

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته‌ای

پراکندگی نوکلئون - نوکلئون در دو بعد در محدوده انرژیهای پائین و محاسبه سطح
مقطع و طول پراکندگی

دانشجو:

مریم امینی

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا شجاعی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده: فیزیک
گروه: فیزیک هسته ای
پایان نامه کارشناسی ارشد مریم امینی

تحت عنوان:

پراکندگی نوکلئون - نوکلئون در دو بعد در محدوده انرژیهای پائین و محاسبه سطح مقطع و طول پراکندگی

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی
ارشد مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:

خدای بزرگ را شاکرم که در پرتو لطف و عنایتش نوشتن
این مجموعه میسر شد.

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم به ویژه همسر مهربانم که همواره راه
گشای مشکلاتم در تمام مراحل زندگی بوده اند. و بر خود
واجب می دانم زحماتشان را ارج نهاده و مراتب تشکر قلبی
و باطنی خویش را از الطاف و مهربانی های آنها ابراز دارم.

تشکر و قدردانی

حمد و سپاس پروردگار یکتا را که لطف و کرم بی کرائش اینجانب را نیز در بر گرفت تا به وسع توان خویش گامی کوچک در گستره علم و معرفت بردارم و میسر گشت تا از خرمن دانش و تجربه بزرگان و نیک اندیشان خوشه چینی کرده باشم.

اکنون به یاری خداوند متعال، این دوره از دوران تحصیل را به پایان رسانده ام هر چند واژه ها را یاری آن نیست که لطف و محبت و بزرگواریشان را که در تمام دوران زندگی ام جرعه نوش دریای مهر و محبتشان بوده ام به تصویر بکشم. اما به رسم ادب و احترام بوسه بر دستانشان زده و از حمایت ها و زحمات بی دریغ پدر و مادرم که همیشه دعای خیر آنها بدرقه راهم بوده است تشکر کنم و از همسر عزیزم بسیار متشکرم که بدون همکاری ایشان این کار اصلا امکان پذیر نبود. همچنین لازم می دارم که از زحمات استاد توانمندم جناب آقای دکتر محمد رضا شجاعی که با راهنمایی ها و نظرات ارزنده و صبر و حوصله فراوان، نقش مهمی در به ثمر رساندن این کار داشته اند صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم بی تردید انجام این پایان نامه بدون همکاری و راهنمایی ایشان هرگز ممکن نبود. و همچنین از اساتید دوران تحصیلی کارشناسی ارشدم جناب آقایان دکتر سوهانی و دکتر حسن آبادی و دکتر توکلی به خاطر همه زحماتی که متحمل شدند سپاسگزارم. از جناب آقای پروفسور رجبی و جناب آقای دکتر حسن آبادی که زحمت مطالعه و داوری پایان نامه را متقبل شده اند ممنونم. از دوستان بزرگوaram که مایه دلگرمی اینجانب بوده نهایت سپاسگزاری و امتنان را دارم.

تعهد نامه

اینجانب مریم امینی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد، رشته فیزیک هسته ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده ی پایان نامه ی پراکندگی نوکلئون - نوکلئون در دو بعد در محدوده انرژیهای پائین و محاسبه سطح مقطع و طول پراکندگی تحت راهنمایی دکتر محمدرضا شجاعی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امضای دانشجو

تاریخ

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

یکی از اهداف اساسی در فیزیک هسته ای مطالعه و بررسی هسته ها و ساختار داخلی آنها است. در ابتدا ما به بررسی و شناخت هسته ها پرداختیم و دریافتیم مطالعه و بررسی هسته ها و ساختار داخلی آنها به طور مستقیم به آسانی امکان پذیر نیست. هنگامی می‌خواهیم نیروهای هسته ای و قوانین حاکم برهمکنش های ذرات بنیادی را مطالعه کنیم باید از تکنیک پراکندگی استفاده نموده و سطح مقطع پراکندگی و طول پراکندگی را حساب کنیم. پس مسئله پراکندگی یکی از مسائل مهم در فیزیک است. برای بررسی پراکندگی در مجاورت یک پتانسیل، باید معادله شرودینگر را با پتانسیل مربوطه حل کرد و ویژه مقادیر و تابع موج را بدست آورد. پس در مرحله دوم به بررسی روش های مناسب برای حل معادله شرودینگر پرداختیم و روش مناسب را مشخص کردیم. در مرحله بعد یک پتانسیل مرکزی مانند پتانسیل وود ساکسون را در نظر گرفتیم و در مجاورت این پتانسیل با استفاده از روش تحلیلی مناسب معادله شرودینگر را حل نموده ایم و ویژه مقادیر انرژی و تابع موج را بدست آورده و با تکنیک های مناسب در انرژی های مختلف به بررسی پراکندگی پرداخته ایم و سطح مقطع پراکندگی و طول پراکندگی را محاسبه نموده ایم. در مرحله بعد یک گام جلوتر گذاشته و یک پتانسیل دو بعدی را در نظر گرفتیم، در حالت دو بعدی نیز با در نظر گرفتن پتانسیل وابسته به دو متغیر (r, θ) محاسبات را به صورت تحلیلی انجام داده ایم در این پایان نامه ما با استفاده از تقری WKB و با استفاده از روش های مناسب به بررسی پراکندگی در مجاورت این پتانسیل دو بعدی پرداخته ایم، و سطح مقطع پراکندگی و طول پراکندگی را بر حسب جابجایی های فازی بدست آورده ایم.

کلمات کلیدی: پراکندگی نوکلئون - نوکلئون - طول پراکندگی - پتانسیل وود ساکسون - جابجایی

فازی - پراکندگی در دو بعد - سطح مقطع پراکندگی

فهرست مطالب

ک	فهرست شکل ها	
ل	فهرست جدول ها	
۱	فصل اول: پراکندگی	
۱-۱	مقدمه	
۲-۱	خواص نیروهای هسته ای	
۳-۱	پراکندگی کلاسیکی	
۴-۱	پراکندگی کوانتومی	
۵-۱	سطح مقطع پراکندگی	
۶-۱	قضیه اپتیکی	
۷-۱	تابع موج پراکنده از پتانسیل مرکزی	
۸-۱	طول پراکندگی	
۹-۱	پراکندگی کشسان و غیرکشسان	
۱۰-۱	پراکندگی در انرژی های پایین	
۱۱-۱	پراکندگی از کره سخت	
۱۲-۱	پراکندگی از یک چاه مربعی جاذب	
۱۳-۱	پراکندگی با پتانسیل دو بعدی	
فصل دوم:	تقریب ها و پتانسیل های هسته ای	
۲-۱	مقدمه	
۲-۲	تقریب بورن	
۳-۲	پراکندگی کولنی و تقریب بورن	
۴-۲	تقریب WKB	
۵-۲	تقریب ایکونال	

۳۹.....	۲-۶ پتانسیل های نوکلئون - نوکلئون
۴۰.....	۲-۶-۱ پتانسیل شبه حلقوی کراتزر تعمیم یافته
۴۱.....	۲-۶-۲ پتانسیل وود- ساکسون
۴۲.....	۲-۶-۳ پتانسیل وود- ساکسون استاندارد
۴۳.....	۲-۶-۴ پتانسیل یوکاوا
۴۳.....	۲-۶-۵ پتانسیل هولسن عمومی
۴۴.....	۲-۶۵-۶ پتانسیل اکارت
۴۶.....	فصل سوم: روش های حل معادله شرودینگر
۴۷.....	۳-۱ مقدمه
۴۸.....	۳-۲ دستگاه مختصات ژاکوبی
۵۰.....	۳-۳-۱ روش NU
۵۱.....	۳-۳-۲ کلیات روش NU
۵۴.....	۳-۴ روش ابر تقارن
۵۵.....	۳-۵ روش های عددی
۵۵.....	۳-۶ پتانسیل های بین ذره ای
۵۷.....	۳-۷ روش های مونت کارلوی کوانتومی وردشی
۶۰.....	۳-۸ معادلات دیفرانسیل و روش های عددی
۶۲.....	۳-۸-۱ حل معادلات دیفرانسیل به روش Rung-Kutta
۶۴.....	۳-۸-۲ مراحل روش R-K4
۶۶.....	فصل چهارم: محاسبه سطح مقطع پراکندگی، دامنه و طول پراکندگی
۶۷.....	۴-۱ مقدمه
۶۷.....	۴-۲ معادله شرودینگر با پتانسیل وود ساکسون
۷۰.....	۴-۳ محاسبه سطح مقطع پراکندگی و طول پراکندگی در مجاورت پتانسیل وود ساکسون
۷۵.....	۴-۴ محاسبه سطح مقطع و طول پراکندگی با پتانسیل دو بعدی

۷۶.....	۴-۴-۱ معادله شرودینگر با پتانسیل دو بعدی
۷۷.....	۴-۴-۲ معادله شعاعی شرودینگر به روش NU
۸۱.....	۴-۴-۳ معادله زاویه ای شرودینگر به روش NU
۸۳.....	۴-۴-۴ سطح مقطع و طول پراکندگی
۸۸.....	نتیجه گیری
۸۹.....	مراجع

فهرست شکل‌ها

- شکل (۱-۱) نیروی تانسوری در دوترون ۴
- شکل (۲-۱) اختلاف فاز حاصل از پراکندگی نوترون- پروتون در انرژی متوسط ۵
- شکل (۳-۱) پراکندگی کلاسیکی ۶
- شکل (۴-۱) پراکندگی کشسان ۷
- شکل (۵-۱) پراکندگی کوانتومی ۸
- شکل (۶-۱) موج منعکس شده و موج انتقالی ۹
- شکل (۷-۱) طرحی از آزمایش پراکندگی ۱۱
- شکل (۸-۱) تابع موج پراکنده ۱۷
- شکل (۹-۱) چاه مربعی جاذب ۲۱
- شکل (۱۰-۱) تابع موج زمانی که $a_0 < 0, KR \square 1$ ۲۳
- شکل (۱۱-۱) تابع موج که $KR \rightarrow \pi/2$ ۲۴
- شکل (۱۲-۱) تابع موج زمانی که KR افزایش می‌کند ۲۵
- شکل (۱-۲) چگونگی پراکنده شدن ذرات ورودی ۳۱
- شکل (۲-۲) نموداری از تقریب پراکندگی ایکونال ۳۷
- شکل (۱-۴) نتایج تجربی سطح مقطع پراکندگی بر حسب انرژی های مختلف ۷۳
- شکل (۲-۴) نمودار انرژی بر حسب سطح مقطع پراکندگی ۷۴
- شکل (۳-۴) نمودار انرژی بر حسب دامنه پراکندگی ۷۴
- شکل (۴-۴) نمودار انرژی بر حسب طول پراکندگی ۷۵
- شکل (۵-۴) نمودار انرژی بر حسب سطح مقطع پراکندگی در حالت دو بعدی ۸۶
- شکل (۶-۴) نمودار انرژی بر حسب دامنه پراکندگی در حالت دو بعدی ۸۶
- شکل (۷-۴) نمودار انرژی بر حسب طول پراکندگی در حالت دو بعدی ۸۷

فهرست جدول‌ها

جدول (۱-۴) دامنه و سطح مقطع پراکندگی و طول پراکندگی با در نظر گرفتن پتانسیل وود ساکسون ۷۲

جدول (۲-۴) دامنه و سطح مقطع پراکندگی با در نظر گرفتن پتانسیل دو بعدی ۸۵

فصل اول

تئوری پراکندگی کلاسیکی و کوانتومی

۱-۱ مقدمه

نظریه پراکندگی یکی از مهمترین مسائل در فیزیک است:

♦ تقریباً همه اطلاعاتی که در مورد فیزیک هسته ای و اتمی جمع آوری شده است

توسط آزمایش های پراکندگی کشف شده است، به عنوان مثال، کشف هسته رادفورد، کشف ذرات زیر اتمی (مانند کوارک)، و ...

♦ در فیزیک انرژی پایین ، پدیده پراکندگی ارائه شده در مدل استاندارد ابزاری برای کشف سیستم های حالت جامد است، به عنوان مثال، نوترون، الکترون، پراکندگی اشعه ایکس ، و ...

♦ در حالت کلی می توان گفت مکانیک کوانتومی بدون پراکندگی بدون پیشرفت باقی می ماند^[۱].

در یک آزمایش پراکندگی ایده آل ، یک پرتو شدیدی از ذرات (A) با اندازه حرکت (K) از یک هدف موضعی (B) پراکنده شده است . چند حالت ممکن است اتفاق بیفتد که عبارتند از: ^[۱]

$$A + B \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B \\ A + B^* \\ A + B + C \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{کشسان} \\ \text{غیر کشسان} \end{array} \quad (1-1)$$

در فیزیک هسته ای و فیزیک انرژی های بالا، معمولاً فرآیندها را غیرکشسان در نظر میگیرند. برای ساده شدن بحث، ما فرایندهای کشسان را در نظر میگیریم. چون هدف شناخت نیروهای هسته ای است ابتدا مقدمه ای در مورد نیروهای هسته ای و خواص آن ارائه می دهیم.

۱-۲ خواص نیروهای هسته ای

خواص نیروی بین نوکلئون-نوکلئون را می توان به دو روش متفاوت مطالعه کرد. هم به طور مستقیم از آزمایش های برخورد و یا به طور غیر مستقیم از استخراج اطلاعات از خواص سیستم های مقید یا هسته ها. برخی از مهمترین نتایج درمورد نیروی قوی هسته ای یا نیروی هادرونی بین نوکلئون ها در زیر آورده شده است:

۱- این نیرو غالباً جاذب است. در غیر این صورت دافعه کولنی بین نوکلئون ها موجب فروپاشی هسته می گردید و هسته های پایدار نمی توانستند وجود داشته باشند. همچنین این نیرو در برابر سایر نیروها بسیار قوی است. می توان قدرت های نسبی برهمکنش ها را تا حدودی به صورت زیر در نظر گرفت:

$$10^{-42} / 10^{-13} / 10^{-2} \approx \text{گرنشی} / \text{ضعیف} / \text{الکترومغناطیسی} / \text{هادرونی}$$

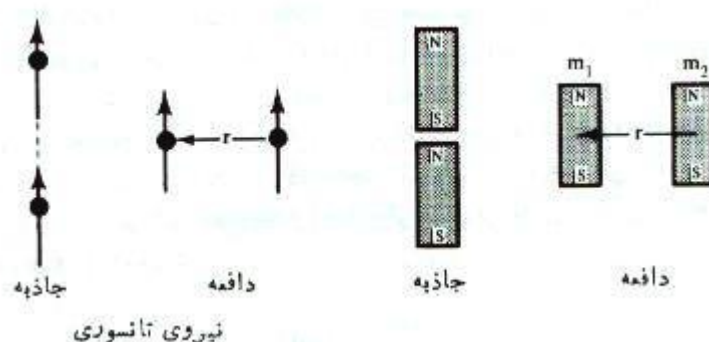
۲- نیروی هادرونی کوتاه برد است. آزمایش های اولیه پراکندگی α توسط رادفورد نشان داد که حداکثر برد نیروی هسته ای باید در حدود چند فرمی باشد. مطالعات ویگنر می گوید که نیروی هسته ای باید دارای بردی در حدود ۱ فرمی و بسیار قوی باشد. [۲]

۳- نیروی هادرونی اشباع پذیر است. اگر بپذیریم که هر تک نوکلئون همه نوکلئون های اطراف خود را جذب می کند باید تعداد $\frac{A(A-1)}{2}$ زوج برهمکنش متمایز وجود می داشت در این صورت باید انرژی بستگی با $A^2 \approx A(A-1)$ متناسب باشد و تمام هسته ها قطری برابر با برد نیروی هسته ای داشته باشند. هر دو پیش بینی انرژی بستگی متناسب با A^2 و حجم هسته ای ثابت برای هسته های $A > 4$ با تجربه مخالفت می کند. تجربه نشان داده است که حجم و انرژی بستگی برای اغلب هسته ها با عدد جرمی A متناسب اند و نیروی هسته ای اشباع پذیر است و هر نوکلئون درون هسته فقط تعداد محدودی از نوکلئون های دیگر را تحت تاثیر قرار می دهد جالب توجه است که در پدیده های شیمیایی نیز نیروی واندروالس رفتاری مشابه دارد. پدیده اشباع را می توان به دو روش مختلف توضیح

داد هم از طریق نیروهای تبدالی و یا از طریق نیروهایی که در فواصل کوتاه برد به شدت دافعه هستند (سخت مغز). در پیوند های شیمیایی نیروهای تبدالی منجر به پدیده اشباع می شوند و نیروهای سخت مغز در مایعات کلاسیکی مسئولیت این پدیده را بر عهده دارند ولی از آزمایش های پراکندگی هر دو عامل ذکر شده یعنی سخت مغز و نیروهای تبدالی دارای سهمی در پدیده اشباع دارند.

۴- نیروی بین نوکلئون ها در هسته به جهت گیری اسپین هر دو نوکلئون وابسته است. به عنوان مثال عدم مشاهده حالت تک تایه در دوترون و همچنین وجود اختلاف سطح مقطع های حالت های تک تایه و سه تایه در آن ثابت می کند که علاوه بر جمله پتانسیل مرکزی در برهمکنش نوکلئون- نوکلئون جمله پتانسیل اسپینی را نیز باید در نظر گرفت. [۳]

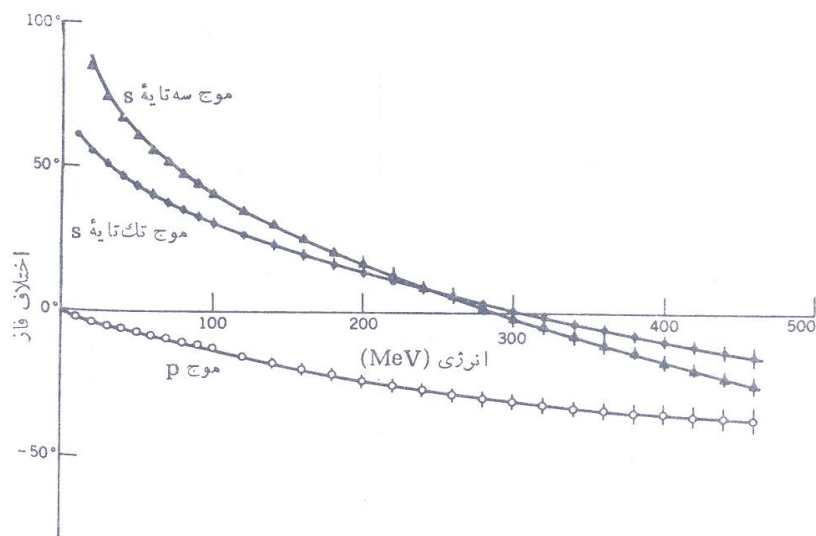
۵- نیروی هسته ای شامل یک مولفه تانسوری (غیر مرکزی) می باشد. حالت پایه در یک پتانسیل مرکزی غالباً یک حالت S است بنابراین وجود حالت d در دوترون حاکی از این واقعیت است که نیروی هسته ای به طور خالص نمی تواند مرکزی باشد. انرژی های حالت هایی با $L \neq 0$ توسط پتانسیل مرکز گریز بالاتر برده می شود. نیروی غیر مرکزی که باعث ایجاد گشتاور چارقطبی در دوترون می شود را نیروی تانسوری می نامند. این نیرو به زاویه بین بردار واصل بین نوکلئون ها و بردار اسپین دوترون وابسته است. یک مثال ساده کلاسیکی برای این مورد مثال دو آهن ربای میله ای با گشتاورهای دوقطبی m_1, m_2 در آرایش سیگاری و آرایش قرصی می باشد. در آرایش سیگاری آهنربا ها یکدیگر را جذب و در آرایش قرصی یکدیگر را دفع می کنند شکل (۱-۱) [۳-۲-۱].



شکل (۱-۱): نیروی تانسوری در دوترون برای پیکربندی سیگاری شکل جاذبه و برای پیکره بندی قرصی شکل دافعه است. با دو آهن ربای میله ای می توان مثالی کلاسیکی برای یک نیروی تانسوری ارائه داد.

۶- نیروهای هادرونی مستقل از بار هستند و پس از تصحیح برهمکنش الکترومغناطیسی نیروهای p - p و p - n بین نوکلئون هایی که در یک حالت باشند یکسان است [۴].

۷- نیروی هادرونی در فواصل کوتاه تبدیل به دافعه می شود. اگر به طور ساده چگالی هسته ای را مورد مطالعه قرار دهیم متوجه می شویم که رشد هسته در اثر افزایش نوکلئون ها به صورتی است که چگالی مرکزی آن تقریباً ثابت است از این رو باید عاملی وجود داشته باشد که از تجمع و نزدیک شدن بیش از حد نوکلئون ها جلوگیری می کند [۵].



شکل (۲-۱): اختلاف فاز حاصل از پراکندگی نوترون-پروتون در انرژی متوسط. تغییر اختلاف فاز موج S از مقادیر مثبت به منفی در انرژی حدود 300 MeV نشان می دهد که در این انرژی ها نوکلئون فرودی با مغز دافعه در برهمکنش نوکلئون-نوکلئون روبرو شده است.

۸- نیروی هادرونی به سرعت نسبی نوکلئون ها وابسته است. از آزمایشات برخورد شواهدی وجود دارد مبنی بر اینکه نیروی نوکلئون-نوکلئون به سرعت نسبی نوکلئون ها وابسته است.

در ادامه برای شناخت خواص نیروهای هسته ای به بررسی پراکندگی و شناخت این پدیده می-پردازیم.

۳-۱ پراکندگی کلاسیکی

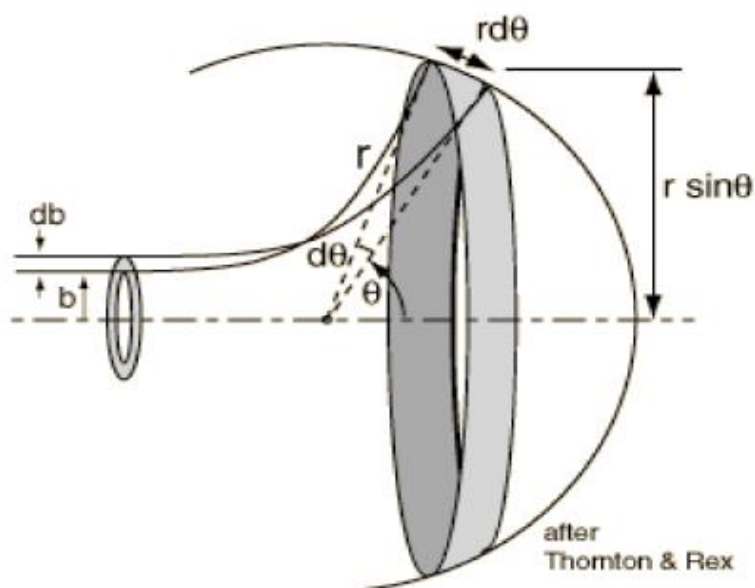
در مکانیک کلاسیک، برای پتانسیل مرکزی، $V(r)$ ، زاویه پراکندگی با پارامتر برخورد b ، مشخص می شود. تعداد ذرات پراکنده شده در هر واحد زمان بین θ ، و $\theta + d\theta$ ، برابر است تعداد ذرات پراکنده در واحد زمان بین b ، و $b + db$ ، [۶]. بنابراین، برای شار پراکنده شده، j_ℓ ، تعداد ذرات پراکنده به زاویه مشخص $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ ، در واحد زمان برابر است با

$$N d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta N = 2\pi b db j_\ell \quad (۲-۱)$$

بنابراین

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} \equiv \frac{N}{j_\ell} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (۳-۱)$$

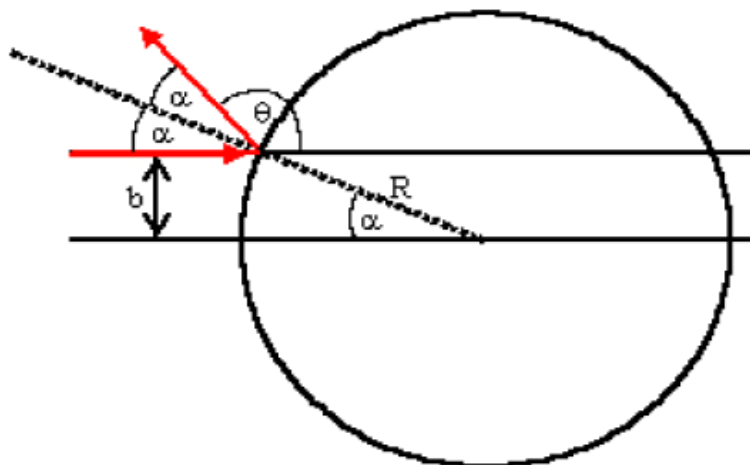
شکل (۳-۱) چگونگی پراکندگی کلاسیکی را نشان می دهد.



شکل (۳-۱): طرح کلی از پراکندگی را نشان می دهد، که در مرکز، پتانسیل قرار دارد و شار ورودی زمانی وارد ناحیه ای می شود که پتانسیل قرار دارد تحت تاثیر پتانسیل قرار گرفته و پراکنده می شود [۶].

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{b}{\sin\theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \quad (۴-۱)$$



شکل (۴-۱): پراکندگی کشسان از کره سخت تحت زاویه مشخص. همانطور که نشان داده شده موج نمی تواند وارد ناحیه سخت شود و پس از برخورد به سطح کره پراکنده می شود.

پراکندگی کشسان از یک حوزه سخت (غیر قابل نفوذ):

$$b(\theta) = R \sin \alpha = R \sin\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = -R \cos(\theta/2) \quad (5-1)$$

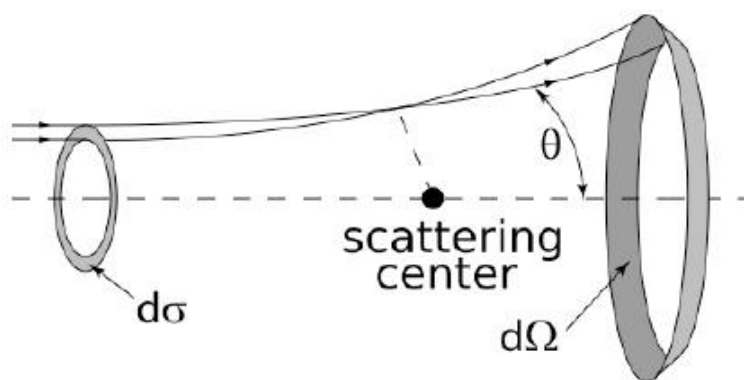
در یک نتیجه، در می یابیم که $\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{R}{2} \sin(\theta/2)$ و $\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \frac{R^2}{4}$. همانطور که انتظار می رود، سطح مقطع پراکندگی کل بصورت زیر خواهد بود:

$$\int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \pi R^2 \quad (6-1)$$

که ناحیه پیش بینی شده در شکل (4-1) نشان داده شده است.

4-1 پراکندگی کوانتومی

ساده ترین آزمایش پراکندگی، برخورد موضعی موج تخت با پتانسیل $V(r)$ ، است، به عنوان مثال، الکترون موثر در اتم، و یا ذرات α در هسته. شاری از ذرات، همگی در انرژی یکسان، از هدفی پراکنده می شوند و ذرات پراکنده توسط آشکارساز هایی که در زاویه انحراف قرار دارند اندازه گیری شده است، شکل (5-1) [7].



شکل (5-1): شاری از ذرات، همگی، از هدفی پراکنده می شوند و ذرات پراکنده توسط آشکارساز هایی که در زاویه انحراف قرار دارند اندازه گیری شده است. [7]

در حالت کلی، اگر تمام ذرات ورودی با بسته های موج نشان داده شوند، برای حل معادله وابسته به زمان شرودینگر:

$$i \hbar \partial_t \Psi(r, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \Psi(r, t) \quad (7-1)$$

و برای امواج خروجی دامنه های احتمال را پیدا می کنیم. اگر بسته موج به خوبی انرژی و جهت تکانه را مشخص کند، ممکن است موج تخت بصورت زیردر نظر گرفته شود:

$$\Psi(r, t) = \psi(r) e^{-iEt/\hbar} \quad (8-1)$$

بنابراین، برای حل معادله مستقل از زمان شرودینگر که بصورت زیر بیان میشود:

$$E \psi(r) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(r) \quad (9-1)$$

یک جواب معادله شرودینگر در غیاب پتانسیل عبارت است از یک موج تخت به شکل $e^{ik \cdot r}$ ، که تابع

موج $e^{ik \cdot r}$ از شرایط مرزی بسته موج دریافت می شود $[\lambda] = \hbar k / 2m$ ، انرژی ذرات

ورودی است و شار ورودی عبارتند از:

$$j = -i \frac{\hbar}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = \frac{\hbar k}{m} \quad (10-1)$$

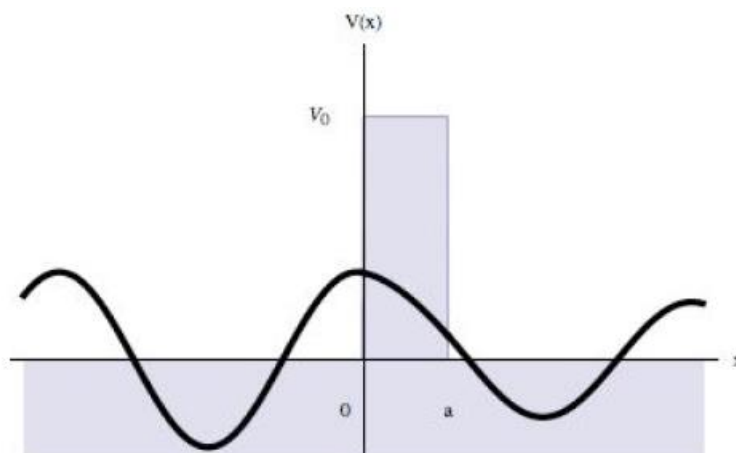
که k را در جهت مثبت محور Z ها تعریف می کنیم، آنگاه رفتار این جواب برای r های بزرگ را می

توان به شکل یک موج کروی ورودی و یک موج خروجی نوشت:

$$e^{ik \cdot r} \approx \frac{i}{2k} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell+1) \left[\frac{e^{-i(kr-\ell\pi/2)}}{r} - \frac{e^{i(kr-\ell\pi/2)}}{r} \right] p_{\ell}(\cos \theta) \quad (11-1)$$

در یک بعد، زمانی که یک موج تخت، e^{ikx} ، با هدف بصورت موضعی برخورد میکند بخشی از موج

منعکس و بخشی منتقل می شود شکل (۶-۱) نشان دهنده موج انتقالی و منعکس شده است [۸].



شکل (۶-۱) : موج منعکس شده و موج انتقالی نشان داده شده است، که موج ورودی از راست به چپ در حرکت است.

هر دو اجزای موج پراکنده خروجی، امواج تخت هستند که دارای تابع موج $K \pm$ هستند. (با حفظ بقای انرژی). در ابعاد بالاتر، مشابه همین موضوع است. تابع موج، خارج از منطقه هدف موضعی، از برهمکنش ناشی از برخورد موج تخت و موج پراکنده بوجود خواهد آمد، که تشکیل یک موج کروی را می دهد.

$$\psi(r) \approx e^{ikx} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (۱۲-۱)$$

فرض میکنیم بردار k هم راستای محور Z باشد، و $V(r)$ یک پتانسیل شعاعی باشد، و برخورد

کشسان باشد (بقای ذرات و انرژی)، تابع موج پراکندگی بصورت زیر خواهد شد [۹]:

$$\psi(r) \approx \frac{i}{2k} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} (2\ell+1) \left[\frac{e^{-i(kr-\ell\pi/2)}}{r} - s_{\ell}(k) \frac{e^{i(kr-\ell\pi/2)}}{r} \right] p_{\ell}(\cos\theta) \quad (۱۳-۱)$$

معادله بالا را می توان بصورت زیر باز نویسی کرد :

$$\psi(r) \approx e^{ik.r} + \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \frac{s_{\ell}(k)-1}{2ik} p_{\ell}(\cos\theta) \right] \frac{e^{ikr}}{r} \quad (۱۴-۱)$$

که متناظر با یک موج تخت به همراه یک موج کروی خروجی است. معادلات بالا در شرایطی است که از معادله شرودینگر تک ذره ای استفاده کنیم بطوری که m جرم کاهش یافته و θ زاویه در چارچوب مرکز جرم بین جهت k (محور Z) و نقطه مجانبی r می باشد و بنا به فرض شمارنده در آنجا قرار دارد. اگر ما در نظر بگیریم:

$$\psi(r) \approx e^{ikx} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (15-1)$$

آنگاه داریم:

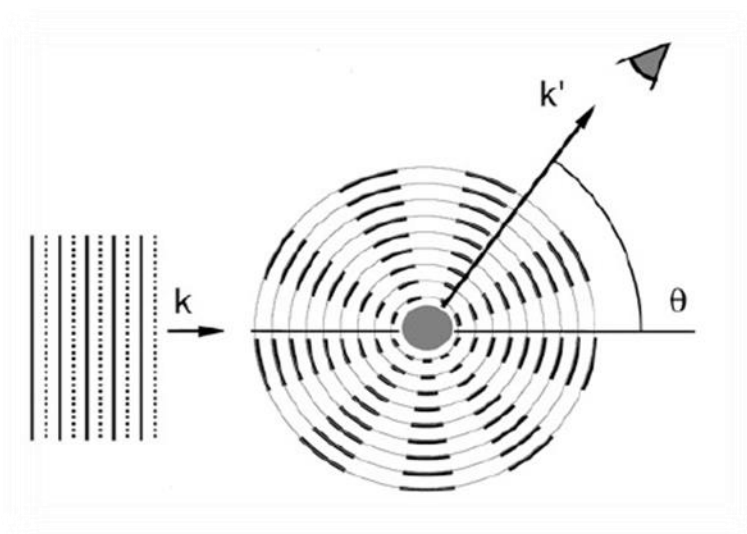
$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) f_{\ell}(k) P_{\ell}(\cos \theta) \quad (16-1)$$

که $f_{\ell}(k)$ دامنه موج پراکنده بصورت زیر است:

$$f_{\ell}(k) = \frac{s_{\ell}(k) - 1}{2ik} \quad (17-1)$$

$f_{\ell}(k)$ را می توان بر حسب تغییر فاز^۱، $\delta_{\ell}(k)$ ، تعریف کرد، که در آن $s_{\ell}(k) = e^{2i\delta_{\ell}(k)}$ است [۹].

شکل (۷-۱) طرحی از پراکندگی را در چارچوب آزمایشگاه نشان می دهد.



شکل (۷-۱): طرحی از آزمایش پراکندگی، زاویه پراکندگی در چارچوب آزمایشگاه است. موج از چپ وارد می شود و تحت پتانسیل قرار می گیرد و با زاویه مشخص پراکنده می شود.

۱-۵ سطح مقطع پراکندگی

^۱Phase shifts

در پراکندگی بصورت کلاسیکی و کوانتومی مفهومی بنام سطح مقطع پراکندگی، σ ، بیان می شود. یک ذره ورودی، که توسط یک بسته موج توصیف میشود به هدف نزدیک می شود و با هدف یک برهم کنش ایجاد می کند و در آخر دو بسته موج داریم: یکی به مسیر مستقیم ادامه می دهد، که توصیف کننده ی بخش پراکنده نشده ی باریکه است و دیگری تحت یک زاویه منحرف شده که نشان دهنده ی ذرات پراکنده شده است. تعداد ذرات پراکنده شده در یک زاویه ی فضایی معین بر واحد زمان و واحد شار ورودی بصورت سطح مقطع دیفرانسیلی برخورد، $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ، توصیف میشود، که در راستای (θ, ϕ) ، در نظر گرفته شده است [۸]. این تعداد متناسب است با شار ذرات، j_ℓ ، که به عنوان تعداد ذرات در واحد زمان از واحد سطح تعریف شده است.

در نتیجه سطح مقطع دیفرانسیلی از رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N}{j_\ell} \quad (1-18)$$

با انتگرال گیری در همه زوایا میتوان سطح مقطع کل را بدست آورد:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin\theta \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (1-19)$$

سطح مقطع پراکندگی، که به طور معمول به انرژی ذرات ورودی بستگی دارد، دارای ابعادی است و می تواند به $\sigma_{elastic}$ ، $\sigma_{inelastic}$ ، σ_{abs} و σ_{total} تقسیم بندی شود. در ادامه، ما روی پراکندگی کشسان تمرکز خواهیم کرد که در آن انرژی ثابت باقی می ماند و هیچ ذره ای تولید و یا نابود نمیشود. ما پراکندگی نوترون از پروتون را در نظر گرفتیم [۱۰].

با توجه به آنچه در بخش قبلی توضیح داده شد، اگر تابع موج پراکنده را بصورت زیر در نظر بگیریم:

$$\psi(r) \approx e^{ikx} + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1-20)$$

شار ذرات بصورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} j &= -i \frac{\hbar}{m} (\psi^* \nabla \psi + \psi \nabla \psi^*) = -i \frac{\hbar}{m} \text{Re} [\psi^* \nabla \psi] \\ &= -i \frac{\hbar}{m} \text{Re} \left\{ \left[e^{ik.r} + f(\theta) \frac{e^{ik.r}}{r} \right]^* \nabla \left[e^{ik.r} + f(\theta) \frac{e^{ik.r}}{r} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1-21)$$

با چشم پوشی از نوسانات که به طور متوسط به صفر میل می کند:

$$j = \frac{\hbar k}{m} + \frac{\hbar k}{m} \hat{e}_r \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} + \square (1/r^3) \quad (22-1)$$

در انجام محاسبات از جملات $1/r^3$ چشم پوشی کرده ایم زیرا این جملات برای r های بزرگ در مقابل جملات $1/r^2$ قابل چشم پوشی می باشد [۱۱]. شار ذرات عبوری از ناحیه $dA = r^2 d\Omega$ ، که $d\Omega$ زاویه فضایی است عبارتند از:

$$Nd\Omega = j \hat{e}_r dA = \frac{\hbar k}{m} \frac{|f(\theta)|^2}{r^2} r^2 d\Omega + \square (1/r) \quad (23-1)$$

با مقایسه این رابطه با شار ورودی $j_I \times d\sigma$ که در آن $j_I = \frac{\hbar k}{m}$ است، سطح مقطع پراکندگی را بدست می آوریم [۱۱-۱۰]:

$$d\sigma = \frac{Nd\Omega}{j_I} = \frac{j \hat{e}_r dA}{j_I} = |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (24-1)$$

پس باتوجه به رابطه بالا سطح مقطع دیفرانسیلی از رابطه زیر بدست خواهد آمد:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (25-1)$$

که

$$f(\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) f_{\ell}(k) p_{\ell}(\cos\theta) \quad (26-1)$$

با توجه به $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ ، سطح مقطع پراکندگی کل بصورت زیر محاسبه می شود:

$$\sigma_{tot} = \int d\sigma = \int |f(\theta)|^2 d\Omega \quad (27-1)$$

با در نظر گرفتن

$$\int d\Omega p_{\ell}(\cos\theta) p_{\ell'}(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \quad (28-1)$$

سطح مقطع پراکندگی کل عبارت است از:

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} &= \sum_{\ell, \ell'} (2\ell+1)(2\ell'+1) f_{\ell}^*(k) f_{\ell'}(k) \underbrace{\int d\Omega p_{\ell}(\cos\theta) p_{\ell'}(\cos\theta)}_{\substack{13 \\ 4\pi\delta_{\ell\ell'/(2\ell+1)}}} \\ &= 4\pi \sum_{\ell} (2\ell+1) |f_{\ell}(k)|^2 \end{aligned}$$

(۲۹-۱)

از رابطه (۱۵-۱) داریم:

$$f_{\ell}(k) = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_{\ell}(k)} - 1) = \frac{e^{i\delta_{\ell}(k)}}{k} \sin \delta_{\ell} \quad (۳۰-۱)$$

با توجه به رابطه فوق و رابطه (۲۶-۱):

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell}(k) \quad (۳۱-۱)$$

که رابطه فوق سطح مقطع کل را نشان می دهد [۱۲].

۱-۶ قضیه اپتیکی

یکی از مباحث کلی که در پراکندگی بیان می شود قضیه اپتیکی است. در زیر این قضیه را بصورت

کاملاً کلی و خلاصه بیان می کنیم. یک حقیقت جالب توجه این است که از آنجایی که

$$p_{\ell}(1) = 1 \quad (۳۲-۱)$$

$$f(0) = \sum_{\ell} (2\ell+1) f_{\ell}(k) = \sum_{\ell} (2\ell+1) \frac{e^{i\delta_{\ell}(k)}}{k} \sin \delta_{\ell}$$

آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f(0) &= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \operatorname{Im} [e^{i\delta_{\ell}(k)} \sin \delta_{\ell}(k)] p_{\ell}(1) \\ &= \frac{1}{k} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_{\ell}(k) = \frac{k}{4\pi} \sigma_{tot} \end{aligned} \quad (۳۳-۱)$$

عبارت بالا به عنوان قضیه اپتیکی، شناخته شده است. و حتی وقتی که فرایندهای غیر کشسان می

توانند رخ دهند هم برقرار می باشد. این یک رابطه بسیار مفید است و به زبان موجی از این حقیقت

ناشی می شود که سطح مقطع کل نمایش دهنده ی حذف قسمتی از شار از باریکه ی ورودی است.

چنین حذفی فقط می تواند در نتیجه ی تداخل مخرب بین موج ها رخ دهد. و این تداخل فقط می

تواند بین موج ورودی و موجی که بصورت کشسان در جهت رو به جلو پراکنده شده رخ دهد. این شرح می دهد که چرا $f(0)$ بصورت خطی ظاهر می شود. این استدلال موجی نمی تواند توضیح دهد که چرا بخش موهومی وارد کار می شود اما می توان نشان داد که در حالت کلی این نتیجه صحیح است [۸].

۷-۱ تابع موج پراکنده از پتانسیل مرکزی

برای پراکندگی از پتانسیل مرکزی، دامنه پراکندگی، $f(\theta)$ ، باید حول محور پراکندگی متقارن باشد. هر دو تابع موج پراکندگی، $\psi(r)$ ، و دامنه پراکندگی، $f(\theta)$ را می توان با استفاده از چند جمله ای های لژاندر بسط داد [۸]:

$$\psi(r) = \sum_{\ell=0}^{\infty} R_{\ell}(r) p_{\ell}(\cos \theta) \quad (۳۴-۱)$$

هر زمان که تابع موج ذره را بسط دهیم، ویژه تابع $\hat{L}^2$ و $\hat{L}_z$ به طور همزمان ویژه مقادیر، $\hbar^2 \ell(\ell+1)$ و صفر را خواهند داشت. وقتی موج در حالات $s, p, d, \dots$ قرار دارد به ترتیب $\ell = 0, 1, 2, \dots$ خواهد بود. خواهد بود. زمانی که ما فرم کلی $\psi(r)$ را داشته باشیم ما می توانیم تغییر فاز $\delta_{\ell}(k)$ ، را مشخص کنیم و با توجه به آن می توان دامنه های جزئی، $f_{\ell}(k)$ ، را بدست آورد. با استفاده از معادله شرودینگر برای تابع موج پراکندگی داریم:

$$\left[\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(r) \right] \psi(r) = E \psi(r) \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (۳۵-۱)$$

با جداسازی $\psi(r)$ ، معادله شعاعی شرودینگر بصورت زیر خواهد بود:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) + V(r) \right] R_{\ell}(r) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} R_{\ell}(r) \quad (۳۶-۱)$$

می توان معادله فوق را بصورت زیر بازنویسی کرد:

$$\left[\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - U(r) + k^2 \right] R_\ell(r) = 0 \quad (37-1)$$

که $U(r) = 2mV(r)/\hbar^2$ نشان دهنده پتانسیل موثر است. تابع موج پراکنده، از برهم نهی موج کروی

ورودی و موج کروی خروجی بدست می آید :

$$R_\ell(r) \approx \frac{i}{2k} \sum_{\ell=0}^{\infty} i^\ell (2\ell+1) \left(\frac{e^{-i(kr-\ell\pi/2)}}{r} - e^{2i\delta_\ell(k)} \frac{e^{i(kr-\ell\pi/2)}}{r} \right) \quad (38-1)$$

و به ازای $\ell=0$ داریم :

$$R_0(r) \approx \frac{1}{kr} e^{i\delta_0(k)} \sin(kr + \delta_0(k)) \quad (39-1)$$

که در انرژی های پایین $1 \ll kR$ ، که در آن R برد پتانسیل است [۸]. در انرژی های پایین، پراکندگی

عمدتاً در حالت S رخ می دهد، بطوری که می توانیم روی مقدار $\ell=0$ متمرکز شویم. در اینجا، با

توجه به $u(r) = rR_0(r)$ ، معادله شعاعی بصورت زیر خواهد شد:

$$[\partial_r^2 - U(r) + k^2] u(r) = 0 \quad (40-1)$$

با توجه به شرایط مرزی $u(0)=0$ ، موج پراکنده خروجی از رابطه زیر بدست می آید:

$$R(r) \approx A \sin(kr + \delta_0(k)) \quad (41-1)$$

۸-۱ طول پراکندگی

با توجه به تغییر فاز، δ_0 که در دسترس است طول پراکندگی، a_0 ، را با حفظ شرط $u(a_0)=0$

برای $1 \leq kR$ ، می توان بصورت زیر تعریف کرد [۱۳]:

$$\begin{aligned} u(a_0) &= \sin(ka_0 + \delta_0) = \sin(ka_0)\cos\delta_0 + \cos(ka_0)\sin\delta_0 \\ &= \sin\delta_0 [\cot\delta_0 \sin(ka_0) + \cos(kr)] = \sin\delta_0 [ka_0 \cot\delta_0 + 1] \end{aligned} \quad (42-1)$$

در نتیجه طول پراکندگی بصورت زیر است [۱۴]:

$$a_0 = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \tan \delta_0(k) \quad (43-1)$$

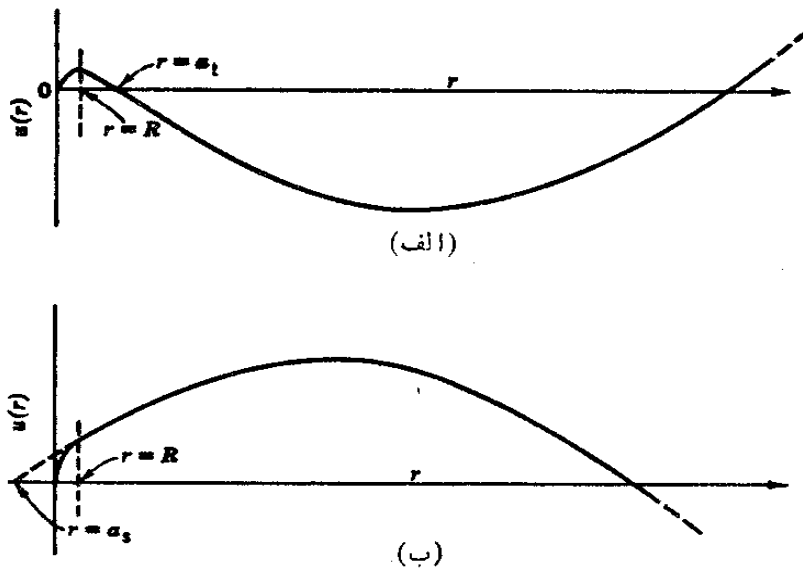
در نهایت سطح مقطع پراکندگی کل عبارت است از:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0(k) \xrightarrow{k \rightarrow 0} \frac{4\pi}{k^2} \frac{(ka_0)^2}{1+(ka_0)^2} = 4\pi a_0^2 \quad (44-1)$$

یعنی a_0 ، مشخصه سایز موثر از هدف است. اگر چه طول پراکندگی از لحاظ ابعادی از جنس طول است، ولی پارامتری است که قدرت پراکندگی را نشان می دهد و نه برد آن را. برای درک این مطلب با توجه به رابطه (۴۴-۱) که در آن مقدار δ_0 در انرژی های کم باید به سمت صفر میل کند تا a ، متناهی بماند. علامت طول پراکندگی متضمن اطلاعات فیزیکی است. تابع موج پراکنده برای حالت سه تاییه و تک تاییه در شکل (۸-۱) نشان داده شده است. در انرژی های کم می توان نوشت $a \approx -\delta_0/k$ ، و تابع موج پراکنده را می توان چنین نوشت [۱۴]:

$$u(r) = A \sin k(r-a) \quad (45-1)$$

مقدار a با توجه به نقطه ای که در آن $u(r)$ برابر صفر می شود، قابل تعیین است.



شکل (۸-۱): (الف) تابع موج پراکنده سه تایی ی np برای نوترون های آزمایشگاهی با انرژی حدود ۱/۲ fm در این مورد ، طول پراکندگی مثبت است.
(ب) تابع موج با طول پراکندگی منفی. این تابع موج با مورد مربوط به پراکندگی تک تایی ی np انطباق دارد.

۹-۱ پراکندگی کشسان و غیرکشسان

شرط $|S_\ell(k)| = 1$ از پایداری شار نتیجه می شود. در عمل، در بسیاری از آزمایش های پراکندگی، جذب شار ورودی وجود دارد، هدف ممکن است فقط برانگیخته شود، یا حالت آن تغییر کند، یا اینکه ذره ی دیگری خارج شود. تحت این شرایط، از تعریف زیر استفاده می کنیم :

$$S_\ell(k) = \eta_\ell(k) e^{2i\delta_\ell(k)} \quad (۴۶-۱)$$

با این شرط که

$$0 \leq \eta_\ell(k) \leq 1 \quad (۴۷-۱)$$

چون با جذب سروکار داریم. دامنه ی پراکندگی موج جزئی عبارت است از:

$$f_\ell(k) = \frac{S_\ell(k) - 1}{2ik} = \frac{\eta_\ell(k) e^{2i\delta_\ell(k)} - 1}{2ik} = \frac{\eta_\ell \sin 2\delta_\ell}{2k} - i \frac{1 - \eta_\ell \cos 2\delta_\ell}{2k}$$

$$(۴۸-۱)$$

و سطح مقطع کشسان کل بصورت زیر خواهد شد [۱۵]:

$$\begin{aligned}\sigma_{el} &= 4\pi \sum_{\ell} (2\ell+1) |f_{\ell}(k)|^2 \\ &= 4\pi \sum_{\ell} (2\ell+1) \frac{1-\eta_{\ell}^2 - 2\eta_{\ell} \cos 2\delta_{\ell}}{2k^2}\end{aligned}\quad (۴۹-۱)$$

همچنین یک سطح مقطع برای فرایندهای کشسان وجود دارد، که یک اتلاف شار را توصیف می کند.

شار شعاعی ورودی که توسط

$$\frac{i}{2k} \frac{e^{ikr}}{r} p_{\ell}(\cos \theta)$$

حمل می شود، عبارت است از

$$\left(\frac{\hbar k}{m}\right) \left[\frac{4\pi}{(2k)^2} \right]$$

شار شعاعی خروجی برابر است با

$$\left(\frac{\hbar k}{m}\right) \left[\frac{|S_{\ell}(k)|^2 4\pi}{(2k)^2} \right]$$

بطوری که شار خالص تلف شده برای هر مقدار ℓ برابر است با:

$$\left(\frac{\hbar k}{m}\right) \left(\frac{\pi}{k^2}\right) [1 - \eta_{\ell}^2(k)]$$

بنابراین با تقسیم بر شار ورودی، به دست می آوریم [۸]:

$$\sigma_{inel} = \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) [1 - \eta_{\ell}^2(k)] \quad (۵۰-۱)$$

بنابراین سطح مقطع کل عبارت است از

$$\begin{aligned}\sigma_{tot} &= \sigma_{el} + \sigma_{inel} \\ &= \frac{\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) [1 - \eta_{\ell}^2 - 2\eta_{\ell} \cos 2\delta_{\ell} + 1 - \eta_{\ell}^2] \\ &= \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell} (2\ell+1) (1 - \eta_{\ell} \cos 2\delta_{\ell})\end{aligned}\quad (۵۱-۱)$$

اگر $\eta_\ell(k)=1$ باشد، هیچ جذبی رخ نمی دهد، و سطح مقطع غیر کشسان صفر می شود. وقتی $\eta_\ell(k)=0$ باشد، جذب کامل داریم.

۱-۱۰ پراکندگی در انرژی های پایین

با استفاده از رابطه (۱-۲۶) سطح مقطع دیفرانسیلی را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} \left| \sum_L (2\ell+1) e^{i\delta_\ell(k)} \sin \delta_\ell(k) p_\ell(\cos \theta) \right|^2 \quad (۱-۵۲)$$

با توجه به نظریه کلاسیکی انتظار داریم که اندازه حرکت زاویه بصورت زیر خواهد شد:

$$\ell \leq \frac{pa}{\hbar} = ka \quad (۱-۵۳)$$

با محدود بودن جمع در (۱-۵۲)، می توان با برازش سطح مقطع دیفرانسیلی که در تعدادی از زاویه ها اندازه گیری شده، به شکلی مانند زیر رسید

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{n=0}^N A_n (\cos \theta)^n \quad (۱-۵۴)$$

که با استفاده از آن می توان تغییر فاز پراکندگی را برای تعدادی از مقادیر ℓ محاسبه کرد. ارتباط بین تغییر فاز $\delta_\ell(k)$ و پتانسیل $V(r)$ از طریق معادله شرودینگر می باشد، معادله شعاعی دارای جوابی است که رفتار مجانبی آن بصورت زیر می باشد [۱۶]

$$R_\ell(r) = \frac{1}{r} \sin \left[kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell(k) \right] \quad (۱-۵۵)$$

که یک ضریب دامنه را در جلوی آن در نظر نگرفته ایم . پس، با داشتن $V(r)$ ، یک روش سر راست برای محاسبه $\delta_\ell(k)$ این است که از معادله ی شعاعی روی مقادیری از r که برد پتانسیل دور می-باشند انتگرال گیری عددی کنیم، و رفتار مجانبی را بررسی کنیم.

۱۱-۱ پراکندگی از یک کره سخت

پتانسیل کره سخت را در نظر بگیرید:

$$U(r) = \begin{cases} \infty & r < R \\ 0 & r > R \end{cases} \quad (۵۶-۱)$$

با توجه به شرایط مرزی مناسب $U(R)=0$ ، و غیر قابل نفوذ بودن کره، تابع موج پراکندگی برابر خواهد شد با

$$U(r) = A \sin(kr - \delta_0), \quad \delta_0 = -kR \quad (۵۷-۱)$$

طول موج پراکندگی و دامنه پراکندگی برابر است با

$$a_0 \approx R \quad (۵۸-۱)$$

$$f_0(k) = \frac{e^{ikR}}{k} \sin(kR)$$

سطح مقطع پراکندگی کل را می توان بصورت زیر نوشت:

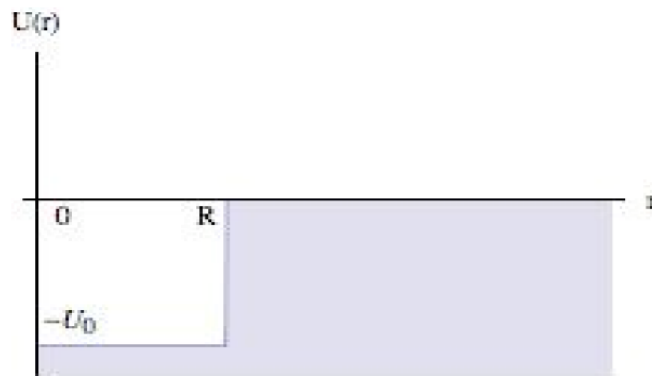
$$\sigma_{tot} \approx 4\pi \frac{\sin^2(kR)}{k^2} \approx 4\pi R^2 \quad (۵۹-۱)$$

ضریب ۴ در معادله فوق افزایش از مقدار کلاسیکی را نشان می دهد، πR^2 ، فرایند های پراکندگی از پتانسیل های تیز را نشان می دهد.

۱۲-۱ پراکندگی از یک چاه مربعی جاذب

برای بررسی پراکندگی، ما ذرات کوانتومی واقع بر چاه مربعی (شکل (۹-۱)) را در نظر می گیریم که

$$U(r) = -U_0 \theta(R-r), \quad U_0 > 0 \quad (۶۰-۱)$$



شکل (۹-۱): چاه مربعی جاذب

در اینجا باید توجه داشته باشیم که، روی انرژی پایین تمرکز می کنیم ، یعنی $kR \ll 1$ ، با توجه به معادله شعاعی شرودینگر

$$[\partial_r^2 + U_0 \theta(R-r) + k^2] U(r) = 0 \quad (۶۱-۱)$$

باتوجه به شرایط مرزی $U(0)=0$ ، و از معادله شعاعی رابطه (۶۱-۱)، می توان به دست آورد

$$U(r) = \begin{cases} C \sin(Kr) & r < R \\ \sin(kr + \delta_0) & r > R \end{cases} \quad (۶۲-۱)$$

و در رابطه فوق

$$K^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (E + U_0) \quad (۶۳-۱)$$

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

که $K^2 = k^2 + U_0 > k^2$ و δ_0 بیانگر تغییر فاز پراکندگی است.

با توجه به تابع موج و مشتق آن در $r=R$ ، داریم:

$$C \sin(KR) = \sin(kR + \delta_0) \quad (۶۴-۱)$$

$$CK \cos(KR) = k \cos(kR + \delta_0)$$

برای $\delta_0 = \delta_0(k)$ ، بدست می آوریم

$$K \cot(KR) = k \cot(kR + \delta_0) \quad (۶۵-۱)$$

در نتیجه می توان بدست آورد

$$\tan \delta_0(k) = \frac{k \tan(KR) - K \tan(kR)}{K + k \tan(kR) \tan(KR)}, \quad K^2 = k^2 + U_0 \quad (۶۶-۱)$$

$$K \approx U_0^{1/2} (1 + (k^2/U_0)), \quad kR \approx 1$$

توجه داشته باشیم اگر تعریف کنیم :

$$\tan qR = \frac{k}{K} \tan(KR) \quad (۶۷-۱)$$

آنگاه داریم

$$\tan \delta_0(k) = \frac{\tan(qR) - \tan(kR)}{1 + \tan(qR) \tan(KR)} = \tan(qR - kR) \quad (۶۸-۱)$$

پس می توان با استفاده از رابطه فوق داشته باشیم

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{k}{K} \tan KR \right) - kR \quad (۶۹-۱)$$

طول پراکندگی بصورت زیر بدست می آید:

$$a_0 = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \tan \delta_0 \approx -R \left(\frac{\tan(KR)}{KR} - 1 \right) \quad (۷۰-۱)$$

که برای $KR < \pi/2$ ، طول پراکندگی منفی خواهد بود [۱۷].

بنابراین در انرژی های پایین برای $\ell = 0$ ، تغییر فاز بصورت زیر خواهد شد

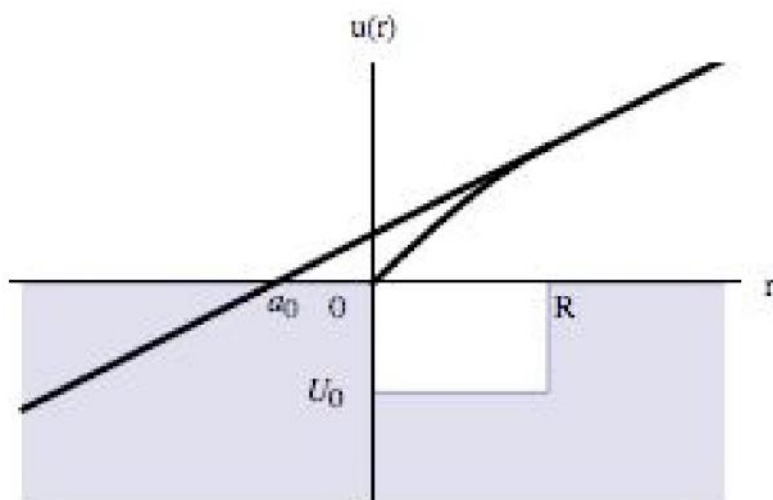
$$\tan \delta_0 \approx \delta_0 \approx ka_0 \approx kR \left(\frac{\tan(KR)}{KR} - 1 \right) \quad (۷۱-۱)$$

و سطح مقطع عبارت است از

$$\sigma_{tot} \approx \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0(k) \approx 4\pi R^2 \left(\frac{\tan(KR)}{KR} - 1 \right)^2, \quad K \approx U_0^{1/2} \quad (72-1)$$

(i) اگر $1 < KR$, $a_0 < 0$ ، آنگاه تابع موج نسبت به هدف کشیده می شود، و این مشخصه ای از

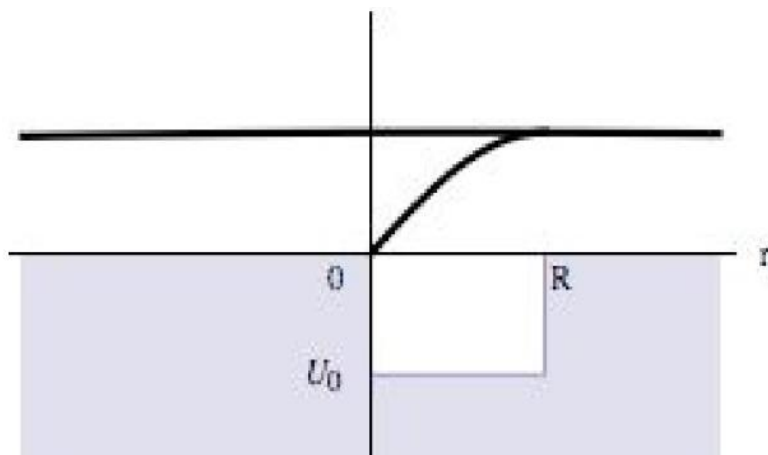
پتانسیل جاذب است. شکل (۱۰-۱) این تابع موج را نشان می دهد.



شکل (۱۰-۱): تابع موج را نشان می دهد زمانی که $1 < KR$, $a_0 < 0$ باشد.

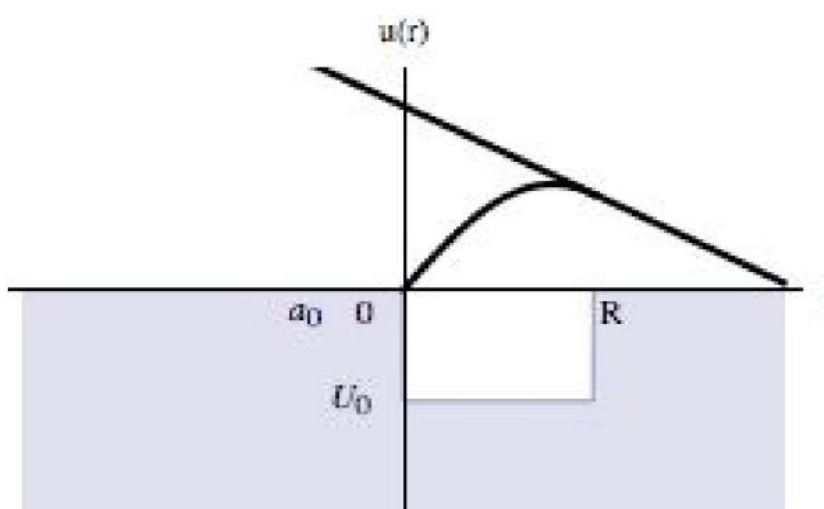
(ii) اگر $KR \rightarrow \pi/2$ هم طول پراکندگی a_0 و هم سطح مقطع $\sigma_{tot} \approx 4\pi a_0^2$ دچار اختلاف می

شوند. (شکل (۱۱-۱))



شکل (۱۱-۱): تابع موج زمانی که $KR \rightarrow \pi/2$

(iii) اگر KR ، افزایش یابد، a_0 به سمت مثبت پیش می رود، تابع موج تحت فشار قرار می گیرد و مانند تابع موج برای یک پتانسیل دافعه عمل می کند، تا زمانی که $KR = \pi$ شود و سطح مقطع برابر $\sigma_{tot} = 0$ شود، و دوباره این فرایند تکرار می شود. این فرایند در شکل (۱۲-۱) نشان داده شده است.



شکل (۱۲-۱): تابع موج، زمانی که KR افزایش پیدا می کند.

در واقع، هنگامی که $KR = \pi/2$ ، (فرض می کنیم به آهستگی در چاه پتانسیل پایین می رویم) که شرط برای این است که چاه به قدر کافی عمیق باشد تا یک حالت مقید شکل بگیرد. آنگاه، $KR \rightarrow \infty$

و از رابطه (۶۶-۱) نشان می دهد که

$$\tan \delta = \frac{1}{\tan ka} \rightarrow \infty \quad (۷۳-۱)$$

یعنی $\delta = \pi/2$ می شود.

۱-۱۳ پراکندگی با پتانسیل دو بعدی

برای بررسی پراکندگی در دو بعد همانند پراکندگی در یک بعد که در بخش های قبلی گفته شد، با

در نظر گرفتن معادله مستقل از زمان شرودینگر، بادر نظر گرفتن پتانسیل $V(r, \theta)$ داریم:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi(r) + V \psi(r) = E \psi(r) \quad (۷۴-۱)$$

با در نظر گرفتن مختصات قطبی، $[r \equiv (r, \theta)]$ ، آنگاه معادله فوق بصورت زیر خواهد شد:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 \theta} + [k^2 - U(r)] \psi = 0 \quad (۷۵-۱)$$

که در رابطه بالا $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$ و $U(\vec{r}) = 2\mu V(\vec{r}) / \hbar^2$ خواهد بود.

دامنه پراکندگی را نیز می توان بر حسب تغییر فاز، $\delta_m(k)$ ، بصورت زیر نوشت [۱۸]

$$f(k, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\theta) \varepsilon_m e^{i\delta_m(k)} \sin \delta_m(k). \quad (۷۶-۱)$$

که در رابطه بالا برای $m \neq 0$ ، $\varepsilon_m = 2$ ، و برای $m = 0$ ، $\varepsilon_0 = 1$ ، خواهد بود.

با توجه به دامنه پراکندگی سطح مقطع دیفرانسیلی بصورت زیر محاسبه می شود

$$\frac{d\sigma_{2D}}{d\theta} = \frac{|f(k, \theta)|^2}{k} \quad (۷۷-۱)$$

و با استفاده از سطح مقطع دیفرانسیلی می توان سطح مقطع کل را بدست آورد [۱۸-۱۹-۲۰]

$$\sigma_{2D}(k^2) = \int_0^{2\pi} (d\sigma_{2D} / d\theta) = 4 \sum_0^{\infty} \varepsilon_m \sin^2 \delta_m(k). \quad (۷۸-۱)$$

در این فصل ما به مطالعه و بررسی پراکندگی پرداختیم در ابتدا به بررسی پراکندگی یک بعدی پرداختیم و از جهات مختلف آن را مطالعه کردیم، و در آخر پراکندگی در دو بعد را مورد بحث قرار دادیم و در هر دو مورد سطح مقطع پراکندگی را مورد بررسی قرار دادیم.

فصل دوم

تقریب ها و پتانسیل های هسته ای

۲-۱ مقدمه

انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوکلئون ها که در هسته در حدود یکدیگرند، از لحاظ بزرگی از انرژی های لازم برای برانگیختن کوارک ها در یک نوکلئون خاص (290MeV) کمتر می باشند [۴]. بنابراین منطقی است که هسته را مجموعه ای از نوکلئون ها در نظر بگیریم که با یکدیگر برهم کنش دارند و اساساً در حالت پایه خود باقی می مانند. از این رو توانایی توصیف برهمکنش های بین نوکلئون ها برای درک فیزیک هسته ها بسیار مهم است. از آنجا که نوکلئون ها ذرات مرکبی هستند انتظار می رود که برهم کنش آنها با یکدیگر ساده نباشد. در واقع این برهم کنش ها تا حدی پیچیده نیز هستند. خواص نیروهای بین نوکلئون ها را می توان به طور مستقیم در آزمایشهای برخورد یا بطور غیرمستقیم با استخراج آنها از خواص سیستم های مقید یعنی هسته ها مطالعه کرد. از اطلاعات

بدست آمده از خواص هسته ها می توان نتایجی را در باره نیروی هسته ای بدست آورد. از طرفی بهتر است هر پدیده ای را در ساده ترین شرایط ممکن و ساده ترین حالت آن مطالعه کرد. ساده ترین موردی که نیروی هسته ای در آن اثر می کند هنگامی است که تنها دو نوکلئون برهم کنش داشته باشند. در عمل دو وضعیت پیش می آید؛ (۱) هنگامی که نوترون و پروتون به هم مقیدند (مانند یک دوترون)، (۲) در برخوردهای میان دو نوکلئون که معمولاً به آنها فرآیند های پراکندگی می گویند. بررسی فرایند پراکندگی به سادگی امکان پذیر نیست و نیازمند راه ها و روش های پیچیده و گوناگونی است. معمولاً در این روش ها از تقریب های متفاوت و پیچیده ای استفاده می شود که در ادامه به معرفی بعضی از این تقریب ها که برای بررسی پراکندگی و بدست آوردن سطح مقطع پراکندگی مفید واقع می شوند ، می پردازیم.

۲-۲ تقریب بورن^۲

در انرژی های بالاتر ، موج های جزئی بسیاری در پراکندگی سهمیم می باشند ، بنابراین روش مرجع این است که از تجزیه ی اندازه حرکت زاویه ای اجتناب کنیم. روشی که برای پتانسیل ضعیف و هنگامی که انرژی بالاست منجر به یک تقریب مفید می شود، این تقریب ، تقریب بورن نام دارد. که در آن فرایند پراکندگی را مانند یک گذار در نظر می گیریم. وضعیت گذارها باید بصورت زیر در نظر بگیریم [۸]:

پیوستار → پیوستار

اگر در چارچوب مرکز جرم کار کنیم، و پتانسیل به سمت صفر میل کند در عمل با یک مسئله ی تک ذره ای روبرو هستیم ، و این ذره یک گذار را از یک حالت اولیه که تابع موج آن بصورت زیر در نظر گرفته می شود انجام می دهد:

² Born approximation $= e^{ik \cdot r}$

$$(۱-۲)$$

تابع موج در حالت کلی را می توان بصورت زیر نوشت

$$\psi(r) = \phi(r) + \int G_0(r, r') U(r') \psi(r') d^3 r' \quad (۲-۲)$$

که در آن $(\nabla^2 + k^2)\phi(r) = 0$ و $(\nabla^2 + k^2)G_0(r, r') = \delta^d(r - r')$ خواهد بود.

در رابطه (۲-۲) داریم [۲۱]

$$G_0(r, r') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \quad (۳-۲)$$

$$\phi_k(r) = e^{ik \cdot r} \quad (۴-۲)$$

$$U(r) = \frac{2mV(r)}{\hbar^2} \quad (۵-۲)$$

اولین گذار را با استفاده از این تقریب و با استفاده از رابطه (۲-۲) می توان بصورت زیر نوشت [۲۲]:

$$\psi_k^{(1)}(r) = \phi_k(r) + \int G_0(r, r') U(r') \psi_k^{(0)}(r') d^3 r' \quad (۶-۲)$$

دومین گذار بصورت زیر است :

$$\psi_k^{(2)}(r) = \phi_k(r) + \int G_0(r, r') U(r') \psi_k^{(1)}(r') d^3 r' \quad (۷-۲)$$

برای گذارهای بعدی هم می توان به همین صورت ادامه داد. اگر بخواهیم گذارها را بصورت مستقل

بنویسیم می توان از بسط زیر استفاده کرد [۲۲]:

$$|\psi_k\rangle = |\phi_k\rangle + \hat{G}_0 \hat{U} |\phi_k\rangle + \hat{G}_0 \hat{U} \hat{G}_0 \hat{U} |\phi_k\rangle + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{G}_0 \hat{U})^n |\phi_k\rangle \quad (۸-۲)$$

پس با استفاده از رابطه

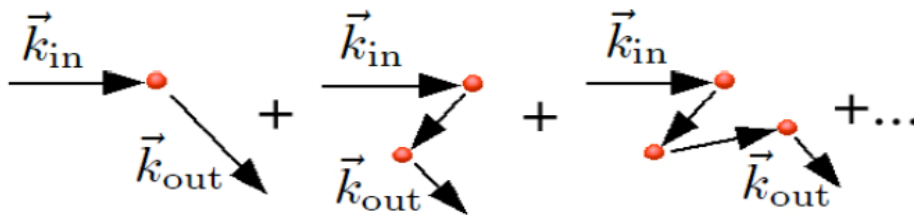
$$f(\theta, \phi) = -\frac{1}{4\pi} \langle \phi_k | U | \psi_k \rangle \quad (۹-۲)$$

می توان دامنه پراکندگی را با استفاده از تقریب بورن بسط داد [۲۳]

$$f = -\frac{1}{4\pi} \langle \phi_{k'} | U + UG_0U + UG_0UG_0U + \dots | \phi_k \rangle \quad (۱۰-۲)$$

از لحاظ فیزیکی ، میتوان گفت که ذرات ورودی پس از برخوردهای پی در پی پراکنده می شوند.

طرحی از این پراکندگی در شکل (۱-۲) دیده می شود.



شکل (۱-۲): چگونگی پراکنده شدن ذرات ورودی را پس از برخوردهای متعدد نشان می دهد

اولین تقریب بورن را می توان بصورت زیر نوشت [۱۲]:

$$f_{Bom} = -\frac{1}{4\pi} \langle \phi_{k'} | U | \phi_k \rangle \quad (۱۱-۲)$$

در اینجا متغیر ، $\Delta = k - k'$ ، رامعرفی می کنیم که $\hbar \Delta$ معرف اندازه حرکت است. دامنه پراکندگی

با تقریب بورن برای یک پتانسیل مرکزی بصورت زیر خواهد بود:

$$f_{Bom}(\Delta) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r e^{i\Delta \cdot r} U(r) = -\int_0^\infty r dr \frac{\sin(\Delta r)}{\Delta} U(r) \quad (۱۲-۲)$$

پس زمانی که $|k'| = |k|$ ، در نتیجه $\Delta = 2k \sin(\theta/2)$ می باشد.

۳-۲ پراکندگی کولنی و تقریب بورن

با توجه به ماهیت و طبیعت طولانی پراکندگی کولنی، و با توجه به اینکه شرایط مرزی در تابع موج پراکندگی صدق نمی کند [۲۵]. با این حال، ما می توانیم با در نظر گرفتن پتانسیل یوکاوا و در نظر گرفتن تقریب بورن دامنه پراکندگی و سطح مقطع پراکندگی را محاسبه کنیم. پتانسیل یوکاوا برابر است با

$$U(r) = U_0 \frac{e^{-r/\alpha}}{r} \quad (۱۳-۲)$$

زمانی که $\alpha \rightarrow \infty$ در نتیجه دامنه پراکندگی از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$f_{Bom} = -U_0 \int_0^\infty dr \frac{\sin(\Delta r)}{\Delta} e^{-r/\alpha} = -\frac{U_0}{\alpha^{-2} + \Delta^2} \quad (۱۴-۲)$$

و سطح مقطع دیفرانسیلی پراکندگی عبارت است از

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 = \frac{U_0^2}{16k^4 \sin^4 \theta / 2} \quad (۱۵-۲)$$

۴-۲ تقریب WKB^۳

تقریب WKB، همانند تقریب بورن برای پتانسیل های ضعیف و کند مناسب است. در اینجا هم شبیه به بخش قبلی زمانی که ما در سیستم مرکز جرم کارکنیم می توان تابع موج را مانند تابع موج یک ذره بصورت خطی در نظر گرفت. پس تابع موج بصورت زیر خواهد بود [۲۴-۸]:

$$\psi(x) = R(x) e^{is(x)/\hbar} \quad (۱۶-۲)$$

³ Wentzel- Kramers- Brillouin approximation

با در نظر گرفتن معادله مستقل از زمان شرودینگر بصورت زیر

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar} [E - V(x)] \psi(x) = 0 \quad (17-2)$$

و زمانی که مختصات قطبی را در نظر بگیریم داریم :

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = \left[\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{2i}{\hbar} \frac{dR}{dx} \frac{ds}{dx} + \frac{i}{\hbar} R \frac{d^2s}{dx^2} - \frac{1}{\hbar^2} R \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 \right] e^{is(x)/\hbar} \quad (18-2)$$

با جاگذاری این رابطه در معادله ی شرودینگر ، و با تفکیک قسمت موهومی و حقیقی، از قسمت

موهومی داریم :

$$R \frac{d^2s}{dx^2} + 2 \frac{dR}{dx} \frac{ds}{dx} = 0 \quad (19-2)$$

یعنی

$$\frac{d}{dx} \left(\log \frac{ds}{dx} + 2 \log R \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{ds}{dx} = \frac{C}{\hbar^2} \quad (20-2)$$

از قسمت حقیقی داریم:

$$\frac{d^2R}{dx^2} - \frac{1}{\hbar^2} R \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 + \frac{2m [E - V(x)]}{\hbar^2} R = 0 \quad (21-2)$$

با توجه به رابطه (۲۰-۲)، و قرار دادن آن در رابطه بالا خواهیم داشت :

$$\frac{d^2R}{dx^2} - \frac{C^2}{\hbar^2} \frac{1}{R^3} + \frac{2m [E - V(x)]}{\hbar^2} R = 0 \quad (22-2)$$

در اینجا تقریب زیر را بکار می بریم

$$\frac{1}{R} \frac{d^2R}{dx^2} \ll \frac{C^2}{\hbar^2} \frac{1}{R^4} = \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{ds}{dx} \right)^2 \quad (23-2)$$

در نتیجه این تقریب جمله اول در رابطه (۲۲-۲) حذف می شود، آنگاه می توان نوشت [۲۵-۸]:

$$\frac{C^2}{R^4} = 2m [E - V(x)] \quad (24-2)$$

بنابراین

$$\frac{C^2}{R^2} = \frac{ds}{dx} = \sqrt{2m [E - V(x)]}$$

(۲۵-۲)

در نتیجه خواهیم داشت :

$$s(x) = \int_{x_1}^x dy \sqrt{2m[E - V(y)]} \quad (۲۶-۲)$$

در نهایت با استفاده از رابطه (۲۳-۲) می توان گفت که شرط برقراری تقریب WKB [۸]:

$$\frac{\hbar}{\sqrt{2m(E - V(x))}} \ll \left| \frac{dV}{dx} \right| \quad (۲۷-۲)$$

در رابطه فوق داریم

$$E = \frac{p^2}{2m} + V_0 \Rightarrow p^2 = 2m(E - V_0) \Rightarrow p = \sqrt{2m(E - V_0)} \quad (۲۸-۲)$$

این شرط در صورتی برقرار است که $V(x)$ در یک طول موج به کندی تغییر کند. طول موج از نقطه ای به نقطه ی دیگر تغییر می کند، اما برای پتانسیل کند تغییر $V(x)$ با رابطه زیر تعریف می شود [۸].

$$\lambda(x) = \frac{\hbar}{p(x)} = \frac{\hbar}{\{2m[E - V(x)]\}^{1/2}} \quad (۲۹-۲)$$

نقاطی که در آنها $E - V(x) = 0$ نیاز به بررسی خاص دارد. زیرا $R(x)$ در معادله (۲۴-۲) در این نقطه تکین است. چون تابع موج و در نتیجه $R(x)$ نمی تواند تکین باشد، تکینگی $R(x)$ به معنای این است که تقریب (۲۳-۲) در این نقاط ضعیف است. این نقاط ویژه را نقاط برگشت می نامند. زیرا در این نقاط است که ذره کلاسیکی، برمی گردد، ذره کلاسیک تنها در ناحیه ی $E - V(x)$ می تواند حرکت کند [۲۶]. یک جواب در طرف چپ نقطه ی برگشت جایی که $E > V(x)$ برابر است با :

$$\psi(x) = \text{Re}^i \int_{x_1}^x dy \sqrt{\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)[E - V(y)]} \quad (۳۰-۲)$$

و جواب در طرف راست نقطه برگشت جایی که $E < V(x)$ بصورت زیر خواهد شد :

$$\psi(x) = \text{Re} \int_{x_1}^x dy \sqrt{\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)[E - V(y)]} \quad (۳۱-۲)$$

وقتی X افزایش می یابد دامنه جواب در رابطه فوق کاهش می یابد. تضعیف کل در نقطه برگشت دوم

، زمانی که $E \geq V(x)$ عبارت است از [۲۶]:

$$\frac{\psi(x_{II})}{\psi(x_I)} \approx e^{-\int_{x_I}^{x_{II}} dy \sqrt{(2m/\hbar^2)[V(y)-E]}} \quad (32-2)$$

پس با استفاده از رابطه (۲۹-۲)، رابطه (۲۷-۲) را می توان بصورت زیر نوشت :

$$\lambda \approx \frac{|E - V(x)|}{\left| \frac{dV}{dx} \right|} \quad (33-2)$$

$\frac{dV}{dx}$ ، یعنی شیب پتانسیل در هر نقطه ، پس شیب تابع پتانسیل است. پس هر چه مخرج بزرگتر

باشد، λ کوچکتر خواهد بود و تقریب WKB ، بهتر است، پس برای انرژی های بزرگتر تقریب

WKB ، بهتر است، و به ازای $E - V(x)$ ، مشخص هر چه $\frac{dV}{dx}$ کوچکتر باشد، تقریب بهتر پاسخ گو

است. یعنی پتانسیل تغییرات شدید نداشته باشد و پهنایی در حدود طول موج داشته باشد [۲۷].

با استفاده از مباحث گفته شده در بخش اول و روابط مربوط به پراکندگی در دو بعد و روابط تغییر فاز

می توان تغییر فاز WKB در دو بعد را بصورت زیر نوشت [۲۸]:

$$\delta_{2D}^{WKB} = m\pi/2 + \int_{r_0}^{\infty} dr (F^{1/2} - k) - kr_0 \quad (34-2)$$

همانطور که در بخش اول هم توضیح داده شد، در رابطه بالا k عدد موج بصورت $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$

تعریف می شود، و $m \equiv kb$ که b پارامتر برخورد است، و $F(r)$ بصورت زیر تعریف می شود

$$F(r) = k^2 - U(r) - \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{r^2} \quad (35-2)$$

و در این رابطه $U(r) = 2\mu V(r) / \hbar^2$ می باشد [۲۸].

۲-۵ تقریب ایکونال^۴

این تقریب، وضعیت هایی را پوشش می دهد که $V(x)$ در فاصله ای از مرتبه ی طول موج $\hbar$ (که می توان آن را کوچک در نظر گرفت) بسیار کم تغییر می کند. این نکته مهم که باید مد نظر گرفته شود این است که تقریب ایکونال به پتانسیل کاری ندارد و تقریب انرژی های بالا است، یعنی نیازی نیست که خود V کوچک باشد بلکه تنها کافی است $E \gg V(x)$ باشد، بنابراین محدوده ی اعتبار این تقریب با تقریب بورن متفاوت است [۸]. اگر انرژی ذره ورودی خیلی زیاد باشد زاویه هایی که ذره تحت آن پراکنده می شود، کوچک است، یعنی در زوایای بزرگ پراکنده نمی شود. بنابراین در انرژی های بالا، ذره مسیر کلاسیکی خود را ادامه خواهد داد و اگر بعنوان سیستم کلاسیکی نگاه کنیم ذره می آید و راه خودش را ادامه می دهد و می رود. پس چون تقریب ایکونال هم برای انرژی های بالاست می توان از تابع در تقریب WKB استفاده کرد (رابطه (۲-۳۱)).

همانطور که در فصل اول، روابط مربوط به پراکندگی گفته شد $f(k, k')$ بصورت زیر خواهد بود [۲۲]:

$$f(k, k') = -\frac{1}{4\pi} (2\pi)^3 \frac{2m}{\hbar^2} \langle k' | v | \psi^+ \rangle \quad (۲-۳۶)$$

تابع موج نیمه کلاسیکی را جایگزین تابع موج دقیق $\psi^{(+)}$ می کنیم، یعنی

$$\psi^{(+)} \approx e^{is(x)/\hbar} \quad (۲-۳۷)$$

با توجه به رابطه فوق داریم:

$$\frac{(\nabla S)^2}{2m} + V = E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (۲-۳۸)$$

که این رابطه منجر به معادله هامیلتونی-ژاکوبی برای S می شود. در اینجا تقریب دیگری را بکار می بریم و فرض می کنیم که مسیر کلاسیکی خطی راست است، که برای انحرافات کوچک در انرژی

S _____

⁴ Eikonal approximation

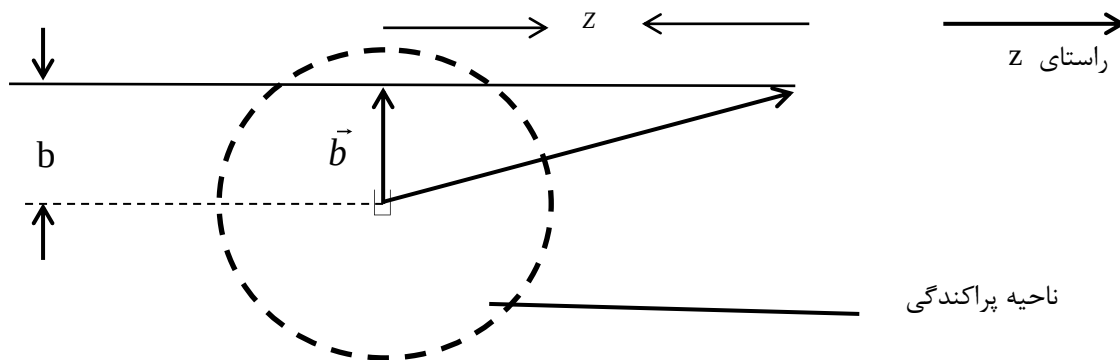
های بزرگ صادق است، با این تقریب را از رابطه (۳۷-۲) حساب می کنیم. موقعیتی را که در آن

مسیر خط راست در راستای z باشد در شکل (۲-۲) رسم شده است

با توجه به آن داریم [۲۹]:

$$\frac{S}{\hbar} = \int_{-\infty}^z \left[k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V \left(\sqrt{b^2 + z'^2} \right) \right]^{1/2} dz' + C \quad (۳۹-۲)$$

که در رابطه فوق C یک ثابت است.



شکل (۲-۲): نموداری از تقریب پراکندگی ایکنال که در آن مسیر خط راست کلاسیکی در راستای z است، و $|x|=r$ و $b=|b|$ پارامتر برخورد است.

ثابت اضافی را آن چنان در نظر می گیریم که داشته باشیم [۸]:

$$\frac{S}{\hbar} \rightarrow kz \quad \text{هر گاه} \quad V \rightarrow 0 \quad (۴۰-۲)$$

پس در حد پتانسیل صفر، شکل موج، یک موج تخت خواهد بود. پس می توان معادله (۳۸-۲) را

بصورت زیر نوشت :

$$\begin{aligned} \frac{S}{\hbar} &= kz + \int_{-\infty}^z \left[k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V \left(\sqrt{b^2 + z'^2} \right) - k^2 \right] dz' \\ &\cong kz - \frac{m}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^z V \left(\sqrt{b^2 + z'^2} \right) dz' \end{aligned} \quad (۴۱-۲)$$

که برای $E \approx V(x)$ داریم:

$$\sqrt{k^2 - \frac{2m}{\hbar^2} V(\sqrt{b^2 + z'^2})} \approx k - \frac{mV}{\hbar^2 k} \quad (42-2)$$

برای مقادیر بزرگ $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ استفاده کرده ایم. در نتیجه داریم:

$$\psi^{(+)}(x) = \psi^{(+)}(b + z\hat{z}) \approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ikz} \exp\left[\frac{-im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^z V(\sqrt{b^2 + z'^2}) dz'\right] \quad (43-2)$$

هر چند که رابطه فوق دارای شکل مجانبی صحیحی نیست، یعنی بصورت موج فرودی بعلاوه موج کروی خروجی (یعنی به شکل $e^{ikr}/r + f(\theta)e^{ikr}$ نیست و بعلاوه فقط به حرکت در راستای اولیه اشاره دارد)، اما با این وجود همچنان می توان از آن در رابطه (2-34) برای بدست آوردن عبارتی تقریبی برای $f(k, k')$ ، استفاده کرد، یعنی داریم [8-30]:

$$f(k, k') = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3x' e^{-ik'x'} V(\sqrt{b^2 + z'^2}) e^{ikx} \times \exp\left[-\frac{im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^{z'} V(\sqrt{b^2 + z''^2}) dz''\right] \quad (44-2)$$

با معرفی مختصات استوانه ای $d^3x' = b db d\phi_b dz'$ (شکل 2-2)، انتگرال سه بعدی (d^3x') را در رابطه (44-2) انجام می دهیم و به این نکته باید توجه داشت که

$$(k - k') \cdot x' = (k' - k) \cdot (b + z\hat{z}) \approx -k'b \quad (45-2)$$

در این رابطه از $k \perp b$ و $(k - k') \cdot \hat{z} \approx O(\theta^2)$ استفاده کرده ایم که می توان آن را در انحرافات کوچک نادیده گرفت. پراکندگی را در صفحه xz انتخاب کرده داریم:

$$k'b = (k \sin\theta \hat{x} + k \cos\theta \hat{z}) \cdot (b \cos\phi_b \hat{x} + b \sin\phi_b \hat{y}) \approx kb \cos\phi_b \quad (46-2)$$

عبارت $f(k, k')$ بصورت زیر خواهد شد [31]:

$$f(k, k') = -\frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int_0^\infty b db \int_0^{2\pi} d\phi_b e^{-ikb\theta \cos\phi_b} \times \int_{-\infty}^{+\infty} dz V \exp\left[\frac{-im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^z V dz'\right] \quad (47-2)$$

با استفاده از روابط

$$\int_0^{2\pi} d\phi_b e^{-ikb\theta \cos \phi_b} = 2\pi J_0(kb\theta) \quad (۴۸-۲)$$

9

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dz V \exp\left[\frac{-im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^z V dz'\right] = \frac{i\hbar^2 k}{m} \exp\left[\frac{-im}{\hbar^2 k} \int_{-\infty}^z V dz'\right] \Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} \quad (۴۹-۲)$$

که البته در آن سهم $z = -\infty$ در سمت راست (۴۹-۲) صفر است. در نهایت داریم:

$$f(k, k') = -ik \int_0^{\infty} db b J_0(kb\theta) [e^{2i\Delta(b)} - 1] \quad (۵۰-۲)$$

که در آن

$$\Delta(b) \equiv \frac{-m}{2k\hbar^2} \int_{-\infty}^{+\infty} V(\sqrt{b^2 + z^2}) dz \quad (۵۱-۲)$$

در رابطه بالا پارامتر b را ثابت قرار داده و در طول مسیر خط راست z ی که در شکل (۲-۲) نشان

داده شده انتگرال گرفته ایم. اگر b بزرگتر از برد V باشد، در (۵۰-۲) هیچ سهمی از $[e^{2i\Delta(b)} - 1]$ ،

وجود ندارد [۸].

۲-۶ پتانسیل های نوکلئون - نوکلئون

در چند دهه گذشته پتانسیل های نوکلئون-نوکلئون زیادی ارائه شده است. همه این پتانسیل ها به

روش تطبیق با اطلاعات پراکندگی ساخته شده اند. به عبارت دیگر مقیاس یک پتانسیل تطابق

اطلاعات پراکندگی با $\chi^2_{N_{data}} \approx 1$ است. اما از آنجایی که این مقیاس تا حدودی شکست خورده بود، این

مقیاس تنها مقیاس اندازه گیری کیفی پتانسیل نیست. بنابراین مقایسه پتانسیل های نوکلئون-

نوکلئون به روش های دیگر لازم خواهد بود. نتایج وقتی رضایت بخش خواهد بود که پتانسیل بتواند

ساختمان نوکلئون را به خوبی توصیف کند. برای مقایسه پتانسیل ها ابتدا لازم است که سه جزء

برهمکنش را در سیستم دو نوکلئونی در نظر بگیریم:

الف) بخش بلند برد ($r \geq 2\text{fm}$)

در اغلب مدل های پتانسیل، پتانسیل تبادل تک پیونی^۵ در نظر گرفته شده است و به دنبال اجزای پتانسیل های دیگر به عنوان بخش بلند برد اضافه می شود. در ساده ترین حالت بخش پتانسیل تک پیونی از رابطه زیر تبعیت می کند:

$$V_{\text{ope}}(r) = g^2 \bar{\mu} (\tau_1 \cdot \tau_2) \left[S_{12} \left(\frac{1}{(\mu r)^3} + \frac{1}{(\mu r)^2} + \frac{1}{3\mu r} \right) e^{-\mu r} + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{1}{3} \left(\frac{e^{-\mu r}}{r} - \frac{4\pi}{\mu^3} \delta(r) \right) \right] \quad (52-2)$$

که در آن

$$S_{12} = 3 \left(\vec{\sigma}_1 \cdot \hat{r} \right) \left(\vec{\sigma}_2 \cdot \hat{r} \right) - \left(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \right) \quad (53-2)$$

عملگر تانسوری معمولی است g مقدار ثابت جفت شدگی است که از آزمایش بدست می آید. این پتانسیل با در نظر گرفتن مقدار اختلاف بین پیون های باردار و خنثی به خوبی برای $p-n$, $p-p$, $n-n$ به صورت مناسب تری ارائه شده است.

ب) بخش متوسط برد $(1\text{fm} \leq r \leq 2\text{fm})$: که از تبادلات مزون های اسکالر بدست می آید (دو پیون و مزون های سنگین)

ج) بخش کوتاه برد $(r \leq 1\text{fm})$: که از تبادلات مزون های برداری بدست می آید.

در ادامه برخی از پتانسیل های مهم که در چند سال اخیر بسیار به آنها پرداخته شده است بطور مختصر بیان می کنیم.

۲-۶-۱ پتانسیل شبه حلقوی کراتزر تعمیم یافته^۶

در چند سال اخیر پتانسیل جدیدی را به نام پتانسیل مولکولی کراتزر تعمیم یافته معرفی کردند [۳۲]:

$$V(r) = D_e \left(\frac{r - r_e}{r} \right)^2 \quad (54-2)$$

^۵One pion exchange Potential (opep)

^۶Ring shaped Kratzer potential

، D_e, r_e به ترتیب فاصله تعادلی بین هسته ها و انرژی جدایی می باشد .

بعد از آن گروهی دیگر با اضافه کردن جمله زاویه ای پتانسیل جدیدی به نام پتانسیل شبه حلقوی کراتزر تعمیم یافته را ارائه دادند:

$$V(r, \theta) = D_e \left(\frac{r - r_e}{r} \right)^2 + \eta \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \quad (2-55)$$

در آن η یک مقدار حقیقی مثبت می باشد هرچند در این پتانسیل هنگامی که مقدار آرگومان به صفر میل می کند جمله دوم پتانسیل به بینهایت میل می کند.

۲-۶-۲ پتانسیل وود- ساکسون^۷

یکی از پتانسیل های مهم در فیزیک هسته ای پتانسیل وود- ساکسون است . این پتانسیل کوتاه برد که اولین بار توسط وودز و ساکسون در سال ۱۹۵۴ معرفی شد بخش اصلی مدل پوسته ای و مدل اپتیکی را که در پراکندگی هسته ای کاربرد دارد تشکیل می دهد. همچنین این پتانسیل به صورت گسترده ای برای توصیف برهمکنش نوترون با هسته های سنگین استفاده می شود. در حوزه پتانسیل میانگین جزئیات پتانسیل با پارامترهای آزادی مانند عمق پهنای و شیب پتانسیل تعریف می شود که باید با مشاهدات تجربی سازگار باشند. شکل این پتانسیل که برحسب فاصله از مرکز هسته است به صورت زیر می باشد [۳۳]:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\left(\frac{r - R_0}{a} \right)}} \quad (2-56)$$

V_0 و R_0 و a به ترتیب عمق و پهنای پتانسیل و ضخامت سطح می باشد که اغلب با مقادیر تجربی در سازگاری می باشد .

⁷ Woods-Saxon potential

۲-۶-۳ پتانسیل وود- ساکسون استاندارد^۸

پتانسیل وود-ساکسون استاندارد با رابطه زیر تعریف می شود [۳۴-۳۵]:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}} + \frac{-V_1}{\left(1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}\right)^2} \quad (۵۷-۲)$$

V_0, V_1, R_0, a به ترتیب عمق و پهنای پتانسیل و ضخامت سطح می باشد. این پتانسیل برای توصیف برهمکنش نوکلئون ها در هسته های سنگین به کار می رود. با اضافه کردن دو جمله به این پتانسیل، پتانسیل جدیدی ارائه شده است [۳۵]:

$$V_{Mod}(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}} + \frac{\tau}{\left(1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}\right)^2} + \mu \coth\left(\frac{r-R_0}{a}\right) + \eta \coth^2\left(\frac{r-R_0}{a}\right) \quad (۵۸-۲)$$

که در آن V_0, μ, τ, η پارامترهای حقیقی هستند، همچنین اشاره می شود که جملات سوم و چهارم رابطه بالا در حد $a \ll (r - R_0)$ به $\frac{1}{r^2}, \frac{1}{r}$ میل می کند که با پتانسیل دافعه کولنی و توان دوم آن مطابقت دارد.

بعد از آن گروهی دیگر بر اساس استدلال و بدون از دست دادن کلیت پتانسیل وود- ساکسون معکوس پتانسیل Manning-Rosen را به صورت زیر در نظر گرفته اند [۳۶]

$$V_{inverted}(r) = \frac{-V_0}{1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}} + \frac{-V_1}{\left(1 + e^{\left(\frac{r-R_0}{a}\right)}\right)^2} + v_2 \tan\left(\frac{r-R_0}{a}\right) + v_3 \tan^2\left(\frac{r-R_0}{a}\right) \quad (۵۹-۲)$$

و در آخر نوع دیگری از پتانسیل وود- ساکسون تعمیم یافته در نظر گرفته شده است.

⁷Standard woods-saxon potential

$$V(r) = -2.4 \frac{e^{-1.02r}}{1 - e^{-1.02r}} - 0.8 \left(\frac{e^{-1.02r}}{1 - e^{-1.02r}} \right)^2 \quad (۶۰-۲)$$

۲-۶-۴ پتانسیل یوکاوا^۹

حدود هفتاد سال پیش یوکاوا نظریه مزون را برای توضیح برهمکنش های میان نوکلئون ها پیشنهاد کرد و پتانسیل را به شکل زیر معرفی نمود [۳۷]

$$v_c(r) = -v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (۶۱-۲)$$

که در آن α برد نیروی هسته ای و v_0 عمق پتانسیل می باشد. بر خلاف نیروی کولنی که بستگی ساده ای به فاصله دارد، نیروی هسته ای به طور خیلی پیچیده ای به فاصله وابسته است. پتانسیل یوکاوا برای بیان این منظور یکی از بهترین پتانسیل ها می باشد. این پتانسیل تابع نمایی از فاصله است به همین علت، پتانسیل و نیرو سریعاً با افزایش فاصله به صفر میل می کند. یکی از نکات مهم در مورد پتانسیل یوکاوا آن است که معادله شرودینگر با این پتانسیل به طور دقیق و تحلیلی قابل حل نمی باشد.

۲-۶-۵ پتانسیل هولسن عمومی^{۱۰}

شکل عمومی این پتانسیل بصورت رابطه زیر است

$$V_q(r) = -v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{1 - qe^{-\alpha r}} \quad (۶۲-۲)$$

^۹ Yukawa potential

^{۱۰} *Public hvltn potential*

که در آن پارامتر q شکل پتانسیل را تعیین می کند [۳۸]. قابل توجه است که به ازای مقادیر بخصوص پارامتر q پتانسیل معینی را نتیجه می دهد.

اگر $q = 0$ باشد پتانسیل نمایی حاصل می شود.

$$V_q(r) = -v_0 e^{-\alpha r} \quad (۶۳-۲)$$

اگر $q = 1$ باشد شکل پتانسیل به صورت پتانسیل هولسن استاندارد در می آید:

$$V_q(r) = -v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{1 - e^{-\alpha r}} \quad (۶۴-۲)$$

اگر $q = -1$ باشد شکل پتانسیل وود ساکسون را خواهیم داشت :

$$V_q(r) = -v_0 \frac{e^{-\alpha r}}{1 + e^{-\alpha r}} \quad (۶۵-۲)$$

۶-۶-۲ پتانسیل اکارت^{۱۱}:

پتانسیل اکارت به صورت زیر تعریف می شود:

(۶۶-۲)

$$V_{Ec}(r) = \beta \frac{e^{r/a}}{(1 - e^{r/a})^2} - \alpha \frac{1 + e^{r/a}}{1 - e^{r/a}}$$

پارامترهای α, β عمق پتانسیل را تعریف می کنند [۳۹-۴۰].

در ادامه دیگر پتانسیل های هسته ای که فقط در حد ذکر نام آنهاست به شرح زیر می باشد [۴۱-۴۲]:

- Reid and Reid – Day Potentials
- Super – Soft – Core Potentials
- Funabashi Potentials
- Nijmegen Group Potentials
- Paris group Potential
- Urbana Potential
- Argonne group Potentials

^{۱۱}Eckhart Potential

- Bonn group Potentials
- Hamburg group Potentials

در این فصل به بررسی برخی از تقریب های مهم هسته ای پرداختیم، و چند نمونه از پتانسیل های هسته ای را برای بهره گیری و مطالعه خوانندگان و دانشجویان ذکر کردیم. در ادامه در فصل چهارم ما از تقریب WKB برای محاسبات مربوط به پراکندگی استفاده می کنیم و با استفاده از این تقریب سطح مقطع پراکندگی، طول پراکندگی و دامنه پراکندگی را محاسبه می کنیم.

فصل سوم

روشهای حل معادله ی شرودینگر

۳-۱ مقدمه

در فصل اول به بررسی مفاهیم پراکندگی کلاسیکی و کوانتومی پرداختیم. سپس در فصل دوم بعضی از تقریب ها و پتانسیل های مهم هسته ای را در نظر گرفتیم. حال در این فصل می خواهیم به روش های حل مساله هم به روش تحلیلی و هم روش عددی و رایانه ای نگاه مختصری داشته باشیم. معادلات شرودینگر^{۱۲}، دیراک^{۱۳}، کلاین گردون^{۱۴} و DKP^{۱۵} از مهمترین معادلاتی هستند که برای توصیف فیزیک سیستم های غیر نسبیتی و نسبیتی به کار می روند. در این میان می توان این پتانسیل ها را با روش های متفاوت تحلیلی و عددی حل کرد. از آنجایی که فقط پتانسیل های محدودی به روش تحلیلی دقیق قابل حل می باشند روش های حل عددی از اهمیت ویژه ای برخوردار است [۴۱-۴۳].

تعداد کمی پتانسیل $V(r)$ وجود دارد که برای آن ها معادله ی شرودینگر دقیقاً قابل حل است. از جمله:

الف) پله پتانسیل:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases} \quad (۱-۳)$$

ب) چاه پتانسیل:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -V_0 & -a < x < a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (۲-۳)$$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ V_0 & -a < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

¹²Schrodinger

¹³Dirac

¹⁴Klein-Gordon

¹⁵Duffin - Kemmer - petiau

ت) سد پتانسیل:

$$(۳-۳)$$

ج) نوسانگر ساده:

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (۴-۳)$$

و

بنابراین باید برای بدست آوردن ویژه مقادیر و ویژه توابع برای پتانسیل هایی که به معادلاتی دقیقاً قابل حل نمی انجامند به تکنیک های دیگری متوسل شویم. از جمله روش هایی که برای حل معادله ی شرودینگر پیشنهاد شده و حتی با توجه به آنها معادله ی شرودینگر را حل کرده اند روش های NU ، جواب پیشنهادی، ابر تقارن، روش های عددی و حتی می توان تکنیک های تقریب را برای حل معادله ی شرودینگر گسترش داد [۸]. اغلب روش های حل معادله ی شرودینگر بر اساس سیستم های دو جسمی می باشد، پس نیاز به دستگاه مختصات جدیدی داریم تا برای سیستم های چند جسمی نیز بتوانیم از این روش ها استفاده کنیم. همچنین تمام هسته ها به صورت چند نوکلئونی می باشند یعنی برای بدست آوردن ویژگی های استاتیکی و دینامیکی هسته ها در نظر گرفتن تأثیر تمام اجزا هسته مورد نیاز است که امکان پذیر نیست، مگر تعریف دستگاه مختصات جدید که با توجه به تعداد ذرات هسته قابل انعطاف باشد. دستگاه مختصات "ژاکوبی" این نیاز ما را به خوبی رفع می کند.

۳-۲ دستگاه مختصات ژاکوبی^{۱۶}

برای یک سیستم N ذره ای معادله ی شرودینگر مستقل از زمان به صورت $H\psi = E\psi$ نوشته می شود که در آن هامیلتونی به صورت زیر معرفی می شود [۴۴-۴۵]:

$$H = \sum_{i=1}^N \left(\frac{P_i^2}{2m_i} + V(r_i) + V(r_i, r_j) \right) \quad (۵-۳)$$

^{۱۶} Jacobi coordinates

$i \neq j$ به این معنا که : هیچ ذره ای با خودش بر هم کنش ندارد.

$i < j$ از نوشتن جملات تکراری صرفنظر می شود.

$V(r_i)$ پتانسیل محبوس کننده که اثرات محیطی را شامل می شود، مثلاً وقتی ذره ای تحت تأثیر میدان الکتریکی یا مغناطیسی باشد تأثیر این میدان های خارجی بر روی ذره را در $V(r_i)$ مشاهده می کنیم. $V(r_i, r_j)$ این جمله شامل بر هم کنش هر دو ذره با یکدیگر است. برای حل تمام معادلات چه ریاضی و چه فیزیک نیاز به دستگاه مختصات مناسب برای آن مسأله داریم. یکی از این دستگاه های مختصات که برای مجموعه ای N ذره ای مورد استفاده قرار می گیرد ، مختصات ژاکوبی می باشد. مؤلفه عمودی این دستگاه مختصات به شکل زیر معرفی می شود:

$$\vec{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \vec{r}_j - \vec{r}_{i+1} \right) \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (6-3)$$

$\vec{\xi}_i$ بردار مکان هر نقطه نسبت به مرکز نقاط قبلی است. آخرین مختصه ژاکوبی به صورت زیر معرفی

می شود که در آن $\vec{R}$ بردار مرکز جرم کل ذرات است [۴۴-۴۵].

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_N}{N} \quad (7-3)$$

المان حجم در این مختصات به صورت زیر خواهد شد:

$$\prod_{i=1}^N d\vec{r}_i = N^{\frac{3}{2}} dR \prod_{j=1}^{N-1} d\xi_j dx \quad (8-3)$$

برای توصیف مکان ذره A می توان از مختصات ژاکوبی استفاده نمود [۴۴-۴۵]. که در این حالت با

توجه به اینکه هر ذره دارای ۳ درجه آزادی است ، ما نیازمند $3A$ مختصه ژاکوبی هستیم. در این

صورت ابر شعاع به صورت زیر نوشته می شود:

$$x = \left[\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i^2 \right]^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{N-1} (r_i - R)^2 \right]^{1/2} \quad (9-3)$$

اگر پتانسیل بین ذرات تنها وابسته به توان هایی از فاصله نسبی آنها باشند می توان آنها را بر حسب ابر شعاع نوشت. در این صورت به این پتانسیل ها، پتانسیل های فوق مرکزی می گویند.

۳-۳-۱ روش NU^{17}

در سالهای اخیر به حل سیستمهای کوانتوم مکانیکی در چارچوب روش NU تمایل زیادی نشان داده شده است. این تکنیک جبری برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم پایه ریزی شده است که با موفقیت برای حل معادلات موج شرودینگر، کلاین گردون، در حضور پتانسیل های مرکزی و غیرمرکزی بکار برده شده است. برای مطالعه و بررسی بیشتر موفقیت این روش، مراجع [۴۱-۴۳] را ببینید. بکارگیری این روش در حل معادله ی شرودینگر، دستورالعمل روشنی برای بدست آوردن جوابهای دقیق حالت های مقید، ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع وابسته آنها، بر حسب چند جمله ای های متعامد ارائه می دهد که در عین سادگی بسیار موثر است. از آنجایی که یافتن جواب های دقیق معادله ی شرودینگر جز در مواردی خاص همچون سیستمی با پتانسیل کولنی و یا نوسانگر هماهنگ به روش های معمول و سنتی غیر ممکن است لذا بکار بستن این روش می تواند ما را در حل این مشکل یاری رساند و گامی به جلو محسوب می شود. از جمله مواردی که ناگزیر به کنار گذاشتن روش های معمول و جستجوی روش های جدید هستیم، حل معادله ی شرودینگر با پتانسیل های غیر مرکزی است. اینگونه پتانسیل ها در شیمی کوانتومی بسیار مورد توجه اند و اخیراً مطالعات فراوانی در این زمینه انجام شده و در حال انجام است. روش های مختلفی برای حل معادله ی شرودینگر با پتانسیل های غیر مرکزی استفاده شده است، از جمله روش ابرتقارنی، SUSY ،

¹⁷ The Nikiforov – Uvarov

ایده SIP [۴۶-۴۷]، انتگرال مسیر [۴۸-۴۹]، و روش فاکتورگیری [۵۰]. البته باید توجه داشت که روش NU هم همچون روش های قبلی در حل معادله ی شرودینگر با هر نوع پتانسیل دلخواه، ناکارآمد است و تنها با نوع خاصی از پتانسیل ها که الزامات روش را برآورده می کنند می توان از این روش به نتیجه مطلوب رسید.

۳-۲-۳ کلیات روش حل NU

این روش براساس تقلیل یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی دوم است. در اینجا معادله ی شرودینگر، به یک معادله از نوع فوق هندسی پایه ریزی شده است [۵۲]. پس از انتخاب یک تغییر متغیر مناسب، $s = s(r)$ معادله ی تبدیل یافته را به صورت زیر داریم:

$$\Psi_n''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi_n(s) = 0 \quad (3-10)$$

که σ و $\tilde{\sigma}$ چند جمله ای هایی حداکثر از درجه ی دوم و $\tilde{\tau}$ یک چند جمله ای حداکثر از درجه ی اول است. با در نظر گرفتن تابع موج $\Psi_n(s)$ به صورت :

$$\Psi_n(s) = \phi_n(s) y_n(s)$$

(3-11)

معادله ی (3-10) به صورت یک معادله از نوع فوق هندسی تقلیل داده می شود؛ [۵۲]

$$\sigma(s) y_n''(s) + \tau(s) y_n'(s) + \lambda y_n(s) = 0 \quad (3-12)$$

که در آن

$$\sigma(s) = \pi(s) \frac{\phi(s)}{\phi'(s)} \quad (3-13)$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s), \quad \tau' < 0 \quad (3-14)$$

چندجمله ای $\tau(s)$ با علامت پریم نشان می دهد که باید مشتق مرتبه ی اولش منفی باشد.

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \quad n=0,1,2,\dots \quad (15-3)$$

λ پارامتری است که به صورت زیر تعریف می شود [۵۲]. باید به این نکته توجه کرد که λ و λ_n از یک جواب خاص، شکل $y(s) = y_n(s)$ که چندجمله ای درجه n است بدست می آیند، بعلاوه این جمله $y_n(s)$ تابع موج معادله (۱۱-۳)، یک تابع از نوع فوق هندسی که از رابطه ردیگز ذیل بدست می آید [۵۲].

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma^n(s) \rho(s)) \quad (16-3)$$

که در آن B_n ثابت نرمالیزاسیون است و $\rho(s)$ تابع وزنی است که باید شرط زیر را برآورده کند [۵۲].

$$\frac{d}{ds} \omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \omega(s) \quad \omega(s) = \sigma(s) \rho(s) \quad (17-3)$$

تابع $\pi(s)$ و پارامتر λ به صورت زیر تعریف می شوند [۵۲].

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)} \quad (18-3)$$

$$\lambda = K + \pi'(s) \quad (19-3)$$

از آنجایی که باید $\pi(s)$ حداکثر یک چند جمله ای درجه یک باشد، جملات زیر رادیکال در معادله- (۱۸-۳) باید به صورت یک چند جمله ای درجه اول مرتب شوند که این در صورتی ممکن است که مشخص کننده ی آن، $\Delta = b^2 - 4ac$ ، صفر باشد. در این حالت یک معادله برای K بدست می آید که پس از حل معادله، مقادیر بدست آمده برای K را در معادله (۱۸-۳) جایگذاری می کنیم و با مقایسه با معادلات (۱۵-۳) و (۱۹-۳) ویژه مقادیر انرژی را بدست می آوریم. قبل از استفاده از این روش، جهت حل معادله ی شرودینگر باید توجه داشت که این روش برای حل معادله ی دیفرانسیلی درجه ی دوم پایه ریزی شده است، بنابراین باید در مرحله ی اول معادله ی شرودینگر را که یک

معادله ی دیفرانسیلی مرتبه ی دوم با سه متغیر است، به سه معادله ی دیفرانسیلی مرتبه ی دوم تک متغیره تبدیل نمود. ما در دستگاه مختصات کروی کار می کنیم [۵۳]. بنابراین برای رسیدن به این هدف باید پتانسیل استفاده شده به شکل زیر باشد [۵۴].

$$V(r, \theta, \phi) = V(r) + \frac{V(\theta)}{r^2} + \frac{V(\phi)}{r^2 \sin^2(\theta)} \quad (۲۰-۳)$$

معادله مستقل از زمان شرودینگر را به صورت زیر می توانیم بنویسیم [۸].

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}) + \frac{\gamma m}{\hbar^2} [E - V(\vec{r})] \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (۲۱-۳)$$

تابع موج $\Psi_n(\vec{r})$ حالت های مقید و سطوح انرژی وابسته به آنها، E_n ، برای ذره در یک میدان پتانسیل را تشریح می کند. ابتدا معادله (۲۰-۳) را با جایگذاری پتانسیل (۳-۱۹) در دستگاه مختصات کروی می نویسیم. (برای سادگی $2m = \hbar^2 = 1$ در نظر می گیریم.) [۵۴].

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi(\vec{r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi(\vec{r})}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r})}{\partial \phi^2} \right] + [E - V(r, \theta, \phi)] \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (۲۲-۳)$$

با در نظر گرفتن تابع موج کل به صورت $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)P(\theta)\Phi(\phi)$ و جایگذاری در معادله فوق داریم [۵۵].

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{\gamma}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[E - V(r) - \frac{\gamma}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (۲۳-۳)$$

$$\frac{d^2 P(\theta)}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} + \left[\gamma - V(\theta) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P(\theta) = 0 \quad (۲۴-۳)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + (m^2 - V(\phi)) \Phi(\phi) = 0 \quad (۲۵-۳)$$

که در آن ها m^2 و $\gamma = \ell(\ell + 1)$ ثابت های جداسازی هستند. معادلات (۲۳-۳)، (۲۴-۳) و (۲۵-۳) به ترتیب معادله شعاعی، معادله زاویه ای و معادله سمتی هستند. برای هر یک از معادلات فوق، پتانسیل های قابل حلی وجود دارد به طوری که الزامات روش NU را برآورده می کنند و معادله ی مربوطه به

این روش قابل حل می باشد. برای آشنایی با انواع پتانسیل های قابل حل با این روش مراجع [۴۱]-[۴۶] را ببینید.

۳-۴ روش ابرتقارن^{۱۸}

در طول بیست سال گذشته چارچوب مفهومی جدیدی برای درک مسائلی که در مکانیک کوانتومی به صورت بالقوه تحلیل پذیر هستند، با استفاده از ایده های گرفته شده از نظریه ی میدان کوانتومی توسعه داده شده است. این چارچوب جدید ابرتقارن نام دارد [۵۰]. به صورت خلاصه ابرتقارن، تقارنی است که فرمیون ها و بوزون ها را به هم مرتبط می سازد. بر طبق این نظریه ، بوزون ها به فرمیون ها توسط یک ابرتقارن به یکدیگر وابسته اند. جبر درگیر در آن جبر "لای مدرج" است که تحت ترکیبی از روابط بسته جابجایی و پاد جابجایی است [۵۶]. در اینجا لازم به ذکر است که تا کنون هیچ شواهدی تجربی از ابرتقارن بودن در طبیعت مشاهده نشده است. با استفاده از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی ، بسیاری از مسائل و پتانسیلهایی که به طور تحلیلی قابل حل نیستند و یا تحت شرایط خاصی قابل حل می باشند ، به آسانی حل می شوند. با استفاده از اصول ناوردایی شکل به راحتی پتانسیل هایی مانند پاش - تلر ، اکارت ، ویگنر - اکارت و روزن - مورس حل شده اند. همچنین می توان اختلاف انرژی ترازهای مختلف را با استفاده از ابرتقارن در روش هایی تقریبی مانند روش وردشی^{۱۹} به دست آورد. علاوه بر این می توان معادلات پائولی و دیراک را با استفاده از آن حل کرد [۵۷]. برای معرفی ابرتقارن نیازمند معرفی متغیرهای گراسمن^{۲۰} هستیم. متغیرهای گراسمن در واقع متغیرهایی پاد جابجا پذیر هستند. برای متغیرهای گراسمن عملیات ریاضی مشتق و انتگرال تعاریف مختص به خود را دارند. روش حل در ابرتقارن به این شکل است که: با استفاده از پتانسیلهای ساده پتانسیلهای

¹⁸ Supersymmetric

¹⁹ Variational Approach

²⁰ Grassmann

مشکل را ساخته و ویژه توابع و ویژه مقادیر مربوط به پتانسیلهای حل شده را با روش عملگری به ویژه توابع و ویژه مقادیر پتانسیلهای حل نشده تبدیل می کنیم.

۳-۵ روش های عددی

یکی از بهترین روش های موجود برای بررسی ساختار و رفتار مواد روش های رایانه ای و عددی می- باشد. روش های رایانه ای از لحاظ کم هزینه بودن کنترل پذیر بودن و برخی مزایای دیگر نسبت به روش های آزمایشگاهی برترند. امروزه با پیشرفت فناوری رایانه ها روش های رایانه ای نقش به سزایی در پیشبرد و اثبات نظریه و فرضیه های علمی دارد. حتی جهت بررسی و تحلیل سیستم های چند ذره ای نیز می توان از روش های رایانه ای و عددی بهره جست. به این منظور در ابتدای امر باید پتانسیلی میان ذرات در نظر بگیریم. این کار یعنی انتخاب پتانسیل بین ذرات که اصول و قواعد خاص خود را می طلبد.

۳-۶ پتانسیل های بین ذره ای

شناخت پتانسیل یکی از پایه های اصلی برای شناخت و توصیف و پیش بینی رفتار ذرات و هسته ها می باشد. معمولاً به دلیل وجود تعداد زیاد ذره ها در یک دستگاه تعیین شکل دقیق پتانسیل واقعی میسر نیست. در عمل پتانسیل با تقریب و بر اساس ملاحظات پدیده شناختی انتخاب می شود. اهمیت و درستی اکثر نتایج حاصل از محاسبات رایانه ای و آنچه آنها از رفتار واقعی حالت های مختلف مواد و گذار حالت تحت شرایط مختلف را نشان می دهند به انتخاب صحیح انرژی پتانسیل بستگی دارد. در شبیه سازی های کلاسیک همه اثر های کوانتومی دستگاه های بس ذره ای در پتانسیل بین ذره ای نهفته است. برای مدل سازی فیزیکی اقسام مختلف مواد مثل فلز ها نیمرساناها و غیره پتانسیل های

بس ذره ای مختلفی توسعه داده شده اند. پتانسیل های مورد استفاده در شبیه سازی ها اغلب مرکزی اند. یعنی فقط به فاصله ذرات وابسته اند. یک پتانسیل بس ذره ای را می توان به صورت زیر بسط داد:

$$U_{pot} = \sum_i u_1(\vec{r}_i) + \sum_i \sum_{j>i} u_2(\vec{r}_i, \vec{r}_j) + \sum_i \sum_{j>i} \sum_{k>j>i} u_3(\vec{r}_i, \vec{r}_j, \vec{r}_k) \quad (26-3)$$

در این رابطه شاخص های i, j مشخص کننده ذره ها هستند. جمله اول سمت راست نشان دهنده وجود پتانسیل خارجی اعمال شده بر ذره های دستگاه است. این جمله معمولاً در نظر گرفته نمی شود. جمله دوم عبارت است از برهمکنش های دو ذره ای بین ذره ها که معمولاً مقدار آن فقط به فاصله نسبی دو ذره از یکدیگر یعنی $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$ بستگی دارد. جمله های بالاتر برهمکنش های سه ذره ای و چهار ذره ای و ... را نشان می دهند. در اکثر شبیه سازی ها از برهمکنش های مراتب بالاتر صرف نظر می شود و در عوض از یک پتانسیل دو ذره ای موثر که می تواند به دما و چگالی وابسته باشد برای به حساب آوردن اثر متوسط جمله های صرف نظر شده استفاده می شود:

$$u(\vec{r}) = \sum_i \sum_{j>i} u(\vec{r}_{ij}) \quad (27-3)$$

که در آن $u(\vec{r}_{ij})$ انرژی پتانسیل برای جفت ذره های i, j با جدایی $\vec{r}_{ij}$ است. استفاده از این تقریب بیشتر برای دستگاه های رقیق مناسب است. در فاز های متراکم مانند مایعات و جامدات برهمکنش های چند ذره ای بالاتری رخ می دهند که باید در انرژی پتانسیل کل آنها را لحاظ کرد.

در نظر گرفتن برهمکنش های چند ذره ای در تعیین بعضی خواص مایعات اتمی اهمیت ویژه ای دارد. مثلاً برای آرگون مایع صرف نظر کردن از برهمکنش های سه تایی در محاسبه کشش سطحی باعث ۲۵٪ خطا می شود. از آنجایی که اکثر محاسبات در نانو فناوری مرطوب روی فاز های رقیق است به نظر می رسد که استفاده از پتانسیل دو ذره ای موثر مناسب باشد. در حقیقت بیشتر تعیین پتانسیل به صورت پدیده شناختی در عمل دارای دو مرحله می باشد. در مرحله اول با توجه به نوع

ذره های دستگاه و برهمکنش های بین آنها شکلی برای پتانسیل بین ذره ای دستگاه حدس زده می شود که با آن برخی شبیه سازی های اولیه انجام می شود. در مرحله بعد با مقایسه نتایج حاصل از شبیه سازی اولیه و نتایج تجربی شکل پتانسیل بهسازی می شود. این فرایند چندین بار تکرار می شود تا نتایج حاصل از شبیه سازی و تجربه یکسان شوند. در برخی شبیه سازی علاوه بر محاسبه پتانسیل بین ذره ای برای تعیین مسیر ذرات دستگاه نیاز به محاسبه نیروهای بین ذره ای هم داریم. برای محاسبه نیروی بین ذره ای باید از پتانسیل بین ذره ای نسبت به مکان ذرات دستگاه مشتق بگیریم. اگر شکل پتانسیل بین ذره ای پیچیده باشد و تعداد ذره های دستگاه نیز خیلی زیاد باشد محاسبه صریح مقدار پتانسیل و مشتق های آن در برنامه شبیه سازی بسیار زمان بر می شود. در چنین مواردی بهتر است به جای محاسبه صریح پتانسیل و مشتق های آن در برنامه اصلی از جدول جستجو استفاده کنیم. روش کار به این صورت است که قبل از اجرای برنامه اصلی شبیه سازی برنامه دیگری را اجرا می کنیم که فقط مقدار عددی پتانسیل و مشتق های مورد نیاز آن را از برنامه اصلی بر حسب r_{ij}^2 محاسبه و در جدولی ذخیره می کند. در هنگام اجرای برنامه اصلی با استفاده از الگوریتم های درونیابی از داده های عددی جدول ایجاد شده برای یافتن مقدار عددی پتانسیل و مشتق هایش در هر مکان استفاده می کنیم. ولی بیشتر برهمکنش های بنیادی در فیزیک معمولاً به صورت مرکزی و دو ذره ای می باشد.

۳-۷ روش مونت کارلوی کوانتومی وردشی

روشی مناسب برای تعیین انرژی حالت پایه سیستم روش وردشی می باشد. یک دستگاه فیزیکی را با هامیلتونی زیر در نظر می گیریم [۸-۵۳]:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U(x) \quad (۳-۲۸)$$

طبق اصل وردش مقدار انتظاری هامیلتونی متناظر با یک تابع موج آزمایشی دلخواه مانند ψ برابر است با:

$$\langle H \rangle = E = \frac{\int \psi^*(x) H \psi(x) dx}{\int \psi^*(x) \psi(x) dx} \geq E_0 \quad (29-3)$$

که E_0 مقدار دقیق انرژی حالت پایه است. متغیر x مجموعه تمام مکان های الکترون های موجود در دستگاه است. حالت تساوی تنها وقتی برقرار است که ψ ویژه تابع عملگر H با ویژه مقدار E_0 باشد (یعنی سیستم در حالت پایه باشد). برای بکار بردن روش وردشی ابتدا تابع موج آزمایشی $\psi(\lambda_1, \dots, \lambda_n, x)$ که از نظر فیزیکی شکل قابل قبولی دارد و به یک یا چند پارامتر λ_i وابسته است انتخاب کرده و سپس مقدار انتظاری $E\psi$ را به ازای مقادیر مختلف پارامتر ها محاسبه می کنیم. این کار را تا زمانی که یک مقدار کمینه برای $E\psi$ بدست آید ادامه می دهیم. این مقدار کمینه $E\psi$ یک حد بالا برای انرژی واقعی حالت پایه است. همان طور که می بینیم نیاز به محاسبه انتگرال های معادله (29-3) داریم. برای این کار از روش های انتگرال گیری مونت کارلو استفاده می کنیم. اما استفاده از اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت برای محاسبه انتگرال با روش مونت کارلو کارآمد نیست چرا که خطای محاسبه و به عبارت دیگر انحراف معیار آن بزرگ خواهد بود. به همین دلیل باید از روش های کاهش خطا در محاسبات استفاده کنیم. یکی از این روش ها انتخاب اعداد تصادفی با شیوه نمونه برداری با اهمیت است. باید معادله (29-3) را به گونه ای بازنویسی کنیم که بتوان از روش نمونه گیری با اهمیت در انتخاب نقاط استفاده کرد:

$$E = \frac{\int \psi^2(x) E_L(x) dx}{\int \psi^2(x) dx} \quad (30-3)$$

که E_L انرژی موضعی است و با رابطه زیر بدست می آید:

$$E_L = \frac{H \psi(x)}{\psi(x)} \quad (31-3)$$

باید توجه داشت که H یک عملگر است که روی تابع $\psi(x)$ اثر می کند. معادله (۳-۳۰) مانند یک

میانگین گیری وزنی با چگالی احتمال بهنجار شده $\frac{\psi^2(x)}{\int \psi^2(x) dx}$ است. با فرض بهنجار بودن $\psi(x)$

مخرج این رابطه برابر یک است. حال تخمین $E\psi$ توسط مونت کارلو با جمع بندی زیر تعیین می شود:

$$E\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_L(x_i) \quad (3-32)$$

که در آن n تعداد دفعاتی است که x از توزیع $\psi^2(x)$ نمونه گیری می شود. طبق روش نمونه برداری با اهمیت x را با استفاده از تابع توزیع $\psi^2(x)$ نمونه برداری می کنیم. یک روش مناسب و قابل اعتماد برای این کار روش متروپلیس است. که در آن فقط نیاز به ψ^2 داریم و کمیت ناشناخته $\int \psi^2(x) dx$ کاربردی ندارد. نمونه ای از یک الگوریتم روش وردشی را برای یک دستگاه یک بعدی می توان به شکل زیر نوشت:

۱. تابع آزمایشی دلخواه ψ را که به یک پارامتر وردشی مثل λ وابسته باشد انتخاب می کنیم.
۲. یک جابجایی امتحانی در متغیر x به صورت $x_{trial} = x_n + \delta_n$ که δ_n یک عدد تصادفی از بازه $[-\delta, \delta]$ است انتخاب می کنیم. مقدار δ را چنان تعیین می کنیم که نرخ پذیرش حدود ۵۰٪ باشد.
۳. نسبت $w = \frac{P(x_{trial})}{P(x)}$ را محاسبه می کنیم که $P(x) = \psi^2(x)$ چگالی احتمال بهنجار شده است.
۴. اگر $w \geq 1$ بود x جدید را قبول می کنیم و قرار می دهیم: $x_{n+1} = x_{trial}$. در غیر این صورت یعنی اگر $w < 1$ بود یک عدد تصادفی مانند ξ را با w مقایسه می کنیم و در صورتی که $\xi \leq w$ بود x جدید را قبول می کنیم.

۵. در صورتی که جابجایی مورد قبول نبود قرار می دهیم: $x_{n+1} = x_n$.

۶. مقدار انرژی را با استفاده از x_n ها و جایگذاری رابطه (۳-۳۱) و (۳-۳۲) محاسبه می کنیم.

۷. مراحل ۲ تا ۶ را برای مقادیر مختلف پارامتر وردشی λ تکرار می کنیم تا $E\psi$ کمینه بدست آید.

ذکر این نکته لازم است که باید قبل از محاسبه انرژی تعادل در دستگاه برقرار شده باشد یعنی همگرایی به توزیع $1/r^2$ صورت گرفته باشد. در الگوریتم ذکر شده در اینجا انرژی دستگاه کمینه می شود ولی روش های مشابهی وجود دارند که در آنها واریانس انرژی دستگاه کمینه می شود.

۳-۸ معادلات دیفرانسیل و روش های عددی

بسیاری از مسایل علوم و مهندسی وقتی به صورت ریاضی مدل سازی می شوند، به سادگی در قالب معادلات دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه یا شرایط مرزی بیان می گردند. برای مثال، مسیر پرتاب یک موشک، حرکت یک قمر مصنوعی حول مدارش، با معادله دیفرانسیل بیان می شوند. نظریه های شبکه های الکترونیکی، خمیدگی ستون ها، پایداری هواپیما و غیره، همگی به صورت معادلات دیفرانسیلی مدل سازی می شوند. به طور دقیق تر، نرخ تغییرات هر کمیت نسبت به دیگری را می توان به کمک معادله دیفرانسیل معمولی مدل سازی کرد. شاید نتوان فرم کلی جواب ها را برای هر مساله مدل سازی شده به دست آورد، ولی با استفاده از کامپیوتر و روش هایی عددی، می توان آنها را حل کرد، به طور کلی می توان یک معادله دیفرانسیل خطی یا غیر خطی را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right) \quad (3-33)$$

با این حال بحث را روی معادله دیفرانسیل مرتبه اول با شرایط اولیه زیر، دنبال می کنیم:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_0) = y_0 \quad (3-34)$$

که آن را یک مساله مقدار اولیه^{۲۱} می نامند. این درست است که هر معادله دیفرانسیل مرتبه بالاتر را می توان با تغییر متغیر به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل کرد. برای مثال، یک معادله مرتبه دوم به صورت $y'' = f(t, y, y')$ را در نظر بگیرید. با جایگذاری $p = y'$ به یک دستگاه با دو معادله دیفرانسیل تبدیل می شود.

$$p = y' , \quad p' = f(t, y, p) \quad (35-3)$$

قضیه زیر، وجود یکتایی جواب یک مساله مقدار اولیه معادله (۳۴-۳) را بیان می کند.

قضیه: فرض کنید $f(t, y)$ یک تابع حقیقی و پیوسته بر ناحیه زیر باشد:

$$R: t \in [t_0, T] , \quad -\infty \leq y \leq \infty \quad (36-3)$$

به ازای هر $t \in [t_0, T]$ و برای هر y_1, y_2 یک ثابت L وجود دارد که در نامساوی زیر صدق می کند:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L |y_1 - y_2| \quad (37-3)$$

در این صورت $|f_y(t, y)| \leq L$ برای هر $t, y \in R$. L ثابت لیپ شیتس^{۲۲} نامیده می شود.

اگر شرایط بالا برقرار باشند، آنگاه برای هر y_0 مساله مقدار اولیه دارای یک جواب یکتای $y(t)$ برای هر $t \in [t_0, T]$ است. در حقیقت، وجود و یکتای جواب برای مساله مقدار اولیه با معادله (۳۴-۳) را فرض کرده ایم. تابع f ممکن است خطی یا غیر خطی باشد. همچنین فرض می کنیم تابع $f(t, y)$ نسبت به هریک از متغیرهای t یا y به حد کافی مشتق پذیر باشد [۵۸]. بعضی از روش های عددی برای تعیین جواب یک مساله مقدار اولیه، می توان به روش سری تیلور، روش اویلر و روش رانگ کوتا، نام برد که در ادامه بعضی از این روش ها توضیح داده خواهد شد.

²¹ Initial value problem

²² Lipschitz

۳-۸-۱ حل معادلات دیفرانسیل به روش Runge-Kutta

در بسیاری از مسائل علوم و مهندسی وقتی به صورت ریاضی مدل سازی می شوند، به سادگی در قالب یک معادله دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه یا شرایط مرزی بیان می گردند. شاید نتوان فرم کلی جواب ها را برای هر مسئله مدل سازی شده بدست آورد ولی با استفاده از کامپیوتر و روش هایی عددی می توان آنها را حل کرد. از نظر محاسباتی، اغلب روش های کارآمد از نظر دقت، توسط دو ریاضی دان مشهور رانگ - کوتا^{۲۳} توسعه یافته اند. این روش ها به رانگ - کوتا R-K مشهورند. این روش ها با توجه به مرتبه ی شان تمیز داده می شوند، یعنی مطابقت آن ها با جواب های سری تیلور تا جمله h^r که r مرتبه روش است. روش R-K4 برای حل عددی معادلات خطی و غیر خطی بطور گسترده استفاده می شود که بسط آن از نظر جبری پیچیده است. ایده ی اصلی این روش ها را با روش R-K2 بررسی می کنیم [۵۱]. ایده اصلی این روش، (میانگین شیب ها) است. یعنی:

$$y_{n+1} = y_n + hx \quad (3-38)$$

مسئله مقدار اولیه را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_n) = y_n \quad (3-39)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad , \quad k_2 = hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \quad (3-40)$$

میانگین وزنی k_1 و k_2 را انتخاب و برای تعیین y_{n+1} به y_n اضافه می کنیم.

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \quad (3-41)$$

α, w_2, w_1 و β مقادیر ثابتی هستند که باید تعیین شوند.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(t_n) + \dots \quad (3-42)$$

²³ Runge-kutta

رابطه (۳-۳۰) با استفاده از روابط (۳-۲۸) و (۳-۲۶) به صورت زیر در می آید:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}(f_{tt} + ff_{yy}) + \frac{h^3}{6}[f_{ttt} + 2f_{tty} + f_{tyy} + f_{yyy} + f_y(f_{tt} + ff_{yy})] + O(h^4) \quad (۳-۴۳)$$

در این جا همه مشتقات در نقطه (t_n, y_n) محاسبه شده اند [۵۱].

با قراردادن معادلات (۳-۴۰) معادله ی (۳-۴۳) به صورت زیر در می آید:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 hf(t_n, y_n) + w_2 hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \quad (۳-۴۴)$$

حال با استفاده از بسط سری تیلور دو متغیره، داریم:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 hf(t_n, y_n) + w_2 h[f(t_n + \alpha h) + (\alpha h f_t + \beta k_1 f_y) + (\frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{tt} + \alpha h \beta k_1 f_{ty} + \frac{\beta^2 k_1^2}{2} f_{yy})] + O(h^3) \quad (۳-۴۵)$$

از قرار دادن عبارت K_1 در معادله ی بالا و سپس مرتب کردن بر حسب توان های صعودی h داریم:

$$y_{n+1} = y_n + (w_1 + w_2) hf + w_2 h^2 (\alpha f_t + \beta f_y) + w_2 h^3 (\frac{\alpha^2}{2} f_{tt} + \alpha \beta f_{ty} + \frac{\beta^2}{2} f_{yy}) + O(h^4) \quad (۳-۴۶)$$

با مساوی قراردادن ضرایب در معادلات (۳-۴۶) و (۳-۴۳) داریم:

$$w_1 + w_2 = 1, \quad w_2 (\alpha f_t + \beta f_y) = \frac{f_t f_y}{2} \quad (۳-۴۷)$$

که نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1 \\ w_2 \alpha &= w_2 \beta = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} w_1 &= 1 - w_2 \\ \alpha &= \frac{1}{2w_2} \\ \beta &= \frac{1}{2w_2} \end{aligned} \quad (۳-۴۸)$$

w_2 دلخواه است و مقادیر گوناگونی را می توان به آن اختصاص داد [۵۱]:

حالت اول:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{3}{2} \quad (49-3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3}(2k_1 + k_2) \quad (50-3)$$

$$k_1 = hf(t, y) \quad (51-3)$$

$$k_2 = hf\left(t + \frac{3}{2}h, y + \frac{3}{2}k_1\right) \quad (52-3)$$

حالت دوم:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \beta = 1 \quad (53-3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (54-3)$$

$$k_1 = hf(t, y) \quad (55-3)$$

$$k_2 = hf(t + h, y + k_1) \quad (55-3)$$

به روشی مشابه، فرمول R-K از هر مرتبه را می توان به دست آورد. هرچند که مشتقات آنها بسیار

طولانی و پیچیده می شود. از بین آنها R-K4 متداول تر و مرسوم تر است [51].

۳-۸-۲ مراحل روش R-K4 :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + k_4) \quad (56-3)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad (58-3)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \quad (59-3)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \quad (60-3)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) \quad (61-3)$$

در این فصل به روش های متداول و مختلف که برای حل مساله بکار می رود اشاره شد. روشهای مختلفی برای حل معادله شرودینگر وجود دارد. هر کدام از این روشها دارای معایب و مزایایی است. پس می توان گفت حل معادله شرودینگر با هر کدام از این روش ها به طور دقیق امکان پذیر نیست. ما در این پایان نامه از روش NU برای حل معادله شرودینگر جهت بدست آوردن مقادیر ویژه انرژی و محاسبه سطح مقطع پراکندگی استفاده کرده ایم. روش های مختلفی که برای حل معادله شرودینگر در این پایان نامه آورده شده است، صرفا جهت آشنایی خوانندگان است.

فصل چهارم
محاسبه سطح مقطع پراکندگی، دامنه و طول
پراکندگی

۴-۱ مقدمه

یکی از دغدغه های مهم برای کسانی که در زمینه فیزیک هسته ای کار می کنند شناخت هسته و بررسی و کاوش نیروهای هسته ای و قوانین حاکم بر برهم کنش های ذرات است تنها روش موجود برای رسیدن به این شناخت استفاده از پراکندگی ذرات گوناگون از هدف های مختلف است. با بررسی پراکندگی می توان خواص برهم کنش بین نوکلئون ها را مشخص کرد. در اینجا هدف بررسی پراکندگی پروتون- نوترون است.[۸-۵۹]. در این بخش ما به بررسی پراکندگی و محاسبه سطح مقطع پراکندگی، دامنه پراکندگی و طول پراکندگی در مجاورت یک پتانسیل مرکزی مشهور بنام پتانسیل وود ساکسون و یک پتانسیل دو بعدی با انرژی های مختلف می پردازیم. پتانسیل وود ساکسون به علت موفقیت آن در مدل هسته ای لایه ای بسیار مورد نظر فیزیکدانان نظری هسته ای می باشد. در ابتدا، یک نگاه مختصری به حل معادله شرودینگر با پتانسیل وود ساکسون به روش NU داریم، و پراکندگی کوانتومی یک بعدی در مجاورت پتانسیل وود ساکسون را مورد بررسی قرار داده و دامنه پراکندگی و سطح مقطع پراکندگی و طول پراکندگی را در انرژی های مختلف محاسبه کردیم و در جدول (۴-۱) نتایج نشان داده شده است. در ادامه پراکندگی کوانتومی دو بعدی را مورد بررسی قرار می دهیم و بطور خاص از تقریب WKB استفاده کردیم و تابع موج و تغییر فاز WKB را بدست آوردیم و با استفاده از آن دامنه پراکندگی، طول پراکندگی و سطح مقطع پراکندگی را حساب کردیم که در جدول (۴-۲) ارائه شده است.

۴-۲ معادله شرودینگر با پتانسیل وود ساکسون

ما در این جا از پتانسیل وود ساکسون برای بررسی پراکندگی استفاده نموده ایم و در ابتدا ویژه مقادیر انرژی را برای یک سیستم دو جسمی شامل پروتون و نوترون بدست آورده ایم. از آن جا که حل معادله شرودینگر و یافتن جوابهای دقیق آن جز در موارد خاص به روش های معمول و سنتی غیر ممکن است لذا باید از روش های تحلیلی مناسب برای حل آن استفاده کرد. همان طور که در بخش

قبل روش های حل معادله شرودینگر توضیح داده شده است یکی از این روش ها، روش NU است. در سالهای اخیر به حل سیستم های کوانتومی در چارچوب روش NU تمایل زیادی نشان داده شده است. بکار گیری این روش در حل معادله شرودینگر، دستورالعمل روشی برای بدست آوردن جوابهای دقیق حالت های مقید، ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع وابسته اشان، بر حسب چند جمله ای های متعامد ارائه می دهد که در عین سادگی بسیار موثر است. و ما از این روش برای حل معادله شرودینگر استفاده می کنیم [۶۰-۶۱]. بر هم کنش ذرات را در پایین ترین سطح پتانسیل مرکزی در نظر می گیریم. پتانسیل وود ساکسون از جمله پتانسیل های مرکزی می باشد و بصورت زیر تعریف می شود:

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)} \quad (۱-۴)$$

معادله شرودینگر برای یک پتانسیل مرکزی بصورت زیر خواهد بود:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi(r) + V \psi(r) = E \psi(r) \quad (۲-۴)$$

پتانسیل معرفی شده را در قسمت شعاعی معادله شرودینگر برای یک سیستم دو جسمی قرار می-دهیم،

$$\frac{d^2 \psi}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E + \frac{V_0}{1 + e^{\frac{2\alpha(r-R_0)}{a}}} \right] \psi(r) + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \psi(r) = 0 \quad (۳-۴)$$

که تابع موج شعاعی $\psi(r)$ ، بصورت $\psi(r) = (1/r)R(r)$ تعریف می شود و از تغییر متغیر زیر استفاده کرده-ایم [۶۲-۶۳]:

$$\begin{cases} \ell(\ell+1) \equiv \gamma \\ 1/2a \equiv \alpha \end{cases} \quad (۴-۴)$$

$$\frac{1}{r^2} \square \frac{1}{\alpha^2} \frac{e^{-2\alpha r}}{1 - e^{-2\alpha r}} \quad (۵-۴)$$

برای رسیدن به فرم اصلی در روش NU دو پارامتر جدید را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$c = e^{-2\alpha R_0} \quad (۶-۴)$$

$$s = ce^{2\alpha r - 1}$$

با توجه به معادله (۳-۱۰) که معادله اصلی در روش NU است داریم:

$$\frac{d^2 R(s)}{ds^2} + \frac{s}{s(c+s)} \frac{dR(s)}{ds} + \frac{1}{s^2(c+s)^2} \times \left[(\varepsilon^2 + \Omega^2 + \eta_1^2 - \eta_4^2) s^2 + (\beta + \eta_3^2) s + \eta_2^2 \right] R(s) = 0 \quad (۴-۷)$$

که در این رابطه

$$\varepsilon^2 = -\frac{\mu E}{2\hbar^2 \alpha^2} \quad (۴-۸)$$

$$\beta^2 = \frac{\mu W_0}{2\hbar^2 \alpha^2 (1+c)} \quad (۴-۹)$$

$$\Omega^2 = \frac{\mu W_0}{2\hbar^2 \alpha^2 (1+c)^2} \quad (۴-۱۰)$$

$$\eta_1^2 = \frac{1}{\alpha^4} \gamma \quad \eta_2^2 = \frac{c^2}{\alpha^4} \gamma \quad \eta_3^2 = \frac{2c}{\alpha^4} \gamma \quad \eta_4^2 = \frac{\mu}{2\hbar^2 \alpha^2} \quad (۴-۱۱)$$

با مقایسه رابطه (۴-۶) با رابطه (۳-۱۰) چند جمله ای ها بصورت زیر خواهند شد:

$$\tilde{\tau}(s) = s \quad (۴-۱۲)$$

$$\sigma(s) = s(c+s)$$

$$\tilde{\sigma}(s) = -(\varepsilon^2 + \Omega^2 + \eta_1^2 + \eta_4^2) s^2 + (\beta^2 + \eta_3^2) s + \eta_2^2$$

از رابطه (۳-۱۸) می توان $\pi(s)$ را بصورت زیر بدست آورد:

$$\pi(s) = \frac{c+s}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(4k-b_1)s^2 + (b_2+4ck)s + b_3} \quad (۴-۱۳)$$

که

$$b_1 = -4a + 1 \quad b_2 = 2c - 4b \quad b_3 = c^2 - 4d \quad (۴-۱۴)$$

و در این رابطه

$$a = \varepsilon^2 + \Omega^2 + \eta_1^2 + \eta_4^2 \quad b = \beta^2 + \eta_3^2 \quad d = \eta_2^2 \quad (۴-۱۵)$$

با در نظر گرفتن رابطه $\sigma'(s) = 1 - 2s$ ، و از آنجایی که باید $\pi(s)$ حداکثر یک چند جمله ای درجه

یک باشد، جملات زیر رادیکال در معادله ی (۴-۱۳) باید به صورت یک چند جمله ای درجه اول

مرتب شوند که این در صورتی ممکن است که مشخص کننده ی آن، $\Delta = b^2 - 4ac$ ، صفر باشد [۶۲].

در این حالت یک معادله برای K بدست می آید که پس از حل معادله، مقادیر بدست آمده برای K

عبارت است از

$$k_{1,2} = \frac{b_2(2-c)}{4c^2} \pm \frac{1}{2c^2} \sqrt{b_2[(1-c)b_2 - b_1c^2]} \quad (۱۶-۴)$$

همان طور که نشان داده شده است برای k دو مقدار بدست آمده است، با جاگذاری این رابطه در

(۱۸-۳) دو مقدار برای $\pi(s)$ بدست می آید پس خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} i) \pi(s) &= \frac{c+s}{2} \pm \frac{1}{2c^2} \left[\sqrt{b_2}s + \sqrt{(1-c)b_2^2 + b_1c^2} \right] \quad \text{for} \quad k = \frac{b_2(2-c)}{4c^2} + \frac{1}{2c^2} \sqrt{b_2[(1-c)b_2 + b_1c^2]} \\ ii) \pi(s) &= \frac{c+s}{2} \pm \frac{1}{2c^2} \left[\sqrt{b_2}s - \sqrt{(1-c)b_2^2 + b_1c^2} \right] \quad \text{for} \quad k = \frac{b_2(2-c)}{4c^2} + \frac{1}{2c^2} \sqrt{b_2[(1-c)b_2 + b_1c^2]} \end{aligned} \quad (۱۷-۴)$$

با مقایسه رابطه فوق با رابطه (۱۸-۳) و (۱۹-۳) ویژه مقادیر انرژی بدست می آید. از آنجا که $\tau(s)$ در

معادله (۱۳-۳) باید مشتقی منفی داشته باشد در نتیجه مناسب ترین جواب برای $\pi(s)$ بصورت زیر

خواهد بود:

$$\pi(s) = \frac{c+s}{2} - \frac{1}{2c^2} \left[\sqrt{b_2}s - \sqrt{(1-c)b_2^2 + b_1c^2} \right] \quad (۱۸-۴)$$

با توجه به روابط قبلی و روابط در روش NU می توان مقدار E_n را از رابطه زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} E_n &= 1 + \frac{2\hbar^2\gamma}{\mu\alpha^2} + \frac{V_0}{(1+c)^2} - \left(\frac{\hbar^2}{2\mu} \right) \alpha^2 - \left(\frac{\hbar^2}{8\mu} \right) \alpha^2 \left[2c - \left(\frac{4\mu}{\hbar^2\alpha^2} \right) \left(\frac{V_0}{1+c} + c \left(\frac{2\hbar^2}{\mu} \right) \left(\frac{\gamma}{\alpha^2} \right) \right) \right] (c-1) \\ &\quad - \frac{2\hbar^2}{\mu} \alpha^2 \left[\frac{2n}{n \sqrt{2c - \frac{2\mu}{\hbar^2\alpha^2} \left(\frac{V_0}{1+c} + c \left(\frac{2\hbar^2\gamma}{\mu\alpha^2} \right) \right)}} + \frac{4+c-3n(n-1)}{2 \left[2c - \frac{2\mu}{\hbar^2\alpha^2} \left(\frac{V_0}{1+c} + c \left(\frac{2\hbar^2\gamma}{\mu\alpha^2} \right) \right) \right]} - \frac{1}{c} \right]^2 \end{aligned} \quad (۱۹-۴)$$

۴- ۳ محاسبه سطح مقطع پراکندگی و طول پراکندگی در

مجاورت پتانسیل وود ساکسون

همانطور که در بخش اول توضیح داده شد تغییر فاز از رابطه زیر بدست می آید [۶۴-۶۵-۶۶]:

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{k}{K} \tan KR \right) - kR \quad (۲۰-۴)$$

که در این رابطه k و K بصورت زیر تعریف می شود:

$$K^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2}(E + U_0) \quad (21-4)$$

$$k^2 = \frac{2\mu E}{\hbar^2}$$

از آنجا که در رابطه (۴-۱۵) ویژه مقادیر انرژی رابدست آوردیم می توان به راحتی مقادیر k و K را بدست آورد. و μ عبارت است از جرم کاهش یافته که بصورت زیر تعریف میشود و برابر با نصف جرم نوکلئون است:

$$\mu = M_p M_n / (M_p + M_n) \quad (22-4)$$

با محاسبه k و K و از روابط (۴-۲۰) و (۴-۲۱) تغییر فاز را بدست می آوریم. پس از آن که تغییر فاز را بدست آوردیم دامنه پراکندگی را از رابطه زیر محاسبه می نماییم [۶۷-۶۸]:

$$f_\ell(k) = \frac{1}{2ik} (e^{2i\delta_\ell(k)} - 1) = \frac{e^{i\delta_\ell(k)}}{k} \sin \delta_\ell \quad (23-4)$$

و همچنین طول پراکندگی بصورت زیر خواهد شد :

$$a_0 = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} \tan \delta_0(k) \quad (24-4)$$

و همان طور که در بخش اول هم توضیح دادیم سطح مقطع کل پراکندگی از رابطه زیر بدست می آید:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) \sin^2 \delta_\ell(k) \quad (25-4)$$

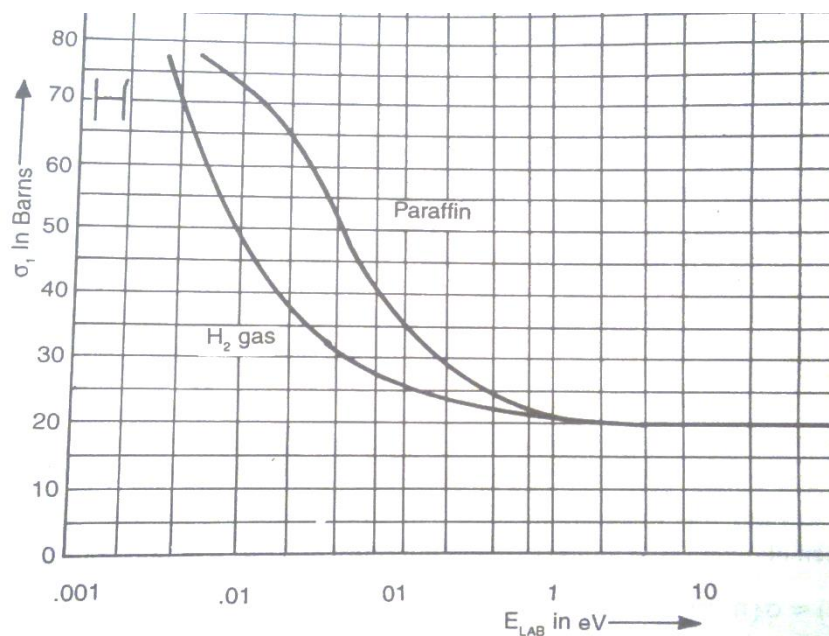
با توجه به روابط فوق توانستیم مقدار عددی برای تغییر فاز، دامنه پراکندگی، طول پراکندگی و سطح مقطع پراکندگی بدست آوریم. اساس برنامه به ازای مقادیر مختلفی از V_0 که عمق چاه پتانسیل و r که نشان دهنده ی برد پتانسیل است، می باشد. در این برنامه $\ell=0$ در نظر گرفتیم زیرا پراکندگی عمدتا در ناحیه S رخ می دهد، و $n=0$ قرار دادیم وثابت های پتانسیل را بصورت $R=5.14 fm$ و $a=0.65 fm$ در نظر گرفتیم [۶۹-۷۰].

برخی از نتایج بدست آمده را در جدول زیر ذکر کرده ایم، البته برای اینکه جدول تنظیم شده برای کارهای نظری مفید واقع شود باید مقایسه ای بین نتایج بدست آمده و مقادیر تجربی داشته باشیم، نتایج آزمایشگاهی به ما نشان می دهد که در انرژی های کم سطح مقطع مقداری ثابت داشته و این مقدار نزدیک به 4 b تا 5 b است . (مراجع ۱۴ و ۷۱ را ببینید.) پس طبق نتایج بدست آمده که در جدول زیر ذکر شده است و مقایسه آن با شکل (۴-۱) و نتایج تجربی در میابیم که نتایج بدست آمده تقریباً همخوانی قابل قبولی با نتایج آزمایشگاهی دارد.

جدول (۴-۱): دامنه و سطح مقطع پراکندگی و طول پراکندگی با در نظر گرفتن ثابت های پتانسیل ، $R=5.14\text{fm}$ ، $n=0$.

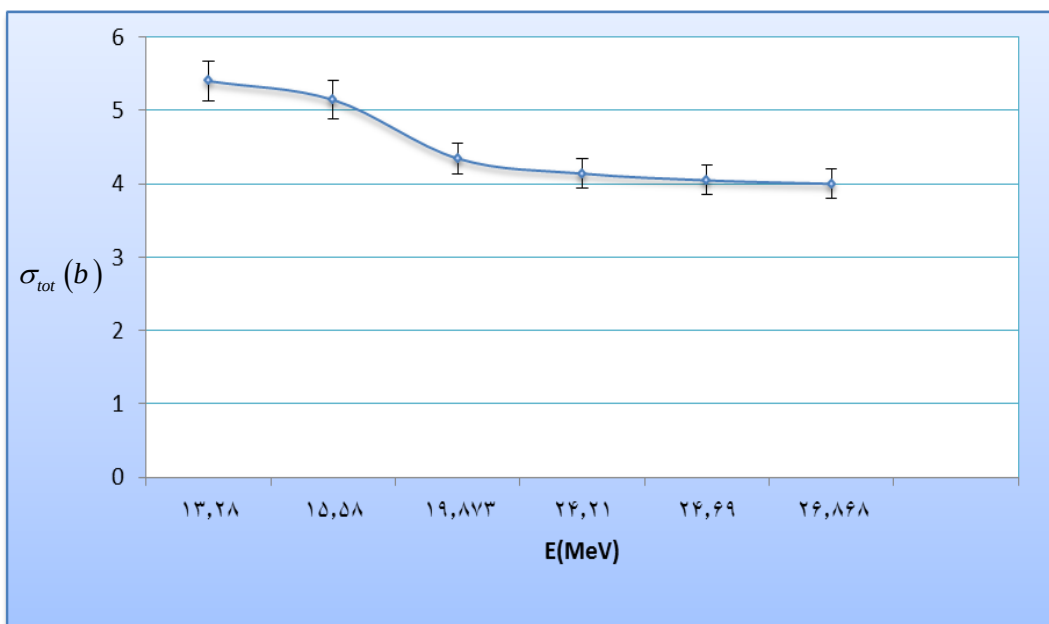
$a=0.65\text{fm}$

$V_0 (\text{MeV})$	$E (\text{MeV})$	f	$\sigma_{tot} (b)$	$a_0 (fm)$
۳۶/۸	۱۳/۲۶	۲/۹۵	۵/۴۱	۶/۰۶۵
۳۸/۶۲	۱۵/۰۱	۲/۵۸۲	۵/۳۸۱	۶/۵۵
۳۹/۱۲	۱۵/۵۸	۲/۳۱۱	۵/۱۴۳	۶/۹۵۷
۴۳/۴۱	۱۹/۸۷۳	۲/۲۷۷	۴/۳۴۳	۶/۴۳۹
۴۷/۷۵	۲۴/۲۱۰	۲/۰۱۵	۴/۱۴۰	۶/۳۹۰
۴۸/۲۳	۲۴/۶۹۰	۲/۱۵	۴/۰۴۸	۶/۷۰۰
۵۰/۴۱	۲۶/۸۶۸	۲/۰۱	۴/۰۰۱	۷/۷۳

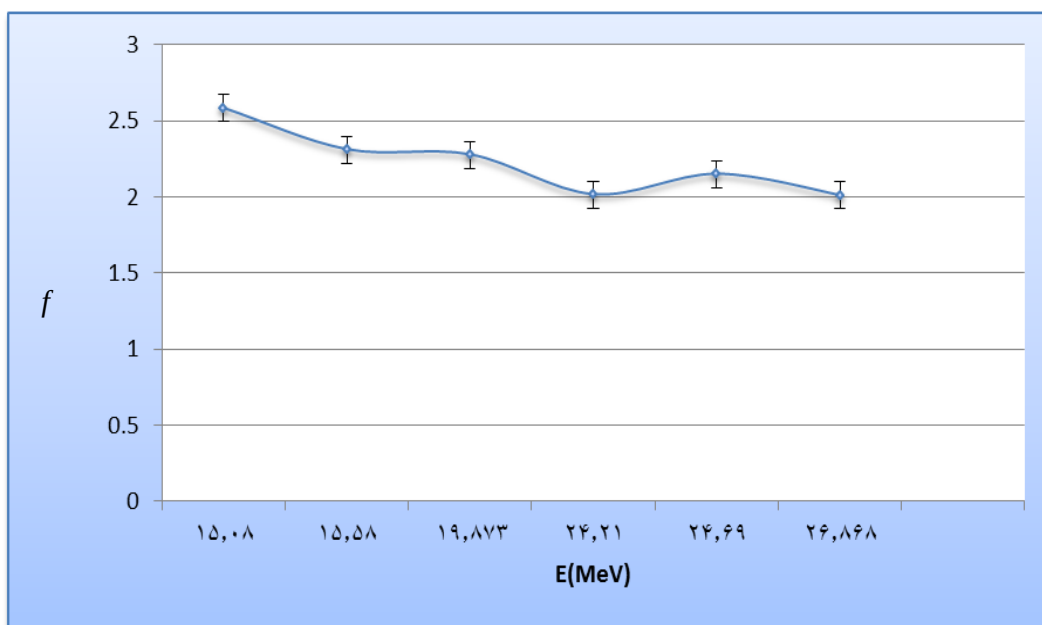


شکل (۴-۱): نتایج تجربی سطح مقطع پراکندگی بر حسب انرژی های مختلف

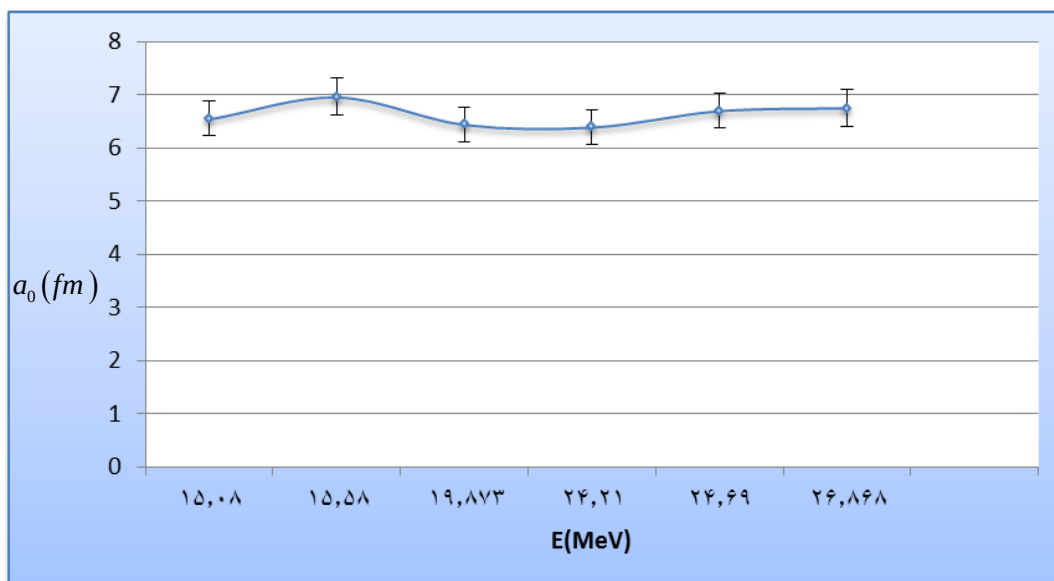
با توجه به جدول فوق نمودارهای انرژی بر حسب سطح مقطع کل پراکندگی، دامنه پراکندگی و طول پراکندگی را بر حسب انرژی های مختلف رسم کردیم و همانطور که نشان می دهد و انتظار می رود و نتایج آزمایشگاهی نشان میدهد (شکل (۴-۱) را ببینید [۷۱]) نمودار انرژی بر حسب سطح مقطع و دامنه پراکندگی بصورت نزولی کاهش پیدا میکند و هر چه انرژی افزایش پیدا میکند سطح مقطع کم خواهد شد، در مورد طول پراکندگی با افزایش انرژی انتظار داریم این مقدار روند کاهشی خود را نشان دهد. با مقایسه نمودارها با نمودار (۴-۱) که نتیجه آزمایشات برای دو ماده پارافین و نوعی گاز می باشد این را نشان می دهد که کار ما همخوانی قابل قبولی با نتایج تجربی دارد.



شکل (۲-۴) نمودار انرژی برحسب سطح مقطع پراکندگی است که با افزایش انرژی سطح مقطع پراکندگی کاهش پیدا می کند.



شکل (۳-۴): نمودار انرژی برحسب دامنه پراکندگی را نشان می دهد که با افزایش انرژی دامنه پراکندگی با توجه به نوساناتی که دارد، کاهش پیدا می کند.



شکل (۴-۴): نمودار انرژی برحسب طول پراکندگی است، که انتظار می رود این مقدار با افزایش انرژی روند کاهشی خود را نشان دهد.

۴-۴ محاسبه سطح مقطع پراکندگی با پتانسیل دوبعدی

برای بررسی پراکندگی نوکلئون - نوکلئون و محاسبه دامنه پراکندگی، طول پراکندگی و سطح مقطع پراکندگی در دو بعد نیاز به یک پتانسیل دوبعدی مناسب داریم، در این پایان نامه ما پتانسیل دو بعدی را بصورت زیر پیشنهاد می کنیم [۷۲]:

$$V(r, \theta) = ar^2 + \frac{b}{r^2} + \beta \frac{\cot^2 \theta}{r^2} + c \quad \beta > 0 \quad (۴-۲۶)$$

که در رابطه فوق a, b, c پارامترهای ثابت هستند [۷۳-۷۴].

برای بررسی پراکندگی در مجاورت این پتانسیل دو بعدی در ابتدا باید به حل معادله شرودینگر با این پتانسیل دو بعدی بپردازیم.

۴-۴-۱ معادله شرودینگر با پتانسیل دو بعدی

برای حل این پتانسیل در ابتدا معادله مستقل از زمان شرودینگر را در نظر می گیریم :

$$\nabla^2 \psi(\vec{r}) + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r, \theta)] \psi(\vec{r}) = 0 \quad (۲۷-۴)$$

که در این معادله تابع $\psi(\vec{r})$ را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \phi) = R(r)H(\theta)\phi(\phi) \quad (۲۸-۴)$$

تابع موج $\psi_n(\vec{r})$ حالت های مقید و سطوح انرژی وابسته به آنها ، E_n ، برای ذره در یک میدان پتانسیل را

تشریح می کند. در مختصات کروی معادله (۲۷-۴) را می توان بصورت زیر نوشت [۵۲]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi(\vec{r})}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r})}{\partial \phi^2} \right] + \frac{2\mu}{\hbar^2} [E - V(r, \theta)] \psi(\vec{r}) = 0 \quad (۲۹-۴)$$

با در نظر گرفتن تابع موج بصورت رابطه (۲۸-۴) و جایگذاری در معادله فوق داریم

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - ar^2 - \frac{b}{r^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu r^2} \gamma \right) R(r) = 0 \quad (۳۰-۴)$$

$$\frac{d^2 H}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dH}{d\theta} + \left(\frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma - \frac{2\mu}{\hbar^2} \beta \cot^2 \theta - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) H(\theta) = 0 \quad (۳۱-۴)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\phi^2} + m^2 \phi(\phi) = 0 \quad (۳۲-۴)$$

که در آن m^2 و $\gamma = \ell(\ell+1)$ ثابت های جداسازی هستند. معادلات (۳۰-۴) و (۳۱-۴) و (۳۲-۴) به ترتیب

معادله شعاعی ، معادله زاویه ای و معادله سمتی هستند.

در ادامه به حل هر قسمت به طور جداگانه به روش NU می پردازیم.

۴-۴-۲ حل معادله شعاعی شرودینگر به روش NU

برای حل قسمت شعاعی معادله (۳۰-۴) را در نظر می گیریم، سپس با در نظر گرفتن $R(r) = \frac{1}{r}u(r)$ ،

معادله (۳۰-۴) را بصورت زیر باز نویسی می کنیم :

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left[E - a r^2 - \frac{b}{r^2} - \frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\gamma}{r^2} \right] u(r) = 0 \quad (۳۳-۴)$$

در ادامه با تغییر متغیر $x = r^2$ معادله (۳۳-۴) را بصورت زیر می نویسیم:

$$\frac{d^2 u(x)}{dx^2} + \frac{1}{2x} \frac{du(x)}{dx} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \frac{1}{4x^2} \left[E x - a x^2 - b - \frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma \right] u(x) = 0 \quad (۳۴-۴)$$

حال اگر معادله فوق را با معادله (۳-۱۰)، شکل کلی معادله در روش NU مقایسه کنیم داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(x) &= 1 \\ \sigma(x) &= 2x \\ \sigma'(x) &= 2 \\ \tilde{\sigma}(x) &= \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E x - a x^2 - b - \frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma \right) \end{aligned} \quad (۳۵-۴)$$

بنابراین از معادله (۳-۱۸)، $\pi(x)$ را بصورت زیر می توانیم بنویسیم

$$\pi(x) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{8\mu}{\hbar^2} a \right) x^2 - \left(\frac{8\mu}{\hbar^2} E + 8k \right) x + \frac{8\mu}{\hbar^2} b + 4\gamma + 1} \quad (۳۶-۴)$$

با در نظر گرفتن $\sigma'(x) = 2$ ، و با شرط آنکه زیر رادیکال مجذور یک چند جمله ای درجه اول می -

باشد k را تعیین می کنیم

$$k_{1,2} = -\frac{\mu}{\hbar^2} E \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} a \zeta} \quad (۳۷-۴)$$

که در این رابطه $\zeta = 4\gamma + \frac{8\mu}{\hbar^2} b + 1$ است.

با جایگذاری مقدار بدست آمده برای k در رابطه (۳۷-۴) داریم:

$$\pi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} x + \sqrt{\zeta} \right) & \text{for } k_1 = -\frac{\mu}{\hbar^2} E + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} a \zeta \\ \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} x - \sqrt{\zeta} \right) & \text{for } k_2 = -\frac{\mu}{\hbar^2} E - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} a \zeta \end{cases} \quad (38-4)$$

اکنون از (۱۳-۳) $\tau(x)$ را محاسبه می کنیم و با شرط $\tau' < 0$ باشد در هر حالت $\pi(x)$ مناسب را

انتخاب می کنیم

$$i) \pi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} x + \sqrt{\zeta} \right) \quad k_1 = -\frac{\mu}{\hbar^2} E + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} a \zeta \quad (39-4)$$

$$ii) \pi(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} x - \sqrt{\zeta} \right) \quad k_2 = -\frac{\mu}{\hbar^2} E - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} a \zeta \quad (40-4)$$

$\tau(x)$ را هم می توانیم بصورت زیر بنویسیم

$$i) \tau(x) = 2 - \sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} x + \sqrt{\zeta} \quad (41-4)$$

$$ii) \tau(x) = 2 - \sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} x - \sqrt{\zeta} \quad (42-4)$$

با توجه به روابط (۱۵-۳) و (۱۹-۳)، λ_n و λ را محاسبه می کنیم

$$i) \lambda_n = -n \left(-\sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} \right) \quad (43-4)$$

$$i) \lambda = -\frac{\mu}{\hbar^2} E + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} \zeta - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} \quad (44-4)$$

$$ii) \lambda_n = -n \left(-\sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} \right) \quad (45-4)$$

$$ii) \lambda = -\frac{\mu}{\hbar^2} E - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} \zeta - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} \quad (46-4)$$

از معادلات فوق با توجه به آنکه $\lambda = \lambda_n$ ویژه مقادیر انرژی را بصورت زیر بدست آوردیم

$$i) E = \frac{\sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}} (-1 - 2n) + \sqrt{\frac{2\mu a}{\hbar^2}} \zeta}{\frac{2\mu}{\hbar^2}} \quad (47-4)$$

$$ii) E = \frac{\sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}}(-1-2n) - \sqrt{\frac{2\mu a}{\hbar^2}}\zeta}{\frac{2\mu}{\hbar^2}} \quad (48-4)$$

در ادامه ویژه توابع وابسته را محاسبه خواهیم کرد. برای این منظور ابتدا از معادله (۳-۱۴) $\phi(x)$ را از رابطه زیر محاسبه می کنیم

$$\ln \phi(x) = \int \frac{\pi(x)}{\sigma(x)} dx \quad (49-4)$$

با توجه به روابط بدست آمده در بالا می توانیم برای هر حالت $\phi(x)$ را بدست آوریم:

$$i) \phi(x) = x^{\frac{\Gamma}{4}} e^{-\frac{\eta x}{2}} \quad (50-4)$$

$$ii) \phi(x) = x^{\frac{(2-\Gamma)}{4}} e^{-\frac{\eta x}{2}} \quad (51-4)$$

که در روابط فوق $\Gamma = 1 - \sqrt{\zeta}$ و $\eta = \sqrt{\frac{8\mu a}{\hbar^2}}$ می باشد، حال از (۳-۱۷) ابتدا $\omega(x)$ و سپس $\rho(x)$ را محاسبه می کنیم

$$i) \omega(x) = x^{\frac{1+\Gamma}{2}} e^{-\eta x} \quad (52-4)$$

$$i) \rho(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{\Gamma-1}{2}} e^{-\eta x} \quad (53-4)$$

$$ii) \omega(x) = x^{\frac{1+\Gamma}{2}} e^{-\eta x} \quad (54-4)$$

$$i) \rho(x) = x^{\frac{1-\Gamma}{2}} e^{-\eta x} \quad (55-4)$$

از معادلات (۴-۵۳) و (۴-۵۵) و (۳-۱۶) داریم:

$$i) y_n(x) = 2^n B_n x^{\frac{1-\Gamma}{2}} e^{\eta x} \frac{d^n}{dx^n} x^{n+\frac{\Gamma-1}{2}} e^{-\eta x} \quad (56-4)$$

$$i) y_n(x) = 2^n B_n x^{\frac{\Gamma-1}{2}} e^{\eta x} \frac{d^n}{dx^n} x^{n+\frac{1-\Gamma}{2}} e^{-\eta x} \quad (57-4)$$

نمایش چند جمله ای ردیگز توابع وابسته لاگر را بصورت زیر داریم [۸]:

$$L_n^k(x) = \frac{e^x x^{-k}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+k}) \quad (58-4)$$

با مقایسه معادلات (۵۶-۴) و (۵۷-۴) با معادله فوق $y_n(x)$ را به شکل زیر باز نویسی می کنیم :

$$i) y_n(x) = 2^n B_n n! L_n^{\left(\frac{\Gamma-1}{2}\right)}(\eta x) \quad (۵۹-۴)$$

$$ii) y_n(x) = 2^n B_n n! L_n^{-\left(\frac{\Gamma-1}{2}\right)}(\eta x) \quad (۶۰-۴)$$

و در نهایت از معادلات (۵۹-۴)، (۶۰-۴)، (۵۰-۴)، (۵۱-۴) و (۱۱-۳) داریم :

$$i) u(x) = 2^n B_n n! x^{\frac{\Gamma}{4}} e^{-\frac{\eta x}{2}} L_n^{\left(\frac{\Gamma-1}{2}\right)}(\eta x) \quad (۶۱-۴)$$

$$ii) u(x) = 2^n B_n n! x^{\frac{(2-\Gamma)}{4}} e^{-\frac{\eta x}{2}} L_n^{-\left(\frac{\Gamma-1}{2}\right)}(\eta x) \quad (۶۲-۴)$$

۳-۴-۴ معادله زاویه شرودینگر به روش NU

برای حل قسمت زاویه ای معادله (۳۱-۴)، را در نظر می گیریم و نشان می دهیم که این معادله را هم

می توان در حضور این پتانسیل به روش NU به طور دقیق حل کرد بنابراین با یک تغییر متغیر به

صورت $z = \cos \theta$ ، معادله (۳۰-۴) را می توان به شکل زیر بنویسیم :

$$\frac{d^2 H}{dz^2} - \frac{2z}{1-z^2} \frac{dH}{dz} + \frac{1}{(1-z^2)^2} \left[\frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma (1-z^2) - \frac{2\mu}{\hbar^2} \beta z^2 - m^2 \right] H(\theta) = 0 \quad (۶۳-۴)$$

با مقایسه معادله فوق با (۱۰-۳) داریم

$$\tilde{\tau}(z) = -2z \quad (۶۴-۴)$$

$$\sigma(z) = 1 - z^2 \quad (۶۵-۴)$$

$$\sigma'(z) = -2z \quad (۶۶-۴)$$

$$\tilde{\sigma}(z) = -\left(\frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma + \frac{2\mu}{\hbar^2} \beta \right) z^2 + \frac{\hbar^2}{2\mu} \gamma - m^2 \quad (۶۷-۴)$$

از رابطه (۳-۱۸) ، $\pi(z)$ را بصورت زیر می نویسیم

$$\pi(z) = \pm \sqrt{\left(\frac{\hbar^2}{2\mu}\gamma + \frac{2\mu}{\hbar^2}\beta - k\right)z^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu}\gamma - m^2 + k} \quad (۴-۶۸)$$

مقدار k را با توجه به آنکه زیر رادیکال یک پند جمله ای درجه یک باشد تعیین می کنیم در نتیجه

داریم

$$k_1 = \frac{\hbar^2}{2\mu}\gamma - \frac{2\mu}{\hbar^2}\beta \quad (۴-۶۹)$$

$$k_2 = \frac{\hbar^2}{2\mu}\gamma - m^2 \quad (۴-۷۰)$$

پس برای $\pi(z)$ دو مقدار بدست می آید

$$i) \pi(z) = \pm \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\beta + m^2} \quad \text{for} \quad k_1 = \frac{\hbar^2}{2\mu}\gamma + \frac{2\mu}{\hbar^2}\beta \quad (۴-۷۱)$$

$$ii) \pi(z) = \pm \left[\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\beta + m^2} \right] z \quad \text{for} \quad k_2 = \frac{\hbar^2}{2\mu}\gamma - m^2 \quad (۴-۷۲)$$

با توجه به شرط $\tau' < 0$ ، مناسب ترین جواب را برای $\pi(z)$ می نویسیم

$$\pi(z) = - \left[\sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}\beta + m^2} \right] z \quad \text{for} \quad k_2 = \frac{\hbar^2}{2\mu}\gamma - m^2 \quad (۴-۷۳)$$

و با توجه به آنکه $\tau(z) = \tilde{\tau}(z) + 2\pi(z)$ خواهیم داشت:

$$\tau(z) = -2 \left(1 + \sqrt{m^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2}\beta} \right) z \quad (۴-۷۴)$$

از معادلات (۳-۱۵) و (۳-۱۹) ، λ_n و λ را محاسبه میکنیم

$$\lambda_n = 2n \left(1 + \sqrt{m^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2}\beta} \right) - n(n+1) \quad (۴-۷۵)$$

$$\lambda = \frac{\hbar^2}{2\mu}\gamma - m^2 - \sqrt{m^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2}\beta} \quad (۴-۷۶)$$

و در نهایت از $\lambda = \lambda_n$ و معادلات فوق، γ را بدست می آوریم

$$\gamma = \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(n(1-n) + m^2 + (2n+1) \sqrt{m^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} \beta} \right) \quad (77-4)$$

برای محاسبه ویژه توابع معادله زاویه ای از معادله (73-4) برای $\pi(z) = -\Lambda z$ که $\Lambda = \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2} \beta + m^2}$ است و با توجه به اینکه $\sigma(z) = 1 - z^2$ می باشد داریم

$$\phi(z) = (1 - z^2)^{\frac{\Lambda}{2}} \quad (78-4)$$

از را بطله (18-3) و (74-4) داریم

$$\omega(z) = (1 - z^2)^{(1+\Lambda)} \quad (79-4)$$

بنا براین تابع وزنی $\rho(r) = \frac{\omega(r)}{\sigma(r)}$ را بصورت زیر می توان نوشت

$$\rho(z) = (1 - z^2)^{\Lambda} \quad (80-4)$$

و در نهایت از رابطه (16-3)، $y_n(z)$ را بصورت زیر می نویسیم

$$y_n(z) = \frac{B_n}{(1 - z^2)^{\Lambda}} \frac{d^n}{dz^n} \left[\left((1 - z^2)^{n+\Lambda} \right) \right] \quad (81-4)$$

نمایش ردیگز چند جمله ای های ژاکوبی را بصورت زیر داریم [14]

$$P_n^{(\alpha', \beta')}(z) = \frac{1}{2^n n!} (z-1)^{\alpha'} (z+1)^{-\beta'} \frac{d^n}{dz^n} \left[(z-1)^{(n+\alpha')} (z+1)^{(n+\beta')} \right] \quad (82-4)$$

معادله (81-4) را بصورت زیر باز نویسی می کنیم

$$y_n(z) = \left[B_n 2^n n! (-1)^n (z-1)^{-2\Lambda} \right] \frac{1}{2^n n!} (z-1)^{\Lambda} (z+1)^{-\Lambda} \frac{d^n}{dz^n} \left[(z-1)^{(n+\Lambda)} (z+1)^{(n+\Lambda)} \right] \quad (83-4)$$

با مقایسه (84-4) و (82-4) و در نظر گرفتن $\alpha', \beta' = \Lambda$ داریم

$$y_n(z) = \left[B_n 2^n n! (-1)^n \right] (z-1)^{-2\Lambda} P_n^{(\Lambda, \Lambda)}(z) \quad (۸۴-۴)$$

و در نهایت از (۳-۱۱)، (۴-۷۸) و (۴-۸۴) تابع موج زاویه ای را بصورت زیر بدست می آوریم

$$H_n(z) = \phi_n(z) y_n(z) = \left[B_n 2^n n! (-1)^n \right] (z-1)^{-2\Lambda} P_n^{(\Lambda, \Lambda)}(z) \quad (۸۵-۴)$$

۴-۴-۴ سطح مقطع و طول پراکندگی

همانطور که قبلا هم توضیح داده ایم برای محاسبه سطح مقطع پراکندگی باید در ابتدا ویژه مقادیر انرژی را بدست آوریم. ما این کار را در دو بخش قبلی انجام دادیم و معادله شرودینگر را با پتانسیل پیشنهادی حل کردیم، و با توجه به مباحث گفته شده در بخش اول، به بررسی پراکندگی و محاسبه دامنه پراکندگی، طول پراکندگی و سطح مقطع پراکندگی در انرژی های مختلف پرداختیم. حال با استفاده از مباحث گفته شده در فصول گذشته و روابط مربوط به پراکندگی در دو بعد و روابط تغییر فاز همانطور که گفته شد می توان تغییر فاز WKB در دو بعد را بصورت زیر نوشت [۷۶]:

$$\delta_{2D}^{WKB} = m\pi / 2 + \int_{r_0}^{\infty} dr (F^{1/2} - k) - kr_0 \quad (۸۶-۴)$$

و در رابطه فوق همانطور که در بخش اول هم توضیح داده شد، k عدد موج بصورت $k^2 = 2\mu E / \hbar^2$

تعریف می شود، و $m \equiv kb$ که b پارامتر برخورد است. و $F(r)$ بصورت زیر خواهد بود [۷۶]:

$$F(r) = k^2 - U(r) - \frac{(m^2 - \frac{1}{4})}{r^2} \quad (۸۷-۴)$$

و در این رابطه $U(r) = 2\mu V(r) / \hbar^2$ می باشد. ما با استفاده از این تقریب، تغییر فاز را بدست آوردیم و

با استفاده از رابطه زیر دامنه پراکندگی را محاسبه نموده ایم [۲۰-۷۶]

$$f(k, \theta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\theta) \varepsilon_m e^{i\delta_m(k)} \sin \delta_m(k). \quad (۸۸-۴)$$

و همانطور که در بخش اول توضیح داده شد $\varepsilon_m = 2$ خواهد بود. با استفاده از روابط زیر سطح مقطع

پراکندگی را بدست آورده ایم [۷۶].

$$\frac{d\sigma_{2D}}{d\theta} = \frac{|f(k, \theta)|^2}{k} \quad (۸۹-۴)$$

$$\sigma_{2D}(k^2) = \int_0^{2\pi} (d\sigma_{2D}/d\theta) = 4 \sum_0^\infty \varepsilon_m \sin^2 \delta_m(k). \quad (۹۰-۴)$$

دامنه پراکندگی را نیز طبق آنچه در فصل اول توضیح داده شده است محاسبه می کنیم. ما با استفاده از مطالب گفته شده در فصول گذشته و با بکارگیری یک روش عددی مناسب و پیچیده. اساس برنامه کامپیوتری به ازای مقادیر مختلفی انرژی می باشد، یعنی ما به ازای مقادیر مختلفی از انرژی مقادیری را برای تغییر فاز بدست آوریم. در این برنامه ما با در نظر گرفتن $\ell = 0$ و $n = 0$ مقادیر را بدست آوردیم. برخی از نتایج بدست آمده را در جدول زیر ذکر کرده ایم، البته برای اینکه جدول تنظیم شده برای کارهای نظری مفید واقع شود باید مقایسه ای بین نتایج بدست آمده و مقادیر تجربی داشته باشیم، طبق آنچه در بخش (۴-۲) و مراجع ۱۴ و ۷۱ گفته شد انتظار داریم در حالت دو بعدی هم، مانند حالت یک بعدی با افزایش انرژی روند نزولی برای، دامنه پراکندگی، طول پراکندگی و سطح مقطع پراکندگی داشته باشیم. همانطور که در ابتدای بخش توضیح داده شده، پارامترها را دوباره معرفی میکنیم. a, b و β ثابت های پتانسیل هستند، b' پارامتر برخورد است، θ زاویه پراکندگی است. در جدول زیر برخی از نتایج بدست آمده را ذکر کرده ایم.

جدول (۴-۲): دامنه و سطح مقطع پراکندگی با در نظر گرفتن

$$m^2=1, n=0, \ell=0$$

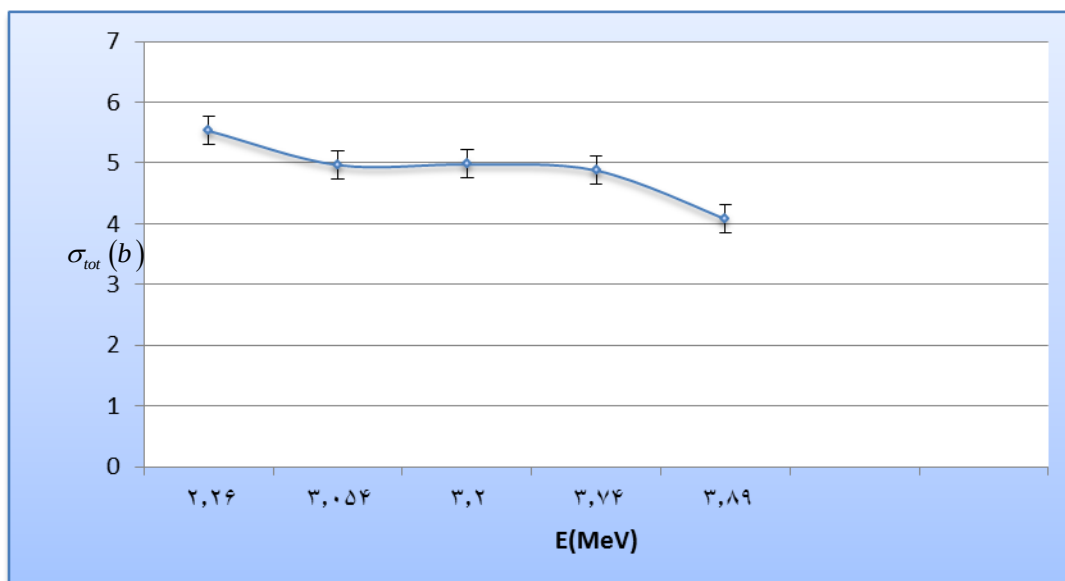
$a(fm)$	$b(fm)$	$\beta(fm)$	$b'(fm)$	θ	$E (MeV)$	$f(k, \theta)$	$\sigma_{tot}(b)$	$a(fm)$
۰/۱۵	۵/۵	۰/۰۲	۱/۲۵	۱۲	۲/۲۶	۶/۶۵	۵/۵۳	۵/۳۴
۰/۳۴	۲/۴۸۵	۰/۰۵۳	۱/۸۰	۲۰	۳/۰۵۴	۶/۲۳	۴/۹۷	۶/۱۳۴
۰/۳۰۱	۳/۹۹	۰/۰۶۳	۱/۸۰	۱۸	۳/۲۰	۵/۲۵	۴/۹۸	۶/۰۴۵
۰/۳۷	۴/۹۵	۰/۰۶	۱/۸۰	۱۵	۳/۷۴	۵/۱۹	۴/۸۸	۶/۷۶
۰/۳۸	۷/۲۵	۰/۰۲	۱/۲۵	۱۰	۳/۸۹	۵/۰۸۸	۴/۰۸۰	۶/۹۳

در ادامه ما نتایج بدست آمده را در نمودار های مختلف انرژی بر حسب سطح مقطع کل، دامنه و طول

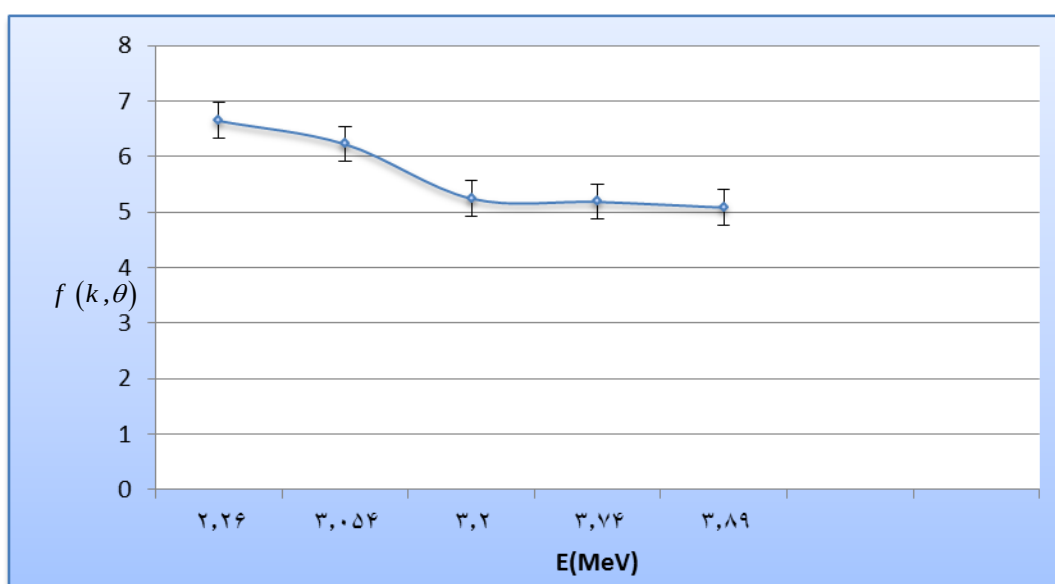
پراکندگی رسم نموده ایم و همانطور که انتظار داریم و در بالا هم گفته شد روند نزولی را با افزایش

انرژی به خوبی مشاهده می کنیم پس پیش بینی می کنیم که نتایج بدست آمده همخوانی قابل

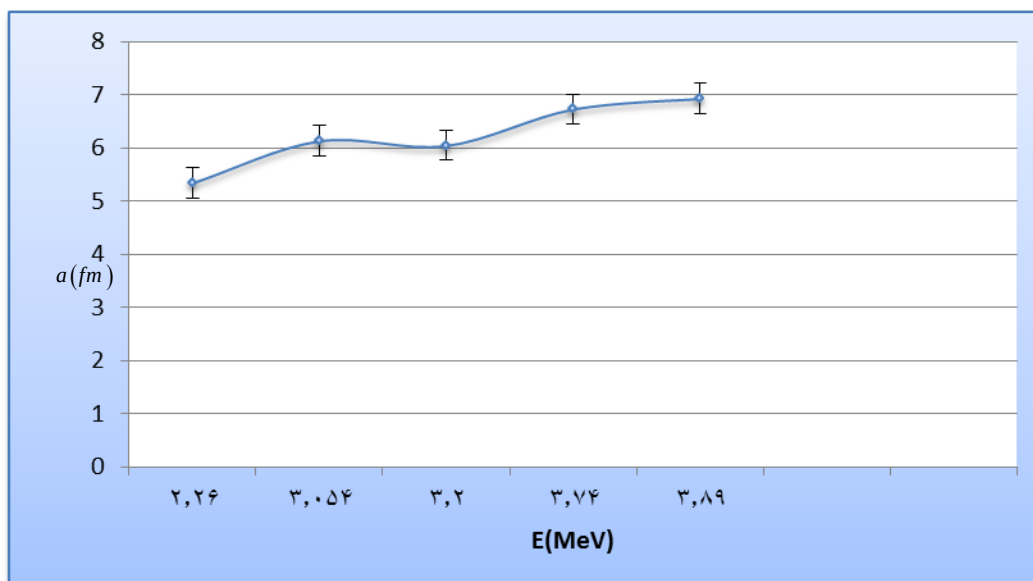
توجهی با نتایج آزمایشگاهی خواهد داشت. (شکل (۴-۱))



شکل (۴-۵): نمودار انرژی بر حسب سطح مقطع پراکندگی در حالت دو بعدی است. همانطور که انتظار می رود روند کاهشی آن به خوبی قابل مشاهده است.



شکل (۴-۶): نمودار انرژی بر حسب دامنه پراکندگی در حالت دو بعدی را نشان می دهد. این نمودار انتظار ما را در مورد کاهش دامنه با افزایش انرژی برآورده می کند.



شکل (۴-۷): نمودار انرژی بر حسب طول پراکندگی در حالت دو بعدی است. پیش بینی می کنیم با افزایش انرژی روند کاهشی خود را به خوبی نشان دهد.

با توجه به جداول و نمودارها در حالت یک بعدی و دو بعدی می توان نتیجه گرفت که با افزایش انرژی زاویه پراکندگی و در نتیجه سطح مقطع و طول پراکندگی کاهش می یابد و در انرژی های بالا ذره مسیر کلاسیکی خور را ادامه می دهد و پراکنده نمی شود. با مقایسه نتایج بدست آمده از محاسبات و مقایسه آن با نتایج تجربی در می یابیم که کار ما همخوانی بسیار خوبی با کارهای آزمایشگاهی دارد، البته جای کار فراوانی برای هسته ها و پتانسیل های دیگر وجود دارد.

در این فصل ما به بررسی پراکندگی و محاسبه دامنه پراکندگی، طول پراکندگی و سطح مقطع پراکندگی در انرژی های مختلف برای یک پتانسیل یک بعدی (مرکزی) و یک پتانسیل دو بعدی وابسته به (r, θ) پرداختیم. نمودارهای سطح مقطع، دامنه و طول پراکندگی را بر حسب انرژی های مختلف رسم کردیم و همانطور که انتظار داشتیم سطح مقطع و دامنه پراکندگی و طول پراکندگی با افزایش انرژی کاهش پیدا می کند.

نتیجه گیری

در این پایان نامه پراکندگی نوکلئون _ نوکلئون را در مجاورت یک پتانسیل مرکزی، همچون وود ساکسون که یک پتانسیل پرکاربرد هسته ای است، و یک پتانسیل دو بعدی مورد بررسی قرار دادیم دامنه پراکندگی، طول پراکندگی و سطح مقطع پراکندگی را در انرژی های مختلف برای حالت یک بعدی (مرکزی) و حالت دو بعدی وابسته به (r, θ) محاسبه کردیم. نمودارهای سطح مقطع، دامنه و طول پراکندگی را بر حسب انرژی های مختلف رسم نمودیم و همانطور که انتظار داشتیم سطح مقطع و دامنه پراکندگی و طول پراکندگی با افزایش انرژی کاهش پیدا می کند. البته این کار قابل تعمیم به دیگر پتانسیل ها و همچنین پتانسیل های سه بعدی می باشد و انتظار می رود که بتوان نتایج بهتری کسب کرد. همچنین می توان از تقریب های دیگری برای بررسی و حل معادلات شرودینگر استفاده کرد. نتایجی را که از محاسبات بدست آوردیم را با مقادیر تجربی و آزمایشگاهی مقایسه کردیم و دریافتیم که کار ما همخوانی قابل توجهی با نتایج آزمایشگاهی دارد. با بررسی پراکندگی می توان توصیف بهتری از سیستم های فیزیکی داشته باشیم و می توان به شناخت هسته و بررسی و کاوش نیروهای هسته ای، قوانین حاکم بر برهم کنش های ذرات، تعیین شعاع هسته ای، آگاهی از انرژی حالت برانگیخته و اطلاعاتی درباره اسپین و پاریته حالت برانگیخته بدست آورد.

مراجع:

1. L.D. Landau and E.M. Lifshiz, "**Quantum Mechanics Non- Relativisti Theory**", 3 edition, Pergamon , New York ,563-597,(1977).
۲. والتر می برهوف، "**مبانی فیزیک هسته ای**"، مترجم محمد فرهاد رحیمی، چاپ ششم، چاپ و انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد، (۱۳۸۵).
3. B. L. Cohen, "**Concepts of Nuclear Physics**", McGraw Hill, New York, (1971).
4. H. Frauenfelder and E. M. Henley, "**Subatomic Physics**", prentice – Hall. Vol 1. 2,(1977).
5. H. S. Hans, "**Nuclear Physics Experimental and Theoretical** ",(2001).
6. J. H. Eberly, "Quantum Scattering Theory in one Dimension", **Am. J. Phys.** 33, 771-773, (1965).
7. V. E. Barlette, M. M. Leite and S. K. Adhikari, "Quantum Scattering in one Dimension", **Eur. J. Physics** , 21 , 435-440, (2000).
8. J. J. Sakurai, "**Modern Quantum Mechanics**", Addison Wesley, 392-394,(1994).
9. J. F. anek, "On Phase shift Analysis of one Dimensional Scattering" , **Am. J. Phys.** 44, 778-779, (1976) .
10. A. N. Kamal, "On the scattering theory in one dimension", **Am. J. Phys.** 52,46-49, (1984).
11. A. Cabo, J. L. Lucio, and H. Mercado, "On Scale Invariance and Anomalies in Quantum Mechanics", **Am. J. Phys.** 66(6) ,240-246, (1998).
12. Y. Nogami and C. K. Ross, "Scattering from a Nonsymmetric Potential in one Dimension as a Coupled-channel Problem", **Am. J. Phys.** 64, 923-928, (1996).
13. M. G. Rozman , P. Reineker and R. Tehver, " Scattering by locally Periodic One Dimensional Potentials", **Phys. Lett. A** 187, 127-131, (1994).
14. W. Geriner, "**Quantum Mechanics an Introduction**", 4 ediction, Springer-Verlag Berlin Heidelberg,(1989).
15. L. V. Chebotarev and A. Tchebotareva, " Flat Resonances in one Dimensional Quantum Scattering" , **J. Phys. A. Math. Gen.** 29, 7259-7277, (1996).
16. V.E. Tarasov, W.J. Briscoe, H. Gao , A.E. Kudryavtsev, and I.I. Strakovsky, " Extracting the Photoproduction Cross section of the Neutron from Deuteron data

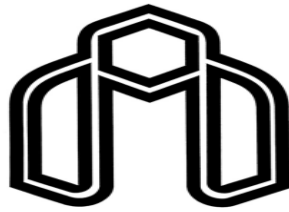
- with FSI Effects", **phys. Rev. C.84**, 035203(2010), .
17. J. F. anek, "On Phase shift Analysis of one Dimensional Scattering", **Am. J. Phys.44**, 778-779, (1976).
 18. I. R. Lapidus, " Quantum Mechanical Scattering in 2 Dimensions", **Am. J. Phys. 50**, 45-47, (1982).
 19. M. J. Moritz and H. Friedrich, "Scattering by a Coulomb field in two Dimensions", **Am. J. Phys. 66**, 274, (1998).
 20. S. K. Adhikari, "Quantum Scattering in two Dimensions", **Am. J. Phys. 54**, 362-367,(1986).
 21. S. Doniach and E. H. Sondheimer, " **Green's Functions for Solid State Physicists**", Springer - verlag , 175 Fifth Ave. , New York , NY 10010 , USA, 2 edition, (1982).
 ۲۲. دکتر علی اکبر رجبی، "روشهای تقریبی در مکانیک کوانتومی"، چاپ دوم، دانشگاه صنعتی شاهرود، (۳۵۲-۳۷۰، ۱۳۸۲)
 23. R. A. Arndt, W.J. Briscoe, T.W. Morrison, I.I. Strakovsky, R.L. Workman, and A.B. Gridnev, "Low-energy ηN interactions: Scattering lengths and Resonance Parameters", **Phys. Rev. C. 72**, 045202, (2005) .
 24. R. G. Newton, "**Scattering Theory of Waves and Particles**", 2 Edition, Springer-Verlag, 213, (1982).
 25. M. J. Moritz and H. Friedrich, " Scattering by a Coulomb field in two Dimensions", **Am. J. Phys. 66**, 274, (1998).
 26. S. K. Adhikari, W. G. Gibson, and T. K. Lim, "Active Range Theory in two Dimensions", **J. Chem. Phys. 85**, 5580-5583, (1986) .
 27. P. A. Maurone and T. K. Lim, "More on two-dimensional scattering", **Am. J. Phys. 51**, 856-857, (1983).
 28. M. S. Hussein, Y. T. Chen and F. I. A. Almeida , "The Validity of the Classical Description of Nuclear Scattering", **Am. J. Phys. 52**, 650-653, (1984).
 29. S. Mandal, "A microscopic Complex Potential Description of Elastic, Inelastic Cross section in the Coulomb Nuclear Interference Region in the 2α on ^{28}Si System", **Nuclear Phys. A. 634** , 284-306, (1998).
 30. N. Bournaveas, " Local Well-posedness for a Nonlinear Dirac Equation in Spaces of almost Critical Dimension", **Discrete Contin. Dyn. Syst. 20** ,605 616, (2008).

31. M. Keel and T. Tao, "Endpoint Strichartz estimates", **Am. J. Phys. Math.** **120** 955- 980, (1998).
32. C. Berkdemir, A. Berkdemir, and J.G. Han, **Phys. Lett.** **417** , 326, (2006).
33. R. D. Woods and D. S. Saxon, (1954) ,**Phys. Rev.** **95**, 577.
34. J. Sadeghi and M. R. Pahlavani, (2004) , Afr. J. Math. Phys . 1 (2) , 195.
35. M. R. Pahlavani, J. Sadeghi and M. Ghezelbash, (2009) **App. Sci.** **11**, 106.
36. A. N. Ikot¹, L. E. Akpabio, and E. B. Umoren, Scientific Research, **J. Sci. Res.** **3 (1)** , 25-33, (2011).
37. H. Bahlouli, "Analytical treatment of the oscillating Yukawa Potential", **Chem. Phys** **393**,153-156, (2012).
38. M. .simsek, H. E`grifes , **J. Phys. A. Math. Gen.** **37**, 4379, (2004).
39. C.S. Jia, P. Gao, and X.L. Peng, **J. Phys. A: Math. Gen.** **39** 7737, (2006).
40. X. Zou, L.Z. Yi, and C.S Jia, **Phys. Lett. A** , 346 54, (2005).
41. H. E`grifes, D. Demirhan, F. Büyükkılıç, **Phys. Scr.** **59**, 195, (1999).
42. N. Cotfas, **J. Phys. A. Math. Gen.** **35** , 9355, (2002).
43. O. Y, silta, **Phys. Scr.** **75**, 41, (2007).
44. A. A. Rajabi, "Few Body System" 37,267, (2005).
45. M. Aiello, M. Ferraries, M. MGiannini, M. pizzo and E. Santopinto, **Phys. Lett. B.** **387**, 215, (1996).
46. G. Junker, "**Supersymmetric Methods in Quantum and Statistic Physics**", Heidelberg, Springer, 316, (1996).
47. R. Dutt, A. Khare and U.P. Sukhatme, **Am. J. Phys.** **56**, 163-168,(1988).
48. C. Erko and R. Sever, **Phys. Rev. D.** **30**, 2117, (1984).
49. S. Sakoda, **Mod. Phys. Lett. A.** **23**, 3057-3076,(2008).
50. F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, **Phys. Rep.** **251**, 267, (1995).
51. W.H. Press, "**Numerical Recipes in Fortan**", 2 edition, Cambridge Press, (1992).
52. A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, "**Special Functions of Mathematical Physics**", Birkhauser, Basel, (1988).
۵۳. مهدی نیک عمل ، ا. واعظ و امیر لهراسبی ، "آشنایی با روش های شبیه سازی در فیزیک" ، انتشارات دانشگاه صنعتی شریف ، چاپ اول، (۱۳۸۶).
54. G. B. Arfken, "**Mathmatical Methods for Physicistics**", 3 edition, Academic Press, (1985).

55. T. Hamada, I. D. Johnstone, *Nucl. Phys.* **34** , 382, (1962).
56. F. I. Lie," *Algebras and Application* ", II,3 edition, (1997).
57. M. R. Pahlavani, J. Sadeghi and M. Ghezelbash, *App. Sci.* **11**, 106, (2009).
58. R. K. Sankara, "*Numerical Methods for Science and Engineers*", (1996).
59. I. R. Lapidus, "*Scattering by two Dimensional Circular Barrier, Hard Circle, and delta-Function ring Potentials*", *Am. J. Phys.***54**,459-461, (1986).
60. M. Brack, *Rev. Mod. Phys.* **65** , 677, (1993).
61. A. N. Ikot , L. E. Akpabio, and E. B. Umoren, "*Exact Solution of Schrödinger Equation with Inverted Woods-Saxon and Manning-Rosen Potential*",*J. Sci. Res.* **3 (1)** , 25-33,(2011) .
62. C. M. Bender, D. C. Brody and H. F. Jones," *Complexs Extention of Quantum Mechanics*",*Phys. Rev. Lett.* **89**, 270402, (2002).
63. M. R. Pahlavani and S.A. Alavi, " *Solutions of Woods–Saxon Potential with Spin-Orbit and Centrifugal Terms through NU Method*", *Commun. Theor. Phys.* **58**, 739–743, (2012).
64. S.M. Ikhdair and R. Sever, *Cent. Eur. J. Phys.***8**,652, (2010).
65. S. K. Adhikari," *Variational Principles and the Numerical Solution of Scattering Problems* ",(New York: John Wiley) ,(1998).
66. T. Miyazawa, *J. Phys. A - Math. Gen.* **33** ,191, (2000).
67. M. Visser, *Phys. Rev. A* **59** ,427, (1999).
68. L. V. Chebotarev and A. Tchegotareva , *J. Phys. A.* **29** ,7259, (1996).
69. T. Miyazawa, *J. Math. Phys.* **36**, 5643,(1995).
70. J. U. Nockel and A. D. Stone, *Phys. Rev. .B* **50**, 17415,(1994).
71. H. S. Hans, "*Nuclear Physics*" (2001).
72. S. M. Ikhdair , R. Sever,"*Exact Solutions of the D-Dimensional Schrödinger Equation for a Ring–Shaped Pseudoharmonic Potential*",*Cent. Eur. Phys.***6(3)**, 685-696.
73. M. L. Sage,*Chem. Phys.* **87**, 431, (1984).
74. M.L. Sage, J. Goodisman, *Am. J. Phys.* **53**, 350 , (1985).
75. G. Junker, "*Super Symmetric Method in Quantum and Statistic Physics*", Heidelberg, Springer, (1996).
76. S. K. Adhikari and M. S. Hussein," *Semi-classical scattering in two dimensions*", *Am. J. Phys.***70**,663, (2008).

Abstract

One of the fundamental goals of nuclear physics is the study of cells and their internal structures . First, we investigated and found not to investigate and identify the nuclei of cells and to study their internal structure directly and easily. When we want to study nuclear forces and laws governing the interaction of elementary particles and dispersion techniques should I use to calculate the scattering cross section and the scattering length . The scattering problem is one of important problems in physics. To explore the vicinity of a scattering potential , the Schrödinger equation must be solved to obtain the eigenvalues and the corresponding potential and the wave function . The second phase covered the review of appropriate techniques to solve the Schrödinger equation and then determine the appropriate method . Then we got in a central potential , such as the Wood -Saxon potential and the potential in the vicinity have solved the Schrödinger equation for the analysis of the wave function energy eigenvalues. We've dealt with a variety of appropriate techniques to evaluate the energy dispersion and scattering cross sections have been calculated and the scattering length . Then we took a step further and put in a two - dimensional potential , we consider the case of two-dimensional potential depends on two variables (r,θ) , the analytical calculations . In this dissertation we have covered the approximation WkB using appropriate methods to evaluate the potential of two -dimensional scattering in the vicinity , and have obtained the scattering cross section and the scattering phase in terms of displacement .



Shahrood University of Technology

Faculty of physics

**Nucleon –Nucleon scattering in 2 dimension in low energy and
calculation of cross section and length scattering**

maryam amini

**Supervisor(s):
Dr. M. R. Shojaei**

September 2013