بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه شاهرود

دانشکده فیزیک

گروه هسته ای

بررسی تک قطبی مغناطیسی در مکانیک کوانتومی

دانشجو :

سپیده سرگلزایی پور

اساتید راهنما :

دکتر حسن حسن آبادی

دکتر نسرین صالحی

پایان نامه کارشناسی ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ماه ۱۳۹۳

پیوست شماره ۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : فیزیک

گروه : هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سپیده سرگلزایی پور

تحت عنوان: بررسی تک قطبی مغناطیسی در مکانیک کوانتومی

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیـابی و بـا درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی :	حسن حسن آبادی	نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :	نسرین صالحی	نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی :	**علی اکبر رجبی**	نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :	**حسین توکلی**		
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

تقدیم به

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پر بار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم ودانش تلاش نمایم . والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چرا که این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر از فراز و نشیب آموختند. آموزگارانی که برایم زندگی؛ بودن و انسان بودن را معنا کردند حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان....

تقدیم به برادر وخواهرانم

که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بودند و تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات ، و وجودشان مایه دلگرمی من می باشند.

تشکر و قدردانی

نخستین سپاس و ستایش از آن خداوندی است که بنده کوچکش را در دریای بیکران اندیشه، قطره‌ای ساخت تا وسعت آن را از دریچه اندیشه‌های ناب آموزگارانی بزرگ به تماشا نشیند .لذا اکنون که در سایه سار بنده نوازی‌هایش پایان نامه حاضر به انجام رسیده است، بر خود لازم می‌دانم تا مراتب سپاس را از بزرگوارانی به جا آورم که اگر دست یاریگرشان نبود، هرگز این پایان نامه به انجام نمی‌رسید.

ابتدا از استاد راهنمای بزرگوار و اندیشمند خود جناب آقای دکتر حسن حسن آبادی که راهنمایی‌های مهم ایشان نقش ارزنده‌ای در پیشبرد این تحقیق داشته‌است صمیمانه تشکر می‌کنم و بخاطر همه لحظات ارزشمندی که در یادگیری از این استاد بزرگوار سپری شد سپاسگزارم. هم چنین از استاد بزرگوارم خانم دکتر نسرین صالحی که راهنمائی های لازم را در جهت تصحیح و کامل نمودن این پایان نامه از اینجانب دریغ ننموده اند تشکر وقدردانی می نمایم. در خاتمه از کلیه اساتید این دوره کمال تشکر را دارم.

سپاس آخر را به مهربانترین همراهان زندگیم، به پدر، مادر عزیزم تقدیم می‌کنم که حضورشان درفضای زندگیم مصداق بی‌ریای سخاوت بوده است .

ودرآخر از دوست عزیزم سرکارخانم زهرادرخشانی که همواره در طول تحصیل در کنارم بودند، سپاسگزارم.

تعهد نامه

اینجانب **سپیده سرگلزایی پور** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **فیزیک – هسته‌ای** دانشکده **فیزیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **بررسی تک قطبی مغناطیسی در مکانیک کوانتومی** تحت راهنمائی

دکتر **حسن حسن آبادی** و دکتر **نسرین صالحی** متعهد می‌شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ :۱۳۹۳/۰۶/۲۲

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

تک قطبی مغناطیسی، ذره‌ای شبیه به الکترون است، با این تفاوت که بار مغناطیسی آن بسیار بیشتر از بار الکتریکی است. در سال ۱۹۳۱ دیراک وجود ذراتی را پیشنهاد کرد که به طور ذاتی تولید میدان مغناطیسی می‌کنند از این رو نام آنها را تک قطبی مغناطیسی گذاشت. هر چند قبل از وی نیز، بحث هایی در زمینه تک قطبی مغناطیسی به طور پراکنده مطرح بود. از جمله، پوانکاره[۱] در سال ۱۸۹۶ حرکت یک بار الکتریکی را در میدان یک سیم پیچ مغناطیسی طویل و باریک که انتهای آن میدانی شبیه، به یک تک قطـبی مغناطیسی تولید می‌کند، را بررسی کرد. عدم تقارن بین بارالکتریکی و مغناطیسی یکی از قدیمی‌ترین معماها در فیزیک است. اوایل قرن ۱۹ بحث‌هایی مرتبط با مغناطیس از ماده و امکان وجود بارمغناطیس منزوی وجود داشت. ایده تک قطبی مغناطیسی در فکر دیراک همزمان با پیشنهاد وی مبنی بر وجود ذراتی شبیه به الکترون ولی با بار مثبت بود، که نام آنها را پوزیترون نهاده بود. در این پایانامه ابتدا در فصل اول مطالبی در مورد خواص تک قطبی مغناطیسی و مشاهده تک قطبی مغناطیسی در یک میدان مغناطیسی مصنوعی، را به طور مختصر بیان کرده، سپس در فصل دوم فرم معادله ماکسول و پتانسیل تک قطبی مغناطیسی را توضیح می‌دهیم. در فصل سوم سیستم میسز - کپلر و کالوزا - کلاین را در حضور تک قطبی مغناطیسی مورد بررسی قرار داده‌ایم. فصل چهارم راه حل تقریبی از معادله کلاین-گوردون را برای پتانسیل هولسن در حضور میدان مغناطیسی آهارانوف- بوهم در نظر می‌گیریم و طیف انرژی و ویژه تابع آن را محاسبه می‌کنیم. سپس در فصل پنجم میدان تک قطبی مغناطیسی دیراک را با یک میدان کولن و میدان آهارانوف بوهم در نظر می‌گیریم، این مسأله را در سه بعد فضایی محاسبه کرده و بستگی ویژه مقدار انرژی را به برخی از پارامترهای پتانسیل و برخی دیگر از پارامترهای موجود در مسأله توصیف می‌کنیم. در نهایت در فصل ششم معادله دیراک ۳+۱ بعدی را با جفت شدگی غیرکمینه

[۱] Henri poincare

پتانسیل همسانگرد خطی شعاعی در حضور پتانسیل الکترومغناطیسی در نظر گرفته، این مسئله را با میدان تک قطبی مغناطیسی آهارانوف بوهم بررسی می‌کنیم و خواص ترمودینامیکی این سیستم را محاسبه می‌نماییم.

کلمات کلیدی: تک قطبی‌مغناطیسی، سیستم کالوزا - کلاین، سیستم میسز - کپلر، معادله دیراک، معادله کلاین گوردون .

لیست مقالات مستخرج از پایانامه:

- The Magnetic Monopole Field and the Relativistic Hydrogen Atom, Submitted
- Relativistic Motion of a Charged Spin−Zero Dyon in the Presence of Aharonov-Bohm Magnetic Field and Hulthén Potential, Submitted
- Thermodynamic Properties of the Three-dimensional Dirac Oscillator with Aharonov-Bohm Field and Magnetic Monopole Potential, Submitted

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فصل اول

معرفی تک قطبی مغناطیسی

۱-۱- مقدمه

منظور از تک قطبی مغناطیسی، ذراتی مشابه ذرات بـاردار الکتریکی است. همانگونه که ذرات باردار الکتریکی، منبع میدان الکتریکی هستند، تک قطبی مغناطیسی نیز منبع میدان مغناطیسی می‌باشند. حدود ۸۰ سال پیش یکی از بنیان‌گذاران فیزیک کوانتومی به نام دیراک[۲]، ساختار مکانیک کوانتومی را کشف کرد که در آن امکان وجود تک قطبی مغناطیسی وجود داشت[۱]. در سال ۱۹۳۱ دیراک نشان داد که در گسترهٔ مکانیک کوانتومی بارهای مغناطیسی کوانتیده می‌توانند وجود داشته باشند [۲]. دیراک تک قطبی مغناطیسی را به منظور توضیح بارالکتریکی کوانتیده معرفی کرد، سپس رابطه بین بار الکتریکی بنیادی e و بار مغناطیسی بنیادی g را به صورت زیر بیان کرد.

$$g = \frac{n\hbar c}{۲e} = n\, g_D \;, \; n = ۱,۲,... \qquad (۱-۱)$$

که در رابطه فوق (n) عدد صحیحی است و $g_D = \frac{\hbar c}{۲e^۲} e = \frac{۱۳۷}{۲} e$ را واحد بار دیراک نامید.

سرانجام در سال ۱۹۷۴، هوفت[۳] و الکساندر پولیاکف[۴] نشان دادند که تک‌قطبی‌های مغناطیسی در نظریه وحدت[۵] پیش‌بینی می‌شوند. هوفت بیان داشت که در همهٔ نظریه‌های پیمانه‌ای که گروه $U(۱)$ زیرگروهی از گروهی بزرگتر مانند $SU(۲)$ یا $SU(۳)$ می‌باشد، تک قطبی‌های مغناطیسی می‌توانند پدیدار شوند. جرم آنها نیز باید از مرتبهٔ $۱۳۷ M_W$ باشد که M_W جرم نوعی بوزون برداری از مرتبه $\frac{GeV}{c^۲}$ است [۳,۴]. در نظریه‌های پیشروتر مانند نظریهٔ ابرریسمان[۶] که در بردارندهٔ گرانش نیز می‌باشد تک -

---

[۲] Dirac
[۳] Hooft
[۴] A.M.Polyakov
[۵] Grand unified theories
[۶] Super string

قطبی‌مغناطیسی نیز وجود دارد [۵]. بنابراین از دیدگاه نظری، تک‌قطبی مغناطیسی باید وجود داشته باشد. هرچند هنوز یافت نشده‌اند ولی همچنان جستجو در گسترهٔ فیزیک ذرات و کیهان‌شناسی پی‌گرفته می‌شود.

۱-۲- خواص اصلی تک قطبی مغناطیسی

خواص اصلی تک قطبی‌های مغناطیسی از رابطه دیراک (۱-۱) به دست می‌آید. رابطه دیراک از چرخش الکترون در اطراف تک قطبی مغناطیسی توسط معادله نسبیتی دیراک از این الکترون شرح داده شده است. این نتیجه به همراه شرایط کوانتیده بار مغناطیسی و الکتریکی دیراک به صورت زیراست

$$\frac{e\,q}{۴\pi\varepsilon_{.}c^{۲}}=\frac{n\,\hbar}{۲} \qquad (۲-۱)$$

اندیس $(n=۱,۲,...)$ این مقادیر را به خود می‌گیرد. در اینجا e نمایش بار الکتریکی الکترون، q بار مغناطیسی تک قطبی مغناطیسی و c سرعت نور و ε_0 ضریب گذردهی الکتریکی خلأ در ارتباط با ضریب گذردهی مغناطیسی خلأ به صورت $\left(\mu_{.}=\frac{۱}{\varepsilon_{.}c^{۲}}\right)$ است و $\hbar$ ثابت پلانک می‌باشد، و برای اثبات رابطه (۱-۲) به صورت

زیر عمل می‌کنیم. سیستمی متشکل از یک تک قطبی، یک الکترون و مؤلفه‌ی شعاعی تکانه زاویه‌ای کوانتیده کل را در نظر می‌گیریم و با استفاده از نظریه‌ی (بوهر زومرفیلد[۷]) رابطه (۱-۲) را به سادگی به دست

می‌آوریم[۶]. تک قطبی مغناطیسی را به عنوان "هسته" در نظر می‌گیریم و الکترون اطراف تک قطبی مغناطیسی در حال چرخش است.

---

[۷] Bohr sommerfeld

فرض کنیم تک قطبی مغناطیسی با بارمغناطیسی q متناظر با بارالکتریکی $\frac{q}{c}$ است. با این فرض که این مجموعه تحت برهمکنش الکترواستاتیک و مغناطیسی قرار می‌گیرد و الکترون دوار پایدار با سرعت v در فاصله R در اطراف تک قطبی مغناطیسی در حال چرخش است. بنابراین شرایط زیر از یک مدار دایره‌ای برآورد می‌شود:

$$F_e = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{e\frac{q}{c}}{R^۲} \quad , F_m = \frac{\mu_۰}{۴\pi}\frac{e\,q\,v}{R^۲} \rightarrow$$

$$F_e + F_m = \frac{m\,v^۲}{R} \rightarrow \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{e\frac{q}{c}}{R^۲} + \frac{\mu_۰}{۴\pi}\frac{e\,q\,v}{R^۲} = \frac{m\,v^۲}{R}. \qquad (۳-۱)$$

جمله دوم در سمت چپ رابطه (۱-۳) نشانگر نیروی مغناطیسی کلاسیکی جاذبه بین تک قطبی و سیستم کوچک، جمله اول در سمت چپ رابطه (۱-۳) نشاندهنده نیروی الکترواستاتیک جاذبه بین تک قطبی و سیستم کوچک بوده در حالی که سمت راست رابطه (۱-۳) نشانگر دامنه این نیروی مرکزگرا[۸] برای جرم الکترون m است. فرض کنید شدت نیروی الکترواستاتیک و نیروی مغناطیس با هم برابر باشد، در این صورت:

$$\frac{\mu_۰}{۴\pi}\frac{e\,q\,v}{R^۲} = \frac{۱}{۴\pi\varepsilon_۰}\frac{e\frac{q}{c}}{R^۲} \qquad (۴-۱)$$

سپس معادله (۱-۲) به صورت زیر به دست می‌آید:

[۸] Centrifugal force

$$\frac{\mu_{0}}{4\pi}\frac{eqv}{R^{2}}+\frac{\mu_{0}}{4\pi}\frac{eqv}{R^{2}}=\frac{mv^{2}}{R}\rightarrow\frac{2\mu_{0}}{4\pi}\frac{eqv}{R^{2}}=\frac{mv^{2}}{R} \qquad (۱-۵)$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{e\frac{q}{c}}{R^{2}}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{e\frac{q}{c}}{R^{2}}=\frac{mvc}{R}\rightarrow\frac{1}{4\pi\varepsilon_{0}}\frac{eq}{c^{2}}=\frac{mvR}{2} \qquad (۱-۶)$$

تکانه کوانتیده مداری از سیستم ، به خاطر چرخش الکترون در اطراف تک قطبی مغناطیسی به دست می‌آید :

$$\left|\vec{L}\right|=\left|\vec{r}\times\vec{P}\right|=r\,m\,v=n\hbar\ ,\ m\,v\,R=n\hbar \qquad (۱-۷)$$

که $n > 0$ است، و $\hbar$ نمایش ثابت پلانک است. بنابراین رابطه (۱-۶) به معادله زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{eq}{4\pi\varepsilon_{0}c^{2}}=\frac{n\hbar}{2} \qquad (۱-۸)$$

$$\mu_{0}=\frac{1}{\varepsilon_{0}c^{2}}$$

رابطه (۱-۸) به شکل هم ارزی دقیق از رابطه کوانتیدگی بار الکتریکی و مغناطیسی، به رابطه (۱-۲) تبدیل می‌شود، این شرایط از هم ارزی بین نیروی الکترواستاتیک و مغناطیس از رابطه (۱-۴) به دست می‌آید.

اگر

$$v=c \qquad (۱-۹)$$

به ازای $(n>1)$ برآورد می‌شود که الکترون از هر مدار دایره‌ای با سرعت نور انتشارمی‌یابد. همچنین با اعمال روابطه (۱-۹) در (۱-۷) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$mvR = n\hbar \rightarrow R = \frac{n\hbar}{mv} = \frac{n\hbar}{mc} = n\lambda_{cred} \qquad (۱۰-۱)$$

$\lambda_{cred} = \frac{\hbar}{mc}$ نمایش طول موج کامپتون از این الکترون است.

۱-۲-۱- ثابت جفت شدگی

در قیاس با ثابت ساختار ریز الکتریکی $\alpha = \frac{e^{۲}}{\hbar c} \cong \frac{۱}{۱۳۷}$ ، ثابت جفت شدگی مغناطیسی بدون بعد است که عبارت از $\alpha_g = \frac{g_D^{۲}}{\hbar c}$ است .

۱-۲-۲- انرژی تک قطبی مغناطیسی

انرژی W در میدان مغناطیسی از رابطه $\left(W = n\, g_D\, B\, L \cong ۱.۸\times ۱۰^{۱۱} GeV\right)$ به دست می‌آید. در یک طول بسیار بزرگ $L=۱Kpc$, $B \cong ۳\mu G$ این انرژی توسط یک تک قطبی به دست می‌آید. Kpc یکی از واحدهای بیان فواصل نجومی که برابر با ۳۲۵۹ سال نوری و ۲۰۶۰۰۰ واحد نجومی است .پارسک[۹] در واقع فاصله‌ای است که فاصله متوسط زمین تا خورشید یعنی یک واحد نجومی به اندازه یک ثانیه قوسی دیده می‌شود. کیلوپارسک (kpc) برابر با ۱۰۰۰ پارسک است. برای نمونه گفته می‌شود فاصله خورشید تا مرکز کهکشان راه شیری ۸ کیلو پارسک است [۷].

۱-۲-۳- جرم تک قطبی مغناطیسی

از جرم کلاسیکی تک قطبی‌های مغناطیسی دیراک پیش بینی واقعی وجود ندارد و برآورد آن سخت است. فرض کنید شعاع تک قطبی کلاسیک مساوی شعاع الکترون کلاسیکی باشد:

---

۹ Parallax - Second

$$r_M = \frac{g^{۲}}{m_M c^{۲}} = r_e = \frac{e^{۲}}{m_e c^{۲}} \rightarrow m_M = \frac{g^{۲} m_e}{e^{۲}} \cong n\,۴۷۰۰\, m_e \cong n\,۲.۴ \frac{GeV}{c^{۲}} \qquad (۱۱-۱)$$

به این ترتیب نتیجه می‌گیریم جرم تک قطبی‌ها باید نسبتاً بزرگ باشد. پس جستجو برای تک قطبی " کلاسیک دیراک " در شتابدهنده‌هایی با انرژی بالا با استفاده از انواع روش‌های مستقیم و غیرمستقیم صورت می‌گیرد [۸].

۱-۳- تولید تک قطبی مغناطیسی مصنوعی

تقریباً ۸۵ سال پس از آنکه دیراک امکان وجود تک قطبی مغناطیسی را پیش‌بینی کرد، همکاری‌های بین المللی به رهبری دانشگاه آمهرست[۱۰] توسط دیوید هال[۱۱] و تحقیقات میکو[۱۲] در دانشگاه آلتو[۱۳] فنلاند تصاویر تک قطبی مغناطیسی مصنوعی را در آزمایشگاه هال ایجاد کردند. انجام پیشگامانه راه برای تشخیص تک قطبی مغناطیسی در طبیعت می‌تواند به اندازه کشف الکترون پراهمیت باشد.

مقاله‌ای درباره‌ی این اثر، با همکاری هال و میکو، عضو محقق فوق دکتری در دانشگاه آمهرست و میشل ری[۱۴]، کندل [۱۵] و دانشجوی کارشناسی ارشد فنلاندی روکوکسکی[۱۶] در مجله نیچر[۱۷] منتشر شد [۹]. محققان دانشگاه‌های آلتو و کالج آمهرست فنلاند موفق به ساخت اولین تک قطبی مغناطیسی مصنوعی در آزمایشگاه شدند. به طور ساده می‌توان گفت که محققان آهنربایی ساخته‌اند که فقط دارای قطب

[۱۰] Amherst
[۱۱] David. S. Hall
[۱۲] Mikko Mottonen
[۱۳] Aalto
[۱۴] Michael Ray
[۱۵] Saugat Kandel
[۱۶] Emmi Ruokokski
[۱۷] Nature

شمال یا قطب جنوب است؛ این در حالی است که همیشه این باور علمی وجود داشت که در آهنربا هر دو قطب شمال و جنوب باید وجود داشته باشند.

پروژه عظیم دیگری در این راستا توسط شتاب‌دهنده بزرگ هادرونی[۱۸] چند میلیارد یورویی در سرن انجام شد ولی هیچ ذره‌ای با این خاصیت یافت نشد. مدیر این پروژه تحقیقاتی بیان می‌کند که ساخت این تک قطبی مغناطیسی، با توجه به بررسی تک قطبی‌های الکتریکی موجود در طبیعت ساخته شده، افتخار بسیار بزرگی است، وی در ادامه بیان کرد که ساخت تک قطبی مغناطیسی شروع پیشرفت‌های بزرگی در زمینه کوانتوم است.

۱-۱-۳- انواع تک قطبی

تک قطبی وو یانگ، تک قطبی دیراک؛ تک قطبی BPS [۱۹]، تک قطبی هوفت پولیاکوف[۲۰]، تک قطبی یانگ کولن.

۱-۲-۳- مشاهده تک قطبی دیراک در یک میدان مغناطیسی مصنوعی:

تک قطبی مغناطیسی در اسپین یخ[۲۱] و سایرسیستم‌ها تأسیس شده است [۱۰,۱۴]. هال با یک رویکرد نوآورانه به بررسی نظریه‌ی دیراک در خصوص ایجاد و شناسایی تک قطبی مغناطیسی پرداخت. تک قطبی‌های مغناطیسی مصنوعی را در یک میدان الکترومغناطیسی مصنوعی توسط چگالش بوز- انیشتین در گاز اتمی که در یک توالی خاص از تغییر میدان مغناطیسی خارجی می‌تواند منجر به ایجاد تک قطبی مصنوعی شود [۱۵,۱۷] .

---

[۱۸] LHC

[۱۹] Bogomol’nyi-Prasad-Sommerfield

[۲۰] thooft polyakove

[۲۱] Spin ices

مدل‌های نظری قدیمی‌تر که پس از انفجار بزرگ توصیف شده است، پیش بینی می‌کرد که تک قطبی مغناطیسی باید بسیار در دسترس باشند اما مدل‌هایی برای انبساط جهان که بعداً توسعه داده شد نادر بودن شدید این ذرات را توضیح می‌دهد.

۱-۴- تک قطبی‌های مغناطیسی در نظریه میدان

چشم‌انداز در فیزیک نظری در اواسط قرن بیستم به سرعت در حال تغییر بود. در سال ۱۹۶۰ روشن بود که مکانیک کوانتومی تمام فرآیندهای مربوط به ذرات بنیادی را درک می‌کند. در نتیجه میدان کوانتومی ابزار اساسی در فیزیک ذرات بنیادی است. به طورخاص نیروهای هسته‌ای ضعیف و قوی در بردارنده‌ی توصیفی توسط یک تعمیم الکترومغناطیسی به نام " نظریه سنج" یا " نظریه‌ی یانگ میلز" است. در سال۱۹۷۰ الکساندر پولیاکوف در روسیه و جرارد هوفت در هلند خواص نظریه‌ی یانگ میلز را مطالعه کردند.

تک قطبی هوفت پولیاکوف بعدها در نظریه وحدت قرار می‌گیرند. مطابق با این نظریه، جهان در یک فاز متقارن است که در آن الکترومغناطیس قرار دارد. سپس جهان سرد (منبسط) شده و نیروی الکترومغناطیس در یک میدان یانگ میلز پیچیده ظهور می‌کند هنگامی که این اتفاق می‌افتاد تک قطبی‌های مغناطیسی می‌توانند تشکیل شوند.

در بسیاری از نظریه‌ها تعداد این تک قطبی‌های ایجاد شده زمانی که جهان منبسط شد کمیاب می‌شوند. از آنجا که آن‌ها در حال حاضر بیش از توزیع کل جهان هستند و چگالی آن‌ها بیش ازحد کوچک است برای اینکه آن‌ها را شناسایی کنیم باید خوش شانس باشیم. تاکنون تلاش‌های زیادی برای تشخیص تک قطبی مغناطیسی انجام شده اما تا به امروز تک قطبی مغناطیسی یافت نشده است. یکی دیگر از

تئوری‌های یکپارچه که اجازه می‌دهد به تحریک تک قطبی مغناطیسی در ابعاد بالاتر، تئوری کالوزا کلاین است. این نظریه که توسط مالکولم پری[۲۲]، دیوید گراس[۲۳]، رافائل سورکین[۲۴] ارائه شد [۱۸].

برخی از نظریه‌ها وجود ذره‌ای با یک قطب مغناطیسی را پیش بینی می‌کنند اما مشکلی که در این نظریه‌ها وجود دارد: اولاً تولید بار مغناطیسی در آن‌ها است و ثانیاً مشاهده نشدن این ذرات تا به امروز بوده است. اگر مقدار بار را در معادله گاؤس[۲۵] و فارادی[۲۶] که هرکدام از معادلات ماکسول بهره می‌برند، مجهول قرار دهیم، مقدار آن صفر به نظر خواهد رسید خود این موضوع برای پذیرش سخت است زیرا ذرات زیر اتمی حتی کوارک‌ها که نوترون خنثی را تشکیل می‌دهند دارای بار هستند.

در مورد مشکل دوم که به طور مثال تک قطبی مغناطیسی توسط نظریه وحدت پیش بینی می‌شود. در این نظریه تک قطبی‌ها در هنگام شکسته شدن خود به خود گروه پیمانه‌ای وحدت ، که در انرژی‌های بسیار بالا در حدود $10^{15} GeV$ رخ می‌دهد، تشکیل می‌شوند.

در این نظریه‌ها نشان داده می‌شود که تک قطبی‌های نظریه وحدت باید جرم عظیمی حدود $10^{16} GeV$ داشته باشند. همانند دیگر ذرات پیمانه‌ای در نظریه وحدت، هیچ احتمالی برای تولید اینگونه ذرات در شتاب دهنده‌های قابل تصور وجود ندارد. تنها یک آزمایش وجود دارد که در آن واکنشهایی با چنین انرژی بالایی صورت می‌گیرد و آن جهان آغازین بلافاصله پس از انفجار بزرگ اولیه است. در این صورت تک قطبی‌های وحدت باید به تعداد بسیار زیاد در اوایل عمر جهان یعنی $10^{-35} s$ پس از انفجار بزرگ تولید شده باشند.

---

[۲۲] Malcolm perry
[۲۳] David gross
[۲۴] Rafael sorkin
[۲۵] Gauss
[۲۶] faraday

فصل دوم

فرم پتانسیل تک قطبی و رابطه آن با معادلات ماکسول

۲-۱- مقدمه

معادلات ماکسول نسبت به میدان‌های E , B متقارن هستند؛ یعنی معادلاتی که E در آن‌ها صدق می‌کند مشابه معادلاتی است که B در آن‌ها صدق می‌کند، با یک اختلاف که بار الکتریکی وجود دارد و بار مغناطیسی وجود ندارد [۱۹] یعنی :

$$\begin{cases} \nabla . E = 4\pi \rho_e \\ \nabla . B = 0 \end{cases} \qquad (۱-۲)$$

این اختلاف اساسی بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در معادلات ماکسول ممکن است این منظور را برساند که شاید این معادلات دقیق نباشند. معادلات ماکسول روابط تجربی هستند و ممکن است این فرض را بتوان کرد که بارمغناطیسی وجود دارد ولی چون در اطراف ما نبوده ما تاکنون آن‌ها را مشاهده نکردیم. حال در چارچوب معادلات ماکسول میدان مغناطیسی حاصل از جریان الکتریکی است و نه چیز دیگری، یعنی بار الکتریکی هم عامل ایجاد میدان الکتریکی و هم عامل ایجاد میدان مغناطیسی است، ولی اگر بار مغناطیسی وجود داشته باشد قضیه فرق می‌کند و میدان مغناطیسی می‌تواند هم حاصل از جریان الکتریکی و هم حاصل از بار مغناطیسی می‌باشد.

۲-۲- پتانسیل تک قطبی مغناطیسی

برای به دست آوردن پتانسیل تک قطبی مغناطیسی به طریق زیر عمل می‌کنیم

فرض می‌کنیم بارمغناطیسی وجود دارد به گونه‌ای که :

$$\nabla . B = 4\pi \rho_m \qquad (۲-۲)$$

در این صورت معادلات ماکسول باید تصحیح شود و باید به صورت زیر در نظر بگیریم یعنی چگالی بار مغناطیسی وجود دارد که باعث شده میدان مغناطیسی شعاعی تولید شود:

$$\nabla.E = ۴\pi \rho_e \rightarrow \vec{E} = \frac{q}{۴\pi r^۲}\hat{r},$$

$$\nabla.B = ۴\pi \rho_m \rightarrow \vec{B} = \frac{e_M}{۴\pi r^۲}\hat{r} \qquad (۳-۲)$$

از طرف دیگر می‌دانیم که:

$$B = \nabla \times A \qquad (۴-۲)$$

این رابطه پتانسیل برداری منجر به میدان مغناطیسی می‌شود. حال اگر بار مغناطیسی وجود داشته باشد باید چه پتانسیلی در نظر بگیریم که کرل آن B شود؟ باید پتانسیل برداری را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\vec{A} = \frac{e_M\left(۱-\cos\theta\right)}{۴\pi r \sin\theta}\hat{\varphi} \qquad (۵-۲)$$

یعنی یک میدان مغناطیسی در جهت $\hat{r}$ می‌تواند ناشی از یک پتانسیل برداری در جهت $\hat{\varphi}$ باشد.

$$\nabla \times A = \frac{e_M}{۴\pi r^۲}\hat{r} \qquad (۶-۲)$$

برای اثبات رابطه بالا به طریق زیر عمل می‌کنیم:

یک سلونوئید[۲۷] بلند به نام سلونوئید دیراک که درحالت ایده آل، شعاع بی‌نهایت کوچک دارد را در نظر می‌گیریم.

پتانسیل برداری برای این سلونوئید با تکانه مغناطیسی $e_M = g$ $d\,m = \frac{e_M}{\mu_0} d\,L' \to$ در موقعیت x' قرار دارد، به صورت زیر است:

$$d\,A = -\frac{\mu_0}{۴\pi} d\,m \times \nabla \frac{۱}{x - x'} \to A = -\frac{e_M}{۴\pi} \int d\,L' \times \nabla \frac{۱}{x - x'} = \frac{e_M}{۴\pi} \int \nabla \times \frac{d\,L'}{x - x'} \qquad (۷-۲)$$

روابط زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\rho^۲ = x^۲ + y^۲ \;\; , u = z - z' \;\; , u = \rho \tan\alpha \; , d\,u = \rho\left(۱ + \tan^۲\alpha\right) d\,\alpha \qquad (۸-۲)$$

سپس سلنوئید را در راستای منفی محور Z در نظر می‌گیریم و پتانسیل برداری به صورت زیر تعریف می‌شود

$$A_۲ = \frac{e_M}{۴\pi} \nabla \times k \int \frac{d\,z}{\sqrt{x^۲ + y^۲ + (z - z')^۲}} = -\frac{e_M}{۴\pi} k \times \nabla \int_{-z}^{\infty} \frac{d\,u}{\sqrt{\rho^۲ + u^۲}} =$$

$$-\frac{e_M}{۴\pi} \int_{-z}^{\infty} \left(-\hat{i} \frac{y\,d\,u}{\left(\rho^۲ + u^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}} + \hat{j} \frac{x\,d\,u}{\left(\rho^۲ + u^۲\right)^{\frac{۳}{۲}}} \right) = -\frac{e_M}{۴\pi} \left(-\hat{i}\,y + \hat{j}\,x\right) \int_{-z}^{\infty} \cos\alpha\, d\,\alpha =$$

$$-\frac{e_M}{۴\pi\rho^۲} \left(-\hat{i}\,y + \hat{j}\,x\right) \sin\alpha = -\frac{e_M}{۴\pi\rho^۲} \left(-\hat{i}\,y + \hat{j}\,x\right) \frac{\tan\alpha}{\sqrt{۱ + \tan^۲\alpha}} = -\frac{e_M}{۴\pi\rho^۲} \left(-\hat{i}\,y + \hat{j}\,x\right)$$

$$\left(\frac{u}{\sqrt{\rho^۲ + u^۲}} \right)_{-z}^{\infty} = -\frac{e_M}{۴\pi\rho} \left(-\hat{i} \frac{y}{\rho} + \hat{j} \frac{x}{\rho} \right) \left(۱ + \frac{z}{\sqrt{\rho^۲ + z^۲}} \right) = -\frac{e_M\,(۱ + \cos\theta)}{۴\pi r \sin\theta} \hat{\varphi} \qquad (۹-۲)$$

[۲۷] solenoid

که در آن $A_{۲}$ در زاویه θ و $A_{۱}$ در زاویه $\pi-\theta$ قرار دارد:

$$A_{۱}=\frac{e_M\,(۱-cos\theta)}{۴\pi r\,sin\,\theta}\hat{\varphi} \qquad (۱۰-۲)$$

که کرل پتانسیل برداری فوق، میدان را می‌دهد:

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial r}\hat{r}+\frac{۱}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\hat{\theta}+\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}\hat{\phi}$$

$$\nabla\times A=\hat{r}\left[\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\phi\sin\theta\right)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]+\hat{\theta}\frac{۱}{r}\left[\frac{۱}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\right]+\hat{\phi}\frac{۱}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]$$

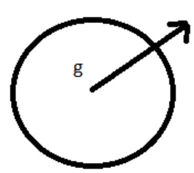
$$\nabla\times A=\hat{r}\left[\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_M\,(۱-\cos\theta)}{r\sin\theta}\sin\theta\right)-۰\right]+۰=\hat{r}\left[\frac{۱}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{e_M\,(۱-\cos\theta)}{r}\right)\right]=$$
$$\hat{r}\,\frac{e_M}{r^{۲}\sin\theta}\left(\sin\theta\right)=\frac{e_M}{۴\pi r^{۲}}\hat{r} \qquad (۱۱-۲)$$

این پتانسیل در $\theta=۰,\pi\rightarrow sin\,\theta=۰$ تکینه است.

بنابراین اگر بار مغناطیسی داشته باشیم پتانسیلی که تولید می‌شود در $\theta=\pi$ تکینه است.

برای سطح شکل ۲- ۱ می‌توانیم رابطه زیر را بنویسیم:

$$\oint B.d\,\vec{a}=\int\nabla.B\,dv=\int\nabla.\left(\nabla\times A\right)dv=۰ \qquad (۱۲-۲)$$



شکل۲-۱ نمایش بار مغناطیسی

ازطرفی می‌دانیم

$$\oiint B.ds = \int \frac{e_M}{r^۲}\hat{r}.\hat{r}\,da = ۴\pi e_M \qquad (۱۳-۲)$$

$$\hat{r}.\hat{r} = ۱ \qquad , da = r^۲ d\Omega$$

یعنی همانطورکه برای بار الکتریکی قانون گاؤس درست است، در مورد میدان مغناطیسی هم باید قانون گاؤس درست باشد؛ و مجموع شارمغناطیسی صفر نمی‌شود بلکه برابر بار می‌شود. از طرف دیگر اگر $B = (\nabla \times A)$ باشد دیورژانس آن همیشه صفر است.

همانطورکه می‌دانیم پتانسیلی که قبلاً معرفی کردیم درهمه نقاط جز در $\theta = \pi$ برقرار است. پس برای حل این مشکل از بحث آزادی پیمانه‌ای استفاده می‌کنیم. به این منظور ما یک پتانسیل دیگری را معرفی می‌کنیم که با پتانسیلی که در ابتدا معرفی کردیم به صورت زیر ارتباط دارد:

$$A_۲ = A_۱ + \vec{\nabla}\Lambda \qquad (۱۴-۲)$$

اگر $A_۲$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\vec{A}_۲ = -\frac{e_M(۱+\cos\theta)}{۴\pi r \sin\theta}\hat{\varphi} \rightarrow \nabla \times A_۲ = \frac{e_M}{۴\pi r^۲}\hat{r} \qquad (۱۵-۲)$$

و با استفاده از رابطه (۲-۱۴) می‌توان پیمانه‌ای (Λ) تعریف کرد که برای پتانسیل‌های $A_۱$, $A_۲$ برقرار باشد.

$$A_۲ - A_۱ = \nabla\Lambda \qquad A_۲ = A_۱ + \nabla\Lambda$$

$$\left(\frac{-e_M\ (۱+\cos\theta)}{۴\pi r\sin\theta}\hat{\phi}\right)-\left(\frac{e_M\ (۱-\cos\theta)}{۴\pi r\sin\theta}\hat{\phi}\right)=\frac{-۲e_M}{۴\pi r\sin\theta}\hat{\phi}$$

$$\frac{-۲e_M}{۴\pi r\sin\theta}\hat{\phi}=\nabla\Lambda, \qquad (۱۶-۲)$$

پیمانه انتخاب شده را از رابطه (۲-۱۶) به دست می‌آوریم:

$$\frac{-e_M}{۲\pi}\hat{\phi}=\Lambda \qquad (۱۷-۲)$$

بنابراین پتانسیل‌های $A_۱\ ,\ A_۲$ هم ارز هستند و می‌توانیم از هر دو پتانسیل استفاده کنیم، همانطور که می‌دانیم پتانسیل دوم به صورت زیر رفتار می‌کند:

$$\begin{cases} A_۲\left(\theta=\pi\right)=۰ \\ A_۲\left(\theta=۰\right)\to\infty \end{cases} \qquad (۱۸-۲)$$

پتانسیل $A_۲$ در $\theta=0$ تکین است. پس برای حل اینگونه مسائل می‌توانیم از هر دو پتانسیل استفاده نماییم.

بنابراین برای ذره‌ای با بار الکتریکی e در حضور بار مغناطیسی e_M می‌توان از پتانسیل $A_۲$ با تابع موج $\Psi_۲$ استفاده کرد (در ناحیه مشترک) ولی چون اختلاف پتانسیل $A_۲$ با $A_۱$ در یک تبدیل پیمانه‌ای Λ است، پس $\Psi_۲$ از $\Psi_۱$ طبق فرض قبلی از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$A_۱\to\Psi_۱\ \ ,\ A_۲\to\Psi_۲\ \ ,\ A_۲=A_۱+\vec{\nabla}\Lambda\Rightarrow\Lambda=-\frac{e_M}{۲\pi}\varphi$$

$$\Psi_۲=e^{\frac{ie}{\hbar c}\Lambda}\Psi_۱\to\Psi_۲=e^{\frac{ie}{\hbar c}\times-\frac{e_M}{۲\pi}\varphi}\Psi_۱ \qquad (۱۹-۲)$$

اگردر مختصات کارتزین، از تابع θ کروی استفاده کنیم φ هر نقطه را می‌توانیم با یک زاویه $\hat{\varphi}$ نشان دهیم و یا می‌توانیم یک دور بچرخیم و با $\varphi+۲\pi$ یا دو دور بچرخیم و با $\varphi+۴\pi$ و... نشان دهیم. یعنی کلیه توابع فیزیکی باید این خصوصیت را داشته باشند که نسبت به φ پریود یک باشند:

$$f\left(\varphi+۲\pi\right)=f\left(\varphi\right)$$
$$f\left(\varphi+۲\pi n\right)=f\left(\varphi\right) \qquad (۲۰-۲)$$

پس خصوصیت نسبت به φ باید برای $\Psi_۱, \Psi_۲$ هم برقرار باشد:

$$\Psi_۱\left(\varphi+۲n\pi\right)=\Psi_۲\left(\varphi\right)$$
$$\Psi_۲\left(\varphi+۲n\pi\right)=\Psi_۱\left(\varphi\right)\rightarrow\Psi_۲\left(\varphi+۲n\pi\right)=$$
$$\exp\left(-\frac{i\,e.e_M}{۲\pi\hbar c}\left(\varphi+۲\pi\right)\right).\Psi_۱\left(\varphi+۲\pi\right)=\Psi_۲\left(\varphi\right). \qquad (۲۱-۲)$$

یعنی

$$\exp\left(-\frac{i\,e.e_M}{۲\pi\hbar c}۲\pi\right)=۱$$

$$\frac{e.e_M}{\hbar c}=n\in Z \qquad (۲۲-۲)$$

که در آن Z عدد صحیحی است. که این همان پیش‌بینی دیراک است.

اگر بار مغناطیسی در طبیعت وجود داشته باشد، باید به صورت مقابل کوانتیده باشد:

$$e_M=\frac{n\hbar c}{۲e} \qquad (۲۳-۲)$$

از طرف دیگر اگر فقط یک بار e_M در جهان وجود داشته باشد آنگاه باید بار الکتریکی به صورت زیر کوانتیده باشد:

$$e = \frac{n\hbar c}{۲e_M} \qquad (۲۴-۲)$$

۲-۳- تک قطبی در الکترودینامیک کلاسیک

الکترودینامیک کلاسیک به زیبایی توسط چهار معادله ماکسول شرح داده شده است.

در غیاب بار مغناطیسی و الکتریکی معادلات ماکسول به صورت زیر است [۲۰] :

$$\nabla . E = ۰ \qquad (۲۵-۲)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad (۲۶-۲)$$

$$\nabla . B = ۰ \qquad (۲۷-۲)$$

$$\nabla \times B = \frac{\partial E}{\partial t} \qquad (۲۸-۲)$$

که B, E به ترتیب بردار نمایش میدان الکتریکی و مغناطیسی هستند. روابط (۲-۲۸) و (۲-۲۶) نشان می‌دهند میدان الکتریکی وابسته به زمان؛ میدان مغناطیسی تولید می‌کند و بالعکس این جمله هم صادق است.

این معادلات، تقارن بین میدان مغناطیسی و الکتریکی را نشان می‌دهند. با تبدیل میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی به صورت زیر ، معادلات بدون تغییر می‌مانند [۲۰].

$$E \to B \qquad , \qquad B \to -E \qquad (۲۹-۲)$$

به طور دقیق میدان الکتریکی اطراف بار الکتریکی به شکل $\left(E = q\frac{\vec{r}}{r^{۳}} \right)$ است، و اگر بار در میدان الکترومغناطیسی با سرعت (V) حرکت کند نیرویی احساس می‌کند که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = q\left(E + V \times B\right) \qquad (۳۰-۲)$$

این دوگانگی و تقارن نشان می‌دهد بار مغناطیسی وجود دارد و میدان مغناطیسی برابر با $B = e_M \frac{\vec{r}}{r^{۳}}$ است و نیرو به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F = e_M\left(B - V \times E\right) \qquad (۳۱-۲)$$

با این وجود فعلاً بار مغناطیسی وجود ندارد، و تقارن دوگانگی شکسته شده است، این بدان معنی است که در حقیقت اختلاف بین الکتریسیته و مغناطیس در این جمله است که بار الکتریکی وجود دارد و بار مغناطیسی وجود ندارد.

۲-۴- معادله دیفرانسیل مربوط به تک قطبی مغناطیسی

۲-۱-۴- معادلات ماکسول

معادله‌های ماکسول، معادله‌هایی هستند که چگونگی به وجود آمدن میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را توسط بارها و جریانات الکتریکی و نیز پیدایش یکی از این میدان‌ها توسط تغییر میدان دیگر توصیف می‌شود. این معادله‌ها مبانی الکترومغناطیس (کلاسیک) و مهندسی برق به شمار می‌روند که اولین بار توسط فیزیکدان اسکاتلندی جیمز کلارک ماکسول فرمول‌بندی شده‌اند. انواع فرمولبندی برای این معادله‌ها را می‌توان ارائه داد.

ماکسول نظریه الکترومغناطیس خود را در کتابی تحت عنوان "رساله‌ای درباره‌ی الکتریسیته و مغناطیس " که در سال ۱۸۷۳ یعنی درست شش سال قبل از نوشتن، ارائه داد. اولیور هوی ساید[۲۸] نظریه الکترومغناطیس را در سالهای ۱۸۷۰ بخوبی فرا گرفته بود، و همان اوست که نظریه ماکسـول را در قالب چهار معادله‌ای که امروزه می‌شناسیم در آورده است.

۲-۲-۴- توضیح مفهومی

به صورت مفهومی، معادلات ماکسول توصیف می‌کند چگونه بارهای الکتریکی و جریان‌های الکتریکی به عنوان منابعی برای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی عمل می‌کنند. علاوه بر این، توضیح می‌دهد که چگونه یک میدان الکتریکی متغیر با زمان یک میدان مغناطیسی متغیر با زمان تولید می‌کند و بالعکس.

شاید بیشترین علاقه برای یافتن تک‌قطبی‌های مغناطیسی زیباتر شدن فیزیک باشد. هرچه که تقارن بیشتر باشد فیزیک زیباتر است و می‌توان در فضای کمتری داده‌های بیشتری قرار داد. اگر چنین شود آنگاه در معادله‌های ماکسول در برابر $\nabla\cdot\mathbf{D}=4\pi\rho_{\mathrm{el}}$ معادله‌ای هم مشابه $\nabla\cdot\mathbf{B}=4\pi\rho_{\mathrm{mag}}$ خواهیم داشت. با این گمان که بار و چگالی جریان مغناطیسی وجود داشته باشد ρ_{m} و $\mathbf{j}_{\mathrm{m}}$ آنگاه معادله‌های ماکسول به صورت زیر در خواهند آمد:

---
۲۸ Oliver Heaviside

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=۴\pi\,\rho_e\,,\qquad \nabla\times\mathbf{H}=\frac{۱}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{۴\pi}{c}\mathbf{j}_e$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=۴\pi\,\rho_m\,,\qquad -\nabla\times\mathbf{E}=\frac{۱}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}+\frac{۴\pi}{c}\mathbf{j}_m \tag{۳۲-۲}$$

و معادله‌های پیوستگی به صورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{j}_e=۰$$

$$\frac{\partial\rho_m}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{j}_m=۰ \tag{۳۳-۲}$$

بنابراین پایستگی بار برای هر دو بار الکتریکی و مغناطیسی درست خواهد بود. از سوی دیگر معادله‌های ماکسول تازه به پیامدهای فیزیکی تازه نمی‌انجامند، چرا که[۲۲] :

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}'\cos\alpha+\mathbf{H}'\sin\alpha\,,\qquad \mathbf{D}=\mathbf{D}'\cos\alpha+\mathbf{B}'\sin\alpha$$

$$\mathbf{H}=-\mathbf{E}'\sin\alpha+\mathbf{H}'\cos\alpha\,,\qquad \mathbf{B}=-\mathbf{D}'\sin\alpha+\mathbf{B}'\cos\alpha \tag{۳۴-۲}$$

همچنین اگر چشمه‌ها نیز همانند میدانها تبدیل یابند:

$$\rho_e=\rho'_e\cos\alpha+\rho'_m\sin\alpha\,,\qquad \mathbf{j}_e=\mathbf{j}'_e\cos\alpha+\mathbf{j}'_m\sin\alpha$$

$$\rho_m=-\rho'_e\sin\alpha+\rho'_m\cos\alpha\,,\qquad \mathbf{j}_m=-\mathbf{j}'_e\sin\alpha+\mathbf{j}'_m\cos\alpha \tag{۳۵-۲}$$

جایگذاری روابط (۲-۳۵) و (۲-۳۴) در رابطه (۲-۳۲) خواهیم داشت:

$$\nabla\cdot\mathbf{D}'=۴\pi\,\rho'_e\,,\qquad \nabla\times\mathbf{H}'=\frac{۱}{c}\frac{\partial\mathbf{D}'}{\partial t}+\frac{۴\pi}{c}\mathbf{j}'_e$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}'=۴\pi\,\rho'_m\,,\qquad -\nabla\times\mathbf{E}'=\frac{۱}{c}\frac{\partial\mathbf{B}'}{\partial t}+\frac{۴\pi}{c}\mathbf{j}'_m \tag{۳۶-۲}$$

به ازای این زاویه معادلهٔ (۲-۳۶) مشابه همان معادله‌های آشنای پیشین ماکسول در می‌آید. پس می‌توان بار الکترون را با قرارداد زیر ثابت کرد تا همان معادله‌های پیشین را داشت:

$$q_e = -e \quad q_m = ۰ \tag{۳۷-۲}$$

بار دیگر ذره‌های بنیادی با بکارگیری این یکاها اندازه گرفته می‌شود.

اکنون می‌توان اندیشهٔ دیراک را استوار بر کوانتش بار و درکار بودن تک‌قطبی‌های مغناطیسی دریافت. بار مغناطیسی g را در مرکز مختصات قرار می‌دهیم که القای مغناطیسی زیر را در $\mathbf{r}$ پدید آورد:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{g}{r^۲}\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{۳۸-۲}$$

میدان $\mathbf{B}$ از رابطه $\nabla\cdot\mathbf{B} = ۴\pi\rho(\mathbf{r})$ به دست می‌آید که $\rho(\mathbf{r}) = g\delta(\mathbf{r}')$ چگالی نقطه است. مساله همانند مساله الکترومغناطیس آشنا در می‌آید. پس اگر ذره‌ای با بار e و سرعت $\mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{z}}$ در راستای خط بلند b بگذرد، نیروی لورنتس وارد بر آن برابر می‌شود با:

$$\mathbf{F} = F_y \cdot \hat{\mathbf{y}} = \frac{ev}{c} B_x \hat{\mathbf{y}} = \frac{e\,g}{c}\frac{v\,b}{\left(b^۲ + v^۲ t^۲\right)^{۳/۲}}\hat{\mathbf{y}} \tag{۳۹-۲}$$

و جابجایی تکانه‌ای که در برخورد بر آن وارد می‌شود

$$\Delta P_y = \int_{-\infty}^{\infty} F_y\, d\,t = ۲\frac{e\,g\,v\,b}{c}\int_{۰}^{\infty}\frac{d\,t}{\left(b^۲ + v^۲ t^۲\right)^{۳/۲}} = \frac{۲e\,g}{c\,b} \tag{۴۰-۲}$$

و این انتقال تکانه به تغییری در تکانهٔ زاویه‌ای آن می‌انجامد:

$$\Delta L_z = b\,\Delta P_y = \frac{۲eg}{c} \tag{۴۱-۲}$$

اکنون بنا بر مکانیک کوانتومی، تکانه زاویه‌ای مداری همواره کوانتیده بوده و برابر می‌شود با

$$L_z = n\hbar \quad n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots \qquad (۲-۴۲)$$

نابراین از روابط (۲-۴۲) و (۲-۴۱) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\frac{eg}{\hbar c} = \frac{n}{۲} \qquad (۲-۴۳)$$

از سویی این بدان معنا است که $e = (n/۲)((\hbar c)/g), n = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$ باید کوانتیده شود. بار الکتریکی e تنها در چندتایی‌های مثبت و منفی از یکای بار $(\hbar c)/(۲g)$ رخ می‌دهد. پیامد کوانتش تکانهٔ زاویه‌ای آن است که بار هم کوانتیده می‌شود. باید هشیار بود که این دستاورد در گرو گمانه در کار بودن تک قطبی مغناطیسی در جایی در کیهان است. قدرت جفت شدگی میدانهای مغناطیسی با ثابت ساختار ریز $e^۲/\hbar c = ۱/۱۳۷$ بیان می‌شود. بنا بر رابطه (۲-۴۳) ثابت ساختار ریز مغناطیسی $g^۲/\hbar c = n^۲/۴((\hbar c)/e^۲) = (۱۳۷/۴)n^۲$ می‌باشد که بزرگتر از $e^۲/\hbar c = ۱/۱۳۷$ است. پس نیروهای برآمده از تک قطبی مغناطیسی بار یکه مغناطیسی g از همان مرتبهٔ نیروهای برآمده از بار الکتریکی e می‌باشند[۲۱]:

$$\sqrt{\frac{\frac{g^۲}{\hbar c}}{\frac{e^۲}{\hbar c}}} = \sqrt{\left(\frac{۱۳۷}{۲}\right)^۲ n^۲} = \frac{۱۳۷}{۲} n \qquad (۲-۴۴)$$

۲-۵- جدیدترین دستاوردهای فیزیک

قبول این نظریه که طبیعت متقارن است، امروزه منجر به دستاوردهایی از قبیل نظریه میدان‌های پیمانه‌ای، ابر تقارن و ... بخصوص در حوزه بنیادی گردیده است [۲۰]. تک قطبی‌های مغناطیسی تقارنی را در معادلات اساسی الکترومغناطیسی یعنی معادلات ماکسول بوجود می‌آورند که الکترومغناطیس

معمولی فاقد آن است. به عبارت دیگر ، میدان مغناطیس که یک اثر ثانوی از الکتریسیته است و توسط ذرات باردار متحرک تولید می‌شود، با فرض وجود تک قطبی‌های مغناطیسی، می‌تواند مستقلا توسط این ذرات تولید شود و این خود تقارنی را بین میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی بوجود می‌آورد.

فصل سوم

سیستم‌های کالوزا کلاین و میسز کپلر

۳-۱- مقدمه

یکی از مهمترین هدف‌های فیزیک مدرن و فیزیکدان‌های بزرگ، وحدت و یگانه سازی تمام نیروهای بنیادی طبیعت در قالب یک چارچوب منسجم و توصیف تمامی سیستم‌های فیزیکی توسط معادلات کلی می‌باشد. یگانه سازی نیروها از الکتریسیته و مغناطیس شروع شد پس از آن که هرکدام از این دو حوزه علم فیزیک به صورت جداگانه مورد مطالعه قرار گرفتند. فعالیت‌های افرادی نظیر اورستد، فارادی، آمپر و ماکسول باعث یکپارچگی این دو شاخه و پیدایش نظریه الکترومغناطیس شد. فعالیت‌های آزمایشگاهی کاوندیش ۱۷۷۱ تا ۱۷۷۳ و همچنین آزمایشهای کولن (۱۷۸۵) منجر به پیشرفت‌های الکترواستاتیک گردید. در سال ۱۸۱۹ اورستد کشف کرد که یک سیم حامل جریان می‌تواند عقربه قطب نما را منحرف کند پس از آن‌ها بیو و ساوارات در سال ۱۸۲۰ و همچنین آمپر در فاصله سالهای (۱۸۲۵-۱۸۲۰) قوانینی را کشف و استخراج نمودند که میدان مغناطیسی حاصل از توزیع‌های جریان را تعیین می‌کرد. در نهایت ماکسول در سال ۱۸۶۵ با جمع بندی نتایج قبلی توانست توصیف کاملی از پدیده‌های الکترومغناطیس با استفاده از چهار معادله ریاضی که به نام خود او مشهور شدند.

وی امواج الکترومغناطیسی را که بعد از ماکسول توسط هرتس کشف شد را پیش بینی کرد البته از خصوصیات جالب این معادلات این است که به دلیل عدم وجود تک قطبی مغناطیسی این معادلات نسبت به میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی نامتقارن می‌باشند پس از پیشرفت فیزیک هسته‌ای و کشف نیروهای هسته‌ای ضعیف و قوی بار دیگر تلاش‌ها برای یگانه سازی و وحدت نیروها شدت گرفت. در این میان فیزیکدانان توانستند نیروهای الکترومغناطیسی و هسته‌ای ضعیف را در قالب یک نظریه به نام نظریه الکتروضعیف وحدت بخشید. در سال‌های ۱۹۶۷ و ۱۹۶۸ استفان واینبرگ از هاروارد و عبدالسلام از لندن به طور مستقل نظریه وحدت یافته‌ای برای برهمکنش ضعیف و الکترومغناطیسی که بخشی از آن بر پایه نتایج شلدون گلشؤ از هاروارد استوار بود، فرمول بندی کردند شناخت نیروهای هسته‌ای پس از کشف نوترون در سال ۱۹۳۲ توسط جیمز چادویک صورت گرفت. واضح بود نیرویی که بین نوکلئون‌های هسته (پروتون‌ها و نوترون‌ها) وجود دارد، مانع از فروپاشی هسته توسط نیروی دافعه کولنی بین بارهای مثبت می‌شود از ویژگی‌های بارز این نیرو برد کوتاه آن $\left(10^{-15}m\right)$ و تمایز ناپذیری بین پروتون و نوترون می‌باشد.

برای آن که به وجود ابعاد دیگری به جز چهار بعد معمول یعنی سه بعد فضایی و یک بعد زمان باور داشته باشیم دلایل متفاوتی هست. این دلایل البته هیچ کدام بر شواهد مستقیم آزمایشگاهی استوار نیست. در واقع مشاهدات تجربی و یا انتظارات، نظریه‌ای هست که تبیین آن‌ها تاکنون به کمک نظریه‌هایی که در چارچوب چهاربعدی نوشته می‌شود ممکن نشده است. از این رو گروهی از فیزیک پیشه‌ها به سراغ نظریه‌هایی رفته‌اند که در آن‌ها ابعاد فضا- زمان را بیش از چهار بعد می‌گیرند. نخستین نظریه از این دست نظریه‌ی کالوزا کلاین است که برای وحدت بخشیدن به نیروهای الکترومغناطیسی و گرانشی ارائه شده است. در ابتدای قرن بیستم سه نیروی الکتریکی ، مغناطیسی و گرانشی به خوبی شناخته شده بودند. وحدت بین دو نیروی الکتریکی و مغناطیسی پیش‌تر در چارچوب نظریه‌ی

الکترومغناطیس ماکسول به دست آمده بود. می‌دانیم که ارائه‌ی این نظریه‌ی وحدت منجر به پیشامدهایی شد که بعداً همگی در آزمایشگاه تأیید شدند، از جمله ثابت بودن c سرعت انتشار امواج الکترومغناطیسی نسبت به تمامی ناظرهای لخت که بعداً پایه‌ی نسبیت خاص انیشتین شد ولی در همان زمان باعث شد که فیزیک پیشه‌ها حدس بزنند که نور همان موج الکترومغناطیسی است، حدسی که به نوبه‌ی خود با آزمایش هرتس به تأیید تجربه رسید. در سال ۱۹۱۹ کالوزا نشان داد که با فرض یک فضا - زمان پنج بعدی می‌شود از معادلات نسبیت عام برای گرانش پنج بعدی معادلات نسبیت عام چهار بعدی و معادلات ماکسول را یک جا به دست آورد. نظریه‌ی نسبیت عام مدلی است که انیشتین برای توصیف دینامیک فضا زمان پیشنهاد کرد. این نظریه تاکنون از تمامی آزمایش‌ها سربلند بیرون آمده است [۲۴-۲۳].

در مدل کالوزا کلاین آثار گرانشی بعد پنجم در جهان چهار بعدی به صورت نیروی الکترومغناطیس ماکسولی ظاهر می‌شود.

۳-۲- تک قطبی کالوزا – کلاین [۲۹]

این مسأله در حضور تک قطبی مغناطیسی مستقلاً توسط مکینتاش[۳۰]، ذوان زیگر[۳۱]، سیسنروس[۳۲] مطالعه شد [۲۶-۲۵].

در اوایل دهه‌ی سال ۱۹۸۰ وقتی که همه‌ی فیزیک‌دان‌ها در جهت اتحاد گرانش با سایر نیروهای کوانتومی، ناامید شدند، آنگاه شروع به کنار گذاشتن پیش داوری‌هایشان نسبت به ابعاد نادیدنی و ابرفضا کردند که بیشتر توسط کالوزا – کلاین و انیشتین به کار بسته شده بود. آن‌ها آماده‌ی پذیرش یک نظریه جایگزین بودند و طبیعتاً آن نظریه‌ی کالوزا – کلاین بود [۲۷].

---

[۲۹] Kaluza-klien

[۳۰] McIntosh

[۳۱] Zwanziger

[۳۲] Cisneros

فیزیک نظریه‌ی کالوزا – کلاین یک مدل است که به دنبال متحد کردن دو نیروی بنیادین گرانش و الکترو مغناطیسی می‌باشد. تعمیـم نظریه نسبیت عام انیشـتین توسـط ریاضیدانی به نام تئودورکالوزا که در سـال ۱۹۲۱ منتشر شد. این نظریه در سال ۱۹۲۶ توسط فیزیک‌دان سوئدی اسکارکلاین گسترش بیشتری یافت. اکنون این نظریه را نظریه کالوزا کلاین می‌گویند [۲۸].

تک قطبی کالوزا – کلاین را روی فضای اقلیدس تاب نت[۳۳] بررسی می‌کنیم[۲۹].

$$ds^{۲}=-dt^{۲}+\frac{۱}{V(r)}d\ell^{۲}+V(r)(dx_{۵}+A_i\,dx^{i})^{۲} \qquad (۱-۳)$$

فضایی است که المان طول آن به صورت معادله (۳-۱) است[۲۹]. در این فضا می‌توان دو نیروی بنیادین گرانش و الکترو مغناطیس را به هم متحد کرد.

با

$$V(r)=\frac{۱}{۱+\frac{\mu}{r}} \quad , \quad A_{۱}=-\frac{\mu}{r}\frac{x_{۲}}{r+x_{۳}} \; , A_{۲}=\frac{\mu}{r}\frac{x_{۱}}{r+x_{۳}} \; , A_{۳}=۰ \qquad (۲a-۳)$$

سپس $d\ell^{۲}$ در فضای اقلیدس سه بعدی به صورت زیر بیان خواهد شد

$$d\ell^{۲}=(dx^{۱})^{۲}+(dx^{۲})^{۲}+(dx^{۳})^{۲} \qquad (۲b-۳)$$

۳-۱-۲- اثبات رابطه اقلیدس تاب نت

یکی از راه‌های توصیف فضاهای ریاضی با استفاده از مفهوم فاصله است.

---
[۳۳] Taub-Nut

$$ds^۲=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{r}d\vec{r}^{\,۲}+r(d\psi+\vec{w}.d\vec{r})^۲)+\ell(dt_.^۲+d\vec{y}^{\,۲}) \qquad (۳-۳)$$

با در نظر گرفتن روابطه زیر:

$$\vec{y}=\frac{۱}{۲}\vec{r} \quad , \quad d\vec{y}=\frac{۱}{۲}d\vec{r} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{w}=\nabla(\frac{۱}{r}) \qquad (۴-۳)$$

معادله (۳-۳) به معادله (۳-۵) تبدیل می‌شود:

$$ds^۲=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{r}d\vec{r}^{\,۲}+r(d\psi+\vec{w}.d\vec{r})^۲)+\ell(dt_.^۲+\frac{d\vec{r}^{\,۲}}{۴}) \qquad (۵-۳)$$

با انتخاب مختصات جدید:

$$\begin{pmatrix} t_. \\ q \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} t_.-\frac{\theta}{\ell} \\ qe^{i\theta} \end{pmatrix} \qquad , \qquad \begin{pmatrix} t_. \\ \psi \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} t_.-\frac{\theta}{\ell} \\ \psi+۲\theta \end{pmatrix},$$

$$\tau=۲\ell t_.+\psi \quad , \quad d\tau=۲\ell dt_.+d\psi \quad , \quad d\psi=d\tau-۲\ell dt_. . \qquad (۶-۳)$$

معادله (۳-۵) به معادله (۳-۷) تبدیل می‌شود:

$$ds^۲=\frac{۱}{۴}(\frac{۱}{r}d\vec{r}^{\,۲}+r(d\psi+\vec{w}.d\vec{r})^۲)+\ell(dt_.^۲+\frac{d\vec{r}^{\,۲}}{۴})=$$

$$\frac{۱}{۴}\left[\left(\frac{۱}{r}+\ell\right)d\vec{r}^{\,۲}+(۴r\ell^۲+۴\ell)dt_.^۲-۴r\ell dt_.(d\tau+w)+r(d\tau+w)^۲\right]=$$

$$\frac{۱}{۴}\left[\left(\frac{۱}{r}+\ell\right)d\vec{r}^{\,۲}+(۴r\ell^۲+۴\ell)(dt_.-\frac{۲r\ell(d\tau+w)}{۴r\ell^۲+۴\ell})^۲-\frac{۴r^۲\ell^۲(d\tau+w)^۲}{\left(۴r\ell^۲+۴\ell\right)}\right.$$

$$\left.+r(d\tau+w)^۲\right]. \qquad (۷-۳)$$

در مختصات جدید:

$$dt_{\cdot} = \frac{۲r\ell(d\tau + w)}{۴r\ell^{۲} + ۴\ell}, \qquad (۸-۳)$$

معادله (۳-۷) تبدیل به معادله زیر می‌شود:

$$ds^{۲} = \frac{۱}{۴}\left[\left(\frac{۱}{r}+\ell\right)d\vec{r}^{\,۲} - \frac{۴r^{۲}\ell^{۲}(d\tau+w)^{۲}}{\left(۴r\ell^{۲}+۴\ell\right)} + r(d\tau+w)^{۲}\right],$$
$$ds^{۲} = \frac{۱}{۴}\left[\left(\frac{۱}{r}+\ell\right)d\vec{r}^{\,۲} + \left(\frac{۱}{r}+\ell\right)^{-۱}(d\tau+w.dr)^{۲}\right]$$

$$ds^{۲} = -dt^{۲} + ds^{۲} = -dt^{۲} + \frac{۱}{۴}\left[\left(\frac{۱}{r}+\ell\right)d\vec{r}^{\,۲} + \left(\frac{۱}{r}+\ell\right)^{-۱}(d\tau+w.dr)^{۲}\right] \qquad (۹-۳)$$

با در نظر گرفتن روابط زیر:

$$V(r) = \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{r}+\ell\right)^{-۱}, \; d\tau = d\psi \;, \; w.dr = A_i\, dx_i \qquad (۱۰-۳)$$

معادله (۳-۹) به صورت زیر باز نویسی می‌شود. با معرفی پارامترهای (۳-۱۱)

$$ds^{۲} = -dt^{۲} + \frac{۱}{V(r)}d\ell^{۲} + V(r)(d\psi + A_i.dx_i)^{۲} \qquad (۱۱-۳)$$

هامیلتونی برای تک قطبی کالوزا – کلاین به صورت زیر بیان می‌شود [۳۰]:

$$H = \frac{۱}{۲}\left[V(r)p^{۲} + \frac{۱}{V(r)}p_{۵}^{۲}\right] \quad , \; p_{۵} = -i\,\partial_{۵} \qquad (۱۲-۳)$$

ضمن آنکه میدان مغناطیسی از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$B = \nabla \times A = \mu \frac{\vec{x}}{r^{۳}} \tag{۱۳-۳}$$

و متغیر $x_{۵} = \mu \psi$ را معرفی می‌کنیم. در مختصات دکارتی میدان را بدست می‌آوریم.

مؤلفه اول میدان :

$$B_i = \left[-\mu x_{۱} \left(\frac{-۲x_{۳} - \sqrt{x_{۱}^{۲} + x_{۲}^{۲} + x_{۳}^{۲}} - \dfrac{x_{۳}^{۲}}{\sqrt{x_{۱}^{۲} + x_{۲}^{۲} + x_{۳}^{۲}}}}{(r^{۲} + x_{۳} r)^{۲}} \right) \right]$$

$$B_i = \left[\frac{-\mu x_{۱}}{r^{۳}} \left(\frac{-۲x_{۳} r - r^{۲} - x_{۳}^{۲}}{(r + x_{۳})^{۲}} \right) \right] = \frac{\mu x_{۱}}{r^{۳}} \tag{۱۴-۳}$$

به همین ترتیب مؤلفه‌ی دوم و سوم را به دست می‌آوریم.

$$B_j = \frac{\mu x_{۲}}{r^{۳}} \qquad , \quad B_k = \frac{\mu x_{۳}}{r^{۳}} \tag{۱۵-۳}$$

سپس میدان کل به صورت زیر بیان می‌شود :

$$B = \frac{\mu}{r^{۳}} (x_{۱} \hat{i} + x_{۲} \hat{j} + x_{۳} \hat{k}) = \frac{\mu \vec{x}}{r^{۳}} \tag{۱۶-۳}$$

معادله شرودینگر را در مختصات کروی به دست می‌آوریم :

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi \quad , \; x_2 = r\sin\theta\sin\varphi \quad , \; x_3 = r\cos\theta \qquad (۱۷-۳)$$

در فضای اقلیدس تاب نت داریم:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{V(r)} d\ell^2 + V(r)(dx^5 + A_i\, dx^i)^2 \qquad (۱۰-۳)$$

$$d\ell^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2$$

$$dx_1 = -r\sin\theta\,\sin\varphi d\varphi + \sin\theta\,\cos\varphi dr + r\cos\theta\,\cos\varphi d\theta$$

$$dx_2 = r\sin\theta\,\cos\varphi d\varphi + \sin\theta\,\sin\varphi dr + r\cos\theta\,\sin\varphi d\theta$$

$$dx_3 = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$$

$$d\ell^2 = \sin^2\theta\,\cos^2\varphi dr^2 + \sin^2\theta\,\sin^2\varphi dr^2 + \cos^2\theta dr^2 = dr^2$$

برای مؤلفه‌ی θ, ϕ به همین ترتیب ادامه می‌دهیم:

$$d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{V(r)} d\ell^2 + V(r)(dx^5 + A_i\, dx^i)^2$$

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{V(r)}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2) + V(r)(dx^5 + A_i\, dx^i)^2 \qquad (۱۸-۳)$$

$$x_5 = \mu\psi \quad , \quad dx_5 = \mu d\psi$$

$$A_i\, dx^i = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 = \mu(1-\cos\theta) d\varphi \qquad (۱۹-۳)$$

که برای رابطه بالا می‌توان گفت :

$$A_1 dx^1 + A_2 dx^2 = -\frac{\mu}{r}\frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r+r\cos\theta}(-r\sin\theta\sin\varphi d\varphi + \sin\theta\cos\varphi dr +$$

$$r\cos\theta\cos\varphi d\theta) + \frac{\mu}{r}\frac{r\sin\theta\sin\varphi}{r+r\cos\theta}(-r\sin\theta\cos\varphi d\varphi + \sin\theta\sin\varphi dr +$$

$$r\cos\theta\sin\varphi d\theta) = \mu\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{1+\cos\theta}d\varphi - \mu\frac{\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi dr}{r(1+\cos\theta)}$$

$$-\mu\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{1+\cos\theta}d\varphi + \mu\frac{\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi dr}{r(1+\cos\theta)} + \frac{\mu\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\cos\varphi d\theta}{r(1+\cos\theta)} =$$

$$\frac{\mu\sin^2\theta(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi}{1+\cos\theta} = \mu(1-\cos\theta)d\varphi \qquad (۲۰-۳)$$

روابط فوق را در معادله (۳-۱۹) قرار می‌دهیم.

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{V(r)}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2) +$$

$$V(r)(dx^5 + A_i dx_i)^2 \qquad (۲۱a-۳)$$

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{V(r)}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\varphi^2) +$$

$$V(r)\,\mu(d\psi + (1-\cos\theta)d\varphi))^2 \qquad (۲۱b-۳)$$

$$A_r = A_\theta = 0 \quad , \quad A_\varphi = \mu(1-\cos\theta)$$

معادله شرودینگر را با استفاده از هامیلتونی کالوزا – کلاین به دست می‌آوریم:

$$H = \frac{1}{2}\left[V(r)\left(\vec{p}^2 + \frac{C_1}{2r} + \frac{C_2}{2r(r+z)} + \frac{C_3}{2r(r-z)} + C_4\right) + \frac{1}{V(r)}p_5^2\right] \qquad (۲۲-۳)$$

$$H\psi = E\psi$$

$$\vec{\pi}^{2}=\frac{\left(p-\frac{e}{c}A\right)^{2}}{2m}=\frac{p^{2}}{2m}+\frac{e^{2}}{2mc^{2}}A^{2}-\frac{e}{2mc}p.A-\frac{e}{2mc}A.p \qquad (23-3)$$

$$p.A=[p,A]+A.p=-i\hbar\nabla.A+A.p$$

$$\vec{\pi}^{2}=\frac{p^{2}}{2m}+\frac{e^{2}}{2mc^{2}}A^{2}-\frac{e}{2mc}i\hbar\nabla.A-\frac{e}{mc}A.p=-\nabla^{2}+\frac{e^{2}}{\hbar^{2}c^{2}}A^{2}+$$

$$\frac{e}{\hbar c}i\nabla.A-\frac{2e}{\hbar^{2}c}A.p \qquad (23a-3)$$

پتانسیل‌های زیر را معرفی می‌کنیم

$$A_{1}=-\frac{g}{r}\frac{x_{2}}{r+x_{3}} \quad , \quad A_{2}=\frac{g}{r}\frac{x_{1}}{r+x_{3}} \quad , \quad A_{3}=0$$

$$A^{2}=A_{1}^{2}+A_{2}^{2}+A_{3}^{2}=\frac{g^{2}}{r^{2}}\frac{x_{2}^{2}}{(r+x_{3})^{2}}+\frac{g^{2}}{r^{2}}\frac{x_{1}^{2}}{(r+x_{3})^{2}}=$$

$$\frac{g^{2}(r^{2}-z^{2})}{r^{2}(r+x_{3})^{2}}=\frac{g^{2}(1-\cos^{2}\theta)}{r^{2}(1+\cos\theta)^{2}} \qquad (24-3)$$

با معرفی روابط زیر

$$\nabla.A=\frac{\partial A_{x_1}}{\partial x_{1}}+\frac{\partial A_{x_2}}{\partial x_{2}}+\frac{\partial A_{x_3}}{\partial x_{3}}=\frac{\partial}{\partial x_{1}}\left(-\frac{g}{r}\frac{x_{2}}{r+x_{3}}\right)+\frac{\partial}{\partial x_{2}}\left(\frac{g}{r}\frac{x_{1}}{r+x_{3}}\right)=$$

$$\frac{2x_{1}x_{2}gr+x_{3}x_{1}x_{2}g}{r^{2}(r+x_{3})}+\frac{-2x_{1}x_{2}gr-x_{3}x_{1}x_{2}g}{r^{2}(r+x_{3})}=0 \qquad (25a-3)$$

$$A.p=A_{1}.p_{1}+A_{2}.p_{2}+A_{3}.p_{3}=-\frac{g}{r}\frac{x_{2}}{r+x_{3}}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_{1}}\right)+\frac{g}{r}\frac{x_{1}}{r+x_{3}}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_{2}}\right)=$$

$$-\frac{g}{r}\frac{i\hbar}{r+x_{3}}\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (25b-3)$$

روابط به دست آمده را در معادله زیر قرار می‌دهیم.

$$\vec{\pi}^{۲}=-\nabla^{۲}+\frac{e^{۲}}{\hbar^{۲}c^{۲}}A^{۲}+\frac{e}{\hbar c}i\,\nabla.A-\frac{۲e}{\hbar^{۲}c}A.p=-\nabla^{۲}+\frac{e^{۲}g^{۲}(۱-\cos^{۲}\theta)}{\hbar^{۲}c^{۲}(۱+\cos\theta)^{۲}}$$
$$-\frac{۲eig}{\hbar c r^{۲}(۱+\cos\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (۲۶-۳)$$

با در نظر گرفتن $\mu=\frac{eg}{\hbar c}$ معادله (۳-۲۶) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\vec{\pi}^{۲}=-\nabla^{۲}+\frac{\mu^{۲}(۱-\cos^{۲}\theta)}{(۱+\cos\theta)^{۲}}-\frac{۲i\mu}{r^{۲}(۱+\cos\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (۲۷-۳)$$

$$\nabla^{۲}\Psi=\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+\frac{\cot\theta}{r^{۲}}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲}\Psi}{\partial\theta^{۲}}+\frac{۱}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial^{۲}\Psi}{\partial\phi^{۲}} \qquad (۲۸-۳)$$

روابط فوق را در معادله ویژه مقداری (۳-۲۲) قرار می‌دهیم.

$$H\psi=E\psi$$
$$H=\frac{۱}{۲}\left[V(r)\left(\vec{p}^{۲}+\frac{C_{۱}}{۲r}+\frac{C_{۲}}{۲r(r+z)}+\frac{C_{۳}}{۲r(r-z)}+C_{۴}\right)+\frac{۱}{V(r)}p_{۵}^{۲}\right]\psi=E\psi$$
$$-\frac{۱}{۲}V(r)\left[\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\cot\theta}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲}}{\partial\theta^{۲}}+\frac{۱}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial^{۲}}{\partial\varphi^{۲}}-\frac{\mu^{۲}(۱-\cos^{۲}\theta)}{r^{۲}(۱+\cos\theta)^{۲}}-\right.$$
$$\left.\frac{۲i\mu}{r^{۲}(۱+\cos\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}-\frac{C_{۱}}{۲r}-\frac{C_{۲}}{۲r(r+z)}-\frac{C_{۳}}{۲r(r-z)}-C_{۴}-\frac{۱}{V(r)}p_{۵}^{۲}\right]\psi=E\psi$$

معادله فوق را در $-\frac{۲}{V(r)}$ ضرب می‌کنیم:

$$\left[\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{C_{۱}}{۲r}-\frac{C_{۲}}{۴r^{۲}\cos^{۲}\theta}-\frac{C_{۳}}{۴r^{۲}\sin^{۲}\theta}-C_{۴}+\right.$$
$$\frac{۱}{r^{۲}}\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲}}{\partial\theta^{۲}}+\frac{۱}{\sin^{۲}\theta}\frac{\partial^{۲}}{\partial\varphi^{۲}}\right)-\left(\frac{\mu^{۲}(۱-\cos^{۲}\theta)}{r^{۲}(۱+\cos\theta)^{۲}}+\frac{۲i\mu}{r^{۲}(۱+\cos\theta)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$
$$\left.-\frac{۱}{V(r)}p_{۵}^{۲}\right]\psi=-\frac{۲}{V(r)}E\psi \qquad (۲۹-۳)$$

همانطور که می‌دانیم:

$$x^{5}=\mu\psi \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_{5}}=\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x_{5}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \psi} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \psi}=\mu\,\partial_{5}$$

$$\frac{\partial^{2}}{\partial \psi^{2}}=\mu^{2}\,\partial_{5}^{2} \quad , \quad p_{5}=-i\,\partial_{5} \quad , \quad p_{5}^{2}=-\partial_{5}^{2}=-\frac{1}{\mu^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial \psi^{2}} \qquad (۳۰-۳)$$

روابط به‌دست‌آمده را در معادله (۳-۲۹) جایگذاری می‌کنیم:

$$\Bigg[\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{C_{1}}{2r}-\frac{C_{2}}{4r^{2}\cos^{2}\theta}-\frac{C_{3}}{4r^{2}\sin^{2}\theta}-C_{4}+$$

$$\frac{1}{r^{2}}\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial \theta}+\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial \theta^{2}}+\frac{1}{\sin^{2}\theta}\frac{\partial^{2}}{\partial \varphi^{2}}\right)-\left(\frac{(1-\cos^{2}\theta)}{r^{2}(1+\cos\theta)^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial \psi^{2}}+\frac{2i\mu}{r^{2}(1+\cos\theta)}\frac{\partial}{\partial \psi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$$-\frac{1}{V^{2}(r)\mu^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial \psi^{2}}\Bigg]\psi=-\frac{2}{V(r)}E\,\psi \qquad (۳۱-۳)$$

با استفاده از جداسازی متغیرها، معادله شرودینگر فوق را حل می‌کنیم:

$$\Psi(r,\theta,\varphi)=R(r)\,Z(\theta)\,e^{i(q\psi+\vartheta\varphi)} \qquad (۳۲-۳)$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi}=i\,q\,e^{iq\psi} \quad , \quad \frac{\partial^{2}}{\partial \psi^{2}}=-q^{2}e^{iq\psi} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \varphi}=i\,\vartheta\,e^{i\vartheta\varphi} \quad , \quad \frac{\partial^{2}}{\partial \vartheta^{2}}=-\vartheta^{2}e^{i\vartheta\varphi}$$

روابط فوق را در معادله شرودینگر (۳-۳۱) جایگذاری می‌کنیم:

$$\left[\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{C_{۱}}{۲r}-\frac{C_{۲}}{۴r^{۲}\cos^{۲}\theta}-\frac{C_{۳}}{۴r^{۲}\sin^{۲}\theta}-C_{۴}+\right.$$

$$\frac{۱}{r^{۲}}\left(\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲}}{\partial\theta^{۲}}+\frac{-\vartheta^{۲}}{\sin^{۲}\theta}\right)+\left(-\frac{(۱-\cos^{۲}\theta)}{r^{۲}(۱+\cos\theta)^{۲}}+\frac{۱}{V^{۲}(r)\mu^{۲}}\right)(-q^{۲})-$$

$$\left.\frac{۲i(-q\vartheta)}{r^{۲}(۱+\cos\theta)}\right]R(r)\,Z(\theta)\,e^{i(q\psi+\vartheta\varphi)}=-\frac{۲}{V(r)}E\,R(r)\,Z(\theta)\,e^{i(q\psi+\vartheta\varphi)} \qquad (۳۳-۳)$$

با جداسازی متغیرها، ترم شعاعی به صورت زیر می شود:

$$\left(\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{C_{۱}}{۲r}-C_{۴}-\frac{q^{۲}}{V^{۲}(r)\mu^{۲}}\right)R(r)\,Z(\theta)\,e^{i(q\psi+\vartheta\varphi)}=$$

$$-\frac{۲}{V(r)}E\,R(r)\,Z(\theta)\,e^{i(q\psi+\vartheta\varphi)} \qquad (۳۴-۳)$$

پتانسیل $V(r)=\frac{۱}{۱+\frac{\mu}{r}}$ را در رابطه **(۳-۳۴)** قرار داده و داریم:

$$\left(\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{C_{۱}}{۲r}-C_{۴}-\frac{q^{۲}\left(۱+\frac{\mu}{r}\right)^{۲}}{\mu^{۲}}\right)R(r)\,Z(\theta)\,e^{i(q\psi+\vartheta\varphi)}=$$

$$\left(-۲E+\frac{۲E\,\mu}{r}\right)R(r)\,Z(\theta)\,e^{i(q\psi+\vartheta\varphi)} \qquad (۳۵a-۳)$$

$$\left(\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{۱}{r}\left(۲E\,\mu-\frac{C_{۱}}{۲}-\frac{۲q^{۲}}{\mu}\right)+\left(۲E-C_{۴}-\frac{q^{۲}}{\mu^{۲}}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{q^{۲}}{r^{۲}}\right)R(r)\,Z(\theta)\,e^{i(q\psi+\vartheta\varphi)}=۰ \qquad (۳۵b-۳)$$

رابطه فوق را بر $\Psi(r,\theta,\varphi)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{1}{R(r)r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{rR(r)}\left(2E\mu-\frac{C_1}{2}-\frac{2q^2}{\mu}\right)R(r)+\frac{1}{R(r)}\left(2E-C_4-\frac{q^2}{\mu^2}\right)R(r)$$
$$-\frac{q^2}{r^2R(r)}R(r)=0 \qquad (۳-۳۶)$$

جمله شعاعی عبارت است از:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{r}\left(2E\mu-\frac{C_1}{2}-\frac{2q^2}{\mu}\right)R(r)+\left(2E-C_4-\frac{q^2}{\mu^2}\right)R(r)-$$
$$A\frac{R(r)}{r^2}=0 \qquad (۳-۳۷)$$

جمله وابسته به زاویه برابر است با:

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{\vartheta^2}{\sin^2\theta}\right)+\frac{q^2(1-\cos^2\theta)}{(1+\cos\theta)^2}+\frac{2iq\vartheta}{(1+\cos\theta)}-\frac{C_2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}-\frac{C_3}{4\sin^2\theta}\right]$$
$$R(r)Z(\theta)e^{i(q\psi+\vartheta\varphi)}=0 \qquad (۳-۳۸)$$

جمله سوم رابطه (۳-۳۸) به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$-\frac{\vartheta^2}{\sin^2\theta}=\frac{-\frac{\vartheta^2}{4}}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{A}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{B}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{A+(B-A)\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$B-A=0\rightarrow B=A=-\frac{\vartheta^2}{4} \qquad , \quad \vartheta=m-q$$
$$\frac{A}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{B}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=-\frac{(m-q)^2}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{(m-q)^2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}} \qquad (۳-۳۹)$$

رابطه (۳-۳۹) را در معادله مربوط به جمله وابسته به زاویه قرار می‌دهیم:

$$\left(\frac{\partial^2 Z(\theta)}{\partial\theta^2}+\cot\theta\frac{\partial Z(\theta)}{\partial\theta}\right)+\left[\frac{q^2(1-\cos^2\theta)}{(1+\cos\theta)^2}+\frac{2iq\vartheta}{(1+\cos\theta)}+\frac{C_2}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}+\right.$$
$$\left.(A-\frac{(m-q)^2+C_3}{4\sin^2\theta})\right]Z(\theta)=0 \qquad (۴۰-۳)$$

طیف انرژی جمله شعاعی معادله شرودینگر را از روش نیکوورف- اواروف[۳۴] به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)+\frac{1}{r}\left(2E\mu-\frac{C_1}{2}-\frac{2q^2}{\mu}\right)R(r)+\left(2E-C_4-\frac{q^2}{\mu^2}\right)R(r)-$$
$$A\frac{R(r)}{r^2}=0 \qquad (۴۱-۳)$$

روابط زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\alpha=2E\mu-\frac{C_1}{2}-\frac{2q^2}{\mu} \qquad , \qquad \beta=2E-C_4-\frac{q^2}{\mu^2}$$

رابطه (۳-۴۱) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2R(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR(r)}{dr}+\left(\frac{-A+\alpha r+\beta r^2}{r^2}\right)R(r)=0 \qquad (۴۲-۳)$$

با استفاده از روش نیکوورف- اواروف داریم [۳۱]

$$\alpha_1=2 \quad , \alpha_2=0 \quad , \alpha_3=0 \quad , \alpha_4=-\frac{1}{2} , \alpha_5=0 , \alpha_6=-2E+C_4+\frac{q^2}{\mu^2}$$
$$\alpha_7=-2E\mu+\frac{C_1}{2}+\frac{2q^2}{\mu} , \alpha_8=\frac{1}{4}+A , \alpha_9=-2E+C_4+\frac{q^2}{\mu^2}$$

[۳۴] Nikiforov–Uvarov

برای به دست آوردن انرژی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\alpha_2 n-(2n+1)\alpha_5+(2n+1)(\sqrt{\alpha_9}+\alpha_3\sqrt{\alpha_8})+n(n-1)\alpha_3+\alpha_7+$$
$$2\alpha_3\alpha_8+2\sqrt{\alpha_8\alpha_9}=0$$

$$(2n_r+1)\sqrt{-2E+C_4+\frac{q^2}{\mu^2}}+(-2E\mu+\frac{C_1}{2}+\frac{2q^2}{\mu})+2\sqrt{(-2E+C_4+\frac{q^2}{\mu^2})(\frac{1}{4}+A)}=0$$

$$n_r+\frac{1}{2}+\sqrt{(\frac{1}{4}+A)}=\frac{(-2E\mu+\frac{C_1}{2}+\frac{2q^2}{\mu})}{2\sqrt{-2E+C_4+\frac{q^2}{\mu^2}}} \qquad (43-3)$$

سپس رابطه فوق به رابطه زیر تبدیل می‌شود

$$A=\left(j+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\left(j+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}+1\right)=\ell(\ell+1) \qquad ,\ell=\left(j+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)$$

$$\frac{(-2E\mu+\frac{C_1}{2}+\frac{2q^2}{\mu})}{2\sqrt{-2E+C_4+\frac{q^2}{\mu^2}}}=n+1+j+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}=n+\frac{\delta_1+\delta_2}{2} \qquad (44-3)$$
$$n=n_r+j+1$$

که A ثابت جداسازی است.

۳-۳- تحلیل سیستم تعمیم یافته میسز-کپلر[35]

سیستم میسز-کپلر یک مسئله چند حالته است، که در حضور تک قطبی مغناطیسی به طور مستقل توسط ذوان زیگر، مکینتاش، سیسنروس مطالعه شد [۲۶-۲۵]. این سیستم میسز-کپلر شامل

[35] Micz – kepler

تک قطبی مغناطیسی در فضای سه بعدی یکنواخت با بار الکتریکی منفی دلخواه که یک ترم معکوس – مربعی در پتانسیل آن قرار دارد، می‌باشد. سیستم تعمیم یافته میسز-کپلر توسط مردویان[۳۶] معرفی شد.

سیستم تعمیم یافته میسز-کپلر معادله (۳-۴۵) را توصیف می‌کند:

$$\frac{۱}{۲}(-i\,\nabla - s\,A)^{۲}\,\psi + \left[\frac{s^{۲}}{۲r^{۲}} - \frac{۱}{r} + \frac{c_{۱}}{r\,(r+z)} + \frac{c_{۲}}{r\,(r-z)}\right]\psi = E\,\psi \qquad (۴۵-۳)$$

که ضرایب $c_{۱}, c_{۲}$ نامنفی هستند. پتانسیل و میدان مغناطیسی را با فرض ($\hbar = m = e = c = ۱$) به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$A = \frac{۱}{r\,(r-z)}(y, -x, ۰) \qquad , \quad B = \frac{\vec{r}}{r^{۳}} \qquad (۴۶-۳)$$

در رابطه (۳-۴۶) عدد تک قطبی s نقش بار کوانتیده دیراک را برآورده می‌کند و مقادیر ($s = ۰, \ \pm\frac{۱}{۲}, \pm ۱$) را به خود می‌گیرد. هر مقدار s سیستم تعمیم یافته خاص میسز کپلر را توصیف می‌کند.

رابطه سیستم میسز کپلر (۳-۴۵) برای $c_i = ۰\ (i = ۱, ۲)$ و $s \neq ۰$ به معادله شرودینگر کاهش می‌یابد.

معادله شرودینگر را در مختصات کروی جداسازی می‌کنیم و طیف انرژی آن را به دست می‌آوریم. تمام سیستم‌های فوق الذکر دارای تقارن کولن است.

اگر $s = ۰$ باشد، معادله شرودینگر به سیستم تعمیم یافته کپلر-کولن[۳۷] تبدیل می‌شود [۳۲].

---

[۳۶] Mardoyan

معادله شرودینگر (۳-۴۵) را در مختصات کروی حل می‌کنیم:

$$\left\{\Delta_r \theta + \frac{۱}{۴\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}}\left[\frac{\partial^{۲}}{\partial\varphi^{۲}} - ۴c_{۱}\right] + \frac{۱}{۴\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\varphi} + ۲is\right)^{۲} - ۴c_{۲}\right] + ۲\left[E + \frac{۱}{r}\right]\right\}\psi = ۰$$

$$\Delta_r \theta = \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{۱}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \qquad (۴۷-۳)$$

برای اثبات رابطه فوق به طریق زیر عمل می‌کنیم:

با معرفی پتانسیل‌ها به صورت زیر و قراردادن این پتانسیل‌ها در معادله (۳-۴۵) داریم:

$$A_{۱} = \frac{y}{r(r-z)} \quad , \quad A_{۲} = \frac{-x}{r(r-z)} \quad , \quad A_{۳} = ۰ \quad , \quad B = \frac{\vec{r}}{r^{۳}},$$

$$\left\{۲\left(E + \frac{۱}{r}\right) - \left[-\nabla^{۲} + s^{۲}A^{۲} + i\nabla . sA + sA . i\nabla\right] - \right.$$

$$\left.\frac{s^{۲}}{r^{۲}} - \frac{۲c_{۱}}{r^{۲}(۱+\cos\theta)} - \frac{۲c_{۲}}{r^{۲}(۱-\cos\theta)}\right\}\psi = ۰ \qquad (۴۸-۳)$$

عملگرلاپلاس را در مختصات کروی به دست می‌آوریم و در معادله (۳-۴۸) قرار می‌دهیم:

$$\nabla^{۲} = \frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{۲}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{۱}{r^{۲}\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{۱}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial^{۲}}{\partial\varphi^{۲}}$$

[۳۷] Kepler – coulomb

$$\left\{2\left(E+\frac{1}{r}\right)+\Delta_r\theta+\frac{1}{4r^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-s^2A^2-i\nabla.sA-sA.i\nabla-\frac{s^2}{r^2}\right.$$

$$\left.-\frac{2c_1}{2r^2\cos^2\frac{\theta}{2}}-\frac{2c_2}{2r^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\right\}\psi=0 \qquad (۴۹-۳)$$

جمله سوم معادله بالا را به صورت زیر جداسازی می‌کنیم:

$$\frac{\frac{1}{4}}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{A}{\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{B}{\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{A+(B-A)\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}},$$

$$B-A=0\rightarrow B=A=\frac{1}{4} \quad , \quad \frac{\frac{1}{4}}{\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}+\frac{1}{4\cos^2\frac{\theta}{2}} \qquad (۵۰-۳)$$

رابطه (۳-۵۰) را در معادله (۳-۴۹) قرار می‌دهیم و با اندکی محاسبات به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\left\{2\left(E+\frac{1}{r}\right)+\Delta_r\theta+\frac{1}{4r^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-4c_2-4s^2\right)+\frac{1}{4r^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-4c_1\right)\right.$$

$$\left.-i\nabla.(sA)-sA.i\nabla-\frac{s^2}{r^2}\right\}\psi=0 \qquad (۵۱-۳)$$

جمله (۵) و (۶) در معادله (۳-۵۱) را می‌توان به صورت زیر بنویسیم:

$$\nabla.(sA)=A.(\nabla.s)+s(\nabla.A)=s\left[\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right]\left[A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\right]=۰, \qquad (۵۲-۳)$$

$$sA.i\nabla=sA.i\left[\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right]=s\left[A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}\right].i\left[\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right]=$$

$$\frac{si}{r(r-z)}\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad (۵۲a-۳)$$

رابطه (۳-۵۲a) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$L_z=(r\times p)_z=\left(x\,p_y-y\,p_x\right)=i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}\right)\rightarrow L_z=-i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

$$sA.i\nabla=-\frac{si}{r(r-z)}\frac{\partial}{\partial\varphi}=-\frac{si}{۲r^{۲}\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}}\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (۵۳-۳)$$

روابط فوق را در معادله (۳-۵۱) قرار می‌دهیم.

$$\left\{۲\left(E+\frac{۱}{r}\right)+\Delta_r\theta+\frac{۱}{۴r^{۲}\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}}\left(\frac{\partial^{۲}}{\partial\varphi^{۲}}-۴c_{۲}-۴s^{۲}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{۱}{۴r^{۲}\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}}\left(\frac{\partial^{۲}}{\partial\varphi^{۲}}-۴c_{۱}\right)+۲is\frac{\partial}{\partial\varphi}\right\}\psi=۰$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+۲is\right)^{۲}=\frac{\partial^{۲}}{\partial\varphi^{۲}}-۴s^{۲}+۲is\frac{\partial}{\partial\varphi}+۲i\frac{\partial}{\partial\varphi}s=\frac{\partial^{۲}}{\partial\varphi^{۲}}-۴s^{۲}+۲is\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad (۵۴-۳)$$

و با استفاده از رابطه (۳-۵۴) معادله بالا را اثبات کردیم:

$$\left\{2\left(E+\frac{1}{r}\right)+\Delta_r\theta+\frac{1}{4r^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+2is\right)^2-4c_2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4r^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-4c_1\right)\right\}\psi=0 \qquad (3-55)$$

با استفاده از روش جداسازی متغیرها معادله فوق را حل می‌کنیم:

$$\psi(r,\theta)=R(r)Q(\theta), \qquad (3-56)$$

$$\left\{2\left(E+\frac{1}{r}\right)+\Delta_r\theta+\frac{1}{4r^2\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+2is\right)^2-4c_2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4r^2\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-4c_1\right)\right\}R(r)Q(\theta)=0$$

$$\Delta_r\theta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)$$

رابطه فوق را بر $\psi(r,\theta)=R(r)Q(\theta)$ تقسیم می‌کنیم و جمله شعاعی را به دست می‌آوریم:

$$\left\{2\left(E+\frac{1}{r}\right)R(r)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{dR(r)}{dr}\right)\right\}-\frac{A}{r^2}R(r)=0 \qquad (3-57)$$

جمله زاویه‌ای عبارت است از:

$$\left\{\frac{R(r)}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Q(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{R(r)}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+2is\right)^2-4c_2\right)Q(\theta)\right.$$

$$+\frac{R(r)}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-4c_1\right)Q(\theta)\Bigg\}R(r)Q(\theta)=-A\;R(r)Q(\theta) \qquad (۵۸-۳)$$

طرفین را بر $\psi(r,\theta)=R(r)Q(\theta)$ تقسیم می‌کنیم:

$$\Bigg\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Q(\theta)}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\left(\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+2is\right)^2-4c_2\right)Q(\theta)+$$

$$\frac{1}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}-4c_1\right)Q(\theta)\Bigg\}=-A\,Q(\theta). \qquad (۵۹-۳)$$

که در آن A ثابت جداسازی است:

$$A=\left(j+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}\right)\left(j+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}+1\right) \qquad (۶۰-۳)$$

با در نظر گرفتن جمله شعاعی، طیف انرژی را به روش نیکوورف- اواروف به دست می‌آوریم:

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{R}\frac{dR}{dr}+\frac{\left(2Er^2+2r-A\right)}{r^2}R(r)=0 \qquad (۶۱-۳)$$

معادله فوق را به روش نیکوورف- اواروف محاسبه می‌کنیم

$$\alpha_1=2,\ \alpha_2=0,\ \alpha_3=0,\ \alpha_4=-\frac{1}{2},\ \alpha_5=0,\ \alpha_6=-2E,\ \alpha_7=-2,\ \alpha_8=\frac{1}{4}+A,\ \alpha_9=-2E$$

برای به دست آوردن انرژی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\alpha_{۲} n-(۲n+۱)\alpha_{۵}+(۲n+۱)(\sqrt{\alpha_{۹}}+\alpha_{۳}\sqrt{\alpha_{۸}})+n(n-۱)\alpha_{۳}+\alpha_{۷}+۲\alpha_{۳}\alpha_{۸}+۲\sqrt{\alpha_{۸}\alpha_{۹}}=۰$$

$$(۲n_r+۱)\sqrt{-۲E}-۲+۲\sqrt{(-۲E)(\frac{۱}{۴}+A)}=۰$$

$$n_r+\frac{۱}{۲}+\sqrt{(\frac{۱}{۴}+A)}=\frac{۱}{\sqrt{-۲E}} \qquad , \quad A=\left(j+\frac{\delta_۱+\delta_۲}{۲}\right)\left(j+\frac{\delta_۱+\delta_۲}{۲}+۱\right)=\ell(\ell+۱)$$

$$\ell=\left(j+\frac{\delta_۱+\delta_۲}{۲}\right) \qquad , \quad n_r+\frac{۱}{۲}+\sqrt{(\frac{۱}{۴}+\ell(\ell+۱))}=\frac{۱}{\sqrt{-۲E}}$$

$$n=n_r+j+۱ \qquad , \quad E=-\frac{۱}{۲\left(n+\frac{\delta_۱+\delta_۲}{۲}\right)^۲} \tag{۶۲-۳}$$

حال برای حل جمله زاویه‌ای تغییر متغیر زیر را پیشنهاد می‌کنیم:

$$Z=(\sin\theta)^{-\frac{۱}{۲}}U$$

$$Z'=-\frac{۱}{۲}(\sin\theta)^{-\frac{۳}{۲}}\cos\theta U+(\sin\theta)^{-\frac{۱}{۲}}U'$$

$$Z''=\left(-\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۳}{۲}\right)(\sin\theta)^{-\frac{۵}{۲}}\cos^۲\theta U+\frac{۱}{۲}(\sin\theta)^{-\frac{۳}{۲}}\sin\theta U-\frac{۱}{۲}(\sin\theta)^{-\frac{۳}{۲}}\cos\theta U'-$$
$$\frac{۱}{۲}(\sin\theta)^{-\frac{۳}{۲}}\cos\theta U'+(\sin\theta)^{-\frac{۱}{۲}}U''=$$
$$\frac{۳}{۴}(\sin\theta)^{-\frac{۵}{۲}}U-\frac{۱}{۴}(\sin\theta)^{-\frac{۱}{۲}}U-(\sin\theta)^{-\frac{۳}{۲}}\cos\theta U'+(\sin\theta)^{-\frac{۱}{۲}}U'' \tag{۶۳-۳}$$

متغیرهای زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial\varphi}+۲is\right)^۲-۴c_۲\right)=D \qquad , \quad \left(\frac{\partial^۲}{\partial\varphi^۲}-۴c_۱\right)=C$$

رابطه (۳-۶۳) را در معادله زاویه‌ای (۳-۵۹) جایگزین می‌کنیم:

$$U''+\frac{۱}{۴}U+\frac{۱}{۱۶\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}}U+\frac{C}{۴\cos^{۲}\frac{\theta}{۲}}U+\frac{D}{۴\sin^{۲}\frac{\theta}{۲}}U+AU=۰ \qquad (۶۴-۳)$$

یک متغیر جدید معرفی می‌کنیم:

$$t=\sin^{۲}\frac{\theta}{۲} \qquad , \qquad \frac{d}{d\theta}=\frac{d}{dt}\frac{dt}{d\theta}=۲\sqrt{t(۱-t)}\frac{d}{dt} \qquad (۶۵-۳)$$

$$\frac{d^{۲}}{d\theta^{۲}}=۴t(۱-t)\frac{d^{۲}}{dt^{۲}}+۲(۱-۲t)\frac{d}{dt} \quad . \qquad (۶۵a-۳)$$

با قرار دادن رابطه (۳-۶۵a) در معادله (۳-۶۴) داریم:

$$\frac{d^{۲}U}{dt^{۲}}+\frac{(\frac{۱}{۲}-t)}{t(۱-t)}\frac{dU}{dt}+\frac{\left(\frac{-۴A-۱}{۱۶}\right)t^{۲}+\left(\frac{C-D+۴A+۱}{۱۶}\right)t+\left(\frac{۱}{۶۴}+\frac{D}{۱۶}\right)}{t^{۲}(۱-t)^{۲}}U=۰ \qquad (۶۶-۳)$$

تابع موج جمله زاویه‌ای عبارت است از:

$$\psi=\left(\sin\frac{\theta}{۲}\right)^{\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\sqrt{۳-۴D}} \quad (\cos\frac{\theta}{۲})^{-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}\sqrt{۳-۴D}+۱+۲\sqrt{\frac{۶}{۶۴}-\frac{C}{۱۶}-\frac{D}{۱۶}}}\times$$
$$P_n^{\left(\frac{۱}{۴}\sqrt{۳-۴D},\,۲\sqrt{\frac{۶}{۶۴}-\frac{C}{۱۶}-\frac{D}{۱۶}}-\frac{۱}{۴}\sqrt{۳-۴D}\right)}(\cos\theta) \qquad (۶۷-۳)$$

که $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ چندجمله‌ای ژاکوبی است. در این مبحث به بررسی هامیلتونی کالوزا کلاین و میسز کپلر در حضور تک قطبی مغناطیسی پرداخته و این هامیلتونی را با در نظر گرفتن برخی تحولات به شکل شناخته شده تبدیل کرده و از معادلات ویژه مقدار انرژی و ویژه تابع را محاسبه کرده و همانطور که مشاهده کردیم ویژه تابع بر حسب چند جمله‌ای ژاکوبی به دست می‌آید.

فصل چهارم

حرکت نسبیتی یک دیون اسپین صفر باردار در حضورمیدان آهارانوف بوهم و پتانسیل هولسن

۴-۱- بررسی دیون‌ها در حالت نسبیتی

دیون ذره‌ای که هم بارالکتریکی و هم بار مغناطیسی دارد که توسط مقناد ساها کشف شد. سیستم نسبیتی اسپین صفر را در معادله کلاین-گوردن در چارچوب کوانتومی مطالعه می‌کنیم [۳۳-۳۴]. این آنالیز را در چارچوب فضا زمان در نظر می‌گیریم [۳۵-۳۶]. طیف انرژی مرتبط با این سیستم که مشابه اتم هیدروژن بین بار الکتریکی از ذره e و بار مغناطیسی تک قطبی g که عدد صحیح است را به دست می‌آوریم [۳۷]. پتانسیل برداری را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$A_{\phi}^{g} = g\,(1 - cos\theta)\ , \qquad (۱-۴)$$

متغیر g شدت تک قطبی را نشان می‌دهد. به این منظور اثر میدان الکترومغناطیسی خارجی را در نظر می‌گیریم. عملگر چهار برداری دیفرانسیل $p_\mu = i\,\partial_\mu$ به صورت $P_\mu \to P_\mu - e\,A_\mu$ اصلاح می‌شود [۳۸]. ابتدا حرکت کوانتوم نسبیتی ذره باردار با اسپین صفر را، در حضور یک دیون و شار مغناطیسی بوهم و پتانسیل هولسن را محاسبه می‌کنیم. معادله کلاین- گوردون را برای ذره حامل بار در حضور میدان الکترومغناطیسی به شکل زیر است:

$$\left[D^{۲} - (M + S(r))^{۲}\right]\psi = ۰\,, \qquad (۲-۴)$$

که عملگردیفرانسیل D_μ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\,e\,A_\mu\,, \qquad (۳-۴)$$

که در آن $S(r)$ پتانسیل اسکالر است و به صورت پتانسیل هولسن در نظر می‌گیریم. در میدان الکترومغناطیسی شار بوهم و پتانسیل کولن از بار الکتریکی دیون را در نظر می‌گیریم. پتانسیل چهاربرداری در مختصات کروی به شکل زیر است:

$$A_\mu = (A_۰, ۰, ۰, A_\phi)\,, \qquad (۴-۴)$$

$$A_\phi = \frac{\phi_B}{۲\pi} + A_\phi^g\,. \qquad (۵-۴)$$

شار بوهم با ϕ_B نشان داده می‌شود و A_ϕ^g به صورت معادله (۴-۱) معرفی شده است.پتانسیل کولنی از بار الکتریکی دیون به دست می‌آید.

$$A_۰(r) = \frac{Q}{r}. \qquad (۶-۴)$$

سیستم ذره باردار دیون را با استفاده از سیستم مختصات کروی آنالیز کنیم

$$D^{2}=-(\partial_t - i\,e\,A_0)^{2}+\frac{1}{r^{2}}\partial_r(r^{2}\partial_r)+\frac{1}{r^{2}\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta)+$$

$$\frac{1}{r^{2}\sin^{2}\theta}(\partial_\phi - i\,e\,A_\phi)^{2}\ . \qquad (۴-۷)$$

ابتدا معادله (۴-۲) را با استفاده از جداسازی بخش شعاعی و زاویه‌ای حل می‌کنیم:

$$\Psi(\vec{r},t)=e^{-i E_{n,\lambda,m} t}\,R_{n,\lambda,m}(r)\;Y(\theta,\varphi) \qquad (۴-۸)$$

که در آن $E_{n,\lambda,m}$ انرژی ذره است. با جایگذاری روابط (۴-۷) و (۴-۸) در معادله (۴-۲) معادله دیفرانسیل زیر را به دست می‌آوریم

$$\frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\,\partial_\theta)+\frac{(\partial_\phi^{2}-2i\,e\,A_\varphi\partial_\varphi - e^{2}A_\varphi^{2})}{\sin^{2}\theta}Y(\theta,\varphi)=\lambda^{2}Y(\theta,\varphi) \qquad (۴-۹)$$

$$\frac{1}{r^{2}}\frac{d}{dr}\left(r^{2}\frac{dR_{n,\lambda,m}(r)}{dr}\right)-\left[-\frac{\lambda^{2}}{r^{2}}+(M+S(r))^{2}-(E_{n,\lambda,m}+e\,A_0)^{2}\right]R_{n,\lambda,m}(r)=0\,. \qquad (۴-۱۰)$$

که در هردو معادله λ^2 ثابت جداسازی است.

به منظور حل معادله (۴-۹) از رابطه زیر استفاده می‌کنیم [۳۹]

$$Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\,e^{i(m-q)\phi}\ , \qquad (۴-۱۱)$$

که در آن m عددکوانتومی مغناطیسی و $q=eg$ معرفی می‌شود. حل معادله (۴-۹) را در غیاب میدان مغناطیسی – بوهم به دست می‌آورند [۳۹]. با جایگذاری معادله (۴-۱۱) در معادله (۴-۱۰) و معرفی متغیر جدید $x=\cos\theta$ معادله دیفرانسیل زیر به دست می‌آید:

$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d}{d\theta}\right)+\frac{(\partial_\phi^2-2ieA_\phi\partial_\phi-e^2A_\phi^2)}{\sin^2\theta}\right]\Theta(\theta)\,e^{i(m-q)\phi}=\lambda^2\,\Theta(\theta)\,e^{i(m-q)\phi},\quad (۱۲-۴)$$

$$A_\phi=\frac{\phi_B}{2\pi}+A_\phi^g\quad,\ A_\phi^g=g\,(1-\cos\theta)\ ,$$

با استفاده از تبدیل $x=\cos\theta$ داریم:

$$K_\varphi=m-q\quad,\quad \frac{e\,\phi_B}{2\pi}+e\,g\,(1-\cos\theta)=\frac{e\,\phi_B}{2\pi}+e\,g\,(1-x)\ ,$$

$$q=-g\,e\qquad,\quad m_\phi=\frac{\phi_B e}{2\pi}+g\,e-K_\varphi,\qquad (۱۳-۴)$$

معادله (۴-۱۲) به صورت معادله زیر ظاهر می‌شود

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}-2x\,\frac{d\,\Theta(x)}{dx}-\frac{(m_\phi+q\,x)^2}{(1-x^2)}\Theta(x)=\lambda^2\,\Theta(x)\ ,\qquad (۱۴-۴)$$

با فرض

$$Z=\frac{1-x}{2}\ ,\qquad (۱۵-۴)$$

معادله (۴-۱۴) به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\frac{d^{2}\Theta(Z)}{dZ^{2}}+\frac{(1-2Z)}{Z(1-Z)}\frac{d\,\Theta(Z)}{dZ}+$$

$$\left[\frac{-(\frac{m_{\phi}^{2}+q^{2}+2m_{\phi}q}{4})-(q^{2}-\lambda^{2})Z^{2}-(\frac{-4q^{2}-4m_{\phi}q}{4}+\lambda^{2})Z}{\left[Z(1-Z)\right]^{2}}\right]\Theta(Z)=0. \qquad (16-4)$$

که جواب معادله (۴-۱۶) بر حسب چند جمله‌ای ژاکوبی می‌باشد [۴۰].

$$\Theta(Z)=L_{n,\lambda,m}(Z)^{\frac{m_{\phi}+q}{2}}\quad(1-Z)^{\frac{m_{\phi}-q}{2}}\quad P_{n}^{(m_{\phi}+q,m_{\phi}-q)}(1-2Z)\,. \qquad (17-4)$$

یا

$$\Theta(x)=L_{n,\lambda,m}(\frac{1-x}{2})^{\frac{m_{\phi}+q}{2}}\quad(\frac{1+x}{2})^{\frac{m_{\phi}-q}{2}}\quad P_{n}^{(m_{\phi}+q,m_{\phi}-q)}(x)\,. \qquad (18-4)$$

معادله شعاعی (۴-۱۰) را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{1}{r^{2}}\frac{d}{dr}(r^{2}\frac{dR_{n,\lambda,m}(r)}{dr})-\left[-\frac{\lambda^{2}}{r^{2}}+(M+S(r))^{2}-(E_{n,\lambda,m}+eA_{0})^{2}\right]R_{n,\lambda,m}(r)=0\,,$$

که در آن M و A_0 به ترتیب جرم و پتانسیل کولن است. با معرفی پتانسیل هولسن به شکل زیر:

$$S(r)=-\frac{V_{0}\,e^{-\alpha r}}{(1-e^{-\alpha r})}\,, \qquad (19-4)$$

که r شعاع است. V_0 و α ضرایب ثابت هستند. با جایگذاری روابط (۴-۶) و (۴-۱۹) در معادله (۴-۱۰) معادله زیر به دست می‌آید

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{n,\lambda,m}(r)}{dr}\right)-\left[-\frac{\lambda^2}{r^2}+\left(M-\frac{V_0 e^{-\alpha r}}{(1-e^{-\alpha r})}\right)^2-\left(E_{n,\lambda,m}+e\frac{Q}{r}\right)^2\right]R_{n,\lambda,m}(r)=0, \qquad (۴-۲۰)$$

با معرفی $R_{n,\lambda,m}(r)=\frac{U_{n,\lambda,m}(r)}{r}$ و با استفاده از تقریب زیر [۴۱-۴۲]

$$\frac{1}{r}\approx\frac{\alpha e^{-\alpha r}}{(1-e^{-\alpha r})}, \qquad (۴-۲۱)$$

با معرفی $S=1-e^{-\alpha r}$ ، معادله (۴-۲۰) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\frac{d^2U_{n,\lambda,m}(S)}{dS^2}+\frac{-S}{S(1-S)}\frac{dU_{n,\lambda,m}(S)}{dS}+\frac{\left(\lambda^2+\frac{E^2_{n,\lambda,m}}{\alpha^2}+e^2Q^2-\frac{2E_{n,\lambda,m}\,eQ}{\alpha}-\frac{M^2}{\alpha^2}-\frac{V_0^2}{\alpha^2}-\frac{2MV_0}{\alpha^2}\right)S^2}{S^2(1-S)^2}U_{n,\lambda,m}(S)$$
$$+\frac{\left(\frac{2E_{n,\lambda,m}\,eQ}{\alpha}-2e^2Q^2+\frac{2V_0^2}{\alpha^2}-2\lambda^2+\frac{2MV_0}{\alpha^2}\right)S+\left(-\frac{V_0^2}{\alpha^2}+e^2Q^2+\lambda^2\right)}{S^2(1-S)^2}U_{n,\lambda,m}(S)=0 \qquad (۴-۲۲)$$

که را بطه انرژی را به روش نیکوورف- اواروف به دست می‌آوریم.

$$n^2+n-\frac{2E_{n,\lambda,m}\,eQ}{\alpha}-\frac{2MV_0}{\alpha^2}+(2n+1)\,\chi+(2n+1)\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}(M^2-E^2_{n,\lambda,m})}+$$
$$2\chi\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}(M^2-E^2_{n,\lambda,m})}=0 \qquad (۴-۲۳)$$

که در آن χ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\chi=\sqrt{\frac{۱}{۴}-\lambda^{۲}+\frac{V_{\cdot}^{۲}}{\alpha^{۲}}-e^{۲}Q^{۲}} \quad . \qquad (۲۴-۴)$$

حال ویژه‌تابع این معادله (۴-۲۲) به صورت زیر به دست می‌آید

$$U_{n,\lambda,m}(r)=(۱-e^{-\alpha r})^{\chi}(e^{-\alpha r})^{\eta}\ P_n^{(۲\chi,۲\eta)}(۲e^{-\alpha r}-۱) \qquad (۲۵-۴)$$

که در آن η به صورت زیر تعریف شده است:

$$\eta=\sqrt{\frac{۱}{\alpha^{۲}}(M^{۲}-E_{n,\lambda,m}^{۲})}. \qquad (۲۶-۴)$$

که $P_n^{(۲\chi,۲\eta)}$ چند جمله‌ای ژاکوبی است. چند جمله‌ای ژاکوبی با درجه آزادی n به صورت زیر بیان می‌شود

$$P_n^{\sigma,\beta}(x)=\frac{(-۱)^n}{۲^n\, n!}(۱-x)^{-\sigma}(۱+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(۱-x)^{\sigma+n}(۱+x)^{\beta+n}\right] \qquad (۲۷-۴)$$

که در آن $P_n^{\sigma,\beta}(x)$ چند جمله‌ای ژاکوبی است. به برخی از کاربردهای چند جمله‌ای ژاکوبی اشاره می‌کنیم:

چند جمله‌ای ژاکوبی شرایط تعامد را برآورد می‌کند:

$$\int_{-۱}^{۱}(۱-x)^{\alpha}(۱+x)^{\beta}\ P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx=$$
$$\frac{۲^{\alpha+\beta+۱}}{۲n+\alpha+\beta+۱}\frac{\Gamma(n+\alpha+۱)\Gamma(n+\beta+۱)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+۱)n!}\delta_{m,n} \qquad (۲۸-۴)$$

رابطه بالا بهنجار نیست برای بهنجار کردن از رابطه زیر پیروی می‌کنند

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(۱)=\binom{n+\alpha}{n} \qquad (۲۹-۴)$$

رابطه تقارن برای چندجمله‌ای ژاکوبی

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-z)=(-1)^n\ P_n^{(\alpha,\beta)}(z) \qquad (۳۰-۴)$$

مشتق چند جمله‌ای ژاکوبی عبارت است از

$$\frac{d^k}{dz^k}P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1+k)}{2^k\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}P_{n-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(z) \qquad (۳۱-۴)$$

تعریف معادل توسط رابطه ردریگرز[۳۸] [۴۳]

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(z)=\frac{(-1)^n}{2^n\,n!}(1-z)^{-\alpha}(1+z)^{-\beta}\frac{d^n}{dz^n}\left\{(1-z)^{\alpha}(1+z)^{\beta}(1-z^2)^n\right\} \qquad (۳۲-۴)$$

روابط بالا ویژگی‌های چندجمله‌ای ژاکوبی است. معادله کلاین-گوردون را در حضور پتانسیل هولسن، میدان مغناطیسی آهارانوف - بوهم و ذره دیون بررسی کرده و توسط جداسازی متغیرها و از طریق برخی تحولات به معادله دیفرانسیل شناخته شده تبدیل شد. سپس ویژه تابع و ویژه مقدار انرژی را به دست آورده و مشاهده می‌شود طیف انرژی به پارامتر پتانسیل بوهم وابسته نیست.

[۳۸] Rodrigues

فصل پنجم

میدان تک قطبی مغناطیسی و اتم هیدروژن نسبیتی

۵-۱- مقدمه

معادله دیراک را در سه بعد فضایی که شامل میدان کولن و اثر آهارانوف بوهم است، را در نظر می‌گیریم. طیف انرژی این معادله را به دست می‌آوریم و بستگی ویژه مقدار انرژی را به برخی از پارامترهای پتانسیل و برخی دیگر از پارامترهای موجود در مسأله توصیف می‌کنیم

۵-۲- معادله دیراک در حضور پتانسیل تک قطبی مغناطیسی و پتانسیل آهارانوف بوهم

معادله دیراک با فرض $[\hbar = c = ۱]$ به شکل زیر است:

$$[\vec{\alpha}.\vec{\Pi}+\beta(M+S(r))]\Psi(\vec{r})=[E-V(r)]\Psi(\vec{r}), \qquad (۱-۵)$$

که در آن $S(r), \vec{\Pi}, E$ و $V(r)$ به ترتیب نمایش انرژی نسبیتی از این سیستم، عملگر سه بعدی تکانه $\left(\vec{\pi}=\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}\right)$ ، پتانسیل اسکالر و پتانسیل برداری است. این α و β به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\alpha=\begin{pmatrix} ۰ & \sigma_i \\ \sigma_i & ۰ \end{pmatrix} \quad , \ \beta=\begin{pmatrix} I & ۰ \\ ۰ & -I \end{pmatrix} , \ i=۱,۲,۳ \qquad (۲-۵)$$

I ماتریس یکانی است و σ_i را ماتریس پاؤلی می‌نامیم.

$$\sigma_۱=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ \end{pmatrix} \ , \ \sigma_۲=\begin{pmatrix} ۰ & -i \\ i & ۰ \end{pmatrix} \ , \ \sigma_۳=\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & -۱ \end{pmatrix}. \qquad (۳-۵)$$

تابع موج را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\Psi(\vec{r})=\begin{pmatrix} \varphi(\vec{r}) \\ \chi(\vec{r}) \end{pmatrix}, \qquad (۴-۵)$$

با جایگذاری روابط (۵-۲) و (۵-۴) در معادله (۵-۱) جفت معادله‌ی زیر را به دست می‌آوریم [۲]:

$$(\vec{\sigma}.\vec{\Pi})\chi(\vec{r})=\left[E-V(r)-M-S(r)\right]\varphi(\vec{r}), \qquad (۵a-۵)$$

$$(\vec{\sigma}.\vec{\Pi})\varphi(\vec{r})=\left[E-V(r)+M+S(r)\right]\chi(\vec{r}). \qquad (۵b-۵)$$

که جمع و تفاضل پتانسیل را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Delta(r) = V(r) - S(r) \qquad (۶a-۵)$$

$$\Sigma(r) = V(r) + S(r) \qquad (۶b-۵)$$

حالت خاص زمانی که $\Delta(r)=0$ را در نظر می‌گیریم که پتانسیل اسکالر با پتانسیل برداری مساوی است این رابطه تقارن اسپینی است، که اسپین ذره با اندازه حرکت هم‌جهت باشد، را بیان می‌کند. حال معادله (۵a-۵) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$(\vec{\sigma}.\vec{\Pi})\chi(\vec{r}) = \left[E - ۲V(r) - M\right]\varphi(\vec{r}), \qquad (۷a-۵)$$

$$\chi(\vec{r}) = \frac{\vec{\sigma}.\vec{\Pi}}{E+M}\varphi(\vec{r}). \qquad (۷b-۵)$$

حالت دیگر زمانی که $\Sigma(r)=0$ را در نظر می‌گیریم که پتانسیل اسکالر با پتانسیل برداری مساوی نباشد این رابطه تقارن شبه اسپینی است، که اسپین ذره با اندازه حرکت هم‌جهت نباشد، را بیان می‌کند. معادله (۵a-۵) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$(\vec{\sigma}.\vec{\Pi})\varphi(\vec{r}) = [E + M - ۲V(r)]\,\chi(\vec{r}). \qquad (۸a-۵)$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\vec{\sigma}.\vec{\Pi}}{E-M}\chi(\vec{r}). \qquad (۸b-۵)$$

۵-۱-۲- حالت $\Delta(r)=0$ باپتانسیل کولن

با جایگذاری معادله (۵-۷b) در معادله (۵-۷a) ، معادله جداشده زیر از مؤلفه‌های رابطه (۵-۷a) به دست می‌آید:

$$\left[\vec{\Pi}^{۲}+۲(E+M)V(r)\right]\varphi(\vec{r})=\left[E^{۲}-M^{۲}\right]\varphi(\vec{r}). \qquad (۹-۵)$$

با معرفی پتانسیل کولنی

$$V(r)=-\frac{e^{۲}Z}{r}, \qquad (۱۰-۵)$$

با در نظر گرفتن $\vec{\Pi}=\vec{p}-\frac{e}{c}\vec{A}$ که در آن $\vec{A}$ را پتانسیل برداری می‌نامیم، معادله (۵-۹) به شکل زیر در می‌آید [۱]:

$$\left[(P-\frac{e}{c}A)^{۲}-\frac{۲e^{۲}Z}{r}(E+M)\right]\varphi(\vec{r})=\left[E^{۲}-M^{۲}\right]\varphi(\vec{r}), \qquad (۱۱a-۵)$$

$$\left[-\vec{\nabla}^{۲}+e^{۲}\vec{A}^{۲}+i\,\vec{\nabla}.e\vec{A}+i\,e\vec{A}.\vec{\nabla}-\frac{۲e^{۲}Z}{r}(E+M)\right]\varphi(\vec{r})=\left[E^{۲}-M^{۲}\right]\varphi(\vec{r}).(۱۱b-۵)$$

به عبارت دیگر $\vec{A}$ جمع پتانسیل برداری $\vec{A}_g$ و پتانسیل آهارانوف بوهم $\vec{A}_{AB}$ است. که $\vec{A}_g$ مربوط به تک قطبی مغناطیسی دیراک است :

$$\vec{A}_g=\left[\frac{g\,(۱-\cos\theta)}{r\sin\theta}\right]\hat{e}_{\varphi}, \qquad (۱۲-۵)$$

g بارتک قطبی است که شرایط کوانتیده دیراک را برآورد می‌کند، $e\,g=\frac{n}{۲}$ و $\vec{A}_{AB}$ به صورت زیر است [۴۴]

$$\vec{A}_{AB}=\left[\frac{F}{۲\pi r\sin\theta}\right]\hat{e}_{\varphi}. \qquad (۱۳-۵)$$

با جایگذاری روابط (۵-۱۲) و (۵-۱۳) در معادله (۵-۱۱b) خواهیم داشت

$$[-\vec{\nabla}^{۲}+e^{۲}(\frac{g\,(۱-\cos\theta)}{r\sin\theta}+\frac{F}{۲\pi r\sin\theta})^{۲}+i\,\vec{\nabla}.e\vec{A}+i\,e\vec{A}.\vec{\nabla}$$

$$-\frac{۲e^{۲}Z}{r}(E+M)]\varphi(\vec{r})=\left[E^{۲}-M^{۲}\right]\varphi(\vec{r}), \qquad (۱۴-۵)$$

با در نظر گرفتن معادله (۵-۱۴) و روابط زیر:

$$\vec{\nabla}.\vec{A}=۰, \qquad (۱۵a-۵)$$

$$\vec{A}.\vec{\nabla}=\frac{g\,(۱-\cos\theta)}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+\frac{F}{۲\pi r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \qquad (۱۵b-۵)$$

معادله زیر به دست می‌آید:

$$[-\frac{۲}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial^{۲}}{\partial r^{۲}}-\frac{۱}{r^{۲}}\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{۱}{r^{۲}}\frac{\partial^{۲}}{\partial r^{۲}}-\frac{۱}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial^{۲}}{\partial\varphi^{۲}}+\frac{e^{۲}g^{۲}(۱-\cos\theta)^{۲}}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}+$$

$$\frac{e^{۲}F^{۲}}{۴\pi^{۲}r^{۲}\sin^{۲}\theta}+\frac{e^{۲}g\,F(۱-\cos\theta)}{\pi r^{۲}\sin^{۲}\theta}+i\,\frac{e\,g\,(۱-\cos\theta)}{r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+i\,\frac{e\,F}{۲\pi r^{۲}\sin^{۲}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}]\varphi(r,\theta,\varphi)$$

$$-\frac{۲(E_{n,m,l}+M)e^{۲}Z}{r}\varphi(r,\theta,\varphi)=\left[E_{n,m,l}^{۲}-M^{۲}\right]\varphi(r,\theta,\varphi). \qquad (۱۶-۵)$$

$\varphi(r,\theta,\varphi)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\varphi(r,\theta,\varphi)=\frac{U_{n,l,m}(r)}{r}P(\theta)\,e^{i(K_{\varphi}\varphi-E_{n,m,l}t)}, \qquad (۱۷-۵)$$

بدین ترتیب معادله (۵-۱۶) به شکل زیر تغییر می‌کند:

$$-\frac{1}{U_{n,l,m}(r)}\frac{d^2U_{n,l,m}(r)}{dr^2}-\frac{2}{r\,U_{n,l,m}(r)}\frac{dU_{n,l,m}(r)}{dr}-\frac{1}{r^2P(\theta)}\cot\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}-\frac{1}{r^2P(\theta)}\frac{d^2P(\theta)}{d\theta^2}+$$
$$\frac{K_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}+\frac{e^2g^2(1-\cos\theta)^2}{r^2\sin^2\theta}+\frac{e^2F^2}{4\pi^2r^2\sin^2\theta}+\frac{e^2gF(1-\cos\theta)}{\pi r^2\sin^2\theta}-\frac{K_\varphi eg(1-\cos\theta)}{r^2\sin^2\theta}-\frac{K_\varphi eF}{2\pi r^2\sin^2\theta}-$$
$$\frac{2(E_{n,m,l}+M)}{r}e^2Z=(E_{n,m,l}^2-M^2), \qquad (18-5)$$

که با جداسازی متغیرها به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{r^2}{U_{n,l,m}(r)}\frac{d^2U_{n,l,m}(r)}{dr^2}+\frac{2r}{U_{n,l,m}(r)}\frac{dU_{n,l,m}(r)}{dr}+\frac{1}{P(\theta)}\cot\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}+\frac{1}{P(\theta)}\frac{d^2P(\theta)}{d\theta^2}-$$
$$\frac{K_\varphi^2}{\sin^2\theta}-\frac{e^2g^2(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}-\frac{e^2F^2}{4\pi^2\sin^2\theta}-\frac{e^2gF(1-\cos\theta)}{\pi\sin^2\theta}+\frac{K_\varphi eg(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}+$$
$$\frac{K_\varphi eF}{2\pi\sin^2\theta}+2(E_{n,m,l}+M)\,re^2Z+(E_{n,m,l}^2-M^2)\,r^2=0, \qquad (19-5)$$

یا

$$\frac{r^2}{U_{n,l,m}(r)}\frac{d^2U_{n,l,m}(r)}{dr^2}+\frac{2r}{U_{n,l,m}(r)}\frac{dU_{n,m,l}(r)}{dr}+2(E_{n,m,l}+M)re^2Z+(E_{n,m,l}^2-M^2)r^2=-\lambda^2$$
$$\frac{d^2U_{n,l,m}(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dU_{n,l,m}(r)}{dr}+\frac{2(E_{n,m,l}+M)e^2Zr+(E_{n,m,l}^2-M^2)r^2+\lambda^2}{r^2}U_{n,l,m}(r)=0, \qquad (20-5)$$

جمله زاویه‌ای به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{1}{P(\theta)}\cot\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}+\frac{1}{P(\theta)}\frac{d^2P(\theta)}{d\theta^2}-\frac{K_\varphi^2}{\sin^2\theta}-\frac{e^2g^2(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}-\frac{e^2F^2}{4\pi^2\sin^2\theta}-$$
$$\frac{e^2gF(1-\cos\theta)}{\pi\sin^2\theta}+\frac{K_\varphi eg(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}+\frac{K_\varphi eF}{2\pi\sin^2\theta}=\lambda^2$$

$$\frac{d^2P(\theta)}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{dP(\theta)}{d\theta}-\left(\frac{\left[K_\varphi-\left(\frac{Fe}{2\pi}+ge(1-\cos\theta)\right)\right]^2}{\sin^2\theta}+\lambda^2\right)P(\theta)=0, \qquad (21-5)$$

که در آن λ^2 ثابت جداسازی است. با در نظر گرفتن $x=\cos\theta$ معادله (۵-۲۱) به شکل معادله (۵-۲۲) می‌شود:

$$(1-x^2)\frac{d^2P(x)}{dx^2}-2x\frac{dP(x)}{dx}-\left[\frac{\left[m+qx\right]^2}{(1-x^2)}+\lambda^2\right]P(x)=0, \qquad (۵-۲۲)$$

که در آن $q=-ge$ و $m=\frac{Fe}{2\pi}+ge-K_{\varphi}$ معادله (۵-۲۱) با استفاده از تغییر متغیر $Z=\frac{1-x}{2}$ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2P(\theta)}{dZ^2}+\frac{(1-2Z)}{Z(1-Z)}\frac{dP(\theta)}{dZ}+\left[\frac{-(\frac{m^2+q^2+2mq}{4})-(\frac{4q^2}{4}-\lambda^2)Z^2-(\frac{-4q^2-4mq}{4}+\lambda^2)Z}{(Z(1-Z))^2}\right]P(\theta)=0, \qquad (۵-۲۳)$$

ویژه تابع معادله (۵-۲۳) به صورت زیر می‌شود:

$$P(x)=(\frac{1-x}{2})^{\frac{m+q}{2}}\times(\frac{1+x}{2})^{\frac{m-q}{2}}\;P_n^{(m+q,m-q)}x, \qquad (۵-۲۴)$$

برای طیف انرژی خواهیم داشت:

$$E_{n,m,l}=M\frac{\left[\left(\frac{n+l+1}{Ze^2}\right)^2-1\right]}{\left[\left(\frac{n+l+1}{Ze^2}\right)^2+1\right]},\quad l=\sqrt{\frac{1}{4}-\lambda^2}-\frac{1}{2},\qquad \lambda=-\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2} \qquad (۵-۲۵)$$

و از معادله (۵-۲۳) شرایط زیر به دست می‌آید:

$$n_{۱}, n_{۲} = \frac{-(۱+۲m) \pm \sqrt{۱+۴q^{۲} - ۴\lambda^{۲}}}{۲} = -\frac{۱}{۲} - m \pm \sqrt{\frac{۱}{۴} + q^{۲} - \lambda^{۲}}. \qquad (۲۶-۵)$$

در حالت خاص $|q| < |m|$ و $|q| > |m|$ معادله (۵-۲۵) به ترتیب به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\sqrt{(n_{۱,۲} + \frac{۱}{۲})^{۲} - q^{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۴} - \lambda^{۲}}, \qquad (۲۷a-۵)$$

$$\sqrt{(n_{۱,۲} + m + \frac{۱}{۲})^{۲} - q^{۲}} = \sqrt{\frac{۱}{۴} - \lambda^{۲}}, \qquad (۲۷b-۵)$$

بنابراین برای حالت $|q| < |m|$ طیف انرژی به صورت زیر می‌شود:

$$E_{n,m,l} = M \frac{\left[\left(\frac{n + \sqrt{(n_{۱,۲} + \frac{۱}{۲})^{۲} - q^{۲}} + \frac{۱}{۲}}{Z e^{۲}} \right)^{۲} - ۱ \right]}{\left[\left(\frac{n + \sqrt{(n_{۱,۲} + \frac{۱}{۲})^{۲} - q^{۲}} + \frac{۱}{۲}}{Z e^{۲}} \right)^{۲} + ۱ \right]}, \qquad (۲۸-۵)$$

یا

$$E_{n,m,l} = M \frac{[\kappa_{۱} - ۱]}{[\kappa_{۱} + ۱]}, \qquad \kappa_{۱} = \left(\frac{n + \sqrt{(n_{۱,۲} + \frac{۱}{۲})^{۲} - q^{۲}} + \frac{۱}{۲}}{Z e^{۲}} \right)^{۲}, \qquad (۲۹-۵)$$

در حالت $|q| > |m|$ برای طیف انرژی داریم:

$$E_{n,m,l} = M\,\frac{\left[\left(\dfrac{n+\sqrt{(n_{1,2}+m+\frac{1}{2})^{2}-q^{2}}+\frac{1}{2}}{Ze^{2}}\right)^{2}-1\right]}{\left[\left(\dfrac{n+\sqrt{(n_{1,2}+m+\frac{1}{2})^{2}-q^{2}}+\frac{1}{2}}{Ze^{2}}\right)^{2}+1\right]}, \qquad (۳۰-۵)$$

یا

$$E_{n,m,l} = M\,\frac{\left[\kappa_{2}-1\right]}{\left[\kappa_{2}+1\right]}, \qquad \kappa_{2}=\left(\frac{n+n_{1,2}+\dfrac{Fe}{2\pi}-K_{\varphi}+1}{Ze^{2}}\right)^{2}, \qquad (۳۱-۵)$$

۵-۲-۲- حالت $\Sigma(r)=0$ با پتانسیل کولن

در این حالت با جایگذاری معادله (۵-۸b) در معادله (۵-۸a) ، معادله جداشده آن به شکل زیر می‌شود:

$$\left[\vec{\Pi}^{2}+2(E_{n',m',l'}-M)V(r)\right]\chi(\vec{r})=\left[E^{2}_{n',m',l'}-M^{2}\right]\chi(\vec{r}), \qquad (۳۲-۵)$$

که برای پتانسیل اسکالر کولن داریم:

$$\left[-\vec{\nabla}^{2}+e^{2}\vec{A}^{2}+i\,\vec{\nabla}.e\vec{A}+i\,e\vec{A}.\vec{\nabla}-\frac{2e^{2}Z}{r}(E_{n',m',l'}-M)\right]\chi(\vec{r})=\left[E^{2}_{n',m',l'}-M^{2}\right]\chi(\vec{r}).$$

معادله (۵-۳۲) بعد از ساده سازی به صورت زیر می‌شود:

$$[-\vec{\nabla}^{2}+e^{2}(\frac{g\,(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}+\frac{F}{2\pi\, r\sin\theta})^{2}+i\,\vec{\nabla}.e\vec{A}+i\,e\vec{A}.\vec{\nabla}-\frac{2e^{2}Z}{r}(E_{n',m',l'}-M)]\chi(\vec{r})$$
$$=\left[E^{2}_{n',m',l'}-M^{2}\right]\chi(\vec{r}), \qquad (۳۳a-۵)$$
$$[-\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}-\frac{1}{r^{2}}\cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta}-\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial r^{2}}-\frac{1}{r^{2}\sin^{2}\theta}\frac{\partial^{2}}{\partial\varphi^{2}}+\frac{e^{2}g^{2}(1-\cos\theta)^{2}}{r^{2}\sin^{2}\theta}+$$
$$\frac{e^{2}F^{2}}{4\pi^{2}r^{2}\sin^{2}\theta}+\frac{e^{2}g\,F(1-\cos\theta)}{\pi r^{2}\sin^{2}\theta}+i\,\frac{e\,g\,(1-\cos\theta)}{r^{2}\sin^{2}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}+i\,\frac{e\,F}{2\pi r^{2}\sin^{2}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}]\,\chi(r,\theta,\varphi)$$
$$-\frac{2(E_{n',m'l'}-M)e^{2}Z}{r}\,\chi(r,\theta,\varphi)=\left[E^{2}_{n',m',l'}-M^{2}\right]\chi(r,\theta,\varphi), \qquad (۳۳b-۵)$$

تابع موج را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\chi(r,\theta,\varphi)=\frac{R_{n',l',m'}(r)}{r}\,L(\theta)e^{i(K_{\varphi}\varphi-E_{n',m',l'}t)}, \qquad (۳۴-۵)$$

و با جداسازی متغیرها، معادله (۵-۳۳b) به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\frac{r^{2}}{R_{n',m',l'}(r)}\frac{d^{2}R_{n',m',l'}(r)}{dr^{2}}+\frac{2r}{R_{n',l',m'}(r)}\frac{dR_{n',m',l'}(r)}{dr}+2(E_{n',m',l'}-M)\,r\,e^{2}Z+(E^{2}_{n',m',l'}-M^{2})\,r^{2}=-J^{2}$$
$$\frac{d^{2}R_{n',m',l'}(r)}{dr^{2}}+\frac{2}{r}\frac{dR_{n',m',l'}(r)}{dr}+\frac{2(E_{n',m',l'}-M)e^{2}Z\,r+(E^{2}_{n',m',l'}-M^{2})\,r^{2}+J^{2}}{r^{2}}R_{n',m',l'}(r)=0, \qquad (۳۵-۵)$$

جمله زاویه‌ای آن به شکل زیر است:

$$\frac{d^{2}L(\theta)}{d\theta^{2}}+\cot\theta\frac{dL(\theta)}{d\theta}-\left(\frac{\left[K_{\varphi}-\left(\frac{Fe}{2\pi}+g\,e\,(1-\cos\theta)\right)\right]^{2}}{\sin^{2}\theta}+J^{2}\right)L(\theta)=0. \qquad (۳۶-۵)$$

در حالت خاص $|m'|<|q|$ و $|m'|>|q|$ به ترتیب داریم :

$$\sqrt{(n_{1,2}+\frac{1}{2})^2-q^2}=\sqrt{\frac{1}{4}-J^2}, \qquad (37a-5)$$

$$\sqrt{(n_{1,2}+m'+\frac{1}{2})^2-q^2}=\sqrt{\frac{1}{4}-J^2}, \qquad (37b-5)$$

طیف انرژی به دست می‌آید:

$$E_{n',m',l'}=M\frac{\left[\left(\frac{n'+l'+1}{Ze^2}\right)^2+1\right]}{\left[\left(\frac{n'+l'+1}{Ze^2}\right)^2-1\right]}, \qquad l'=\sqrt{\frac{1}{4}-J^2}-\frac{1}{2}. \qquad J=-\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2} \qquad (38-5)$$

بنابراین اگر $|q|>|m'|$ طیف انرژی آن به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$E_{n',m',l'}=M\frac{[\delta_1+1]}{[\delta_1-1]}, \qquad \delta_1=\left(\frac{n'+\sqrt{(n_{1,2}+\frac{1}{2})^2-q^2}+\frac{1}{2}}{Ze^2}\right)^2. \qquad (39-5)$$

و اگر $|q|<|m'|$ خواهیم داشت:

$$(n_{1,2}+m'+\frac{1}{2})^2-q^2=(n_{1,2}+m'+\frac{1}{2}-q)(n_{1,2}+m'+\frac{1}{2}+q)=$$
$$(n_{1,2}+\frac{Fe}{2\pi}+ge-K_{\varphi}+\frac{1}{2}-ge)^2, \qquad (40-5)$$

برای طیف انرژی داریم:

$$(n_{1,2}+\frac{Fe}{2\pi}+ge-K_{\varphi}+\frac{1}{2}-ge)^{2}=(n_{1,2}+\frac{Fe}{2\pi}-K_{\varphi}+\frac{1}{2})^{2}, \qquad (۴۱a-۵)$$

$$E_{n',m',l'}=M\,\frac{\left[\delta_{2}+1\right]}{\left[\delta_{2}-1\right]}, \qquad \delta_{2}=\left(\frac{n'+n_{1,2}+\frac{Fe}{2\pi}-K_{\varphi}+1}{Ze^{2}}\right)^{2}. \qquad (۴۱b-۵)$$

انرژی را برای این دو حالت خاص به دست آوردیم. مسأله تک قطبی دیراک را با پتانسیل کولن و آهارانوف بوهم مورد بررسی قرار داده و با استفاده از جداسازی متغیرها و از طریق برخی تحولات به شکل شناخته شده تبدیل می‌شود، و مشاهده کردید برای حالت $\Delta(r)=0$ زمانی که $|m|<|q|$ طیف انرژی به پتانسیل بوهم وابسته نیست و برای حالت $|m|>|q|$ طیف انرژی به پتانسیل بوهم وابسته است همین نتیجه برای حالت $\Sigma(r)=0$ به دست آمد.

فصل ششم

خواص ترمودینامیکی از نوسانگردیراک سه بعدی با میدان آهارانوف – بوهم و پتانسیل تک قطبی مغناطیسی

۶-۱- مقدمه

نوسانگر دیراک اولین بار توسط موشینکی[۳۹]، و زس پانیک[۴۰] معرفی شد [۴۵]. که در آن طیف انرژی حالت پایه نسبیتی و اسپینور توابع موج متناظر به دست می‌آید. معادله دیراک سه بعدی به شکل زیر است:

$$\left(i\,\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-M\ c\right)\psi=\cdot \qquad (۱-۶)$$

که در آن M جرم سکون ذره و c نمایش سرعت نور و ψ چهارمؤلفه تابع موج است. این چهارماتریس $\{\gamma\}_{\mu=\cdot}^{۳}$ را به صورت استاندارد زیر، نمایش می‌دهند.

$$\gamma^{\cdot}=\begin{pmatrix} I & \cdot \\ \cdot & -I \end{pmatrix}\quad ,\vec{\gamma}=\begin{pmatrix} \cdot & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & \cdot \end{pmatrix} \qquad (۲-۶)$$

I ماتریس واحد ۲×۲ و $\vec{\sigma}$ ماتریس پاؤلی ۲×۲ می باشد. با فرض $\left[\hbar=M=۱\right]$، معادله دیراک به صورت $\left(i\,\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-\lambda^{-۱}\right)\psi=\cdot$ است، که $\lambda=\frac{۱}{M\,c}=\frac{۱}{c}$ طول موج کامپتون ذره می‌باشد. در حضور پتانسیل الکترومغناطیسی $A_{\mu}=\left(A_{\cdot},c\vec{A}\right)$ مشتقات با شرط ناوردایی لورنتس به صورت $\partial_{\mu}\rightarrow\partial_{\mu}+i\,\lambda A_{\mu}$ می‌شوند. بنابراین

$$i\,\lambda^{-۱}\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left[-i\,\vec{\alpha}.\vec{\nabla}+\lambda A_{\cdot}+\vec{\alpha}.\vec{A}+\lambda^{-۱}\,\gamma^{\cdot}\right]\psi \qquad (۳-۶)$$

که در آن $\vec{\alpha}=\gamma^{\cdot}\vec{\gamma}=\begin{pmatrix} \cdot & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \cdot \end{pmatrix}$ است. با معرفی پتانسیل شعاعی $B(\vec{r})=W(\vec{r})\,\hat{r}$ و از طریق جایگزینی جفت شدگی غیرکمینه $\vec{\nabla}\rightarrow\vec{\nabla}+\vec{B}\,\gamma^{\cdot}$ معادله (۶-۳) به صورت زیر تغییر می‌کند

---

[۳۹] Moshinky

[۴۰] Szczepaniak

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left[-i\,\lambda\,\vec{\alpha}.\left(\vec{\nabla}+W(r)\,\hat{r}\,\gamma^{0}\right)+\lambda\,\vec{\alpha}.\vec{A}+\lambda^{2}A_{0}+\gamma^{0}\right]\psi \qquad (۴-۶)$$

که r نشاندهنده‌ی شعاع و $W(\vec{r})$ یک تابع شعاعی حقیقی است. معادله**(۶-۴)** به صورت زیر تغییر می‌کند

$$-i\,\lambda\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}.\left(\vec{\nabla}+W\hat{r}\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}\right)+\lambda\begin{pmatrix}0 & \vec{\sigma}\\ \vec{\sigma} & 0\end{pmatrix}.\vec{A}+\lambda^{2}A_{0}+\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1+\lambda^{2}A_{0} & -i\,\lambda(\vec{\sigma}.\vec{\nabla})+i\,\lambda W\,(\vec{\sigma}.\hat{r})+\lambda\vec{\sigma}.\vec{A}\\ -i\,\lambda(\vec{\sigma}.\vec{\nabla})-i\,\lambda W\,(\vec{\sigma}.\hat{r})+\lambda\vec{\sigma}.\vec{A} & -1+\lambda^{2}A_{0}\end{pmatrix} \qquad (۵-۶)$$

معادله ویژه مقداری $(H-\varepsilon)\psi=0$ که ε انرژی نسبیتی اندازه گیری شده در واحد mc^{2} برای مسئله نوسانگر دیراک است. با معرفی $W(\vec{r})=\omega^{2}r$ که ω پارامتر واقعی فرکانس نوسانگر است

$$A_{0}(\vec{r})=V(\vec{r})\;,\;\vec{A}(\vec{r})=\frac{U(\theta)}{r\sin\theta}\hat{\phi} \qquad (۶-۶)$$

که در آن $U(\theta)$, $V(\vec{r})$ توابع حقیقی‌اند. معادله **(۶-۵)** به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\begin{pmatrix}1+\lambda^{2}V(r) & i\,\lambda\left(-\partial_{r}+W\right)(\vec{\sigma}.\hat{r})-\frac{i\,\lambda}{r}(\vec{\sigma}.\hat{\theta})\partial_{\theta}+\frac{\lambda}{r\sin\theta}\left(-i\,\partial_{\varphi}+U(\theta)\right)(\vec{\sigma}.\hat{\varphi})\\ -i\,\lambda\left(\partial_{r}+W\right)(\vec{\sigma}.\hat{r})-\frac{i\,\lambda}{r}(\vec{\sigma}.\hat{\theta})\partial_{\theta}+\frac{\lambda}{r\sin\theta}\left(-i\,\partial_{\varphi}+U(\theta)\right)(\vec{\sigma}.\hat{\varphi}) & -1+\lambda^{2}V(r)\end{pmatrix}\Psi=0$$
(۷-۶)

۶-۱-۱- محاسبه بخش زاویه‌ای

تابع موج را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\psi(r)=\frac{1}{r\sqrt{\sin\theta}}\begin{pmatrix} i\,f_{+}(r)\\ f_{-}(r)\end{pmatrix} \qquad (۸-۶)$$

سپس هامیلتونی دیراک روی تابع موج فوق اثر می‌کند که به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$H=1\otimes H_{0}+\lambda\vec{\sigma}.\hat{r}\otimes H_{r}+\lambda\frac{\vec{\sigma}.\hat{\theta}}{r}\otimes H_{\theta}+\lambda\frac{\vec{\sigma}.\hat{\varphi}}{r\sin\theta}\otimes H_{\varphi} \qquad (۹a-۶)$$

$$H_{0}=\begin{pmatrix}1+\lambda^{2}V(r) & 0\\ 0 & -1+\lambda^{2}V(r)\end{pmatrix},H_{r}=\begin{pmatrix}0 & i\left(-\partial_{r}+W\right)\\ -i\left(\partial_{r}+W\right) & 0\end{pmatrix} \qquad (۹b-۶)$$

$$H_{\theta}=\begin{pmatrix}0 & -i\,\partial_{\theta}\\ -i\,\partial_{\theta} & 0\end{pmatrix},H_{\varphi}=\begin{pmatrix}0 & \left(-i\,\partial_{\varphi}+U(\theta)\right)\\ \left(-i\,\partial_{\varphi}+U(\theta)\right) & 0\end{pmatrix} \qquad (۹c-۶)$$

با استفاده از تبدیل زیر

$$\Lambda\left(\vec{r}\right)=e^{-\frac{i}{2}\sigma_{3}\phi}e^{-\frac{i}{2}\sigma_{2}\theta},\qquad \chi=\begin{pmatrix}g_{+}\\ g_{-}\end{pmatrix}\to g_{\pm}=\Lambda^{-1}f_{\pm} \qquad (۱۰-۶)$$

رابطه هامیلتونی به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\left\{\begin{aligned}&\begin{pmatrix}1+\lambda^{2}V-\varepsilon & \lambda\sigma_{3}\left(-\partial_{r}+w\right)\\ \lambda\sigma_{3}\left(\partial_{r}+w\right) & -1+\lambda^{2}V-\varepsilon\end{pmatrix}+\frac{\lambda}{r}\begin{pmatrix}0 & -\sigma_{1}\partial_{\theta}-i\,\sigma_{2}\dfrac{U}{\sin\theta}\\ \sigma_{1}\partial_{\theta}+i\,\sigma_{2}\dfrac{U}{\sin\theta} & 0\end{pmatrix}\\ &+\frac{\lambda}{r\sin\theta}\begin{pmatrix}0 & -\sigma_{2}\partial_{\varphi}\\ \sigma_{2}\partial_{\varphi} & 0\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}\begin{pmatrix}g_{+}\\ g_{-}\end{pmatrix}=0, \qquad (۱۱-۶)$$

رابطه (۶-۱۱) را در سه مختصات $g_{\pm}(\vec{r})=R_{\pm}(r)\Theta_{\pm}(\theta)\phi_{\pm}(\varphi)$ جداسازی می‌کنیم

$$\sigma_2 \frac{d}{d\varphi}\Phi_{\pm} = i\,\sigma_2 \varepsilon_{\varphi}\Phi_{\pm} \qquad (۱۲a-۶)$$

$$\left(\sigma_1 \partial_{\theta} + i\,\sigma_2 \frac{U+\varepsilon_{\varphi}}{\sin\theta}\right)\theta_{\pm} = \sigma_3 \varepsilon_{\theta}\theta_{\pm} \qquad (۱۲b-۶)$$

$$\begin{cases} \left(1+\lambda^2 V-\varepsilon\right)R_{+} + \lambda\sigma_3\left(-\partial_r + w\right) + \dfrac{\lambda\sigma_3\varepsilon_{\theta}}{r}R_{-} = 0 \\ \dfrac{1}{R_{+}}\lambda\sigma_3\left(\partial_r + w\right)R_{+} + \left(-1+\lambda^2 V-\varepsilon\right)R_{-} + \dfrac{\lambda\sigma_3\varepsilon_{\theta}}{r}R_{+} = 0 \end{cases} \qquad (۱۲c-۶)$$

که $\varepsilon_{\theta},\varepsilon_{\varphi}$ ثابت جداسازی است. رابطه (۶-۱۲a) به صورت زیرمحاسبه می‌شود

$$\frac{d}{d\varphi}\Phi_{\pm} = i\,\varepsilon_{\varphi}\Phi_{\pm} \rightarrow \Phi_{\pm}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\,\varepsilon_{\varphi}\phi} \qquad (۱۳-۶)$$

رابطه (۶-۱۲b) به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\left(\sigma_1 \partial_{\theta} + i\,\sigma_2 \frac{U+\varepsilon_{\varphi}}{sin\theta}\right)\Theta_{\pm} = \sigma_3\,\varepsilon_{\theta}\,\Theta_{\pm}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{d\theta} + i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{U+\varepsilon_{\varphi}}{sin\theta}\right]\Theta_{\pm} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\varepsilon_{\theta}\,\Theta_{\pm}$$

$$\begin{pmatrix} -\varepsilon_{\theta} & \dfrac{d}{d\theta} + \dfrac{U+\varepsilon_{\varphi}}{sin\theta} \\ \dfrac{d}{d\theta} - \dfrac{U+\varepsilon_{\varphi}}{sin\theta} & \varepsilon_{\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Theta_{+} \\ \Theta_{-} \end{pmatrix} = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{d\theta^2} + \left(\frac{(cos\theta)(U+\varepsilon_{\varphi})}{sin^2\theta}\right)\frac{1}{sin\theta}\frac{dU}{d\theta} + \left(\frac{U+\varepsilon_{\varphi}}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right) - \left(\frac{U+\varepsilon_{\varphi}}{sin\theta}\frac{d}{d\theta}\right) - \left(\frac{U+\varepsilon_{\varphi}}{sin\theta}\right)^2\right]\Theta_{+} +$$

$$\varepsilon_{\theta}^2\Theta_{+} = 0, \qquad (۱۴-۶)$$

برای حل معادله بالا از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم

$$x = cos\theta \qquad (۱۵-۶)$$

رابطه (۶-۱۵) را در معادله (۶-۱۴) قرار می‌دهیم

$$\left[-x\frac{d}{dx}+(1-x^{2})\frac{d^{2}}{dx^{2}}+\frac{dU}{dx}+\left(\frac{U+\varepsilon_{\varphi}}{(1-x^{2})}x\right)-\frac{(U+\varepsilon_{\varphi})}{(1-x^{2})}+\varepsilon_{\theta}^{2}\right]\Theta_{+}=0 \qquad (16-6)$$

پتانسیل را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$U=a+bx=a+b(1-2z)=a+b-2bz \rightarrow \frac{dU}{dx}=b \qquad (17-6)$$

که a,b را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$A_{\varphi}=\frac{a+b\cos\theta}{r\sin\theta} \qquad (17a-6)$$

پتانسیل بالا متشکل از پتانسیل تک قطبی مغناطیسی و پتانسیل آهارانوف – بوهم است.

رابطه (۶-۱۷) را در معادله (۶-۱۶) قرار می‌دهیم

$$\left[-x\frac{d}{dx}+(1-x^{2})\frac{d^{2}}{dx^{2}}+b+\left(\frac{(a+bx+\varepsilon_{\varphi})}{(1-x^{2})}x\right)-\frac{((a+bx)+\varepsilon_{\varphi})^{2}}{(1-x^{2})}+\varepsilon_{\theta}^{2}\right]\Theta_{+}=0 \qquad (18-6)$$

با استفاده از تغییر متغیر زیر

$$z=\frac{1-x}{2}\rightarrow x=1-2z\ ,\ \frac{d}{dx}=\frac{d}{dz}\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\ ,\ \frac{d^{2}}{dx^{2}}=\frac{1}{4}\frac{d^{2}}{dz^{2}} \qquad (19-6)$$

معادله (۶-۱۸) را محاسبه می‌کنیم

$$\left[\frac{d^{۲}}{dz^{۲}}+\frac{\left(\frac{۱}{۲}-z\right)}{z\left(۱-z\right)}\frac{d}{dz}+\frac{-\left(b^{۲}+\varepsilon_{\theta}^{۲}\right)z^{۲}+(b^{۲}+ab+b\,\varepsilon_{\varphi}+\varepsilon_{\theta}^{۲}-\frac{\varepsilon_{\varphi}}{۲}-\frac{a}{۲})z}{z^{۲}\left(۱-z\right)^{۲}}\right.$$

$$\left.+\frac{(\frac{a}{۴}+\frac{b}{۴}-(\frac{a+b}{۲})^{۲}+\frac{\varepsilon_{\varphi}^{۲}}{۴}+\frac{\varepsilon_{\varphi}}{۴}-\frac{b\,\varepsilon_{\varphi}}{۲}-\frac{a\,\varepsilon_{\varphi}}{۲})z^{۲}}{z^{۲}\left(۱-z\right)^{۲}}\right]\Theta_{+}=۰ \qquad (۲۰-۶)$$

به روش نیکوورف- اواروف معادله فوق را محاسبه می‌کنیم

$$\left(n_{\theta}+\sqrt{\gamma_{۲}}+\sqrt{\gamma_{۱}+\gamma_{۲}+\gamma_{۳}}\right)\left(n_{\theta}+\sqrt{\gamma_{۲}}+\sqrt{\gamma_{۱}+\gamma_{۲}+\gamma_{۳}}+۱\right)-\varepsilon_{\theta}^{۲}-\gamma_{۳}+\frac{۱}{۲}=۰ \qquad (۲۱-۶)$$

۶-۲-۱- محاسبه رابطه شعاعی

معادله شعاعی دیراک با $\begin{pmatrix} R_{+} \\ \sigma_3 R_{-} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} R_{+} \\ R_{-} \end{pmatrix}, V=0$ به صورت زیر است

$$\begin{pmatrix} ۱-\varepsilon & \lambda\left(-\partial_{r}+w+\frac{\varepsilon_{\theta}}{r}\right) \\ \lambda\left(\partial_{r}+w+\frac{\varepsilon_{\theta}}{r}\right) & -۱-\varepsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_{+} \\ R_{-} \end{pmatrix}=۰ \qquad (۱۲c-۶)$$

$$\left[-\frac{d^{۲}}{dr^{۲}}-\frac{dw}{dr}+\frac{\varepsilon_{\theta}\left(\varepsilon_{\theta}+۱\right)}{r^{۲}}+۲\frac{\varepsilon_{\theta}w}{r}+w^{۲}-\frac{\varepsilon^{۲}-۱}{\lambda^{۲}}\right]R_{+}=۰ \qquad (۲۲-۶)$$

با استفاده از تغییر متغیر زیر

$$R\left(r\right)=\frac{P\left(r\right)}{r}\ ,w=\omega^{۲}r \qquad (۲۳-۶)$$

معادله به صورت زیر ساده می‌شود

$$\frac{d^{۲}P}{dr^{۲}}+-\frac{۲}{r}\frac{dP}{dr}+\left[\frac{۲-\omega^{۲}r^{۲}\left(۲\varepsilon_{\theta}-۱\right)-\varepsilon_{\theta}\left(\varepsilon_{\theta}+۱\right)-\omega^{۴}r^{۴}+\frac{\varepsilon^{۲}-۱}{\lambda^{۲}}r^{۲}}{r^{۲}}\right]P=۰ \qquad (۲۴-۶)$$

معادله فوق به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\frac{d^{۲}P}{dS^{۲}}-\frac{\frac{۱}{۲}}{S}\frac{dP}{dS}+\left[\frac{\frac{۱}{۲}-\frac{\omega^{۲}S\left(۲\varepsilon_{\theta}-۱\right)}{۴}-\frac{\varepsilon_{\theta}\left(\varepsilon_{\theta}+۱\right)}{S}-\frac{\omega^{۴}S^{۲}}{۴}+\frac{\varepsilon^{۲}-۱}{۴\lambda^{۲}}S}{S^{۲}}\right]P=۰ \qquad (۲۵-۶)$$

همانند طیف انرژی نوسانگر دیراک سه بعدی [۴۶] به دست می‌آید

$$\varepsilon^{۲}=۱+۲(۲n+۱)\omega^{۲}\lambda^{۲}+\omega^{۲}\lambda^{۲}(۲\varepsilon_{\theta}-۱)+۲\omega^{۲}\lambda^{۲}\sqrt{\left(\frac{۱}{۴}+\varepsilon_{\theta}(\varepsilon_{\theta}+۱)\right)}=۱+۴\omega^{۲}\lambda^{۲}\left(n+\varepsilon_{\theta}+\frac{۱}{۲}\right)$$

$$\varepsilon_{n n_{\theta}}=\sqrt{۱+۴\omega^{۲}\lambda^{۲}\left(n+\varepsilon_{\theta}+\frac{۱}{۲}\right)} \qquad \varepsilon_{\theta}>۰ \qquad (۲۷-۶)$$

۶-۲ - خواص ترمودینامیکی

مکانیک آماری فرمولبندی است که هدفش تعریف خواص فیزیکی مواد عمدتاً براساس رفتار ترمودینامیکی اجزای تشکیل دهنده میکروسکوپی آن می‌باشد. علاوه بر این، فرمولبندی مکانیک آماری این امکان را به ما می‌دهد که حالت‌های غیرتعادلی ماده را علاوه بر حالت‌های تعادلی مورد بررسی قرار دهیم. تابع پارش Z_p در دمای محدود T با استفاده از فاکتور بولتزمن به دست می‌آید که $E_.$ انرژی پس زمینه متناظر با $n=۰$ است. همینطور $\beta=\frac{۱}{k_B T}$ ثابت بولتزمن است. برای بررسی خواص ترمودینامیکی در این سیستم از تابع پارش استفاده می‌کنیم که تابع پارش یک ذره بصورت زیر تعریف می‌شود

$$Z_{1p}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-E_n\beta}\qquad ,\ \beta=\frac{1}{k_BT}\ ,\qquad (۲۸-۶)$$
$$\varepsilon^{+}_{nn_\theta}=\sqrt{1+4\lambda^2\omega^2\left(n+\varepsilon_\theta+\frac{1}{2}\right)}$$

طیف انرژی به دو عددکوانتومی $n\,,n_\theta$ وابسته است. عدد کوانتومی n برگرفته از بخش شعاعی است و عدد کوانتومی n_θ برگرفته از بخش زاویه‌ای است. برای برطرف کردن این مسأله دو حالت زیر را در نظر گرفته، حالتی که $n_\theta=0$ و حالتی که $n_\theta=1$ است. سپس آنسامبلی که در اینجا در نظر گرفته شده آنسامبل کانونیک است که انرژی مبادله می‌شود ولی ذره مبادله نمی‌شود

۶-۱-۲- حالت $n_\theta=0$

معادله انرژی (۶-۲۸) به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\varepsilon^2_{n,n_\theta=0}=1+4\lambda^2\omega^2\left(n+\varepsilon_\theta+\frac{1}{2}\right)=1+4\lambda^2\omega^2\times$$
$$\left(n+\left(\frac{1}{2}+2\gamma_2+2\sqrt{\gamma_2}\sqrt{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}+\gamma_1+\sqrt{\gamma_2}+\sqrt{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\right)=c_0\,n+d_0\quad (۲۹-۶)$$

که

$$c_0=4\lambda^2\omega^2\ \ ,d_0=1+4\lambda^2\omega^2\,l+2\lambda^2\omega^2\rightarrow$$
$$l=\left(\frac{1}{2}+2\gamma_2+2\sqrt{\gamma_2}\sqrt{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}+\gamma_1+\sqrt{\gamma_2}+\sqrt{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}\right)^{\frac{1}{2}}\qquad (۳۰-۶)$$

تابع پارش (۶-۲۸) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$Z_{1p_{(n_\theta=0)}}=\sum_{n_\theta,n=0}^{\infty}e^{-E_n\beta}=\sum_{n_\theta=0,n=0}^{\infty}e^{-\sqrt{d_0+c_0x}\,\beta},\qquad (۳۱-۶)$$

حال با استفاده از بسط زیر [۴۷]

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)=\frac{1}{2}f(0)+\int_0^{\infty} f(x)\,dx-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}B_{2p}f^{(2p-1)}(0), \qquad (32-6)$$

که در آن B_{2p} اعداد برنولی است که توسط ژاک برنولی معرفی شد که عبارت است از $B_2=\frac{1}{6}$ و $B_4=-\frac{1}{30}$ [۴۸] . تابع پارش به شکل زیر به دست می‌آید

$$Z_{1p_{(n_\theta=0)}}=\frac{1}{2}+\frac{2}{c_0\beta^2}+\frac{2}{c_0\beta}\sqrt{d_0}-\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)!}B_{2p}f^{(2p-1)}(0)=$$

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{c_0\beta^2}+\frac{2}{c_0\beta}\sqrt{d_0}+\frac{c_0\beta}{24\sqrt{d_0}}-\frac{c_0^3\beta^2}{1920(d_0)^2}-\frac{c_0^3\beta}{1920(d_0)^{\frac{5}{2}}}-\frac{c_0^3\beta^3}{5760(d_0)^{\frac{3}{2}}}+\frac{105c_0^5\beta}{967680(d_0)^{\frac{9}{2}}}+$$

$$\frac{105c_0^5\beta^2}{967680(d_0)^4}+\frac{45c_0^5\beta^3}{967680(d_0)^{\frac{7}{2}}}+\frac{5c_0^5\beta^4}{483840(d_0)^3}+\frac{c_0^5\beta^5}{967680(d_0)^{\frac{5}{2}}}-\frac{10395c_0^7\beta}{128\times1693440(d_0)^{\frac{13}{2}}}-$$

$$\frac{c_0^7\beta^7}{32\times1693440(d_0)^{\frac{7}{2}}}-\frac{10395\,c_0^7\beta^2}{128\times1693440(d_0)^6}-\frac{4725c_0^7\beta^3}{128\times1693440(d_0)^{\frac{11}{2}}}-\frac{1260c_0^7\beta^4}{128\times1693440(d_0)^{-5}}$$

$$-\frac{210c_0^7\beta^5}{128\times1693440(d_0)^{\frac{9}{2}}}-\frac{27c_0^7\beta^6}{32\times1693440(d_0)^{-4}} \qquad (33-6)$$

به سادگی تابع پارش را از طریق سیستم N ذره‌ای بدون برهمکنش محاسبه می‌کنیم $Z_{1p}=\left(Z_{p_{(n_\theta=0,1)}}\right)^N$. این وابستگی به N و V از طریق وابستگی به ویژه مقادیر انرژی E_n به دست می‌آید. با استفاده از تابع پارش می‌توان خواص گرمایی سیستم را به دست آورد.

یکی از خواص گرمایی انرژی آزاد هلمهولتز است که مقدار کار مفید قابل دسترس در یک فرآیند دما و حجم ثابت است:

$$dF = -S\,dT - P\,dV + \mu\,dN\,, \tag{۳۴-۶}$$

انرژی هلمهولتز به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\begin{aligned}
F_{(n_\theta=۰)} &= -\frac{۱}{\beta} Ln\left(Z_{p_{(n_\theta=۰)}}\right)^N = -N\,k_B T\,Ln\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{c_۰\beta^۲}+\frac{۲}{c_۰\beta}\sqrt{d_۰}+\frac{c_۰\beta}{۲۴\sqrt{d_۰}}-\frac{c_۰^۳\beta^۲}{۱۹۲۰(d_۰)^۲}-\right.\\
&\frac{c_۰^۳\beta}{۱۹۲۰(d_۰)^{\frac{۵}{۲}}}-\frac{c_۰^۳\beta^۳}{۵۷۶۰(d_۰)^{\frac{۳}{۲}}}+\frac{۱۰۵c_۰^۵\beta}{۹۶۷۶۸۰(d_۰)^{\frac{۹}{۲}}}+\frac{۱۰۵c_۰^۵\beta^۲}{۹۶۷۶۸۰(d_۰)^۴}+\frac{۴۵c_۰^۵\beta^۳}{۹۶۷۶۸۰(d_۰)^{\frac{۷}{۲}}}+\frac{۵c_۰^۵\beta^۴}{۴۸۳۸۴۰(d_۰)^۳}+\\
&\frac{c_۰^۵\beta^۵}{۹۶۷۶۸۰(d_۰)^{\frac{۵}{۲}}}-\frac{۱۰۳۹۵c_۰^۷\beta}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۰)^{\frac{۱۳}{۲}}}-\frac{c_۰^۷\beta^۷}{۳۲\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۰)^{\frac{۷}{۲}}}-\frac{۱۰۳۹۵\,c_۰^۷\beta^۲}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۰)^۶}-\\
&\left.\frac{۴۷۲۵c_۰^۷\beta^۳}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۰)^{\frac{۱۱}{۲}}}-\frac{۱۲۶۰c_۰^۷\beta^۴}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۰)^{-۵}}-\frac{۲۱۰c_۰^۷\beta^۵}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۰)^{\frac{۹}{۲}}}-\frac{۲۷c_۰^۷\beta^۶}{۳۲\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۰)^{-۴}}\right)
\end{aligned} \tag{۳۵-۶}$$

خاصیت دیگر انرژی درونی است که عبارت است از کل انرژی ذرات تشکیل دهنده‌ی سیستم

$$U = -\frac{\partial \ln Z_p}{\partial\beta} = -N\,\frac{\partial \ln Z_{p_{(n_\theta=۰)}}}{\partial\beta} = ۲۱N\,k_B T \tag{۳۶-۶}$$

آنتروپی سیستم برابر است با:

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{\partial F}{\partial T} = k_\beta N\,Ln\,Z_{p_{(n_\theta=۰)}} - \frac{N}{T}\frac{\partial Ln\,Z_{p_{(n_\theta=۰)}}}{\partial\beta} = N\,k_B \ln\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{c_۰\beta^۲}+\frac{۲}{c_۰\beta}\sqrt{d_۰}+\right.\\
&\frac{c_۰\beta}{۲۴\sqrt{d_۰}}-\frac{c_۰^۳\beta^۲}{۱۹۲۰(d_۰)^۲}-\frac{c_۰^۳\beta}{۱۹۲۰(d_۰)^{\frac{۵}{۲}}}-\frac{c_۰^۳\beta^۳}{۵۷۶۰(d_۰)^{\frac{۳}{۲}}}+\frac{۱۰۵c_۰^۵\beta}{۹۶۷۶۸۰(d_۰)^{\frac{۹}{۲}}}+\frac{۱۰۵c_۰^۵\beta^۲}{۹۶۷۶۸۰(d_۰)^۴}+\\
&\frac{۴۵c_۰^۵\beta^۳}{۹۶۷۶۸۰(d_۰)^{\frac{۷}{۲}}}+\frac{۵c_۰^۵\beta^۴}{۴۸۳۸۴۰(d_۰)^۳}+\frac{c_۰^۵\beta^۵}{۹۶۷۶۸۰(d_۰)^{\frac{۵}{۲}}}-\frac{۱۰۳۹۵c_۰^۷\beta}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۰)^{\frac{۱۳}{۲}}}-\frac{c_۰^۷\beta^۷}{۳۲\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۰)^{\frac{۷}{۲}}}
\end{aligned}$$

$$-\frac{۱۰۳۹۵\, c_{.}^{۷}\beta^{۲}}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_{.})^{۶}}-\frac{۴۷۲۵c_{.}^{۷}\beta^{۳}}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_{.})^{\frac{۱۱}{۲}}}-\frac{۱۲۶۰c_{.}^{۷}\beta^{۴}}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_{.})^{-۵}}-\frac{۲۱۰c_{.}^{۷}\beta^{۵}}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_{.})^{\frac{۹}{۲}}}$$

$$\left.-\frac{۲۷c_{.}^{۷}\beta^{۶}}{۳۲\times۱۶۹۳۴۴۰(d_{.})^{-۴}}\right)+۲۱N\ k_{B} \qquad (۳۷-۶)$$

ظرفیت گرمایی، مقدار گرمای که لازم است به سیستم وارد شود که دمای آن به اندازه یک درجه سلسیوس بالا رود. حال ظرفیت گرمایی نوسانگر دیراک برای دماهای بالاتر [۴۹]

$$C=\frac{\partial U}{\partial T}=۲۱N\ k_{B} \qquad (۳۸-۶)$$

که مشاهده می‌شود ظرفیت گرمایی مستقل از پارامترهای $c_{.}$ ، $d_{.}$ و دما است.

۶-۲-۲- حالت $n_{\theta}=۱$

معادله انرژی (۶-۲۸) به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\varepsilon_{n,n_{\theta}=۱}^{۲}=۱+۴\lambda^{۲}\omega^{۲}\left(n+\varepsilon_{\theta}+\frac{۱}{۲}\right)=۱+۴\lambda^{۲}\omega^{۲}\times$$

$$\left(n+\left(\frac{۵}{۲}+۲\gamma_{۲}+۲\sqrt{\gamma_{۲}}\sqrt{\gamma_{۱}+\gamma_{۲}+\gamma_{۳}}+۳\sqrt{\gamma_{۲}}+\gamma_{۱}+۳\sqrt{\gamma_{۱}+\gamma_{۲}+\gamma_{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}}+\frac{۱}{۲}\right)=c_{۱}n+d_{۱} \qquad (۳۹-۶)$$

که

$$c_{۱}=۴\lambda^{۲}\omega^{۲}\ ,\ d_{۱}=۱+۴\lambda^{۲}\omega^{۲}m+۲\lambda^{۲}\omega^{۲}\rightarrow$$

$$m=\left(\frac{۵}{۲}+۲\gamma_{۲}+۲\sqrt{\gamma_{۲}}\sqrt{\gamma_{۱}+\gamma_{۲}+\gamma_{۳}}+۳\sqrt{\gamma_{۲}}+\gamma_{۱}+۳\sqrt{\gamma_{۱}+\gamma_{۲}+\gamma_{۳}}\right)^{\frac{۱}{۲}} \qquad (۴۰-۶)$$

تابع پارش (۶-۲۸) برای یک ذره به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$Z_{۱p_{(n_\theta=۱)}}=\sum_{n_\theta=۱,n=۰}^{\infty} e^{-\sqrt{d_۱+c_۱ x}\,\beta} \qquad (۶-۴۱)$$

تابع پارش با استفاده از قسمت‌های قبلی به شکل زیر به دست می‌آید

$$Z_{p_{(n_\theta=۱)}}=\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{c_۱\beta^۲}+\frac{۲}{c_۱\beta}\sqrt{d_۱}-\sum_{p=۱}^{\infty}\frac{۱}{(۲p)!}B_{۲p}f^{(۲p-۱)}(۰)=$$
$$\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{c_۱\beta^۲}+\frac{۲}{c_۱\beta}\sqrt{d_۱}+\frac{c_۱\beta}{۲۴\sqrt{d_۱}}-\frac{c_۱^۳\beta^۲}{۱۹۲۰(d_۱)^۲}-\frac{c_۱^۳\beta}{۱۹۲۰(d_۱)^{\frac{۵}{۲}}}-\frac{c_۱^۳\beta^۳}{۵۷۶۰(d_۱)^{\frac{۳}{۲}}}+$$
$$\frac{۱۰۵c_۱^۵\beta}{۹۶۷۶۸۰(d_۱)^{\frac{۹}{۲}}}+\frac{۱۰۵c_۱^۵\beta^۲}{۹۶۷۶۸۰(d_۱)^۴}+\frac{۴۵c_۱^۵\beta^۳}{۹۶۷۶۸۰(d_۱)^{\frac{۷}{۲}}}+\frac{۵c_۱^۵\beta^۴}{۴۸۳۸۴۰(d_۱)^۳}+\frac{c_۱^۵\beta^۵}{۹۶۷۶۸۰(d_۱)^{\frac{۵}{۲}}}-$$
$$\frac{۱۰۳۹۵c_۱^۷\beta}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۱)^{\frac{۱۳}{۲}}}-\frac{c_۱^۷\beta^۷}{۳۲\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۱)^{\frac{۷}{۲}}}-\frac{۱۰۳۹۵\,c_۱^۷\beta^۲}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۱)^۶}-\frac{۴۷۲۵c_۱^۷\beta^۳}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۱)^{\frac{۱۱}{۲}}}-$$
$$\frac{۱۲۶۰c_۱^۷\beta^۴}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۱)^{-۵}}-\frac{۲۱۰c_۱^۷\beta^۵}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۱)^{\frac{۹}{۲}}}-\frac{۲۷c_۱^۷\beta^۶}{۳۲\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۱)^{-۴}} \qquad (۶-۴۲)$$

به همین ترتیب خواص آماری تابع پارش **(۶-۴۲)** را به دست می‌آوریم. ابتدا انرژی هلمهولتز

$$F=-\frac{۱}{\beta}Ln\left(Z_{p_{(n_\theta=۱)}}\right)^N=-N\,k_B T\,Ln\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{c_۱\beta^۲}+\frac{۲}{c_۱\beta}\sqrt{d_۱}+\frac{c_۱\beta}{۲۴\sqrt{d_۱}}-\frac{c_۱^۳\beta^۲}{۱۹۲۰(d_۱)^۲}-\frac{c_۱^۳\beta}{۱۹۲۰(d_۱)^{\frac{۵}{۲}}}\right.$$
$$-\frac{c_۱^۳\beta^۳}{۵۷۶۰(d_۱)^{\frac{۳}{۲}}}+\frac{۱۰۵c_۱^۵\beta}{۹۶۷۶۸۰(d_۱)^{\frac{۹}{۲}}}+\frac{۱۰۵c_۱^۵\beta^۲}{۹۶۷۶۸۰(d_۱)^۴}+\frac{۴۵c_۱^۵\beta^۳}{۹۶۷۶۸۰(d_۱)^{\frac{۷}{۲}}}+\frac{۵c_۱^۵\beta^۴}{۴۸۳۸۴۰(d_۱)^۳}+\frac{c_۱^۵\beta^۵}{۹۶۷۶۸۰(d_۱)^{\frac{۵}{۲}}}-$$
$$\frac{۱۰۳۹۵c_۱^۷\beta}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۱)^{\frac{۱۳}{۲}}}-\frac{c_۱^۷\beta^۷}{۳۲\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۱)^{\frac{۷}{۲}}}-\frac{۱۰۳۹۵\,c_۱^۷\beta^۲}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۱)^۶}-\frac{۴۷۲۵c_۱^۷\beta^۳}{۱۲۸\times۱۶۹۳۴۴۰(d_۱)^{\frac{۱۱}{۲}}}-$$

$$\left.\frac{۱۲۶۰c_۱^{۷}\beta^{۴}}{۱۲۸\times ۱۶۹۳۴۴۰\left(d_۱\right)^{-۵}}-\frac{۲۱۰c_۱^{۷}\beta^{۵}}{۱۲۸\times ۱۶۹۳۴۴۰\left(d_۱\right)^{\frac{۹}{۲}}}-\frac{۲۷c_۱^{۷}\beta^{۶}}{۳۲\times ۱۶۹۳۴۴۰\left(d_۱\right)^{-۴}}\right) \qquad (۶-۴۳)$$

انرژی درونی

$$U=-N\,\frac{\partial \ln Z_{p_{(n_\theta=۱)}}}{\partial \beta}=۲۱N\,k_B T \qquad (۶-۴۴)$$

آنتروپی

$$S=k_\beta N\,Ln\,Z_{p_{(n_\theta=۱)}}-\frac{N}{T}\frac{\partial Ln\,Z_{p_{(n_\theta=۱)}}}{\partial \beta}=N\,k_B Ln\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۲}{c_۱\beta^{۲}}+\frac{۲}{c_۱\beta}\sqrt{d_۱}+\frac{c_۱\beta}{۲۴\sqrt{d_۱}}-\right.$$
$$\frac{c_۱^{۳}\beta^{۲}}{۱۹۲۰\left(d_۱\right)^{۲}}-\frac{c_۱^{۳}\beta}{۱۹۲۰\left(d_۱\right)^{\frac{۵}{۲}}}-\frac{c_۱^{۳}\beta^{۳}}{۵۷۶۰\left(d_۱\right)^{\frac{۳}{۲}}}+\frac{۱۰۵c_۱^{۵}\beta}{۹۶۷۶۸۰\left(d_۱\right)^{\frac{۹}{۲}}}+\frac{۱۰۵c_۱^{۵}\beta^{۲}}{۹۶۷۶۸۰\left(d_۱\right)^{۴}}+\frac{۴۵c_۱^{۵}\beta^{۳}}{۹۶۷۶۸۰\left(d_۱\right)^{\frac{۷}{۲}}}+$$
$$\frac{۵c_۱^{۵}\beta^{۴}}{۴۸۳۸۴۰\left(d_۱\right)^{۳}}+\frac{c_۱^{۵}\beta^{۵}}{۹۶۷۶۸۰\left(d_۱\right)^{\frac{۵}{۲}}}-\frac{۱۰۳۹۵c_۱^{۷}\beta}{۱۲۸\times ۱۶۹۳۴۴۰\left(d_۱\right)^{\frac{۱۳}{۲}}}-\frac{c_۱^{۷}\beta^{۷}}{۳۲\times ۱۶۹۳۴۴۰\left(d_۱\right)^{\frac{۷}{۲}}}-$$
$$\frac{۱۰۳۹۵\,c_۱^{۷}\beta^{۲}}{۱۲۸\times ۱۶۹۳۴۴۰\left(d_۱\right)^{۶}}-\frac{۴۷۲۵c_۱^{۷}\beta^{۳}}{۱۲۸\times ۱۶۹۳۴۴۰\left(d_۱\right)^{\frac{۱۱}{۲}}}-\frac{۱۲۶۰c_۱^{۷}\beta^{۴}}{۱۲۸\times ۱۶۹۳۴۴۰\left(d_۱\right)^{-۵}}-$$
$$\left.\frac{۲۱۰c_۱^{۷}\beta^{۵}}{۱۲۸\times ۱۶۹۳۴۴۰\left(d_۱\right)^{\frac{۹}{۲}}}-\frac{۲۷c_۱^{۷}\beta^{۶}}{۳۲\times ۱۶۹۳۴۴۰\left(d_۱\right)^{-۴}}\right)+۲۱N\,k_B \qquad (۶-۴۵)$$

ظرفیت گرمایی

$$C=\frac{\partial U}{\partial T}=۲۱N\,k_B \qquad (۶-۴۶)$$

مشاهده می‌شود ظرفیت گرمایی مستقل از پارامترهای $d_۱$ ، $c_۱$ و دما است. نوسانگر دیراک ۳ بعدی را در حضور پتانسیل الکترومغناطیسی در نظر گرفته و طیف انرژی و ویژه تابع آن را به دست آورده و همانطور

که می‌دانیم با داشتن طیف انرژی سیستم می‌توان تابع پارش را به دست آورد و از طریق تابع پارش روی خواص ترمودینامیکی بحث کرد. حال طیف انرژی نوسانگر دیراک را در ۳ بعد محاسبه کرده و مشاهده گردید که طیف انرژی به دو پارامتر وابسته است، به عدد کوانتومی بخش شعاعی و هم به عدد کوانتومی بخش زاویه‌ای که به ترتیب به صورت n_θ , n نشان می‌دهیم. برای برطرف کردن این مسأله دو حالت را در نظر گرفته، حالتی که $n_\theta = 0$ و حالتی که $n_\theta = ۱$ است در این صورت طیف انرژی فقط به پارامتر n وابسته است. با استفاده از تابع پارش انرژی هلمهولتز، انرژی درونی، آنتروپی و ظرفیت گرمایی را محاسبه کرده و در دو حالت در نظر گرفته شده ظرفیت گرمایی به دما و پارامترهای $c_۰ , d_۰ , c_۱ , d_۱$ وابسته نیست.

نتایج

از نظریه‌ی زومرفیلد برای تحلیل الکترودینامیک مسئله تک قطبی مغناطیسی، استفاده می‌کنیم، دقیقاً برخی از عناصر اساسی نظریه‌ی تک قطبی مغناطیسی دیراک بخصوص شرایط کوانتیده بار الکتریکی و مغناطیسی با استفاده از نظریه‌ی زومرفیلد به دست می‌آید. سپس ایجاد تک قطبی دیراک را درمیدان مغناطیسی مصنوعی توسط چگالش بوز انیشتین شرح دادیم. سیستم کالوزا – کلاین را در نظرگرفته و ویژه مقدار انرژی این سیستم را در مختصات کروی به دست می‌آوریم . به علاوه سیستم دینامیکی، از سیستم تعمیم یافته میسز-کپلر را در نظرمی‌گیریم، و همین طورمعادله شرودینگررا برای سیستم تعمیم یافته میسز کپلر در مختصات کروی به دست می آوریم. سپس معادله کلاین-گوردون را برای پتانسیل هولسن در حضورمیدان مغناطیسی آهارانوف-بوهم توسط جداسازی متغیرهای استاندارد حل می‌کنیم. هم چنین مسأله تک قطبی دیراک را با پتانسیل کولن و آهارانوف بوهم بررسی می‌کنیم، با استفاده از جداسازی متغیرها مسأله را به معادله دیفرانسیل تبدیل می‌کنیم و از طریق برخی تحولات به شکل شناخته شده تبدیل می شود و مشاهده کردیم که طیف انرژی به پارامترهای پتانسیل وابسته است. در نهایت معادله دیراک را در ۳ +۱ ابعاد با جفت شدگی غیر کمینه پتانسیل همسانگرد خطی شعاعی در حضور پتانسیل الکترومغناطیسی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ظرفیت گرمایی، انرژی آزاد هلمهولتز، انرژی داخلی و آنتروپی از نوسانگر هماهنگ سه بعدی را به دست آوردیم. و همانطور که مشاهده کردیم ظرفیت گرمایی مستقل از دما است.

مراجع

[۱] M. Cozzi , phys. Atom. Nucl. ۷۰:۱۱۸-۱۲۲/ ۸ Mar (۲۰۰۷)

[۲] P. A. M. Dirac, proc. R. Soc. London۱۳۳ (۱۹۳۱) ۶۰ ; phys. Rev. ۷۴(۱۹۴۸) ۸۱۷.

[۳] G. Hooft't , Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories, Nucl. Phys. B۷۹ (۱۹۷۴) , pp.۲۷۶-۲۸۴.

[۴] A. M. Polyakov, Particle Spectrum in the Quantum Field Theory, JETP Lett. ۲۰ (۱۹۷۴), pp. ۱۹۴-۱۹۵.

[۵] M. Du , R. R. Khuri , and J. Lu, String solitons, Phys. Rept. ۲۵۹ (۱۹۹۵) , pp. ۲۱۳-۳۲۶.

[۶] R. P. Feynman , R. B. Leighton , M. Sands, The Feynman Lectures on Physics Vol. ۲, (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts), (۱۹۶۴)

[۷] دانشنامه ستاره شناسی هفت آسمان

[۸] G. Giacomelli, Riv. Nuovo Cimento ۷. N۱۲ (۱۹۸۴) ۱.

[۹] "Physicists create synthetic magnetic monopole predicted more than ۸۰ years ago." Phys. org. ۲۹ Jan ۲۰۱۴ , , A. S. Goldhaber & W. P. Trower, (eds) Magnetic Monopoles (American Association of Physics Teachers, (۱۹۹۰).

[۱۰] C. Castelnovo, R. Moessner & S. L. Sondhi, Magneticmonopoles in spin ice. Nature ۴۵۱, ۴۲–۴۵ (۲۰۰۸).

[۱۱] D. J. P. Morris, et al. Dirac strings and magneticmonopoles in the spin ice. Science ۳۲۶, ۴۱۱–۴۱۴ (۲۰۰۹).

[۱۲] I. Chuang, R. Durrer, N. Turok & B. Yurke, Cosmology in the laboratory: defect dynamics in liquid crystals. Science ۲۵۱, ۱۳۳۶–۱۳۴۲ (۱۹۹۱).

[۱۳] Z. Fang, et al. The anomalous Hall effect and magnetic monopoles in momentum space. Science ۳۰۲, ۹۲–۹۵ (۲۰۰۳).

[۱۴] P. Milde, et al. Unwinding of a skyrmion lattice by magnetic monopoles. Science ۳۴۰, ۱۰۷۶–۱۰۸۰ (۲۰۱۳).

[۱۵] V. Pietila¨, & M. Mo¨ tto¨nen, Creation of Dirac monopoles in spinor Bose-Einstein condensates. Phys. Rev. Lett. ۱۰۳, ۰۳۰۴۰۱ (۲۰۰۹).

[۱۶] Y. J . Lin, R. L. Compton, K. Jime´nez-Garcia, J. V. Porto & I. B. Spielman, Synthetic magnetic fields for ultracold neutral atoms. Nature ۴۶۲, ۶۲۸–۶۳۱ (۲۰۰۹).

[۱۷] J. Dalibard, F. Gerbier, G. Juzeliu-nas & P. O¨ hberg, Artificial gauge potentials for neutral atoms. Rev. Mod. Phys. ۸۳, ۱۵۲۳–۱۵۴۳ (۲۰۱۱).

[۱۸] S. Muskhi, Resonance/valume ۱۰/Issue۱۲,۱۰/۱۰۰۷/BF.۲۸۳۵۱۴۳

[۱۹] J. J. Sakurai ,"Modern Quantum Mechanics", I sBN ۹۷۸-۹۶۴-۰۳-۴۴۷۳-۶

[۲۰] J. D. Jackson. ۱۹۹۸ Classical Electrodynamics (۳ed Edition John Weily ۲۷۵), Sean M.Carooll, "Lecture Notes On General Relativity",

مبحث جدیدترین دستاوردهای فیزیک نوشته ابوالفضل باباپور

[۲۱] G. Walter, Classical Electrodynamics, ۱۹۹۸ Springer

[۲۲] Virendra Singh, Tata Institute of fundamental Research Homi Bhabha Road Bombay ۴۰۰ ۰۰۵ ,India, Kimball A.Milton , J.schwinger , Electromagnetic Radiation: Variational Methods wavequides and accelerators

[۲۳] C. M.Will, Was Einstein Right? Putting General Relativity to the Test, Basic-Books (Harper Collins)۱۹۹۳,

[۲۴] ترجمه ای از این کتاب به فارسی منتشر شده است. کلیفردویل: آیا انیشتین درست می گفت؟ آزمون نسبیت عام، سازمان چاپ و انتشارات وزارت فرهنگ و ارشاد اسلامی، تهران ۱۳۸۳

[۲۵] H. V. McIntosh and A. Cisneros ۱۹۷۰ J.Math.Phys. ۱۱ (۳)

[۲۶] D. Zwanziger ۱۹۶۸ Phys. Rev. ۱۷۶ ۵

[۲۷] H.Ghaffarnejad, "Quantum and Gravity theories:,۱۳۸۸,

[۲۸] B. parker, A presian translation of search for a supertheory

[۲۹] D. J. Gross and M. J. Perry, Nucl. Phys. B۲۲٦ (۱۹۸۳) ۲۹; R. D. Sorkin, Phys. Rev. Lett. ٥۱ (۱۹۸۳) ۸۷.

[۳۰] I. Cotaescu , S. Moroianu, M.Visinescu , arxiv:math/۰٤۱۱۰٤۷۷۱ (۲۰۰٤)

[۳۱] Nikiforov A F, Uvarov V B. Special Functions of Mathematical Physics. Birkhauser, Basel, ۱۹۸۸

[۳۲] M. Kibler, L.G. Mardoyan and G.S. Pogosyan. Int. J. Quan. Chem., ٥٢, ١٣٠١, (١٩٩٤).

[۳۳] Y. Xu, S. He and C. S. Jia, Phys. Scr. ۸۱, ۰۴۵۰۰۱ (۲۰۱۰).

[۳۴] M. Simsek and H. Egrifes, J. Phys. Lon. Math. Gen. ۲۷, ۴۳۷۹ (۲۰۰۴).

[۳۵] J. Audretsch and G. Schafer, Gen. Rel. Grav. ۹, ۲۴۳ (۱۹۷۸).

[۳۶] L. Parker, Phys. Rev. Lett. ۴۴, ۱۵۵۹ (۱۹۸۰).

[۳۷] A. L. Cavalcanti de Oliveira and E. R. Bezerra de Mello, Class. Quantum Grav. ۲۲, ۱۲۵۵ (۲۰۰۵).

[۳۸] H. G. Dosch, J. H. D. Jansen and V. F. Müller, Physical Norvegica ۵, ۲ (۱۹۷۱).

[۳۹] T. T. Wu and C. N. Yang, Nucl Phys. B ۱۰۷, ۳۶۵ (۱۹۷۶).

[۴۰] I. S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik. Table of Integrals, Series and Products (Academic Press, New York, (۱۹۸۰).

[۴۱] S. Dong, Ann. Phys. ۳۲۳, ۱۱۳۶ (۲۰۰۸).

[۴۲] C. Jia et al., Int. J. Theor. Phys. ۴۸, ۲۶۳۳ (۲۰۰۹).

[۴۳] P.K. Suetin (۲۰۰۱), "Jacobi_polynomials", in Hazewinkel, Michiel, Encyclopedia of Mathematics, Springer, ISBN ۹۷۸-۱-۵۵۶۰۸-۰۱۰-۴

[۴۴] Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. ۱۱۵ (۱۹۵۹) ۴۸۵

[۴۵] M. Moshinsky and A. Szczepaniak, J. Phys. A ۲۲, L۸۱۷ (۱۹۸۹).

[۴۶] A. D. Alhaidari, Found. Phys. Lett. ۱۸:۶۵۱-۶۶۴,۲۰۰۵

[۴۷] C. Quimbay, P. Strange. [cond-mat.mes-hall]. arxiv:۱۳۱۱.۲۰۲۱۷۲

[۴۸] J. W. L. Glaisher, Trans. Cambridge Philos. Soc. ۱۲, ۳۹۰ (۱۸۷۱–۱۸۷۹).

[۴۹] A. Boumali, H. Hassanabadi. Eur. Phys. J. Plus (۲۰۱۳) ۱۲۸: ۱

Abstract

The magnetic monopole is particle similar to electron except that its electric charge is much larger than that of electron. In ۱۹۳۱, Dirac proposed the existence of particles, which intrinsically produced magnetic fields. The discussions regarding the magnetic monopole, however, were also released before Dirac. Namely, Poincare, in ۱۸۹۶, analyzed the motion of an electric charge in the field of long narrow magnetic coil which produced at one end a field similar to that of magnetic monopole. The lack of symmetry between electric and magnetic charges is one of the oldest puzzles in physics. In the beginning of the ۱۹th century, some arguments were released regarding the possible relation of magnetic of material and existence of magnetic monopole. The idea of magnetic monopole in Dirac's mind was concurrent with his proposition regarding the existence of particles similar to electron with positive charge which he called positron. In this thesis, we first briefly review some concepts regarding the properties of magnetic monopole and the possible observation of magnetic monopole in an artificial magnetic field. We next explain the Maxwell equation and the magnetic monopole potential in chapter ۲. In section ۳, we have analyzed the Micz-Kepeler system and Kaluza-Klein system in the presence of magnetic monopole. In section ۴, we consider the approximate analytical solution of the Klein-Gordon potential for the Hulthen potential in the presence of Aharanov-Bohm magnetic field and report the energy spectrum and the wavefunctions of the system. In section ۵, we work on the Dirac magnetic monopole field with the Coulomb and Aharanov-Bohm field, solve the problem in three spatial dimensions and describe the dependence of the energy eigenvalues on the engaged potential parameters and other constants of the problem. Finally, in section ۶, we consider the (۳+۱)-dimensional Dirac equation with nonminimal coupling of radial linear isotropic electromagnetic field and calculate the thermodynamic properties of the system.

Keyword: ۱. Magnetic monopole, ۲. Kaluza-klien system, ۳. Micz kepler system, ۴. Dirac equation, ۵. Klien-Gordon equation

Shahrood University of Technology

Physics Department

Master of Science Thesis

Investigation of Magnetic Monopoles in Quantum Mechanics

By:

Sepideh Sargolzaeipoor

Supervisor(s):

Dr.Hassan Hassanabadi

Dr.Nasrin Salehi

*September-*۲۰۱۴