، $\omega_c = \frac{qB}{m}$ با قرار دادن مقدار $m\omega_c \approx 82 \cdot e$ در معادله‌ی (۱-۸۸) و (۱-۸۹)، نتایج نوشته شده در

جدول (۱-۱) حاصل می‌شود. در این جدول نتایج به ازای n های مختلف بررسی شده است.

جدول ۱-۱: رابطه‌ی GUP با انرژی نوسانگر هماهنگ

N	$\frac{\Delta E_{n(GUP1)}}{E_n}$	$\frac{\Delta E_{n(GUP2)}}{E_n}$
۰	$4.9 \times 10^{-52} \beta_- - 3.6 \times 10^{-103} \beta_+^2$	$3.2 \times 10^{-52} \beta_- - 2.7 \times 10^{-102} \beta_+^2$
۲	$1.3 \times 10^{-51} \beta_- - 2.3 \times 10^{-102} \beta_+^2$	$6.5 \times 10^{-52} \beta_- - 1.6 \times 10^{-101} \beta_+^2$
۵	$2.7 \times 10^{-51} \beta_- - 9.9 \times 10^{-102} \beta_+^2$	$3.0 \times 10^{-52} \beta_- - 7.1 \times 10^{-101} \beta_+^2$
۱۰	$5.1 \times 10^{-51} \beta_- - 3.5 \times 10^{-101} \beta_+^2$	$1.5 \times 10^{-52} \beta_- - 2.5 \times 10^{-100} \beta_+^2$
۱۰۰	$4.9 \times 10^{-50} \beta_- - 3.2 \times 10^{-99} \beta_+^2$	$1.6 \times 10^{-52} \beta_- - 2.3 \times 10^{-98} \beta_+^2$



شکل ۹-۱: محاسبه‌ی تغییرات نسبی انرژی بر حسب n ناشی از $GUP(1)$ و $GUP(2)$ [۹]

در شکل ۹-۱ معادلات (۸۷-۱) و (۸۸-۱) بر حسب توابعی از n رسم شده است. واضح است که بین تخمین $GUP1$ و $GUP2$ تفاوت وجود دارد.

۸-۱- تراز لاندائو^۱

ذره‌ای با جرم m و بار e را در میدان مغناطیسی ثابت $\vec{B} = B\hat{z}$ و با پتانسیل برداری $\vec{A} = Bx\hat{y}$ در نظر می‌گیریم [۱۰].

از تبدیل پیمانه‌ای داریم

$$\Pi \rightarrow (p - e\vec{A}), \quad (90-1)$$

با جایگذاری در هامیلتونی ذره‌ی آزاد خواهیم داشت

^۱ The Landau Level

$$\begin{aligned}
H_{\cdot} &= \frac{\Pi^{\cdot}}{\imath m} = \frac{\imath}{\imath m} [(p - e\vec{A}) \cdot (p - e\vec{A})] \\
&= \frac{\imath}{\imath m} ((p_{\cdot x} \hat{x})^{\cdot} + (p_{\cdot y} \hat{y})^{\cdot} - eBx\hat{y}) \cdot (p_{\cdot x} \hat{x})^{\cdot} + (p_{\cdot y} \hat{y})^{\cdot} - eBx\hat{y}) \\
&= \frac{(p_{\cdot x})^{\cdot}}{\imath m} + \frac{(p_{\cdot y})^{\cdot}}{\imath m} + \frac{e^{\cdot} B^{\cdot} x^{\cdot}}{\imath m} - \frac{eBxp_{\cdot y}}{m},
\end{aligned} \tag{۹۱-۱}$$

می‌دانیم هامیلتونی را که روی $p_{\cdot y}$ اثر دهیم به ما ویژه مقدار $\hbar k$ رامی‌دهد. با جایگذاری در معادله‌ی بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{(p_{\cdot x})^{\cdot}}{\imath m} + \frac{\hbar^{\cdot} k^{\cdot}}{\imath m} + \frac{e^{\cdot} B^{\cdot} x^{\cdot}}{\imath m} - \frac{eB\hbar k}{m} \\
w = \frac{eB}{m} \Rightarrow H_{\cdot} &= \frac{(p_{\cdot x})^{\cdot}}{\imath m} + \frac{\hbar^{\cdot} k^{\cdot}}{\imath m} + \frac{mw^{\cdot} x^{\cdot}}{\imath} - w\hbar k \\
&= \frac{(p_{\cdot x})^{\cdot}}{\imath m} + \frac{mw^{\cdot}}{\imath} \left(x^{\cdot} + \frac{\hbar^{\cdot} k^{\cdot}}{m^{\cdot} w^{\cdot}} - \frac{x\hbar k}{mw} \right) = \frac{(p_{\cdot x})^{\cdot}}{\imath m} + \frac{mw^{\cdot}}{\imath} \left(x^{\cdot} + \frac{\hbar^{\cdot} k^{\cdot}}{m^{\cdot} w^{\cdot}} - \frac{\imath x\hbar k}{mw} \right) \\
\Rightarrow H_{\cdot} &= \frac{(p_{\cdot x})^{\cdot}}{\imath m} + \frac{mw^{\cdot}}{\imath} \left(x^{\cdot} - \frac{\hbar k}{mw} \right)^{\cdot},
\end{aligned} \tag{۹۲-۱}$$

به طور مشابه برای هامیلتونی ذره‌ی آزاد در حضور طول کمینه داریم

$$H = \frac{(P)^{\cdot}}{\imath m} = H_{\cdot} + \frac{\beta}{m} p^{\cdot}, \tag{۹۳-۱}$$

با اعمال تکانه‌ی ناشی از تبدیل پیمانه‌ای خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
\frac{(p - e\vec{A})^{\cdot}}{\imath m} + \frac{\imath \beta m}{m^{\cdot}} (p - e\vec{A})^{\cdot} &= H_{\cdot} + \imath \beta m (p - e\vec{A})^{\cdot} = H_{\cdot} + \imath \beta m H_{\cdot}^{\cdot} \\
\Delta E_{n(GUP)} &= \langle \phi_n | H_{\cdot} | \phi_n \rangle + \langle \phi_n | \imath \beta m H_{\cdot}^{\cdot} | \phi_n \rangle - \langle \phi_n | H_{\cdot} | \phi_n \rangle = \imath \beta m \langle \phi_n | H_{\cdot}^{\cdot} | \phi_n \rangle \\
\Delta E_{n(GUP)} &= \imath \beta m \left(n + \frac{\imath}{\imath} \right)^{\cdot} (\hbar w)^{\cdot},
\end{aligned} \tag{۹۴-۱}$$

با تقسیم انرژی تعمیم‌یافته بر انرژی حالت پایه در مکانیک کوانتوم معمول خواهیم داشت

$$\frac{\Delta E_{n(GUP)}}{E_n} = \frac{\epsilon \beta m (n + \frac{1}{\epsilon})^2 (\hbar \omega)^2}{(n + \frac{1}{\epsilon}) (\hbar \omega)} = \epsilon \beta m (n + \frac{1}{\epsilon}) (\hbar \omega), \quad (95-1)$$

با جایگذاری کمیت β به این مقدار خواهیم رسید

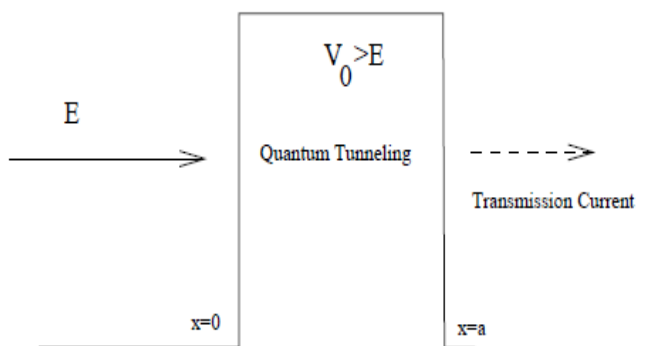
$$\frac{\Delta E_{n(GUP)}}{E_n} = \frac{\epsilon \beta}{M_{pl} c^2} \hbar \omega \frac{m}{M_{pl}} \approx 2.30 \times 10^{-54}, \quad (96-1)$$

$\beta < 10^{-50}$ این مقدار کم تر از مجموعه ای است که بوسیله ی الکترو ضعیف^۱ قابل اندازه گیری باشد و قابل مقایسه با جابجایی انرژی لمب می باشد.

۹-۱- سد پتانسیل

اگر یک پتانسیل پله گونه به صورت زیر تعریف کنیم [۱۰]

$$V(x) = V_0 [\theta(x) - \theta(x-a)], \quad (97-1)$$



شکل ۱-۱۰: سد پتانسیل

^۱ Electro weak

در شکل ۱۰-۱ سد پتانسیل نشان داده شده است.

برای ناحیه‌ی اول و سوم $V(x)=0$ هامیلتونی به صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$H = \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \psi(x) + \frac{\beta}{m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x) = E\psi(x)$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{\beta}{m} \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = E\psi(x), \quad (98-1)$$

با جایگذاری مقدار β به صورت $\beta = \frac{\beta}{M_{pl}c^2} = \frac{l_{pl}^2}{2\hbar^2}$ رابطه‌ی (۹۸-۱) را بازنویسی می‌کنیم

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{l_{pl}^2}{2m\hbar^2} \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) = E\psi(x) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) - l_{pl}^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0, \end{cases} \quad (99-1)$$

که در اینجا

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}, \quad (100-1)$$

همین‌طور برای ناحیه‌ی دوم داریم

$$\begin{cases} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_r(x) + \frac{\beta}{m} \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_r(x) + V(x)\psi_r(x) = E\psi_r(x) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_r(x) - l_{pl}^2 \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_r(x) + k_1^2 \psi_r(x) = 0, \end{cases} \quad (101-1)$$

که در اینجا

$$k_1^2 = \frac{2m(E - V(x))}{\hbar^2}, \quad (102-1)$$

با توجه به معادلات بالا، تابع موج برای ناحیه‌ی ۱، ۲ و ۳ به ترتیب تعریف می‌شود

$$\begin{cases} \psi_1 = Ae^{ik'x} + Be^{-ik'x} + Ae^{\frac{x}{l_{pl}}} \\ \psi_2 = Fe^{-k'_1x} + Ge^{-k'_1x} + He^{\frac{x}{l_{pl}}} + Le^{\frac{x}{l_{pl}}} \\ \psi_3 = Ce^{-k'x} + De^{\frac{x}{l_{pl}}}, \\ k' \equiv k(1 - \beta\hbar^\gamma k^\gamma) \quad k'_1 \equiv k_1(1 - \beta\hbar^\gamma k_1^\gamma), \end{cases} \quad (1-103)$$

۱-۱۰- نتیجه گیری

در این فصل مشاهده شد که در حضور طول کمینه هامیلتونی سیستم تغییر می‌یابد هنگامی که هامیلتونی به هامیلتونی جدیدی تبدیل شود به مراتب خصوصیات سیستم نیز تغییر می‌کند. جمله‌های اضافه شده به هامیلتونی حالت پایه مانند هامیلتونی اختلال عمل می‌کنند و می‌توانیم مراتب تقریب آن‌ها را بدست بیاوریم. تراز لانداو از اثرات طول کمینه بر سیستم است. گفتنی است به ازای صفر شدن پارامتر تغییر شکل ناشی از طول کمینه، روابط به مکانیک کوانتوم معمولی بازمی‌گردد و اثر اختلال نیز از بین می‌رود.

فصل دوم

روابط عدم قطعیت تعمیم یافته در چند بعد

۲- روابط عدم قطعیت تعمیم یافته در چند بعد

۲-۱- نوسانگر هماهنگ تعمیم یافته در سه بعد

در این فصل، هدف آن است که روابط عدم قطعیت تعمیم یافته را به بیش از یک بعد تعمیم دهیم، با توجه به اهمیت نوسانگر هماهنگ در فیزیک هدف اصلی از این بخش مطالعه‌ی نوسانگر هماهنگ نسبیتی و غیر نسبیتی در حضور اثر گرانشی است.

۲-۱-۱- مطالعه‌ی نوسانگر هماهنگ غیر نسبیتی

در ابتدا باز هم هامیلتونی سیستم را در حضور طول کمینه و در فضای تکانه می نویسیم [۱۲].

$$\left(\frac{P^r}{2\mu} + V(r) \right) \psi(\vec{p}) = E \psi(\vec{p}), \quad (1-2)$$

اگر که بخواهیم هامیلتونی را در مختصات سه بعدی بررسی کنیم باید پتانسیل را اینگونه معرفی کنیم

$$V(r) = \frac{1}{r} \mu \omega^r (\hat{x}^r + \hat{y}^r + \hat{z}^r), \quad (2-2)$$

که در نهایت هامیلتونی به این فرم نوشته خواهد شد

$$\left(\frac{P_x^r + P_y^r + P_z^r}{2\mu} + \frac{1}{r} \mu \omega^r (\hat{x}^r + \hat{y}^r + \hat{z}^r) \right) \psi(p, \theta, \phi) = E_{nlm} \psi(p, \theta, \phi). \quad (3-2)$$

از رابطه‌ی عدم قطعیت تعمیم یافته خواهیم داشت [۱۳]

$$\hat{x}_i = i(1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad \hat{p}_i = p_i \quad (4-2)$$

با در نظر گرفتن بردار p در فضای کروی، برای مولفه‌های اندازه حرکت می توان نوشت

$$p_x = p \sin \theta \cos \varphi, \quad (5-2)$$

$$p_y = p \sin \theta \sin \varphi, \quad (6-2)$$

$$p_z = p \cos \theta, \quad (7-2)$$

و در معادله (۳-۲) قرار می‌دهیم

$$\left(\frac{P^r}{r\mu} + \frac{1}{r} \mu \omega^r [(i(1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p_x})(i(1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p_x}) + (i(1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p_y})(i(1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p_y}) + (i(1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p_z})(i(1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p_z})] \right) \psi(p, \theta, \varphi) = E_{nlm} \psi(p, \theta, \varphi). \quad (۸-۲)$$

با در نظر گرفتن روابط زیر

$$\frac{\partial}{\partial p_x} = \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{p} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\sin \varphi}{p \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (۹-۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_y} = \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{p} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{p \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (۱۰-۲)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sin \theta}{p} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (۱۱-۲)$$

و جایگذاری در معادله‌ی (۸-۲) می‌توان نوشت

$$\left(\frac{P^r}{r\mu} - \frac{1}{r} \mu \omega^r (1 + \beta p^r)^r \frac{\partial^r}{\partial p^r} - \beta \mu \omega^r p (1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{p} \mu \omega^r (1 + \beta p^r)^r \frac{\partial}{\partial p} - \frac{1}{rp^r} \mu \omega^r (1 + \beta p^r)^r \frac{\partial^r}{\partial \theta^r} - \frac{1}{rp^r} \mu \omega^r (1 + \beta p^r)^r \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{rp^r \sin^r \theta} \mu \omega^r (1 + \beta p^r)^r \frac{\partial^r}{\partial \varphi^r} - E_{nlm} \right) \psi(P, \theta, \varphi) = 0, \quad (۱۲-۲)$$

یا

$$\left(\frac{P^r}{r\mu} - \frac{1}{r} \mu \omega^r (1 + \beta p^r)^r \nabla_{(p, \theta, \varphi)}^r - \beta \mu \omega^r p (1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p} - E_{nlm} \right) \psi(p, \theta, \varphi) = 0. \quad (۱۳-۲)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها و معرفی تابع موج به صورت

$$\psi(p, \theta, \varphi) = Q(p)\Theta(\theta)\Phi(\varphi), \quad (14-2)$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p}{\mu} - \frac{1}{2} \mu \omega^2 (1 + \beta p^2) \right) \frac{1}{Q(p)} \frac{dQ(p)}{dp} - \mu \omega^2 \beta p (1 + \beta p^2) \frac{1}{Q(p)} \frac{dQ(p)}{dp} \\ & - \mu \omega^2 (1 + \beta p^2) \frac{1}{p Q(p)} \frac{dQ(p)}{dp} - \mu \omega^2 (1 + \beta p^2) \frac{1}{p^2 \Theta(\theta)} \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} \\ & - \mu \omega^2 (1 + \beta p^2) \cot \theta \frac{1}{p^2 \Theta(\theta)} \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} - \mu \omega^2 (1 + \beta p^2) \frac{1}{p^2 \sin^2 \theta \Phi(\varphi)} \frac{d\Phi(\varphi)}{d\varphi} \\ & - E_{nlm} = 0. \end{aligned} \quad (15-2)$$

در اینجا $\frac{1}{\Phi} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = -m^2$ ، از طرفی به ترتیب هر دو قسمت زاویه‌ای و شعاعی را برابر با $-l(l+1)$ قرار می‌دهیم و خواهیم داشت.

$$\frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d^2 \Theta(\theta)}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{1}{\Theta(\theta)} \frac{d\Theta(\theta)}{d\theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -l(l+1), \quad (16-2)$$

9

$$\begin{aligned} & -p^2 \frac{1}{Q(p)} \frac{d^2 Q(p)}{dp^2} - 2p \frac{1}{Q(p)} \frac{dQ(p)}{dp} - \frac{2\beta p^2}{(1 + \beta p^2)} \frac{1}{Q(p)} \frac{dQ(p)}{dp} \\ & - \frac{2E_{nlm} p^2}{\mu \omega^2 (1 + \beta p^2)} + \frac{p^2}{\mu^2 \omega^2 (1 + \beta p^2)} = -l(l+1), \end{aligned} \quad (17-2)$$

با تغییر متغیر $p^2 = s$ معادله به شکل زیر بازنویسی می‌شود

$$\frac{d^2 Q(s)}{ds^2} + \frac{2 + 5\beta s}{2s(1 + \beta s)} \frac{dQ(s)}{ds} + \left(\frac{-\mu^2 \omega^2 \eta(1 + \beta s) - s^2 + 2\mu E_{nlm} s}{4\mu^2 \omega^2 s^2 (1 + \beta s)} \right) Q(s) = 0, \quad (18-2)$$

که در اینجا $\eta = \ell(\ell+1)$ در نظر گرفته شده است.

۲-۱-۲- حل معادله شروینگر تعمیم یافته به روش ${}^1N-U$

معادله‌ی فوق با تغییر متغیر، قابل تبدیل به معادله‌ی فوق هندسی^۲ است. با روش ساده اما موفق و دقیق NU معادله‌ی (۲-۱۸) به راحتی قابل حل می‌باشد [۱۴-۱۵]. پارامترهای مورد نیاز به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{3}{4}, \alpha_2 = -\frac{5}{4}\beta, \alpha_3 = -\beta, \\ \xi_1 &= \frac{1+\beta^2\mu^2\omega^2\eta}{4\mu^2\omega^2}, \xi_2 = \frac{E}{2\mu\omega^2} - \frac{\eta\beta}{2}, \xi_3 = \frac{\eta}{4}, \\ \alpha_4 &= -\frac{1}{4}, \alpha_5 = -\frac{\beta}{4}, \\ \alpha_6 &= \frac{\beta^2}{16} + \frac{1+\beta^2\eta\mu^2\omega^2}{4\mu^2\omega^2}, \alpha_7 = \frac{\beta}{8} + \frac{\eta\beta}{2} - \frac{E}{2\mu\omega^2}, \\ \alpha_8 &= \frac{1}{16} + \frac{\eta}{4}, \alpha_9 = \frac{E\beta}{2\mu\omega^2} + \frac{1}{4\mu^2\omega^2}, \\ \alpha_{10} &= 1 + 2\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\eta}{4}}, \\ \alpha_{11} &= -2\beta + 2\left(\sqrt{\frac{E\beta}{2\mu\omega^2} + \frac{1}{4\mu^2\omega^2}} - \beta\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\eta}{4}}\right), \\ \alpha_{12} &= -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\eta}{4}}, \\ \alpha_{13} &= \frac{-\beta}{4} - \left(\sqrt{\frac{E\beta}{2\mu\omega^2} + \frac{1}{4\mu^2\omega^2}}\right) + \beta\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\eta}{4}}.\end{aligned}\quad (19-2)$$

با استفاده از پارامترهای بدست آمده معادله‌ی انرژی به شکل معادله‌ی زیر بدست می‌آید

$$\begin{aligned}-\frac{5}{4}\beta n + (2n+1)\frac{\beta}{4} + (2n+1)\left(\sqrt{\frac{E\beta}{2\mu\omega^2} + \frac{1}{4\mu^2\omega^2}} - \beta\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\eta}{4}}\right) - \beta n(n-1) \\ + \left(\frac{-\beta}{8} + \frac{\eta\beta}{2} - \frac{E}{2\mu\omega^2}\right) - \beta\left(\frac{1}{8} + \frac{\eta}{2}\right) + 2\sqrt{\left(\frac{1}{16} + \frac{\eta}{4}\right)\left(\frac{E\beta}{2\mu\omega^2} + \frac{1}{4\mu^2\omega^2}\right)} = 0.\end{aligned}\quad (20-2)$$

^۱ The Nikiforov-Uvarov method

^۲ Hyper geometric

با بررسی معادله‌ی اخیر، به ازای $\beta \rightarrow 0$ رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$E_{nlm} = \omega(2n+1) + 2\omega \left(\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\eta}{4}} \right) = \omega(2n+1 + \frac{3}{2}), \quad (21-2)$$

ملاحظه می‌شود که رابطه (21-2) به رابطه‌ی انرژی نوسانگر هماهنگ سه بعدی در مکانیک کوانتوم معمولی بازگشت.

و به تبع، تابع موج در فضای تکانه نیز به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$Q(p) = p^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \eta}\right)} (1 + \beta p^2)^{-\left(\sqrt{\frac{E}{2\mu\beta\omega^2} + \frac{1}{4\beta^2\mu^2\omega^2}}\right)} P_n^{\left(\sqrt{\frac{1}{4} + \eta}, -\sqrt{\frac{2E}{\mu\beta\omega^2} + \frac{1}{\beta^2\mu^2\omega^2}}\right)} (1 + 2\beta p^2). \quad (22-2)$$

2-2- مطالعه‌ی نوسانگر هماهنگ نسبیتی

در این بخش معادله‌ی نسبیتی کلاین گوردون^۱ را انتخاب کرده‌ایم، ابتدا به اختصار با این معادله آشنا می‌شویم: معادله‌ی کلاین گوردن به افتخار دو فیزیکدان به نام‌های اسکار کلاین^۲ و والتر گوردن^۳ در سال ۱۹۲۶ نام‌گذاری شد. معادله کلاین گوردن مدل نسبیتی از معادله‌ی شرودینگر است که قادر به توصیف رفتار نسبیتی الکترون می‌باشد [۱۶-۱۷]؛ البته این معادله ذرات با اسپین صفر را نیز شامل می‌شود. یکی از مزایای مهم این معادله، این است که هر راه حلی از معادله‌ی دیراک به طور اتوماتیک راه حلی از معادله‌ی کلاین گوردن است، ولی برعکس آن صادق نیست. در این بخش می‌خواهیم به بررسی معادله‌ی کلاین گوردن در حضور طول کمینه بپردازیم.

^۱ Klein Gordon equation

^۲ Oskar Klein

^۳ Walter Gordon

۲-۲-۱- معادله‌ی کلاین گوردن سه بعدی با حضور طول کمینه در فضای مومنتوم

ابتدا معادله‌ی کلاین گوردن را می‌نویسیم

$$(p^\gamma + (mc^\gamma + S(r))^\gamma \psi(x) = (E - V(x))^\gamma \psi(x), \quad (2-23)$$

هدف ما حل معادله‌ی کلاین گوردن در فضای سه بعدی است. بنابراین می‌نویسیم

$$[c^\gamma p^\gamma + m^\gamma c^\gamma + \gamma V.(mc^\gamma + E_{nlm})(\hat{x}^\gamma + \hat{y}^\gamma + \hat{z}^\gamma) - E_{nlm}^\gamma] \psi = 0, \quad (2-24)$$

با قرار دادن تکانه‌ی تعمیم‌یافته

$$x_i = i(1 + \beta p_i^\gamma) \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad (2-25)$$

معادله‌ی (۲-۲۴) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} & \left[-\gamma V.(mc^\gamma + E_{nlm}) \left((1 + \beta p^\gamma)^\gamma \frac{\partial^\gamma}{\partial p^\gamma} + (1 + \beta p^\gamma)^\gamma \frac{\gamma}{p} \frac{\partial}{\partial p} + \gamma \beta p (1 + \beta p^\gamma) \frac{\partial}{\partial p} \right. \right. \\ & \left. \left. + (1 + \beta p^\gamma)^\gamma \frac{\partial^\gamma}{\partial \theta^\gamma} + (1 + \beta p^\gamma)^\gamma \frac{1}{p^\gamma} \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + (1 + \beta p^\gamma)^\gamma \frac{1}{p^\gamma \sin^\gamma \theta} \frac{\partial^\gamma}{\partial \phi^\gamma} \right) \right. \\ & \left. + c^\gamma p^\gamma + m^\gamma c^\gamma - E_{nlm}^\gamma \right] \psi = 0. \end{aligned} \quad (2-26)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها [۱۲] و تغییرمتغیر $p^\gamma = s$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & \frac{d^\gamma \rho(s)}{ds^\gamma} + \frac{\gamma + \Delta \beta s}{\gamma s(1 + \beta s)} \frac{d\rho(s)}{ds} \\ & + \left(\frac{-c^\gamma s^\gamma + E_{nlm}^\gamma s - m^\gamma c^\gamma s - \gamma \eta V.(\mu c^\gamma + E_{nlm})(1 + \beta s)^\gamma}{\gamma V.(\mu c^\gamma + E_{nlm}) s^\gamma (1 + \beta s)^\gamma} \right) \rho(s) = 0, \end{aligned} \quad (2-27)$$

که در اینجا به فرم توابع فوق هندسی رسیده‌ایم، اجازه دهید که بر روی محاسبه‌ی انرژی تمرکز داشته

باشیم. با توجه به شکل معادله‌ی بدست آمده، از رابطه‌ی پرکاربرد N-U برای محاسبه‌ی انرژی استفاده خواهیم کرد، پس برای معادله‌ی انرژی می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
 & -\beta n + \frac{\beta}{4} + (2n+1) \left(\sqrt{\frac{\beta^2 \eta}{4} + \frac{\beta}{\lambda} \frac{E_{nlm}^2 - m^2 c^4 - \hbar \eta V \beta (\mu c^2 + E_{nlm})}{V (\mu c^2 + E_{nlm})}} + \frac{c^2 + \hbar \eta V \beta (\mu c^2 + E_{nlm})}{\lambda V (\mu c^2 + E_{nlm})} \right) \\
 & - (2n+1) \left(\beta \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{\eta}{4}} - \beta n^2 - \frac{E_{nlm}^2 - \mu^2 c^4 - \hbar \eta V (\mu c^2 + E_{nlm})}{\lambda V (\mu c^2 + E_{nlm})} - \frac{\eta \beta}{4} \right. \\
 & \left. + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \eta \right) \left(\beta^2 \eta + \frac{\beta}{2} \frac{E_{nlm}^2 - \mu^2 c^4 - \hbar \eta V \beta (\mu c^2 + E_{nlm})}{V (\mu c^2 + E_{nlm})} + \frac{c^2 + \hbar \eta V \beta (\mu c^2 + E_{nlm})}{2V (\mu c^2 + E_{nlm})} \right)} \right) = 0. \quad (28-2)
 \end{aligned}$$

رابطه‌ی اخیر در حالت حدی مکانیک کوانتومی معمول برقرار است.

$$(2n+1) \left(\sqrt{\frac{c^2}{\lambda V (\mu c^2 + E_{nlm})}} - \frac{E_{nlm}^2 - \mu^2 c^4}{\lambda V (\mu c^2 + E_{nlm})} + \sqrt{\left(\frac{1}{4} + \eta \right) \left(\frac{c^2}{2V (\mu c^2 + E_{nlm})} \right)} \right) = 0, \quad (29-2)$$

با جایگذاری مقادیر بدست آمده، تابع موج نیز نوشته خواهد شد

$$\rho(p) = p^{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \eta}} (1 + \beta p^2)^{-\frac{1}{2} \tilde{\lambda}} P_n^{(\sqrt{\frac{1}{4} + \eta}, \frac{1}{2} - \frac{\tilde{\lambda}}{\beta})} (1 + 2\beta p^2), \quad (30-2)$$

که در اینجا

$$\tilde{\lambda} = \sqrt{\frac{\beta^2 \eta}{4} + \frac{\beta}{\lambda} \frac{E_{nlm}^2 - \mu^2 c^4 - \hbar \eta V \beta (\mu c^2 + E_{nlm})}{V (\mu c^2 + E_{nlm})}} + \frac{c^2 + \hbar \eta V \beta (\mu c^2 + E_{nlm})}{\lambda V (\mu c^2 + E_{nlm})}. \quad (31-2)$$

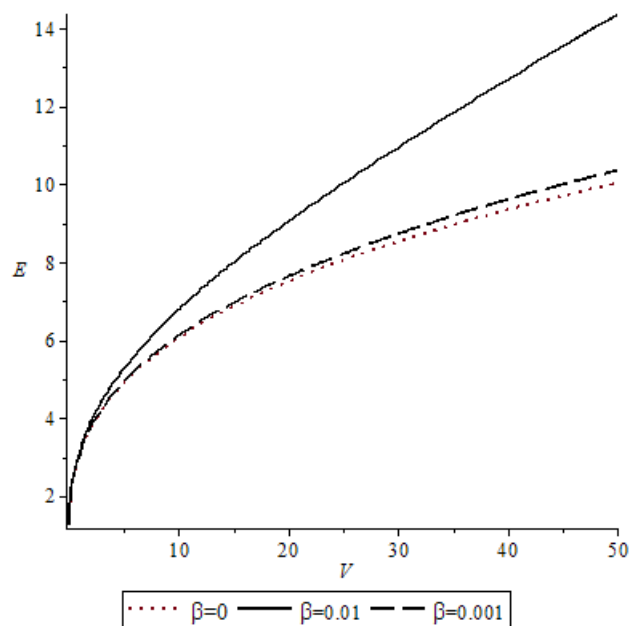
تعریف خواهد شد.

در جدول ۱-۲ انرژی نوسانگر تعمیم‌یافته‌ی نسبیتی بر حسب مقادیر متفاوت اعداد کوانتومی n, l و در

نظر گرفتن $\beta = 0.001$ بررسی شده است.

جدول ۱-۲: طیف انرژی به ازای هر مقدار دلخواه n, l

$ n, l\rangle$	$E_{n,l}$
$ 0, 0\rangle$	۳.۱۰۳۴۳۳۴۴۹
$ 0, 1\rangle$	۴.۱۳۹۹۸۶۵۲۷
$ 1, 0\rangle$	۵.۰۵۲۸۳۰۶۲۵
	۵.۰۶۱۹۴۹۳۶۵
$ 0, 2\rangle$	
$ 1, 1\rangle$	۵.۸۹۵۹۸۸۳۴۸
$ 2, 0\rangle$	۶.۶۷۸۹۰۹۵۴۳



شکل ۱-۲: رسم نمودار انرژی بر حسب پتانسیل در حالت پایه

در شکل ۱-۲ نمودار رفتار انرژی بر حسب V برای حالت پایه در بازه $0 \leq V \leq 50$ و مقادیر متفاوت ثابت طول کمینه β رسم شده است. شکل نشان می‌دهد که با افزایش انرژی پتانسیل نیز افزایش می‌یابد.

۲-۲-۲- اثر طول کمینه در بررسی ذرات نسبیتی در میدان مغناطیسی

در این بخش اثر گرانش کوانتومی بر ذرات نسبیتی را با معادله‌ی نسبیتی کلاین گوردن بررسی کرده‌ایم. روابط با استفاده از تبدیل فوریه در فضای تکانه محاسبه شده است. با در نظر گرفتن پتانسیل اسکالر نوسانی در حضور میدان مغناطیسی، معادله‌ی کلاین گوردن نسبیتی در مکانیک کوانتومی تعمیم داده، بدست آمده است [۱۸].

ابتدا معادله‌ی کلاین گوردن طول کمینه را می‌نویسیم جایی که $\psi(\vec{r}) \rightarrow \psi(\vec{p})$.

$$[c^\dagger p^\dagger + (mc^\dagger + S(x))^\dagger] \psi(p) = [E - V(x)]^\dagger \psi(p). \quad (2-32)$$

در اینجا p تکانه‌ی ناشی از طول کمینه است.

می‌خواهیم روابط را در شرایطی بررسی کنیم که در آن پتانسیل اسکالر و برداری برابرند. به همین منظور تعریف می‌کنیم

$$S(x) = V(x) = \mu \hat{x}. \quad (2-33)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۲-۳۳)، معادله‌ی (۲-۳۲) به فرم زیر بازنویسی می‌شود.

$$[c^\dagger p^\dagger + \mu(mc^\dagger + E)\hat{x}^\dagger + m^\dagger c^\dagger - E^\dagger] \psi(p) = 0. \quad (2-34)$$

اثر میدان مغناطیسی بر این معادله بررسی شده است، باید به این نکته توجه کرد که روابط رادر مختصات

قطبی در نظر می گیریم. [۱۲]

با استفاده از روابط زیر

$$\hat{x} = i\hbar(1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p_x}. \quad (35-2)$$

$$\hat{y} = i\hbar(1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p_y}. \quad (36-2)$$

با توجه به توضیحات داده شده معادله ی (۳۴-۲) به فرم زیر بازنویسی می شود.

$$[c^r \left(\left(p_x - e \frac{A_x}{c} \right) \hat{i} + \left(p_y - e \frac{A_y}{c} \right) \hat{j} \right) + \gamma \mu (mc^r + E) \left(\left(i\hbar(1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p_x} \right)^r + \left(i\hbar(1 + \beta p^r) \frac{\partial}{\partial p_y} \right)^r \right) + m^r c^r - E^r] \psi(p) = 0. \quad (37-2)$$

در اینجا $\vec{A} = \left(-\frac{B\hat{y}}{2}, -\frac{B\hat{x}}{2}, 0 \right)$ و میدان مغناطیسی $\vec{B} = B\hat{z}$ در نظر گرفته شده است [۱۳].

با انتخاب $p_x = p \cos \theta$, $p_y = p \sin \theta$ ملاحظه می شود که

$$\frac{\partial}{\partial p_x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\sin \theta}{p} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (38-2)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\cos \theta}{p} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (39-2)$$

تا کنون تمامی روابط مورد نیاز را معرفی کرده ایم، با جایگذاری و معرفی تابع موج به

صورت $\psi(\vec{p}) = \phi(p)e^{i\lambda\theta}$ معادله‌ی (۳۷-۲) به شکل زیر تغییر پیدا خواهد کرد.

$$\begin{aligned} & [c^\gamma p^\gamma - [\frac{e^\gamma B^\gamma}{\epsilon}(\gamma + \beta p^\gamma)^\gamma + \gamma \mu(mc^\gamma + E)(\gamma + \beta p^\gamma)^\gamma] \frac{\partial^\gamma}{\partial p^\gamma} - [\frac{e^\gamma B^\gamma \beta p}{\gamma}(\gamma + \beta p^\gamma) + \frac{e^\gamma B^\gamma}{\epsilon p}(\gamma + \beta p^\gamma)^\gamma \\ & + \epsilon \beta \mu p(mc^\gamma + E)(\gamma + \beta p^\gamma) + \frac{\gamma \mu}{p}(mc^\gamma + E)(\gamma + \beta p^\gamma)^\gamma] \frac{\partial}{\partial p} - \frac{eBc\lambda}{\gamma}(\gamma + \beta p^\gamma) + \frac{e^\gamma B^\gamma}{\epsilon p^\gamma}(\gamma + \beta p^\gamma)^\gamma \\ & + \frac{\gamma \mu \lambda^\gamma}{p^\gamma}(mc^\gamma + E)(\gamma + \beta p^\gamma)^\gamma + m^\gamma c^\gamma - E^\gamma] \phi(p) = 0. \end{aligned} \quad (40-2)$$

با تغییر متغیر $p^\gamma = s$ معادله‌ی فوق به این شکل کاهش می‌یابد.

$$\begin{aligned} & \frac{d^\gamma \phi(s)}{ds^\gamma} + [(\gamma + \beta s)\sigma + \gamma s e^\gamma B^\gamma \beta + e^\gamma B^\gamma (\gamma + \beta s) + \gamma \epsilon \beta \mu s(mc^\gamma + E)] / [\gamma s(\gamma + \beta s)\sigma] \frac{d\phi(s)}{ds} \\ & + [-\epsilon c^\gamma s^\gamma + \gamma eBc\lambda s(\gamma + \beta s) - e^\gamma B^\gamma \lambda^\gamma (\gamma + \beta s)^\gamma - \epsilon m^\gamma c^\gamma s + \epsilon E^\gamma s \\ & - \gamma \mu \lambda^\gamma (mc^\gamma + E)(\gamma + \beta s)^\gamma] / [\epsilon s^\gamma (\gamma + \beta s)^\gamma \sigma] \phi(s) = 0. \end{aligned} \quad (41-2)$$

از معادله‌ی بالا رابطه‌ی انرژی به صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$\begin{aligned} & -n\beta + (\gamma n + \gamma) \left(\sqrt{\mathcal{G}} - \beta \sqrt{\left(\frac{\gamma}{\gamma} - \frac{\gamma}{\epsilon \gamma} \chi \right)^\gamma + \frac{\lambda^\gamma}{\epsilon}} \right) - \beta^\gamma n^\gamma - \frac{\chi \eta}{\lambda \gamma^\gamma} - \frac{\chi \beta}{\gamma \gamma} - \frac{\tau}{\epsilon \gamma} \\ & - \gamma \beta \left(\left(\frac{\gamma}{\gamma} - \frac{\gamma}{\epsilon \gamma} \chi \right)^\gamma + \frac{\lambda^\gamma}{\epsilon} \right) + \left(\sqrt{\mathcal{G} \left(\left(\gamma - \frac{\gamma}{\gamma \gamma} \chi \right)^\gamma + \lambda^\gamma \right)} \right) = 0, \end{aligned} \quad (42-2)$$

که پارامترها نیز اینگونه معرفی شده‌اند:

$$\begin{aligned}
\gamma &= e^\gamma B^\gamma + \lambda \mu (mc^\gamma + E) \\
\chi &= e^\gamma B^\gamma + \gamma^\gamma \\
\eta &= -(\gamma^\gamma B^\gamma e^\gamma \beta + \gamma^\gamma mc^\gamma \mu \beta + \gamma^\gamma E \mu \beta + \beta \gamma) \\
\kappa &= B^\gamma e^\gamma \beta^\gamma \lambda^\gamma + \lambda \mu \beta^\gamma \lambda^\gamma E + \lambda \mu mc^\gamma \lambda^\gamma \\
&\quad - \gamma^\gamma e B \beta c \lambda + \gamma^\gamma c^\gamma \\
\tau &= -\gamma^\gamma B^\gamma e^\gamma \beta^\gamma \lambda^\gamma - \gamma^\gamma mc^\gamma \mu \beta \lambda^\gamma - \gamma^\gamma m^\gamma c^\gamma \\
&\quad - \gamma^\gamma E \mu \beta \lambda^\gamma + \gamma^\gamma B c E \lambda + \gamma^\gamma E^\gamma \\
\vartheta &= (\chi^\gamma \beta^\gamma + \gamma^\gamma \chi \beta^\gamma \gamma + \gamma^\gamma \lambda^\gamma \beta^\gamma \gamma^\gamma + \gamma^\gamma \beta^\gamma \gamma^\gamma + \\
&\quad \gamma^\gamma \chi \eta \beta + \gamma^\gamma \eta \beta \gamma + \gamma^\gamma \tau \beta \gamma + \eta^\gamma + \gamma^\gamma \kappa \gamma) / \gamma^\gamma \gamma^\gamma,
\end{aligned} \tag{۴۳-۲}$$

در نهایت، با استفاده از چند جمله‌های ژاکوبی تابع موج به شکل زیر بدست می‌آید.

$$\phi(p) = p^{\gamma^\gamma \frac{1+\gamma^\gamma}{\gamma^\gamma} + \sqrt{\left(1-\frac{\gamma^\gamma}{\gamma^\gamma}\right)^\gamma + \lambda^\gamma}} (1 + \beta p^\gamma)^{\gamma^\gamma \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) + \frac{\gamma^\gamma}{\gamma^\gamma} \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \frac{\sqrt{g}}{\beta}} P_n^{\sqrt{\left(1-\frac{\gamma^\gamma}{\gamma^\gamma}\right)^\gamma + \lambda^\gamma}, \frac{1}{\gamma^\gamma \beta} (\eta + \chi) + \frac{1}{\beta} - \frac{\gamma^\gamma \sqrt{g}}{\beta} - 1} (1 + \gamma^\gamma \beta p^\gamma), \tag{۴۴-۲}$$

۳-۲- نتیجه گیری

در این فصل اثبات کردیم که طول کمینه به ابعاد بیش‌تری نیز قابل تعمیم است. مکانیک کوانتوم تعمیم یافته قابل استناد به فضاهاى کروی و فوق هندسی می‌باشد و بر تمامی روابط مکانیک کوانتوم معمولی اثر می‌گذارد همان‌طور که باعث تغییر در معادلات غیر نسبیتی و نسبیتی، هامیلتونی و در نتیجه انرژی و تابع موج سیستم شده است. با صفر شدن پارامتر تغییر شکل روابط بدست آمده شرایط مکانیک کوانتوم معمولی را به خود گرفته و معادلات شروینگر و کلاین گوردن تعمیم یافته به معادلات شروینگر و کلاین گوردن معمولی باز می‌گردد.

فصل سوم

مطالعه‌ی اتم، میدروشن در حضور طول کینه

۳- مطالعه‌ی اتم هیدروژن در حضور طول کمینه

هدف این فصل، استفاده از یک رهیافت جدید برای محاسبه‌ی اثر جبر هایزنبرگ بر روی ترازهای انرژی است. در این فصل اتم هیدروژن در حضور اثر گرانشی به دو صورت نسبیتی و غیر نسبیتی مطالعه شده است.

۳-۱- مطالعه‌ی غیر نسبیتی اتم هیدروژن

در بخش اول این فصل، با در نظر گرفتن هامیلتونی اختلال ناشی از طول کمینه، جابجایی لمب^۱ را محاسبه می‌کنیم و در بخش دوم، از ارتباط نوسانگر هماهنگ با محاسبات قبلی استفاده می‌کنیم. پس از آن روابط بدست آمده را برای پیدا کردن طیف اتم هیدروژن و شکافت انرژی در بین ترازها به کار می‌بریم. نهایتاً در خواهیم یافت که با مقایسه با داده‌های تجربی، به یک تراز انرژی جدید در جبر تغییر یافته‌ی هایزنبرگ می‌رسیم. در این بخش تراز حالت پایه‌ی اتم هیدروژن با معادله‌ی غیر نسبیتی شروینگر محاسبه شده است.

۳-۱-۱- هامیلتونی اختلال

شکل‌های متفاوتی برای رابطه‌ی جابجایی مکان و مومنتوم در حضور طول کمینه مورد استفاده قرار گرفته‌است. با در نظر گرفتن

$$[x_i, p_i] = i\hbar(1 + \beta p^2), \quad (3-1)$$

به تبع خواهیم داشت

^۱ Lamb shift

$$x_i = x, \quad (2-3)$$

$$p_i = p(1 + \beta p^\gamma), \quad (3-3)$$

هامیلتونی اینگونه تعریف می‌شود:

$$H = \frac{P^\gamma}{2m}, \quad (4-3)$$

در فصل اول اشاره کردیم که پارامتر تغییر شکل طول کمینه β ، از مرتبه‌ی $1.2 \times 10^{-19} \text{ GeV}$ است از این رو هامیلتونی ناشی از طول کمینه را می‌توان به صورت هامیلتونی اختلال هم، در نظر گرفت. می‌دانیم که در مکانیک کوانتومی هامیلتونی $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ است، پس می‌توان به شکل زیر هامیلتونی اختلال را

نوشت

$$\begin{aligned} H' &= H - H_0 \\ &= \frac{\beta p^\gamma}{m} + O(\beta^\gamma), \end{aligned} \quad (5-3)$$

ملاحظه می‌شود با اعمال طول کمینه یک جمله اختلال در هامیلتونی ظاهر می‌شود. برای اینکه پتانسیل متجانس و از مرتبه‌ی h است می‌توان در ادامه از قضیه ویرال^۱ نیز استفاده کرد، بدین ترتیب مقدار انتظاری پتانسیل با در نظر گرفتن ویژه‌حالت با انرژی E_n اینگونه بدست می‌آید [۶].

$$\langle \psi_n | V(x) | \psi_n \rangle = \frac{h}{h+2} E_n, \quad (6-3)$$

^۱ Virial theorem

با قرار دادن در هامیلتونی داریم

$$\begin{aligned}\Delta E'_n &= \langle H' \rangle = \langle \frac{\beta p^2}{m} \rangle = \hbar m \beta \langle H \rangle = \hbar m \beta \langle (E_n + V(x))^2 \rangle \\ \Rightarrow \langle H' \rangle &= \hbar m \beta \left(\frac{\hbar^2 - \hbar}{\hbar + \hbar} (E_n)^2 + \langle V^2(x) \rangle \right),\end{aligned}\quad (7-3)$$

۳-۱-۲- محاسبه‌ی لمب شیفت با استفاده از هامیلتونی اختلال

ابتدا هامیلتونی را برای اتم هیدروژن می‌نویسیم [۱۱]

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r), \quad (8-3)$$

که پتانسیل برای اتم هیدروژن به صورت زیر تعریف خواهد شد

$$V(r) = -\frac{k}{r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (9-3)$$

می‌دانیم که در اینجا به ترتیب r, e و ϵ_0 بار الکترون، شعاع هسته‌ی اتم هیدروژن و یک مقدار ثابت هستند.

هامیلتونی اولیه به صورت زیر است

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(r), \quad (10-3)$$

می‌توان نوشت

$$2m(H - V(r)) = p^2, \quad (11-3)$$

از طرفی برای هامیلتونی اختلال در حضور طول کمینه داشتیم

$$H_1 = \frac{\beta p^2}{m}, \quad (12-3)$$

با قرار دادن معادله‌ی (۱۱-۳) و (۹-۳) در معادله‌ی (۱۲-۳)، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 H_{\gamma} &= \frac{\beta}{m} \left(\gamma m \left(H_{\gamma} + \frac{k}{r} \right) \right)^{\gamma} \\
 &= \frac{\beta}{m} \left(\gamma m^{\gamma} \left(H_{\gamma}^{\gamma} + H_{\gamma} \frac{k}{r} + \frac{k}{r} H_{\gamma} + \left(\frac{k}{r} \right)^{\gamma} \right) \right) \\
 &= \gamma \beta m \left(H_{\gamma}^{\gamma} + H_{\gamma} \frac{k}{r} + \frac{k}{r} H_{\gamma} + \left(\frac{k}{r} \right)^{\gamma} \right) \quad (13-3)
 \end{aligned}$$

رابطه مرتبه‌ی اول اختلال به صورت زیر است

$$E_{n'\ell'm'|n\ell m} = \langle n'\ell'm' | H_{\gamma} | n\ell m \rangle \quad (14-3)$$

پس می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
 E_{n'\ell'm'|n\ell m} &= \langle n'\ell'm' | \gamma \beta m \left(H_{\gamma}^{\gamma} + H_{\gamma} \frac{k}{r} + \frac{k}{r} H_{\gamma} + \left(\frac{k}{r} \right)^{\gamma} \right) | n\ell m \rangle \\
 &= \gamma \beta m \left(\langle n'\ell'm' | H_{\gamma}^{\gamma} | n\ell m \rangle + k \langle n'\ell'm' | H_{\gamma} \frac{1}{r} | n\ell m \rangle + k \langle n'\ell'm' | \frac{1}{r^{\gamma}} H_{\gamma} | n\ell m \rangle \right. \\
 &\quad \left. + k^{\gamma} \langle n'\ell'm' | H_{\gamma}^{\gamma} | n\ell m \rangle \right). \quad (15-3)
 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن $m = m', \ell = \ell'$ رابطه‌ی ویژه مقداری به صورت زیر نوشته خواهد شد

$$E_{n'\ell'm'|n\ell m} = \gamma \beta m (E_n^{\gamma} \delta_{nn'} + k(E_{n'} + E_n) \langle n'\ell'm' | \frac{1}{r} | n\ell m \rangle + k^{\gamma} \langle n'\ell'm' | \frac{1}{r^{\gamma}} | n\ell m \rangle), \quad (16-3)$$

پس اولین مرتبه‌ی جابجایی در تابع موج حالت پایه، به وسیله‌ی رابطه‌ی زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
 \Delta \psi_{\gamma..}(\vec{r}) &= \psi_{\gamma..}^{(0)}(\vec{r}) - \psi_{\gamma..}(\vec{r}) = \frac{E_{\gamma..,0} \dots}{E_{\gamma} - E_{\gamma}} \psi_{\gamma..}(\vec{r}) \\
 &= \frac{928\sqrt{\gamma} \beta m E_{\gamma}}{81} \psi_{\gamma..}(\vec{r}), \quad (17-3)
 \end{aligned}$$

می‌توانیم جابجایی لمب را برای n امین تراز اتم هیدروژن بنویسیم:

$$\Delta E_n = \frac{4}{3m^2} \alpha^2 \left(\ln \frac{1}{\alpha} \right) |\psi_{n\ell m}(r)|^2, \quad (18-3)$$

و همین‌طور نسبت انرژی‌ها در مکانیک کوانتومی معمول و تعمیم‌یافته به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\frac{\Delta E_n(GUP)}{\Delta E_n} = \frac{2\Delta |\psi_{n\ell m}(\cdot)|^2}{\psi_{n\ell m}(\cdot)}, \quad (19-3)$$

با توجه به رابطه‌ی بوهر^۱ داریم

$$\begin{cases} \psi_{1,0}(\cdot) = a^{\frac{2}{3}} \pi^{-\frac{1}{3}}, \\ \psi_{2,0}(\cdot) = a^{\frac{2}{3}} (\lambda \pi)^{-\frac{1}{3}}, \end{cases} \quad (20-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی بالا در معادله‌ی (۱۹-۳) خواهیم داشت

$$\frac{\Delta E_n(GUP)}{\Delta E_n} = \frac{928m\beta E}{\lambda^2} \approx 10\beta \frac{m}{M_{pl}c^2} \frac{E}{M_{pl}c^2} \approx 0.47 \times 10^{-48\beta} \Delta E. \quad (21-3)$$

این نتیجه در واقع مقایسه‌ای از انرژی اتم هیدروژن در مکانیک کوانتوم معمول و تعمیم یافته است که اگر $\beta = 1$ نشان می‌دهد انرژی در حضور طول کمینه کاهش می‌یابد.

۳-۱-۳- حل معادله شرودینگر برای اتم هیدروژن

اگر جبر هایزنبرگ تغییر شکل یافته را بصورت زیر معرفی می‌کنیم، برای رابطه‌ی جابجایی به ازای

($\hbar = c = 1$) خواهیم داشت [۲۰]

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i(\delta_{ij} + \beta \delta_{ij}^* \hat{P}^* + \beta' \hat{P}_i \hat{P}_j), \quad (22-3)$$

$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0, \quad (23-3)$$

^۱ Boher

که در اینجا $\sum_{i=1}^3 \hat{P}_i \hat{P}_i = \hat{P}_i^2$ و β, β' کمیت‌های کوچکی‌اند و به صورت $\beta = 2\beta'$ در نظر گرفته شده است.

برای پیدا کردن طیف انرژی مربوط به یک پتانسیل بدست‌آمده، باید نمایشی از عملگرهای $\hat{X}_i, \hat{P}_i$ پیدا کنیم که معادلات (۲۲-۳) و (۲۳-۳) را ارضا کند و مطابق آن معادله‌ی شرودینگر را حل کنیم، پس می‌توان نوشت

$$\hat{X}_i \psi(\vec{x}) = x_i \psi(\vec{x}) \quad (24-3)$$

$$\hat{P}_i \psi(\vec{x}) = \hat{p}_i (1 + \beta \vec{p}^2) \psi(\vec{x}) \quad (25-3)$$

با جایگذاری رابطه‌ی ناشی از طول کمینه در معادله‌ی شرودینگر و حذف $O(\beta^2)$ خواهیم داشت

$$\left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + \beta \frac{\vec{p}^4}{m} + V(\vec{x}) \right] \psi(x) = E \psi(x), \quad (26-3)$$

در واقع معادله‌ی بالا، معادله‌ی شرودینگر معمول با یک جمله اضافی از مرتبه‌ی $\vec{p}^4$ است.

با توجه به اینکه β را کوچک فرض کردیم پس می‌توانیم اثر طول کمینه بر انرژی را به عنوان اولین مرتبه‌ی اختلال در نظر بگیریم.

محاسبه‌ی طیف مربوط به اولین مرتبه‌ی پارامتر تغییر شکل β ، به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود.

$$E_k = E_k^0 + \Delta E_k, \quad (27-3)$$

در اینجا k مجموعه‌ای از اعداد کوانتومی، که به تراز انرژی منجر می‌شود را مشخص می‌کند، جایی که ΔE_k ویژه مقدار ماتریس است داریم:

$$\frac{\beta}{m} \langle \psi_k(\vec{x}) | \vec{p}^4 | \psi_k(\vec{x}) \rangle = \frac{\beta}{m} \langle k | \vec{p}^4 | k' \rangle, \quad (28-3)$$

$\psi_k(\vec{x})$ راه‌حل‌های معادله‌ی (۲۸-۳) به ازای $\beta = 0$ خواهد بود. این ماتریس به ازای همه‌ی توابع موج

مطابق با تراز انرژی مختل نشده $E_k^{(0)}$ محاسبه شده است و یک ماتریس $g \times g$ است، در واقع g تبهگنی حالت انرژی $E_k^{(0)}$ محاسبه شده است. به طور کلی برای بر هم کنش قراردادی $V(x)$ در معادله‌ی شرودینگر، این ماتریس یک ماتریس غیر قطری خواهد بود. از طرفی می‌دانیم که اثر $\vec{p}^2$ بر روی تابع موج مختل نشده از معادله‌ی (۲۸-۳) به صورت نمایش ماتریس عناصر بر روی پتانسیل مرکزی نوشته خواهد شد:

$$\Delta E_{n,\ell} = \epsilon \beta m \left((E_{n,\ell'}^{(\cdot)})^\gamma \delta_{n,n'} - (E_{n,\ell}^{(\cdot)} + E_{n,\ell'}^{(\cdot)}) \langle n\ell m | V(r) | n'\ell m \rangle + \langle n\ell m | V^\gamma(r) | n'\ell m \rangle \right) \delta_{\ell,\ell'} \delta_{m,m'}, \quad (29-3)$$

در شرایط مورد مطالعه، هیچ حالت تبهگنی با مقادیر یکسان تکانه‌ی زاویه‌ای ℓ و عدد کوانتوم سمتی m که مقادیر متفاوتی از عدد کوانتومی n داشته باشد، وجود ندارد. با در نظر گرفتن $n = n'$ می‌توان یک ماتریس قطری داشت و طیف انرژی را به صورت زیر نوشت:

$$\Delta E_{n,\ell} = \epsilon \beta m \left((E_{n,\ell'}^{(\cdot)})^\gamma - \gamma E_{n,\ell}^{(\cdot)} \langle n\ell m | V(r) | n'\ell m \rangle + \langle n\ell m | V^\gamma(r) | n'\ell m \rangle \right), \quad (30-3)$$

معادله‌ی بالا را با استفاده از قانون توانی $V(r) \approx r^p$ می‌توان زیباتر نوشت

$$\langle n\ell m | V(r) | n'\ell m \rangle = \frac{\gamma}{p+\gamma} E_{n,\ell}^{(\cdot)}. \quad (31-3)$$

بدین ترتیب برای نمایش جابجایی تراز انرژی در اولین مرتبه β خواهیم داشت.

$$\Delta E_{n,\ell} = \epsilon \beta m \left((E_{n,\ell'}^{(\cdot)})^\gamma \frac{p-\gamma}{p+\gamma} + \langle n\ell m | V^\gamma(r) | n'\ell m \rangle \right), \quad (32-3)$$

رابطه‌ی بدست‌آمده نمایش ساده‌ای است که به ما اجازه می‌دهد ارتباط بین نوسانگر هماهنگ و طیف‌های اتم هیدروژن را محاسبه کنیم.

۳-۱-۴- نوسانگر هماهنگ تعمیم یافته و چند جمله‌ای‌های لاگر

می‌دانیم که تابع موج بهنجار شده برای نوسانگر هماهنگ به صورت زیر نوشته خواهد شد

$$\psi_{n\ell m}(\vec{r}) = \lambda^{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{\gamma n!}{\Gamma(n+\ell+\frac{\gamma}{2})}} (\lambda_r)^\ell e^{-\frac{(\lambda_r)^2}{2}} L_n^{\ell+\frac{1}{2}}((\lambda_r)^\ell) Y_{\ell m}(\theta, \varphi), \quad (3-33)$$

که در اینجا به ترتیب $\lambda = \sqrt{m\omega}$ ، $L_n^\alpha(x)$ چند جمله‌ای‌های لاگر و n عدد کوانتومی شعاعی است. با

استفاده از تغییر متغیر $x = (\lambda r)^2$ مقدار جابجایی انرژی اینگونه بدست می‌آید

$$\Delta E_{n,\ell} = \frac{\gamma \beta m(n!) k^{\frac{\gamma}{2}}}{\lambda^{\frac{\gamma}{2}} \Gamma(n+\ell+\frac{\gamma}{2})} \int_0^\infty x^{\ell+\frac{\gamma}{2}} e^{-x} \left[L_n^{\ell+\frac{1}{2}}(x) \right]^2 dx, \quad (3-34)$$

که $\gamma k = m\omega$ میزان قدرت نیروی نوسانگر را نشان می‌دهد. با توجه به چند جمله‌ای‌های لاگر خواهیم داشت:

$$L_n^{\alpha-1}(x) = L_n^\alpha(x) - L_{n-1}^\alpha(x) \quad (3-35)$$

$$\int_0^\infty e^{-x} x^\alpha L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) dx = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \delta_{nm}, \quad (3-36)$$

نمایش طیف نوسانگر هماهنگ را برای جبر تغییر یافته‌ی هایزنبرگ بصورت زیر بدست می‌آوریم

$$E_{n\ell} = \omega\left(\gamma n + \ell + \frac{\gamma}{2}\right) + (\Delta x)^\gamma \frac{m\omega^\gamma}{5} (\epsilon n^\gamma + \eta n + \phi n\ell + \ell^\gamma + \epsilon\ell + \frac{15}{4}), \quad (3-37)$$

که در اینجا $\Delta x = \sqrt{5\beta}$ است.

با توجه به اینکه انرژی به عدد کوانتومی n وابسته نیست. رابطه‌ی بدست آمده رهیافت سودمندی را نشان

می‌دهد که با محاسبه‌ی ساده‌ای، می‌توان به یک نمایش تحلیلی از جابجایی انرژی دست یافت.

نتیجه‌گیری مهم از این روش این است که به راحتی برای حل مسائل تحلیلی و عددی قابل استفاده است.

۳-۱-۴-۱-۱ کاربرد نتایج در اتم هیدروژن

روشی که در این بخش استفاده شده است ذرات غیر نقطه‌ای را توصیف می‌کند و ساختار داخلی درجه‌ی آزادی را نادیده می‌گیرد. روشن است که این اثرات از مراتب بزرگی بسیار کوچکی‌اند و بنابراین می‌توان آن‌ها را از قلم انداخت.

تابع موج مختل نشده‌ی اتم هیدروژن اینگونه نوشته می‌شود:

$$\psi_{n\ell m}(\vec{r}) = (\gamma_n)^{\frac{\gamma}{2}} \sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{2n(n+\ell)}} (\gamma_n r)^\ell e^{-\gamma_n r} L_{n-\ell-1}^{\gamma}(\gamma_n r) Y_\ell^m(\theta, \varphi), \quad (3-38)$$

در اینجا $\gamma_n = \frac{m\alpha}{n}$ و α ثابت ساختار است. n عدد کوانتومی اصلی و ℓ بین ۰ تا $n-1$ متغیر است.

تغییر متغیر $x = 2\gamma_n r$ به ما اجازه می‌دهد تا جابجایی انرژی را بصورت زیر بنویسیم.

$$\Delta E_{n,\ell} = -\frac{1}{2}\beta m (E_{n,\ell})^\gamma + \frac{1}{2}\beta m \gamma_n^\gamma \alpha^\gamma \frac{(n-\ell-1)!}{n(n+\ell)!} \int_0^\infty x^{\gamma\ell} e^{-x} [L_{n-\ell-1}^{\gamma}(x)]^\gamma dx, \quad (3-39)$$

مانند بخش قبل (نوسانگر هماهنگ) تخمین انتگرال بسیار ساده خواهد بود. به علاوه می‌توان از رابطه‌ی مربوط به چندجمله‌های لاگر نیز استفاده کرد.

$$\sum_{m=0}^n L_m^\alpha(x) = L_n^{\alpha+1}(x). \quad (3-40)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۳-۳۶) و فرمول خلاصه سازی

$$\sum_{p=0}^b \frac{(p+a)!}{p!} = \frac{(a+b+1)!}{(1+a)b!}, \quad (3-41)$$

نمایش طیف هیدروژن در اولین مرتبه‌ی پارامتر β به صورت زیر نوشته خواهد شد.

$$E_{n,\ell} = -\frac{m\alpha^2}{2n^2} + (\Delta x)^2 \frac{m^2 \alpha^2}{5} \frac{(4n - 2(\ell + \frac{1}{2}))}{n^2(\ell + \frac{1}{2})}, \quad (42-3)$$

۳-۱-۵- نتیجه‌گیری

رابطه (۴۲-۳) نشان می‌دهد که تصحیحات بین طیف همیشه مثبت خواهد بود، از طرفی مقدار جمله‌ی اضافه شده (ناشی از GUP) برای حالت پایه و هر مقداری از n بیشینه است، بالاترین مقدار به ازای $\ell = 0$ بدست می‌آید. می‌دانیم که محاسبه‌ی تصحیحات انرژی هنوز هم می‌تواند نقش بسزایی در توصیف نظری اتم هیدروژن بازی کند. دقت اندازه‌گیری تابش نشر شده در گزارد بین $1S - 2S$ در حدود $1KH$ است. پس اختلاف انرژی بین این دو تراز با دقتی در حدود $10^{-12} eV$ اندازه‌گیری خواهد شد. و

$$[\Delta x] \leq 0.01 fm. \quad [21]$$

۳-۲- مطالعه‌ی نسبیتی اتم هیدروژن

در این بخش می‌خواهیم معادله‌ی دیراک تعمیم یافته را با استفاده از جبر تغییر شکل یافته‌ی هایزنبرگ بدست بیاوریم. با معرفی کردن عملگر هامیلتونی جدید، می‌توان جابجایی انرژی حالت پایه‌ی اتم هیدروژن را در اولین مرتبه‌ی پارامتر تغییر شکل مربوط به طول کمینه و با استفاده از نظریه‌ی اختلال بدست آورد. می‌توانیم روابط عملگر مکان و تکانه را در فضای طول کمینه به صورت زیر بنویسیم [۲۲].

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \hat{x} \\ \hat{P} &= (1 - \beta \hbar^2 \nabla^2)(-i\hbar \vec{\nabla}), \end{aligned} \quad (43-3)$$

که در اینجا $\hat{x}$ و $\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ عملگرهای مکان و تکانه در مکانیک کوانتومی معمولی اند. معادله‌ی دیراک در مکانیک کوانتومی معمول اینگونه نگارش می‌شود.

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = [c(\vec{\alpha} \cdot \hat{p}) + \beta mc^\gamma] |\psi\rangle, \quad (44-3)$$

که در اینجا

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (45-3)$$

$\vec{\sigma}$ نیز ماتریس‌های پائولی است.

بنابراین عملگر هامیلتونی انرژی بوسیله‌ی رابطه‌ی

$$\hat{H} = c(\vec{\alpha} \cdot \hat{p}) + \hat{\beta} mc^\gamma, \quad (46-3)$$

بدست می‌آید.

پس برای اعمال طول کمینه عملگرهای $\hat{p}_i$ با $\hat{P}_i$ جابجا می‌کنیم و می‌نویسیم

$$\hat{E} = c(\vec{\alpha} \cdot \hat{P}) + \hat{\beta} mc^\gamma. \quad (47-3)$$

که در اینجا $\hat{H}_{ML}$ به عنوان هامیلتونی جدید معرفی خواهد شد. با استفاده از رابطه‌ی (43-3) در رابطه‌ی

اخیر $\hat{H}_{ML}$ را بازنویسی می‌کنیم.

$$\hat{H}_{ML} = c(\vec{\alpha} \cdot \hat{p}) + \hat{\beta} mc^\gamma + \beta c(\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^\gamma, \quad (48-3)$$

با در نظر گرفتن این معادله می‌توان یک سیستم متجانس از معادلات ϕ, χ بدست آورد

$$\begin{pmatrix} E_{ML} + mc^\gamma & c(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^\gamma + \beta c(\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^\gamma \\ c(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^\gamma + \beta c(\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^\gamma & -E_{ML} - mc^\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (49-3)$$

می‌دانیم که، برای پیدا کردن جواب غیر صفر باید، دترمینان ضرائب باید صفر شود.

$$\begin{vmatrix} E_{ML} + mc^{\gamma} & c(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})(1 + \beta p^{\gamma}) \\ c(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})(1 + \beta p^{\gamma}) & -E_{ML} - mc^{\gamma} \end{vmatrix} = 0, \quad (50-3)$$

پس از کنار گذاشتن مرتبه $O(\beta^{\gamma})$ انرژی نسبیتی الکترون آزاد در حضور طول کمینه به شکل زیر بدست خواهد آمد.

$$E_{ML}^{\gamma} = p^{\gamma} c^{\gamma} + m^{\gamma} c^{\gamma} + \gamma \beta c^{\gamma} p^{\gamma}, \quad (51-3)$$

با توجه به اینکه

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \quad (52-3)$$

می‌توان نوشت

$$(\vec{\alpha} \cdot \hat{p})(\vec{\alpha} \cdot \hat{p}) = p^{\gamma} + i \vec{\alpha} \cdot (\vec{p} \times \vec{p}) = p^{\gamma}, \quad (53-3)$$

باید به این نکته اشاره کرد که عملگر جدید $\hat{p}$ بیش‌تر از این با مولد $-i\vec{\nabla}$ مطابقت نمی‌کند و همین‌طور

عملگر انرژی $\hat{E}_{ML}$ و بیش‌تر از این با مولد انتقال زمان $i\frac{\partial}{\partial t}$ مطابقت نمی‌کند.

این‌ها وابسته‌اند به

$$\hat{E}_{ML} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} (1 + \beta \hbar^{\gamma} \frac{\partial^{\gamma}}{\partial t^{\gamma}}), \quad (54-3)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} = \hat{E}_{ML} (1 - \frac{\beta}{c^{\gamma}} \hat{E}_{ML}^{\gamma}), \quad (55-3)$$

با استفاده از رابطه‌ی (54-3)، $\hat{H}_{ML}$ و $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ معادله‌ی (53-3) به فرم زیر نوشته خواهد شد.

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + i\beta\hbar^{\tau} \frac{\partial^{\tau}}{\partial t^{\tau}} \right) |\psi_{ML}\rangle = \left(-i\hbar c(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) + \beta mc^{\tau} + i\beta\hbar^{\tau} c(\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla})^{\tau} \right) |\psi_{ML}\rangle, \quad (56-3)$$

اگر چه می‌توان معادله‌ی دیراک را برای اولین مرتبه‌ی مشتق زمان بوسیله‌ی استفاده از معادله‌ی (55-3)

و جرم-انرژی به صورت زیر نوشت

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_{ML}\rangle = \left(c(\vec{\alpha} \cdot \hat{P}) + \beta mc^{\tau} \right) \left[1 - \beta(c^{\tau} \hat{P}^{\tau} + m^{\tau} c^{\tau}) \right] |\psi_{ML}\rangle, \quad (57-3)$$

پس انرژی حالت پایه‌ی اتم هیدروژن در حضور طول کمینه و پتانسیل مرکزی معادله (58-3) به صورت

زیر نوشته می‌شود.

$$\hat{H}_{ML} |\psi_{ML}\rangle = \left(c(\vec{\alpha} \cdot \hat{p}) + \beta mc^{\tau} - \frac{\hbar c \alpha}{r} + \beta c(\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^{\tau} \right) |\psi_{ML}\rangle, \quad (58-3)$$

با توجه به آنکه جرم طول کمینه M_{ML} خیلی بیش‌تر از جرم الکترون است . داریم

$$\beta = \frac{c^{\tau}}{M_{ML}^{\tau} c^{\tau}} \rightarrow \beta^{\tau} m^{\tau} c^{\tau} = \frac{m^{\tau}}{M_{ML}^{\tau}} \ll 1, \quad (59-3)$$

پس می‌توانیم جمله چهارم معادله‌ی (59-3) را مانند یک اختلال در نظر بگیریم، ارزیابی انرژی برای اولین

مرتبه‌ی β به رابطه‌ی زیر منجر خواهد شد

$$E_{ML} = E + \beta m^{\tau} c^{\tau} E, \quad (60-3)$$

که در اینجا E انرژی حالت $|\psi\rangle$ از اتم هیدروژن است که در حالت دیراک معمول به کار می‌رود و

E^1 بوسیله‌ی رابطه‌ی

$$E^{\gamma} = \langle \psi | \frac{1}{m^{\gamma} c} (\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^{\gamma} | \psi \rangle, \quad (3-61)$$

بدست می‌آید.

$$\langle \psi | (\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^{\gamma} | \psi \rangle = \int (\phi^{\dagger}, \phi^{\dagger}) \begin{pmatrix} \cdot & (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^{\gamma} \\ (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^{\gamma} & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} d^{\gamma} \vec{x}, \quad (3-62)$$

که در اینجا ϕ و χ دو مولفه‌ی اسپینور هستند

$$\langle \vec{x} | \psi \rangle = \begin{pmatrix} \phi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(r) Y_{j-\frac{1}{2}}^{j,m}(\theta, \phi) \\ -if(r) Y_{j+\frac{1}{2}}^{j,m}(\theta, \phi) \end{pmatrix}, \quad (3-64)$$

$Y_{j \pm \frac{1}{2}}^{j,m}(\theta, \phi)$ ویژه اسپینورهای متداول تابع $\hat{j}_z$ و $\hat{j}^{\gamma}$ می‌باشد.

$$F(r) = x^{\gamma} e^{-ax} \sum_{\nu=0}^{n'} a_{\nu} x^{\nu}, \quad (3-65)$$

$$f(r) = x^{\gamma} e^{-ax} \sum_{\nu=0}^{n'} b_{\nu} x^{\nu}, \quad (3-66)$$

در اینجا

$$n' = n - (j + \frac{1}{2})$$

$$\gamma = -1 + \sqrt{(j + \frac{1}{2})^{\gamma} - \alpha^{\gamma}},$$

$$a = \sqrt{1 - \frac{E^{\gamma}}{m^{\gamma} c^{\gamma}}}, \quad x = (\frac{mc}{\hbar})r. \quad (3-67)$$

است. ضمن آنکه

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} = \vec{\sigma} \cdot \vec{e}_r \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial r} + i \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{L}}{r} \right), \quad (3-68)$$

از طرفی

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{e}_r \left(Y_{j \pm \frac{1}{2}}^{j,m} \right) = -Y_{j \pm \frac{1}{2}}^{j,m}, \quad (۶۹-۳)$$

با ساده‌سازی این محاسبات به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) \phi = i\hbar \left[\frac{dF}{dr} - (j - \frac{1}{2}) \frac{F}{r} \right] Y_{j+\frac{1}{2}}^{j,m}, \quad (۷۰-۳)$$

و همین‌طور

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{p}) \phi = \hbar \left[\frac{df}{dr} + (j + \frac{1}{2}) \frac{f}{r} \right] Y_{j-\frac{1}{2}}^{j,m}, \quad (۷۱-۳)$$

با در نظر گرفتن روابط زیر

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^\vee \phi = -\hbar^\vee \left[\frac{d^\vee F}{dr^\vee} + \frac{\vee}{r} \frac{dF}{dr} - (j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2}) \frac{F}{r^\vee} \right] Y_{j-\frac{1}{2}}^{j,m}, \quad (۷۲-۳)$$

$$(\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^\vee \phi = \hbar^\vee \left[\frac{d^\vee f}{dr^\vee} + \frac{\vee}{r} \frac{df}{dr} - (j + \frac{1}{2})(j + \frac{\vee}{2}) \frac{f}{r^\vee} \right] Y_{j+\frac{1}{2}}^{j,m}, \quad (۷۳-۳)$$

و همین‌طور

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^\vee \phi &= -i\hbar^\vee \left[\frac{d^\vee F}{dr^\vee} - (j - \frac{\Delta}{2}) \frac{1}{r} \frac{d^\vee F}{dr^\vee} \right] Y_{j+\frac{1}{2}}^{j,m} \\ &+ i\hbar^\vee \left[(j + \frac{1}{2})(j + \frac{\vee}{2}) \frac{1}{r^\vee} \frac{dF}{dr} + -(j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2})(j + \frac{\vee}{2}) \frac{F}{r^\vee} \right] Y_{j+\frac{1}{2}}^{j,m}, \end{aligned} \quad (۷۴-۳)$$

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \hat{p})^\vee \phi &= -\hbar^\vee \left[\frac{d^\vee f}{dr^\vee} + (j + \frac{\vee}{2}) \frac{1}{r} \frac{d^\vee f}{dr^\vee} \right] Y_{j-\frac{1}{2}}^{j,m} \\ &+ \hbar^\vee \left[(j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2}) \frac{1}{r^\vee} \frac{df}{dr} + (j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2})(j + \frac{\vee}{2}) \frac{f}{r^\vee} \right] Y_{j-\frac{1}{2}}^{j,m}, \end{aligned} \quad (۷۵-۳)$$

ملاحظه می‌شود که

$$\begin{aligned}
\langle \psi | (\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^\gamma | \psi \rangle &= -\hbar^\gamma \int (F^* \frac{d^\gamma f}{dr^\gamma} - f^* \frac{d^\gamma F}{dr^\gamma}) r^\gamma dr - \hbar^\gamma (j + \frac{\gamma}{2}) \int F^* \frac{d^\gamma f}{dr^\gamma} r dr \\
&- \hbar^\gamma (j - \frac{\gamma}{2}) \int f^* \frac{d^\gamma F}{dr^\gamma} r dr + \hbar^\gamma (j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2}) \int F^* \frac{df}{dr} dr - \hbar^\gamma (j + \frac{1}{2})(j + \frac{\gamma}{2}) \int f^* \frac{dF}{dr} dr \\
&+ \hbar^\gamma (j - \frac{1}{2})(j + \frac{1}{2})(j + \frac{\gamma}{2}) \int (F^* f + f^* F) \frac{1}{r} dr,
\end{aligned} \tag{۷۶-۳}$$

برای انرژی حالت پایه باید در نظر بگیریم $n' = 0$ ، $j = \frac{1}{2}$ ، به مراتب داریم

$$F(r) = a x^\gamma e^{-ax}, \tag{۷۷-۳}$$

$$f(r) = b x^\gamma e^{-ax}, \tag{۷۸-۳}$$

در اینجا

$$\gamma = \varepsilon - 1$$

$$a = \left(\frac{\gamma a}{b}\right)^{\gamma-1} \sqrt{\frac{(1+\varepsilon)}{\Gamma(\gamma+3)}},$$

$$b = \sqrt{\frac{(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)}} a, \tag{۷۹-۳}$$

که $\varepsilon = \sqrt{1-\alpha^2}$ است.

پس می‌توان نوشت

$$\langle \psi | (\vec{\alpha} \cdot \hat{p})^\gamma | \psi \rangle = m^\gamma c^\gamma \frac{(1-\varepsilon^\gamma)^\gamma}{\varepsilon(\gamma-1)}, \tag{۸۰-۳}$$

که در اینجا $E = mc^2 \varepsilon$ انرژی $|\psi\rangle$ ، حالت پایه‌ی اتم هیدروژن است، که در مکانیک کوانتومی معمول

بدست می‌آید.

بدین ترتیب برای E_1 می‌توان نوشت

$$E_{\gamma} = mc^{\gamma} \frac{(1 - \varepsilon^{\gamma})^{\gamma}}{\varepsilon(2\varepsilon - 1)}, \quad (81-3)$$

پس می‌توانیم که این نتایج را برای انرژی حالت پایه‌ی اتم هیدروژن به کار ببریم.

$$E_{\gamma}^{ML} = mc^{\gamma} \varepsilon + \beta m^{\gamma} c^{\gamma} \frac{(1 - \varepsilon^{\gamma})^{\gamma}}{\varepsilon(2\varepsilon - 1)}, \quad (82-3)$$

با یک محاسبه‌ی ساده و کم کردن انرژی سکون الکترون از رابطه‌ی بالا داریم

$$\Delta E_{\gamma}^{ML} = E_{\gamma}^{ML} - mc^{\gamma}, \quad (83-3)$$

اختلاف انرژی حالت پایه از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید

$$\Delta E_{\gamma}^{ML} \approx -mc^{\gamma} \left(\frac{\alpha^{\gamma}}{2} + \frac{\alpha^{\gamma}}{8} \right) + \beta m^{\gamma} c^{\gamma} \alpha^{\gamma}, \quad (84-3)$$

۳-۲-۱- نتیجه‌گیری

این نتایج نشان می‌دهد که تصحیح انرژی تراز حالت پایه‌ی اتم هیدروژن همیشه مثبت است. مقایسه‌ی نتایج نظری بدست‌آمده با نتایج تجربی می‌تواند به ما برای تخمین طول کمینه کمک کند.

با توجه به اینکه انرژی بین شکافتگی دو تراز $1s, 2s$ در اتم هیدروژن $4.2 \times 10^{-14} eV$ است، محاسبه‌ی انرژی تراز $2s$ بسیار پیچیده است علاوه بر آن، به محاسبه‌ی دقیق تراز $2s$ نیازی نیست؛ از طرفی چون در محاسبه‌ی تراز $2s$ مرتبه‌ی $O(\beta^4)$ ظاهر می‌شود پس انرژی تراز $1s, 2s$ به هم شبیه خواهد بود. از آنجایی که این دو تراز در عدد کوانتومی n با هم تفاوت دارند، پس اگر این تفاوت را به عنوان خطای مربوط به تصحیح طول کمینه استناد کنیم و فرض کنیم که اثر طول کمینه هنوز به صورت تجربی قابل مشاهده

نیست، با توجه به معادله ی (۸۴-۳) می توانیم دریابیم که: $\Delta x_i^{\min} \leq 10^{-17} m$

فصل چهارم

حالت های پراکندگی در مکانیک کوانتوم تغییر شکل یافته

۴- حالت‌های پراکندگی در مکانیک کوانتوم تغییر شکل یافته

در این فصل می‌خواهیم حالت‌های پراکندگی را در کوانتوم تغییر شکل یافته بدست بیاوریم. در این بخش از پتانسیل مورد استفاده، پتانسیل وود - ساکسون^۱ است، زیرا کاربرد بسیاری در زمینه‌ی هسته‌ای دارد و می‌تواند پتانسیل مناسبی برای تعیین پراکندگی باشد. رهیافت ساده‌ای برای ارتباط با مسائل شروینگر تعمیم یافته ناشی از طول کمینه فرض شده است و بدان وسیله معادله شروینگر در حضور طول کمینه و با بر هم کنش وودساکسون حل شده است. در نهایت ضرائب عبور و بازتاب به خوبی گزارش شده است [۲۳].

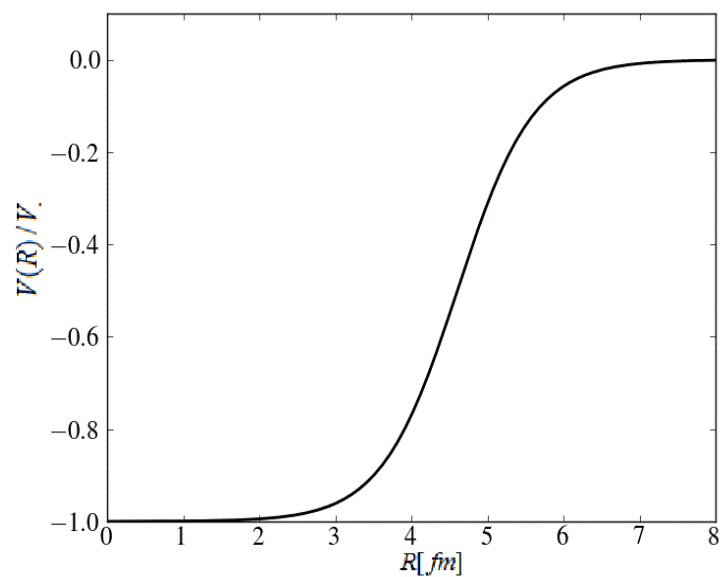
می‌دانیم که پتانسیل وود ساکسون در یک لبه به شکل زیر است

$$V(x) = V_0 \left[\theta(x) \frac{1}{1 + qe^{\frac{-x-R}{a}}} + \theta(x) \frac{1}{1 + \tilde{q}e^{\frac{x-R}{a}}} \right], \quad (۴-۱)$$

که در اینجا a, q, V_0 و R به ترتیب عمق پتانسیل، پارامتر تغییر شکل، ضخامت سطح و شعاع هسته را به ترتیب نشان می‌دهد.

در شکل ۴-۱ پتانسیل W-S بر حسب شعاع هسته رسم شده است.

^۱ Wood-Saxson



شکل ۴-۱: پتانسیل وود-ساکسون بر حسب شعاع هسته

معادله‌ی شروینگر تعمیم‌یافته به شکل زیر است

$$\left\{ \frac{p_{op}^2}{2m} + V(x) \right\} \psi_n(x) = E_n \psi_n(x), \quad (۴-۲)$$

از طرفی

$$p^2 = 2m(E_n^{(i)} - V(x)), \quad (۴-۳)$$

$$p^2 = 2m^2(E_n^{(i)} - V(x))^2, \quad (۴-۴)$$

که در اینجا $E_n^{(i)}$ ویژه مقدار هامیلتونی اولیه

$$H_i = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad (۴-۵)$$

می باشد.

با قرار دادن تکانه تعمیم یافته در معادله ی (۴-۵) خواهیم داشت

$$H = \frac{p^{\gamma}}{2m} + \frac{\beta p^{\gamma}}{m} + \frac{\beta^{\gamma} p^{\gamma}}{2m} + V(x), \quad (4-6)$$

$$= H_0 + \frac{\beta p^{\gamma}}{m} = H_0 + \epsilon \beta m (E_n^{(\gamma)} - V(x))^{\gamma}, \quad (4-7)$$

همانند بخش های قبل روابط را تا مرتبه ی اول پارامتر طول کمینه β پیش می گیریم و رابطه ی (۴-۴) را نیز به کار می بریم.

شکل دیفرانسیلی معادله ی (۴-۶) به صورت زیر است

$$-\frac{\hbar^{\gamma}}{2m} \frac{d^{\gamma} \psi_n(x)}{dx^{\gamma}} + \left(E_n - \epsilon \beta m (E_n^{(\gamma)} - V(x))^{\gamma} - V(x) \right) \psi_n(x) = 0, \quad (4-8)$$

۴-۱- محاسبه ی ضرائب عبور و بازتاب

در این بخش می خواهیم حالت های پراکندگی معادله را برای سد پتانسیل وود-ساکسون تحقیق کنیم،

پس معادله ی (۴-۱) را در رابطه ی اخیر قرار می دهیم

$$-\frac{\hbar^{\gamma}}{2m} \frac{d^{\gamma} \psi_L(x)}{dx^{\gamma}} + \left(E_n - \epsilon \beta m (E_n^{(\gamma)})^{\gamma} - \frac{\epsilon \beta m V_0^{\gamma}}{(1 + qe^{\frac{-x-R}{a}})^{\gamma}} + \frac{\epsilon \beta m E_n^{(\gamma)} V_0^{\gamma}}{(1 + qe^{\frac{-x-R}{a}})^{\gamma}} - \frac{V_0^{\gamma}}{(1 + qe^{\frac{-x-R}{a}})^{\gamma}} \right) \psi_L(x) = 0, \quad (4-9)$$

برای راحتی $y_L = -x - R$ و $\alpha = \frac{1}{a}$ ، خواهیم داشت

$$\frac{\hbar^{\gamma}}{2m} \frac{d^{\gamma} \psi_L(y_L)}{dy_L^{\gamma}} + \left(E_n - \epsilon \beta m (E_n^{(\gamma)})^{\gamma} - \frac{\epsilon \beta m V_0^{\gamma}}{(1 + qe^{\alpha y_L})^{\gamma}} + \frac{\epsilon \beta m E_n^{(\gamma)} V_0^{\gamma}}{(1 + qe^{\alpha y_L})^{\gamma}} - \frac{V_0^{\gamma}}{(1 + qe^{\alpha y_L})^{\gamma}} \right) \psi_L(y_L) = 0 \quad (4-10)$$

با تغییر متغیر $Z_L = \frac{1}{1+qe^{\alpha y_L}}$ معادله‌ی بالا به شکل زیر بازنویسی می‌شود

$$\frac{d}{dy_L} = \frac{d}{dz_L} \frac{dz_L}{dy_L} = \frac{-q\alpha e^{\alpha y_L}}{(1+qe^{\alpha y_L})^2} \frac{d}{dz_L} = \alpha z_L(z_L-1), \quad (11-4)$$

$$\frac{d^2}{dy_L^2} = \alpha z_L(z_L-1) \frac{d}{dz_L} (\alpha z_L(z_L-1) \frac{d}{dz_L}) = \alpha^2 z_L^2(z_L-1)^2 \frac{d^2}{dz_L^2} + \alpha^2 z_L(z_L-1)(2z_L-1) \frac{d}{dz_L}, \quad (12-4)$$

با جایگذاری در معادله‌ی (۱۰-۴) خواهیم داشت

$$z_L(1-z_L) \frac{d^2 \psi_L(z_L)}{dz_L^2} + (1-2z_L) \frac{d\psi_L(z_L)}{dz_L} + \frac{1}{z_L(1-z_L)} \{M_L z_L^2 + N_L z_L + P_L\} \psi_L(z_L) = 0. \quad (13-4)$$

که در اینجا کمیت‌های N_L, P_L و M_L بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} M_L &= -\frac{\lambda \beta m^2 V_n}{\hbar^2 \alpha^2}, \\ N_L &= \frac{\lambda \beta m E_n^{(+)}}{\hbar^2 \alpha^2} - \frac{2V_n m}{\hbar^2 \alpha^2}, \\ P_L &= \frac{2E_n m}{\hbar^2 \alpha^2} - \frac{\lambda \beta m^2 (E_n^{(+)})^2}{\hbar^2 \alpha^2}, \end{aligned} \quad (14-4)$$

تغییر متغیر زیر را در نظر می‌گیریم

$$\psi_L(z_L) = z_L^{\eta_L} (1-z_L)^{\zeta_L} w_L(z_L), \quad (15-4)$$

در نتیجه معادله‌ی (۱۳-۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شود

$$\begin{aligned} z_L(1-z_L) \frac{d^2 \psi_L(z_L)}{dz_L^2} + (1+2\eta_L - 2(\eta_L + \zeta_L + 1)z_L) \frac{d\psi_L(z_L)}{dz_L} \\ - (\eta_L + \zeta_L + \delta_L)(\eta_L + \zeta_L - \delta_L + 1) w_L(z_L) = 0, \end{aligned} \quad (16-4)$$

معادله‌ی (۱۶-۴) به شکل فوق هندسی در می‌آید که در آن [۲۴]:

$$\begin{aligned}
\eta_L &= i \sqrt{\frac{\mathfrak{z} E_n m}{\hbar^\mathfrak{z} \alpha^\mathfrak{z}} - \frac{\wedge \beta m^\mathfrak{z} (E_n^{(\cdot)})^\mathfrak{z}}{\hbar^\mathfrak{z} \alpha^\mathfrak{z}}}, \\
\zeta_L &= \frac{i}{\hbar \alpha} \sqrt{-\wedge m^\mathfrak{z} \beta V^\mathfrak{z} - \mathfrak{z} \mathfrak{z} m^\mathfrak{z} \beta V E_n^{(\cdot)} - \mathfrak{z} V m + \mathfrak{z} E_n m - \wedge m^\mathfrak{z} \beta E_n^{(\cdot)}}, \\
\delta_L &= \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} + \frac{\sqrt{1 + \frac{\mathfrak{z} \mathfrak{z} m^\mathfrak{z} \beta V^\mathfrak{z}}{\hbar^\mathfrak{z} \alpha^\mathfrak{z}}}}{\mathfrak{z}},
\end{aligned} \tag{۱۷-۴}$$

بدین ترتیب می‌توان نوشت

$$\begin{aligned}
w_L(z_L) &= A_{\mathfrak{z}} F_{\mathfrak{z}}(\eta_L + \zeta_L + \delta_L, \eta_L + \zeta_L - \delta_L + \mathfrak{z}; \mathfrak{z} \eta_L; z_L), \\
&+ A_{\mathfrak{z} z_L^{-\mathfrak{z} \eta_L}} F_{\mathfrak{z}}(-\eta_L + \zeta_L + \delta_L, -\eta_L + \zeta_L - \delta_L + \mathfrak{z}; \mathfrak{z} - \mathfrak{z} \eta_L; z_L),
\end{aligned} \tag{۱۸-۴}$$

پس تابع موج برای $x < 0$ به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
\psi_L(y_L) &= A_{\mathfrak{z} z_L^{\mathfrak{z} \mathfrak{z}}} (1 - z_L) \mathfrak{z} F_{\mathfrak{z}}(\eta_L + \zeta_L + \delta_L, \eta_L + \zeta_L - \delta_L + \mathfrak{z}; \mathfrak{z} \eta_L; z_L) \\
&+ A_{\mathfrak{z} z_L^{-\mathfrak{z} \eta_L}} F_{\mathfrak{z}}(-\eta_L + \zeta_L + \delta_L, -\eta_L + \zeta_L - \delta_L + \mathfrak{z}; \mathfrak{z} - \mathfrak{z} \eta_L; z_L),
\end{aligned} \tag{۱۹-۴}$$

همین مراحل را برای $x > 0$ تکرار می‌شود، با این تفاوت که از جمله‌ی اول پتانسیل استفاده می‌کنیم، پس

$$\frac{\hbar^\mathfrak{z}}{\mathfrak{z} m} \frac{d^\mathfrak{z} \psi_R(x)}{dx^\mathfrak{z}} + \left(E_n - \mathfrak{z} \beta m (E_n^{(\cdot)})^\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{z} \beta m V^\mathfrak{z}}{(1 + \tilde{q} e^{\frac{x-R}{a}})^\mathfrak{z}} + \frac{\wedge \beta m E_n^{(\cdot)} V^\mathfrak{z}}{(1 + \tilde{q} e^{\frac{x-R}{a}})} - \frac{V^\mathfrak{z}}{(1 + \tilde{q} e^{\frac{x-R}{a}})} \right) \psi_R(x) = 0, \tag{۲۰-۴}$$

با قرار دادن $y_R = x - R, \alpha = \frac{1}{a}$ داریم

$$\frac{\hbar^\mathfrak{z}}{\mathfrak{z} m} \frac{d^\mathfrak{z} \psi_R(x)}{dy_R^\mathfrak{z}} + \left(E_n - \mathfrak{z} \beta m (E_n^{(\cdot)})^\mathfrak{z} - \frac{\mathfrak{z} \beta m V^\mathfrak{z}}{(1 + \tilde{q} e^{\alpha y_R})^\mathfrak{z}} + \frac{\wedge \beta m E_n^{(\cdot)} V^\mathfrak{z}}{(1 + \tilde{q} e^{\alpha y_R})} - \frac{V^\mathfrak{z}}{(1 + \tilde{q} e^{\alpha y_R})} \right) \psi_R(y_R) = 0. \tag{۲۱-۴}$$

برای $x > 0$ ، با استفاده از تغییر متغیر $Z_L = \frac{1}{1 + \tilde{q} e^{\alpha y_L}}$ ، به این رابطه می‌رسیم

$$z_R(1-z_R)\frac{d^2\psi_R(z_R)}{dz_R^2}+(1-z_R)\frac{d\psi_R(z_R)}{dz_R}+\frac{1}{z_R(1-z_R)}\{M_R z_R + N_R z_R + P_R\}\psi_R(z_R)=0. \quad (22-4)$$

پارامترهای زیر را معرفی می‌کنیم

$$\begin{aligned} M_R &= -\frac{\lambda\beta m^\gamma V_\gamma}{\hbar^\gamma \alpha^\gamma}, \\ N_R &= \frac{\lambda\beta m E_n^{(\cdot)} V_\gamma}{\hbar^\gamma \alpha^\gamma} - \frac{\gamma V_\gamma m}{\hbar^\gamma \alpha^\gamma}, \\ P_R &= \frac{\gamma E_n m}{\hbar^\gamma \alpha^\gamma} - \frac{\lambda\beta m^\gamma (E_n^{(\cdot)})^\gamma}{\hbar^\gamma \alpha^\gamma}, \end{aligned} \quad (23-4)$$

و نیز با استفاده از تغییر متغیر $\psi_R(z_R) = z_R^{\eta_R}(1-z_R)^{\zeta_R}\chi(z_R)$ در معادله‌ی (۲۲-۴) تابع موج

بدست‌آمده برای ناحیه‌ی $x > 0$ به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} \psi_R(z) &= A_\gamma z_L^{\eta_L}(1-z_L)^{\zeta_R} {}_2F_1(\eta_R + \zeta_R + \delta_R, \eta_R + \zeta_R - \delta_R + 1; 1 + \gamma \eta_R; z_R) \\ &+ A_\gamma z_R^{-\eta_R}(1-z_L)^{\zeta_R} {}_2F_1(-\eta_R + \zeta_R + \delta_R, -\eta_R + \zeta_R - \delta_R + 1; 1 - \gamma \eta_R; z_R), \end{aligned} \quad (24-4)$$

که متغیرها به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\begin{aligned} \eta_R &= i\sqrt{\frac{\gamma E_n m}{\hbar^\gamma \alpha^\gamma} - \frac{\lambda\beta m^\gamma (E_n^{(\cdot)})^\gamma}{\hbar^\gamma \alpha^\gamma}}, \\ \zeta_R &= \frac{i}{\hbar \alpha} \sqrt{-\lambda m^\gamma \beta V_\gamma + \lambda \gamma m^\gamma \beta V_\gamma E_n^{(\cdot)} - \gamma V_\gamma m + \gamma E_n m - \lambda m^\gamma \beta E_n^{(\cdot)}}, \\ \delta_R &= \frac{1}{\gamma} + \frac{\sqrt{1 + \frac{\gamma \gamma m^\gamma \beta V_\gamma}{\hbar^\gamma \alpha^\gamma}}}{\gamma}, \end{aligned} \quad (25-4)$$

اگر ذرات از سمت چپ به سد پتانسیل برخورد کنند با قرار دادن $A_\gamma = 0$ در معادله‌ی (۲۴-۴) به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود.

$$\psi_R(z) = A_{\psi_R} z_R^{-\eta_R} (1 - z_L)^{\zeta_R} F_1(-\eta_R + \zeta_R + \delta_R, -\eta_R + \zeta_R - \delta_R + 1; 1 - 2\eta_R; z_R) \quad (26-4)$$

رفتار توابع موج ψ_L و ψ_R را به هنگامی که $z_L \rightarrow 0$ ، $x \rightarrow -\infty$ و $(1 - z_L)^{\zeta_L} \rightarrow 1$ بررسی می کنیم برای معادله‌ی (۱۹-۴) داریم که

$$\psi_L(x \rightarrow -\infty) \propto A_{\psi_L} \left(\frac{1}{1 + qe^{\frac{-x-R}{a}}} \right)^{\eta_L} + A_{\psi_L} \left(\frac{1}{1 + qe^{\frac{-x-R}{a}}} \right)^{\eta_L}, \quad (27-4)$$

و همین طور حد معادله‌ی (۲۴-۴) برای $x > 0$ و $F_1(\eta_L, \eta_R; \eta_R; \cdot)$ به ازای $z_R \rightarrow 0$ ، $x \rightarrow \infty$ بدست می آید

$$\psi_R(x \rightarrow +\infty) \propto A_{\psi_R} \left(\frac{1}{1 + \tilde{q}e^{\frac{-x-R}{a}}} \right)^{-\eta_R}. \quad (28-4)$$

پس رفتار مجانبی تابع موج را می توان به شرح زیر نوشت

$$\psi(x) = \begin{cases} A_{\psi_R} \left(\frac{1}{1 + \tilde{q}e^{\frac{-x-R}{a}}} \right)^{-\eta_R} & (x \rightarrow +\infty) \\ A_{\psi_L} \left(\frac{1}{1 + qe^{\frac{-x-R}{a}}} \right)^{\eta_L} + A_{\psi_L} \left(\frac{1}{1 + qe^{\frac{-x-R}{a}}} \right)^{-\eta_L} & (x \rightarrow -\infty) \end{cases} \quad (29-4)$$

با در نظر گرفتن مسیر حرکت تابع موج از سمت چپ به راست، پس می توان تابع موج سمت چپ را به عنوان تابع موجی شامل موج های ورودی و بازتاب در نظر گرفت و نوشت $\psi_L = \psi_{inc} + \psi_{ref}$ ، که

ψ_{ref} و ψ_{inc} به ترتیب موج‌های ورودی و بازتاب هستند. با توجه به این توضیحات پس تابع موج سمت

راست نیز تابع موج عبوری است و می‌نویسیم $\psi_R = \psi_{trans}$.

این تعاریف ضرایب عبور و بازتاب را نشان می‌دهد

$$R = \frac{|\psi_{ref}|^2}{|\psi_{inc}|^2} = \frac{|A_r|^2}{|A_i|^2}. \quad (30-4)$$

$$T = \frac{|\psi_{trans}|^2}{|\psi_{inc}|^2} = \frac{|A_t|^2}{|A_i|^2}. \quad (31-4)$$

می‌دانیم که برای بدست آوردن ضرایب عبور و بازتاب باید شرایط مرزی اعمال شود:

$$\psi_R(x=0) = \psi_L(x=0) \quad \text{و} \quad \psi'_R(x=0) = \psi'_L(x=0)$$

که در اینجا علامت پریم، مشتق بر حسب x است. در ابتدا ما پارامترها را به شرح زیر معرفی می‌کنیم

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{1 + qe^{\frac{R}{a}}}, & m_r &= 1 - \frac{1}{1 + qe^{\frac{R}{a}}}, & m_r &= \frac{\frac{q}{a} e^{\frac{R}{a}}}{(1 + qe^{\frac{R}{a}})^2}, \\ m_\varphi &= \frac{1}{1 + \tilde{q}e^{\frac{R}{a}}}, & m_\delta &= 1 - \frac{1}{1 + \tilde{q}e^{\frac{R}{a}}}, & m_\varphi &= \frac{\frac{\tilde{q}}{a} e^{\frac{R}{a}}}{(1 + \tilde{q}e^{\frac{R}{a}})^2}, \end{aligned} \quad (32-4)$$

$$\begin{aligned}
h_{\lambda} &= {}_1F_1(\eta_L + \zeta_L + \delta_L, \eta_L + \zeta_L - \delta_L + 1; 1 + 2\eta_L; m_{\lambda}), \\
h_{\gamma} &= {}_1F_1(-\eta_L + \zeta_L + \delta_L, -\eta_L + \zeta_L - \delta_L + 1; 1 - 2\eta_L; m_{\lambda}), \\
h_{\tau} &= {}_1F_1(-\eta_R + \zeta_R + \delta_R, -\eta_R + \zeta_R - \delta_R + 1; 1 + 2\eta_R; m_{\tau}), \\
h_{\kappa} &= {}_1F_1(\eta_L + \zeta_L + \delta_L + 1, \eta_L + \zeta_L - \delta_L + 2; 2 + 2\eta_L; m_{\lambda}), \\
h_{\delta} &= {}_1F_1(-\eta_L + \zeta_L + \delta_L + 1, -\eta_L + \zeta_L - \delta_L + 2; 2 - 2\eta_L; m_{\lambda}), \\
h_{\varphi} &= {}_1F_1(-\eta_R + \zeta_R + \delta_R + 1, -\eta_R + \zeta_R - \delta_R + 2; 2 - 2\eta_R; m_{\tau}),
\end{aligned} \tag{۳۳-۴}$$

پس داریم

$$\begin{cases} \psi_R(x = \cdot) = \psi_L(x = \cdot) \\ A m_{\lambda}^{\eta_L} m_{\gamma}^{\zeta_L} h_{\lambda} + A m_{\lambda}^{-\eta_L} m_{\gamma}^{\zeta_L} h_{\gamma} = A m_R^{-\eta_L} m_{\delta}^{\zeta_L} h_{\tau}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi'_R(x = \cdot) = \psi'_L(x = \cdot), \\ A \left\{ \eta_L m_{\lambda}^{\eta_L-1} m_{\gamma}^{\zeta_L} h_{\lambda} - \zeta_L m_{\lambda}^{\eta_L} m_{\gamma}^{\zeta_L-1} m_{\gamma} h_{\lambda} + m_{\lambda}^{\eta_L} m_{\gamma}^{\zeta_L} m_{\gamma} \frac{(\eta_L + \zeta_L + \delta_L)(\eta_L + \zeta_L - \delta_L + 1)}{1 + 2\eta_L} h_{\delta} \right\} \\ + A \left\{ -\eta_L m_{\lambda}^{-\eta_L-1} m_{\gamma}^{\zeta_L} h_{\gamma} - \zeta_L m_{\lambda}^{-\eta_L} m_{\gamma}^{\zeta_L-1} m_{\gamma} h_{\gamma} + m_{\lambda}^{-\eta_L} m_{\gamma}^{\zeta_L} m_{\gamma} \frac{(-\eta_L + \zeta_L + \delta_L)(-\eta_L + \zeta_L - \delta_L + 1)}{1 - 2\eta_L} h_{\kappa} \right\} \\ = A \left\{ \eta_R m_{\tau}^{-\eta_R-1} m_{\varphi}^{\zeta_R} h_{\tau} + \zeta_R m_{\tau}^{-\eta_R} m_{\varphi}^{\zeta_R-1} m_{\varphi} h_{\tau} - m_{\tau}^{-\eta_R} m_{\varphi}^{\zeta_R} m_{\varphi} \frac{(-\eta_R + \zeta_R + \delta_R)(-\eta_R + \zeta_R - \delta_R + 1)}{1 - 2\eta_R} h_{\varphi} \right\}. \end{cases}$$

$$\tag{۳۴-۴}$$

$$\frac{d}{ds} {}_1F_1(a_{\lambda}, a_{\gamma}; a_{\tau}; s) = \frac{a_{\lambda} a_{\gamma}}{a_{\tau}} {}_1F_1(a_{\lambda} + 1, a_{\gamma} + 1; a_{\tau} + 1; s)$$

در محاسبات، از فرمول های شناخته شدی استفاده می‌دهد

$$\begin{aligned}
\frac{A_{\lambda}}{A_{\gamma}} &= \eta_L m_{\lambda}^{\eta_L-1} m_{\gamma}^{\zeta_L} h_{\lambda} h_{\gamma} - \zeta_L m_{\lambda}^{\eta_L} m_{\gamma}^{\zeta_L-1} m_{\gamma} h_{\lambda} h_{\gamma} + m_{\lambda}^{\eta_L} m_{\gamma}^{\zeta_L} m_{\gamma} \frac{(\eta_L + \zeta_L + \delta_L)(\eta_L + \zeta_L - \delta_L + 1)}{1 + 2\eta_L} h_{\delta} h_{\tau} \\
&+ m_{\lambda}^{\eta_L} m_{\tau}^{-1} \eta_R m_{\varphi}^{\zeta_R} m_{\varphi} h_{\lambda} h_{\gamma} + m_{\lambda}^{\eta_L} m_{\varphi}^{\zeta_R} m_{\varphi} \zeta_R m_{\delta}^{-1} h_{\lambda} h_{\gamma} + m_{\lambda}^{\eta_L} m_{\gamma}^{\zeta_L} m_{\gamma} \frac{(-\eta_L + \zeta_L + \delta_L)(-\eta_L + \zeta_L - \delta_L + 1)}{1 - 2\eta_R} h_{\kappa} h_{\varphi} \Bigg/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \eta_L m_{\gamma}^{-\eta_L - 1} m_{\nu} m_{\nu}^{\zeta_L} h_{\nu} h_{\nu} + \zeta_L m_{\gamma}^{-\eta_L} m_{\nu}^{\zeta_L - 1} m_{\nu} h_{\nu} h_{\nu} - m_{\gamma}^{-\eta_L} m_{\nu}^{\zeta_L} m_{\nu} \frac{(-\eta_L + \zeta_L + \delta_L)(-\eta_L + \zeta_L - \delta_L + 1)}{1 - 2\eta_L} h_{\delta} h_{\nu} \\
& + \eta_R m_{\gamma}^{-\eta_L} m_{\nu}^{\zeta_L} m_{\nu}^{-1} m_{\nu} h_{\nu} h_{\nu} + \zeta_R m_{\gamma}^{-\eta_L} m_{\delta}^{-1} m_{\nu} m_{\nu}^{\zeta_L} h_{\nu} h_{\nu} \\
& - m_{\gamma}^{-\eta_L} m_{\nu}^{\zeta_L} m_{\nu} \frac{(-\eta_R + \zeta_R + \delta_R)(-\eta_R + \zeta_R - \delta_R + 1)}{1 - 2\eta_R} h_{\nu} h_{\nu} \Big\}, \tag{۲۵-۴}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{A_{\nu}}{A} = & \eta_L m_{\gamma}^{\eta_L - 1} m_{\nu} m_{\nu}^{\zeta_L} h_{\nu} h_{\nu} - \zeta_L m_{\gamma}^{\eta_L} m_{\nu}^{\zeta_L - 1} m_{\nu} h_{\nu} h_{\nu} + m_{\gamma}^{\eta_L} m_{\nu}^{\zeta_L} m_{\nu} \frac{(\eta_L + \zeta_L + \delta_L)(\eta_L + \zeta_L - \delta_L + 1)}{1 + 2\eta_L} h_{\nu} h_{\nu} \\
& + m_{\gamma}^{\eta_L - 1} m_{\nu} m_{\nu} \eta_L m_{\nu}^{\zeta_L} h_{\nu} h_{\nu} + m_{\gamma}^{\eta_L} m_{\nu}^{\zeta_L - 1} m_{\nu} \zeta_L h_{\nu} h_{\nu} - m_{\gamma}^{\eta_L} m_{\nu}^{\zeta_L} m_{\nu} \frac{(-\eta_L + \zeta_L + \delta_L)(-\eta_L + \zeta_L - \delta_L + 1)}{1 - 2\eta_L} h_{\delta} h_{\nu} \Big\} /
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \eta_L m_{\gamma}^{-\eta_R} m_{\nu} m_{\gamma}^{-1} m_{\delta}^{\zeta_R} h_{\nu} h_{\nu} + \zeta_L m_{\delta}^{\zeta_R} m_{\nu}^{-\eta_R} m_{\nu}^{-1} m_{\nu} h_{\nu} h_{\nu} \\
& - m_{\gamma}^{\eta_L} m_{\nu}^{\zeta_L} m_{\nu} \frac{(-\eta_L + \zeta_L + \delta_L)(-\eta_L + \zeta_L - \delta_L + 1)}{1 - 2\eta_L} h_{\delta} h_{\nu} + \eta_R m_{\delta}^{\eta_R} m_{\nu}^{-\eta_R - 1} m_{\nu} h_{\nu} h_{\nu} \\
& + \zeta_R m_{\nu}^{-\eta_R} m_{\delta}^{-\zeta_R - 1} m_{\nu} h_{\nu} h_{\nu} - m_{\nu}^{-\eta_R} m_{\delta}^{\zeta_R} m_{\nu} \frac{(-\eta_R + \zeta_R + \delta_R)(-\eta_R + \zeta_R - \delta_R + 1)}{1 - 2\eta_R} h_{\nu} h_{\nu} \Big\}, \tag{۲۶-۴}
\end{aligned}$$

با جایگذاری در معادله‌های (۳۰-۴) و (۳۱-۴) ضرائب عبور و بازتاب، بدست می‌آید.

۲-۴- نتیجه‌گیری

در این فصل از رهیافت بسیار ساده‌ای استفاده کردیم و به یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دو مشابه با معادله‌ی شروینگر با یک پتانسیل مؤثر رسیدیم. و دریافتیم که در حضور اثر گرانشی روابط پراکندگی جدیدی بدست می‌آید اما هم‌چنان این رابطه برقرار است $R+T=1$.

فصل پنجم

بررسی خواص ترمودینامیکی سیستم نوسانی در مکانیک کوانتوم

تفسیر شکل یافت.

۵- بررسی خواص ترمودینامیکی سیستمی با نوسانگرهای هارمونیک در مکانیک کوانتوم تغییر شکل

یافته

تا کنون به مکانیک کوانتومی تعمیم یافته در محدوده سیستم‌های تک ذره‌ای پرداخته‌ایم. اما در اینجا سیستمی ذره‌ای متشکل از نوسانگرهای هماهنگ یک بعدی بدون برهم‌کنش، در حضور طول کمینه را در نظر می‌گیریم.

۵-۱- هامیلتونی تعمیم‌یافته و ویژه مقدار انرژی یک ذره در حضور طول کمینه

معادله‌ی شروینگر تعمیم‌یافته در سه بعد به طور کلی در مرجع فصل سوم شرح داده شده است. در اینجا برای یادآوری روابط کلیدی را یادآوری می‌کنیم. می‌دانیم که معادله‌ی شروینگر یک نوسانگر به صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$\left(\frac{P^2}{2\mu} + V(r) \right) \psi(\vec{p}) = E \psi(\vec{p}), \quad (1-5)$$

در اینجا E, P و μ به ترتیب تکانه، انرژی و جرم ذره را مشخص می‌کند.

اگر بخواهیم معادله را برای یک ذره در مختصات کروی بنویسیم، نیازمند استفاده از رابطه‌ی زیر خواهیم بود.

$$\hat{x}_i = i(1 + \beta p^2) \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad \hat{p}_i = p_i \quad (2-5)$$

با این شرط، معادله (۱-۵) به شرح زیر بازنویسی خواهد شد

$$\left(\frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2) \right) \psi(p, \theta, \phi) = E_{nlm} \psi(p, \theta, \phi). \quad (3-5)$$

با در نظر گرفتن $\psi(p, \theta, \phi) = Q(p) \Theta(\theta) \Phi(\phi)$ می‌توان از روش جداسازی متغیرها استفاده کرد و با به کار بردن معادله‌ی (۲-۵)، نهایتاً به این رابطه خواهیم رسید.

$$\frac{d^{\gamma}Q(s)}{ds^{\gamma}} + \frac{\gamma + \delta\beta s}{\gamma s(\gamma + \beta s)} \frac{dQ(s)}{ds} + \left(\frac{-\mu^{\gamma}\omega^{\gamma}\eta(\gamma + \beta s)^{\gamma} - s^{\gamma} + \gamma\mu E_{nlm}s}{\gamma\mu^{\gamma}\omega^{\gamma}s^{\gamma}(\gamma + \beta s)^{\gamma}} \right) Q(s) = 0, \quad (4-5)$$

که در اینجا $p^{\gamma} = s, \eta = \ell(\ell + 1)$ است.

معادله به شکل دلخواه N-U در آمده است. پس می‌توانیم با بدست آوردن پارامترهای $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ معادله‌ی ویژه‌مقداری انرژی به ازای $\ell = 0$ را بدست آورد.

$$\begin{aligned} & -\frac{\delta}{\gamma}\beta n + (\gamma n + 1)\frac{\beta}{\gamma} + (\gamma n + 1)\left(\sqrt{\frac{E\beta}{\gamma\mu\omega^{\gamma}} + \frac{1}{\gamma\mu^{\gamma}\omega^{\gamma}}} - \frac{\beta}{\gamma}\right) - \beta n(n-1) \\ & -\frac{E}{\gamma\mu\omega^{\gamma}} + \sqrt{\left(\frac{E\beta}{\gamma\mu\omega^{\gamma}} + \frac{1}{\gamma\mu^{\gamma}\omega^{\gamma}}\right)} = 0, \end{aligned} \quad (5-5)$$

پس انرژی به این شکل بدست خواهد آمد.

$$E = \frac{1}{\gamma}\omega(\gamma\beta\mu\omega^{\gamma}n^{\gamma} + \gamma\beta\mu\omega n + \gamma\beta\mu\omega + \gamma n\sqrt{\gamma\beta^{\gamma}\mu^{\gamma}\omega^{\gamma}} + \gamma + \gamma\sqrt{\gamma\beta^{\gamma}\mu^{\gamma}\omega^{\gamma}} + \gamma). \quad (6-5)$$

این معادله به ازای $\beta \rightarrow 0$ به شکل انرژی در کوانتوم معمول باز خواهد گشت.

$$E = \omega\left(\gamma n + \frac{\gamma}{\gamma}\right), \quad (7-5)$$

۵-۲- بررسی خواص ترمودینامیکی سیستم با برهم کنش‌های نوسانگرهای هماهنگ

با توجه به اینکه سیستم آماری در اینجا یک آنسامبل کانونی در نظر گرفته شده است پس تبادل ذره‌ای با محیط نخواهیم داشت و تنها انرژی با محیط مبادله می‌شود. از طرفی ذرات هیچ برهم‌کنشی با یک‌دیگر ندارند و سیستم یک سیستم فرمیونی است. می‌دانیم که برای بررسی خواص آماری یک سیستم اولین مرحله، محاسبه‌ی تابع پارش آن سیستم است.

۵-۲-۱- تابع پارش^۱

تابع پارش تابعی بر حسب دما است و گام اولیه در مطالعه‌ی رفتار ترمودینامیکی سیستم است زیرا با داشتن تابع پارش انرژی داخلی، انرژی هلمهوتز، ظرفیت گرمایی و در نهایت آنتروپی سیستم نیز قابل محاسبه‌ی است.

رابطه‌ی اصلی تابع پارش به شرح زیر است.

$$Q_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\beta E_n} \quad (۵-۸)$$

$\beta = \frac{1}{KT}$ ، K ثابت بولتزمن^۲ است. به علت شباهت پارامتر طول کمینه را با λ نشان می‌دهیم.

با جایگذاری رابطه‌ی انرژی معادله‌ی (۵-۶) در رابطه‌ی (۵-۸) داریم

$$Q_1 = e^{\frac{\gamma \lambda \gamma \beta}{\gamma} - \frac{\gamma}{\gamma} \alpha \beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\gamma \lambda \gamma \beta n^{\gamma} - n(\gamma \lambda \gamma \beta + \alpha \beta)}, \quad (۵-۹)$$

در اینجا

$$\gamma = -\mu \omega^{\gamma}, \alpha = -\omega \sqrt{\gamma \lambda^{\gamma} \mu^{\gamma} \omega^{\gamma} + \gamma}, \quad (۵-۱۰)$$

وابستگی تابع پارش به مراتب بالاتر از عدد کوانتومی n ، ما را بر آن داشت که برای حل این سری، از

فرمول اویلر مک لورن^۳ استفاده کنیم که به صورت زیر است [۲۶-۲۵]

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x) = \frac{1}{\gamma} f(\cdot) + \int_{\cdot}^{\cdot} f(x) dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(\gamma p)!} B_{\gamma p} f^{(\gamma p-1)}(\cdot), \quad (۵-۱۱)$$

^۱ Partition function

^۲ Boltzmann constant

^۳ The Euler-Maclaurin formula

$f(x)$ در اینجا بدین شکل معرفی می‌شود

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda\gamma\beta n^2 - n(\lambda\gamma\beta + \alpha\beta)} \quad (12-5)$$

و

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma\beta}} \left(\sqrt{\pi} e^{\frac{(\lambda\gamma\beta + \alpha\beta)^2}{\lambda\gamma\beta}} \operatorname{erfc} \left[\frac{\lambda\gamma\beta + \alpha\beta}{\sqrt{\lambda\gamma\beta}} \right] \right). \quad (13-5)$$

می‌دانیم که $\operatorname{erfc}(x)$ تابع خطای گوسی است و بصورت زیر نوشته خواهد شد

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (14-5)$$

و

$$1 - \operatorname{erf}(x) = \operatorname{erfc}(x). \quad (15-5)$$

در اینجا رابطه را تا سه جمله اول بسط می‌دهیم $B_1 = -\frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{3}$, و $B_3 = -\frac{1}{42}$ است گرچه می‌توان

تا مراتب بالاتری نیز محاسبات را ادامه داد اما به علت نزدیکی جواب‌ها به یکدیگر به همین مرحله از کار بسنده کردیم. مشتقات را تا مرتبه‌ی پنجم بدست می‌آوریم و در نهایت شکل تابع پارش به صورت زیر

بدست می‌آید

$$\begin{aligned}
Q_1 = & e^{-\frac{\gamma\lambda\beta}{\epsilon} - \frac{\alpha\beta}{\epsilon}} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma\lambda\beta}} \left(\sqrt{\pi} e^{\frac{(\gamma\lambda\beta + \alpha\beta)^2}{\lambda\gamma\lambda\beta}} \operatorname{erfc} \left[\frac{\gamma\lambda\beta + \alpha\beta}{\sqrt{\lambda\gamma\lambda\beta}} \right] \right) \right. \\
& + \frac{1}{\epsilon} \gamma\lambda\beta + \frac{1}{12} \alpha\beta - \frac{1}{4!} \times \frac{1}{3} \left(2\gamma\lambda^2\gamma^2\beta^2 + 2\gamma\lambda^2\gamma^2\alpha\beta^2 + 9\lambda\gamma\alpha^2\beta^2 \right. \\
& + \alpha^2\beta^2 - 36\lambda^2\gamma^2\beta^2 - 12\lambda\gamma\alpha\beta^2 \left. \right) + \frac{1}{6!} \times \frac{1}{42} \left(243\lambda^3\gamma^3\beta^3 + 40\lambda^2\gamma^2\alpha\beta^3 \right. \\
& + 27\lambda^2\gamma^2\alpha^2\beta^3 + 9\lambda^2\gamma^2\alpha^2\beta^3 - 108\lambda^2\gamma^2\beta^3 + 15\lambda\gamma\alpha^2\beta^3 \\
& - 108\lambda^2\gamma^2\alpha\beta^3 + \alpha^3\beta^3 - 36\lambda^2\gamma^2\alpha^2\beta^3 - 4\lambda\gamma\alpha^2\beta^3 \\
& \left. \left. + 72\lambda^2\gamma^2\beta^3 + 24\lambda^2\gamma^2\alpha\beta^3 \right) \right\}, \quad (16-5)
\end{aligned}$$

ما می‌توانیم تابع پارش را به یک سیستم N بعدی با رابطه‌ی $Q_N = [Q_1]^N$ تعمیم دهیم

$$\begin{aligned}
Q_N = & e^{-\frac{\gamma\lambda\beta}{\epsilon} - \frac{\alpha\beta}{\epsilon} - \frac{N}{\epsilon}} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma\lambda\beta}} \left(\sqrt{\pi} e^{\frac{(\gamma\lambda\beta + \alpha\beta)^2}{\lambda\gamma\lambda\beta}} \operatorname{erfc} \left[\frac{\gamma\lambda\beta + \alpha\beta}{\sqrt{\lambda\gamma\lambda\beta}} \right] \right) \right. \\
& + \frac{1}{\epsilon} \gamma\lambda\beta + \frac{1}{12} \alpha\beta - \frac{1}{4!} \times \frac{1}{3} \left(2\gamma\lambda^2\gamma^2\beta^2 + 2\gamma\lambda^2\gamma^2\alpha\beta^2 + 9\lambda\gamma\alpha^2\beta^2 \right. \\
& + \alpha^2\beta^2 - 36\lambda^2\gamma^2\beta^2 - 12\lambda\gamma\alpha\beta^2 \left. \right) + \frac{1}{6!} \times \frac{1}{42} \left(243\lambda^3\gamma^3\beta^3 + 40\lambda^2\gamma^2\alpha\beta^3 \right. \\
& + 27\lambda^2\gamma^2\alpha^2\beta^3 + 9\lambda^2\gamma^2\alpha^2\beta^3 - 108\lambda^2\gamma^2\beta^3 + 15\lambda\gamma\alpha^2\beta^3 \\
& \left. \left. - 108\lambda^2\gamma^2\alpha\beta^3 + \alpha^3\beta^3 - 36\lambda^2\gamma^2\alpha^2\beta^3 - 4\lambda\gamma\alpha^2\beta^3 + 72\lambda^2\gamma^2\beta^3 + 24\lambda^2\gamma^2\alpha\beta^3 \right) \right\}^N, \quad (17-5)
\end{aligned}$$

۵-۲-۲- انرژی داخلی سیستم، ظرفیت گرمایی، انرژی آزاد هلمهولتز^۱ و آنتروپی

۵-۲-۲-۱- انرژی داخلی سیستم

از دیدگاه مکانیک آماری، انرژی داخلی برابر با میانگین انرژی اجزای سیستم است. انرژی داخلی انرژی بالاقوه نیز نام دارد. اگر سیستم ایزوله باشد انرژی درونی سیستم پایسته می‌ماند، این انرژی به شدت تحت

^۱ Helmholtz Free Energy

تأثیر انرژی اعمالی از بیرون است. اولین قانون ترمودینامیکی بیان می‌کند که اضافه کردن گرما یا وارد کردن یک نیروی خارجی از طرف محیط انرژی داخلی سیستم را افزایش می‌دهد. می‌دانیم که انرژی داخلی سیستم اینگونه تعریف می‌شود [۲۵].

$$U = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Q_N, \quad (۱۸-۵)$$

با توجه به تابع پارش بدست آمده در معادله‌ی (۱۷-۵) انرژی درونی به صورت زیر است

$$U = N \left(\frac{\gamma \lambda}{\lambda} - \frac{\alpha^\gamma}{\lambda \gamma \lambda} + \frac{e^{\frac{\beta(\gamma \lambda + \alpha)^\gamma}{\lambda \gamma \lambda}} (\gamma \lambda + \alpha)}{\sqrt{\lambda \pi} \sqrt{\gamma \lambda} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{\beta}(\gamma \lambda + \alpha)}{\sqrt{\lambda \gamma \lambda}}\right)} - \frac{\gamma \gamma}{\gamma \beta} \right). \quad (۱۹-۵)$$

۲-۲-۲-۵ ظرفیت گرمایی

یک کمیت ترمودینامیکی قابل اندازه‌گیری از انرژی گرمایی است که وابسته به دما است.

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T} \text{ از مشتق انرژی داخلی بر حسب دما بدست می‌آید.}$$

$$C_v = N \left(\frac{e^{\frac{(\gamma \lambda + \alpha)^\gamma}{\lambda \gamma \lambda K T}} (\gamma \lambda + \alpha)}{\gamma \sqrt{\lambda \pi} \sqrt{\gamma \lambda} \operatorname{erfc}\left(\frac{(\gamma \lambda + \alpha)}{\sqrt{\lambda \gamma \lambda K T}}\right)} \right. \\ \left. \times \left(-\frac{(\gamma \lambda + \alpha)^\gamma}{\gamma \gamma \lambda \sqrt{K T}^\gamma} - \sqrt{\frac{K}{T}} + \frac{\gamma e^{\frac{(\gamma \lambda + \alpha)^\gamma}{\lambda \gamma \lambda K T}} (\gamma \lambda + \alpha)}{T \sqrt{\gamma \lambda} \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}\left(\frac{(\gamma \lambda + \alpha)}{\sqrt{\lambda \gamma \lambda K T}}\right)} \right) - \frac{\gamma \gamma K}{\gamma} \right). \quad (۲۰-۵)$$

۵-۲-۳- انرژی آزاد هلمهولتز

در ترمودینامیک، انرژی آزاد هلمهولتز پتانسیل ترمودینامیکی است، که کار "مفید" قابل حصول از یک سیستم ترمودینامیکی ایزوله در یک درجه حرارت ثابت اندازه گیری را نشان می دهد. برای یک سیستم در دما و حجم ثابت، انرژی هلمهولتز ثابت است. هلمهولتز بیان انرژی آزاد به صورت رابطه ی زیر است

$$A = -KT \ln Q_N, \quad (۲۱-۵)$$

پس

$$\begin{aligned} A = KTN & \left(\frac{\gamma\lambda\beta}{\lambda} - \frac{\alpha^r\beta}{\lambda\gamma\lambda} - \ln \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma\lambda\beta}} \left(\sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \left[\frac{\gamma\lambda\beta + \alpha\beta}{\sqrt{\lambda\gamma\lambda\beta}} \right] \right) + \frac{1}{4}\gamma\lambda\beta + \frac{1}{12}\alpha\beta \right. \right. \\ & - \frac{1}{4!} \times \frac{1}{3!} \left(27\lambda^r\gamma^r\beta^r + 27\lambda^r\gamma^r\alpha\beta^r + 9\lambda\gamma\alpha^r\beta^r + \alpha^r\beta^r - 36\lambda^r\gamma^r\beta^r - 12\lambda\gamma\alpha\beta^r \right) \\ & + \frac{1}{6!} \times \frac{1}{42} \left(243\lambda^5\gamma^5\beta^5 + 405\lambda^r\gamma^r\alpha\beta^5 + 270\lambda^r\gamma^r\alpha^r\beta^5 + 90\lambda^r\gamma^r\alpha^r\beta^5 - 108\lambda^r\gamma^r\beta^r + 15\gamma\lambda\alpha^r\beta^5 \right. \\ & \left. \left. - 108\lambda^r\gamma^r\alpha\beta^r + \alpha^5\beta^5 - 360\lambda^r\gamma^r\alpha^r\beta^r - 40\lambda\gamma\alpha^r\beta^r + 720\lambda^r\gamma^r\beta^r + 240\lambda^r\gamma^r\alpha\beta^r \right) \right\} \right). \quad (۲۲-۵) \end{aligned}$$

۵-۲-۴- آنتروپی سیستم

می توانیم با اطلاعات بدست آمده آنتروپی سیستم را نیز محاسبه کرد. از آنجا که آنتروپی کمیتی ترمودینامیکی برای تعیین درجه ی بی نظمی در هر سیستم است. با تعیین آنتروپی می توان بی نظمی سیستم را بررسی کرد هر چه درجه ی بی نظمی بالاتر باشد، آنتروپی کم تر است. آنتروپی به صورت زیر تعریف می شود

$$S = - \left(\frac{\partial A}{\partial T} \right)_{V,N}, \quad (23-5)$$

پس می توان نوشت

$$\begin{aligned} S = & KN \left(-\frac{\gamma\lambda\beta}{4} + \frac{\alpha^\gamma\beta}{\lambda\gamma\lambda} + \ln \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma\lambda\beta}} \left(\sqrt{\pi} \operatorname{erfc} \left[\frac{\gamma\lambda\beta + \alpha\beta}{\sqrt{\lambda\gamma\lambda\beta}} \right] \right) + \frac{1}{4} \gamma\lambda\beta + \frac{1}{12} \alpha\beta \right. \right. \\ & - \frac{1}{4!} \times \frac{1}{3!} \left(2\gamma\lambda^\gamma\gamma^\gamma\beta^\gamma + 2\gamma\lambda^\gamma\gamma^\gamma\alpha\beta^\gamma + \gamma\lambda\gamma\alpha^\gamma\beta^\gamma + \alpha^\gamma\beta^\gamma - 3\gamma\lambda^\gamma\gamma^\gamma\beta^\gamma - 12\gamma\lambda\gamma\alpha\beta^\gamma \right) \\ & + \frac{1}{6!} \times \frac{1}{42} \left(243\lambda^\delta\gamma^\delta\beta^\delta + 40\delta\lambda^\gamma\gamma^\gamma\alpha\beta^\delta + 2\gamma\lambda^\gamma\gamma^\gamma\alpha^\gamma\beta^\delta + \gamma\lambda\gamma\gamma^\gamma\alpha^\gamma\beta^\delta - 10\lambda\gamma^\gamma\gamma^\gamma\beta^\gamma + 15\gamma\lambda\alpha^\gamma\beta^\delta \right. \\ & \left. \left. - 10\lambda\gamma^\gamma\gamma^\gamma\alpha\beta^\gamma + \alpha^\delta\beta^\delta - 3\gamma\lambda^\gamma\gamma^\gamma\alpha^\gamma\beta^\gamma - 4\lambda\gamma\alpha^\gamma\beta^\gamma + 72\lambda\gamma^\gamma\gamma^\gamma\beta^\gamma + 24\lambda\gamma^\gamma\gamma^\gamma\alpha\beta^\gamma \right) \right\} \\ & + N \left(\frac{\gamma\lambda}{\lambda T} - \frac{\alpha^\gamma}{\lambda\gamma\lambda T} - \frac{K^\gamma T^\gamma}{\sqrt{\lambda\pi}\sqrt{\lambda\gamma}} e^{-\frac{(\gamma\lambda+\alpha)^\gamma}{\lambda K T \gamma^\gamma}} - \frac{(\gamma\lambda+\alpha)}{\operatorname{erfc} \left[\frac{\sqrt{\beta}(\gamma\lambda+\alpha)}{\sqrt{\lambda\gamma\lambda\beta}} \right]} - \frac{2\gamma K}{2} \right). \end{aligned} \quad (24-5)$$

۵-۳- نتیجه گیری

در اینجا معادله‌ی شروینگر تغییر یافته را در حضور طول کمینه بررسی کردیم. سیستم ترمودینامیکی متشکل از N نوسانگر در حضور طول کمینه در نظر گرفته شد. با توجه به نتایج مرجع [۲۷] فرکانس نوسانگر در حضور طول کمینه افزایش می‌یابد، پس به تبع انرژی سیستم ترمودینامیکی تعریف شده نیز افزایش می‌یابد. و روابط جدیدی برای پارامترهای ترمودینامیکی از روی این انرژی بدست می‌آید، در واقع سیستم‌های آماری نیز با حضور طول کمینه، دچار تغییر می‌شوند

فصل هشتم

تحول زمانی به ازای پتانسیل های مختلف در مکانیک
کوانتوم تغییر شکل یافته

۶- تحول زمانی به‌ازای پتانسیل‌های مختلف در مکانیک کوانتوم تغییر شکل یافته

در این کار که به بررسی تغییرات زمانی مکان و تکانه در حضور طول کمینه می‌پردازیم. و سعی بر آن داریم تا روش ساده‌تری را جایگزین روش طولانی بسط ارنفست کنیم و به یک فرمول کلی برسیم تا در شرایط مختلف مانند ذره‌ی آزاد، سقوط آزاد و نوسانگر هماهنگ، آن را به کار ببریم [۲۷]. در این فصل برای بدست آوردن معادله‌ی زمانی نوسانگر هماهنگ از روش تقریب متوالی [۲۸] استفاده کرده‌ایم.

۶-۱- تغییرات زمانی هامیلتونی‌های غیر نسبیتی

اجازه دهید که در ابتدا به چند نکته اشاره کنیم، هامیلتونی غیر نسبیتی در مکانیک کوانتوم معمولی به این فرم نوشته می‌شود

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(x), \quad (۶-۱)$$

در اینجا P, V و m به ترتیب پتانسیل کل و تکانه و جرم را مشخص می‌کند. در اینجا معادله‌ی شروینگر تعمیم یافته را با طول کمینه یا GUP در نظر می‌گیریم، با قرار دادن عملگرهای مکان و تکانه در مکانیک کوانتوم تعمیم یافته به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\beta}{m} p^4 + O(\beta^2) + V(x). \quad (۶-۲)$$

با توجه به اینکه قضیه‌ی ارنفست^۱ در روابط مکانیک کوانتوم تعمیم یافته معتبر نیست [۲۹]، بنابراین باید به جای آن از حدود کلاسیکی بوسیله‌ی روابط جابجایی گروه‌های پواسون^۲ برای دو عملگر مکان و تکانه

^۱ Ehrenfest's theorem

^۲ Poisson brackets

استفاده کرد.

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{X}, \hat{P}] = 1 + \beta \hat{P}^2 \rightarrow \{X, P\} = 1 + \beta P^2, \quad (3-6)$$

$$\frac{1}{i\hbar}[\hat{x}, \hat{p}] = 1 \rightarrow \{x, p\} = 1, \quad (4-6)$$

این نتیجه، به رابطه‌ی زیر منجر می‌شود.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \{x, H\} &= \left\{ x, \frac{p^2}{2m} \right\} + \left\{ x, \frac{\beta p^4}{m} \right\} = \frac{p}{m} + \frac{4\beta p^3}{m}, \\ \frac{dp}{dt} = \{p, V(x)\} &= -\frac{dV(x)}{dx}, \end{aligned} \right. \quad (5-6)$$

$$(6-6)$$

یک رابطه‌ی کلی برای تغییرات زمانی بدست آورده‌ایم که از این رابطه در شرایط مختلف به کار می‌بریم.

۶-۱-۱- تغییرات زمانی ذره‌ی آزاد در حضور طول کمینه

می‌دانیم که پتانسیل ذره‌ی آزاد صفر است، پس هامیلتونی برای این ذره اینگونه تعریف خواهد

$$H = \frac{P^2}{2m}, \quad (7-6)$$

تغییرات زمانی مکان معادله‌ی (۵-۶) را پوشش می‌دهد، اما برای مومنتوم خواهیم

$$\frac{dp}{dt} = 0 \rightarrow p(t) = c_1. \quad (8-6)$$

با قرار دادن در معادله‌ی (۵-۶) رابطه‌ی بین مکان و زمان به این شکل نوشته خواهد شد

$$x(t) = \frac{c_1 t}{m} + \frac{4\beta c_1^3 t}{m} + c_2. \quad (9-6)$$

به خوبی می بینیم که به ازای صفر شدن پارامتر تغییر شکل رابطه‌ی بالا، شرایط مکانیک کوانتوم معمولی را دارا می باشد.

۶-۱-۲- تغییرات زمانی هامیلتونی تعمیم یافته با پتانسیل خطی

می دانیم که در سقوط آزاد گرانش تنها نیروی اعمالی از سوی محیط به ذره است، در اینجا نیروی گرانش را به دلخواه در راستای محور x در نظر می گیریم

$$V(x) = mgx. \quad (۱۰-۶)$$

بدین ترتیب هامیلتونی به شکل زیر تعریف خواهد شد

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\beta}{m} p + mgx, \quad (۱۱-۶)$$

محاسبات تغییرات زمانی مکان مانند بخش های قبل خواهد بود اما تغییرات زمانی مومنوم به صورت زیر است.

$$\frac{dp}{dt} = \{p, mgx\} = -mg, \quad (۱۲-۶)$$

$$p(t) = -mgt + c_p. \quad (۱۳-۶)$$

با جایگذاری در معادله‌ی (۵-۶) به آسانی بدست خواهیم آورد

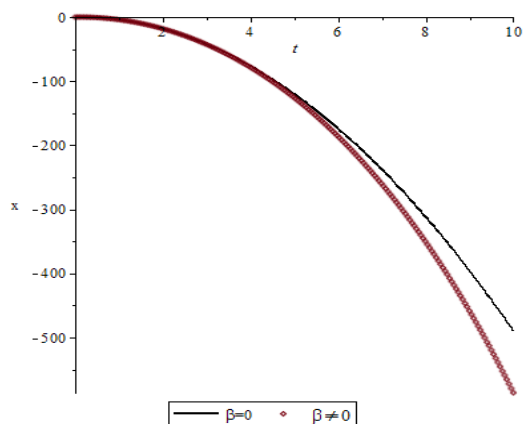
$$\frac{dx}{dt} = \frac{(-mgt + c_p)}{m} + \frac{\beta(-mgt + c_p)}{m}, \quad (۱۴-۶)$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{c_p}{m}t - \beta m^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{2}} + \beta mg^{\frac{1}{2}}c_p t^{\frac{3}{2}} - \beta gc_p^{\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{2}} + \frac{\beta}{m}c_p^2 t + c_x, \quad (۱۵-۶)$$

برای این حالت نیز با صفر شدن پارامتر بتا معادله به معادله‌ی مکان-زمان در مکانیک کوانتوم معمولی

بازمی‌گردد.

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{c_r}{m}t + c_r, \quad (6-16)$$



شکل ۶-۱: نمودار مکان بر حسب زمان (متر بر ثانیه) در حضور و غیاب طول کمینه

در شکل ۶-۱ تغییرات مکان بر حسب زمان در دو حالت $\beta = 0$ و $\beta = 1$ با هم مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که زمان کم‌تری در مکانیک کوانتومی تعمیم‌یافته نسبت به مکانیک کوانتومی معمول در یک بازه‌ی طولی مشخص سپری می‌شود.

۶-۱-۳- تغییرات زمانی نوسانگر هماهنگ ساده

به دلیل اهمیت مسائل نوسانگر هماهنگ ساده از در حوزه‌ی فیزیک مدرن و کلاسیک، در این بخش نیز به بررسی تغییرات زمانی یک نوسانگر هماهنگ پرداخته‌ایم. روابط به شیوه‌ی جدیدی و با استفاده از روش تقریب‌های متوالی بدست آمده است.

در ابتدا هامیلتونی نوسانگر هماهنگ را در حضور طول کمینه می‌نویسیم

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{\beta}{m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad (17-6)$$

پتانسیل نوسانگر $\frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ است.

$$\frac{dp}{dt} = \left\{ p, \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right\} = -m \omega^2 x, \quad (18-6)$$

با استفاده از رابطه‌ی قبل مشتق مرتبه‌ی دوم زمان را برای عملگر مومنتوم نیز می‌توان نوشت

$$\frac{d^2 p}{dt^2} = -m \omega^2 \frac{dx}{dt}. \quad (19-6)$$

با جایگذاری معادله (۵-۶) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \omega^2 p = -\epsilon \beta \omega^2 p^2. \quad (20-6)$$

معادله‌ی بالا به ازای صفر شدن بتا شرایط مکانیک کوانتومی معمول را دارا می‌باشد

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \omega^2 p = 0, \quad (21-6)$$

که به همان معادله‌ی شناخته شده نوسانگر هماهنگ می‌رسیم، پس به این نتیجه می‌رسیم که طول کمینه نوسانگر خطی را به غیر خطی تبدیل می‌کند

این شرایط ما را برآن داشت که برای محاسبه‌ی معادله‌ی (۲۰-۶) و بدست آوردن رابطه‌ی تکانه و زمان

نوسانگر، از روش تقریب‌های متوالی استفاده کنیم

۶-۱-۳-۱ روش تقریب متوالی

با انتخاب $-\beta\omega^2 = \lambda$ داریم

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \omega^2 p = \lambda p. \quad (۶-۲۲)$$

اولین جمله‌ی تقریبی را به این صورت معرفی می‌کنیم

$$p(t) = A \cos(\omega t). \quad (۶-۲۳)$$

با قرار دادن در معادله‌ی خواهیم داشت

$$-A\omega^2 \cos(\omega t) + A\omega^2 \cos(\omega t) = \lambda A \left(\frac{3}{4} \cos(\omega t) + \frac{1}{4} \cos(3\omega t) \right), \quad (۶-۲۴)$$

ساده‌تر نیز می‌توان نوشت

$$\left(-\omega^2 + \omega^2 - \frac{3}{4} \lambda A^2 \right) A \cos(\omega t) - \frac{1}{4} \lambda A^2 \cos(3\omega t) = 0. \quad (۶-۲۵)$$

به ازای صفر قرار دادن جمله اول خواهیم داشت

$$\omega = \left(\omega^2 - \frac{3}{4} \lambda A^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (۶-۲۶)$$

همان‌طور که انتظار داشتیم فرکانس تابعی از دامنه شده است، چون در رابطه جمله‌ی جدیدی از

$\cos(3\omega t)$ ظاهر شده است پس این بار جمله‌ی فرضی را اینچنین معرفی می‌کنیم.

$$p(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_3 \cos(3\omega t). \quad (27-6)$$

با ادامه روش قبل خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & \left(-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{4} \lambda A_1^2 \right) A_1 \cos(\omega t) + \left(-9A_3 \omega^2 + \omega_0^2 A_3 - \frac{1}{4} \lambda A_1^2 \right) \cos(3\omega t) \\ & + (\text{terms involving } A_3 \lambda \text{ and } \cos(5\omega t)) = 0. \end{aligned} \quad (28-6)$$

مقدار جمله‌ی دوم را برابر صفر در نظر می‌گیریم و بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\omega_0^2 - \frac{3}{4} \lambda A_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ A_3 &= \frac{\beta A_1^3}{\lambda + 27\beta A_1^2} \approx \frac{\beta A_1^3}{\lambda}, \end{aligned} \quad (29-6)$$

پس تقریب دوم به این شکل نوشته خواهد شد

$$p(t) = A_1 \cos(\omega t) + \frac{\beta A_1^3}{\lambda} \cos(3\omega t). \quad (30-6)$$

می‌توان راه‌حل را با اضافه کردن جملات جدید ارتقا داد

$$p(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_3 \cos(3\omega t) + A_5 \cos(5\omega t), \quad (31-6)$$

بعد از انجام محاسبات مشابه خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\omega_0^2 - \frac{3}{4} \lambda A_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ A_3 &= \frac{\beta A_1^3}{\lambda}, \\ A_5 &= \frac{\beta^2 A_1^5}{64}, \end{aligned} \quad (32-6)$$

و باز هم با قرار دادن پارامترهای بدست آمده خواهیم داشت

$$p(t) = A_1 \cos(\omega t) + \frac{\beta A_1^r}{\lambda} \cos(3\omega t) + \frac{\beta^2 A_1^{\Delta}}{64} \cos(5\omega t) + (\text{terms involving } A_0 \lambda \text{ and } \cos(7\omega t)), \quad (33-6)$$

همان طور که ملاحظه می شود از این مرحله به بعد، $O(\beta^2)$ ظاهر می شود، پس می توان ادامه ی محاسبات را در این مرتبه ی تقریب متوقف کرد.

با داشتن رابطه (31-6) می توان تغییرات زمانی عملگر مکان را نیز بدست آورد.

$$x(t) = \frac{A_1}{m\omega} \sin(\omega t) + \frac{3\beta A_1^r}{m\omega} \sin(\omega t) + \frac{3\beta A_1^r}{\lambda m\omega} \sin(3\omega t) + O(\beta^2), \quad (34-6)$$

که به ازای صفر شدن پارامتر تغییر شکل به روابط مکانیک کوانتوم معمول باز می گردد.

۴-۱-۶- نتیجه گیری

در این فصل تغییرات زمانی مکان و تکانه در حضور طول کمینه بررسی شد و دو نتیجه ی جالب بدست آمد:

اول اینکه نشان داده شد که در حضور طول کمینه، نوسانگر خطی به غیر خطی تبدیل می شود. دوم اینکه با توجه بیش تر شدن فرکانس نسبت به حالت اولیه $\omega > \omega_0$ ، می توان این برداشت را داشت که با حضور طول کمینه پایداری سیستم کاهش می یابد. در هر صورت این نتایج جدید و قابل تامل اند.

نتیجه‌گیری

۱- از آنجایی که طول کمینه بر روی تمامی روابط مکانیک کوانتوم معمولی اثر می‌گذارد، باعث تغییر در هامیلتونی و در نتیجه انرژی و تابع موج سیستم شده است. ثابت‌های تغییر شکل طول کمینه را می‌توان مانند ضرائب اختلال در نظر گرفت و مراتب اختلال را سیستم را در حضور طول کمینه، اثر گرانشی بدست‌آورد.

۲- روابط طول کمینه در مکانیک کوانتومی نه تنها جوابگوی سیستم‌های خطی است بلکه به خوبی در فضاهای چند بعدی قابل تعمیم است و به ازای حذف پارامتر تغییر شکل، شرایط مکانیک کوانتومی معمولی را دربرمی‌گیرد. علاوه بر آن قابل تعمیم در روابط نسبیتی و غیر نسبیتی نیز می‌باشد.

۳- نتایج نشان می‌دهد که تصحیح انرژی تراز حالت پایه‌ی اتم هیدروژن همیشه مثبت است. با مطالعه‌ی اتم هیدروژن در مکانیک کوانتوم تعمیم یافته در خواهیم یافت که با در نظر گرفتن این اثر در هامیلتونی به علت کوچک بودن، به عنوان عامل اختلال در نظر گرفته می‌شود، از این رو در جابجایی لمب را توجیه می‌کند. مقایسه‌ی نتایج نظری بدست‌آمده با نتایج تجربی می‌تواند به ما برای تخمین طول کمینه کمک کند.

۴- اثر طول کمینه حتی بر روی حالت‌های پراکندگی سیستم اثر می‌گذارد و شرایط جدیدی را برای پراکندگی ایجاد می‌کند. با توجه به روابط جبری طول کمینه، به مراتب بالاتری از پراکندگی دست می‌یابیم.

۵- مطالعه‌ی آماری بر یک سیستم ترمودینامیکی در حضور طول کمینه به ما نشان داد که در حضور طول کمینه تابع پارش جدیدی را بدست می‌آوریم که همین امر باعث تغییر در انرژی درونی، بی‌نظمی و به‌طور کلی رفتار آماری سیستم می‌شود.

- ۶- سیستم نوسانی هماهنگ در مکانیک کوانتوم تعمیم یافته از حالت خطی خود خارج می شود و رفتار غیر خطی از خود نشان می دهد. تغییرات زمانی سیستم نوسانی با حضور طول کمینه، نسبت به مکانیک کوانتومی معمول سریع تر صورت می گیرد.
- ۷- سیستم در حضور طول کمینه ناپایدارتر می شود.
- ۸- پتانسیل مرکزی در فضای مکانیک کوانتومی تعمیم یافته غیر مرکزی می شود.
- ۹- از طرفی با داشتن تابع موج و طیف انرژی، می توان میزان واپاشی را در پارامترهای طول کمینه محاسبه کرد. به علاوه شعاع باری، فاکتور شکل و ترازهای لانداو نیز بدست خواهد آمد.
- ۱۰- با توجه به اینکه تعمیم عدم قطعیت در انرژی های بالا اتفاق می افتد به خوبی نیز برای برهم کنش های ضعیف قابل کاربرد است.

مراجع :

- [۱] مکانیک کوانتومی نورالدین زیتلی- جلد اول انتشارات آونگ اندیشه. صفحات ۴۳-۵۷.
- [۲] H. Kragh, "Heisenberg's lattice world: the ۱۹۳۰ theory sketch", **Am. J. Phys.** ۶۳, ۵۹۵ (۱۹۹۵).
- [۳] A. Kempf, G. Mangano, and R.B. Mann, (۱۹۹۵) . **Phys. Rev. D** ۵۲ ۱۱۰۸.
- [۴] پایان نامه کارشناسی ارشد سید داوود ساداتیان. روابط عدم قطعیت تعمیم یافته در مدل های کیهانی. دانشگاه علوم پایه مازندران. ایران
- [۵] M. Maggiore (۱۹۹۳), "The generalized uncertainty principle in quantum gravity". **phys Lett. B** ۳۰۴ ۶۵.
- [۶] PHD thesis S. Benczik, "(۲۰۰۷) Investigations on the Minimal-Length Uncertainty. January ۲۲, Blacksburg, Virginia
- [۷] Z. Lewis, A. Roman, and T. Takeuchi, (۲۰۱۲) **arXiv:** ۱۴۰۲.۷۱۹۱۷۱
- [۸] S. Das, E. C. Vagenas, (۲۰۰۹) **Can. J. Phys.** ۸۷ ۲۳۳.
- [۹] M. M. Khalil" Some Implications of Two Forms of the Generalized Uncertainty Principle"
- [۱۰] P. Pedram, (۲۰۱۰)" On the modification of Hamiltonians' spectrum in gravitational quantum mechanics" **arXiv:** ۱۰۰۳.۲۷۶۹۷۱.
- [۱۱] S. Das, E. C. Vagenas, and A. F. Ali, (۲۰۱۰)," A proposal for testing Quantum Gravity in the lab", **Phys. Lett. B** ۶۹۰ ۴۰۷.
- [۱۲] H. Hassan abadi, P. Hooshmand, S. Zarrinkamar (۲۰۱۴), accepted in few body systems.
- [۱۳] H. Hassanabadi, E. Maghsoodi, Akpan N.Ikot, and S. Zarrinkamar (۲۰۱۳) " **Advances in High Energy Physics** Volume ۲۰۱۳ Article ID ۹۲۳۶۸۶. "

[۱۴] A. F. Nikiforov, and V. B. Uvarov. **Spherical Function of Mathematical Physics.** **Birkhauser**, Berlin (۱۹۸۸).

[۱۵] C. Tezcan, and R. Sever. *Int. J Theor. Phys.* ۴۸,۳۳۷ (۲۰۰۹).

[۱۶] Sakurai, J. J. (۱۹۶۷). **Advanced Quantum Mechanics.** Addison Wesley. ISBN ۰-۲۰۱-۰۶۷۱۰-۲.

[۱۷] Davydov, A.S. (۱۹۷۶). **Quantum Mechanics**, ۲nd Edition. Pergamon. ISBN ۰-۰۰-۸-۰۲۰۴۳۷-۶

[۱۸] حسن حسن‌آبادی و پریسا هوشمند (۱۳۹۳) اثر گرانش کوانتومی در بررسی ذرات نسبیتی در میدان مغناطیسی. فرستاده شده به کنفرانس فیزیک ایران - زاهدان

[۱۹] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar , A.A. Rajabi ,(۲۰۱۴) **Physics Letters B** ۷۱۸ (۲۰۱۳) ۱۱۱۱-۱۱۱۳.

[۲۰] F.Brau,(۱۹۹۹) "Minimal Length Uncertainty Relation and Hydrogen Atom" **J. Phys. A** ۳۲:۷۶۹۱-۷۶۹۶.

[۲۱] T. Udem et al. (۱۹۹۷), **Phys. Rev. Lett.** ۷۹, ۲۶۴۶ ,

[۲۲] T. L. A. Oakes, R. O. Francisco, J. C. Fabris, and J. A. Nogueira,(۲۰۱۳) "Ground State of the Hydrogen Atom via DiracEquation in a Minimal Length Scenario" **Eur. Phys. J. C** .

[۲۳] H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar ,and E. Maghsoodi,(۲۰۱۲) **Phys. Lett. B**, ۷۱۸ ۷۸۹ ۶۸۴.

[۲۴] A. Arda, O. Aydoğdu, R. Sever,(۲۰۱۱) **Phys. Scr.** ۸۴,۰۲۵۰۰۴.

[۲۵] H. Hassanabadi, S. S. Hosseini, A. Boumali, and S. Zarrinkamar (۲۰۱۴) "The statistical properties of Klein-Gordon oscillator" in noncommutative space accepted in **J math physics**.

[۲۶] M. H. Pacheco, R. R. Landim, C. A. S. Almeida.(۲۰۰۳)–“One-dimensional Dirac oscillator in a thermal bath” **Phys. Lett. A**,۳۱۱-۹۳-۹۶

[۲۷] H. Hassanabadi, and P. Hooshmand, (۲۰۱۴)Time Evolution of the some Nonrelativistic Hamiltonians Modified with Minimal Length article in press.

[۲۸] G. R. Fowles, and G. L. Cassiday (۲۰۰۵), **Analytical Mechanics**, Thomson.

[۲۹] K. Nozari, T. Azizi (۲۰۰۶) **Gen. Relativ. Gravit.** ۳۸(۲): ۳۲۵–۳۳۱

Abstract

We well understand the Heisenberg principle which is the building block of quantum mechanics. The principle demonstrates the wave nature of particles and shows that the noncommutating quantities will not be simultaneously measurable. We also know that many hypotheses and principles of physics have been violated or modified as during time. In particular, the Heisenberg uncertainty principle needs to be modified at high energies. At high energies, the gravitational effects appear and indicate of the existence of so-called minimal length. The generalized uncertainty principle implies the reconsideration of quantum mechanics. Here, we have generalized quantum mechanics and has therefore become one of the most up-to-date research topics during past three decades. The present thesis has been written on the study of relativistic and nonrelativistic particles in generalized quantum mechanics. Here, we have generalized the uncertainty relations to three spatial dimensions, studied the time variation of oscillating system and calculated the thermodynamics properties of the N-particle harmonic system in the presence of minimal length.

In addition we reviewed and studied the related relation in nuclear physics.

Keywords: Minimal length, Gravity effect, Generalized uncertainty principle, Modified Quantum mechanics.



Shahrood University
Physics Department

Master of Science Thesis

**Using of generalized uncertainly relation for investigation relativistic and
non-relativistic particles**

Parisa Hooshmand

Supervisor:
Dr. Hassan Hassanabadi

Semtember-۲۰۱۴

