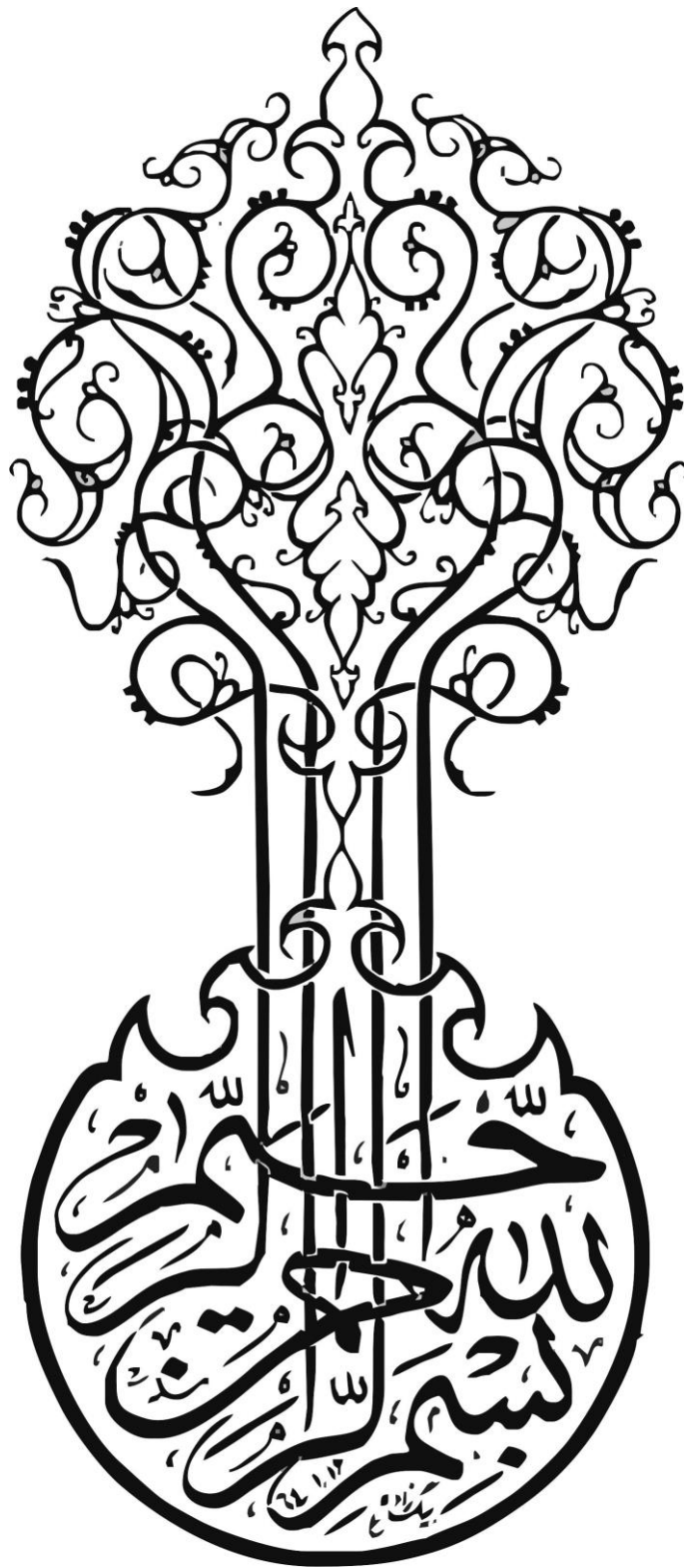






دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: هسته‌ای

ترازهای لاندو برای دو قطبی‌ها در فضای ناجابجایی و فضای فاز

ناجابجایی

استاد راهنما

دکتر حسن حسن آبادی

دانشجو

سیده سمیرا حسینی

استاد مشاور

مهندس حامد رحیم‌اف

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ماه ۱۳۹۲

پیوست شماره ۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

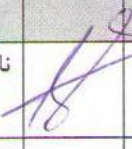
دانشکده : فیزیک

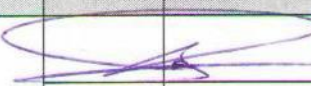
گروه : هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد خانمسیده سمیرا حسینی..

تحت عنوان: ترازهای لاندو برای دوقطبی‌ها در فضای ناجابجایی و فضای فاز ناجابجایی

در تاریخ ۱۳۹۲/۶/۱۶ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد فیزیک هسته‌ای مورد ارزیابی و با درجه جالی.....مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی : مهندس حامد رحیم اف		نام و نام خانوادگی : دکتر حسن حسن آبادی
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر حسین توکلی عنبران
	دکتر مسلم سوهانی		نام و نام خانوادگی : دکتر نسرین صالحی
			نام و نام خانوادگی :
			نام و نام خانوادگی :

تقدیم به

پدر و مادر ارزشمندم به پاس زحمات بی‌شائبه آنها

، خواهران همیشه همراهم

و استاد گرانقدرم دکتر حسن حسن آبادی

سیده سمیرا حسینی

سپاس و قدردانی

الهی توفیقم ده که بیش از طلب همدردی، همدردی کنم. بیش از آن که مرا بفهمند، دیگران را درک کنم.

پیش از آن که دوستم بدارند، دوست بدارم زیرا در عطا کردن است که می‌ستانیم و در بخشیدن است که بخشیده می‌شویم و در مردن است که حیات ابدی می‌یابیم.

از خدای خویش سپاسگزارم که راهی مانند نور در مسیر زندگیم نهاد تا به سرانجامی روشن، هدفی والا و با ارزش برسم؛ سپاسگزارم بخاطر همه لحظاتی که این موهبت نصیبم شد تا در بهشت کوچک استادم به کسب دانش و تجربه پردازم؛ درس صداقت و راستی، یکرنگی و یکدلی، هم صدایی و سکوت... پیاموزم. سپاسگزارم بخاطر افتخاری که نصیبم شد در خدمت استاد گرانقدرم آقای دکتر حسن حسن آبادی باشم و با القای آرامش، صبوری و توکل بر خدا در تمام مراحل این راه باعث انگیزه و قوت قلبی من بوده‌اند. با واقعی‌ترین احساس وجودم، به پاس زحماتی که استاد بزرگوام متحمل شدند در کمال احترام به سمت-شان همیشه خم خواهم شد.

از آقای دکتر صابر زرین کمر که سراسر نمونه‌ی اخلاق و ادب، علم و دانش، و اسوه‌ی تلاش هستند، تشکر می‌کنم و بخاطر همکاری با ایشان بسیار سپاسگزارم. از استاد مشاور آقای مهندس حامد رحیم اف قدردانی می‌کنم. از خانم الهام مقصودی که همیشه الگوی بی‌نظیر، سختکوش به تمام معنا و جویای علم بودند، از راهنمایی‌ها و کمک‌های بی‌دریغ ایشان سپاسگزارم. همچنین از دوستان و همراهان خویش در این رساله سرکار خانم سارا رحمانی، جناب آقای مهدی کمالی و جناب آقای ابراهیم ممتازی که همیشه دلسوزانه حضور داشته‌اند سپاسگزارم.

تعهدنامه

- اینجانب سیده سمیرا حسینی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک-هسته‌ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه: ترازهای لاندو برای دو قطبی‌ها در فضای جابجایی و فضای ناجابجایی

تحت راهنمایی‌های دکتر حسن حسن آبادی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجودات زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

تاریخ ۱۳۹۲/۶/۱۶

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه اثرات مکانیک کوانتومی محض که مهمترین آنها اثر آهارونف-بوهم را در حضور میدان مغناطیسی قوی مورد مطالعه قرار داده و اثرات پارامتر فضای ناجابجایی و فضای فاز ناجابجایی را مورد بررسی قرار می دهیم. نخست، مکانیک کوانتومی ناجابجایی را معرفی کرده و نشان داده ایم که در این جبر، با اعمال تغییر جدید از فضای ناجابجایی به حالتی در فضای جابجایی نگاشته می شود. در ادامه، در فصل- های بعدی ذرات قطبیده را در حضور میدان های الکتریکی و مغناطیسی یکنواخت در فضای جابجایی و ناجابجایی و هم در فضای فاز ناجابجایی مورد بررسی قرار می دهیم و برای این مدل طیف انرژی های لاندو را بدست می آوریم. اثرات شکافتگی ترازهای لاندو ناشی از اثر زیمن و میدان آهارونف-بوهم را مورد بررسی قرار داده و تحت شرایط خاصی می توان از اثرات آن چشم پوشی کرد که منجر به نتایج جالبی خواهد شد. آهارونف و بوهم اثر میدان مغناطیسی را برای حالت ماده در ناحیه خاص با میدان صفر را نشان دادند. این اثر در حضور پتانسیل برداری در حجمی که ذره حرکت می کند اتفاق می افتد و در مکانیک کوانتومی در فضای D بعدی هیچ میدانی وجود ندارد که برخلاف مکانیک کلاسیک به پتانسیل وابسته نباشد. آهارونف و کشر تابع موج ذره خنثی با گشتاور دوقطبی مغناطیسی غیرصفر را نشان دادند. ال.ریبریو اثر HMW و همچنین فازهای کوانتومی در دینامیک کوانتومی برای دوقطبی های مغناطیسی در حضور میدان الکتریکی بررسی کردند، که منشا آن اثر AC می باشد. ما بررسی معادلات را به روش های مختلف از جمله، نیکیفارو-یووارو و شبه دقیق و ... انجام داده ایم.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. H. Hassanabadi, S. S. Hosseini and S. Zarrinkamar, (۲۰۱۳), Chin. Phys. C.

۲. H. Hassanabadi, S.S. Hosseini, Z. Molaei, (۲۰۱۳), Commun. Theor. Phys. ۶۰ (۲۰۱۳) ۹–۱۸.

۳. بوزونهای نسبیتی با اسپین صفر تحت تاثیر میدان مغناطیسی و پتانسیل شبه نوسانی در فضای فاز
ناجایابی (کنفرانس فیزیک ایران، بیرجند، شهریور ۱۳۹۲).

فهرست مطالب

فصل اول : مقدمه.....۱

۱-۱ آشنایی با مکانیک کوانتومی فضا و زمان.....۲

۲-۱ اصل عدم قطعیت.....۲

۳-۱ ایده‌ی مکانیک کوانتومی ناجابجایی.....۴

فصل دوم : معرفی جبر و مفاهیم فضای جابجایی و ناجابجایی و فضای فاز ناجابجایی.....۷

۱-۲ تاریخچه‌ی مکانیک کوانتومی جبر ناجابجایی.....۸

۲-۲ مکانیک کوانتومی جابجایی.....۸

۱-۲-۲ روابط جابجایی کانونیک.....۸

۳-۲ آشنایی با مفاهیم و جبر مکانیک کوانتومی ناجابجایی.....۹

۱-۳-۲ کاربرد و زمینه‌هایی از فضای ناجابجایی۱۱

۲-۳-۲ مفاهیم مکانیک کوانتومی فضای ناجابجایی در جبر ناجابجایی.....۱۳

۳-۳-۲ معرفی ضرب موپال-ویل در فضای ناجابجایی.....۱۵

۴-۳-۲ مفاهیم مکانیک کوانتومی فضای فاز ناجابجایی در جبر ناجابجایی.....۱۷

۵-۳-۲ معرفی ضرب موپال-ویل در فضای فاز ناجابجایی.....۱۹

فصل سوم: اثرات میدانهای الکترومغناطیسی آهارونف-بوهیم و آهارونف-کشر و نظریه‌ی

ترازهای لاندو.....۲۲

۱-۳ تاریخچه‌ی اثر ارینبرگ-مسیدای-آهارونف-بوهیم(EHAB).....۲۳

۲-۳ اثرات کوانتومی برای دوقطبی‌ها۲۶

۱-۲-۳ حل مسئله با استفاده از انتگرال مسیر فاینمن.....۲۹

۲-۲-۳ اشاره‌ای بر آزمایش تداخلی طراحی شده اثر آهارونف-بوهیم.....۳۳

۳-۳ تاریخچه‌ی اثر آهارونف-کشر.....۳۶

۴-۳ نظریه‌ی کوانتش لاندو.....۴۲

۴-۴-۱ (ترازهای لاندو در فضای جابجایی کلاسیکی)..... ۴۳

فصل چهارم: تصحیحات اثر آهارونف-بوهم بر روی ترازهای لاندو معادلات غیرنسبیتی و

معادلات نسبیتی در مکانیک ناجابجایی..... ۴۶

۴-۴-۱ توصیف ذرات غیرنسبیتی و نسبیتی..... ۴۷

۴-۴-۲ تصحیحات ذرات غیرنسبیتی در حضور میدان آهارونف-بوهم با پتانسیل کلینگرگ..... ۴۷

۴-۴-۱-۲ (تصحیحات ذرات غیرنسبیتی با میدان AB و با پتانسیل کلینگرگ)..... ۴۸

۴-۴-۳ تصحیحات طیف نسبیتی بوزونی در حضور میدان آهارونف-بوهم با پتانسیل نوسانی..... ۵۲

۴-۴-۱-۳ (تصحیحات بوزونهای نسبیتی اسپین صفر در غیاب میدان مغناطیسی در فضای جابجایی)..... ۵۲

۴-۴-۲-۲ (تابع موج بوزونهای نسبیتی در حضور پتانسیل نوسانی)..... ۵۴

۴-۴-۳-۳ (تصحیحات بوزونهای نسبیتی اسپین صفر در حضور میدان مغناطیسی در فضای جابجایی)..... ۵۴

۴-۴-۳-۴ (تابع موج بوزونهای نسبیتی در حضور پتانسیل شبه نوسانی در حضور میدان مغناطیسی)..... ۵۶

۴-۴-۵-۳ (تصحیحات بوزونهای نسبیتی اسپین صفر در حضور پتانسیل شبه نوسانی در فضای ناجابجایی)..... ۵۶

۴-۴-۶-۳ (تابع موج بوزونهای نسبیتی در فضای ناجابجایی)..... ۶۰

۴-۴-۷-۳ (تصحیحات بوزونهای نسبیتی اسپین صفر در حضور پتانسیل نوسانی در فضای فاز ناجابجایی)..... ۶۱

۴-۴-۸-۳ (تابع موج بوزونهای نسبیتی در فضای فاز ناجابجایی)..... ۶۴

۴-۴-۹-۳ (تصحیحات بوزونهای نسبیتی اسپین صفر در غیاب پتانسیل نوسانی در فضای فاز ناجابجایی)..... ۶۵

۴-۴-۴-۴ تصحیحات بوزونهای نسبیتی در حضور اثر آهارونف-بوهم با پتانسیل کرنل در فضای جابجایی..... ۶۶

۴-۴-۵-۴ فرمیونهای نسبیتی با اسپین نیمه صحیح..... ۶۸

۴-۴-۶-۴ تصحیحات فرمیونهای نسبیتی با اسپین نیمه صحیح در حضور میدان آهارونف-بوهم با پتانسیل

نوسانی..... ۶۸

۴-۴-۱-۶ (تصحیحات فرمیونهای نسبیتی در حد تقارن $S \rightarrow V$)..... ۶۹

۴-۴-۲-۶ (ویژه تابع فرمیونهای نسبیتی در حد تقارن $S \rightarrow V$ در حضور پتانسیل شبه نوسانی)..... ۷۱

۴-۴-۳-۶ (فرمیونهای نسبیتی با اسپین نیمه صحیح در حد تقارن $S \rightarrow V$)..... ۷۲

۴-۴-۴-۶ (فرمیونهای نسبیتی در حد تقارن $S \rightarrow V$ در مکانیک کوانتومی ناجابجایی)..... ۷۳

۴-۴-۵-۶ (فرمیونهای نسبیتی در حد تقارن $S \rightarrow V$ در مکانیک کوانتومی ناجابجایی)..... ۷۴

۴-۴-۷-۴ تصحیحات فرمیونهای نسبیتی در حضور اثر آهارونف-بوهم با پتانسیل کلینگرگ در فضای جابجایی..... ۷۷

۴-۴-۱-۷ (تصحیحات فرمیونهای نسبیتی با پتانسیل کلینگرگ در فضای جابجایی در حد تقارن $S \rightarrow V$)..... ۷۷

۴-۴-۲-۷ (تصحیحات فرمیونهای نسبیتی با پتانسیل کلینگرگ در فضای جابجایی در حد تقارن $S \rightarrow V$)..... ۷۸

۴-۴-۸ خواص ترمودینامیکی و مکانیک آماری فرمیونها و بوزونهای نسبیتی..... ۷۹

۷۹.....	۴-۸-۱) تابع پارش.....
۸۲.....	۴-۹-۹) تصحیحات بوزونهای نسبیتی و بررسی خواص ترمودینامیکی در فضای ناجابجایی.....
۸۲.....	۴-۹-۱) ترازهای انرژی نسبیتی بوزونها در فضای ناجابجایی.....
۸۳.....	۴-۹-۲) خواص ترمودینامیکی نوسانگر کلاین-گوردن در فضای ناجابجایی.....
۹۵.....	نتایج.....
۹۸.....	پیشنهادهات.....
۱۰۰.....	مراجع فارسی و انگلیسی.....

فهرست اشکال

۲۴.....	شکل ۳-۱ اثر آهارونف-بوهم الکترونها(خط آبی) در حال عبور از سلونوئید حامل جریان.....
۲۷.....	شکل ۳-۲ الکترونها در حال گردش حول شار محصور شده در حجمی از فضا با میدان مغناطیسی صفر.....
۳۰.....	شکل ۳-۳ نمایی از محدوده‌ی قابل انتگرالگیری ذره.....
۳۵.....	شکل ۳-۴ دیاگرام شماتیک تداخلی، با منبع S ، صفحه‌ی مشاهده‌ی O ، e و f دو منشوری.....
۳۹.....	شکل ۳-۵ طرحی از اثر آهارونف-کشر.....
۴۰.....	شکل ۳-۶ الکترون و شاره، در موقعیت خاصی از دو بسته موج الکترون.....
۴۲.....	شکل ۳-۸ اثر آهارونف-کشر سمت چپ تصویر و اثر آهارونف-بوهم سمت راست تصویر.....
۸۸.....	شکل ۴-۱- مقایسه طیف انرژی E / mc^2 در دو فضای جابجایی و فضای ناجابجایی.....
۸۹.....	شکل ۴-۲- مقایسه تابع پارش Z در دو فضای جابجایی و فضای ناجابجایی.....
۹۱.....	شکل ۴-۳- انرژی آزاد هلمهولتز F / mc^2 در دو فضای جابجایی و ناجابجایی.....
۹۲.....	شکل ۴-۴- انرژی درونی متوسط U / mc^2 در دو فضای جابجایی و ناجابجایی بر حسب τ به ازای λ های مختلف.....
۹۳.....	شکل ۴-۵- ظرفیت گرمایی ویژه C / k_B در دو فضای جابجایی و ناجابجایی بر حسب β به ازای λ های مختلف.....
۹۴.....	شکل ۴-۶- ظرفیت گرمایی ویژه S / k_B در دو فضای جابجایی و ناجابجایی.....

فهرست جداول

۵۱.....	جدول ۴-۱ ویژه مقادیر انرژی ذرات غیر نسبیتی در فضای جابجایی به ازای ثابتهای.....
۵۳.....	جدول ۴-۲- ترازهای انرژی بوزونهای نسبیتی در فضای جابجایی در غیاب میدان مغناطیسی.....
۵۵.....	جدول ۴-۳- ترازهای انرژی بوزونهای نسبیتی در فضای جابجایی در حضور میدان مغناطیسی.....

جدول ۴-۴- مقادیر محاسبه شده برای میدان مغناطیسی به ازای پارامتر θ مختلف در فضای ناجابجایی..	۵۰
جدول ۴-۵- ویژه مقادیر انرژی بوزونهای نسبیتی محاسبه شده در فضای ناجابجایی.....	۵۹
جدول ۴-۶- مقادیر محاسبه شده میدان مغناطیسی همگن در فضای فاز ناجابجایی.....	۶۲
جدول ۴-۷- ترازهای انرژی بوزونهای نسبیتی محاسبه شده در فضای فاز ناجابجایی.....	۶۴
جدول ۴-۸- ترازهای انرژی بوزونهای نسبیتی در فضای فاز ناجابجایی در غیاب اثرات میدان مغناطیسی..	۶۵
جدول ۴-۹- ویژه مقادیر انرژی محاسبه شده در فضای جابجایی به ازای مقادیر ثابت.....	۷۲
جدول ۴-۱۰- ویژه مقادیر انرژی محاسبه شده در فضای ناجابجایی به ازای مقادیر ثابت.....	۷۶
جدول ۴-۱۱- طیف انرژی بوزونهای نسبیتی به ازای اعداد کوانتومی دلخواه n و $l=1$ در فضای جابجایی و ناجابجایی.....	۸۵
جدول ۴-۱۲- طیف انرژی بوزونهای نسبیتی با اسپین صفر به ازای هر اعداد کوانتومی دلخواه n و $l=1$ در فضای جابجایی و ناجابجایی.....	۸۷

فصل اول

مقدمه

۱-۱ آشنایی با مکانیک کوانتومی فضا و زمان

در علم فیزیک و ریاضی، فضا-زمان به هرگونه مدل ریاضی گفته می‌شود که زمان و مکان را به صورت ساختاری واحد و در هم پیوسته با یکدیگر ترکیب کند. در فضا-زمان سه بعد فضا و یک بعد زمان در هم ادغام می‌شوند و یک محیط پیوسته چهار بعدی را ایجاد می‌کنند. با ترکیب فضا و زمان و ایجاد یک محیط خمیده^۱ (منیفلد) واحد، فیزیکدان ها توانسته‌اند تئوری‌های فیزیک را هم در سطح کیهانی و هم در بعد اتمی ساده‌سازی کنند. عبارت فضا-زمان به عنوان یک مفهوم عمومی فراتر از رویدادهای فضا-زمان در $۱+۳$ بعد معمولی در نظر گرفته می‌شود، فضا-زمان واقعا ترکیبی از مکان و زمان است.

۱-۲ اصل عدم قطعیت

در مکانیک کوانتومی اصل عدم قطعیت را ورنر هایزنبرگ، فیزیکدان آلمانی، در سال ۱۹۲۶ فرمول‌بندی کرد. در مکانیک کوانتومی، مکان و تکانه‌ی یک دستگاه، ویژگی‌های مکمل یکدیگر هستند و نظریه هیچ آزمایشی را ممکن نمی‌داند که در آن بتوان هر دو را همزمان تعیین کرد [۱]. به عبارت دیگر، افزایش دقت در کمیت یکی از آن خواص مترادف با کاهش دقت در کمیت خاصیت دیگر است. در نتیجه در مکانیک کوانتومی، حالتی نمی‌تواند وجود داشته باشد که ذره را با مکان و تکانه معین شرح دهد. بیان ریاضی اصل عدم قطعیت این است که هر حالت کوانتومی این خاصیت را دارد که ریشه متوسط مربع انحرافات از مقدار متوسط مکان (انحراف استاندارد توزیع X): $\Delta X = \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle}$ ضرب در ریشه متوسط

^۱ Manifold

مربع انحرافات تکانه از مقدار متوسطش (انحراف استاندارد P): $\Delta P = \sqrt{\langle (P - \langle P \rangle)^2 \rangle}$

هیچگاه نمی‌تواند از کسر ثابتی از ثابت پلانک کوچکتر باشد: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. هر عمل

اندازه‌گیری با دقت Δx حالت کوانتومی را کاهش داده و منجر به افزایش انحراف استاندارد

تکانه Δp به مقدار بزرگتر از $\hbar/2\Delta x$ می‌شود. برجسته‌ترین خاصیت ماتریس‌های نامتناهی

هایزنبرگ برای مکان و تکانه این است که در عمل ضرب ناجابجایی هستند. مقدار انحراف از

جابجایی‌پذیری توسط رابطه‌ی جابجایی هایزنبرگ مشخص می‌گردد:

$[X, P] = XP - PX = i\hbar$. این رابطه تعبیر شفاف و مشخصی در ابتدا نداشت. در مارس

۱۹۲۶ میلادی متوجه شد که ناجابجایی اشاره به اصل عدم قطعیت دارد و این یک تعبیر

واضح از عدم جابجایی‌پذیری (ناجابجایی) بود. هایزنبرگ نشان داد که رابطه‌ی جابجایی نشان

از عدم قطعیت دارد، هر دو کمیتی که جابجایی‌ناپذیر هستند نمی‌توانند همزمان اندازه‌گیری

شوند. هر چقدر که یکی دقیق‌تر اندازه‌گیری شود، دومی نامعین‌تر خواهد بود. هنگامی که

عملگرهای خطی A و B بر روی یک تابع مانند $\psi(x)$ عمل می‌کنند، عملیات همیشه

جابجایی‌پذیر نیست. یک مثال واضح در این مورد وقتی است که عملگر B (تابع را) در x

ضرب می‌کند و عملگر A (از تابع) نسبت به x مشتق می‌گیرد:

$$(\frac{d}{dx}x - x\frac{d}{dx}) = 1 \text{ یعنی: } (AB - BA)\psi = \frac{d}{dx}(x\psi) - x\frac{d}{dx}\psi = \psi$$

این مثال به جهت این که نزدیکی زیادی با رابطه‌ی جابجایی در مکانیک کوانتومی دارد، از

اهمیت فراوانی برخوردار است. در آن جا، عملگر مکان تابع موج را در x ضرب کرده، در حالی

که عملگر متناظر با تکانه مشتق گرفته و در $-i\hbar$ ضرب می‌کند، بنابراین: $[p, x] = -i\hbar$. این جابجاگر غیرصفر است که دلالت بر عدم قطعیت دارد.

۱-۳ ایده‌ی مکانیک کوانتومی ناجابجایی

اولین بار ایده ناجابجایی در فیزیک از طریق مکانیک کوانتومی مطرح شده است که در آن مکان و تکانه مختلف $\hat{x}$, $\hat{p}$ رابطه جابجایی هایزنبرگ $[\hat{x}, \hat{p}] = i\delta_{ij}$ را برقرار می‌کنند که نتیجه‌ای از رابطه عدم قطعیت است. ون نویمان کسی بود که اولین بار به توصیف چنین فضایی توسط "هندسه‌ی بی‌بعد" پرداخت. در این روش جبر نویمان فرمولبندی شد و منجر به هندسه‌ی ناجابجایی شد. برای مطالعه‌ی فضاهاى توپولوژیکی جبر جابجایی با توابع جبرهای ناجابجایی جایگزین می‌شوند. در مسائل فیزیکی مفهوم فضای فاز ناجابجایی با مختصات‌های ناجابجایی توسط هایزنبرگ ارائه شد. در ریاضی فیزیک، نظریه میدان کوانتومی ناجابجایی (یا نظریه میدان کوانتومی فضا-زمان ناجابجایی) یکی از کاربردهای ریاضیات ناجابجایی در فضا زمان نظریه میدان کوانتومی می‌باشد که نتیجه‌ای از هندسه ناجابجایی است که در توابع مختصات ناجابجایی وجود دارد. محدودیت کمتری برای مقیاس ناجابجایی وجود دارد (یعنی چگونه با دقت می‌توان مکان را اندازه‌گیری کرد) اما در حال حاضر هیچ شواهد تجربی برای تأیید نظریه و یا میدان‌های حاکم بر آن مشاهده نشده است.

این پایان نامه بر این اساس طبقه‌بندی شده است که مفاهیم و مکانیک جبر ناجابجایی را در فصل (۲) به معرفی آن می‌پردازیم و با برخی از ویژگی‌های آن آشنا خواهیم شد و با استفاده از آن برای مشاهده‌ی اثرات ناجابجایی بر روی ترازهای انرژی غیرنسبیتی و نسبیتی و متناظر با آن ویژه توابع، ذرات بدون اسپین، ذرات فرمیونی با اسپین ۱/۲ و بوزونی با اسپین صفر را

در حضور میدان پس زمینه ثابت و یکنواخت اثر آهارونف-بوهم را مطالعه و استخراج می-کنیم. این اثر در فصول بعدی کارایی زیادی خواهد داشت و بطور اساسی به بحث و بررسی آن خواهیم پرداخت. در فصل (۳) به معرفی نظریه‌ی ترازهای لاندو و یک اثر مکانیک کوانتومی محض یعنی اثر آهارونف-بوهم و اثر دوگانه‌ی آن اثر آهارونف-کشر می‌پردازیم و بر اساس آن در فصل بعد طیف انرژی را برای حالات نسبیتی و غیرنسبیتی بدست می‌آوریم. در فصل (۴) از اطلاعات و اندوخته‌های فصل‌های گذشته استفاده شده و بطور مجزا به بررسی معادلات و حل آن‌ها با روش‌های تحلیلی و عددی بطور دقیق انجام شده است. در نهایت در این پایان نامه به نتیجه‌گیری و ارائه پیشنهادات برای مطالعات بعدی اختصاص داده خواهد شد.

فصل دوم

معرفی جبر و مفاهیم فضای جابجایی و

ناجابجایی و فضای فاز ناجابجایی

۱-۲ تاریخچه‌ی مکانیک کوانتومی جبر ناجابجایی

یکی از شاخه‌های ریاضیات در رابطه با روش هندسی مربوط به جبر ناجابجایی هندسه‌ی ناجابجایی^۲ (NCG) است که برخی با عنوان "هندسه بی‌بعد" و یا "هندسه‌ی کوانتومی" مطرح می‌کنند و با ساخت و ساز فضاهایی که به صورت مکانی توسط جبر ناجابجایی توابع (احتمالا در بعضی جهات تعمیم یافته) ارائه شده‌اند. جبر ناجابجایی، جبر شرکت‌پذیر است که در آن ضرب خاصیت جابجایی ندارد، یعنی اینکه XY همیشه با YX برابر نیستند؛ یا به طور کلی‌تر از ساختار جبری که در آن یکی از عملیات‌های دوتایی اصلی خاصیت جابجایی ندارد. یکی از افرادی که در جهت پیشروی هندسه‌ی ناجابجایی نقش داشته است، توسط ریاضیدان فرانسوی آلن گُن^۳، در حدود سال ۱۹۷۹ آغاز شده است. آلن گُن در سال ۱۹۸۲ در زمینه‌ی ریاضی به سبب کشف هندسه‌ی ناجابجایی برنده جایزه‌ی نوبل فیلدز (Fields) شد. کاربرد هندسه‌ی ناجابجایی در ریاضی فیزیک را می‌توان برخی از برنامه‌های کاربردی در فیزیک ذرات در مدل‌های استاندارد ناجابجایی و نظریه میدان کوانتومی ناجابجایی، نام برد. افزایش توجه به هندسه ناجابجایی در فیزیک، پس از نقش آن در نظریه M- در سال ۱۹۹۷

^۲Noncommutative geometry

^۳ Alain Connes

پایه‌گذاری شده است. این هندسه اولین بار توسط ویتن^۴ در مطالعات "ریسمان باز" ارائه شد.

۲-۲ مکانیک کوانتومی جابجایی

در توصیف مکانیک کوانتومی که بر اساس فرمولبندی دیراک صورت می‌گیرد. یک سری روابط بنیادی به نام روابط جابه‌جایی کانونیک یا روابط جابجایی بنیادی معروف هستند. این روابط بنیادی مکانیک کوانتومی هستند که در توصیف لازم و ضروری می‌باشند. از طرف دیگر، چون نظریه کوانتومی نسبت به نظریه کلاسیک، نظریه کامل‌تری می‌باشد، همان طور که هندسه‌ی دیفرانسیل کلاسیکی با هندسه‌ی ناجابجایی قابل قیاس است، که هرگاه ثابت پلانک $\hbar$ ، به سمت صفر میل کند، در این صورت، نظریه کامل‌تر مکانیک کوانتومی نظریه دیراک به نظریه پواسون (نظریه کلاسیک) تبدیل می‌گردد.

۲-۲-۱) روابط جابجایی کانونیک

روابط جابجایی فضای فاز مسطح (کلاسیک) در مکانیک کوانتومی معمولی با استفاده از جبر هایزنبرگ استاندارد با مختصات تعمیم یافته‌ی $\hat{x}$ و $\hat{p}$ توصیف می‌شود، که به قرار زیر هستند:

$$[x_i, x_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [x_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}, \quad (1-2)$$

^۴ Witten

که این روابط سنگ بناهای مکانیک کوانتومی را تشکیل می‌دهند و پل آدرین موریس دیراک^۵ آن‌ها را "شرایط بنیادی کوانتوم" نامیده است ولی غالباً آن‌ها را به نام روابط جابجایی کانونیک یا روابط جابجایی بنیادی می‌نامند. همچنین در سال ۱۹۲۵ دیراک دید که روابط مختلف مکانیک کوانتومی را می‌توان از روابط کلاسیکی متناظر آن‌ها، با جایگزین کردن گروه‌های پواسون با جابجایی‌ها به صورت، $\left[\cdot, \cdot \right]_{classical} \rightarrow \frac{[\cdot, \cdot]}{i\hbar}$ بدست آورد. همچنین گروه‌های پواسون کلاسیکی برای توابعی از q ها و p ها به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$[A(q, p), B(q, p)] \equiv \sum_s \left(\frac{\partial A}{\partial q_s} \frac{\partial B}{\partial p_s} - \frac{\partial A}{\partial p_s} \frac{\partial B}{\partial q_s} \right), \quad (2-2)$$

روابط جابجایی در مکانیک کلاسیک، برابر با $[x_i, p_j]_{classical} = \delta_{ij}$ هستند. رابطه‌ی دیراک موجه به نظر می‌آید زیرا گروه‌های پواسون کلاسیکی و جابجایی‌ها مکانیک کوانتومی در خواص حدی یکسانی صدق می‌کنند. در گروه‌های پواسون کلاسیکی و جابجایی مکانیک کوانتومی، اختلافات مهمی وجود دارد. اول آنکه بُعد گروه‌ی پواسون کلاسیکی با جابجایی مکانیک کوانتومی فرق دارد زیرا (۲-۲) مشتقاتی نسبت به q و p ظاهر شده است. دوم آنکه گروه‌ی پواسون توابع حقیقی از q ها و p ها، حقیقی محض است، در صورتی که جابجایی دو عملگر هرمیتی عملگری پادهرمیتی است. این اختلافات ناشی از ورود عامل $i\hbar$ در رابطه‌ی دیراک است [۲].

۲-۳ آشنایی با مفاهیم و جبر مکانیک کوانتومی ناجابجایی

^۵ Paul Adrien Maurice Dirac

در سال ۱۹۴۷ اسنایدر برای اولین بار ایده کوانتیزه کردن فضا-زمان را مطرح کرده و روابط ناجابجایی معینی را بین این مختصات را بیان نمود. ایده مطرح شده توسط اسنایدر تا سال های زیادی پیگیری نشد تا در نهایت در نظریه ریسمان شواهدی از امکان وجود مختصات ناجابجایی برای دو سر ریسمان های باز که بر روی آن میدان پس زمینه معینی وجود دارد به اثبات رسید. از جمله ویژگی های مهم این نظریه خاصیت غیرموضعی بودن آن است. در ریاضیات ناجابجایی میدان های توصیف کننده ذرات، غیرموضعی بودن بین خود را در ضربی غیرمعمولی آشکار می سازند که تابعی نمائی از توابع مشتق پذیر هستند. با بسط نما در مراتب مختلف پارامتری که مقیاسی برای فضا-زمان ناجابجایی است، مشتقات مراتب بالاتر در حاصلضرب این دو میدان ظاهر شده و نظریه را بشدت غیرموضعی می نمایند. سه نوع فضای کوانتومی را بطور مختصر معرفی می کنیم [۳]:

$$۱. \text{ نوع کانونیکی } (\theta^{\mu\nu} - \text{تغییر شکل یافته}) \text{ فضای کوانتومی: } [x_\mu, x_\nu] = i\theta_{\mu\nu}.$$

$$۲. \text{ اصلاح جبر-لی در فضا-زمان کلاسیکی: } [x_\mu, x_\nu] = i\theta_{\mu\nu}^\rho x_\rho.$$

$$۳. \text{ تغییر شکل درجه دوم فضاهای گالیه ای و مینکوفسکی: } [x_\mu, x_\nu] = i\theta_{\mu\nu}^{\rho\tau} x_\rho x_\tau.$$

ضرایب $\theta_{\mu\nu}^\rho, \theta_{\mu\nu}^{\rho\tau}$ و $\theta_{\mu\nu}$ ثابت هستند.

هدف ما در این پایان نامه حاضر معرفی و استفاده از جبر ناجابجایی مربوط به نوع اول (یعنی نوع کانونیکی فضای کوانتوم) می باشد. حساب دیفرانسیل تعمیم یافته در محیط ناجابجایی توسط ریاضیدانان انجام شد [۴، ۵]. ابزارهای ریاضی گوناگونی توسط کُن توسعه یافت و

همکارانش به تعریف نظریه ینگ-میلز^۶ [۶] ناجابجایی و مدل‌های ذره‌ای [۷] پرداختند. در مسائل فیزیکی مفهوم فضای فاز ناجابجایی با مختصات‌های ناجابجایی توسط هایزنبرگ ارائه شد. رابطه‌ی عدم قطعیت در مکانیک کوانتومی، به عنوان یک نتیجه جبر جابجاگر غیرصفر مطرح می‌شود که در ساختار حرکتی این نظریه ساخته شده است. در سال ۱۹۹۹ سیبرگ و ویتن ایده ناجابجایی را با در نظر گرفتن یک حد خاصی از نظریه ریسمان در میدان پس زمینه مغناطیسی غیرصفر B را مورد مطالعه قرار دادند، نظریه میدان در فضای ناجابجایی را بدست آوردند و هم ارزی بین میدان‌های پیمانه‌ای معمولی و میدان‌های پیمانه‌ای ناجابجایی را نشان دادند که اغلب نگاشت سیبرگ-ویتن^۷ می‌نامند. تاکنون، این نگاشت در حوزه‌های تحقیقاتی مختلف از جمله اثر هال در حوزه‌ی فیزیک ماده چگال، دینامیک سیالات، نظریه میدان گرانش کوانتومی کاربرد داشته است. بررسی اجمالی عمومی از این موضوع گسترده در مرجع [۸] یافت می‌شود.

۲-۳-۱) کاربرد و زمینه‌هایی از فضای ناجابجایی

هندسه‌ی ناجابجایی کاربردهای فراوانی در زمینه‌ی فیزیک کوانتومی داشته است که برترین آنها تفسیر مدل استاندارد در قالب خمینه‌های ریمانی ناجابجایی و یا سه‌تایی‌های طیفی می‌باشد. همچنین این هندسه در مدل‌های کوانتومی برای فضا-زمان ناجابجایی در ابعاد پلانک و در نهایت به گسترده‌ترین کاربرد هندسه‌ی ناجابجایی در فیزیک کوانتومی یعنی مطالعه‌ی نظریه‌ی میدان‌های کوانتومی ناجابجایی می‌توان نام برد. اما بخش عمده‌ای از اهمیت نظریه‌ی

^۶Yang-Mills

^۷Seiberg-Witten

میدان‌های کوانتومی ناجابجایی از مطالعات نظریه‌ی ریسمان الهام گرفته شده است، مطالعاتی که شواهد بسیاری از فضا-زمان ناجابجایی در آن ارائه شده است.

این ایده که مختصات فضا زمان جابجا می‌شوند، کاملاً قدیمی است [۹]. توسط بسیاری از نویسندگان در هر دو زمینه‌ی ریاضی و هم در دیدگاه فیزیکی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این نظریه‌ی جبری اپراتور به عنوان چارچوبی برای فیزیک در فضا-زمان ناجابجایی پیشنهاد شده است. برای توضیح فلسفی و نظریه ینگ-میلز بر اساس ناجابجایی در مرجع [۱۰] ارائه شده است. در مکانیک کوانتومی مسائل متعددی در فضای ناجابجایی در نظر گرفته شده است، که برخی از نتایج جالب به فازهای هندسی وابسته‌اند [۱۱]. برخی معتقدند که در حد انرژی‌های بالا و در محدوده‌ی TeV اثرات ناجابجایی داریم. در کوانتش کانونیک برای گذار از حالت کلاسیک به حالت کوانتومی، کروشه پواسون در کلاسیک به جابجاگرهای کوانتومی تبدیل می‌شود [۱۲]. هندسه ناجابجایی، هندسه فضا‌های کوانتومی را مورد مطالعه قرار می‌دهد. به عبارتی، به معنای مطالعه خواص هندسی جبرهای ناجابجایی است. اکنون سوال کنجکاوانه که مطرح می‌شود اینست که، خواص هندسی جبر ناجابجایی چیست؟ یا «اگر مختصات x_i جابجاپذیر نباشد چه اتفاقی خواهد افتاد؟» این پرسش اساس و ایده‌ی اولیه‌ی مطالعه‌ی هندسه‌ی ناجابجایی را تشکیل می‌دهد. اینها پرسشهایی هستند که در مورد هندسه ناجابجایی مطرح می‌شوند. در واقع، هندسه‌ی ناجابجایی به مطالعه‌ی خمینه‌هایی که مختصات توصیف‌کننده نقاطشان، x_μ ، یعنی عملگرهای ناجابجایی (به جای اعداد معمولی) می‌پردازد. این فصل آشنایی مختصری است با فضا‌های کوانتومی و هندسه ناجابجایی. برای مطالعه‌ی بیشتر کتاب جالب نوشته‌ی آلن کلان مراجعه نمائید.

۲-۳-۲) مفاهیم مکانیک کوانتومی فضای ناجابجایی در جبر ناجابجایی

برخی پژوهش‌ها در نظریه‌های کوانتومی برای هندسه فضا-زمان در مقیاس‌های نزدیک به مقیاس پلانک منجر به هندسه‌ی ناجابجایی می‌شود [۱۳]. تلاش‌های مختلفی صورت گرفته تا شاید بتوان تاثیر ناجابجایی بودن هندسه فضا-زمان را در مقیاس‌های پایین‌تر از مقیاس پلانک مشاهده کرد. نظریه‌های میدان ناجابجایی حاوی یک سری ناسازگاری‌های جدی‌اند. به طور مثال، در این نظریه‌ها تقارن لورنتز و یکانی بودن ماتریس S نقض می‌شود (برای مطالعه بیشتر مرجع [۱۴] را ببینید). در مکانیک کوانتومی، اپراتورهای فضا-تکانه جابجا نمی‌شود که حتی ممکن است برای مولفه‌های تکانه-تکانه رخ دهد و در نتیجه موضوع متفاوت می‌شود. در فضای ناجابجایی، مختصات x^μ و تکانه p^μ را با عملگرهای $\hat{x}^\mu$ و $\hat{p}^\mu$ جابجا می‌کنیم که در رابطه‌ی (۳-۲) صدق می‌کند

$$[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \quad [\hat{X}_\mu, \hat{P}_\nu] = i\hbar\delta_{\mu\nu}, \quad [\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] = 0. \quad (3-2)$$

که در آن اندیس یونانی μ, ν به جای i, j قرار داده‌ایم و مقادیر آن به ازای ۰ تا ۲ هستند، زیرا به منظور از بین بردن ویژگی یکانی و فیزیکی، لازم است که $\theta^{0\mu} = 0$ در نظر بگیریم؛ در دو بعد عنصر ماتریس نامتقارن ثابت، $\theta_{\mu\nu}$ را می‌توان به صورت $\theta_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu}\theta$ نوشت و θ موسوم به پارامتر ناجابجایی در مختصات فضا-فضا است. مولفه‌های تانسورهای δ_μ^ν و $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ و ضرایب شان تحت تبدیلات لورنتز ناوردا هستند. اما $\theta_{\mu\nu}$ به شکل هیچ کدام نیست و در

نتیجه تقارن لورنتز در نظریه‌های ناجابجایی نقض می‌شود. البته مشاهده خواهیم کرد در فضا-زمان دوبعدی، $\theta_{\mu\nu} \propto \varepsilon_{\mu\nu}$ ، بنابراین در دو بعد در نظریه‌های ناجابجایی تقارن لورنتز ناوردا است. پارامتر ناجابجایی در دو بعد ماتریس ناتکین است بنابراین وارونپذیر است اما در سه بعد یک ماتریس تکین است و معکوس ماتریس آن وجود ندارد. نظریه میدان NC از نظریه میدان جابجایی با جابجا کردن عمل حاصلضرب معمولی در میدان با ضرب ستاره در میدان ساخته شده است. بعنوان مثال، برای معادله‌ی شرودینگر در فضای ناجابجایی از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند: $H(x, p)^* \psi = E \psi$ ، که در آن $H(x, p)$ هامیلتونین معمولی است و در مکانیک کوانتومی با اعمال ضرب ستاره یا ضرب موایل-ویل و با قرار دادن، تغییر باپ [۱۵] در معادله‌ی موردنظر با ضرب فضای معمولی جایگزین می‌شود یعنی $H(\hat{x}, \hat{p})$ بجای $H(x, p)$ ، که از رابطه‌ی (۴-۲) پیروی می‌کند:

$$H(\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu) = H(x^\mu - \frac{1}{2} \theta \varepsilon^{\mu\nu} p^\nu, p^\mu) \quad (4-2)$$

که در آن p^μ و x^μ مختصات تکانه و مکان تعمیم یافته در مکانیک کوانتومی معمولی است. بنابراین، رابطه‌ی فوق فضای جابجایی را تعریف می‌کند و اثرات ناشی از ناجابجایی در ترم هایی که شامل پارامتر θ هستند. در نتیجه ما باید عملگرهای تغییر باپ^۱ را اعمال کنیم تا این قضیه اتفاق بیفتد. در ادامه ضرب ستاره بین دو میدان در فضای ناجابجایی را تعریف می‌کنیم.

^۱ Bopp shifts

۲-۳-۳) معرفی ضرب مویال-ویل^۹ در فضای ناجابجایی

در ریاضیات داستان ضرب مویال در سال ۱۹۲۷ توسط ج. انریکو مویال^{۱۰} برای عملگرهای واحد مربوطه مکان و تکانه آغاز شد [۱۶]. یکی از ویژگیهای ضرب ستاره‌ی فضای فاز، یا $\ast$ ، شرکت‌پذیری، می‌باشد. با توجه به جبر تغییر شکل یافته جبر توابع ناجابجایی، فرم استاندارد برای ضرب ستاره مویال را به صورت رابطه (۵-۲) ارائه می‌دهد

$$(f \ast g)(x) = f(x)g(x) \exp \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_{\mu} f \partial_{\nu} g + O(\theta^2) \quad (5-2)$$

که دیفرانسیل و مشتق مکانی در دو میدان f و g را بیان می‌کند. اساساً راه حل منحصر به فرد این مسئله (پیمانه f و g که از مرتبه‌ی مکان هستند) توسط مرتبه‌ی θ بازتعریف می‌شوند. فرم انتگرالی ضرب ستاره مویال (ضرب پیچشی) از رابطه‌ی (۶-۲) پیروی می‌کند:

$$(f \ast g)(x) = \iint f(x')g(x'') \exp \frac{i}{2} \theta^{ij} dx' dx'' \quad (6-2)$$

ضرب ستاره در فضای ناجابجایی به صورت $\ast = \exp(i\theta(\bar{\partial}_{x_i} \bar{\partial}_{x_j} - \bar{\partial}_{x_j} \bar{\partial}_{x_i})/2)$ تعریف می‌شود. همانطور که ملاحظه می‌نمایید ضرب مویال شامل عملگر نمایی به همراه مشتقات مرتبه بالاتر است و همین مطلب باعث می‌شود در محاسبات معادلات مشکلات زیادی بوجود آید. بنابراین ما قصد داریم به صورت یک سری گسترش یافته آن را بیان کنیم. در فضای

^۹ Moyal-Weyl product

^{۱۰} José Enrique Moyal

ناجایابی ضرب بین توابع یعنی ضرب ستاره‌ای (موپال-ویل)، برای هر مرتبه در فضای ناجایابی، بسط زیر را وارد می‌کنیم [۱۷].

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= e^{\frac{i}{2} \theta^{ij} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \frac{\partial}{\partial \zeta^j}} f(x + \xi) g(x + \zeta) \Big|_{\xi=\zeta=0} \\ &= \exp\left(\frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \partial_{x^\mu} \partial_{x^\nu}\right) f(x^\mu) g(x^\nu) \quad (7-2) \\ &= f(x) g(x) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} (x) \partial_\mu f(x) \partial_\nu g(x) + O(\theta^2),\end{aligned}$$

اغلب این تعریف، فرمول توابع براکت موپال نامیده می‌شود، به نظر می‌رسد در علم فیزیک در بسیاری از زمینه‌ها، از جمله برنامه‌های کاربردی نظریات ماتریس قدیمی و جدید آشکار شده باشد [۱۸]. f و g توابع معمولی مشتق‌پذیر و ماتریس $N \times N$ هستند. در این مورد، ما ضرب ستاره‌ای (*) را به عنوان حاصلضرب تانسوری ضرب ماتریسی فقط با ضرب ستاره‌ای توابع تعریف می‌کنیم. ضرب ستاره قابل تعمیم به شرکت‌پذیری، توزیع‌پذیری در جمع می‌باشد و خاصیت جابجایی ندارد. ضرب * را می‌توان با "تغییر باپ"، جایگزین کرد که در آن x_μ ، p_μ مختصات مکان و تکانه در فضا-زمان جابجایی هستند. بعد از اعمال این تغییر، اثر ایجاد شده توسط ناجایابی فضا-فضا را می‌توان در فضای جابجایی محاسبه کرد و عملگر $\hat{x}$ به صورت (۸-۲) تغییر می‌یابد

$$\begin{aligned}\hat{x}_\mu &= x_\mu - \frac{1}{2\hbar} \theta_{\mu\nu} p^\nu = x_\mu - \frac{1}{2\hbar} \theta \varepsilon_{\mu\nu} p^\nu, \\ \hat{p}_\mu &= p_\mu.\end{aligned} \quad (8-2)$$

که در آن $\theta^{\mu\nu} = \theta \varepsilon^{\mu\nu}$ و $\varepsilon^{\mu\nu}$ تانسور نامتقارن می‌باشد و $\hbar$ همان ثابت پلانک معروف است. همچنین ضرب خارجی آن به فرم

$$\vec{r} = \vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{p}}{2\hbar}, \quad \vec{p} \rightarrow \vec{p} \quad (9-2)$$

تعریف می‌شود.

۲-۳-۴) مفاهیم مکانیک کوانتومی فضای فاز ناجابجایی در جبر

ناجابجایی

معمولا در مکانیک کوانتومی، افرادی که درباره‌ی ناجابجایی به مطالعه می‌پردازند، توسط مختصات فضای فاز ناجابجایی تکانه‌ی ناجابجایی را معرفی می‌کنند که ناشی از ساختار عجیب و غریبی از تکانه کانونی است. بطور نظری و پدیدارشناختی^{۱۱} این مسئله با نکات جالب و گوناگونی مطالعه شده است. در این مورد هم مختصات فضا-فضا و هم تکانه-تکانه جابجا نمی‌شوند. آمار بوز-اینشتین^{۱۲} در مکانیک کوانتومی ناجابجایی هم به ناجابجایی فضا-فضا و تکانه-تکانه نیاز دارد [۱۹]. برخی سیستم‌های فیزیکی که در آن فضای فاز ناجابجایی مورد تحلیل و بررسی قرار گرفته است، در این مورد عملگر x^i و p^i با رابطه (۲-۱۰) به دست می‌آید. در ادامه ما فرمول‌بندی فضای فاز ناجابجایی را ارائه می‌دهیم. در فضای فاز ناجابجایی، جبر ناجابجایی به صورت (۲-۱۰) در نظر می‌گیریم

$$[\hat{X}_\mu, \hat{X}_\nu] = i\theta_{\mu\nu}, \quad [\hat{X}_\mu, \hat{P}_\nu] = i\tilde{\hbar}\delta_{\mu\nu}, \quad [\hat{P}_\mu, \hat{P}_\nu] = i\bar{\theta}_{\mu\nu}. \quad (10-2)$$

^{۱۱} Phenomenology

^{۱۲} Bose-Einstein

که در آن $\bar{\theta}^{\mu\nu} = \bar{\theta}\varepsilon^{\mu\nu}$ ، تانسور پادمتقارن ثابت است. در واقع $\bar{\theta}^{\mu\nu}$ یک ثابت خیلی کوچک با عناصر ماتریسی نامتقارن است، که نشاندهنده ناجابجایی تکانه است. همچنین در فضای فاز NC با در نظر گرفتن $\bar{\theta}^{0\mu} = 0$ ، فضای فاز NC به فضای جابجایی نگاشته می‌شود. در معادله‌ی (۱۰-۲) ثابت پلانک تغییر شکل یافته در فضای فاز ناجابجایی است، که به فرم $\tilde{\hbar} = \hbar + \frac{\theta\bar{\theta}}{4\hbar}$ است. عملگر تکانه را نیز در فضای فاز ناجابجایی می‌توان به فرم $\hat{p}_\mu = -i\tilde{\hbar}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ نوشت. به منظور پیدا کردن فرم دیفرانسیلی از متغیرهای فاز، یک نمایش کلی را بررسی می‌کنیم

$$x_\mu \rightarrow x_\mu, \quad (11-2)$$

$$p_\mu \rightarrow -ia\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} + b\hbar\varepsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} + c\frac{\bar{\theta}}{\hbar}x_\mu + d\frac{\bar{\theta}}{\hbar}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu.$$

که در آن a, b, c و d ثابت‌های بدون بعد هستند. حالا برای اثبات با استفاده از جبر رابطه‌ی (۱۰-۲) شرایط زیر برقرار است

$$a + d\frac{\bar{\theta}\theta}{\hbar^2} = 1, \quad (12-2)$$

$$b + ic\frac{\bar{\theta}\theta}{\hbar^2} = 1,$$

$$p_\mu \rightarrow -ia\hbar\frac{\partial}{\partial x_\mu} + b\hbar\varepsilon_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x_\nu} + c\frac{\bar{\theta}}{\hbar}x_\mu + d\frac{\bar{\theta}}{\hbar}\varepsilon_{\mu\nu}x_\nu.$$

از آن جا که سه معادله‌ی فوق برای تمام پارامترها کافی نیستند، راه حل هایی برای دست آوردن ترم‌های متغیرهای فضا-زمان به صورت روابط (۱۳-۲) ارائه می‌دهیم

$$x_\mu \rightarrow x_\mu$$

$$p_\mu \rightarrow -ia\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} \mp i\hbar \sqrt{1-a^2 - \frac{\bar{\theta}\theta}{\hbar^2}} \varepsilon_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \pm \frac{\sqrt{1-a^2 - \frac{\bar{\theta}\theta}{\hbar^2}}}{\theta} \hbar x_\mu + \frac{1-a}{\theta} \varepsilon_{\mu\nu} \hbar x_\nu. \quad (13-2)$$

در صورتی که $(\theta, \bar{\theta}) \rightarrow 0$ حد جابجایی برقرار می‌شود. بدیهی است با انتخاب $a = 1$

واجد این شرایط نمی‌شود. به عبارت دیگر اگر ما به شکل $a = \sqrt{1 - \frac{\bar{\theta}\theta}{\hbar^2}}$ در نظر بگیریم، در

نهایت به صورت (14-2) معرفی می‌کنیم:

$$p_\mu \rightarrow -i\hbar \sqrt{1 - \frac{\bar{\theta}\theta}{\hbar^2}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} + \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{\bar{\theta}\theta}{\hbar^2}}}{\theta} \varepsilon_{\mu\nu} \hbar x_\nu \quad (14-2)$$

حد ساده‌ی آن به این صورت است: $\lim_{\theta \rightarrow 0} \lim_{\bar{\theta} \rightarrow 0} p_\mu = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \lim_{\bar{\theta} \rightarrow 0} p_\mu$ با توجه به

اینکه رابطه‌ی جبری (10-2) تحت انتقال $(x, p, \theta, \bar{\theta}) \rightarrow (p, -x, \bar{\theta}, \theta)$ ناورد است، ما می-

توانیم این انتقال را از رابطه‌ی (14-2) به فضای تکانه‌ی معرفی شده ببریم.

$$M = 167.32 \times 10^{-29} \text{ kg}, |\bar{\theta}| \propto 10^{-61} \text{ kg}^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}, p \square 10^{-27} \text{ Kg m s}^{-1}$$

این نتایج عددی پارامتر فضای فاز ناجابجایی در توافق خوبی با مرجع [20] هستند.

2-3-5) معرفی ضرب موپال-ویل در فضای فاز ناجابجایی

در مکانیک کوانتومی ناجابجایی و نظریه میدان کوانتومی ناجابجایی، ضرب ستاره بین دو

میدان در فضای فاز ناجابجایی را می‌توان توسط تعمیمی از تغییر باپ برای مختصات مکان و

برای تکانه جایگزین کرد. فرمولبندی در این روابط در فضای فاز ناجابجایی دو بعدی است، که

می‌توان این فرمولبندی را حتی برای ابعاد دیگر هم تعمیم داد. ضرب ستاره در فضای فاز ناجابجایی به صورت (۱۵-۲) تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= f(x, p) e^{1/2 \bar{\partial}_\mu^x \theta^{\mu\nu} \bar{\partial}_\nu^x + 1/2 \bar{\partial}_\mu^p \bar{\theta}^{\mu\nu} \bar{\partial}_\nu^p} g(x, p) \\ &= f(x, p) g(x, p) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \bar{\partial}_\mu^x f(x, p) \bar{\partial}_\nu^x g(x, p) \\ &\quad + \frac{i}{2} \bar{\theta}^{\mu\nu} \bar{\partial}_\mu^p f(x, p) \bar{\partial}_\nu^p g(x, p) + O(\theta^2). \end{aligned} \quad (15-2)$$

ضرب ستاره در فضای فاز ناجابجایی به صورت $\ast = \exp(i\bar{\theta}(\bar{\partial}_{p_i} \bar{\partial}_{p_j} - \bar{\partial}_{p_j} \bar{\partial}_{p_i})/2)$ تعریف می‌شود. در این مورد، ضرب موپال با تغییر باپ جایگزین می‌شود یعنی با انتخاب $H(\hat{x}, \hat{p})$ بجای $H(x, p)$ ضرب $\ast$ به ضرب معمولی تبدیل می‌شود که از رابطه‌ی (۱۶-۲) تبعیت می‌کند

$$H(\hat{x}^\mu, \hat{p}^\nu) = H(\lambda x^\mu - \frac{1}{2\lambda} \theta \varepsilon^{\mu\nu} p^\nu, \lambda p^\mu + \frac{1}{2\lambda} \bar{\theta} \varepsilon^{\mu\nu} x^\nu) \quad (16-2)$$

از معادله (۱۰-۲) تعمیمی از تغییر باپ برای ضرب ستاره در فضای فاز را بدست می‌آوریم و ما باید در فضای فاز ناجابجایی عملگرهای $\hat{x}$ و $\hat{p}$ را به صورت (۱۷-۲) تغییر دهیم [۲۱]

$$\hat{x}^\mu \rightarrow \lambda x^\mu - \frac{1}{2\lambda} \theta \varepsilon^{\mu\nu} p^\nu, \quad \hat{p}^\mu \rightarrow \lambda p^\mu + \frac{1}{2\lambda} \bar{\theta} \varepsilon^{\mu\nu} x^\nu. \quad (17-2)$$

که در آن ثابت λ عامل مقیاس‌بندی است. همچنین ضرب خارجی در فضای فاز ناجابجایی به فرم $\bar{\theta} \bar{\theta} I = 4\lambda^2 (\lambda^2 - 1) I$ از طرفی $\bar{r} = \lambda \bar{r} + \frac{\bar{\theta} \times \bar{p}}{2\lambda}$, $\bar{p} = \lambda \bar{p} - \frac{\bar{\theta} \times \bar{r}}{2\lambda}$ ، تعریف می‌شود. که در آن I ماتریس یکانی است. پارامترهای $\bar{\theta}$ ، λ و θ فضای فاز NC را معرفی می‌کند

کنند [۲۲]. بنابراین در نظریه‌ی NC فقط دو تا از آن‌ها آزادند و آن‌ها ممکن است به مقیاس‌های انرژی و فضا بستگی داشته باشند. زمانی که پارامتر فضای ناجابجایی حد $\theta \rightarrow 0$ را میل می‌کند، نتایج ناجابجایی بدست می‌آید و فضای ناجابجایی مورد خاصی از فضای فاز ناجابجایی است که اگر $\theta, \bar{\theta} \rightarrow 0$ ، $\lambda = 1$ فضای فاز ناجابجایی اثرات فضای جابجایی معمولی را بازیابی می‌کند.

فصل سوم

اثرات میدان های الکترومغناطیسی

آهارونف-بوهم و آهارونف-کشر و نظریه-

ی ترازهای لاندو

۳-۱ تاریخچه اثر ارینبرگ-مسیدای-آهارونف-بوهم (EHAB)^{۱۳}

دیوید جوزف بوهم وی یک فیزیکدان نظری با ایده‌های نوآورانه در نظریه کوانتومی، فلسفه بود. که به عنوان یکی از مهم‌ترین فیزیکدانان نظری قرن ۲۰ مطرح شد [۲۳]. در سال ۱۹۵۹ بوهم به همراه دانشجوی دوره‌ی دکترای خود، آقای آهارونف "اثر آهارونف-بوهم" را کشف کردند، این اثر نشان می‌دهد چگونه میدان مغناطیسی می‌تواند با وجود پتانسیل برداری غیرصفر، بر روی ناحیه‌ای از فضا که به میدان دسترسی ندارد تاثیر بگذارد. تاکنون با ریاضیات ساده‌ای نشان داده شد، که پتانسیل برداری مغناطیسی می‌تواند اثرات فیزیکی واقعی (کوانتومی) را نیز داشته باشد. در سال ۱۹۴۹ برای اولین بار ارینبرگ^{۱۴} و مسیدای^{۱۵} در مقاله‌ای تحت عنوان "ضریب شکست در اپتیک الکترون و اصول دینامیک" وجود پدیده-های تداخلی کوانتومی قابل مشاهده را پیش‌بینی کردند [۲۴] و اثرات مشابه‌ای بعداً توسط آهارونف^{۱۶} و بوهم^{۱۷} در مقاله‌ای با عنوان "اهمیت پتانسیل‌های الکترومغناطیسی در نظریه کوانتومی"، در سال ۱۹۵۹ منتشر شد [۲۵]، همچنین شماتیکی از این اثر را می‌توانید در تصویر (۱-۳) ملاحظه نمایید. میدان‌های الکترومغناطیسی توصیف کاملی از الکترومغناطیس در مکانیک کوانتومی ارائه نمی‌دهند. حتی با صرف نظر از میدان و بدون اعمال هیچ نیرویی، پتانسیل‌های الکترومغناطیسی ممکن است از اثرات کوانتومی قابل اندازه‌گیری بدست آیند

^{۱۳} Ehrenberg-Siday-Aharonov-Bohm

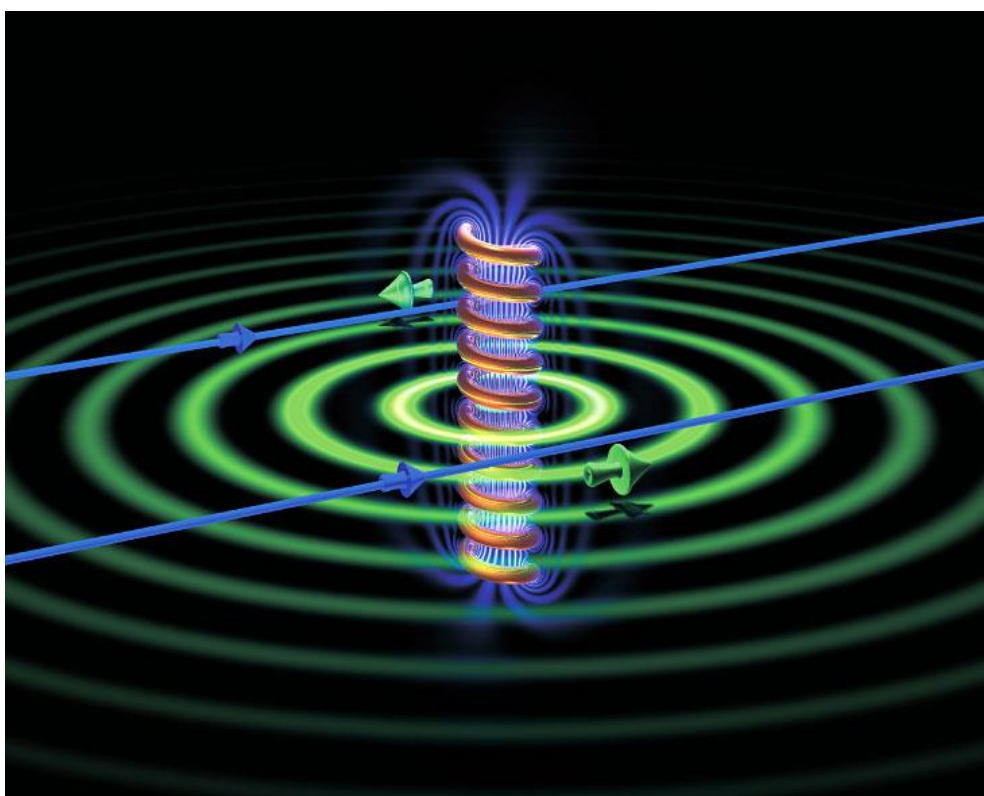
^{۱۴} Werner Ehrenberg

^{۱۵} Raymond Siday

^{۱۶} Yakir Aharonov

^{۱۷} David Bohm

بنابراین اثرات توپولوژیکی و هندسی را می‌توان در چارچوب دینامیک کوانتومی از ذرات باردار و خنثی در حضور میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی بررسی کرد [۲۶].



شکل ۱-۳ اثر آهارونف-بوهم -الکترون‌ها(خط آبی) در حال عبور از سلونوئید حامل جریان

این اثر برای اولین بار به طور تجربی در سال ۱۹۶۰ توسط چمپز^{۱۸} مشاهده شد [۲۷]. بررسی کلی آن را می‌توان در کار پشکین^{۱۹} و تِنَمورا^{۲۰} در سال ۱۹۸۹ مشاهده کرد [۲۸]. بعد از مقاله

^{۱۸} Robert G. Chambers

^{۱۹} Peshkin

^{۲۰} Tonomura

تأثیرگذار آهارونف و بوهیم، فازهای غیرقابل‌انتگرال‌گیری دیگری کشف شدند، در اثر آهارونف-کشر [۲۹]، یک دوقطبی مغناطیسی خنثی در حال چرخش دور یک بار خطی، از طریق ناحیه آزاد نیرو، یک فاز غیرقابل‌انتگرال‌گیری بوجود می‌آورد. در واقع یک ذره خنثی کوانتومی با گشتاور دوقطبی مغناطیسی غیرصفر در حال حرکت در اطراف سیم باردار و موازی با آن، یک فاز غیرپاشنده موضعی برای تابع موج بوجود می‌آورد. این اثر در آزمایش تداخل نوترونی [۳۰] و در تداخل اتمی رامزی^{۲۱} خنثی [۳۱] مشاهده شده است. عوامل فازی AB و AC غیرقابل-انتگرال‌گیری توصیف اساسی از الکترودینامیک دوقطبی‌های باردار و مغناطیسی در حال حرکت را ارائه می‌دهند. بعدها آقایان هی-مککلر در سال ۱۹۹۳ [۳۲] و در سال ۱۹۹۴ بطور مجزا آقای ویلکن [۳۳] وجود فاز کوانتومی را پیش‌بینی کردند که توسط تابع موج یک ذره خنثی که با گشتاور دوقطبی الکتریکی غیرصفر، عبور می‌کند. آزمایش ساده برای اثر هی-مککلر-ویلکن (HMW)^{۲۲} برای تک‌قطبی‌های مغناطیسی توسط آقای وای^{۲۳} و همکارانش پیشنهاد شد [۳۴]. در این اثر گشتاور دوقطبی الکتریکی ناشی از ذره خنثی توسط میدان الکتریکی سیم باردار و میدان مغناطیسی یکنواخت با زاویه‌ای به میدان الکتریکی اعمال شده است. دو طرح دیگر تجربی برای فاز هی-مککلر-ویلکن توسط دالینگ^{۲۴} و همکارانش ارائه شد [۳۵].

^{۲۱} Ramsey

^{۲۲} He-McKellar -Wilkins

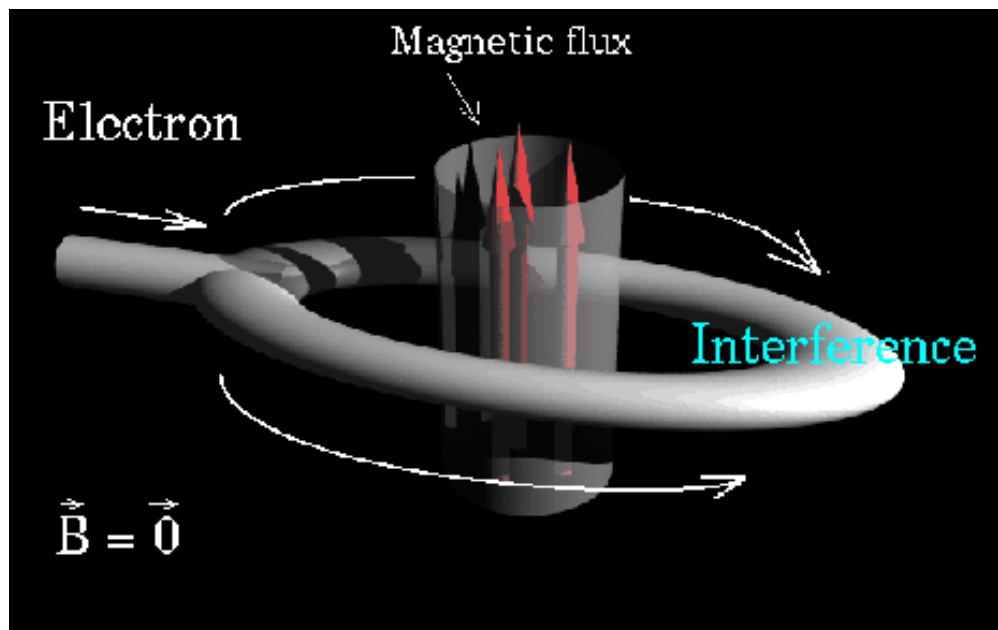
^{۲۳} Wei

^{۲۴} Dowling

۲-۳ اثرات کوانتومی برای دوقطبی‌ها

اثر آهارونف-بوهم، گاهی به نام اثر ارینبرگ-مسیدای-آهارونف-بوهم (EHAB)^{۲۰} عنوان شده است، پدیده‌ای کاملاً مکانیک کوانتومی محض است که در آن یک ذره باردار الکتریکی تحت تاثیر میدان الکترومغناطیسی ($B \cdot E$) قرار می‌گیرد، با وجود این که ذره محدود به ناحیه‌ای است که در آن هر دو میدان مغناطیسی B و میدان الکتریکی E صفر هستند، تحت مکانیسم جفت‌شدگی پتانسیل الکترومغناطیسی با فازهای پیچیده و ترکیبی از تابع موج ذره باردار است. شایع‌ترین عنوانی که تاکنون با آن شرح داده شده است، گاهی اوقات به نام اثر آهارونف-بوهم (AB) سلونوئید است، این اثر زمانی صورت می‌گیرد که یک ذره باردار کوانتومی در حضور پتانسیل برداری در حجمی از فضا با میدان برابر صفر، در حال حرکت دایره‌ای شکل حول یک شار مغناطیسی است که منجر به یک فاز غیرپاشنده توپولوژیکی کوانتومی در تابع موج آن می‌شود. این ذره در اطراف یک سلونوئید بی‌نهایت دراز عبور می‌کند (شکل (۲-۳) را ببینید) در نتیجه‌ی میدان مغناطیسی محصور یک تغییر فاز را تجربه می‌کند، به عبارت دیگر برخلاف دیدگاه فیزیک کلاسیک در مکانیک کوانتومی، بخشی از فضا که هیچ میدانی در آن وجود ندارد خواص فیزیکی سیستم هنوز به پتانسیل برداری وابسته است. این تغییر فاز بطور تجربی مشاهده شده است.

^{۲۰} Ehrenberg-Siday-Aharonov-Bohm



شکل ۲-۳ الکترونها در حال گردش حول شار محصور شده در حجمی از فضا با میدان مغناطیسی صفر

از نظر مفهومی اثر آهارونف-بوهم به سه دلیل مهم است، زیرا قبل از ظهور مکانیک کوانتومی توانست از نو با فرمولبندی ریاضیاتی نظریه الکترومغناطیس کلاسیک از نظریه پیمانه‌ای، بدون نتایج فیزیکی، آن را استدلال کند. ایده AB آزمایش شد و در دیدگاه تجربی نشان داده شد که این موضوع فقط مسئله فلسفی نیست. این سه موضوع عبارت است از :

۱. آیا پتانسیل‌ها فیزیکی هستند یا فقط ابزار مناسبی برای محاسبه میدان‌های نیرو هستند؛

۲. آیا دارای اصول اساسی هستند؛

۳. اصل توپولوژیکی.

اثر AB به عنوان یکی از "عجایب هفتگانه جهان مکانیک کوانتومی" توسط مجله "Newscientist" انتخاب شد. اثرات عجیب هفتگانه‌ی جهان کوانتومی عبارت است از:

۱. دوگانگی موج-ذره (Wave-particle duality)

۲. اثر هملت (The Hamlet effect).

۳. اثر کازیمیر (The Casimir effect).

۴. آزمایش بومب الیتزور-ویدمن (The Elitzur-Vaidman bomb-tester).

۵. در همتیدگی (Entanglement).

۶. اثر آهارونوف-بوهیم (The Aharonov-Bohm).

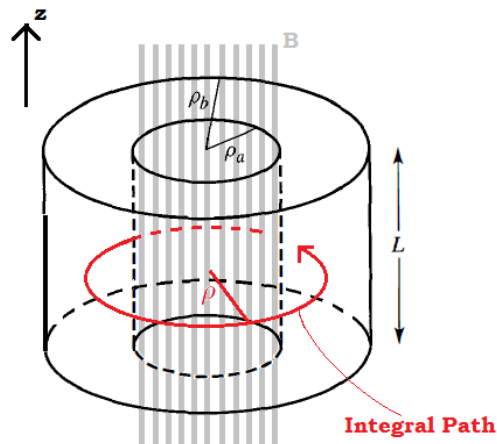
۷. ماده‌ی معجزه (Miracle Matter).

همچنین اثر آهارونوف-بوهیم مغناطیسی در ترازهای انرژی‌های مقید و پراکندگی سطح مقطع-ها نیز وجود دارد، اما این موارد بطور تجربی مورد آزمایش قرار نگرفته است. پدیده "آهارونوف-بوهیم الکتریکی" نیز پیش‌بینی شده بود، که در آن یک ذره باردار توسط نواحی با پتانسیل‌های الکتریکی مختلف تحت تاثیر قرار می‌گیرد اما میدان الکتریکی صفر است، در سال ۱۹۹۸ بطور تجربی مشاهده شده است. اثر "آهارونوف-بوهیم مولکولی" برای حرکت هسته‌ای در نواحی چندگانه پیشنهاد شد، تنها به نوع مقادیر مکانی در طول مسیر ذره بستگی دارد این مورد هیچ تایید تجربی ندارد. اثر آهارونوف-بوهیم نشان می‌دهد که میدان‌های E و B مکانی شامل اطلاعات کامل در مورد میدان مغناطیسی نیستند و پتانسیل چهار بردار الکترومغناطیسی (A, Φ) ، باید بجای آن استفاده شود. به عبارت دیگر، اثر آهارونوف-بوهیم نشان می‌دهد پتانسیل الکترومغناطیسی، Φ و A فیزیکی هستند. پیش از این ممکن بود استدلال شود که فقط میدان‌های الکترومغناطیسی، فیزیکی هستند، و پتانسیل‌های الکترومغناطیسی

صرفاً ساختار ریاضیاتی دارند. بنابراین اثر آهارونف-بوهم تائیدی بر این دیدگاه دارد که نیروها یک روش ناقصی برای فرمولبندی فیزیکی هستند و انرژی پتانسیل باید به جای آن استفاده کرد. در مقابل، هنگامی که تنها از چهار پتانسیل الکترومغناطیسی استفاده می‌کنیم، این اثر فقط به پتانسیل ناحیه‌ای که در آن ذره آزمون مجاز است بستگی دارد.

۳-۲-۱) حل مسئله با استفاده از انتگرال مسیر فاینمن

از دیدگاه دینامیک انتگرال مسیر فاینمن، میدان پتانسیل بطور مستقیم فاز تابع موج الکترون را تغییر می‌دهد و تغییراتی که در فاز وجود دارد منجر به کوانتش قابل اندازه‌گیری می‌شود. در ادامه روابط ریاضی انتگرال مسیر فاینمن را برای فاز نسبی اثر آهارونف-بوهم ارائه می‌دهیم. فرض می‌کنیم ذره‌ای با بار e می‌تواند به طور کامل در داخل پوسته‌ی استوانه‌ای با دیواره‌های صلب، محصور شود، با شعاع داخلی ρ_a و شعاع خارجی ρ_b را در نظر می‌گیریم در ناحیه $\rho_a - \rho_b = 0$ میدان مغناطیسی ثابت در راستای z وجود دارد و در فضای ρ_a تا ρ_b الکترونی محبوس شده است. باید تابع موج روی دیواره‌های داخلی ($\rho = \rho_a$) و خارجی ($\rho = \rho_b$) و نیز در بالا و پایین صفر باشد. با در نظر گرفتن حالتی که پوسته‌ی استوانه‌ای میدان مغناطیسی را در برگرفته، آرایش مسئله را قدری تغییر می‌دهیم. با تصور این که یک سلونوئید به گونه‌ای در وسط حفره قرار داده‌ایم که هیچ میدان مغناطیسی‌ای به ناحیه‌ی $\rho_b > \rho$ نفوذ نمی‌کند. شرایط مرزی تابع موج مانند قبل است، زیرا هنوز دیواره‌ها صلب در نظر گرفته شده‌اند (شکل (۳-۳) را ببینید).



شکل ۳-۳ نمایی از محدوده‌ی قابل انتگرالگیری مسیر ذره

به صورت شهودی می‌توان حدس زد که طیف انرژی تغییر نمی‌کند، زیرا ناحیه‌ی $B \neq 0$ برای ذره‌ی بارداری که داخل پوسته حرکت می‌کند کاملاً غیرقابل دسترس است. اما مکانیک کوانتومی به ما می‌گوید این حدس درست نیست. اگرچه در داخل پوسته میدان مغناطیسی صفر است، اما پتانسیل برداری A غیرصفر می‌باشد؛ می‌توان با استفاده از قضیه‌ی استوکس بدست آورد که پتانسیل برداری مورد نیاز برای تولید میدان مغناطیسی $B(\hat{z})$ برابر است با $A = (\frac{B\rho_a^2}{2\rho})\hat{\phi}$. این رابطه با استفاده از فرمول زیر بدست آمده:

$\oint A \cdot dr = \int \vec{B} \cdot \hat{n} dS \rightarrow \vec{A} 2\pi\rho = B\pi\rho_a^2 \hat{\phi}$ که بردار یک‌ه‌ی در جهت افزایش زاویه‌ای سمتی است. برای حل معادله‌ی مورد نظر و بدست آوردن ویژه مقادیر انرژی برای این مسئله‌ی جدید، تنها لازم است که گرادیان ∇ را با $\nabla - (ie/\hbar c)A$ عوض کنیم. در مختصات استوانه‌ای، که در آن $\vec{\nabla} = \hat{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\phi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$ ، می‌توان این کار با عوض کردن مشتق

جزئی نسبت به $\hat{\phi}$ انجام داد: $\frac{\partial}{\partial \phi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{ieB\rho_a^2}{2\hbar c}$. تغییر قابل مشاهده‌ای در طیف انرژی

ایجاد می‌کند. این نتیجه‌ای کاملاً قابل توجه است زیرا ذره هیچ گونه تماسی با میدان مغناطیسی ندارد، نیروی لورنتزی که در این مسئله به ذره وارد می‌آید برابر صفر است، ولی سطوح انرژی به این امر بستگی دارد که میدان مغناطیسی در ناحیه حفره که غیرقابل دسترس ذره است، وجود داشته باشد یا خیر. مسئله‌ای که در اینجا مورد بررسی قرار گرفت نوع حالت مقید مسئله‌ای است که معمولاً تحت عنوان اثر آهارونف-بوهیم نامیده می‌شود. ذره-ای باردار را در نظر بگیرید که از بالا یا پایین استوانه‌ی غیرقابل نفوذ بسیار بلندی عبور می‌کند. داخل استوانه، میدان مغناطیسی‌ای به موازات محور استوانه و عمود بر صفحه وجود دارد. بنابراین مسیرهای بالایی و پائینی ذره، یک شار مغناطیسی را در برمی‌گیرد. هدف ما بررسی این موضوع است که چگونه احتمال یافتن ذره در ناحیه‌ی تداخل، به این شار بستگی دارد. فرض کنید a و b نقاط نمونه‌ای، به ترتیب در ناحیه چشمه و ناحیه تداخل، باشند. از مکانیک کلاسیک می‌دانیم لاگرانژی در حضور میدان مغناطیسی را می‌توان به صورت زیر از لاگرانژی در غیاب میدان مغناطیسی، بدست آورد:

$$L_{class}^{(0)} + \frac{e}{c} \frac{dx}{dt} \cdot A \leftarrow L_{class}^{(0)} = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$$

از طرفی می‌دانیم که کنش برابرست با :

$$S = \int L \cdot dt$$

پس اگر کنش بین دو نقطه n و $n-1$ در غیاب میدان مغناطیسی به صورت

$$\dot{S}(n, n-1)$$

باشد. تغییر متناظر در کنش، برای یک تکه معین از مسیر که از ۱ به ۲ می‌رود

عبارت است از

$$S^{(0)}(n, n-1) \rightarrow S^{(0)}(n, n-1) + \frac{e}{c} \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left(\frac{dx}{dt} \right) \cdot A \quad (1-3)$$

اما انتگرال مسیر فاینمن آخر را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{e}{c} \int_{t_{n-1}}^{t_n} dt \left(\frac{dx}{dt} \right) \cdot A = \frac{e}{c} \int_{x_{n-1}}^{x_n} A \cdot ds$$

است. بنابراین هنگامی که کل این تغییر را برای رفتن از ۱ تا ۲ بخواهیم، باید تغییر (۲-۳)

را انجام دهیم

$$\Pi \exp \left[\frac{iS^{(0)}(n, n-1)}{\hbar} \right] \rightarrow \left\{ \Pi \exp \left[\frac{iS^{(0)}(n, n-1)}{\hbar} \right] \right\} \exp \left(\frac{ie}{\hbar c} \int_{x_1}^{x_N} A \cdot ds \right) \quad (2-3)$$

تمام این ها برای یک مسیر معین است، نظیر مسیری که از بالای استوانه می گذرد. سهم مربوط به $A \neq 0$ تمام مسیرهایی که از بالای استوانه عبور می کند، با یک ضریب فاز مشترک داده می شود و به همین صورت سهم همه ی مسیرهایی که از پائین استوانه می گذرد، به صورت یک ضریب فاز مشترک دیگر، ضرب می شود. پس اگر بخواهیم از x_1 تا x_n جابجا شویم، در این صورت کنش در نما ظاهر می شود

$$\Pi_n \exp \left[i \frac{\dot{S}(n, n-1)}{\hbar} \right] \rightarrow \left\{ \Pi_n \exp \left[i \frac{\dot{S}(n, n-1)}{\hbar} \right] \times \exp \left[\frac{ie}{\hbar c} \int_{x_1}^{x_n} \vec{A} \cdot d\vec{s} \right] \right\} \quad (3-3)$$

برای کل مسیر یعنی مجموع مسیر ۱ و مسیر ۲ خواهیم داشت

$$\int_1 D(x, t) e^{i \frac{\dot{S}(x, t)}{\hbar}} + \int_2 D(x, t) e^{i \frac{\dot{S}(x, t)}{\hbar}} \Rightarrow (x, t) \rightarrow (dx_1 dx_2 \dots dx_n, dt_1 dt_2 \dots dt_n) \quad (4-3)$$

احتمال یافتن ذره در ناحیه تداخلی بستگی به مربع اندازه ی کل دامنه گذار و بنابراین بستگی به اختلاف بین سهم مسیرهای بالا و پایین دارد. همچنین ملاحظه می شود در حضور میدان

مغناطیسی دو جمله فازی وارد شده است. اگر بخواهیم یک مسیر بسته تعریف کنیم باید فاز

مسیر ۲ را تغییر دهیم، بنابراین اختلاف فاز حاصل از حضور B برابر می‌شود با

$$\left[\left(\frac{ie}{\hbar c} \right) \int_{x_1}^{x_N} A \cdot ds \right]_{up} - \left[\left(\frac{ie}{\hbar c} \right) \int_{x_1}^{x_N} A \cdot ds \right]_{down} = \left(\frac{e}{\hbar c} \right) \oint A \cdot ds = \left(\frac{e}{\hbar c} \right) \Phi_B = \phi_{AB}, \quad (5-3)$$

که از کوانتیده بودن شار مغناطیسی ($\phi_{AB} = 2n\pi$) ناشی می‌شود. که در آن Φ_B معرف شار

مغناطیسی داخل استوانه غیرقابل نفوذ است. یعنی آن که با تغییر شدت میدان مغناطیسی،

مولفه‌ای سینوسی در احتمال مشاهده‌ی ذره در ناحیه تداخلی وجود خواهد داشت، با دوره‌ی

$$\frac{2\pi\hbar c}{|e|} = 4.135 \times 10^{-7} \text{ Gauss} - \text{cm}^2 \text{ : تناوبی که با واحد شار مغناطیسی داده شده است:}$$

۳-۲-۲) اشاره‌ای بر آزمایش تداخلی طراحی شده اثر آهارونوف-بوهم

در سال ۱۹۶۰ چمبرز در آزمایشگاه فیزیک ویلز^{۲۶} در دانشگاه بریستول در انگلیس بعد از این

که اثر AB در مقاله‌ی آقایان آهارونوف و استاد مشاور دکترای خود، آقای بوهم توصیف شد

آزمایشی را طراحی کرد که موفق به تأیید تجربی ایده‌ی اثر AB شد. در حقیقت بسیاری از

فیزیکدانان ادعا کردند که نمی‌توان این اثر را اندازه‌گیری کرد و مانند پتانسیل‌ها، تنها

ساختار ریاضی دارند، بنابراین ساختار تجربی مورد نیاز است. آهارونوف و بوهم با مشورت

فیزیکدان تجربی، آقای چمبرز^{۲۷} در مورد مقاله‌شان، برای اثبات آن آزمایشی انجام دادند. تنها

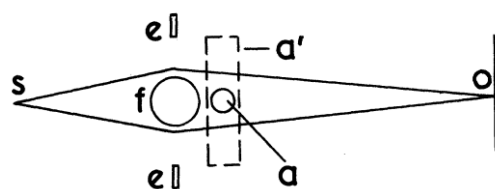
یک سال بعد، چمبرز آزمایش را ارائه داد و این اثر را اثبات کرد. سال‌ها بعد، این اثر با

آزمایش‌های بیشتر و دقیق‌تر مورد تأیید قرار گرفت و تا امروز فقط تعداد کمی از افراد به

^{۲۶} H. H. Wills

^{۲۷} Chambers G. Robert

وجود این اثر تردید دارند. در این بخش آزمایش چمبز را توصیف می‌کنیم. همچنین آزمایش پیشرفته‌تری در سال ۱۹۸۶ با هندسه متفاوتی با آهنربای حلقوی انجام شد. هندسه‌ای که در آزمایش چمبز طراحی شد و اولین مسئله‌ای که در طراحی این آزمایش وجود داشت این که چگونه پرتوهای الکترون با فاصله مناسبی جدا شود. انسجام فضایی الکترون ها با اندازه چشمه الکترون تعیین می‌شود. اگر منبع بی‌نهایت کوچک باشد، جداسازی پرتوها را می‌توان به دلخواه انجام داد، اما در یک آزمایش واقعی، جداسازی به اندازه متناهی چشمه محدود می‌شود. برای انجام یک آزمایش موفق، ما به یک انسجام فضایی کافی برای جدا کردن پرتوها به اندازه مناسب نیاز داریم که برای این کار یک آهنربا بین آن ها قرار می‌دهیم. وی در مقاله‌ی خود این گونه اظهار داشت که: در یک آزمایش تداخلی، الکترون در حال عبور از اطراف شار مغناطیسی که در بین دو پرتو محصور شده است (در ناحیه‌ی a) باید طرح تداخلی را تغییر دهد، حتی اگرچه خود پرتوها فقط در نواحی میدان آزاد عبور می‌کنند. این نظریه تغییرات n را به ازای شار محصور Φ برابر با nhc/e پیش‌بینی می‌کند؛ می‌توان دوباره واحد شار خنثی $hc/e = 4.135 \times 10^{-7} \text{ gauss cm}^2$ را بدست آورد. قبلا نتایجی مشابه با استفاده از عامل نیمه‌کلاسیک اشاره شده بود، اما شاید آن نویسندگان تاکید قطعی و قابل-توجهی از این نتایج ذاتی نداشتند و به کار خودشان توجه چندانی نکردند. هندسه آزمایش در شکل (۳-۴) نشان داده شده است:



شکل ۳-۴ دیاگرام شماتیک تداخلی، با منبع S، صفحه‌ی مشاهده‌ی O و e، f دو منشوری، و نواحی میدان از a و a' گسترش یافته‌اند و محدود شده‌اند.

بطور کلی این اثر، یک اثر غیرموضعی است که در آن جسم فیزیکی در راستای یک حلقه بسته در ناحیه آزاد از میدان حرکت می‌کند و در نتیجه دچار یک تغییر فیزیکی می‌شود. باریکه الکترونی که در اطراف سلونوئید عبور می‌کنند به دو قسمت تقسیم می‌شوند که درون آن میدان مغناطیسی محصور شده است. ناحیه بیرونی سلونوئید فاقد میدان مغناطیسی است، اما با این حال، تغییری در طرح تداخلی بر روی نمایشگر، پشت سلونوئید (صفحه نمایش) را می‌توان پس از تغییر میدان مغناطیسی مشاهده کرد. بدیهی است ابتدا به طور آزمایشی، این مسئله را بررسی کنیم، این اثر در حاشیه سیستم، که میدان‌ها در ناحیه‌ی a جایگزین نشده‌اند اما تا آن جا گسترش یافته است، یعنی، همانطور که در شکل (۳-۴) نشان داده شده است همه‌ی ناحیه‌ی a' را در بر گرفته است. در مجموع باعث تغییر طیف سیاه و سفید کوانتومی (فریز) توسط شار محصور می‌شود که ناشی از انحنای مسیر الکترون توسط میدان می‌باشد. در آزمایش باریکه‌ای از الکترون‌ها که توسط میکروسکوپ الکترونی تولید می‌شوند، مورد استفاده قرار می‌دهیم. طول موج الکترون کوچکتر از ۱ nm است، که بسیار کوچکتر از اندازه سلونوئید است، بنابراین نمی‌توان از پراش صرفنظر کرد. پرتو توسط دو منشوری الکتروستاتیکی به دو قسمت شکافته می‌شود. دو منشوری متشکل از الیاف کوارتز آلومینیومی f و دو صفحه فلزی e است. زاویه موثر دو منشوری را می‌توان با اعمال پتانسیل مثبت از فیبر

f تغییر داد. ما فرض می‌کنیم بی‌نهایت دراز باشد بنابراین میدان مغناطیسی بیرون صفر است. در شرایط تجربی، این مطلب را نمی‌توان بدست آورد. بنابراین چمبرز دو آزمایش برای تشخیص اثرات میدان مغناطیسی ناشی از سلونوئید، که از اثر آهارونف-بوهم نشأت می‌گیرد انجام داد. در آزمایش اول، الکترون‌ها از طریق میدان مغناطیسی با گسترش به ناحیه a' حرکت می‌کنند. در آزمایش دوم، میدان مغناطیسی به ناحیه‌ای که در شکل (۳-۴) نشان داده شده است، محدود می‌باشد. در وضعیتی که ما انتظار اثر آهارونف-بوهم را داریم به جای استفاده از سلونوئید، (که سخت است) یک شارب آهنربا، خیلی کوچک با عرض $1\ \mu\text{m}$ و طول $0.5\ \text{mm}$ ساخت. برای اطلاعات بیشتر برای چگونگی و نحوه‌ی آزمایش تجربی این اثر می‌توانید به مرجع [۲۷] این پایان‌نامه مراجعه نمایید.

۳-۳ تاریخچه‌ی اثر آهارونف-کشر^{۲۸}

آقای آهارون کشر^{۲۹}، عضو موسسه مطالعات کوانتومی است. آهارون کشر بدلیل کار فیزیک ذرات و مبانی نظریه کوانتومی خود مشهور شده است بویژه، در موضوعات تراز نظریه میدان ابرتقارن، همراه با کار خود بر روی اصول نظریه‌ی میدان و گرانش کوانتومی مشغول بوده است. ۲۵ سال بعد از پیش‌بینی اثر آهارونف-بوهم، در سال ۱۹۸۴، آهارونف و کشر اثر دوگانه آن را پیش‌بینی کردند. اثر آهارونف-کشر بطور تجربی در سال ۱۹۸۹ توسط آقایان کیمینو، آپت و کلین^{۳۰} مشاهده شده است. این مقاله تحت عنوان "مشاهده‌ی تغییر فاز

^{۲۸} Aharonov-Casher effect

^{۲۹} Aharon Casher

^{۳۰} A. Cimmino ، G. I. Opat ، A. G. Klein

توپولوژی آهارونف-کشر با استفاده از تداخلگر نوترونی " مطرح شد. همچنین در سال ۱۹۹۵ کارن و هیندز^{۳۱} در مقاله‌ای با عنوان "فاز آهارونف-کشر در سیستم‌های اتمی" این اثر را تأیید کردند [۳۶]. در هر دو اثر ذره از یک ناحیه لوله‌ای شکل از فضا خارج می‌شود، اما هیچ نیرویی روی آن اعمال نمی‌شود. با این حال، یک فاز کوانتومی قابل اندازه‌گیری بدست می‌آید. در اثر آهارونف-بوهم ذره باردار است و لوله شامل شار مغناطیسی است. مثال دیگر از اثر به هم پیوسته اثر آهارونف-کشر (AC) است. دوم اینکه اثر دوگانه‌ی اثر AB می‌باشد، که ناشی از برهم کنش بین گشتاور مغناطیسی ذرات μ و میدان الکتریکی E است. بار الکتریکی خطی که در راستای محور z قرار دارد میدان الکتریکی یکنواختی را در صفحه‌ی $x-y$ تولید می‌کند و آن را تقویت می‌کند. نقاط دوقطبی در جهت $+z$ هستند. هامیلتونین اثر آهارونف-کشر در صفحه‌ی $x-y$ از رابطه‌ی (۳-۶) حاصل می‌شود [۳۷]

$$H_{AC} = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \mu \vec{A}_E)_{x-y}^2, \quad (۳-۶)$$

که در آن m جرم دوقطبی است و $\vec{A}_E$ ، پتانسیل برداری الکتریکی برابر است با:

$$\vec{A}_E = \frac{1}{c^2} (-E_y, E_x)$$

و میدان الکتریکی حاصل از بار خطی

$$E = (E_y, E_x) = E_x(x, y)\hat{x} + E_y(x, y)\hat{y}, \quad (۳-۷)$$

c سرعت نور می‌باشد. در مقایسه با اثر AB، μ نقش e را بازی می‌کند. در اثر AC پیمانه

تکانه‌ی p معادل است با:

^{۳۱} Karin Sangster, E. A. Hinds

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \mu \vec{A}_E = \vec{p} - \frac{1}{c^2} \mu \times E, \quad (۸-۳)$$

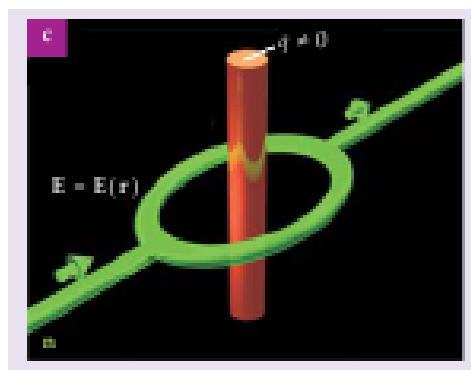
تغییر فاز آهارونف-کشر به فرم معادله‌ی (۹-۳) بدست می‌آید

$$\Delta\Phi_{AC} = \frac{1}{\hbar c^2} \oint_C (E \times \mu) \cdot dl = \frac{\mu}{\hbar} \oint_C \vec{A}_E \cdot dl = \frac{\mu \lambda}{\hbar \varepsilon_0 c^2}, \quad (۹-۳)$$

که در آن λ چگالی بار خطی است (بار خطی تقسیم بر واحد طول) و در C مسیر حلقه‌ی تداخلی محصور شده است. فاز آهارونف-کشر مستقل از سرعت و مسیر فضایی ذره است. تغییر فاز کل در راستای مسیر بسته فقط به تعداد سیم‌پیچ n بستگی دارد:

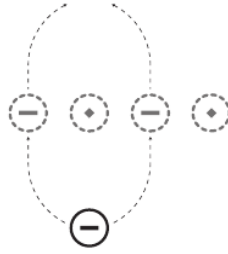
$$\Phi_{AC} = n \Delta\Phi_{AC} \quad (۱۰-۳)$$

$\Delta\Phi_{AC}$ تغییر فاز تابع موج ذره‌ی منفرد است. هر دو فاز به دامنه‌ی شارها (برای فاز AC به چگالی بار) وابسته‌اند و به شکل و اندازه مسیر بستگی ندارد. اختلاف مهم بین این دو پدیده را که می‌توان بر آن تاکید کرد: سرچشمه اثر AB از برهم کنش پتانسیل بردار-جریان است و طبیعت نیروی آزاد دارد. پس، ممکن است که با قرار گرفتن حتی در ناحیه‌ی آزاد-میدان مغناطیسی ایجاد شود.



شکل ۳-۵ طرحی از اثر آهارونف-کشر

اثر AC از برهم کنش اسپین-اوربیت ناشی می‌شود، بنابراین میدان الکتریکی واقعی ضروری است. هم اثر AB و AC اولین بار برای پرتوهای الکترونی و نوترونی، در خلا مشاهده شده است. آزمایش AC با نوترون‌ها با آزمایش AB (برداری) مغناطیسی برای الکترون‌ها مقایسه شده است. در اثر آهارونف-کشر ذره خنثی که یک گشتاور دوقطبی مغناطیسی دارد و لوله شامل بار خطی است. بطور مختصر اثر AC را توضیح می‌دهیم و استدلال می‌کنیم دوگانه اثر AB است. با یک نسخه دوبعدی اثر AB شروع می‌کنیم. شکل (۳-۶) را در نظر بگیرید که یک الکترون در حال حرکت در یک صفحه و همچنین یک شاره یعنی یک ناحیه کوچک از شاره مغناطیسی (بیرون از صفحه) که الکترون خارج از آن است.



شکل ۳-۶ الکترون و شار، هر کدام در موقعیت خاصی از دو بسته موج قرار گرفته‌اند؛ بسته موج الکترون فقط یکی از بسته موج شار را در میان خود محصور کرده است

در شکل (۳-۶) شار در دو موقعیت کوانتومی است. در ابتدا شار و الکترون را در یک حالت ضربی $|\psi_{in}\rangle$ هستند: $|\psi_{in}\rangle = 1/2(|f_1\rangle + |f_2\rangle) \otimes (|e_1\rangle + |e_2\rangle)$. معرف بسته موج دو شار هستند $|e_1\rangle$ و $|e_2\rangle$ بسته‌های موج الکترون هستند. رابطه فازی بین $|e_1\rangle$ و $|e_2\rangle$ وابسته به مکان شار است:

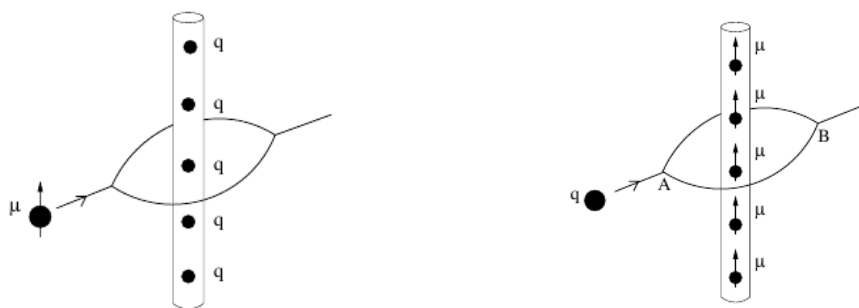
$$|\psi_{fin}\rangle = \frac{1}{2}|f_1\rangle \otimes (|e_1\rangle + |e_2\rangle) + \frac{1}{2}|f_2\rangle \otimes (|e_1\rangle + e^{i\phi_{AB}}|e_2\rangle) \quad (۳-۱۱)$$

ϕ_{AB} فاز آهارونف-بوهم است و $|f_2\rangle$ معرف موقعیت شار بین دو بسته موج الکترون است. حالا اگر ما همیشه موقعیت شار و رابطه فاز الکترون را اندازه بگیریم اثر آهارونف-بوهم را به این صورت تعریف می‌کنیم: اگر شار بین دو مسیر الکترون قرار بگیرد الکترون رابطه فازی را بدست می‌آورد. اما می‌توانیم $|\psi_{fin}\rangle$ به شکل (۳-۱۲) بنویسیم:

$$|\psi_{fin}\rangle = 1/2(|f_1\rangle + |f_2\rangle) \otimes |e_1\rangle + 1/2(|f_1\rangle + e^{i\phi_{AB}}|f_2\rangle) \otimes |e_2\rangle \quad (۳-۱۲)$$

این رابطه زمانی کاربرد دارد که همیشه رابطه فاز یک شار و موقعیت الکترون را اندازه‌گیری کنیم، اکنون اثری را پیدا کردیم که مشابه به اثر آهارونف-بوهم است: شار از رابطه فازی

ϕ_{AB} بدست می‌آید اگر و فقط اگر الکترون از بین دو بسته موج شاره عبور کند. در واقع این اثرات معادل هستند. در دو بعد، دو اثر با هم معادل هستند، اما دو راه نامساوی برای رفتن از دو تا سه بعد وجود دارد در حالی که توپولوژی (از مسیر یک ذره‌ی محصور) حفظ شود: یا الکترون یک ذره باقی می‌ماند و یا شاره وارد لوله شار می‌شود، یا شاره یک ذره (ذره خنثی با یک گشتاور مغناطیسی) باقی می‌ماند و الکترون به یک بار خطی تبدیل می‌شود. این دو راه نابرابر به ترتیب مربوط به اثرات AB و AC، هستند. آنها معادل هم نیستند، اما دوگانه هم هستند، یعنی با تبدیل بار الکتریکی و شار مغناطیسی معادل می‌شوند. در اثر AB، الکترون در یک میدان مغناطیسی عبور نمی‌کند؛ در اثر AC، ذره خنثی در یک میدان الکتریکی عبور می‌کند. به هر حال هیچ نیرویی بر روی ذره وجود ندارد و اگر فقط ذره خنثی دارای یک بار خطی مستقیم و با گشتاور مغناطیسی موازی باشد از این رو فقط برای بار خطی اثر AB و AC صادق هستند. آهارونف و کشر اولین بار لاگرانژین نانسیتی را برای یک ذره خنثی، گشتاور مغناطیسی یعنی μ که در حال برهمکنش با یک ذره باردار e است را بدست آوردند. در واحد گوسی، $L = 1/2mv^2 + 1/2MV^2 + e/cA(r-R) \cdot (v-V)$ که در آن M ، R ، V و m ، v ، r به ترتیب جرم، مکان و سرعت ذره خنثی و باردار هستند، و پتانسیل برداری $A(r-R)$ است: $A(r-R) = \frac{\mu \times (r-R)}{|r-R|^3}$. توجه داشته باشید L تحت تبدیل r, v و R, V ناوردا می‌باشد. پس L یکسان است چه الکترون با یک گشتاور مغناطیسی خطی (اثر AB) برهم کنش داشته باشد یا یک گشتاور مغناطیسی با یک الکترون خطی برهمکنش (اثر AC) داشته باشد (شکل (۷-۳) را ببینید).



شکل ۷-۳ اثر آهارونف-کشر سمت چپ تصویر و اثر آهارونف-بوهم سمت راست تصویر

با این حال، اگر ما با اثر AC شروع کنیم و گشتاور مغناطیسی را با الکترون، و تمام الکترونها را با گشتاور مغناطیسی اولیه، جایگزین کنیم، گشتاور مغناطیسی در همه نقاط در همان جهت است. از این رو بار باید خطی راست و بی‌نهایت از الکترون داشته باشیم بطور مستقیم می‌بینیم تنها برای یک بار خطی راست این دو اثر دوگانه‌ی هم هستند.

۳-۴ نظریه‌ی کوانتش لاندو

لاندو، فیزیکدان شوروی، در سال ۱۹۳۰ یکی از نخستین مثال‌های هندسه‌ی ناجابجایی فضا را مورد تحلیل و بررسی قرار داد. لاندو در آن زمان در حال بررسی حرکت الکترون با میدان مغناطیسی قوی عمود بر صفحه بود. حرکت ذره باردار با بار الکتریکی e منجر به ایجاد جریان ev می‌شود که در آن v سرعت ذره است. بر اساس قانون فارادی، در حضور B ، این جریان با نیروی eBv بر روی ذره و مسیر آن و همچنین عمود بر میدان اعمال می‌شود و مسیر ذره انحنا می‌یابد و به فرم مدار دایره‌ای شکل درمی‌آید. در مکانیک کوانتومی، کوانتش لاندو [۳۸] به عنوان کوانتش مدار سیکلوترون برای حرکت ذره باردار در میدان‌های مغناطیسی شناخته شده است، زمانی که این ذره با یک میدان مغناطیسی خارجی در حد غیرنسبیتی برهم کنش می‌کند، یعنی، ذرات باردار فقط می‌توانند با مقادیر انرژی گسسته مدارها را اشغال کنند، که

ترازهای لاندو می‌نامند [۳۹] که ترازهای لاندو واگن هستند. ساده‌ترین مدل برای توصیف آن اثر کوانتومی هال است [۴۰]. ترازهای لاندو، برای سطوح دو بعدی مختلف با توجه به این که در چندین موضوع فیزیکی مطالعه شده است [۴۱] و چگالش بوز-اینشتین مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

۳-۴-۱ ترازهای لاندو در فضای جابجایی کلاسیکی

در این بخش، ترازهای انرژی لاندو برای فضای جابجایی (کلاسیک) را بررسی می‌کنیم. ذره باردار (الکترون) را در یک میدان مغناطیسی یکنواخت در نظر می‌گیریم. برای ساده‌سازی این مجموعه، اجازه دهید ذرات غیر برهم کنشی با بار q و اسپین S که در مساحت $A = L_x L_y$ فقط در صفحه‌ی $x-y$ (در یک سیستم دو بعدی) حرکت می‌کنند در نظر بگیریم که تحت تاثیر میدان مغناطیسی در راستای جهت محور z قرار گرفته است. میدان مغناطیسی بطور یکنواخت عمود بر صفحه، می‌باشد، هامیلتونین این سیستم به شکل زیر است:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2, \quad (۱۳-۳)$$

در اینجا، $\hat{P}$ عملگر تکانه کانونی و $\vec{A}$ پتانسیل برداری الکترومغناطیسی است، که با عبارت زیر به میدان مغناطیسی مرتبط است: $\vec{B} = \text{rot} \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \hat{k}$. برای پتانسیل برداری، با میدان مغناطیسی معین آزادی انتخاب وجود دارد. از طرفی، هامیلتونین ناورد می‌باشد، به این معنا است که با اضافه کردن گرادیان میدان اسکالر $\vec{A}$ متناظر با تغییر فاز کلی تابع موج توسط مقدار میدان اسکالر است. پتانسیل برداری که می‌تواند میدان مغناطیسی را در راستای z تولید کند یکتا نیست، از طرفی، میدان وقتی اثر دارد که خیلی بزرگ باشد، این

اثر در میدان‌های بسیار قوی مانند سیکلوترون‌ها و ستاره‌های نوترونی مشاهده شده است.

خواص فیزیکی بر انتخاب پیمانه موثر نیستند. پیمانه متقارن به فرم: $\vec{A} = (-\frac{yB}{2}, \frac{xB}{2}, 0)$ می‌باشد. از طرفی می‌توانیم پتانسیل دیگری هم تعریف کنیم، برای سادگی در محاسبه، پیمانه لاندو را انتخاب می‌کنیم، که به فرم $\vec{A} = (0, Bx, 0)$ است. بنابراین دو پتانسیل برداری وجود دارد که می‌توانند میدان مغناطیسی یکسانی را تولید کنند. اختلاف این دو پتانسیل برداری در تبدیل پیمانه‌ای $\vec{A}(r) = \vec{A}'(r) - \vec{\nabla}f$ می‌باشد و بر اساس این پیمانه میدان مغناطیسی را بدست می‌آوریم

$$B = \nabla \times A = \nabla \times (A' - \nabla f), \quad A = (0, xB, 0), \quad A = (-yB, 0, 0) \quad (14-3)$$

این دو پتانسیل برداری $\vec{A}$ می‌توانند تبدیل‌های پیمانه‌ای متفاوتی را ایجاد کنند. با در نظر گرفتن رفتار اختلالی پتانسیل برداری $V(r)$ ، تکانه کانونی به فرم $\hat{P} \equiv \hbar \nabla / i - qA/c$ خواهد بود، در این حالت جمله جنبشی عملگر هامیلتونی برای الکترون در میدان مغناطیسی ثابت به صورت $(15-3)$ بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} \left(p - \frac{e}{c} A \right)^2 &= \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + \left(p_y + \frac{eB}{c\hbar} x \right)^2 + p_z^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2m} \left(p_x^2 + p_y^2 + \frac{2eB}{c\hbar} x p_y + \left(\frac{eB}{c\hbar} \right)^2 x^2 + p_z^2 \right), \end{aligned} \quad (15-3)$$

بنابراین تابع موج در صفحه‌ی x - y را به صورت $\psi(x, y) = e^{iky} v(x)$ انتخاب می‌کنیم. در ادامه اجازه دهید مسئله ویژه مقداری را برای هامیلتونین به فرم $(16-3)$ بنویسیم

$$\frac{1}{2m} \left\{ -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} + \left(\frac{eB}{c} \right)^2 \left(x + \frac{\hbar ck}{eB} \right)^2 \right\} v(x) = E v(x) \quad (16-3)$$

معادله فوق معادله نوسانگر هارمونیک کوانتومی است با این تفاوت که مبدا یا نقطه تعادل به

جای نقطه‌ی $x=0$ به مکان $x_0 = \frac{\hbar k c}{eB}$ تغییر می‌یابد، بنابراین داریم: $\hbar k = \frac{x_0 eB}{c}$ و تابع

موج در صفحه‌ی $x-y$: $\psi(x, y) = e^{ieBx_0 y / \hbar c} v(x - x_0)$ که در آن $v(x - x_0)$ ویژه جواب

نوسانگر هماهنگ با نقطه تعادل $x=0$ است. نیروی گریز از مرکز باید معادل با نیروی

لورنتس باشد $\frac{mv^2}{r} = \frac{|e|\hbar v}{c} B$ که شعاع لارمور یا شعاع سیکلترون است. $r_{\text{cyclotron}} = \frac{mc v}{|eB|}$

بسامد زاویه‌ای حرکت سیکلترون برابر است با: $\omega_{\text{cyclotron}} = 2\pi \frac{v}{2\pi r} = \frac{|eB|\hbar}{mc}$. همانطور که

ملاحظه می‌کنید به شعاع سیکلترون وابسته نیست، و ویژه مقادیر انرژی در راستای x از

رابطه‌ی $E_n = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2})$ تبعیت می‌کند ($n \geq 0$). این ویژه مقادیر انرژی، ترازهای انرژی

کوانتیزه هستند، ترازهای لاندو (انرژی نوسانگر هماهنگ کوانتومی) می‌نامند. به عبارت دیگر

قرار گرفتن هر تابع موجی با مقدار یکسان n را، ترازهای لاندو می‌نامند.

فصل چهارم

تصحیحات اثر آهارونف-بوهم بر روی

ترازهای لاندو معادلات غیرنسبیتی و

معادلات نسبیتی در مکانیک ناجابجایی

۴-۱ توصیف ذرات غیرنسبیتی و نسبیتی

از نظر فیزیکی برای بررسی ذرات نسبیتی و غیرنسبیتی می‌توان گفت، انرژی کل ذره غیرنسبیتی از مرتبه انرژی سکون است و انرژی کل ذره نسبیتی خیلی خیلی بزرگتر از انرژی سکون است. در حالت انرژی خیلی بالا این نسبت برابر است با: $10^6 - 10^7 \frac{E}{E_0}$. زیرا هم می‌تواند خیلی بزرگ باشد در حد سیارات و.. یا اینکه خیلی کوچک، در حد ذرات بنیادی مانند پروتون و.. . ذره غیرنسبیتی، را در معادله شرودینگر قرار می‌دهیم. ذره نسبیتی با اسپین ۰ با معادله کلاین-گوردن و ذره با اسپین ۱ با معادله پروکا و ذره با اسپین ۱/۲ با معادله دیراک بیان می‌شود.

۴-۲ تصحیحات ذرات غیرنسبیتی در حضور میدان آهارونوف-بوهم با

پتانسیل کلینبرگ

اثرات میدان آهارانوف-بوهم در دینامیک کوانتومی برای ذرات غیرنسبیتی در حضور پتانسیل کلینبرگ در چارچوب معادله شرودینگر دوبعدی را بدست می‌آوریم و مسئله را در مکانیسم مکانیک کوانتومی فضای فاز ناجابجایی با روش تحلیلی شبه-دقیق [۴۱] تجزیه و تحلیل کردیم. پتانسیل کلینبرگ شامل یک ترم هارمونیک بعلاوه‌ی پتانسیل کرنل می‌باشد. پتانسیل کلینبرگ شامل پتانسیل نوسانگر هارمونیک و پتانسیل کرنل است و بنابراین اساس ایجاد انگیزه برای مطالعات فیزیک ذرات را تشکیل می‌دهد. در مورد β و γ کوچک، وضعیت منجر به یک مسئله‌ی نوسانگر هارمونیک می‌شود و برای α و β کوچک منجر به مسئله‌ی کولنی خواهد شد.

۴-۲-۱) تصحیحات ذرات غیرنسبیتی با میدان AB و با پتانسیل

کلینبرگ

ذره باردار با بار e در حال حرکت در دو بعد و در معرض یک میدان مغناطیسی در امتداد محور z قرار دارد، با در نظر گرفتن پیمانه‌ی متقارن، از رابطه‌ی (۴-۱) پیروی می‌کنند

$$\left\{ \left(\vec{P} - \frac{e}{2c} (\vec{B} \times \vec{r}) \right)^2 - 2m[E_{n,l}^{(C)} - V(\vec{r})] \right\} \psi_{n,l}^{(C)}(\vec{r}) = 0, \quad (۴-۱)$$

نماد C معرف فضای جابجایی است. در اینجا، ما قصد داریم به بررسی ترکیبی از ترم‌های کرنل و هارمونیک پردازیم، یعنی پتانسیل کلینبرگ که از رابطه‌ی (۴-۲) تبعیت می‌کند [۴۲ و ۴۳]

$$V(\vec{r}) = \alpha r^2 + \beta r - \gamma / r, \quad (۴-۲)$$

معادله شرودینگر تحت پتانسیل کلینبرگ و میدان آهارونف-بوهام در فضای جابجایی با اعمال تغییر متغیر $\psi_{n,l}^{(C)}(\vec{r}) = e^{il^{(C)}\phi} R_{n,l}^{(C)}(r)$ تغییر مناسب دیگر و پاره‌ای محاسبات به فرم (۴-۳) بدست می‌آید

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 U_{n,l}^{(C)}(r)}{dr^2} + \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{4} - (l^{(C)})^2 \right) - r^2 \left(2m\alpha + \frac{e^2 B^2}{4c^2} \right) - r(2m\beta) \right. \\ & \left. + \frac{(2m\gamma)}{r} + \left(\frac{eBl^{(C)}}{c} + 2mE_{n,l}^{(C)} \right) \right\} U_{n,l}^{(C)}(r) = 0, \end{aligned} \quad (۴-۳)$$

با انتخاب

$$A_1^{(C)} = 1/4 - (l^{(C)})^2, \quad (۴-۴الف)$$

$$A_2^{(C)} = 2m\gamma, \quad (۴-۴ب)$$

$$A_3^{(C)} = -2mE_{n,l}^{(C)} - eBl^{(C)} / c, \quad (پ-۴-۴)$$

$$A_4^{(C)} = 2m\beta, \quad (ت-۴-۴)$$

$$A_5^{(C)} = 2m\alpha + e^2 B^2 / 4c^2, \quad (ث-۴-۴)$$

با در نظر گرفتن ثابت های بدست آمده در معادلات (۴-۴) به فرم فشرده تر (۵-۴) می‌رسیم

$$\frac{d^2 U_{n,l}^{(C)}(r)}{dr^2} + (-A_3^{(C)} - A_4^{(C)}r - A_5^{(C)}r^2 + \frac{A_2^{(C)}}{r} + \frac{A_1^{(C)}}{r^2})U_{n,l}^{(C)}(r) = 0. \quad (۵-۴)$$

برای حل مسئله فوق راه حل (۶-۴) را ارائه می‌دهیم [۴۴]

$$U_{n,l}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\mu} e^{pr+1/2qr^2}, \quad (۶-۴)$$

همچنین بدست خواهیم آورد

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\mu)(n+\mu-1)r^{n+\mu-2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1}p(n+\mu-1)r^{n+\mu-2} + \\ & \sum_{n=2}^{\infty} [2qa_{n-2}(n+\mu-2) + qa_{n-2} + p^2a_{n-2}]r^{n+\mu-2} \\ & + \sum_{n=3}^{\infty} 2pqa_{n-3}r^{n+\mu-2} + \sum_{n=4}^{\infty} q^2a_{n-4}r^{n+\mu-2} \\ & - A_3 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}r^{n+\mu-2} + A_4 \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n+\mu-2} + A_2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}r^{n+\mu-2} - \\ & A_4 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-3}r^{n+\mu-2} - A_5 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-4}r^{n+\mu-2} = 0. \end{aligned} \quad (۷-۴)$$

از سوی دیگر، این مجموعه باید به ازای $n = n_r$ محدود باشد که منجر به معادلات (۸-۴)

خواهد شد

$$\mu^{(C)}(\mu^{(C)} - 1) + A_1^{(C)} = 0 \quad (الف-۸-۴)$$

$$(q^{(C)})^2 - A_3^{(C)} = 0 \quad (4-8\text{ب})$$

$$2p^{(C)}q^{(C)} - A_4^{(C)} = 0 \quad (4-8\text{پ})$$

$$2q^{(C)}(n + \mu^{(C)} - 2) + q^{(C)} + (p^{(C)})^2 - A_3^{(C)} = 0 \quad (4-8\text{ت})$$

$$2p^{(C)}(n + \mu^{(C)} - 1) + A_2^{(C)} = 0 \quad (4-8\text{ث})$$

که در آن ضرایب p_C, q_C, μ_C پارامترهای فضای جابجایی هستند. حد فیزیکی قابل قبول برای p_C, q_C با علامت منفی و μ_C با علامت مثبت می باشد. بنابراین، با استفاده از معادلات (4-8الف)، (4-8پ)، (4-8ت) و (4-4) ترازهای انرژی، از رابطه‌ی زیر پیروی می کند

$$E_{n,l}^{(C)} = \frac{1}{2m} \{ 2(l^{(C)} + n - 1) \sqrt{2m\alpha + e^2 B^2 / 4c^2} - \frac{(m^2 \beta^2)}{(2m\alpha + e^2 B^2 / 4c^2)} - eBl^{(C)} / c \}. \quad (4-9)$$

این امر می تواند به بررسی جالبی از نتایج معادله (4-5) برای حالت خاصی از $A_2 = A_4 = 0$ بدست آید، که مربوط به معادله نوسانگر هارمونیک است. در جدول (4-1) طیف انرژی گزارش شده است. با استفاده از معادله‌ی (4-8پ) و (4-8ث) ما به رابطه‌ی

$$\gamma^{(CS)} = \frac{\beta(n + l^{(C)} - 1/2)}{\sqrt{2m\alpha + e^2 B^2 / 4c^2}} \quad (4-10)$$

می‌رسیم که در آن پارامتر ثابت $\gamma^{(CS)}$ مربوط به پتانسیل کلینبرگ در فضای جابجایی (با نماد CS^{22}) می باشد و باید رابطه‌ی قیدی فوق را برآورده سازد.

²² Commutative Space

جدول ۴-۱ ویژه مقادیر انرژی ذرات غیرنسبیتی در فضای جابجایی به ازای ثابت های
 $(\alpha = 0.25, \beta = 0.8, m = 0.6)$

$ n, l\rangle$	$E_{n,l} (B = 0.124)$	$ n, l\rangle$	$E_{n,l} (B = 1)$
$ 1, 0\rangle$	-۰,۶۳۱۹۰۳۲۱۳۴	$ 1, 0\rangle$	-۰,۳۴۹۰۹۰۹۰۹۲
$ 2, 0\rangle$	۰,۲۸۶۷۹۷۵۵۹۸	$ 2, 0\rangle$	۰,۸۸۶۹۴۲۱۷۲۵
$ 2, 1\rangle$	۱,۱۰۲۱۶۵۰۰۰	$ 2, 1\rangle$	۱,۲۸۹۶۴۱۹۲۰
$ 3, 0\rangle$	۱,۲۰۵۴۹۸۳۳۳	$ 3, 0\rangle$	۲,۱۲۲۹۷۵۲۵۳
$ 3, 1\rangle$	۲,۰۲۰۸۶۵۷۷۳	$ 3, 1\rangle$	۲,۵۲۵۶۷۵۰۰۲
$ 3, 2\rangle$	۲,۸۳۶۲۳۳۲۱۳	$ 3, 2\rangle$	۲,۹۲۸۳۷۴۷۴۸

به ازای دو مقدار متفاوت میدان مغناطیسی، انرژی سیستم را بدست آوردیم نتایج بدست آمده در جدول (۴-۱) نشان می دهد که با افزایش میدان، ترازهای لاندو هم افزایش می یابد.

۴-۳ تصحیحات طیف نسبیتی بوزونی در حضور میدان آهارونف-بوهیم با

پتانسیل نوسانی

معادله کلاین-گوردن به مطالعه ذرات اسپین صفر می پردازد. حل معادله کلاین-گوردن برای برخی کنش ها مورد توجه زیادی قرار گرفته است. هدف ما مطالعه ی نوسانگر کلاین-گوردن با پتانسیل نوسانی در حضور و غیاب میدان مغناطیسی در فضای جابجایی و

ناجایابی و فضای فاز ناجایابی می‌باشد. بنابراین طیف انرژی و تابع موج مربوطه را بدست می‌آوریم.

۴-۳-۱) تصحیحات بوزون های نسبیتی اسپین صفر در غیاب میدان مغناطیسی در فضای جابجایی

نوسانگر کلاین-گوردن دو بعدی از معادله‌ی زیر پیروی می‌کند

$$\left[-\nabla^2 + (m + S(r))^2\right] \psi_{n,l}(r) = [\varepsilon - V(r)]^2 \psi_{n,l}(r) \quad (4-11)$$

که در آن پتانسیل برداری $V(r)$ برابر با پتانسیل اسکالر $S(r)$ است. برهم کنش شبه نوسانی اولین بار در سال ۱۹۶۰ توسط گلدمان [۴۵] و غیره مورد بررسی قرار گرفت. با معرفی

پتانسیل شبه نوسانی به فرم $V(r) = \frac{kr_e^2}{8} \left(\frac{r}{r_e} - \frac{r_e}{r} \right)^2$ ، حالات ارتعاشی چرخشی، شبه

نوسانگر مولکول‌های دو اتمی را توضیح می‌دهد [۴۶]. فرم عمومی‌تر این پتانسیل از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند

$$V(r) = \alpha r^2 + \frac{\beta}{r^2} + \gamma, \quad (4-12)$$

که در آن $\gamma = \frac{-kr_e^2}{4}$ ، $\beta = \left(\frac{kr_e^4}{8} \right)$ ، $\alpha = \left(\frac{k}{8} \right)$ و $V_0 = \frac{kr_e^2}{8}$ انرژی تفکیک بین دو اتم در

جامدات می‌باشد، با نیروی ثابت k و r_e طول مقید تعادل می‌باشد و β ثابت حقیقی مثبت است. اگر $\beta=0$ منجر به پتانسیل نوسانی با ثابتهای α و γ خواهد شد. برای حل این مسئله در مختصات استوانه‌ای، با انتخاب تابع موج و تغییر متغیر مناسب، را اعمال خواهیم کرد.

ترازهای انرژی نسبیتی در فضای جابجایی برای معادله‌ی نوسانگر کلاین-گوردن با پتانسیل

نوسانی در غیاب میدان مغناطیسی از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند

$$(2n+1+2|l|)\sqrt{(m^2\omega^2+2\alpha(\varepsilon_{n,l}+m))-2m\omega\hbar-\varepsilon_{n,l}^2+m^2}+2\gamma(\varepsilon_{n,l}+m)=0. \quad (۱۳-۴)$$

ترازهای لاندو را در معادله (۱۳-۴) نشان داده‌ایم، مقادیر عددی انرژی نیز در جدول (۲-۴)

نشان داده شده است.

جدول ۲-۴- ترازهای انرژی بوزونهای نسبیتی در فضای جابجایی در غیاب میدان مغناطیسی

به ازای مقادیر ثابت $(m=\alpha=\gamma=1, \omega=0.1)$

State $ n,l\rangle$	$\varepsilon_{n,l}$
$ 1,0\rangle$	۶,۱۴۷۰۸۸۲۶۴
$ 2,0\rangle$	۷,۷۵۷۴۱۵۹۷۵
$ 2,1\rangle$	۸,۴۸۹۴۲۰۹۳۷
$ 3,0\rangle$	۹,۱۸۵۵۷۸۲۹۹
$ 3,1\rangle$	۹,۸۵۱۹۵۴۳۹۳
$ 3,2\rangle$	۱۰,۴۹۳۰۲۷۰۲

در جدول (۲-۴) ویژه مقادیر یا ترازهای لاندو را در غیاب میدان مغناطیسی بدست آوردیم،

مشاهده می‌کنید با افزایش اعداد کوانتومی ترازهای انرژی هم افزایش می‌یابد و انرژی سیستم

مثبت‌تر می‌شود.

۴-۳-۲) تابع موج بوزون های نسبیتی در حضور پتانسیل نوسانی

از روش نیکیفارو-یووارو، که در این مورد از تابع موج حالت ویژه آن استفاده نمودیم، ویژه

توابع نسبیتی مربوط به این بخش نیز از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند

$$\psi_n(r) = r^{\frac{2l+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{(m^2\omega^2 + 2\alpha E_{n,l} + 2\alpha m)}r^2} L_n^l(\sqrt{(m^2\omega^2 + 2\alpha E_{n,l} + 2\alpha m)}r^2), \quad (14-4)$$

۴-۳-۳) تصحیحات بوزون های نسبیتی اسپین صفر در حضور میدان

مغناطیسی در فضای جابجایی

معادله نوسانگر کلاین-گوردن در حضور میدان مغناطیسی در راستای جهت محور z ، را مورد

مطالعه قرار می‌دهیم. این معادله، در فضای جابجایی با B یکنواخت و ثابت در حضور پتانسیل

نوسانی از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند

$$\{p^2 + r^2(m^2\omega^2 + \frac{e^2 B^2}{4c^2} + 2\alpha\epsilon_{n,l} + 2\alpha m) + \frac{eBL_z}{c} - 2m\omega\hbar - \epsilon_{n,l}^2 + m^2 + 2\gamma\epsilon_{n,l} + 2\gamma m\}\psi_{n,l}(r) = 0, \quad (15-4)$$

در این بخش، ترازهای لاندو برای بوزون های نسبیتی اسپین صفر با اعمال میدان مغناطیسی

در فضای جابجایی از عبارت (۱۶-۴) تبعیت می‌کند

$$(2n+1+l)\sqrt{(m^2\omega^2 + \frac{e^2 B^2}{c^2} + 2\alpha\epsilon_{n,l} + 2\alpha m) - m\omega\hbar + \frac{eBL_z}{2c} - \frac{\epsilon_{n,l}^2}{2}} + \frac{m^2}{2} + \gamma\epsilon_{n,l} + \gamma m = 0. \quad (16-4)$$

طیف نسبیتی انرژی را در معادله (۴-۱۶) نشان داده‌ایم، که به ازای میدان مغناطیسی در نظر گرفته شده ترازهای لاندو شکافته خواهد شد که با افزایش میدان مغناطیسی شکافتگی طیف انرژی بیشتر خواهد شد. مقادیر عددی نیز در جدول (۴-۳) نشان داده شده است. که با صرفنظر از اثرات تکانه‌ی زاویه‌ای با نتایج بخش قبلی بدست آمده یکسان و قابل توجه است.

جدول ۴-۳- ترازهای انرژی بوزونهای نسبیتی در فضای جابجایی در حضور میدان مغناطیسی به ازای مقادیر ثابت $(e = m = \alpha = \beta = \gamma = 1, B = 0.0798840465,)$.

State $ n, l\rangle$	$\mathcal{E}_{n,l}$
$ 1, 0\rangle$	۶,۱۴۷۲۳۳۵۸۲
$ 2, 0\rangle$	۷,۷۵۷۵۸۷۲۲۹
$ 2, 1\rangle$	۸,۴۹۶۱۳۱۰۶۳
$ 3, 0\rangle$	۹,۱۸۵۷۶۴۷۰۱
$ 3, 1\rangle$	۹,۸۵۷۷۴۱۶۶۲
$ 3, 2\rangle$	۱۰,۵۰۳۷۰۴۰۵

در حضور میدان مغناطیسی اثر زیمن قابل مشاهده خواهد بود. همچنین میدان B منجر به شکافتگی خطوط انرژی با فاصله‌های بسیار نزدیک به هم خواهد شد و ملاحظه می‌کنید در حضور میدان، ترازهای لاندو مطابق انتظار افزایش یافته‌اند.

۴-۳-۴) تابع موج بوزون های نسبیتی در حضور پتانسیل شبه نوسانی

در حضور میدان مغناطیسی

بطور مشابه در این بخش، ویژه توابع نسبیتی در حضور میدان مغناطیسی نیز از رابطه ی زیر

پیروی می کند

$$\psi_{n,l}(r) = r^{\frac{2l+1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{m^2\omega^2 + e^2B^2/c^2 + 2\alpha\epsilon_{n,l} + 2\alpha m} r^2} \times L_n^l(\sqrt{m^2\omega^2 + e^2B^2/c^2 + 2\alpha\epsilon_{n,l} + 2\alpha m} r^2), \quad (17-4)$$

۴-۳-۵) تصحیحات بوزونهای نسبیتی اسپین صفر در حضور پتانسیل

شبه نوسانی در فضای ناجابجایی

معادله ی نوسانگر کلاین-گوردن در حضور میدان مغناطیسی خارجی در فضای ناجابجایی را

می توانیم به فرم زیر بنویسیم

$$\begin{aligned} & ((\vec{p} - e \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{2c}) + im\omega r)((\vec{p} - e \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{2c}) - im\omega r + 2(\epsilon_{n,l} + m)V(r)) * \psi_{n,l}^{(NC)}(r) \\ & = \{\epsilon_{n,l}^2 - m^2\} \psi_{n,l}^{(NC)}(r), \end{aligned} \quad (18-4)$$

با استفاده تعریف مناسب ضرب مووال-ویل در فضای ناجابجایی که در رابطه (۲-۷) معرفی

شد و با اعمال تغییر باپ، می توانیم ضرب ستاره ی در فضای ناجابجایی را به ضرب فضای

جابجایی تغییر دهیم. بنابراین می توانیم معادله (۴-۱۸) را به این فرم بنویسیم

$$\begin{aligned}
& \{[(\vec{p} - \frac{e}{2c}(\vec{B} \times \vec{r}) - \frac{e}{4c\hbar}(B \times (\theta \times P)) + im\omega r + \frac{im\omega}{2\hbar}(\theta \times P))(\vec{p} \\
& - \frac{e}{2c}(\vec{B} \times \vec{r}) - \frac{e}{4c\hbar}(B \times (\theta \times P)) - im\omega r - \frac{im\omega}{2\hbar}(\theta \times P))]\} \\
& + 2(\varepsilon_{n,l} + m)V(\vec{r} + \frac{\theta \times P}{2\hbar})\} \psi_{n,l}^{(NC)}(r) = (\varepsilon_{n,l}^2 - m^2)\psi_{n,l}^{(NC)}(r),
\end{aligned} \quad (19-4)$$

با انجام پاره‌ای محاسبات، رابطه‌ی (۱۹-۴) به فرم زیر بدست خواهد آمد

$$\begin{aligned}
& \{(1 + \frac{eB\theta}{2c\hbar} + (\frac{eB\theta}{4c\hbar})^2 + (\frac{m\omega\theta}{2\hbar})^2)p^2 + (m^2\omega^2 + (\frac{eB}{2c})^2 \\
& + 2\alpha\varepsilon_{n,l} + 2\alpha m)r^2 - ((\varepsilon_{n,l} + m)2\alpha\theta + \frac{eB}{c} + \frac{m^2\omega^2\theta}{\hbar} + \frac{e^2B^2\theta}{4c^2\hbar})L_z \\
& - 2m\omega\hbar - \frac{m\omega eB\theta}{2c} - \varepsilon_{n,l}^2 + m^2 + 2\gamma\varepsilon_{n,l} + 2\gamma m\} \psi_{n,l}(r) = 0,
\end{aligned} \quad (20-4)$$

$$\text{چنانچه ضریب } L_z \text{ را صفر انتخاب کنیم: } (2\alpha\varepsilon_{n,l} + 2\alpha m)\theta + \frac{eB}{c} + \frac{m^2\omega^2\theta}{\hbar} + \frac{e^2B^2\theta}{4c^2\hbar} = 0$$

میدان مغناطیسی بحرانی بدست می‌آید که به ازای این میدان مغناطیسی بحرانی اثرات شکافتگی انرژی ناشی از مولفه‌ی سوم اندازه حرکت زاویه‌ای دیده نمی‌شود (شکافتگی از بین می‌رود) این میدان مغناطیسی بحرانی از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند

$$B_{Critical} = \frac{\pm 2\hbar \pm 2\sqrt{\hbar^2 - 2\alpha\theta^2\hbar(\varepsilon + m) - \theta^2 m^2 \omega^2}}{e\theta} c. \quad (21-4)$$

بر حسب پارامتر فضای ناجابجایی، داریم

$$\theta = -\frac{4eB_c c \hbar}{8\alpha(\varepsilon + m) + 4m^2\omega^2 c^2 + e^2 B_c^2}, \quad (22-4)$$

مقادیر میدان مغناطیسی در جدول (۴-۴) به فرم زیر گزارش داده‌ایم.

جدول ۴-۴- مقادیر محاسبه شده برای میدان مغناطیسی به ازای پارامترهای θ مختلف در فضای ناجابجایی

ω	θ	$B_{Critical}$
۰,۱	۰	۰
۰,۱	۰,۰۰۱	-۰,۰۱۴۳۳۲۹۲۶۶,-۳۹۹۹,۹۸۵۶۶۷
۰,۱	۰,۰۹	-۱,۳۲۹۷۴۳۶۹۰,-۴۳,۱۱۴۷۰۰۷۵
۰,۱	۰,۰۵	-۰,۷۲۳۱۸۱۱۵۳۳,-۷۹,۲۷۶۸۱۸۸۵
۰,۱	۰,۰۱	-۰,۱۴۳۳۸۰۱۴۷۹,-۳۹۹,۸۵۶۶۱۹۹

در جدول (۴-۴) به ازای پارامترهای ناجابجایی متفاوت میدان مغناطیسی بدست آوردیم که به ازای این میدان بحرانی سیستم به حالت و شرایط اولیه یعنی بدون میدان نگاشته خواهد شد که منجر به نتیجه‌ی جالبی شده است.

با انتخاب تغییر متغیر (۴-۲۳) در معادله‌ی (۴-۲۰)

$$\zeta = 1 + \frac{eB\theta}{2c\hbar} + \left(\frac{eB\theta}{4c\hbar}\right)^2 + \left(\frac{m\omega\theta}{2\hbar}\right)^2,$$

$$\xi = m^2\omega^2 + \left(\frac{eB}{2c}\right)^2 + 2\alpha\varepsilon_{n,l} + 2\alpha m, \quad (۴-۲۳)$$

$$\wp = -(2\alpha(\varepsilon + m)\theta + \frac{eB}{c} + \frac{m^2\omega^2\theta}{\hbar} + \frac{e^2B^2\theta}{4c^2\hbar})L_z - 2m\omega\hbar$$

$$- \frac{m\omega eB\theta}{2c} - \varepsilon_{n,l}^2 + m^2 + 2\gamma\varepsilon_{n,l} + 2\gamma m,$$

با اعمال تغییر متغیرهای مناسب ترازهای انرژی بوزونهای نسبیتی در فضای ناجابجایی با

پتانسیل نوسانی از عبارت زیر تبعیت می‌کند

$$(2n+1)\sqrt{(m^2\omega^2 + (\frac{eB}{2c})^2 + 2\alpha\varepsilon_{n,l} + 2\alpha m)(1 + \frac{eB\theta}{2c\hbar} + (\frac{eB\theta}{4c\hbar})^2 + (\frac{m\omega\theta}{2\hbar})^2)} \\ - (2\alpha\theta(\varepsilon + m) + \frac{eB}{2c} + \frac{m^2\omega^2\theta}{2\hbar} + \frac{e^2B^2\theta}{8c^2\hbar})l - m\omega\hbar - \frac{m\omega eB\theta}{4c} - \frac{\varepsilon_{n,l}^2}{2} + \frac{m^2}{2} + \gamma\varepsilon_{n,l} + \gamma m + \\ \sqrt{(m^2\omega^2 + (\frac{eB}{2c})^2 + 2\alpha\varepsilon_{n,l} + 2\alpha m)(l^2(1 + 2\alpha(\varepsilon + m) + \frac{eB\theta}{2c\hbar} + (\frac{eB\theta}{4c\hbar})^2 + (\frac{m\omega\theta}{2\hbar})^2))} = 0, \\ (24-4)$$

ما طیف نسبیتی انرژی را در رابطه (۲۴-۴) بدست آوردیم، سپس مقایسه عددی را در جدول

(۵-۴) نشان داده‌ایم.

جدول ۵-۴ ویژه مقادیر انرژی بوزون های نسبیتی محاسبه شده در فضای ناجابجایی به ازای مقادیر ثابت

$$(e = L = 1, B = 0.0798840465, \theta = 0.05).$$

State $ n, l\rangle$	$\varepsilon_{n,l}(\theta = 0.05)$
$ 1, 0\rangle$	۶,۱۶۱۴۳۷۶۶۱
$ 2, 0\rangle$	۷,۷۸۱۸۹۰۲۰۵
$ 2, 1\rangle$	۸,۳۵۷۳۸۸۳۱۳
$ 3, 0\rangle$	۹,۲۲۰۷۸۰۰۵۷
$ 3, 1\rangle$	۹,۷۳۴۹۲۷۷۰۱
$ 3, 2\rangle$	۱۰,۲۲۷۵۴۵۶۷

نتایج بدست آمده در جدول (۴-۵) ترازهای لاندو در حضور اثرات ناشی از پارامتر ناجابجایی است که ناشی از ترمهایی که در آن پارامتر θ ظاهر شده، می باشد. با صفر در نظر گرفتن اثرات پارامتر ناجابجایی معادله‌ی ویژه مقادیر انرژی به ترازهای لاندو در فضای جابجایی کاهش می یابد.

۴-۳-۶) تابع موج بوزونهای نسبیتی در فضای ناجابجایی

همچنین در این بخش متناظر با معادله انرژی توابع موج نسبیتی از رابطه‌ی زیر پیروی می کند

$$\psi_n(s) = S^{\frac{1}{4} + \frac{l}{2}} e^{-\sqrt{\frac{m^2 \omega^2 + (eB/2c)^2 + 2\alpha \varepsilon_{n,l} + 2\alpha m}{4(1+2\alpha(\varepsilon+m)\frac{\theta^2}{4\hbar^2} + \frac{eB\theta}{2c\hbar} + \left(\frac{eB\theta}{4c\hbar}\right)^2 + \left(\frac{m\omega\theta}{2\hbar}\right)^2)}} s} \times L_n^l \left(2 \sqrt{\frac{m^2 \omega^2 + (eB/2c)^2 + 2\alpha \varepsilon_{n,l} + 2\alpha m}{4(1+2\alpha(\varepsilon+m)\frac{\theta^2}{4\hbar^2} + \frac{eB\theta}{2c\hbar} + \left(\frac{eB\theta}{4c\hbar}\right)^2 + \left(\frac{m\omega\theta}{2\hbar}\right)^2)}} s \right), \quad (۴-۲۵)$$

اگر اثرات ناشی از میدان مغناطیسی را در نظر نگیریم مشابه نتایج بخش قبل خواهد شد و ذرات در فضای ناجابجایی رفتاری مشابه با فضای جابجایی را نشان می دهند.

۴-۳-۷) تصحیحات بوزون های نسبیتی اسپین صفر در حضور پتانسیل

نوسانی در فضای فاز ناجابجایی

در این بخش ما این مسئله را در فضای فاز ناجابجایی تحلیل و بررسی می کنیم. با اعمال تغییر باپ ضرب ستاره در فضای فاز ناجابجایی به ضرب فضای جابجایی نگاشته می شود.

بنابراین با معادله‌ی مهم زیر شروع می کنیم

$$\begin{aligned} & \{ [((\vec{p}\lambda + \frac{(\vec{\theta} \times \vec{r})}{2\lambda} - \frac{e\vec{B}}{2c} \times (\vec{r}\lambda + \frac{\vec{\theta} \times \vec{p}}{2\lambda}) + im\omega(\vec{r}\lambda + \frac{\vec{\theta} \times \vec{p}}{2\lambda}))(\vec{p}\lambda + \frac{(\vec{\theta} \times \vec{r})}{2\lambda} \\ & - \frac{e\vec{B}}{2c} \times (\vec{r}\lambda + \frac{\vec{\theta} \times \vec{p}}{2\lambda}) - im\omega(\vec{r}\lambda + \frac{\vec{\theta} \times \vec{p}}{2\lambda}))] - 2(\varepsilon_{n,l} + m)V(\vec{p}\lambda - \\ & \frac{(\vec{\theta} \times \vec{r})}{2\lambda}) \} \psi_{n,l}^{(NCp)}(r) = \{ \varepsilon_{n,l}^2 - m^2 \} \psi_{n,l}^{(NCp)}(r), \end{aligned} \quad (۲۶-۴)$$

با محاسبات ریاضی و فیزیکی دقیق خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & \{ [\lambda^2 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\lambda^2} + \frac{e^2B^2\theta^2}{16c^2\lambda^2} + \frac{eB\theta}{2c}]p^2 + \{ \frac{\bar{\theta}^2}{4\lambda^2} \\ & + \frac{e^2\lambda^2B^2}{4c^2} + m^2\omega^2\lambda^2 + \frac{eB\bar{\theta}}{2c} + (2\alpha m + 2\alpha\varepsilon_{n,l})\lambda^2 \} r^2 - [2\alpha(m + \varepsilon_{n,l})\theta \\ & + \bar{\theta} + \frac{e\lambda^2\bar{B}}{c} + m^2\omega^2\bar{\theta} + \frac{e\theta\bar{\theta}B}{4c\lambda^2} + \frac{e^2B^2\theta}{4c^2}]L_z + 2m\omega\hbar\lambda^2 + \\ & \frac{m\omega e\hbar B\theta}{c} - \frac{m\omega\theta\bar{\theta}\hbar}{2\lambda^2} - \varepsilon_{n,l}^2 + m^2 + 2\gamma\varepsilon_{n,l} + 2\gamma m \} \psi_{n,l}(\vec{r}) = 0, \end{aligned} \quad (۲۷-۴)$$

$$اگر ضریب تکانه زاویه‌ای، $2\alpha(m + \varepsilon_{n,l})\theta + \bar{\theta} + \frac{e\lambda^2\bar{B}}{c} + m^2\omega^2\bar{\theta} + \frac{e\theta\bar{\theta}B}{4c\lambda^2} + \frac{e^2B^2\theta}{4c^2} = 0$ را$$

مساوی با صفر قرار دهیم. میدان مغناطیسی بحرانی از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند

$$\begin{aligned} B_{Critical} &= \pm \frac{c}{2\theta\lambda^2e} \times \\ & -4\lambda^4 \mp \theta\bar{\theta} + \sqrt{16\lambda^8 - 8\lambda^4\theta\bar{\theta} + \theta^2\bar{\theta}^2 - 16\theta^2m^2\omega^2\lambda^4 - 32\alpha\theta^2\lambda^4(\varepsilon + m)} \end{aligned} \quad (۲۸-۴)$$

اثرات شکافتگی انرژی ناشی از اندازه حرکت زاویه‌ای به ازای میدان مغناطیسی بحرانی بدست

آمده (۲۸-۴) از بین می‌رود. مقادیر میدان مغناطیسی را با استفاده از معادله (۲۸-۴) در

جدول (۶-۴) نشان داده‌ایم.

جدول ۴-۶- مقادیر محاسبه شده میدان مغناطیسی همگن در فضای فاز ناجابجایی به ازای مقادیر مختلف پارامترهای فضا و فضای فاز ناجابجایی

ω	θ	$\bar{\theta}$	$B_{Critical}$	λ
۰,۱	.	.	.	± 1
۰,۱	۰,۰۸	۰,۰۹	-۱,۲۶۳۶۶۷۵۶۲, - ۴۸,۹۱۶۰۰۹۶۴	± 1.000897983
۰,۱	۰,۰۹	۰,۰۵	-۱,۳۷۹۲۵۸۵۴۸, -۴۳,۱۶۵۰۷۳۶۷	± 1.000561711
۰,۱	۰,۰۵	۰,۰۱	-۰,۷۳۲۹۵۱۶۹۵۹, -۷۹,۲۸۷۰۴۵۷۴	± 1.000062490
۰,۱	۰,۰۱	۰,۰۰۱	-۰,۱۴۴۳۳۵۲۹۶۶, -۳۹۹,۸۵۷۶۶۴۷	± 1.000001250

در جدول (۴-۶) مقادیر میدان بحرانی در مورد فضای فاز ناجابجایی محاسبه شده است که به ازای این مقادیر و پارامتر فضای فاز ناجابجایی خاص بدست آمده در رابطه‌ی (۴-۲۹) به مورد فضای ناجابجایی نگاشته خواهد شد. همچنین می‌توانیم پارامتر ناجابجایی ویژه زیر را بدست آوریم:

$$\theta = -\frac{4(\bar{\theta}c + e\lambda^2 B_c)c\lambda^2}{8\alpha\lambda^2(\varepsilon + m) + 4m^2\omega^2c^2\lambda^2 + e\bar{\theta}B_cc + e^2B_c^2\lambda^2} \quad (۴-۲۹)$$

که به ازای این مقدار از پارامتر ناجابجایی، اثرات ناشی از پارامترهای ناجابجایی از بین می‌رود. بنابراین با حل تحلیلی مسئله با روشی مشابه با بخش‌های قبل، ویژه مقادیر انرژی بوزونهای نسبیتی در فضای فاز ناجابجایی از رابطه‌ی (۴-۳۰) تبعیت می‌کند

$$\begin{aligned}
& (2n+1)\sqrt{\left(\frac{\bar{\theta}^2}{4\lambda^2} + \frac{e^2\lambda^2 B^2}{4c^2} + m^2\omega^2\lambda^2 + \frac{eB\bar{\theta}}{2c} + 2\alpha(m + \varepsilon_{n,l})\lambda^2\right)} \times \\
& \sqrt{\left(\lambda^2 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\lambda^2} + \frac{e^2 B^2\theta^2}{16c^2\lambda^2} + \frac{eB\theta}{2c}\right)} - \left\{ (2\alpha(m + \varepsilon_{n,l})\theta + \frac{\bar{\theta}}{2} + \right. \\
& \left. \frac{e\lambda^2 \bar{B}}{2c} + \frac{m^2\omega^2\bar{\theta}}{2} + \frac{e\theta\bar{\theta}B}{8c\lambda^2} + \frac{e^2 B^2\theta}{8c^2})l + m\omega\hbar\lambda^2 + \frac{m\omega e\hbar B\theta}{2c} - \frac{m\omega\theta\bar{\theta}\hbar}{4\lambda^2} - \frac{\varepsilon_{n,l}^2}{2} + \frac{m^2}{2} \right. \\
& \left. + \gamma\varepsilon_{n,l} + \gamma m + \left\{ \left(\frac{\bar{\theta}^2}{4\lambda^2} + \frac{e^2\lambda^2 B^2}{4c^2} + m^2\omega^2\lambda^2 + \frac{eB\bar{\theta}}{2c} + 2\alpha(m + \varepsilon_{n,l})\lambda^2 \right) (l^2(\lambda^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\lambda^2} + \frac{e^2 B^2\theta^2}{16c^2\lambda^2} + \frac{eB\theta}{2c})) \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} = 0 \quad (30-4)
\end{aligned}$$

ترازهای لاندو بدست آمده در رابطه (۳۰-۴)، را به ازای پارامترهای ثابت و مناسب، مقادیر

عددی انرژی را در جدول (۷-۴) نشان دادیم.

جدول ۴-۷- ترازهای انرژی بوزون های نسبیتی محاسبه شده در فضای فاز ناجابجایی به ازای مقادیر ثابت

$$(\theta = 0.05, \bar{\theta} = 0.01, \lambda = 1.000062490, B = 0.0798840465).$$

State $ n, l\rangle$	$\varepsilon_{n,l}$	State $ n, l\rangle$	$\varepsilon_{n,l} (\theta = \bar{\theta} = 0, \lambda = 1)$
$ 1, 0\rangle$	۶,۱۵۹۱۹۶۸۳۱	$ 1, 0\rangle$	۶,۱۴۷۰۸۸۲۶۴
$ 2, 0\rangle$	۷,۷۷۸۶۸۰۴۶۰	$ 2, 0\rangle$	۷,۷۵۷۴۱۵۹۷۵
$ 2, 1\rangle$	۸,۳۵۸۷۳۵۹۹۰	$ 2, 1\rangle$	۸,۴۸۹۴۲۰۹۳۷
$ 3, 0\rangle$	۹,۲۱۶۷۴۱۱۳۱	$ 3, 0\rangle$	۹,۱۸۵۵۷۸۲۹۹
$ 3, 1\rangle$	۹,۷۳۴۷۶۸۶۱۶	$ 3, 1\rangle$	۹,۸۵۱۹۵۴۳۹۳
$ 3, 2\rangle$	۱۰,۲۳۰۸۰۹۵۷	$ 3, 2\rangle$	۱۰,۴۹۳۰۲۷۰۲

منظور از پارامتر λ همان عامل مقیاس‌بندی است که در جبر ناجابجایی در فصل (۲) معرفی شد. بر اساس مقادیر $\lambda = 1$ و پارامترهای فضا و فضای فاز ناجابجایی برابر با صفر به نوسانگر کللاین-گوردن در فضای جابجایی نگاشته خواهد شد.

۴-۳-۸) تابع موج بوزون های نسبیتی در فضای فاز ناجابجایی

با روشی مشابه مانند بخش‌های قبلی توابع موج نسبیتی در فضای فاز را می‌توانیم بدست آوریم

$$\psi_n^{(NCp)}(s) = S^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{l^2}{4}} e^{-\sqrt{\frac{\bar{\theta}^2 + \frac{e^2 \lambda^2 B^2}{4c^2} + m^2 \omega^2 \lambda^2 + \frac{eB\bar{\theta}}{2c} + 2\alpha m + 2\alpha \varepsilon_{n,l}}{4\lambda^2 + 2\alpha(m + \varepsilon_{n,l})} \frac{\theta^2}{4\lambda^2} + \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\lambda^2} + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{16c^2 \lambda^2} + \frac{eB\theta}{2c}} s}} \times$$

$$L_n \sqrt{l^2} (2 \sqrt{\frac{\bar{\theta}^2 + \frac{e^2 \lambda^2 B^2}{4c^2} + m^2 \omega^2 \lambda^2 + \frac{eB\bar{\theta}}{2c} + 2\alpha m + 2\alpha \varepsilon_{n,l}}{4\lambda^2 + 2\alpha(m + \varepsilon_{n,l})} \frac{\theta^2}{4\lambda^2} + \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\lambda^2} + \frac{e^2 B^2 \theta^2}{16c^2 \lambda^2} + \frac{eB\theta}{2c}} s), \quad (4-31)$$

اگر اثرات ناشی از پارامترهای ناجابجایی در مختصات و ممنتوم یعنی $\lambda = 1, \theta = \bar{\theta} \rightarrow 0$ را در نظر بگیریم به نتیجه بخش فضای جابجایی خواهیم رسید که نشان می‌دهد نوسانگر کللاین-گوردن، در فضای ناجابجایی مشابه با فضای جابجایی رفتار می‌کند. از طرفی می‌توان در غیاب میدان B ترازهای لاندو را با مقایسه نمود که در این حالت خطوط شکافتگی انرژی از بین خواهد رفت. بنابراین نتیجه‌ی جالب مربوط به ویژه مقادیر انرژی در جدول (۴-۸) گزارش داده شده است.

جدول ۴-۸- ترازهای انرژی بوزون های نسبیتی در فضای فاز ناجابجایی در غیاب اثرات میدان مغناطیسی

$State n, l\rangle$	$\varepsilon_{n,l}$
$ 1,0\rangle$	۶,۱۵۸۸۸۴۹۹۹
$ 2,0\rangle$	۷,۷۷۸۲۳۰۴۳۸
$ 2,1\rangle$	۸,۳۵۹۰۰۸۶۸۴
$ 3,0\rangle$	۹,۲۱۶۱۷۲۲۳۳
$ 3,1\rangle$	۹,۷۳۴۸۱۵۱۷۴
$ 3,2\rangle$	۱۰,۲۳۱۳۹۹۰۸

در جدول (۴-۸) ویژه مقادیر یا ترازهای لاندو را در فضای فاز ناجابجایی در غیاب میدان مغناطیسی بدست آورده ملاحظه می کنید با افزایش اعداد کوانتومی نسبت به زمانی که میدان داریم مقادیر کمتری دارد در واقع شکافتگی ناشی از اثر زیمن در این مورد از بین رفته است.

۴-۳-۹) تصحیحات بوزون های نسبیتی اسپین صفر در غیاب پتانسیل

نوسانی در فضای فاز ناجابجایی

معادله ی بوزونهای اسپین صفر در غیاب میدان مغناطیسی در حضور پتانسیل نوسانی در فضای فاز ناجابجایی از رابطه ی زیر پیروی می کند

$$\begin{aligned} & \{[\lambda^2 + \frac{m^2 \omega^2 \theta^2}{4\lambda^2}]p^2 + \{\frac{\bar{\theta}^2}{4\lambda^2} + m^2 \omega^2 \lambda^2 + (2\alpha m \\ & + 2\alpha \varepsilon_{n,l})\lambda^2\}r^2 - [2\alpha(m + \varepsilon_{n,l})\theta + \bar{\theta} + m^2 \omega^2 \bar{\theta}]L_z + 2m\omega\hbar\lambda^2 \\ & - \frac{m\omega\theta\bar{\theta}\hbar}{2\lambda^2} - \varepsilon_{n,l}^2 + m^2 + 2\gamma\varepsilon_{n,l} + 2\gamma m\}\psi_{n,l}(\vec{r}) = 0, \end{aligned} \quad (۴-۳۲)$$

معادله‌ی انرژی در غیاب میدان مغناطیسی در حضور پتانسیل نوسانی در فضای فاز ناجابجایی

از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند

$$(2n+1)\sqrt{\left(\frac{\bar{\theta}^2}{4\lambda^2} + m^2\omega^2\lambda^2 + 2\alpha m + 2\alpha\varepsilon_{n,l}\right)\left(\lambda^2 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\lambda^2}\right)} - \frac{\bar{\theta}l}{2} - 2\alpha(m + \varepsilon_{n,l})\theta l - \frac{m^2\omega^2\bar{\theta}l}{2} - m\omega\hbar\lambda^2 - \frac{m\omega\theta\bar{\theta}\hbar}{4\lambda^2} - \frac{\varepsilon_{n,l}^2}{2} + \frac{m^2}{2} + \gamma\varepsilon_{n,l} + \gamma m + \sqrt{\left(\frac{\bar{\theta}^2}{4\lambda^2} + m^2\omega^2\lambda^2 + 2\alpha m + 2\alpha\varepsilon_{n,l}\right)l^2\left(\lambda^2 + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\lambda^2}\right)} = 0,$$

(۳۳-۴)

همچنین در این مورد تغییرات حاصل از عدم وجود میدان مغناطیسی در فضای فاز و اثرات

پارامتر ناجابجایی بر روی ترازهای لاندو قابل مشاهده است.

۴-۴ تصحیحات بوزونهای نسبیتی در حضور اثر آهارونف-بوهم با

پتانسیل کرنل در فضای جابجایی

هدف ما مطالعه بوزونهای نسبیتی اسپین صفر با پتانسیل کرنل در حضور میدان آهارونف-

بوهم در فضای جابجایی و ناجابجایی و فضای فاز ناجابجایی با روش شبه دقیق است. پتانسیل

کرنل، معرف حاصل جمع یک پتانسیل کولنی + خطی است.

۴-۴-۱) تصحیحات بوزونهای نسبیتی با پتانسیل کرنل و میدان

آهارونف-بوهم در فضای جابجایی

ما این مسئله را در سه بعد در حضور فضای نوسانگرگونه تحت میدان مغناطیسی همگن در راستای جهت محور z را مطالعه می‌کنیم. معادله نوسانگر کلاین-گوردن در حضور پتانسیل کرنل در مختصات استوانه‌ای از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} \right) \frac{d}{dr} + \left(\frac{1}{r^2} \right) \frac{d^2}{d\phi^2} \right\} - m^2 \omega^2 r^2 - \frac{e^2 B^2 r^2}{4c^2} + 2m\omega\hbar - \frac{eBL_z}{c} + \varepsilon_{n,l}^2 - m^2 - S_0^2 r^2 - \frac{S_1^2}{r^2} - 2S_0 S_1 + V_0^2 r^2 + \frac{V_1^2}{r^2} + 2V_0 V_1 - 2V_0 \varepsilon_{n,l} r - \frac{2V_1 \varepsilon_{n,l}}{r} - 2S_0 m r - \frac{2S_1 m}{r} \} \psi_{n,l}(r) = 0 \quad (34-4)$$

که در آن برهم کنش کرنل برداری و اسکالر به فرم زیر را استفاده کرده‌ایم [۱۷]

$$V(r) = V_0 r + \frac{V_1}{r}, \quad S(r) = S_0 r + \frac{S_1}{r} \quad (35-4)$$

با استفاده از روش شبه دقیق که در بخش قبل معرفی شد. ترازهای انرژی نسبیتی، از رابطه-

ی زیر پیروی می‌کند

$$\sqrt{-V_0^2 + S_0^2 + m^2 \omega^2 + e^2 B^2 / 4c^2} (-2\sqrt{(l^{(C)})^2 - V_1^2 + S_1^2} + 2n + 2) + \frac{(V_0 E_{n,l}^{(C)} + S_0 m)^2}{(-V_0^2 + S_0^2 + m^2 \omega^2 + e^2 B^2 / 4c^2)} + 2m\omega + eBl^{(C)} / c + (E_{n,l}^{(C)})^2 - m^2 - 2S_0 S_1 + 2V_0 V_1 = 0. \quad (36-4)$$

همچنین می‌دانیم

$$-\frac{(V_0 E_{n,l}^{(C)} + S_0 m)(n - \frac{1}{2} + (l^{(C)})^2 - V_1^2 + S_1^2)}{\sqrt{-V_0^2 + S_0^2 + m^2 \omega^2 + e^2 B^2 / 4c^2}} = V_1 E_{n,l}^{(C)} + S_1 m \quad (37-4)$$

یک رابطه‌ی قیدی است.

۴-۵ فرمیون‌های نسبیتی با اسپین نیمه صحیح

معادله دیراک، معادله‌ای است در مکانیک کوانتومی و تعمیم یافته معادله شرودینگر برای محاسبه تابع موج ذرات، با این تفاوت که این معادله نظریه نسبیت خاص را نیز در نظر می‌گیرد. این معادله توسط فیزیکدان بریتانیایی پل دیراک پدید آمد که خود دیراک این معادله را بر مبنای معادله کلاین-گوردون گسترش داد. معادله دیراک، تابع موجی ذرات با اسپین نیمه صحیح یعنی فرمیون‌ها را (مانند الکترون‌ها) توجیه می‌کند، در حالی که معادله کلاین-گوردون برای ذرات با اسپین صفر (مانند بعضی مزون‌ها) در نظر گرفته می‌شود. دیراک همچنین توانست با معادله‌اش، موجودیت ضد ماده (پادذره) به خصوص پوزیترون را سه سال قبل از کشف آن‌ها توسط آزمایش نشان دهد.

۴-۶ تصحیحات فرمیون‌های نسبیتی با اسپین نیمه صحیح در حضور

میدان آهارونف-بوهم با پتانسیل نوسانی

نوسانگر دیراک را در حضور اثر آهارونف-بوهم با پتانسیل نوسانی بررسی می‌کنیم و ترازهای انرژی بطور دقیق و نیز متناظر با آن ویژه توابع را محاسبه نمودیم. اثر آهارونف-بوهم (AB) در مکانیک کوانتومی مشاهده است، این میدانها منجر به یک پدیده تداخلی قابل توجه می‌-

شوند که ناشی از وجود یک میدان مغناطیسی خارجی است که در مورد نوسانگر دیراک در مکانیسم ناجابجایی به نتایج جالبی رسیدیم.

۴-۶-۱) تصحیحات فرمیونهای نسبیتی در حد تقارن $S \rightarrow V$

اجازه دهید حد متقارن یک ذره‌ی خنثی اسپین ۱/۲، در حال حرکت در میدان مغناطیسی خارجی را بررسی کنیم. در این حد، هامیلتونین دیراک عبارت است از:

$H_D = \alpha \cdot \pi + (m + V)\beta$. در این بخش، مسئله AB معادله دیراک، در فضای جابجایی در حد تقارن اسپینی $S \rightarrow V$ بررسی می‌کنیم. در این جا ترم های پتانسیل‌های برداری و اسکالر برابر هستند که در آن $\pi = p - eA$. H میدان مغناطیسی عمود بر سطح است و به یک رشته از یک شعاع بسیار کوچک شار محصور شده ست.

$$\alpha = -e \int_0^{\infty} H(r) r dr \quad (38-4)$$

همچنین با انتخاب میدان مغناطیسی

$$eH = -\frac{\alpha}{R} \delta(r - R) \quad (39-4)$$

پتانسیل A در پیمانه کولنی را به فرم زیر در نظر می‌گیریم [۴۷]

$$eA = \begin{cases} -\frac{\alpha}{R} u_{\varphi} & r > R, \\ 0 & r < R, \end{cases} \quad (40-4)$$

با تعریف روابط زیر و اسپینور دو مولفه‌ای

$$\psi_{n,\lambda}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \phi_{n,\lambda}(\vec{r}) \\ \chi_{n,\lambda}(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (41-4)$$

که در آن α و β ماتریس‌های هرمیتی‌اند. I ماتریس واحد 2×2 است و ماتریس‌های اسپینی به صورت

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (42-4)$$

هستند. بنابراین معادلات جفت شده‌ی زیر را بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} (\sigma \cdot \pi) \chi_{n,\lambda}(\vec{r}) + im\omega(\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) \chi_{n,\lambda}(\vec{r}) &= (\varepsilon_{n,\lambda} - m - 2V) \phi_{n,\lambda}(\vec{r}), \\ -(\sigma \cdot \pi) \phi_{n,\lambda}(\vec{r}) + im\omega(\vec{\sigma} \cdot \vec{r}) \phi_{n,\lambda}(\vec{r}) &= -(\varepsilon_{n,\lambda} + m) \chi_{n,\lambda}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (43-4)$$

که در آن $\varepsilon_{n,\lambda}$ انرژی در فضای معمولی است، n, λ معرف اعداد کوانتومی هستند. با یادآوری روابط مفید زیر

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \vec{\sigma} \cdot \vec{r} \left(\vec{r} \cdot \vec{p} + i \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{L}}{r} \right), \quad (44-4)$$

$$\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}, \quad L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{d\varphi}, \quad \beta = \gamma^0, \quad \alpha^i = \beta\gamma^i.$$

با حل معادله‌ی (43-4) برای دو ناحیه به معادلات (45-4) و (46-4) تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} (1 - s\alpha) \frac{d}{dz} - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\lambda + \alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{m^2 \omega^2}{4} + \frac{a_1 m}{2} + \frac{a_1 \varepsilon_{n,\lambda}}{2} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{z} \left(\frac{\varepsilon_{n,\lambda}^2}{4} - \frac{m^2}{4} + \frac{m\omega}{2} (1 - s(\lambda + \alpha)) - \frac{a_3 \varepsilon_{n,\lambda}}{2} - \frac{a_3 m}{2} \right) \right\} R_{n,\lambda}(z) = 0, \quad r > R \end{aligned} \quad (45-4)$$

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\lambda^2}{4} \right) - \left(\frac{m^2 \omega^2}{4} + \frac{a_1 m}{2} + \frac{a_1 \varepsilon_{n,\lambda}}{2} \right) + \frac{1}{z} \left(\frac{\varepsilon_{n,\lambda}^2}{4} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{m^2}{4} + \frac{m\omega}{2} (1-s\lambda) - \frac{a_3 \varepsilon_{n,\lambda}}{2} - \frac{a_3 m}{2} \right) \right\} R_{n,\lambda}(z) = 0, \quad r < R \quad (46-4)$$

که در آن $s = \pm 1$ می باشد.

۴-۶-۲) ویژه تابع فرمیون های نسبیتی در حد تقارن $S \rightarrow V$ در حضور

پتانسیل شبه نوسانی

با استفاده از روش نیکیفارو-یووارو به ویژه توابع برای ناحیه $r > R$ به فرم زیر می رسم

$$\psi_{n,\lambda}(r) = r^{-s\alpha - \sqrt{s^2\alpha^2 + (\lambda + \alpha)^2}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{m^2\omega^2 + 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}}r^2} \\ \times L_n^{-\sqrt{s^2\alpha^2 + (\lambda + \alpha)^2}}(\sqrt{m^2\omega^2 + 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}}r^2), \quad (47-4)$$

همچنین برای ناحیه $r < R$ تابع موج از رابطه ی زیر تبعیت می کند

$$\psi_{n,\lambda}(r) = r^\lambda e^{\frac{1}{2}\sqrt{m^2\omega^2 + 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}}r^2} L_n^\lambda(\sqrt{m^2\omega^2 + 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}}r^2). \quad (48-4)$$

با استفاده از شرایط مرزی زیر طیف انرژی بدست آمده در جدول شماره ی (۴-۹) گزارش شده است.

$$\psi_{r>R} = \psi_{r<R}, \quad \frac{d\psi_{r>R}}{dr} = \frac{d\psi_{r<R}}{dr}. \quad (49-4)$$

۴-۶-۳) فرمیون های نسبیتی با اسپین نیمه صحیح در حد تقارن

$$S \rightarrow -V$$

با حل معادله‌ی (۴-۴۳) در حد $S \rightarrow -V$ تابع موج را برای دو ناحیه به صورت زیر خواهیم داشت. برای ناحیه‌ی $r > R$ داریم:

$$\psi_{n,\lambda}(r) = r^{-s\alpha - \sqrt{s^2\alpha^2 + (\lambda + \alpha)^2}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{m^2\omega^2 - 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}}r^2} \times L_n^{-\sqrt{s^2\alpha^2 + (\lambda + \alpha)^2}}(\sqrt{m^2\omega^2 - 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}}r^2), \quad (۵۰-۴)$$

و برای ناحیه‌ی $r < R$

$$\psi_{n,\lambda}(r) = r^{-\lambda} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{m^2\omega^2 - 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}}r^2} L_n^{-\lambda}(\sqrt{m^2\omega^2 - 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}}r^2). \quad (۵۱-۴)$$

همچنین در این مورد ویژه مقادیر نسبیتی را جدول (۴-۹) آورده‌ایم.

جدول ۴-۹- ویژه مقادیر انرژی محاسبه شده در فضای جابجایی به ازای مقادیر ثابت

$$(a_1 = -1, a_2 = 0.88, m = 7)$$

$ n, \lambda\rangle$	$\varepsilon_{n,\lambda}(S(r)=V(r)).$	$\varepsilon_{n,\lambda}(S(r)=-V(r)).$
$ 1,0\rangle$	-۱,۷۳۸۵۰۷۹۰۰	۱۲,۲۶۱۴۹۲۱۰
$ 2,0\rangle$	-۱,۸۵۳۳۴۴۴۸۶	۱۲,۱۴۶۶۵۵۵۱
$ 2,1\rangle$	-۲,۱۹۹۲۲۶۹۷۳	۱۱,۸۰۰۷۷۳۰۳
$ 3,0\rangle$	-۳,۷۶۱۸۹۰۸۲۵	۱۰,۳۳۳۳۰۶۹۱
$ 3,1\rangle$	-۳,۸۴۱۸۳۳۹۲۲	۱۰,۱۵۸۱۶۶۳۴
$ 3,2\rangle$	-۴,۴۸۱۹۶۷۵۹۶	۹,۵۱۸۰۳۲۶۶۹

برای فرمیون ها با اسپین نیمه صحیح تحت معادله‌ی دیراک برای دو حالت پتانسیل اسکالر برابر با پتانسیل برداری و مخالف با آن ترازهای لاندو را بدست آوردیم که در آن λ و n معرف اعداد کوانتومی هستند ملاحظه نمائید که در حالت $S(r)=V(r)$ با افزایش اعداد کوانتومی انرژی سیستم منفی تر می شود در واقع ذرات مقیدتر می شوند و در حالت $S(r)=-V(r)$ انرژی سیستم با افزایش اعداد کوانتومی، کاهشی مثبت است.

۴-۶-۴) فرمیون های نسبیتی در حد تقارن $S \rightarrow V$ در مکانیک

کوانتومی ناجابجایی

در این بخش معادله‌ی دیراک با استفاده از تغییر باپ، یا ضرب ستاره (*) در فضای ناجابجایی به ضرب فضای معمولی نگاشته می شود که از دو معادله‌ی مهم زیر شروع می کنیم

$$\begin{aligned} \{(\vec{\sigma} \cdot \pi) \chi_{n,\lambda}^{(NC)}(\vec{r}) + im\omega(\vec{\sigma} \cdot (\vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{p}}{2\hbar}))\} \chi_{n,\lambda}^{(NC)}(\vec{r}) &= (\varepsilon_{n,\lambda}^{(NC)} - m - 2V(\vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{p}}{2\hbar})) \phi_{n,\lambda}^{(NC)}(\vec{r}), \\ -(\vec{\sigma} \cdot \pi) \phi_{n,\lambda}^{(NC)}(\vec{r}) + im\omega(\vec{\sigma} \cdot (\vec{r} + \frac{\vec{\theta} \times \vec{p}}{2\hbar})) \phi_{n,\lambda}^{(NC)}(\vec{r}) &= -(\varepsilon_{n,\lambda}^{(NC)} + m) \chi_{n,\lambda}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (52-4)$$

که در آن $\varepsilon_{n,\lambda}^{(NC)}$ انرژی در فضای ناجابجایی ست، با حل معادله‌ی (۵۲-۴) با روش مشابه

بخش قبلی برای ناحیه‌ی $r > R$ به ویژه توابع زیر می رسیم

$$\begin{aligned} \psi_{n,\lambda}^{(NC)}(r) &= r^{-\frac{s\alpha}{k} - \sqrt{\frac{1}{k}(\frac{s^2\alpha^2}{k} + ms\omega\alpha\theta\lambda + \lambda^2k + \alpha^2 + 2\lambda\alpha)}} e^{(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{k}(m^2\omega^2 + 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}^{(NC)})}r^2)} \times \\ L_n^{-\sqrt{\frac{1}{k}(\frac{s^2\alpha^2}{k} + ms\omega\alpha\theta\lambda + \lambda^2k + \alpha^2 + 2\lambda\alpha)}} &(\sqrt{\frac{1}{k}(m^2\omega^2 + 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}^{(NC)})}r^2). \end{aligned} \quad (53-4)$$

که در آن $k = 1 + 2a_1(\varepsilon_{n,l} + m) \frac{\theta^2}{4\hbar^2} + \frac{m^2\omega^2\theta^2}{4\hbar^2} + \frac{2ms\omega\theta}{\hbar}$. همچنین نیز برای ناحیه

$r < R$ تابع موج از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند

$$\psi_{n,\lambda}^{(NC)}(r) = r^\lambda e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{k}(m^2\omega^2 + 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}^{(NC)})}r^2} L_n^\lambda \left(\sqrt{\frac{1}{k}(m^2\omega^2 + 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}^{(NC)})}r^2 \right). \quad (54-4)$$

با استفاده از شرایط مرزی طیف انرژی بدست آمده در جدول شماره‌ی (۴-۱۰) گزارش شده است. اگر $\theta = 0$ باشد نتایجی مشابه مورد جابجایی $S \rightarrow V$ خواهیم داشت که طیف انرژی در غیاب اثر پارامتر ناجابجایی را ارائه می‌دهد.

۴-۶-۵) فرمیون‌های نسبیتی در حد تقارن $S \rightarrow -V$ در مکانیک

کوانتومی ناجابجایی

با حل معادله‌ی (۴-۵۲) در حد $S \rightarrow -V$ تابع موج را برای دو ناحیه به صورت زیر خواهیم داشت.

برای ناحیه‌ی $r > R$ داریم:

$$\psi_{n,\lambda}^{(NC)}(r) = r^{-\frac{s\alpha}{k} - \sqrt{\frac{1}{k}(s^2\alpha^2 + ms\omega\alpha\theta L\lambda + \lambda^2k + \alpha^2 + 2\lambda\alpha)}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{k}(m^2\omega^2 - 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}^{(NC)})}r^2} \times L_n^{-\sqrt{\frac{1}{k}(s^2\alpha^2 + ms\omega\alpha\theta L\lambda + \lambda^2k + \alpha^2 + 2\lambda\alpha)}} \left(\sqrt{\frac{1}{k}(m^2\omega^2 - 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}^{(NC)})}r^2 \right). \quad (55-4)$$

و برای ناحیه ی $r < R$

$$\psi_{n,\lambda}^{(NC)}(r) = r^\lambda e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{k}(m^2\omega^2 - 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}^{(NC)})}r^2} L_n^\lambda\left(\sqrt{\frac{1}{k}(m^2\omega^2 - 2a_1m + 2a_1\varepsilon_{n,\lambda}^{(NC)})}r^2\right). \quad (5-4)$$

همچنین در این مورد ویژه مقادیر نسبیتی را جدول (۴-۱۰) آورده‌ایم. با استفاده از شرایط مرزی طیف انرژی بدست آمده در جدول شماره‌ی (۴-۱۰) گزارش شده است. در این مورد اگر $\theta = 0$ باشد نتایجی مشابه مورد جابجایی در حد $S \rightarrow -V$ خواهیم داشت که طیف انرژی در غیاب اثر پارامتر ناجابجایی را ارائه می‌دهد.

جدول ۴-۱۰- ویژه مقادیر انرژی محاسبه شده در فضای ناجابجایی به ازای مقادیر

ثابت $(\omega = 0.51, \alpha = 0.8, \theta = 0.05)$

$ n, \lambda\rangle$	$\mathcal{E}_{n,\lambda}^{(NC)}(S(r)=V(r)).$	$\mathcal{E}_{n,\lambda}^{(NC)}(S(r)=-V(r)).$
s= ۱		
$ 1,0\rangle$	-۵,۴۱۲۷۹۱۶۵۷	۱۳,۱۰۰۶۳۳۲۱
$ 2,0\rangle$	-۵,۲۴۸۱۱۷۸۵۲	۱۱,۷۳۸۴۹۱۸۸
$ 2,1\rangle$	-۵,۱۵۴۲۱۸۳۴۱	۸,۸۵۰۲۰۲۵۲۵
$ 3,0\rangle$	-۴,۲۴۳۴۵۲۸۸۸	۷,۶۱۲۶۰۶۷۴۷
$ 3,1\rangle$	-۳,۷۰۳۹۶۴۸۸۳	۷,۱۲۲۹۴۵۴۳۳
$ 3,2\rangle$	-۱,۴۷۶۱۵۸۳۱۹	۵,۷۶۶۷۲۴۱۰۷
s= -۱		
$ 1,0\rangle$	-۱,۱۰۸۷۱۷۰۹۴	۱۲,۸۹۱۲۸۲۹۱
$ 2,0\rangle$	-۲,۰۲۷۶۸۱۴۴۴	۱۱,۹۷۲۳۱۸۳۳
$ 2,1\rangle$	-۲,۴۶۹۳۹۳۵۸۳	۹,۸۷۹۶۴۵۵۷۶
$ 3,0\rangle$	-۴,۲۷۶۱۹۰۶۳۳	۸,۷۵۲۵۵۰۹۳۲
$ 3,1\rangle$	-۴,۴۵۳۴۹۲۶۹۴	۷,۱۴۴۱۴۸۴۳۵
$ 3,2\rangle$	-۵,۳۸۹۹۸۱۱۵۶	۵,۸۸۱۸۸۶۶۵۸

در فضای ناجابجایی برای دو حالت پتانسیل اسکالر برابر با پتانسیل برداری و مخالف با آن ترازهای لاندو را بدست آوردیم. مشاهده می‌کنید که در حالت $S(r)=V(r)$ با افزایش اعداد کوانتومی انرژی سیستم منفی رو به مثبت است اما هنوز ذرات در حالت قیدی بسر می‌برند و در $S(r)=-V(r)$ افزایش اعداد کوانتومی انرژی سیستم کاهشی مثبت است.

۴-۷ تصحیحات فرمیون های نسبیتی در حضور اثر آهارونف-بوهم با

پتانسیل کلینبرگ در فضای جابجایی

در این بخش به بررسی فرمیون ها با اسپین $1/2$ در چارچوب معادله ی نوسانگر دیراک با استفاده از پتانسیل کلینبرگ: $V(r) = ar^2 + br/c$ پرداخته ایم و با استفاده از روش شبه دقیق ویژه مقادیر انرژی را بدست آوردیم. در پتانسیل کلینبرگ ضرایب a ، b و c ثابت هستند.

۴-۷-۱ تصحیحات فرمیون های نسبیتی با پتانسیل کلینبرگ در فضای

جابجایی در حد تقارن $S \rightarrow V$

برای حل این مسئله با استفاده از روش شبه دقیق طیف انرژی نسبیتی در حضور پتانسیل کلینبرگ و میدان مغناطیسی آهارونف-بوهم در فضای جابجایی در حد تقارن $S \rightarrow V$ حاصل می شود:

$$-2\sqrt{\frac{e^2 B^2}{4} + m^2 \omega^2 + \frac{2eBm\omega s}{\hbar} + 2a(m + \varepsilon_{n,l})(l + n - 1) + \frac{b^2(\varepsilon_{n,l} - m)^2}{\frac{e^2 B^2}{4} + m^2 \omega^2 + \frac{2eBm\omega s}{\hbar} + 2a(m + \varepsilon_{n,l})}} + [(eB + \frac{4m\omega s}{\hbar})l + 2m\omega\hbar + 2eBs + \varepsilon_{n,l}^2 - m^2] = 0. \quad (57-4)$$

این امر می تواند به نتایج جالبی از معادله برای مورد خاصی $A_2 = A_4 = 0$ ، منجر شود که مربوط به معادله نوسانگر هماهنگ است.

$$b = \frac{c \sqrt{\frac{1}{k} \left[\frac{e^2 B^2}{4} + m^2 \omega^2 + 2eBm\omega s + 2a(m + \varepsilon_{n,l}) \right]}}{(n+l-1/2)} \quad (58-4)$$

می‌رسیم که در آن پارامتر ثابت b مربوط به پتانسیل کلینبرگ می‌باشد و باید رابطه‌ی قیدی فوق را برآورده سازد.

۴-۷-۲ تصحیحات فرمیون‌های نسبیتی با پتانسیل کلینبرگ در فضای

جابجایی در حد تقارن $S \rightarrow -V$

بطور مشابه در این مورد، طیف انرژی نسبیتی در حضور پتانسیل کلینبرگ و میدان مغناطیسی آهارونف-بوهیم در فضای جابجایی در حد تقارن $S \rightarrow -V$ حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & -2 \sqrt{\frac{e^2 B^2}{4} + m^2 \omega^2 + \frac{2eBm\omega s}{\hbar} - 2a(m - \varepsilon_{n,l})(l+n-2)} \\ & + \frac{b^2 (\varepsilon_{n,l} - m)^2}{\frac{e^2 B^2}{4} + m^2 \omega^2 + \frac{2eBm\omega s}{\hbar} - 2a(m - \varepsilon_{n,l})} + [(eB + \frac{4m\omega s}{\hbar})l \\ & + 2m\omega\hbar + 2eBs + \varepsilon_{n,l}^2 - m^2] = 0. \end{aligned} \quad (59-4)$$

بطور مشابه در این مورد هم به نتایج جالبی از معادله (۵۹-۴) برای مورد خاصی $A_2 = A_4 = 0$ ، منجر شود که مربوط به معادله نوسانگر هماهنگ است.

$$b = \frac{c \sqrt{\frac{1}{k} \left[\frac{e^2 B^2}{4} + m^2 \omega^2 + 2eBm\omega s - 2a(m - \varepsilon_{n,l}) \right]}}{(n+l-1/2)} \quad (60-4)$$

می‌رسیم که در آن پارامتر ثابت b مربوط به پتانسیل کلینبرگ در حد تقارن $S \rightarrow -V$ می‌باشد و باید رابطه‌ی قیدی فوق را برآورده سازد.

۴-۸ خواص ترمودینامیکی و مکانیک آماری فرمیون ها و بوزون های

نسبیتی

مکانیک آماری فرمول‌بندی است که هدفش تعریف خواص فیزیکی مواد عمدتاً بر اساس رفتار ترمودینامیکی اجزای تشکیل دهنده میکروسکوپی آن می‌باشد. دامنه‌ی این فرمول‌بندی به اندازه‌ای نامحدود است که پدیده‌های طبیعی نامحدودند، که در اصل برای هر حالت ماده قابل کاربرد است و در مطالعات فیزیک در زمینه‌های حالت جامد، حالت مایع و گاز، ماده متشکل از چندین فاز و یا جز، ماده تحت شرایط حدی دما و چگالی، ماده در تعادل با تابش، ماده در حالت نمونه بیولوژیکی، و ... موفقیت‌های قابل ملاحظه‌ای را به همراه داشته است. علاوه بر این، فرمول‌بندی مکانیک آماری این امکان را به ما می‌دهد که حالت‌های غیرتعادلی ماده را علاوه بر حالت‌های تعادلی مورد بررسی قرار دهیم.

۴-۸-۱) تابع پارش

در مبحث آنسامبل میکروکانونی، ما عامل بهنجارش را برای احتمالات میکروحالت ها را تابع پارش در مکانیک آماری می‌نامیم. در این جا، از این رو، ما در آنسامبل کانونی، ما یک تابع پارش کانونی را به فرم زیر تعریف می‌کنیم [۴۸]:

$$Z(T, V, N) = \sum_{all \ n \ at \ V, \ N} e^{-\beta E_n}, \quad (4-61)$$

در اینجا، Z تابعی از T ، V و N است، زیرا V و N از نوع میکروحالت هایی هستند که در مجموع اعمال شده است، و از دمای T مقدار β بدست می آید. در ادامه برای محاسبه تابع پارش ما از ویژگی های اعداد برنولی کمک می گیریم و سری تابع پارش را با استفاده از عدد برنولی بسط می دهیم. رابطه ی انتگرالی زیر را می توانیم بر حسب عدد برنولی بنویسیم

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)B_0(x)dx, \quad (۴-۶۲)$$

زیرا $B'_0(x) = B_0 = 1$. با استفاده از یکی از ویژگیهای عدد برنولی

$$B'_n(x) = nB_{n-1}(x) \rightarrow B'_1(x) = B_0(x) \quad (۴-۶۳)$$

در رابطه ی انتگرالی جایگذاری می کنیم: $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)B'_1(x)dx$ و همچنین با استفاده

از انتگرال گیری جز به جز به رابطه ی زیر می رسیم

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)dx &= f(x)B_1(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f'(x)B_1(x)dx = f(1)B_1(1) \\ &- f(0)B_1(0) - \int_0^1 f'(x)B_1(x)dx = \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \int_0^1 f'(x)B_1(x)dx, \end{aligned} \quad (۴-۶۴)$$

و باز هم برای استفاده از انتگرال گیری جز به جز برای حل انتگرال از رابطه عدد برنولی [۴۹]

استفاده می کنیم: $B_1(x) = \frac{B'_2(x)}{2}$. به فرم (۴-۶۵) می رسیم

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}[f(1) + f(0)] - \frac{1}{2} \int_0^1 f'(x)B'_2(x)dx \quad (۴-۶۵)$$

این روند ادامه می‌یابد تا زمانی که می‌توانیم بازه‌ی $[0-1]$ را به بازه‌ی $[n-1, n]$ بسط دهیم و در نهایت خواهیم داشت

$$\int_0^n f(x)dx = \frac{1}{2} f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) + f(n) - \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n \frac{1}{(2p)!} B_{2p} f^{(2p-1)}(x) \quad (4-66)$$

بنابراین تابع پارش با استفاده از رابطه‌ی (4-66) به آسانی بدست می‌آید. همچنین با استفاده از تابع پارش Z ، ما می‌توانیم به آسانی خواصهای ترمودینامیکی را از روابط زیر بدست آوریم. از جمله انرژی آزاد هلمهولتز

$$A = -N(k_B T \ln Z) \quad (4-67)$$

آنتروپی سیستم

$$S_{CS} = N \frac{\partial}{\partial T} (k_B T \ln Z) = -N \frac{\partial}{\partial T} A \quad (4-68)$$

انرژی ترمودینامیکی از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند

$$\langle E \rangle = N k_B T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \quad (4-69)$$

ظرفیت گرمایی سیستم به فرم:

$$C_v = N \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T} \quad (4-70)$$

۴-۹ تصحیحات بوزون های نسبیتی و بررسی خواص ترمودینامیکی در

فضای ناجابجایی

خواص آماری سیستم را که شامل تابع پارش Z ، انرژی درونی متوسط U ، انرژی آزاد هلمهولتز F ، ظرفیت گرمایی C_v و آنتروپی سیستم S را برای یک تک ذره بدست می آوریم و تغییرات پارامترهای ترمودینامیکی را بر روی نمودار برحسب سیستم N -بوزون رسم نمودیم. همچنین در ادامه به بحث و پردازش نتایج عددی می پردازیم.

۴-۹-۱ ترازهای انرژی نسبیتی بوزون ها در فضای ناجابجایی

نوسانگر کلاین-گوردن با اعمال میدان مغناطیسی در راستای جهت محور Z در فضای ناجابجایی و با حل مسئله با اعمال ضرب ستاره‌ی مویال و تغییر باپ به ضرب فضای جابجایی نگاشته می شود. همچنین با انجام محاسبات ریاضی و فیزیکی به رابطه‌ی مهم زیر می‌رسیم

$$\{(1+\bar{\theta})p^2 + m^2\bar{\omega}r^2 - (m\omega_c + \frac{m^2\theta}{\hbar}\bar{\omega})l - 2m\omega\hbar - \frac{m\omega\omega_c\theta}{2} - (E_{n,l}^{(NC)})^2 + m^2c^4\}\psi_{n,l}(\vec{r}) = 0, \quad (4-71)$$

که در آن $\bar{\theta} = \frac{m\theta\omega_c}{2\hbar} + \frac{m^2\theta^2\bar{\omega}}{4\hbar^2}$ و ω_c بسامد سیکلترون می‌باشد. با حل معادله‌ی نوسانگر کلاین-گوردن ناجابجایی با روش نیکیفارو-یوارو، ترازهای انرژی نسبیتی در فضای ناجابجایی از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند.

$$E_{n,l}^{\pm} = \pm mc^2 \sqrt{\eta + 4\sqrt{(1+\bar{\theta})\lambda}n}, \quad n=1,2,\dots \quad l=0,1,\dots \quad (4-72)$$

که در آن n و l اعداد کوانتومی هستند و منظور از η رابطه‌ی زیر می‌باشد

$$\eta = 2\sqrt{(1+\bar{\theta})}\lambda(1+|l|) - \left(\frac{\omega_c}{mc^4} + \frac{\theta\bar{\omega}}{\hbar c^4}\right)l - \frac{2\omega\hbar}{mc^4} - \frac{\omega\omega_c\theta}{2c^4} + 1. \quad (73-4)$$

$$\text{و داریم: } \omega_c = |e|B/mc, \bar{\omega} = \omega^2 + \frac{\omega_c^2}{4}$$

۴-۹-۲ خواص ترمودینامیکی نوسانگر کلاین-گوردن در فضای ناجابجایی

در آمار بوز-اینشتین در تقریب نواحی چگالهای کم که متناظر است با افزایش تعداد ریز حالتها، آنتروپی سیستم افزایش می‌یابد به این ترتیب با تصور از رفتار آنتروپی کاملاً سازگاری دارد. در تقریب چگالی کم نقش پارامترهایی که در آمار بوز-اینشتین ظاهر می‌شود قابل صرفنظر خواهد بود و در محدوده‌ی آمار ماکسول-بولتزمن قرار می‌گیرد. در حالتی که چگالی احتمال زیاد باشد برای ذرات با اسپین صحیح باید از آمار بوز-اینشتین استفاده کنیم. ما در این بخش مشاهده خواهیم کرد در آمار ماکسول-بولتزمن اثرات ناجابجایی برای بوزونهای با اسپین صحیح برابر با صفر در چارچوب معادله‌ی کلاین-گوردن تا حدودی قابل مشاهده خواهد بود و منجر به نتایج جالبی خواهد شد.

در این بخش، اکنون می‌توانیم موقعیت مکانیک کوانتومی سیستم را بر اساس انرژی نوسانگر کلاین-گوردن دو بعدی را که در بخش قبلی بدست آوردیم مورد مطالعه و بررسی قرار دهیم.

$$E_{n,l}^{\pm} = \pm mc^2 \sqrt{\eta + 4\bar{\lambda}n}. \quad n=1,2,\dots \quad l=0,1,\dots \quad (74-4)$$

$$\text{که در آن ثابتهای } \bar{\lambda} = \frac{\sqrt{\bar{\omega}(1+\bar{\theta})}}{mc^4} = \sqrt{(1+\bar{\theta})}\lambda, \lambda = \frac{\sqrt{\bar{\omega}}}{mc^4} \text{ طیف انرژی}$$

نسبیتی بوزون با اسپین صفر را به ازای تابعی از n برای مقادیر دلخواه و مختلف که مربوط به

نوسانگر نسبیتی کلاین-گوردن تحت میدان مغناطیسی است، در شکل ۴-۱ نشان داده‌ایم که اثر پارامترهای ناجابجایی در تراز لاندو قابل توجه است در مقایسه با زمانی که پارامترهای ناجابجایی صفر هستند. با انتخاب اعداد کوانتومی $n \leq 200$ ویژه مقادیر انرژی را در جداول (۴-۱۱) و (۴-۱۲) گزارش داده‌ایم.

جدول ۴-۱۱- طیف انرژی بوزونهای نسبیتی به ازای اعداد کوانتومی دلخواه n و $l=1$ با انتخاب مقادیر $\hbar=c=1, m=2, e=0.9, \omega=1.6$ برای $B=0.079$ و $\lambda=10$ در فضای جابجایی و ناجابجایی

$ n, l\rangle$	$E_{n,l}^{(NCS)}(\theta=0.9)$	$E_{n,l}^{(CS)}(\theta=0)$	$ n, l\rangle$	$E_{n,l}^{(NCS)}(\theta=0.9)$	$E_{n,l}^{(CS)}(\theta=0)$
۱	۱۱,۷۴۹۲۶۶۵۷	۱,۹۰۹۶۷۰۳۰۸	۱۰۰	۱۴,۳۶۳۵۵۱۹۶	۶۳,۵۵۶۱۳۴۴۴
۵	۲۰,۴۹۵۶۷۴۲۹	۱۵,۴۷۱۹۸۱۹۴	۱۱۰	۱۸,۴۴۳۰۶۰۳۴	۶۶,۸۲۸۶۸۹۲۰
۱۰	۲۷,۷۹۴۱۴۸۴۲	۲۰,۹۶۱۴۴۶۱۶	۱۲۰	۹۲,۳۴۲۵۱۹۷۱	۶۹,۵۶۵۶۶۸۴۴
۱۵	۳۳,۵۴۰۹۸۵۳۵	۲۵,۲۸۸۰۰۸۴۸	۱۳۰	۹۶,۰۸۳۸۵۳۸۵	۷۲,۳۸۳۵۷۷۰۴
۲۰	۳۸,۴۳۸۰۱۱۲۶	۲۸,۹۷۲۰۹۳۹۰	۱۴۰	۹۹,۶۸۴۸۶۸۴۴	۷۵,۰۹۵۸۲۰۲۹
۲۵	۴۲,۷۷۸۰۷۵۲۵	۳۲,۲۳۹۴۵۱۳۸	۱۵۰	۱۰۳,۱۶۰۲۵۸۹	۷۷,۷۱۳۴۶۲۳۲
۳۰	۴۶,۷۱۶۶۶۴۴۱	۳۵,۲۰۴۸۶۰۸۱	۱۶۰	۱۰۶,۵۲۲۳۲۱۸	۸۰,۲۴۵۷۶۱۴۱
۳۵	۵۰,۳۴۸۰۸۵۸۱	۳۷,۹۳۹۱۹۱۱۵	۱۷۰	۱۰۹,۷۸۱۴۶۹۶	۸۲,۷۰۰۵۵۷۵۹
۴۰	۵۳,۷۳۴۶۵۱۳۶	۴۰,۴۸۹۲۸۵۳۱	۱۸۰	۱۱۲,۹۴۶۶۱۱۶	۸۵,۰۸۴۵۵۹۲۶
۴۵	۵۶,۹۲۰۰۸۲۳۰	۴۲,۸۸۸۰۱۹۶۰	۱۹۰	۱۱۶,۰۲۵۴۴۱۶	۸۷,۴۰۳۳۵۹۵۷
۵۰	۵۹,۹۳۶۴۶۱۹	۴۵,۱۵۹۵۱۹۷۶	۲۰۰	۱۱۹,۰۲۴۶۵۷۷	۸۹,۶۶۲۶۰۲۱۵

در جدول (۴-۱۱) ویژه مقادیر عددی به ازای $\lambda = 10$ و با ثابتهایی که در نظر گرفته شده مشاهده می‌کنید با افزایش اعداد کوانتومی ترازهای لاندو افزایش می‌یابند. نتیجه جالب اینکه با برابر صفر قرار دادن پارامتر ناجابجایی مسئله‌ی حالت جابجایی را بازیابی خواهیم کرد که با مورد فضای ناجابجایی قابل مقایسه است.

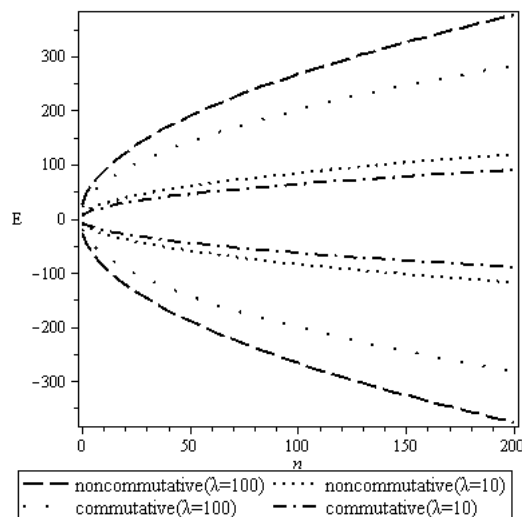
انتظار داریم با افزایش ثابت λ در نظر گرفته شده در معادله‌ی انرژی رابطه‌ی (۴-۷۴) بدست آمده افزایش ترازهای لاندو را داشته باشیم بنابراین برای کسب نتیجه‌ی مطلوب در جدول این مطلب به اثبات رسیده است.

می‌بینید با ثابتهای یکسان در دو جدول (۴-۱۱) و (۴-۱۲) برای اعداد کوانتومی دلخواه n و $l=1$ به ازای دو مقدار متفاوت λ طیف انرژی بدست آوردیم و با افزایش ثابت λ افزایش ویژه مقادیر انرژی را داریم. همچنین قابل ذکر است به $l=0$ هم می‌توانیم ترازهای لاندو داشته باشیم.

جدول ۴-۱۲- طیف انرژی بوزون های نسبیتی با اسپین صفر به ازای هر اعداد کوانتومی دلخواه n و $l=1$ با انتخاب مقادیر ثابت مناسب $B=0.079$ و $m=2, e=0.9, \omega=1.6, \theta=0.9$ برای $\lambda=100$ در فضای جابجایی و ناجابجایی

$ n, l\rangle$	$E_{n,l}^{(NCS)}(\theta=0.9)$	$E_{n,l}^{(CS)}(\theta=0)$	$ n, l\rangle$	$E_{n,l}^{(NCS)}(\theta=0.9)$	$E_{n,l}^{(CS)}(\theta=0)$
۱	۳۷,۵۰۹۷۸۶۸۳	۲۸,۲۷۳۳۴۸۳۲	۱۰۰	۲۶۶,۸۳۰۶۹۶۲	۲۰۰,۹۹۵۹۷۵۶
۵	۶۵,۰۱۴۲۱۵۳۸	۴۸,۹۸۳۴۸۹۳۱	۱۱۰	۲۷۹,۷۲۸۹۴۱۴	۲۱۰,۷۱۱۶۰۹۱
۱۰	۸۸,۰۴۳۶۱۶۰۱	۶۶,۳۲۷۸۳۸۹۹	۱۲۰	۲۹۲,۰۵۸۱۱۱۲۲	۲۱۹,۹۹۸۵۹۶۰
۱۵	۱۰۶,۱۹۰۹۰۵۶	۷۹,۹۹۶۱۳۸۸۱	۱۳۰	۳۰۳,۸۸۷۴۸۱۱	۲۲۸,۹۰۹۱۱۳۴
۲۰	۱۲۱,۶۶۰۷۵۱۹	۹۱,۶۴۸۱۴۳۶۰	۱۴۰	۳۱۵,۲۷۳۳۱۲۲	۲۳۷,۴۸۵۵۴۱۱
۲۵	۱۳۵,۳۷۴۱۸۰۲	۱۰۱,۹۷۷۳۶۱۳	۱۵۰	۳۲۶,۲۶۲۰۴۴۴۴	۲۴۵,۷۶۲۸۵۷۷
۳۰	۱۴۷,۸۲۰۸۳۳۴	۱۱۱,۳۵۲۵۱۳۳	۱۶۰	۳۳۶,۸۹۲۵۳۷۶	۲۵۳,۷۷۰۳۳۳۶
۳۵	۱۵۹,۲۹۷۹۲۵۰	۱۱۹,۹۹۷۴۲۵۹	۱۷۰	۳۴۷,۱۹۷۶۹۸۹	۲۶۱,۵۳۲۷۵۵۵
۴۰	۱۷۰,۰۰۱۹۳۸۳	۱۲۸,۰۶۰۰۷۲۷	۱۸۰	۳۵۷,۲۰۵۶۸۶۳	۲۶۹,۰۷۱۳۳۳۰
۴۵	۱۸۰,۰۷۰۷۸۹۲	۱۳۵,۶۴۴۳۲۲۵	۱۹۰	۳۶۶,۹۴۰۸۱۶۲	۲۷۶,۴۰۴۳۸۱۷
۵۰	۱۸۹,۶۰۵۶۹۴۲	۱۴۲,۸۲۶۴۰۵۹	۲۰۰	۳۷۶,۴۲۴۲۲۵۹۰	۲۸۳,۵۴۷۸۴۸۲

در شکل (۱-۴) رفتار طیف انرژی نسبیتی (E / mc^2) بر حسب تغییرات n به ازای λ های مختلف در دو فضای جابجایی و ناجابجایی رسم شده است. با افزایش λ ترازهای انرژی در هر دو فضا افزایش می‌یابد که در حضور پارامتر ناجابجایی روند سریعتری دارد.



شکل ۱-۴- مقایسه طیف انرژی E / mc^2 در دو فضای جابجایی و فضای ناجابجایی

در شکل (۱-۴) نتایج عددی بدست آمده در جداول (۴-۱۱) و (۴-۱۲) رسم شده است.

چون ما در محدوده و نواحی چگالی کم کار می‌کنیم یعنی چگالی خیلی خیلی کمتر از ۱ می‌باشد و از برهم کنش بین ذرات صرف‌نظر کردیم و از طرفی ذرات سیستم آزاد هستند. برای سیستم بوزونی که نقش پارامتر چگالی در تقریب چگالی کم دیده شده است، بنابراین از آمار ماکسول-بولتزمن استفاده کردیم.

ضروری‌ترین عنصر در مطالعات آماری تابع پارش است که از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند. ما

$$\beta = 1/k_B T \quad \text{که در آن} \quad Z(V, T) = \sum_{n=0}^n e^{-\beta(E_n - E_0)}$$

و k_B ثابت بولتزمن است. تابع پارش نوسانگر کلاین-گوردن ناجابجایی به فرم معادله ی (۴-۷۵) داده می شود.

$$Z_1 = \sum_{n=0}^n e^{-\beta mc^2 \sqrt{\eta + 4\bar{\lambda} n}} = e^{\beta mc^2 \sqrt{\eta}} \sum_{n=0}^n e^{-\beta mc^2 \sqrt{\eta + 4\bar{\lambda} n}}, \quad (۷۵-۴)$$

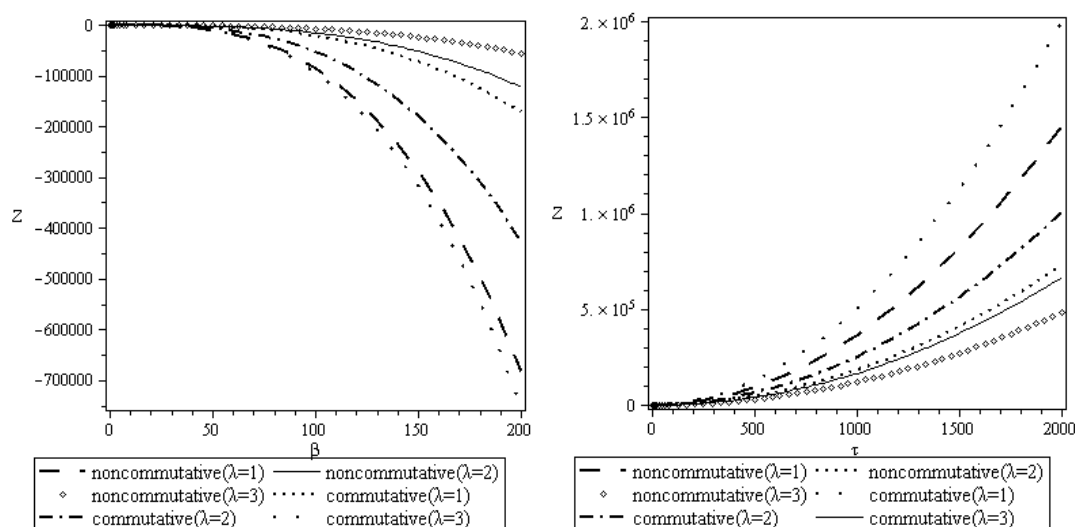
که به فرم معادله ی (۴-۷۶) بدست خواهد آمد

$$Z_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{\eta}}{2\bar{\lambda}} \tau + \frac{1}{2\bar{\lambda}} \tau^2 + \left(\frac{\bar{\lambda}}{6\sqrt{\eta}} - \frac{\bar{\lambda}^3}{30\sqrt{\eta}^5} \right) \frac{1}{\tau} - \frac{1}{30\eta^2} \frac{\bar{\lambda}^3}{\tau^2} - \frac{\bar{\lambda}^3}{60\sqrt{\eta}^3 \tau^3} \right), \quad (۷۶-۴)$$

که در آن

$$\tau = \frac{1}{\beta mc^2}. \quad (۷۷-۴)$$

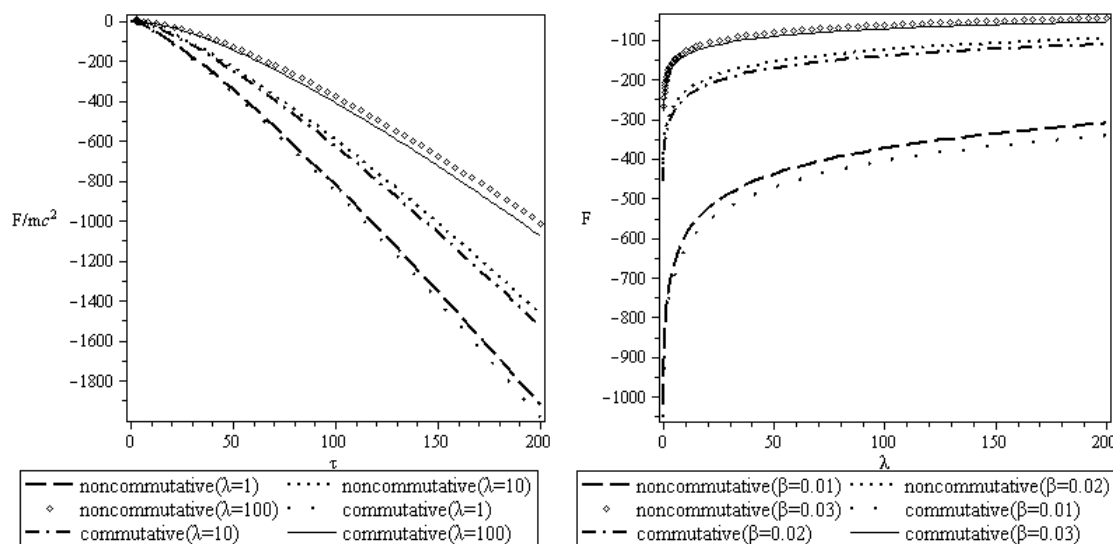
تابع پارش نوسانگر کلاین-گوردن برای سیستم N-بعدی بدون هیچ برهم کنشی با استفاده از فرمول $Z = [Z_1]^N$ داده می شود.



شکل ۴-۲- مقایسه تابع پارش Z در دو فضای جابجایی و فضای ناجابجایی

همچنین در شکل (۲-۴) سمت چپ رفتار تابع پارش را بر حسب پارامتر β نشان داده شده است. که با افزایش λ تابع پارش کاهش می‌یابد. همچنین دمای سیستم نسبت مستقیمی با تابع پارش دارد که در واقع با کاهش T تابع پارش کاهش می‌یابد. در تصویر سمت راست تغییرات تابع پارش سیستم در هر دو فضا بر اساس پارامتر τ به ازای مقادیر مختلف λ نشان داده شده است. با افزایش در بازه‌ی وسیع τ تابع پارش سیستم افزایش می‌یابد که در این روند در حالت جابجایی سریعتر است که اثر پارامتر ناجابجایی در این بازه قابل مشاهده می‌باشد.

شکل (۳-۴) رفتار انرژی آزاد هلمهولتز F/mc^2 ذرات سیستم N -بوزونی، نوسانگر کلاین-گوردن ناجابجایی را با استفاده از رابطه‌ی $F(N, V, T) = -k_B T \ln Z(V, T)$ را نشان می‌دهد. از شکل (۳-۴) سمت چپ مشاهده می‌شود که اثرات پارامتر ناجابجایی بر روی سیستم بر حسب τ به ازای λ های مختلف انرژی آزاد هلمهولتز کاهش می‌یابد. در شکل (۳-۴) سمت راست رفتار انرژی آزاد هلمهولتز ذرات سیستم N -بوزونی بر حسب λ به ازای β های مختلف نشان داده شده است. سیستم به ازای مقادیر کوچک λ یعنی در بازه‌ی $0 \leq \lambda \leq 50$ روند افزایشی داشته و در بازه‌ی $\lambda > 50$ بطور یکنواخت افزایش می‌یابد.



شکل ۴-۳- انرژی آزاد هلمهولتز F/mc^2 در دو فضای جابجایی و ناجابجایی.

کمیت ترمودینامیکی دیگر با استفاده از روابط زیر بطور سراسر و مستقیم بدست می‌آیند.

انرژی درونی متوسط سیستم از رابطه $U = Nmc^2\tau^2 \frac{\partial \ln Z_1}{\partial \tau}$ حاصل می‌شود. در شکل (۴-۴)

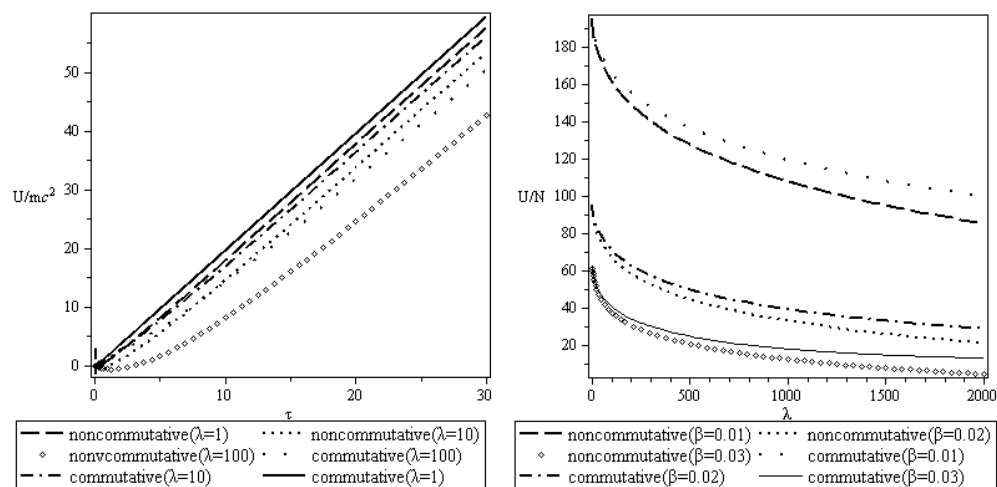
(۴) سمت چپ تغییرات انرژی درونی U/mc^2 سیستم بر حسب τ به ازای مقادیر مختلف λ

نشان داده شده است. با افزایش τ انرژی درونی سیستم افزایش می‌یابد. در شکل (۴-۴)

سمت راست تغییرات انرژی درونی U/N سیستم بر حسب λ به ازای مقادیر مختلف β

نشان داده شده است. با کاهش دما در بازه $0 \leq \lambda \leq 500$ انرژی درونی سیستم کاهش می‌-

یابد. به ازای مقادیر خیلی بزرگ λ یعنی در بازه $\lambda > 500$ بطور یکنواخت کاهش می‌یابد.



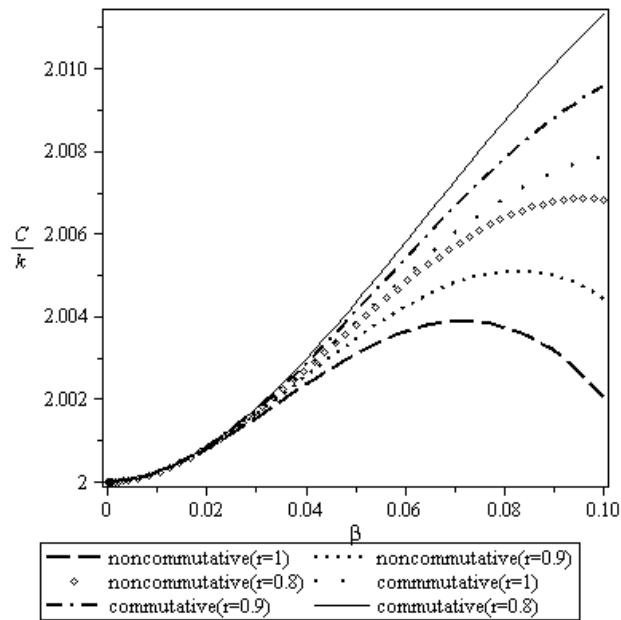
شکل ۴-۴- انرژی درونی متوسط U/mc^2 در دو فضای جابجایی و ناجابجایی بر حسب τ به ازای r های مختلف.

ظرفیت گرمایی ویژه در حجم ثابت از رابطه‌ی $C_v = -k_B \beta^2 \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \beta}$ بدست می‌آوریم. در

شکل (۴-۵) تغییرات ظرفیت گرمایی ویژه C/k_B سیستم بر حسب β به ازای مقادیر

مختلف λ نشان داده شده است. با افزایش β در بازه‌ی کوچک $0 \leq \beta \leq 0.07$ بطور یکنواخت

افزایش می‌یابد و به آرامی در بازه‌ی $\beta > 0.07$ روند کاهشی پیدا می‌کند.

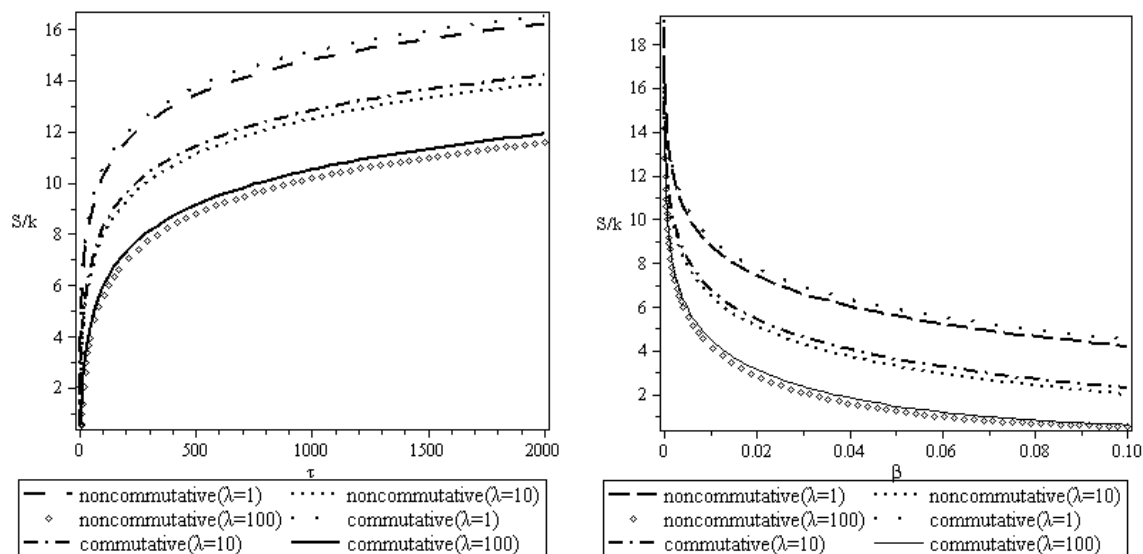


شکل ۴-۵- ظرفیت گرمایی ویژه C/k_B در دو فضای جابجایی و ناجابجایی بر حسب β به ازای λ های مختلف.

کمیت استاتیکی مهم، یعنی آنتروپی، به فرم معادله‌ی (۴-۷۸) در نظر گرفته شده است:

$$S = Nk_B \ln Z_1 - Nk_B \beta \frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z_1), \quad (4-78)$$

در شکل (۴-۶) سمت چپ آنتروپی S/k_B سیستم بر حسب τ به ازای مقادیر مختلف r نشان داده شده است. با افزایش τ در بازه‌ی بزرگ $0 \leq \tau \leq 500$ بطور یکنواخت افزایش می‌یابد و این روند به آرامی در بازه‌ی $\tau > 500$ ادامه می‌یابد. اثر پارامتر ناجابجایی قابل مشاهده است. در شکل (۴-۶) آنتروپی S/k_B سیستم بر حسب τ به ازای مقادیر مختلف r نشان داده شده است. با افزایش τ در بازه‌ی بزرگ $0 \leq \tau \leq 500$ بطور یکنواخت افزایش می‌یابد و این روند به آرامی در بازه‌ی $\tau > 500$ ادامه می‌یابد. اثر پارامتر ناجابجایی قابل مشاهده است.



شکل ۴-۶- ظرفیت گرمایی ویژه S/k_B در دو فضای جابجایی و ناجابجایی.

ملاحظه نمائید آنتروپی سیستم برای دو حالت بر حسب دما رسم شده است در شکل سمت راست به ازای دمای معکوس رسم شده که با کاهش دما متعاقبا کاهش آنتروپی انتظار می رود همانطور که مشاهده می کنید با پیش بینی و تجربه سازگار است. همچنین در شکل سمت چپ بر حسب پارامتر τ که متناسب با دما می باشد آنتروپی نسبت مستقیمی با افزایش دما از خود نشان می دهد.

نتائج

از جمله موضوع جالبی که در سال های اخیر مورد توجه قرار گرفته مربوط به فضای ناجابجایی می باشد. برخی تحقیقات و پژوهش ها در نظریه ی ریسمان و از جمله نظریات مکانیک کوانتومی گرانش منجر به این ایده شده که هندسه ی فضا-زمان در مقیاس های نزدیک به مقیاس پلانک یعنی از مرتبه ی $\hbar$ هندسه ی ناجابجایی است. به طوری که مختصات فضا-زمان مانند عملگرها رفتار می کنند و با هم جابجا نمی شوند. همچنین تلاش های مختلفی انجام شده است تا بتوان تاثیر ناجابجایی بودن هندسه ی فضا-زمان را در مقیاس های پایین تر از مقیاس پلانک مشاهده کرد. که به این منظور نظریات میدان موثر روی فضا-زمان ناجابجایی فرمول بندی شده اند. مشخصه ی مهم در فضای ناجابجایی θ معرفی شده است. در این پایان نامه فرمیون ها و بوزون های نسبیتی تحت معادلات کلاین-گوردن و دیراک و ذرات غیر نسبیتی را تحت معادله ی شرودینگر بررسی کردیم همچنین اثرات میدان مغناطیسی را بر روی این معادلات نشان دادیم. در غیاب و در حضور میدان مغناطیسی اثرات جالبی بر روی ترازهای لاندو را دیدیم در ادامه ی کار ویژه مقادیر انرژی یا طیف نسبیتی آن ها را بدست آوردیم همچنین متناظر با آن ویژه توابع سیستم مورد نظر را محاسبه نمودیم. در واقع برای ذرات با اسپین صفر و با اسپین نیمه صحیح با اعمال اثر ناجابجایی دیدیم در ترازهای لاندو معادلات تغییرات قابل مشاهده ای وجود دارد. در واقع تصحیح ناجابجایی بر اثرات آهارونف-بوهوم و آهارونف-کشر برای ذرات با اسپین متفاوت تاثیر گذار بوده است. هر دو اثر بطور تجربی تأیید شده بودند بنابراین انگیزه ای بود تا این معادلات مهم را با این اثرات مکانیک کوانتومی محض با پتانسیلهای متفاوت در محدوده ی معین مورد بررسی قرار دهیم. ما معادله شرودینگر دو بعدی را در حضور میدان مغناطیسی خارجی و با پتانسیل کلینگبرگ در فضای جابجایی، فضای ناجابجایی و فضای فاز ناجابجایی توسط روش شبه دقیق مورد

مطالعه قرار دادیم و بعد از جبر نسبتا دست و پا گیر، ما مقادیر ویژه انرژی را بدست آوردیم. به عنوان پتانسیل در نظر گرفته شده حالت کلی تر آن مورد برهمکنش کولنی، خطی، هارمونیک و کرنل است، نتایج به دست آمده را می توان در زمینه های مختلف مرتبط و به خصوص فیزیک ذرات بنیادی استفاده کرد. همچنین برای معادله کلاین-گوردن در فضای جابجایی، فضای ناجابجایی و فضای فاز ناجابجایی در حضور پتانسیل شبه نوسانی در غیاب میدان مغناطیسی و با اعمال میدان مغناطیسی مورد بررسی و مطالعه قرار دادیم. در ادامه ما برای این مسئله با در نظر گرفتن ضریب تکانه زوایه ای برابر صفر در معادله ای اصلی میدان مغناطیسی بحرانی را بدست آوردیم که به ازای این میدان مغناطیسی بحرانی اثرات شکافتگی انرژی ناشی از مولفه ی سوم اندازه حرکت زاویه ای دیده نمی شود یعنی شکافتگی از بین می رود و به ازای پارامتر ناجابجایی ویژه در این حالت اثر ناجابجایی از بین رفته و مسئله بدون اعمال میدان مغناطیسی به فضای ناجابجایی نگاشته می شود. در بخش های بعدی طیف انرژی نسبیتی مربوط به فضای ناجابجایی و فضای فاز ناجابجایی را بدست آوردیم. در نهایت توابع موج را بطور دقیق و متناظر با ویژه مقادیر انرژی را بدست آوردیم برخلاف کارهای دیگر که از نظریه آشفتگی به دست آمده است ما از روش دقیق استفاده کردیم. با حل تحلیلی دقیق طیف انرژی نسبیتی و ویژه توابع این مسئله را به دست آوردیم. ما نقش پارامتر ناجابجایی را در طیف سیستم مشاهده نمودیم.

پیشنهادات

موضوعاتی که بعنوان پیشنهاد و مطالعات بعدی می‌توان برشمرد از جمله برای بررسی این اثر در حوزه‌ی مکانیک کوانتومی برای ذرات نسبییتی با اسپینهای متفاوت مانند اسپین ۱ و اسپین ۳/۲ قابل تعمیم است. همچنین بعنوان ایده‌ی دوم می‌توان اثرات پارامتر ناجابجایی را با اعمال میدان مغناطیسی برای اثرات کوانتومی دیگر از جمله اثر آهارونف-کشر، اثر هی-مککلر-ویلکنز و اثر آناندن و ... برای معادلات نسبیتی و غیرنسبیتی انجام داد که برای ذرات قطبیده و باردار نتایج بسیار جالب و قابل توجهی بدست خواهد آورد و بعنوان ایده‌ی دیگر در قلمرو مکانیک کوانتومی آماری می‌توان طیف انرژی نسبیتی و غیرنسبیتی بدست آمده را مورد مطالعه قرار داد و کمیت‌های مهم و اساسی ترمودینامیکی را در حضور پتانسیلهای شعاعی و وابسته به زاویه بطور تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار داد.

مراجع فارسی و

انگلیسی

[۱] ساکورایی جی جی، (۱۳۸۰)، "مکانیک کوانتومی مدرن"، علیمحمدی م، مشفق ح، چاپ

اول، انتشارت دانشگاه تهران، ص ۷۳.

[۲] A. Connes, (۱۹۸۵), *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ.Math.* ۶۲, ۲۵۷.

[۳] M. Daszkiewicz, (۲۰۱۳), *Acta. Physica. Polonica. B*, Vol. ۴۴.

[۴] S. L. Woronowicz, (۱۹۸۷), *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* ۲۳ ۱۱۷.

[۵] A. Connes, M. A. Rieffel, (۱۹۸۷), *Contemp.Math.* ۶۲ ۲۳۷.

[۶] A. Connes, J. Lott, (۱۹۹۱), *Nucl. Phys.(Proc. Suppl.)* ۱۸ B ۲۹.

[۷] R. J. Szabo, (۲۰۰۳), *Phys. Rept.* ۳۷۸ ۲۰۷ [hep-th/۰۱۰۹۱۶۲].

[۸] F. A. Schaposnik "Three lectures on noncommutative field theories", hep-th/۰۴۰۸۱۳۲.

[۹] H.S. Snyder, (۱۹۴۷), *Phys. Rev.* ۷۱ ۳۸.

[۱۰] A. Connes, M. Rieffel, (۱۹۸۵), Iowa City, Iowa, pp. ۲۳۷.

[۱۱] M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, A. Tureanu, (۲۰۰۱), *Phys. Rev. Lett.*, ۸۶, ۲۷۱۶.

[۱۲] P.A.M. Dirac, (۱۹۶۴), "Lectures on Quantum Mechanics", Belfer Graduate School, Yeshiva Univ. Press, New York.

[۱۳] M.R. Douglas, N.R. Nekrasov, (۲۰۰۲), *Rev.Mod.Phys.* ۷۳- ۹۷۷, [hep-th/۰۰۱۰۶۴۸].

[۱۴] J. Gomis, T. Mehen, (۲۰۰۰), *Nucl.Phys.B*, ۵۹۱ ۲۶۵-۲۷۶, [hep-th/۰۰۰۵۱۲۹].

[۱۵] T. Curtright, D. Fairlie, C. Zachos, (۱۹۹۸), *Phys. Rev. D*, ۵۸, ۰۲۵۰۰۲.

[۱۶] I. Daubechies, (۱۹۸۰), *Comm. Math. Phys.* ۷۵, no. ۳, ۲۲۹-۲۳۸.

- [17] H. Hassanabadi, Z. Molaee, S. Zarrinkamar, (2012), *Eur. Phys. J. C*, 72:2211
- [18] J. Hoppe, (1990), *Phys. Lett. B*, 200, 44.
- [19] J. Zhang, (2004), *Phys. Lett. B*, 584, 204.
- [20] O. Bertolami, et al., (2000), *Phys. Rev. D*, 62, 025010.
- [21] K. Li, J. Wang, C. Chen, (2000), *Mod. Phys. Lett. A* 15, 2160.
- [22] M. Rosenbaum, J.D. Vergara, (2006), *Gen. Relativ. Gravit.* 38(4), 607.
- [23] Hiley, B. J. (1997). "**David Joseph Bohm. 20 December 1917-27 October 1992**". Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society 43, 107.
- [24] W. Ehrenberg, R. E. Siday, (1949), *Proc. Phys. Soc. (London) B*, 62, 8.
- [25] Y. Aharonov, D. Bohm, (1959), *Phys. Rev.* 115 850.
- [26] S. Popescu, (2010), *Nature Physics* 6 (3), 101-103.
- [27] R.G. Chambers, (1960), *Phys. Rev. Lett.* 5, 3.
- [28] M. Peshkin, A. Tonomura, (1989), Springer-Verlag. ISBN 3-540-51067-4.
- [29] Y. Aharonov, A. Casher, (1984), *Phys. Rev. Lett.* 53 (4), 319-321.
- [30] A. Cimmino et al., (1989), *Phys. Rev. Lett.* 63, 380.
- [31] K. Sangster et al., (1993), *Phys. Rev. Lett.* 71, 3641.
- [32] X. G. He, B.H.J. McKellar, (1993), *Phys. Rev. A*, 47, 3444.
- [33] M. Wilkens, (1994), *Phys. Rev. Lett.* 72, 0.
- [34] H. Wei, R. Han, X. Wei, (1990), *Phys. Rev. Lett.* 65, 2071.

[35] J.P. Dowling, C.P. Willian, J.D. Franson, (1999), *Phys. Rev. Lett.* 83, 2486.

[36] A. G. Aronov, Y. V. Sharvin, (1987), *Rev. Mod. Phys.* 59, 700.

[37] P. Hyllus, E. Sjöqvist, (2003), *Foundation of Phys.* 33, 7.

[38] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, (1977), "**Quantum Mechanics: Nonrelativistic Theory**", Pergamon Press, pp. 108.

[39] L. D. Landau, (1930), *Z. Phys.* 64, 629.

[40] B. Paredes, P. Fedichev, J. I. Cirac, P. Zoller, (2001), *Phys. Rev. Lett.* 87, 104002.

[41] H. Hassanabadi, H. Rahimov, and S. Zarrinkamar, (2011), *ann. Phys. (Berlin)* 523, No. 7, 566 – 570.

[42] J. Killingbeck, (1987), *Phys. Lett. A.* 108 87.

[43] H. Hassanabadi, A. A. Rajabi, (2007), *Few-Body Syst.* 48: 201–210.

[44] S. H. Dong, Z. Ma, G. Esposito, (1999), *Found. Phys. Lett.* 12, 460.

[45] I.I. Goldman, et al, (1960), "**Problems in Quantum Mechanics**", Academic Press, New York, pp. 308.

[46] N. Brambilla, P. Consoli, G. M. Prosper, (1994), *Phys. Rev D*, 50, 5878-8092.

[47] C.R. Hagen, (1991), *Int. J. Mod. Phys. A*, 6, 3119.

[48] R. K. Pathria, (1992), "**Statistical Mechanics**" 1st ed, Pergamon Press, Oxford, pp. 53.

[49] G. Arfken, (1985), "**Mathematical Methods for Physicists**", 3rd ed. Orlando, FL: Academic Press, pp. 327-338.

Abstract

In this thesis, We study the relativistic and non-relativistic equation in commutative, non-commutative space and phase space with different potential under magnetic field hence the other choice is studying the equations in absence of magnetic field. We obtain energy spectrum and wave function in different situations by NU method. Also, we studied the Dirac oscillator problem in the presence of a harmonic interaction in both commutative and non-commutative cases. The motivation behind our study was the outstanding role of Dirac oscillator, harmonic interaction and the external magnetic field in particle and high-energy physics. We showed that the problem can be simply solved in an exact analytical manner by using proper transformations and the NU technique. As we expect, the results of the NC space, in the limit $\theta \rightarrow 0$ yield the commutative analogues. As the exact relations for the energies and the eigenfunctions are presented, the results can be immediately used to investigate the binding energies and many static properties. We can see that the effect of the NC parameter on the Landau levels is not negligible. It is also observe for relativistic bosons that when the quantum number change from $n=\lambda$, $\lambda=0$ to $n=\lambda$, $\lambda=\lambda$, the energy eigenvalues decrease in the both spaces. It is easy to show that we recover the case of commutative space as a special case of NC space by taking $\theta = 0$. We calculated spectrum of energies of relativistic fermions with spin $1/2$ for different n, l that related to the relativistic Dirac oscillator under a magnetic field, that the effect of the NC parameters on landau levels is considerable that compared with when the noncommutative parameters are zero. In fact, for the system will behave like the landau problem in commutative space, i.e. the normal Zeeman effect. We see that for the case of equal scalar and vector potentials in commutative space, the system becomes more bounded for increasing quantum numbers n and l . On the contrary, in the NC space, the system becomes more excited for increasing quantum numbers. In addition, it is observed that the energy difference between the neighbor states becomes less in the NC space.

Keywords: λ . Landau levels, λ . Noncommutative Space, λ . Noncommutative Phase Space, λ . Aharonov-Bohm effect, λ . Aharonov-Casher effect, λ . Non-relativistic equation, λ . relativistic equation.



Shahrood University of Technology

Physics Department

Master of Science Thesis

**Landau analog levels for dipoles in non-commutative space and
phase space**

Supervisor:

Dr. Hassan Hassanabadi

By:

Seyede Samira Hosseini

September ۲۰۱۳