

صلى الله عليه وسلم



دانشکده: فیزیک

گروه: هسته ای

تعیین حالت‌های مقید و برانگیخته ذرات با اسپین یک با استفاده از معادله نسبیتی دی-کی-
پی در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی

دانشجو: مهدی کمالی

استاد راهنما :

دکتر حسن حسن‌آبادی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریور ماه ۱۳۹۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : فیزیک

گروه : هسته‌ای

پایان نامه کارشناسی ارشد آقای مهدی کمالی

تحت عنوان:

تعیین حالت‌های مقید و برانگیخته ذرات با اسپین یک با استفاده از معادله نسبیتی دی - کی - پی در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی

در تاریخ ۱۳۹۲/۶/۱۶ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی : دکتر حسن حسن آبادی
	نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی : دکتر مسلم سوهانی		نام و نام خانوادگی : دکتر علی اکبر رجبی
			نام و نام خانوادگی : دکتر محمد رضا شجاعی
			نام و نام خانوادگی :

تقدیم به

خانواده عزیزم و

استاد بزرگوارم در دانشگاه صنعتی شاهرود

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس پروردگار یکتا را که لطف بی‌کرانش اینجانب را نیز دربرگرفت تا در راه او قدمی هر چند کوچک بردارم و به این سبب توفیقات خود در زمینه کسب و درک علوم لایتناهی را مدیون نظر لطف او می‌دانم. بر خود لازم می‌دانم به رسم ادب و احترام از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر حسن حسن‌آبادی به خاطر راهنمایی‌های ارزشمندشان و صبر و حوصله فراوان، که نقش مهمی در به ثمر رسیدن این کار داشته‌اند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. همچنین از اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر علی اکبر رجبی و جناب آقای دکتر محمد رضا شجاعی که علاوه بر اینکه اینجانب افتخار شاگردی این دو بزرگوار را داشته‌ام، زحمت مطالعه، نقد و داوری کار را بر عهده داشتند نهایت تشکر و قدردانی را دارم. همچنین زحمات تمامی اعضای خانواده‌ام، به خصوص پدر، مادر و خواهر عزیزم و اساتید بزرگوارم در دوران کارشناسی و کارشناسی ارشد، کلیه معلمان و دوستان دوران تحصیل را ارج نهاده و کمال تشکر را دارم. همچنین دوستان و اساتید بزرگوارم، آقای دکتر صابر زرین کمر، آقای ممتازی و خانم‌ها مقصودی، یازرلو، مولایی، رحمانی و حسینی که همواره مایه دلگرمی اینجانب در این مدت بوده و متحمل زحمات زیادی شدند نهایت سپاس‌گذاری را دارم.

تعهدنامه

اینجانب مهدی کمالی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک-هسته‌ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان‌نامه: تعیین حالت‌های مقید و برانگیخته ذرات با اسپین یک با استفاده از معادله نسبیتی دی-کی-پی در حضور میدان‌های الکترومغناطیسی تحت راهنمایی‌های دکتر حسن حسن‌آبادی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان‌نامه تا کنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا « **Shahrood University of Technology** » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجودات زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان‌نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

معادله دی-کی- پی نوع خاصی از معادله نسبیتی مرتبه اول برای ذره با اسپین دلخواه (قراردادی) به شمار می‌رود. این معادله دیراک گونه است که به بررسی بوزونهای اسپین صفر و یک می‌پردازد که در بسیاری از شاخه‌های فیزیک از جمله کیهان‌شناسی، برهمکنشهای هادرون-هسته و طیف سنجی مزونها کاربرد دارد. از اینرومی‌توان ذراتی مانند فوتونها، گلوئونها، مزونها، اکسیتونها را توسط معادله‌ی دی-کی- پی مورد مطالعه قرار داد.

در این پایان نامه مقدمه‌ای در رابطه با معادله دی-کی- پی بیان شده است. سپس به خصوصیات جبری ماتریسهای دی-کی- پی و اثبات برخی از روابط آنها پرداخته شده است، در ادامه معادله‌ی دی-کی- پی در حضور پتانسیلهای مختلف اعم از پتانسیلهای مرکزی و غیر مرکزی بررسی شد و ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع انرژی بر حسب توابع فوق هندسی بدست آورده شد. سپس به بررسی پراکندگی بوزونهای اسپین صفر و یک در یک بعد پرداخته شد و در این راستا ضرایب عبور و بازتاب برای حالت پراکندگی و همچنین با استفاده از شرایط پیوستگی، حالت‌های مقید برای بوزونهای اسپین صفر و یک بدست آورده شده است. و نهایتاً به بررسی پراکندگی بوزونهای اسپین یک در سه بعد و معرفی انتقال فاز پرداخته شده است.

واژه‌های کلیدی: معادله‌ی دی-کی- پی، پتانسیلهای مرکزی و غیر مرکزی، ویژه توابع و ویژه مقادیر، روش NU، ضرایب عبور و بازتاب، حل حالت‌های مقید.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه:

pseudo-harmonic oscillatory Spin-one Duffin- Kemmer- Petiau equation in the presence of ring-shaped potential. H. Hassanabadi and M. Kamali. Chin. Phys. B Vol. 22, No. 10 (2013) 10XXXX.

Duffin-Kemmer-Petiau equation under Hartmann ring-shaped potential. H. Hassanabadi, M. Kamali, Z. Molaee and S. Zarrinkamar. Accepted in Chin. Phys. C.

بررسی بوزونهای با اسپین یک در حضور پتانسیل کولونی. حسن حسن آبادی، مهدی کمالی.

کنفرانس سالانه فیزیک (بیرجند، شهریور ۱۳۹۲)

فهرست مطالب

فصل اول: مقدمه.....	۱
۱-۱) مروری بر معادله دی-کی-پی	۲
فصل دوم: معادله دی-کی-پی و خصوصیات آن.....	۶
۱-۲) خصوصیات جبری معادله دی-کی-پی.....	۷
۱-۲-۱) بررسی روابط جابجایی ماتریسهای دی-کی-پی.....	۹
۲-۲) معادله ی پیوستگی در نظریه دی-کی-پی	۲۱
۳-۲) بر همکنشها در نظریه دی-کی-پی	۲۴
فصل سوم: حل معادله ی دی-کی-پی به ازای بعضی از پتانسیلها.....	۲۷
۱-۳) حل معادله ی دی-کی-پی در حضور پتانسیلهای مرکزی.....	۲۸
۱-۳-۱) معادله ی دی-کی-پی برای بوزونهای اسپین یک در حضور پتانسیل کولونی	۲۹
۲-۳) حل معادله ی دی-کی-پی در حضور پتانسیلهای غیر مرکزی.....	۳۶
۳-۳) نوسانگر دی-کی-پی در حضور میدان مغناطیسی برای ذرات اسپین یک.....	۴۷
۱-۳-۳) در غیاب پتانسیل.....	۴۸
۲-۳-۳) در حضور پتانسیل.....	۵۰
فصل چهارم: پراکندگی و حالت های مقید.....	۵۲
۱-۴) پراکندگی بوزون های اسپین صفر در یک بعد.....	۵۳
۱-۴-۱) ضرایب عبور و بازتاب برای بوزون های اسپین صفر.....	۵۵

۶۱.....	۴-۱-۲) حالت‌های مقید برای بوزون‌های اسپین صفر.....
۶۳.....	۴-۲) پراکندگی بوزون‌های اسپین یک در یک بعد.....
۶۵.....	۴-۲-۱) ضرایب عبور و بازتاب برای بوزون‌های اسپین یک.....
۷۲.....	۴-۲-۲) حالت‌های مقید برای بوزون‌های اسپین یک.....
۷۴.....	۴-۳) انتقال فاز در سه بعد
۸۰.....	نتیجه‌گیری.....
۸۲.....	ضمیمه.....
۸۶.....	مراجع.....

فهرست اشکال

۳۳.....	شکل ۳-۱).....
۳۴.....	شکل ۳-۲).....
۳۵.....	شکل ۳-۳).....
۳۵.....	شکل ۳-۴).....
۴۹.....	شکل ۳-۵).....
۵۰.....	شکل ۳-۶).....
۵۵.....	شکل ۴-۱).....
۶۱.....	شکل ۴-۲).....
۶۵.....	شکل ۴-۳).....
۶۵.....	شکل ۴-۴).....

شكل ٤-٥..... ٧٤

فهرست جداول

جدول ٣-١..... ٤٣

جدول ٣-٢..... ٤٩

جدول ٣-٣..... ٥١

فصل اول

مقدمه

۱-۱- مروری بر معادله دی - کی - پی

معادله موج نسبیتی مرتبه اول برای ذره با اسپین دلخواه (قراردادی) برای اولین بار توسط لوباسکی^۱ و مدهاواراو^۲ و بها بها^۳ به دست آورده شد که به عنوان معادلات موج بها بها شناخته می شود. ساده ترین موارد خاص از این معادلات را می توان به معادله دیراک برای ذره با اسپین $\frac{1}{2}$ و معادله دی - کی - پی برای ذرات با اسپین صفر و یک اشاره کرد. [۱]

پیروی از موفقیت معادله دیراک [۲] در توصیف ذرات با اسپین $\frac{1}{2}$ ، شروع تحقیق برای معادله موج مرتبه اول مشابه برای ذرات با اسپین صفر و یک بود. در حقیقت با الهام گرفتن از معادله دیراک برای ذرات با اسپین $\frac{1}{2}$ راهی برای پیدا کردن یک معادله موج مرتبه اول مشابه با همان معادله دیراک اما برای توصیف ذرات با اسپین صفر و یک ایجاد شد. که این معادله مرتبه اول همان معادله دی - کی - پی بود. [۳]

معادله دی - کی - پی یک معادله نسبیتی مرتبه اول دیراک گونه می باشد که به دهه ۱۹۳۰ بر می گردد و به بررسی بوزونهای اسپین صفر (بوزونهای اسکالر) و بوزونهای اسپین یک (بوزونهای برداری) در یک پایه واحد می پردازد. این قبیل بوزونها در بسیاری از عرصه های فیزیکی شامل کیهان شناسی، طیف سنجی مزونی و برهمکنشهای هسته-هادران حضور دارند. [۴-۶]

پتی^۴ که دانشجوی دوبروی بود برای اولین بار جبر 16×16 دی - کی - پی را با ضرب مستقیم ماتریسهای دیراک بسط داد و نشان داد که این ماتریسها می توانند به سه نمایش غیر قابل کاهش یک و پنج وده مولفه ای تجزیه شوند. در هر صورت کار پتی ناشناخته ماند تا اینکه کمر^۵ به طور جداگانه از معادله پروکا

¹ Lubaski

² Madhavarao

³ Bhabha

^۴ petiau

⁵ kemmer

دستگاهی از معادلات جفت شده‌ی مرتبه اول را بدست آورد. این دستگاه معادلات به فرم ماتریسی 5×5 و 10×10 نوشته شده‌اند اما روابط جبری واضحی بین این ماتریسها وجود نداشت تا آنجا که دافین^۶ توانست روابط جبری حاکم بر این ماتریسها را ارائه کند و با استفاده از این نتایج کمر توانست معادله موج دی-کی- پی را به طور کامل برای ذرات با اسپین صفرو یک بدست آورد.

بعد از این سالها این نظریه در سه دوره‌ی متفاوت قرار گرفت:

دوره اول از سال ۱۹۳۹ تا تقریباً سال ۱۹۷۰ است. در این دوره اکثر مقالات در مورد معادله دی-کی- پی علاقمند بودند که فرمولهای دی-کی- پی را توسعه دهند و به بررسی برهمکنش ذرات باردار دی-کی- پی با میدان الکترومغناطیسی بپردازند و همچنین در این دوره محاسباتی بر پایه‌ی هم‌ارزی معادلات کلاین-گوردن و دی-کی- پی انجام شد مانند مقاله‌ای که توسط وایتمن^۷ نوشته شد. او نشان داد که معادله دی-کی- پی همانند معادله دیراک در حضور حداقل جفت شدگی و میدان الکترومغناطیسی بدون حضور هیچ بخش غیر عادی پایسته می‌ماند. (منظور از حداقل جفت شدگی به مولفه چهارم در چار بردارها که همان انرژی باشد بر می‌گردد).

دوره دوم از سال ۱۹۷۰ تا ۱۹۸۰ تقسیم بندی می‌شود. در این دوره دو کشف بزرگ انجام شد: ۱- نقض

پارایته ۲- ایجاد نظریه وحدت برهمکنش الکتروضعیف. (مدل استاندارد یا نظریه واینبرگ-سلام)

در این دوره سوال در مورد هم‌ارزی دو نظریه کلاین-گوردن و دی-کی- پی باعث شد تا دوباره تلاشهایی برای توصیف فرایندهای جدید صورت گیرد. بسیاری از کارهایی که در مورد واپاشی K و دیگر مزونهای ناپایدار انجام شد نشان داد که فرمول دی-کی- پی نتایج متفاوتی از فرمول مرتبه دوم ارایه می‌دهد.

در دوره سوم که به سال ۱۹۸۰ به بعد برمی‌گردد هنوز این عدم اطمینان به هم‌ارزی بین معادلات کلاین-گوردن و دی-کی- پی وجود دارد. یکی از کمبود علاقه به فرمول دی-کی- پی در دوره‌های گذشته به

⁶ duffin

^۷ A.Wightman

همین ناهم ارزی بین دی-کی-پی وکلاین-گوردون برمی گردد.[۴] همچنین علت بزرگتر کمبود علاقه به معادله دی-کی-پی پیچیدگی جبری فرمول دی-کی-پی نسبت به این معادلات پروکا و کلاین-گوردن می باشد.

این باور که معادلات مرتبه دوم کلاین-گوردون و پروکا برای ذرات با اسپین صفر و یک منحصر به فرد هستند جنبه‌ی عمومی پیدا کرده بود اما بعد از مدتی با معادله نسبیتی مرتبه اول دیراک گونه (همان معادله دی-کی-پی) که هردو ذرات با اسپین صفر و یک را در بر می گیرد به این باور پایان داده شد. معادلات مرتبه دوم پروکا وکلاین-گوردون به ترتیب ذرات اسپین یک و صفر را توصیف می کنند. این معادلات تنها در میدان‌های آزاد با معادله دی-کی-پی معادل هستند. نتایج این معادلات در برهمکنشهای هادرونی و شکست تقارنی با یکدیگر متفاوت هستند. در هر حال استفاده از معادلات مرتبه دوم به صورت ریاضی و استنتاج فیزیک از پس آنها خیلی مشکل است. به همین دلیل در سالهای اخیر از معادله نسبیتی دی-کی-پی برای برهمکنشهای هادرونیهای با اسپین صفر و یک با هسته استفاده می-کنیم. البته فرمالیزم معادله دی-کی-پی بسیار غنی تر از معادلات پروکا و کلاین-گوردون است به طوریکه وجود جفت شدگی‌هایی که در معادله دی-کی-پی رخ می دهد در معادلات پروکا وکلاین-گوردون اتفاق نمی افتد.

همانطور که گفتیم معادله دی-کی-پی از ضرب مستقیم دو معادله دیراک بدست آمده است در نتیجه با ضرب مستقیم دو ماتریس (4×4) گاما به یک ماتریس 16×16 می رسیم. که این ماتریس 16×16 به سه نمایش غیر قابل کاهش (مستقل) تک مولفه‌ای و پنج مولفه‌ای و ده مولفه‌ای تقسیم می شود که دستگاهی از ۱۲۶ عنصر مستقل ماتریسها را تولید می کند که به جبر دی-کی-پی معروف است. که نمایش پنج مولفه‌ای برای بوزونهای اسپین صفر و نمایش ده مولفه‌ای برای بوزونهای با اسپین یک می-باشد. که این ماتریسها از قوانین جابجایی تبعیت می کنند. در سالهای اخیر رویکردهای نسبیتی کاملاً

موفقی در توصیف داده‌های پراکندگی هسته-پروتون ارایه شده است. یکی از برتری‌های بررسی این معادلات نسبیتی با روشهای غیر نسبیتی استاندارد در تحقیقات هسته‌ای می‌باشد. بهترین کاندیدا برای این منظور دوترون می‌باشد. مثلاً پراکندگی دوترون-هسته می‌تواند به عنوان پراکندگی هسته-هسته آزاد توصیف شود (به علت قید کمی که در ساختار دوترون پیشنهاد می‌شود) از اینرو برای مطالعه رفتار نسبیتی دوترون-هسته می‌توان از فرمالیزم دی-کی-پی استفاده کرد. به طوریکه بخش اسپین یک آن از ضرب مستقیم میدانهای دیراک اسپین $\frac{1}{2}$ -پیشنهاد می‌شود. همچنین برای بخش اسپین صفر، معادله دی-کی-پی در توصیف پراکندگیهای کایون-هسته و پایون-هسته موفق خواهد بود. [۴-۶]

فصل دوم

معادله دی - کی - پی و خصوصیات آن

۲-۱- خصوصیات جبری معادله دی- کی- پی

معادله دی- کی- پی در فضا-زمان مینکوفسکی در غیاب پتانسیل برای بوزونهایی به جرم m با اسپین

صفر و یک عبارت است از [۴-۶]

$$(i \beta^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \quad (۲-۱)$$

که ∂_μ مشتق می‌باشد.

β^μ در این روابط جبری صدق می‌کند:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\lambda\nu} \beta^\mu, \quad (۲-۲)$$

$g^{\mu\nu}$ تانسور متریک فضا می‌باشد و به صورت زیر است [۷]

$$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (g^{\mu\nu})^2 = 1 \quad (۲-۳)$$

حال با استفاده از رابطه $(\beta^\mu)_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta}^\mu \delta_{\gamma\delta} + \gamma_{\gamma\delta}^\mu \delta_{\alpha\beta})$ می‌خواهیم رابطه جبری

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\lambda\nu} \beta^\mu$$

را اثبات کنیم.

رابطه $(\beta^\mu)_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta}^\mu \delta_{\gamma\delta} + \gamma_{\gamma\delta}^\mu \delta_{\alpha\beta})$ را می‌توانیم با رابطه $\beta^\mu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu + \gamma^{\mu'})$ جایگزین کنیم و

$$\left[\gamma^{\mu'}, \gamma^\nu \right] = 0 \quad \text{و} \quad \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2g^{\mu\nu} = \{ \gamma^{\mu'}, \gamma^{\nu'} \}$$

پس:

$$\beta^\lambda = \frac{1}{2}(\gamma^\lambda + \gamma^{\lambda'})$$

$$\beta^\mu = \frac{1}{2}(\gamma^\mu + \gamma^{\mu'})$$

$$\beta^\nu = \frac{1}{2}(\gamma^\nu + \gamma^{\nu'})$$

(۲-۴)

$$\beta^\lambda \beta^\mu = \frac{1}{4}(\gamma^\lambda \gamma^\mu + \gamma^\lambda \gamma^{\mu'} + \gamma^{\lambda'} \gamma^\mu + \gamma^{\lambda'} \gamma^{\mu'})$$

$$\beta^\lambda \beta^\mu \beta^\nu = \frac{1}{8}(\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\lambda \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} + \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^{\nu'} + \gamma^\lambda \gamma^{\mu'} \gamma^\nu + \gamma^{\lambda'} \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^{\lambda'} \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} + (\Delta-2) \gamma^{\lambda'} \gamma^\mu \gamma^{\nu'} + \gamma^{\lambda'} \gamma^{\mu'} \gamma^\nu)$$

حال عبارت $\beta^\nu \beta^\mu \beta^\lambda$ را با رابطه بالا جمع می کنیم و داریم:

$$\begin{aligned} \beta^\nu \beta^\mu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\mu \beta^\nu &= \frac{1}{8}(\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda + \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^{\lambda'} + \gamma^\nu \gamma^{\mu'} \gamma^\lambda + \gamma^\nu \gamma^{\mu'} \gamma^{\lambda'} + \gamma^{\nu'} \gamma^\mu \gamma^\lambda \\ &+ \gamma^{\nu'} \gamma^\mu \gamma^{\lambda'} + \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} \gamma^\lambda + \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} \gamma^{\lambda'} + \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\lambda \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} + \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^{\nu'} + \gamma^\lambda \gamma^{\mu'} \gamma^\nu \\ &+ \gamma^{\lambda'} \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^{\lambda'} \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} + \gamma^{\lambda'} \gamma^\mu \gamma^{\nu'} + \gamma^{\lambda'} \gamma^{\mu'} \gamma^\nu) \end{aligned} \quad (6-2)$$

از طرفی با استفاده از رابطه ی $[\gamma^{\mu'}, \gamma^\nu] = 0$ یعنی $\gamma^{\mu'} \gamma^\nu = \gamma^\nu \gamma^{\mu'}$ داریم:

$$\gamma^\lambda \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} + \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} \gamma^\lambda = \gamma^\lambda \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} + \gamma^{\nu'} \gamma^\lambda \gamma^{\mu'} = \gamma^\lambda \gamma^{\mu'} \gamma^{\nu'} + \gamma^\lambda \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu'} = \gamma^\lambda \left\{ \gamma^{\mu'}, \gamma^{\nu'} \right\} \quad (7-2)$$

به همین ترتیب داریم:

$$\gamma^{\lambda'} \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^{\lambda'} = \gamma^{\lambda'} \left\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \right\}$$

$$\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^{\nu'} + \gamma^{\nu'} \gamma^\mu \gamma^\lambda = \gamma^{\nu'} \left\{ \gamma^\lambda, \gamma^\mu \right\}$$

$$\gamma^{\lambda'} \gamma^{\mu'} \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^{\mu'} \gamma^{\lambda'} = \gamma^\nu \left\{ \gamma^{\lambda'}, \gamma^{\mu'} \right\} \quad (8-2)$$

$$\gamma^\lambda \gamma^{\mu'} \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^{\mu'} \gamma^\lambda = \gamma^{\mu'} \left\{ \gamma^\lambda, \gamma^\mu \right\}$$

$$\gamma^{\lambda'} \gamma^\mu \gamma^{\nu'} + \gamma^{\nu'} \gamma^\mu \gamma^{\lambda'} = \gamma^\mu \left\{ \gamma^{\lambda'}, \gamma^{\nu'} \right\}$$

با جاگذاری روابط بالا در رابطه اصلی داریم:

$$\beta^\nu \beta^\mu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\mu \beta^\nu = \frac{1}{8} (\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^{\nu'} \gamma^{\mu''} \gamma^{\lambda'} + \gamma^{\lambda'} \gamma^{\mu''} \gamma^{\nu'} + \gamma^\lambda \{\gamma^{\mu''}, \gamma^{\nu'}\} + \gamma^{\lambda'} \{\gamma^\mu, \gamma^{\nu'}\} + \gamma^{\nu'} \{\gamma^\lambda, \gamma^{\mu''}\} + \gamma^{\nu'} \{\gamma^{\lambda'}, \gamma^{\mu''}\} + \gamma^{\mu''} \{\gamma^\lambda, \gamma^{\nu'}\} + \gamma^\mu \{\gamma^{\lambda'}, \gamma^{\nu'}\}) \quad (9-2)$$

و داریم:

$$\gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu = \{\gamma^\lambda, \gamma^\mu\} \gamma^\nu - \gamma^\mu \{\gamma^\lambda, \gamma^\nu\} + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma^\lambda - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda = \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^\lambda \gamma^\nu - \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda + \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda + \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda - \gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\lambda = \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu \quad (10-2)$$

و برای $\gamma^{\lambda'} \gamma^{\mu''} \gamma^{\nu'}$ نیز به همین ترتیب عمل می‌کنیم. بعد از جاگذاری این چهار رابطه داریم:

$$\beta^\nu \beta^\mu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\mu \beta^\nu = \frac{1}{8} (\{\gamma^\lambda, \gamma^\mu\} \gamma^\nu - \gamma^\mu \{\gamma^\lambda, \gamma^\nu\} + \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \gamma^\lambda + \{\gamma^{\lambda'}, \gamma^{\mu''}\} \gamma^{\nu'} - \gamma^{\mu''} \{\gamma^{\lambda'}, \gamma^{\nu'}\} + \{\gamma^{\mu''}, \gamma^{\nu'}\} \gamma^{\lambda'} + \gamma^\lambda \{\gamma^{\mu''}, \gamma^{\nu'}\} + \gamma^{\lambda'} \{\gamma^\mu, \gamma^{\nu'}\} + \gamma^{\nu'} \{\gamma^\lambda, \gamma^{\mu''}\} + \gamma^\nu \{\gamma^{\lambda'}, \gamma^{\mu''}\} + \gamma^{\mu''} \{\gamma^\lambda, \gamma^{\nu'}\} + \gamma^\mu \{\gamma^{\lambda'}, \gamma^{\nu'}\}) \quad (11-2)$$

در نهایت از رابطه بالا می‌رسیم به:

$$\beta^\nu \beta^\mu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\mu \beta^\nu = \frac{1}{8} (4g_{\lambda\mu} (\gamma^\nu + \gamma^{\nu'}) + 4g_{\mu\nu} (\gamma^\lambda + \gamma^{\lambda'})) = g^{\lambda\mu} \beta^\nu + g^{\mu\nu} \beta^\lambda \quad (12-2)$$

۲-۱-۱ - بررسی روابط جابجایی ماتریسهای دی - کی - پی

β^μ ها ماتریسهای دی - کی - پی هستند. برای ذراتی با اسپین صفر داریم:

$$\begin{aligned}
\beta^0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \beta^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\beta^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \beta^3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & & (55-2)
\end{aligned}$$

9

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad -\rho^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad -\rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad -\rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (56-2)$$

برای ذراتی با اسپین ۱ داریم:

$$\begin{aligned}
\beta^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, & \beta^i &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -iS_i \\ -e_i^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & -iS_i & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} & & (57-2)
\end{aligned}$$

S_i ها ماتریسهای 3×3 هستند $(S_i)_{jk} = -i \varepsilon_{ijk}$ و e_i ماتریسهای 3×1 هستند و به این صورت تعریف

می‌شوند. $(e_i)_{1j} = \delta_{ij}$

$$e_1 = (1, 0, 0) \quad e_2 = (0, 1, 0) \quad e_3 = (0, 0, 1) \quad (58-2)$$

به طوریکه $I_{3 \times 3}$ و $0_{3 \times 3}$ به ترتیب ماتریسهای واحد و صفر 3×3 هستند و $\bar{0}$ ماتریسهای صفر 1×3 می-باشند.

حال به بررسی رابطه جابجایی ماتریسهای دی-کی-پی برای ذرات اسپین یک به ارائه سه مثال می-پردازیم و می-خواهیم ببینیم دو طرف رابطه‌ی (۱۲-۲) نتایج یکسانی می-دهد یا خیر. برای این منظور در مثال اول همه‌ی شاخص‌ها را برابر می‌گیریم ($\mu = \nu = \lambda = 0$). در مثال دوم دو شاخص را برابر می‌گیریم ($\mu = 0, \nu = 2, \lambda = 3$). و در مثال سوم همه‌ی شاخص‌ها را متفاوت از هم می‌گیریم ($\mu = 0, \nu = 2, \lambda = 3$).

در مثال اول برای طرف اول رابطه‌ی (۱۲-۲) داریم:

$$\beta^0 \beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (13-2)$$

$$\beta^0 (\beta^0)^2 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \beta^0 \quad (14-2)$$

که طرف اول رابطه‌ی (۱۲-۲) عبارت است از β^0 . حال می‌خواهیم ببینیم طرف دوم چه نتیجه‌ای می-دهد. یعنی آیا $g^{00} \beta^0 + g^{00} \beta^0$ همان نتیجه‌ی ماتریسی دی-کی-پی را می‌دهد یا خیر.

همانطور که می‌دانیم ماتریس متریک $g^{\mu\nu}$ عبارت است از:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۵-۲)$$

که $g^{00} = 1$ می‌باشد یعنی:

$$g^{00} \beta^0 + g^{00} \beta^0 = 2g^{00} \beta^0 = 2\beta^0 \quad (۱۶-۲)$$

که رابطه‌ی فوق برابر با طرف اول می‌باشد.

در مورد مثال دوم داریم:

$$\begin{aligned} \beta^2 \beta^1 &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_2 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -iS_2 \\ -e_2^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & -iS_2 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_1 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -iS_1 \\ -e_1^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & -iS_1 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & iS_2 iS_1 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & S_1 S_2 & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & iS_2 iS_1 \end{pmatrix} \quad (۱۷-۲) \end{aligned}$$

با ضرب β^1 از چپ داریم:

$$\begin{aligned}
\beta^1 \beta^2 \beta^1 &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_1 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -iS_1 \\ -e_1^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & -iS_1 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & iS_2 iS_1 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & S_1 S_2 & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & iS_2 iS_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (18-2)
\end{aligned}$$

پس $\beta^1 \beta^2 \beta^1 + \beta^1 \beta^2 \beta^1 = 0$ می باشد اما طرف دوم رابطه $g^{12} \beta^1 + g^{12} \beta^1 = 0$ می باشد که رابطه (۲-۲) برای این حالت نیز برقرار می باشد.

اما در مورد مثال سوم برای سه شاخص متفاوت داریم:

$$\begin{aligned}
\beta^3 \beta^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_3 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -iS_3 \\ -e_3^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & -iS_3 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_2 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -iS_2 \\ -e_2^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & -iS_2 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & iS_3 iS_2 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & S_2 S_3 & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & iS_3 iS_2 \end{pmatrix} \quad (19-2)
\end{aligned}$$

با ضرب β^0 از چپ داریم:

$$\begin{aligned}
\beta^0 \beta^3 \beta^2 &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & iS_3 iS_2 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & S_2 S_3 & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & iS_3 iS_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & S_2 S_3 & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & iS_3 iS_2 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (20-2)
\end{aligned}$$

و برای $\beta^2 \beta^3 \beta^0$ داریم:

$$\begin{aligned}
\beta^2 \beta^3 &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_2 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -iS_2 \\ -e_2^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & -iS_2 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_3 & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -iS_3 \\ -e_3^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & -iS_3 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & iS_2 iS_3 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & S_3 S_2 & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & iS_2 iS_3 \end{pmatrix} \quad (21-2)
\end{aligned}$$

$$\beta^2 \beta^3 \beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & iS_2 iS_3 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & S_3 S_2 & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & iS_2 iS_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} \quad (22-2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & iS_2 iS_3 & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & S_3 S_2 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

با جمع دو رابطه‌ی بالا داریم:

$$\beta^0 \beta^3 \beta^2 + \beta^2 \beta^3 \beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & S_2 S_3 & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & iS_3 iS_2 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} + \quad (23-2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & iS_2 iS_3 & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & S_3 S_2 & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}$$

که عبارت $g^{02} \beta^2 + g^{20} \beta^3$ نیز برابر است با یک ماتریس صفر 10×10 .

در ادامه‌ی بحث، همانطور که از قبل داشتیم:

$$(\beta^\mu)^3 = \beta^\mu g^{\mu\mu} \quad (24-2)$$

عبارت زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
\eta^\mu &= 2\beta^\mu \beta^\mu - g^{\mu\mu} \\
(\eta^\mu)^2 &= (2\beta^\mu \beta^\mu - g^{\mu\mu})(2\beta^\mu \beta^\mu - g^{\mu\mu}) = 4(\beta^\mu)^4 - 2(\beta^\mu)^2 g^{\mu\mu} - \\
2(\beta^\mu)^2 g^{\mu\mu} + (g^{\mu\mu})^2 &= 4(\beta^\mu)^4 - 4(\beta^\mu)^2 g^{\mu\mu} + 1 = 4\beta^\mu (\beta^\mu)^3 - 4(\beta^\mu)^2 g^{\mu\mu} + 1 \\
&= 4(\beta^\mu)^2 g^{\mu\mu} - 4(\beta^\mu)^2 g^{\mu\mu} + 1 = 1
\end{aligned} \tag{۲۵-۲}$$

روابط جبری زیر را در نظر می گیریم:

$$\eta^\mu \beta^\lambda = 2(\beta^\mu)^2 \beta^\lambda - g^{\mu\mu} \beta^\lambda \tag{۲۶-۲}$$

$$(\beta^\mu)^2 \beta^\lambda + \beta^\lambda (\beta^\mu)^2 = g^{\mu\mu} \beta^\lambda + g^{\lambda\mu} \beta^\mu \tag{۲۷-۲}$$

روابط زیر حاصل می شود:

$$\begin{aligned}
\eta^\mu \beta^\lambda &= 2[g^{\mu\mu} \beta^\lambda + g^{\lambda\mu} \beta^\mu - \beta^\lambda (\beta^\mu)^2] - g^{\mu\mu} \beta^\lambda = \\
2g^{\lambda\mu} \beta^\lambda - 2\beta^\lambda (\beta^\mu)^2 + g^{\mu\mu} \beta^\lambda &= 2g^{\lambda\mu} \beta^\lambda + \beta^\lambda [-2(\beta^\mu)^2 + g^{\mu\mu}] = \\
2g^{\lambda\mu} \beta^\lambda - \beta^\lambda \eta^\mu
\end{aligned} \tag{۲۸-۲}$$

با استفاده از (۲۶-۲) و (۲۷-۲) و (۲۸-۲) داریم:

$$\eta^\mu \beta^\lambda + \beta^\lambda \eta^\mu = 2g^{\lambda\mu} \beta^\lambda \tag{۲۹-۲}$$

در مورد روابط پاد جابجایی داریم:

$$\{\eta^\mu, \beta^\lambda\} = \eta^\mu \beta^\lambda + \beta^\lambda \eta^\mu = 2g^{\lambda\mu} \beta^\lambda \tag{۳۰-۲}$$

که عبارت (۳۰-۲) برای $\mu \neq \lambda$ برابر است با:

$$\{\eta^\mu, \beta^\lambda\} = 0, \quad \mu \neq \lambda \tag{۳۱-۲}$$

و برای $\mu = \lambda$

$$\{\eta^\mu, \beta^\lambda\} = 2g^{\mu\lambda} \beta^\mu, \quad \mu = \lambda \quad (32-2)$$

بنابراین داریم:

$$\eta^\mu \beta^\mu = 2(\beta^\mu)^2 \beta^\mu - g^{\mu\mu} \beta^\mu = 2(\beta^\mu)^3 - g^{\mu\mu} \beta^\mu = 2\beta^\mu g^{\mu\mu} - \beta^\mu g^{\mu\mu} = \beta^\mu g^{\mu\mu} \quad (33-2)$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} (\beta^\mu)^2 \beta^\lambda + \beta^\lambda (\beta^\mu)^2 &= g^{\mu\lambda} \beta^\lambda + g^{\lambda\mu} \beta^\mu \\ [\eta^\mu, \beta^\mu] &= 0 \end{aligned} \quad (34-2)$$

$$\begin{aligned} \eta^\mu \beta^\nu &= \eta^\mu [2(\beta^\nu)^2 - g^{\nu\nu}] = 2\eta^\mu (\beta^\nu)^2 - g^{\nu\nu} \eta^\mu = \\ 2(\eta^\mu \beta^\nu) \beta^\nu - g^{\nu\nu} \eta^\mu &= 2(2\beta^\mu g^{\mu\nu} - \beta^\nu \eta^\mu) \beta^\nu - g^{\nu\nu} \eta^\mu = \\ 4\beta^\mu \beta^\nu g^{\mu\nu} - 2\beta^\nu (\eta^\mu \beta^\nu) - g^{\nu\nu} \eta^\mu &= 4\beta^\mu \beta^\nu g^{\mu\nu} - 2\beta^\nu (2\beta^\mu g^{\mu\nu} - \beta^\nu \eta^\mu) \quad (35-2) \\ -g^{\nu\nu} \eta^\mu &= 4\beta^\mu \beta^\nu g^{\mu\nu} - 4\beta^\nu \beta^\mu g^{\mu\nu} + 2\beta^\nu \beta^\nu \eta^\mu - g^{\nu\nu} \eta^\mu \\ &= 4g^{\mu\nu} (\beta^\mu \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\mu) + (2\beta^\nu \beta^\nu - g^{\nu\nu}) \eta^\mu = 4g^{\mu\nu} [\beta^\mu, \beta^\nu] + \eta^\nu \eta^\mu \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\eta^\mu \eta^\nu - \eta^\nu \eta^\mu = 4g^{\mu\nu} [\beta^\mu, \beta^\nu] \quad (36-2)$$

همچنین:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\dagger} &= 2(\beta^\mu)^{2\dagger} - g^{\mu\mu\dagger} = 2(\beta^{\mu\dagger})^2 - g^{\mu\mu} = 2(g^{\mu\mu} \beta^\mu)^2 - g^{\mu\mu} = \\ 2(g^{\mu\mu})^2 (\beta^\mu)^2 - g^{\mu\mu} &= 2(\beta^\mu)^2 - g^{\mu\mu} = \eta^\mu \end{aligned} \quad (37-2)$$

بنابراین:

$$\beta^{\mu\dagger} = g^{\mu\mu} \beta^\mu \quad (38-2)$$

ماتریس D را به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که بتوانیم روابط زیر را بدست آوریم:

$$\begin{aligned} D\beta^\mu D &= \beta^{\mu\dagger}, \quad D^2 = 1 \\ D\beta^\mu &= g^{\mu\mu} \beta^\mu D, \quad \beta^\mu D = g^{\mu\mu} D\beta^\mu \end{aligned} \quad (39-2)$$

حال با جاگذاری رابطه (39-2) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} D\beta^\mu D &= \beta^{\mu\dagger} \rightarrow g^{\mu\mu} \beta^\mu DD = \beta^{\mu\dagger} \\ \beta^{\mu\dagger} &= g^{\mu\mu} \beta^\mu \end{aligned} \quad (40-2)$$

با استفاده از روابط (39-2) داریم:

$$\begin{aligned} [\beta^\mu, D] &= \beta^\mu D - D\beta^\mu = g^{\mu\mu} D\beta^\mu - g^{\mu\mu} \beta^\mu D = \\ g^{\mu\mu} (D\beta^\mu - \beta^\mu D) &= g^{\mu\mu} [D, \beta^\mu] \end{aligned} \quad (41-2)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} [\beta^\mu, D] &= g^{\mu\mu} [D, \beta^\mu] \\ [\beta^\mu, D] + g^{\mu\mu} [D, \beta^\mu] &= 0 \end{aligned} \quad (42-2)$$

9

$$\begin{aligned} (g^{\mu\mu} + 1)[D, \beta^\mu] &= \beta^\mu D - D\beta^\mu + D\beta^\mu - \beta^\mu D = 0 \\ [D, \beta^\mu] &= 0 \end{aligned} \quad (43-2)$$

$$\begin{aligned} \eta^\mu \beta^\mu &= \beta^\mu \eta^\mu \\ \eta^\mu D(D\beta^\mu) &= \eta^\mu Dg^{\mu\mu} \beta^\mu D = \eta^\mu g^{\mu\mu} D\beta^\mu D = \eta^\mu g^{\mu\mu} \beta^{\mu\dagger} = \\ \eta^\mu (g^{\mu\mu})^2 \beta^\mu &= \eta^\mu \beta^\mu \\ \beta^\mu D(D\eta^\mu) &= g^{\mu\mu} D\beta^\mu D\eta^\mu = (g^{\mu\mu})^2 \beta^\mu \eta^\mu = \beta^\mu \eta^\mu \\ \eta^\mu D(D\beta^\mu) &= \beta^\mu D(D\eta^\mu), \quad D^2 = 1 \end{aligned} \quad (44-2)$$

$$\begin{aligned}
\beta^\mu D(D\eta^\mu - \eta^\mu D) &= 0 \\
D\eta^\mu - \eta^\mu D &= 0 \\
[D, \eta^\mu] &= 0
\end{aligned} \tag{۴۵-۲}$$

با توجه به اینکه $\eta^\mu \beta^\mu = \beta^\mu \eta^\mu$ می‌توانیم بدست آوریم:

$$[\eta^\mu, \eta^\nu] = 0 \tag{۴۶-۲}$$

$$D = \eta^\mu, \quad D^2 = (\eta^\mu)^2 = 1 \tag{۴۷-۲}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
\beta^{\mu\dagger} &= D \beta^\mu D = \eta^\mu \beta^\mu \eta^\mu = g^{\mu\mu} \beta^\mu \\
\beta^\mu \eta^\mu &= g^{\mu\mu} \eta^\mu \beta^\mu
\end{aligned} \tag{۴۸-۲}$$

اثبات:

$$\eta^\mu \beta^\mu \eta^\mu = g^{\mu\mu} \beta^\mu \tag{۴۹-۲}$$

β^μ را در هر دو طرف از چپ در η^μ ضرب می‌کنیم. داریم:

$$\eta^\mu \eta^\mu \beta^\mu \eta^\mu = g^{\mu\mu} \eta^\mu \beta^\mu \Rightarrow (\eta^\mu)^2 \beta^\mu \eta^\mu = g^{\mu\mu} \eta^\mu \beta^\mu \Rightarrow \beta^\mu \eta^\mu = g^{\mu\mu} \eta^\mu \beta^\mu \tag{۵۰-۲}$$

اگر $\mu = 0$ برای $\beta^\mu = g^{\mu\mu} \beta^\mu$ داریم:

$$\begin{aligned}
(1 - g^{\mu\mu}) \beta^\mu &= 0 \\
\beta^{\mu\dagger} &= \eta^0 \beta^\mu \eta^0 = g^{\mu\mu} \beta^\mu
\end{aligned} \tag{۵۱-۲}$$

به منظور پیدا کردن نمایش‌های تقلیل ناپذیر مستقل ممکن جبری ابتدا باید تعداد کمیت‌های مستقل

خطی را برای β^μ پیدا کنیم.

$$\begin{aligned}
\eta_\mu &= 2\beta_\mu^2 - 1 \\
\beta_\mu^3 &= \beta_\mu, \quad \eta_\mu^2 = 1 \\
\eta_\mu \eta_\nu - \eta_\nu \eta_\mu &= 0 \\
\eta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \eta_\mu &= 0 \rightarrow \nu \neq \mu \\
\beta_\mu &= \beta_\mu \eta_\mu = \eta_\mu \beta_\mu
\end{aligned}
\tag{۵۲-۲}$$

از روابط ۲۵ لیستی کامل از عناصر مستقل خطی را بدست می‌آوریم:

I	1	
β_μ	4	
$\beta_\mu \beta_\nu$	12	
$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho$	12	
$\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma$	6	
η_μ	4	(۵۳-۲)
$\eta_\mu \beta_\nu$	12	
$\eta_\mu \beta_\nu \beta_\rho$	24	
$\eta_\mu \beta_\nu \beta_\rho \beta_\sigma$	12	
$\eta_\mu \eta_\nu$	6	
$\eta_\mu \eta_\nu \beta_\rho$	12	

که ۱۲۶ عنصر مستقل از حاصلضرب β^μ ها بدست می‌آید.

تعداد کل عناصر با جمع مربعات سه نمایش کاهش ناپذیر از این درجات n_1, n_2, n_3 را بدست می‌آوریم:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 126 \tag{۵۴-۲}$$

در نتیجه به ترتیب n_1, n_2, n_3 عبارتند از ۱ و ۵ و ۱۰. که نمایش ۱۰ بعدی به معادله پروکا برای اسپین ۱ رهنمون می‌شود که تابع موج شامل ۴ مولفه که (۴-بردار) می‌باشد و ۶ مولفه دیگر که تانسور می‌باشد منجر می‌شود و نمایش ۵ بعدی به معادله کلاین-گوردون برای اسپین صفر رهنمون می‌شود.

۲-۲- معادله پیوستگی در نظریه دی-کی-پی

برای بدست آوردن معادله پیوستگی نیاز داریم که مزدوج مختلط معادله دی-کی-پی را بدست آوریم:

$$\begin{aligned} [i\beta^\mu\partial_\mu - m]\psi &= 0 \\ -i\partial_\mu\psi^\dagger\beta^{\mu\dagger} - m\psi^\dagger &= 0 \\ i\partial_\mu\psi^\dagger\eta^0\beta^\mu\eta^0 + m\psi^\dagger &= 0 \end{aligned} \quad (۵۹-۲)$$

با ضرب η^0 در معادله (۵۹-۲) داریم:

$$\begin{aligned} i\partial_\mu\psi^\dagger\eta^0\beta^\mu\eta^0 + m\psi^\dagger\eta^0 &= 0 \\ i\partial_\mu\psi^\dagger\eta^0\beta^\mu + m\psi^\dagger\eta^0 &= 0 \end{aligned} \quad (۶۰-۲)$$

اسپینور الحاقی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\eta^0 \quad (۶۱-۲)$$

بنابراین معادله مزدوج دی-کی-پی عبارت است از:

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\beta^\mu + m\bar{\psi} = 0 \quad (۶۲-۲)$$

برای بدست آوردن معادله پیوستگی $\bar{\psi}$ و ψ را به ترتیب در معادلات (۱-۲) و (۶۲-۲) ضرب می کنیم:

$$i\bar{\psi}\partial_\mu\beta^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi = 0 \quad (۶۳-۲)$$

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\beta^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi = 0 \quad (۶۴-۲)$$

دو رابطه بالا را با هم جمع می کنیم:

$$i\bar{\psi}\beta^\mu\partial_\mu\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\beta^\mu\psi = 0 \quad (۶۵-۲)$$

یا

$$\partial_\mu(\bar{\psi}\beta^\mu\psi) = 0 \quad (۶۶-۲)$$

که چگالی چار جریان عبارت است از:

$$J^\mu \equiv \frac{1}{2}(\bar{\psi}\beta^\mu\psi) \quad (۶۷-۲)$$

که از رابطه (۶۶-۲) می‌توانیم بنویسیم:

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad (۶۸-۲)$$

که شکل پایستگی معادله را دارد.

حال اگر ذره آزاد نباشد یعنی دارای پتانسیل حقیقی V باشد. آنگاه داریم:

$$\left[(i\beta^\mu\partial_\mu - m - V) \right] \psi = 0 \rightarrow i\partial_\mu\beta^\mu\psi - m\psi - V\psi = 0 \quad (۶۹-۲)$$

$$\left[(i\beta^\mu\partial_\mu - m - V) \psi \right]^\dagger = 0 \rightarrow i\partial_\mu\psi^\dagger\beta^{\mu\dagger} + m\psi^\dagger + V\psi^\dagger = 0 \quad (۷۰-۲)$$

$$i\partial_\mu\psi^\dagger\eta^0\beta^\mu\eta^0 + m\psi^\dagger + V\psi^\dagger = 0 \quad (۷۱-۲)$$

با ضرب η^0 در معادله (۷۱-۲) داریم:

$$i\partial_\mu\psi^\dagger\eta^0\beta^\mu\eta^0\eta^0 + m\psi^\dagger\eta^0 + V\psi^\dagger\eta^0 = 0 \quad (۷۲-۲)$$

داریم:

$$i\partial_\mu\bar{\psi}\beta^\mu + m\bar{\psi} + V\bar{\psi} = 0 \quad (۷۳-۲)$$

$\bar{\psi}$ و ψ را به ترتیب در معادلات (۶۹-۲) و (۷۳-۲) ضرب می‌کنیم:

$$i \bar{\psi} \partial_{\mu} \beta^{\mu} \psi - m \bar{\psi} \psi - V \bar{\psi} \psi = 0 \quad (۷۴-۲)$$

$$i \partial_{\mu} \bar{\psi} \beta^{\mu} \psi + m \bar{\psi} \psi + V \bar{\psi} \psi = 0 \quad (۷۵-۲)$$

دو رابطه بالا را با هم جمع می‌کنیم:

$$\bar{\psi} \beta^{\mu} \partial_{\mu} \psi + \partial_{\mu} \bar{\psi} \beta^{\mu} \psi = 0 \quad (۷۶-۲)$$

$$\partial_{\mu} (\bar{\psi} \beta^{\mu} \psi) = 0 \quad (۷۷-۲)$$

که چگالی چار جریان در این حالت عبارت است از:

$$J^{\mu} \equiv \frac{1}{2} (\bar{\psi} \beta^{\mu} \psi) \quad (۷۸-۲)$$

که از رابطه (۷۸-۲) می‌توانیم بنویسیم:

$$\partial_{\mu} J^{\mu} = 0 \quad (۷۹-۲)$$

مشاهده می‌شود که با حضور پتانسیل حقیقی V در معادله دی-کی-پی قانون پایستگی تغییر نمی‌کند.

۲-۳) بر همکنشها در نظریه دی-کی-پی

معادله دی-کی-پی در حضور برهمکنش عبارت است از: [۸]

$$(i \beta^\mu \partial_\mu - m - V) \psi = 0 \quad (۸۰-۲)$$

V می‌تواند دارای بخشهایی مطابق با تبدیلات لورنتس باشد به طوریکه V برای بخش اسکالر، شامل ۲ بخش اسکالر، ۲ بخش برداری و ۲ بخش تانسوری است. همچنین V برای بخش برداری، شامل ۲ بخش اسکالر، یک بخش شبه اسکالر، ۲ بخش برداری و ۲ بخش شبه برداری و ۸ بخش تانسوری است که این بخش به علت وجود اثرات غیر عادی نادیده گرفته می‌شود.

مزدوج مختلط معادله دی-کی-پی در حضور برهمکنش عبارت است از:

$$\begin{aligned} \left[(i \beta^\mu \partial_\mu - m - V) \psi \right]^\dagger &= 0 \\ -i \partial_\mu \psi^\dagger \beta^{\mu\dagger} - m \psi^\dagger - \psi^\dagger V^\dagger &= 0 \\ i \partial_\mu \psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu \eta^0 + m \psi^\dagger + \psi^\dagger V^\dagger &= 0 \\ i \partial_\mu \psi^\dagger \eta^0 \beta^\mu + m \psi^\dagger \eta^0 + \psi^\dagger \eta^0 V^\dagger &= 0 \end{aligned} \quad (۸۱-۲)$$

با استفاده از رابطه‌ی $\bar{\psi} = \psi^\dagger \eta^0$ داریم:

$$i \partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu + m \bar{\psi} + \bar{\psi} \eta^0 V^\dagger \eta^0 = 0 \quad (۸۲-۲)$$

حال معادله (۸۰-۲) و (۸۲-۲) را به ترتیب در ψ و $\bar{\psi}$ ضرب می‌کنیم و دو معادله را با هم جمع می‌کنیم.

$$\begin{aligned} i \bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \bar{\psi} V \psi &= 0 \\ i \partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi + m \bar{\psi} \psi + \bar{\psi} \eta^0 V^\dagger \eta^0 \psi &= 0 \end{aligned} \quad (۸۳-۲)$$

$$i\bar{\psi}\beta^\mu\partial_\mu\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\beta^\mu\psi + \bar{\psi}\eta^0V^\dagger\eta^0\psi - \bar{\psi}\mathcal{V}\psi = 0 \quad (۸۴-۲)$$

یا به عبارتی:

$$i\bar{\psi}\beta^\mu\partial_\mu\psi + i\partial_\mu\bar{\psi}\beta^\mu\psi + \bar{\psi}(\eta^0V^\dagger\eta^0 - \mathcal{V})\psi = 0 \quad (۸۵-۲)$$

بنابراین:

$$\partial_\mu J^\mu + \frac{i}{2}\bar{\psi}(V - \eta^0V^\dagger\eta^0)\psi = 0 \quad (۸۶-۲)$$

به طوریکه چار جریان بقادر است. در این حالت برای بخشهای اسپین صفر و یک معادله دی-کی-پی بر
همکنشهای اسکالر نوع ۱ و ۲ و مینیمم برداری و غیر مینیمم برداری بررسی خواهد شد [۹]

$$V = V_s^{(1)} + PV_s^{(2)} + \beta^\mu A_\mu^{(1)} + i[P, \beta^\mu]A_\mu^{(2)} \quad (۸۷-۲)$$

که:

$V_s^{(1)}$: اسکالر نوع یک

$V_s^{(2)}$: اسکالر نوع دو

$A_\mu^{(1)}$: مینیمم برداری

$A_\mu^{(2)}$: غیر مینیمم برداری

در این حالت معادله دی-کی-پی عبارت است از:

$$(i\beta^\mu\partial_\mu - m - V_s^{(1)} - PV_s^{(2)} - \beta^\mu A_\mu^{(1)} - i[P, \beta^\mu]A_\mu^{(2)})\psi = 0 \quad (۸۸-۲)$$

که P همان عملگر تصویر می باشد که برای ذرات با اسپین صفر $diag(1,0,0,0,0)$ و برای ذرات با اسپین

یک $diag(1,1,1,1,0,0,0,0,0,0)$ می باشد.

فرم بر همکنشهای عمومی معادله دی-کی-پی در مقالات قدیمی به صورت زیر می باشد:

$$(i \beta^\mu \partial_\mu - m - U_s S_1 - S_s^1 S_2 - U_\mu V_1^\mu - U_\mu^1 V_2^\mu - U_{\mu\nu}^1 T_1^{\mu\nu} - U_{\mu\nu}^2 T_2^{\mu\nu}) \psi = 0 \quad (۸۹-۲)$$

با مقایسه دو معادله (۸۸-۲) و (۸۹-۲) داریم:

$$S_1 = I$$

$$S_2 = P$$

$$V_1^\mu = \beta_\mu$$

$$V_2^\mu = P \beta_\mu \quad (۹۰-۲)$$

$$T_1^{\mu\nu} = \beta_\mu \beta_\nu + \beta_\nu \beta_\mu - 1$$

$$T_2^{\mu\nu} = \beta_\mu \beta_\nu - \beta_\nu \beta_\mu$$

فصل سوم

حل معادله‌ی دی - کی - پی به ازای بعضی از
پتانسیل‌ها

۳-۱) حل معادله دی - کی - پی در حضور بعضی از پتانسیل‌های مرکزی

توابع موج همه‌ی اطلاعات ضروری در مورد بررسی سیستمها و ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع انرژی بین سیستمهای برهمکنشی در مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیر نسبیتی را شامل می‌شود. از اینرو در کوانتوم مکانیک نسبیتی حل‌های دقیق تابع موج خیلی مهم هستند زیرا ما را در فهم فیزیکی که توسط این حل‌ها آورده می‌شود یاری می‌کند. همچنین معادله دی - کی - پی با معادلات کلاین-گوردن و پروکا برای ذره آزاد هم ارز است اما هنگامی که این برهمکنشها وارد می‌شوند لزوماً هم ارز نیستند. بنابراین بر آن شدیم تا معادله دی - کی - پی را در حضور تعدادی پتانسیل بررسی کنیم.

پتانسیل‌های مرکزی در همه شاخه‌های فیزیکی حضور دارند. در فیزیک انرژی بالا و فیزیک ذرات این پتانسیلها برهمکنشهای بین کوارکی را توصیف می‌کنند [۱۰]. در فیزیک هسته‌ای این پتانسیلها باعث نتایج خوبی در طیف‌سنجی می‌شوند [۱۱]. در فیزیک اتمی این پتانسیلها انرژی بستگی و توزیع تکانه را به خوبی توصیف می‌کنند [۱۲-۱۳]. در فیزیک مولکولی این پتانسیلها در بررسی برهم‌کنشهای بین مولکولی و درون مولکولی و توابع وابسته دو اتم استفاده می‌شوند [۱۳-۱۴].

به چند نمونه از مهمترین پتانسیل‌های مرکزی اشاره مختصری می‌کنیم:

۱) پتانسیل هولسن [۱۵] که یک پتانسیل کوتاه برد می‌باشد در هردو مکانیک کوانتومی نسبیتی و غیر نسبیتی مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این پتانسیل برای یک مقدار کوچک r شبیه یک پتانسیل کولونی رفتار می‌کند. پتانسیل هولسن کاربردهای بسیاری در نواحی مختلف فیزیکی از جمله فیزیک اتمی [۱۶، ۱۷] فیزیک هسته‌ای و انرژی‌های بالا [۱۸]، فیزیک حالت جامد [۱۹] و شیمی فیزیک [۲۰] دارد.

فرم کلی آن به صورت $V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{1 - qe^{-\alpha r}}$ می‌باشد.

۲) پتانسیل وودساکسون: این پتانسیل یک پتانسیل کوتاه برد می‌باشد و در بخش اصلی مدل پوسته هسته‌ای در به دست آوردن ترازهای انرژی هسته و خصوصیات توزیع الکترونی در اتم‌ها و هسته‌ها استفاده می‌شود [21-24]. از این پتانسیل در توصیف برهم‌کنش نوکلئون با هسته‌های سنگین نیز استفاده می‌شود [25] و همچنین برای مدل پتانسیل اپتیکی در پراکندگی کشسان بعضی از یون‌ها با هدف سنگین در محدوده انرژی‌های پایین استفاده می‌شود. فرم کلی این پتانسیل به شکل زیر می‌باشد:

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-a}{r_0}\right)}$$

۳) پتانسیل Maning-Rosen: این پتانسیل نتایج برجسته‌ای در پدیدارشناسی^۸ دارد. این پتانسیل به طور خاص در مطالعه‌ی مدل‌های ارتعاشی مولکول‌های دو اتمی به کار می‌رود [26-28]. این پتانسیل مورد کلی‌تر پتانسیل هولسن می‌باشد. از این پتانسیل برای خواص پراکندگی و حالت‌های مقید مورد استفاده قرار می‌گیرد. فرم کلی این پتانسیل به شکل زیر می‌باشد.

$$V(r) = \frac{\alpha(\alpha-1)e^{-\frac{2r}{b}}}{b^2 \left(1 - e^{-\frac{r}{b}}\right)^2} - \frac{Ae^{-\frac{r}{b}}}{b^2 \left(1 - e^{-\frac{r}{b}}\right)}$$

حال به بررسی معادله دی-کی-پی در حضور پتانسیل‌های مرکزی می‌پردازیم.

۳-۱-۱- معادله دی-کی-پی برای بوزونهای اسپین یک در حضور پتانسیل کولونی

معادله دی-کی-پی در حضور بر همکنش عبارت است از:

$$(i \beta^\mu \partial_\mu - m - U)\psi = 0. \quad (۱-۳)$$

^۸phenomenological

که:

$$U = s_1(r) + Ps_2(r) + \beta^0 v_1(r) + \beta^0 P v_2(r), \quad (۲-۳)$$

بنابراین:

$$(i \beta^\mu \partial_\mu - m - S_1(r) - PS_2(r) - \beta^0 V_1(r) - \beta^0 P V_2(r)) \psi = 0, \quad (۳-۳)$$

تابع موج می تواند به صورت زیر نوشته شود

$$\psi = (i \phi, F^1, F^2, F^3, W^1, W^2, W^3, X^1, X^2, X^3)^T. \quad (۴-۳)$$

با جاگذاری (۴-۳) در (۳-۳) به صورت ماتریسی داریم:

$$\begin{pmatrix} -m & 0 & 0 & 0 & i\partial_1 & i\partial_2 & i\partial_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m & 0 & 0 & i\partial_0 & 0 & 0 & 0 & -i\partial_3 & i\partial_2 \\ 0 & 0 & -m & 0 & 0 & i\partial_0 & 0 & i\partial_3 & 0 & -i\partial_1 \\ 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 & i\partial_0 & -i\partial_2 & i\partial_1 & 0 \\ -i\partial_1 & i\partial_0 - V_2 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\partial_2 & 0 & i\partial_0 - V_2 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\partial_3 & 0 & 0 & i\partial_0 - V_2 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\partial_3 & i\partial_2 & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 \\ 0 & i\partial_3 & 0 & -i\partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 0 \\ 0 & -i\partial_2 & i\partial_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 + S_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_1 + S_2 & 0 & 0 & V_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_1 + S_2 & 0 & 0 & V_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_1 + S_2 & 0 & 0 & V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_1 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\phi \\ F^1 \\ F^2 \\ F^3 \\ W^1 \\ W^2 \\ W^3 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = 0, \quad (۵-۳)$$

از معادله (۵-۳) مامعادلات ماکسول گونه را استخراج می کنیم:

$$\vec{\nabla} \vec{W} = (m + S_1 + S_2) \phi, \quad (\bar{۱}-۶-۳)$$

$$(E - V_1) \vec{W} + i (\vec{\nabla} \times \vec{X}) = (m + S_1 + S_2) \vec{F}, \quad (\bar{۲}-۶-۳)$$

$$\vec{\nabla} \phi + (E - V_1 - V_2) \vec{F} = (m + S_1) \vec{W}, \quad (\bar{۳}-۶-۳)$$

$$i (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = (m + S_1) \vec{X}. \quad (\bar{۴}-۶-۳)$$

با ترکیب معادلات ماکسول گونه بالا به معادله (۷-۳) می رسیم:

$$\begin{aligned}
& \bar{\nabla} \left(\frac{1}{(m+S_1+S_2)} \right) \left[\bar{\nabla} \left(\frac{(m+S_1+S_2)}{(E-V_1)} \right) \bar{F} + \frac{(m+S_1+S_2)}{(E-V_1)} \bar{\nabla} \cdot \bar{F} - \right. \\
& \left. \bar{\nabla} \left(\frac{i}{(E-V_1)} \right) \cdot \left\{ \bar{\nabla} \left(\bar{\nabla} \left(\frac{i}{m+S_1} \right) \cdot \bar{F} \right) - \left(\bar{\nabla} \left(\frac{i}{m+S_1} \right) \cdot \bar{\nabla} \right) \bar{F} + \frac{i}{m+S_1} \left(\bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) - \nabla^2 \bar{F} \right) \right\} \right] \\
& + \frac{1}{(m+S_1+S_2)} \bar{\nabla} \left[\bar{\nabla} \left(\frac{(m+S_1+S_2)}{(E-V_1)} \right) \bar{F} + \frac{(m+S_1+S_2)}{(E-V_1)} \bar{\nabla} \cdot \bar{F} - \right. \\
& \left. \bar{\nabla} \left(\frac{i}{(E-V_1)} \right) \cdot \left\{ \bar{\nabla} \left(\bar{\nabla} \left(\frac{i}{m+S_1} \right) \cdot \bar{F} \right) - \left(\bar{\nabla} \left(\frac{i}{m+S_1} \right) \cdot \bar{\nabla} \right) \bar{F} + \frac{i}{m+S_1} \left(\bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) - \nabla^2 \bar{F} \right) \right\} \right] \\
& + (E-V_1-V_2) \bar{F} = (m+S_1) \left[\frac{(m+S_1+S_2)}{(E-V_1)} \bar{F} - \frac{i}{(E-V_1)} \bar{\nabla} \left(\bar{\nabla} \left(\frac{i}{m+S_1} \right) \cdot \bar{F} \right) \right. \\
& \left. + \frac{i}{(E-V_1)} \left(\bar{\nabla} \left(\frac{i}{m+S_1} \right) \cdot \bar{\nabla} \right) \bar{F} + \frac{1}{(m+S_1)(E-V_1)} \left(\bar{\nabla} (\bar{\nabla} \cdot \bar{F}) - \nabla^2 \bar{F} \right) \right], \quad (7-3)
\end{aligned}$$

در حالت خاص $S_1=S_2=V_1=V_2=0$ بنابرین داریم:

$$(E_{n,l,\lambda}^2 - m^2 - p^2) \bar{F} = 0, \quad (8-3)$$

که مربوط به یک ذره آزاد می باشد.

در حالت مورد بررسی $S_1=S_2=V_1=0$ می باشد و داریم:

$$(E_{n,l,\lambda}(E_{n,l,\lambda}-V_2)-m^2)\bar{F}+\nabla^2\bar{F}=0. \quad (9-3)$$

همانطور که می دانیم:

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \quad (10-3)$$

حال برای تابع موج، رابطه ی زیر را تعریف می کنیم.

$$\vec{F} = R(r) \quad (۱۱-۳)$$

با جاگذاری روابط (۱۰-۳) و (۱۱-۳) در رابطه (۹-۳) و جاگذاری پتانسیل کولونی $\frac{A}{r}$ می‌رسیم به:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \vec{F} - E_{n,l,\lambda} \frac{A}{r} \vec{F} + (E_{n,l,\lambda}^2 - m^2) \vec{F} = 0. \quad (۱۲-۳)$$

با جداسازی متغیر به رابطه شعاعی زیر می‌رسیم:

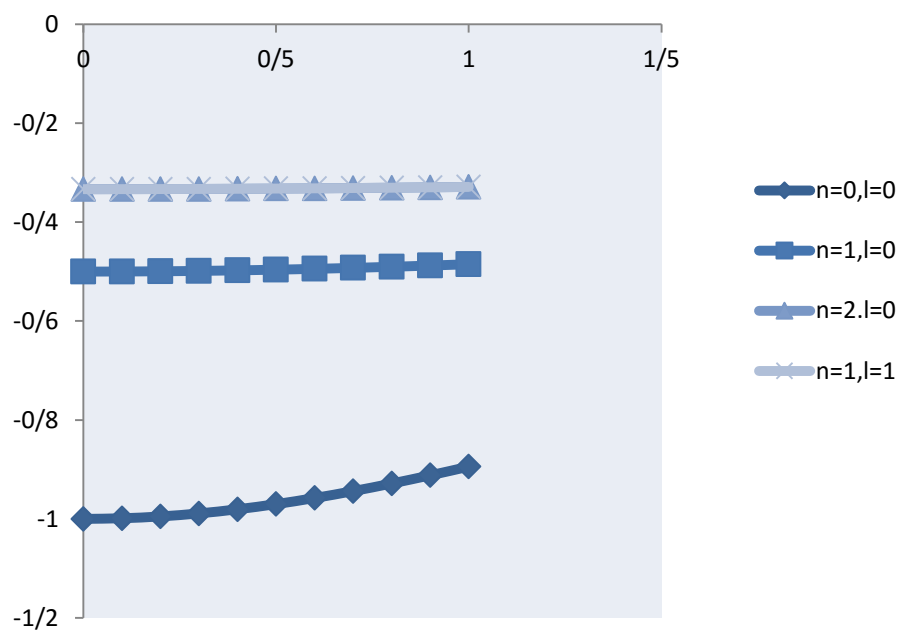
$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[\frac{(E_{n,l,\lambda}^2 - m^2)r^2 - E_n A r - l(l+1)}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (۱۳-۳)$$

با استفاده از روش NU، پارامترهای NU را بدست می‌آوریم که عبارتند از:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \xi_1 = m^2 - E_{n,l,\lambda}^2, \xi_2 = -E_{n,l,\lambda} A, \xi_3 = l(l+1), \alpha_4 = -\frac{1}{2}, \alpha_5 = 0 \\ \alpha_6 &= m^2 - E_{n,l,\lambda}^2, \alpha_7 = E_{n,l,\lambda} A, \alpha_8 = \frac{1}{4} + l(l+1), \alpha_9 = m^2 - E_{n,l,\lambda}^2, \alpha_{10} = 1 + 2\sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1)} \\ \alpha_{11} &= 2\sqrt{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2}, \alpha_{12} = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1)}, \alpha_{13} = -\sqrt{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2}. \end{aligned} \quad (۱۴-۳)$$

با حل معادله (۱۳-۳) با روش N-U به معادله ویژه مقداری زیر می‌رسیم:

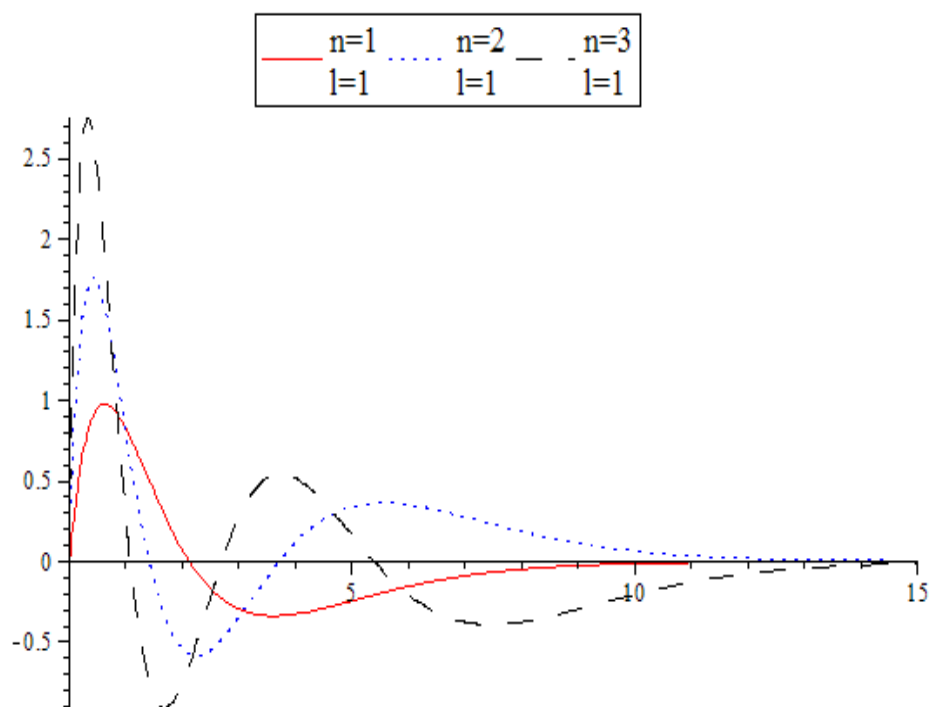
$$E_{n,l} = -\frac{2m(n+l+1)}{\sqrt{A^2 + 4(n+l+1)^2}} \quad (۱۵-۳)$$



شکل ۳-۱. ویژه مقادیر انرژی بر حسب مقادیر مختلف A

و معادله ویژه تابع عبارت است از:

$$R_{n,l}(\vec{r}) = r^{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1)}\right)} e^{(-\sqrt{m^2 - E_n^2})r} \times L_n^{\left(\sqrt{l+4l(l+1)}\right)} \left((2\sqrt{m^2 - E_n^2})r\right) \quad (3-16)$$

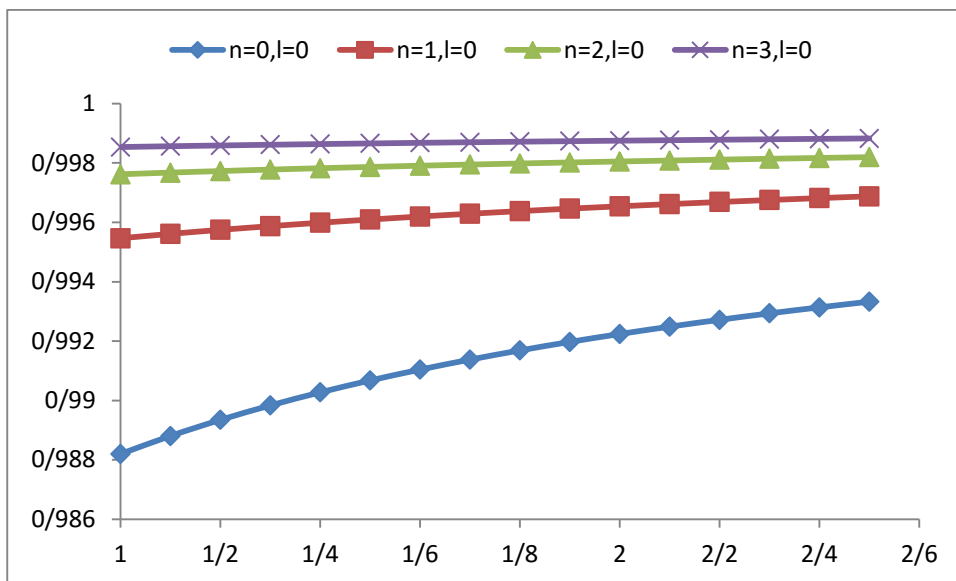


شکل ۳-۲. تابع موج بر حسب مقادیر مختلف Γ برای پتانسیل کولون،

حال با اضافه کردن $\frac{B}{r^2}$

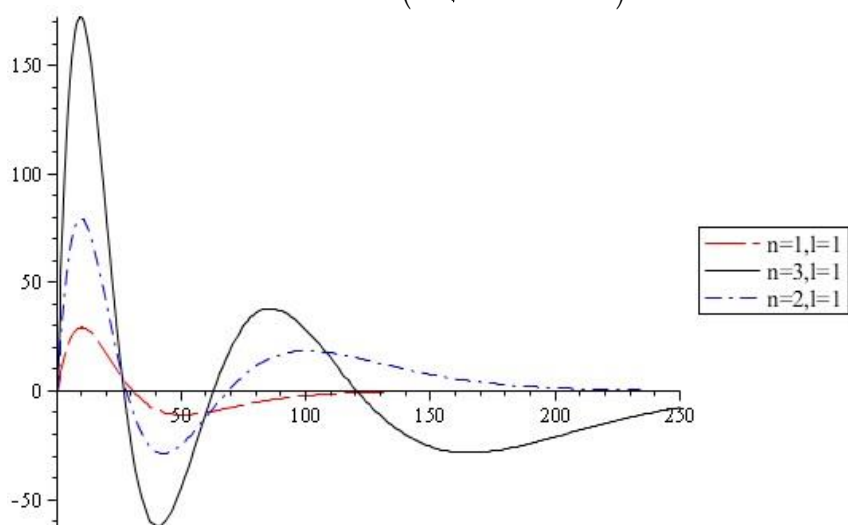
معادله ویژه مقداری عبارت است از:

$$(2n+1)\sqrt{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2} + E_{n,l,\lambda}A + 2\sqrt{(E_{n,l,\lambda}B + (l + \frac{1}{2})^2)(m^2 - E_{n,l,\lambda}^2)} = 0 \quad (17-3)$$



شکل ۳-۳ ویژه مقادیر انرژی بر حسب مقادیر مختلف B

و تابع موج عبارت است از: $R_{n,l}(r) = r^{\left(\frac{1}{2} + \sqrt{E_{n,l}B + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right)} e^{(-\sqrt{m^2 - E_{n,l}^2})r} \times L_n^{\left(2\sqrt{E_{n,l}B + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}\right)} \left((2\sqrt{m^2 - E_{n,l}^2})r\right)$



شکل ۳-۴ تابع موج بر حسب مقادیر مختلف l برای n متناسب، کوتاه

۳-۲- حل معادله دی- کی- پی در حضور پتانسیلهای غیر مرکزی

پتانسیلهای غیر مرکزی برای توصیف ذرات، مولکولها و سیستمهای مکانیک کوانتومی به کار می‌روند. برای مثال بعضی از آنها در توصیف مولکولهای آلی تغییر شکل یافته^۹ مانند بنزن به کار می‌روند. [29-30] همچنین پتانسیلهای غیر مرکزی نتایج بهتری از پتانسیلهای مرکزی در مورد خواص دینامیکی ساختار مولکولها و برهمکنشها می‌دهد. [۳۱] یعنی اینکه این پتانسیلها امکان اینکه حل‌های جبری معادله را به دست آورند می‌دهند.

پتانسیلهای مولکولی تغییر شکل یافته پتانسیلهای غیر مرکزی‌ای هستند که شامل دو قسمت می‌باشند:

(۱) پتانسیلهای نوسانگر هماهنگ کروی (۲) پتانسیل وابسته به زاویه.

اینگونه پتانسیلها می‌توانند برای توصیف مدل مولکولی تغییر شکل یافته و بر همکنش بین هسته‌های تغییر شکل یافته استفاده شوند. فرم کلی به صورت زیر می‌باشد.

$$V(r, \theta) = \frac{\alpha}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\beta \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta}$$

حال بر آن شدیم که به حل معادله دی- کی- پی برای ذرات با اسپین یک در (۳+۱) بعد فضا-زمانی در حضور پتانسیل شبه نوسانی هماهنگ تغییر شکل یافته^{۱۰} بپردازیم. چرا که پتانسیل شبه هماهنگ^{۱۱} به طور موفقیت آمیزی حالت‌های دورانی-ارتعاشی^{۱۲} مولکولهای دو اتمی، خصوصیات کوانتوم دات‌ها و کوانتوم پاد دات‌ها و ارتعاش و چرخش هسته را شرح می‌دهد. [32-35]

⁹ ring-shaped

¹⁰ Pseudo-Harmonic Oscillatory Ring-Shaped

¹¹ Pseudo-Harmonic

¹² roto-vibrational

فرم پتانسیل شبه نوسانی هماهنگ تغییر شکل یافته به صورت زیر می باشد

$$V_2(r, \theta) = \left(\frac{A}{2} r^2 + \frac{B}{r^2} + \frac{\eta + \beta \cos^2 \theta + \gamma \cos^4 \theta}{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right), \quad (18-3)$$

با انتخاب F به صورت زیر و جاگذاری (18-3) و (19-3) در (9-3) به معادله (20-3) می رسیم

$$F = F(r, \theta, \varphi) = R(r)Q(\theta)e^{i\lambda\varphi}. \quad (19-3)$$

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2}{d\varphi^2} \right] \bar{F} - E_{n,l,\lambda} \left(\frac{A}{2} r^2 + \frac{B}{r^2} + \frac{\eta + \beta \cos^2 \theta + \gamma \cos^4 \theta}{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \right) \bar{F} + (E_{n,l,\lambda}^2 - m^2) \bar{F} = 0, \quad (20-3)$$

بعد از جدا سازی متغیرها تابع شعاعی به فرم زیر می شود

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[\frac{-\frac{1}{2} E_{n,l,\lambda} A r^4 + (E_{n,l,\lambda}^2 - m^2) r^2 - (E_{n,l,\lambda} B + l(l+1))}{r^2} \right] R(r) = 0, \quad (21-3)$$

با انتخاب تغییر متغیر $s = r^2$ معادله شعاعی به فرم زیر تبدیل می شود

$$\frac{d^2 R(s)}{ds^2} + \frac{3}{s} \frac{dR(s)}{ds} + \left[\frac{-\frac{1}{8} E_{n,l,\lambda} A s^2 + \frac{1}{4} (E_{n,l,\lambda}^2 - m^2) s - \frac{1}{4} (E_{n,l,\lambda} B + l(l+1))}{s^2} \right] R(s) = 0, \quad (22-3)$$

که با استفاده از روش NU، پارامترهای NU عبارتند از:

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \xi_1 = \frac{1}{8}E_{n,l,\lambda}A, \xi_2 = \frac{1}{4}(E_{n,l,\lambda}^2 - m^2), \xi_3 = \frac{1}{4}(E_{n,l,\lambda}B + l(l+1)),$$

$$\alpha_4 = -\frac{1}{4}, \alpha_5 = 0, \alpha_6 = \frac{1}{8}E_{n,l,\lambda}A, \alpha_7 = -\frac{1}{4}(E_{n,l,\lambda}^2 - m^2), \alpha_8 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4}(E_{n,l,\lambda}B + l(l+1)),$$

$$\alpha_9 = \frac{1}{8}E_{n,l,\lambda}A, \alpha_{10} = 1 + \sqrt{\frac{1}{4} + (E_{n,l,\lambda}B + l(l+1))}, \alpha_{11} = \sqrt{\frac{1}{2}E_{n,l,\lambda}A},$$

$$\alpha_{12} = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}(E_{n,l,\lambda}B + l(l+1))}, \alpha_{13} = -\sqrt{\frac{1}{8}E_{n,l,\lambda}A}. \quad (23-3)$$

بنابراین رابطه ویژه مقداری عبارت است از:

$$E_{n,l,\lambda}^2 - (2n+1)\sqrt{2E_{n,l,\lambda}A} - \sqrt{2E_{n,l,\lambda}A \left((l + \frac{1}{2})^2 + E_{n,l,\lambda}B \right)} - m^2 = 0. \quad (24-3)$$

برای بخش زاویه‌ای داریم:

$$\frac{d^2Q}{d\theta^2} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \frac{dQ}{d\theta} + \frac{(-\gamma E_{n,l,\lambda} - l(l+1))\cos^4\theta + (l(l+1) - \lambda^2 - \beta E_{n,l,\lambda})\cos^2\theta - E_{n,l,\lambda}\eta}{\cos^2\theta(1 - \cos^2\theta)} Q(\theta) = 0, \quad (25-3)$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = \cos\theta$ معادله بالا تبدیل می‌شود به:

$$\frac{d^2Q(y)}{dy^2} + \frac{-2y}{1-y^2} \frac{dQ(y)}{dy} + \frac{(-\gamma E_{n,l,\lambda} - l(l+1))y^4 + (l(l+1) - \lambda^2 - \beta E_{n,l,\lambda})y^2 - E_{n,l,\lambda}\eta}{y^2(1-y^2)^2} Q(y) = 0, \quad (26-3)$$

با استفاده از تغییر متغیر دوم $z = y^2$ داریم:

$$\frac{d^2 Q(z)}{dz^2} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}z}{z(1-z)} \frac{dQ(z)}{dz} + \frac{\frac{1}{4}(-\gamma E_{n,l,\lambda} - l(l+1))z^2 + \frac{1}{4}(l(l+1) - \lambda^2 - \beta E_{n,l,\lambda})z - \frac{1}{4}E_{n,l,\lambda}\eta}{[z(1-z)]^2} Q(z) = 0. \quad (27-3)$$

پارامترهای NU عبارتند از:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_3 = 1, \quad \xi_1 = \frac{1}{4}(\gamma E_{n,l,\lambda} + l(l+1)), \quad \xi_2 = \frac{1}{4}(l(l+1) - \lambda^2 - \beta E_{n,l,\lambda}),$$

$$\xi_3 = \frac{1}{4}E_{n,l,\lambda}\eta, \quad \alpha_4 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_5 = -\frac{1}{4}, \quad \alpha_6 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4}(\gamma E_{n,l,\lambda} + l(l+1)),$$

$$\alpha_7 = -\frac{1}{8} - \frac{1}{4}(l(l+1) - \lambda^2 - \beta E_{n,l,\lambda}), \quad \alpha_8 = \frac{1}{16} + \frac{1}{4}E_{n,l,\lambda}\eta,$$

$$\alpha_9 = \frac{1}{4}(\lambda^2 + (\beta + \eta + \gamma)E_{n,l,\lambda}), \quad \alpha_{10} = 1 + \sqrt{\frac{1}{4} + E_{n,l,\lambda}\eta},$$

$$\alpha_{11} = 2 + \sqrt{\lambda^2 + (\beta + \eta + \gamma)E_{n,l,\lambda}} + \sqrt{\frac{1}{4} + E_{n,l,\lambda}\eta}, \quad \alpha_{12} = \frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}E_{n,l,\lambda}\eta},$$

$$\alpha_{13} = -\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{4}(\lambda^2 + (\beta + \eta + \gamma)E_{n,l,\lambda})} - \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4}E_{n,l,\lambda}\eta}. \quad (28-3)$$

بنابر این ویژه مقدار انرژی برای بخش زاویه‌ای عبارت است از:

$$l(l+1) = 4n^2 + \left(4 + \sqrt{16(\lambda^2 + (\beta + \eta + \gamma)E_{n,l,\lambda})} + \sqrt{4 + 16E_{n,l,\lambda}\eta}\right)n + \sqrt{4((\beta + \eta + \gamma)E_{n,l,\lambda}) + 4\lambda^2} + \sqrt{1 + 4E_{n,l,\lambda}\eta} + \sqrt{(4 + 16E_{n,l,\lambda}\eta)\left(\frac{1}{4}(\lambda^2 + (\beta + \eta + \gamma)E_{n,l,\lambda})\right)} + \lambda^2 + E_{n,l,\lambda}\beta + 2E_{n,l,\lambda}\eta + 1 \quad (29-3)$$

در نهایت تابع موج کل عبارت است از:

$$\begin{aligned}
F_{n,l,\lambda}(\vec{r}, \theta, \varphi) &= r^{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (E_{n,l,\lambda} B + l(l+1))}\right)} e^{\left(-\sqrt{\frac{1}{8} E_{n,l,\lambda} A}\right)} r^2 \\
L_n^{\left(\sqrt{\frac{1}{4} + (E_{n,l,\lambda} B + l(l+1))}\right)} &\left(\left(\sqrt{\frac{1}{2} E_{n,l,\lambda} A}\right) r^2\right) \times (\cos^2 \theta)^{\left(\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{4} E_{n,l,\lambda} \eta}\right)} \\
&\times (1 - \cos^2 \theta)^{\left(\sqrt{\frac{1}{4} (\lambda^2 + (\beta + \eta + \gamma) E_{n,l,\lambda})}\right)} \times \\
P_n^{\left(\sqrt{\frac{1}{4} + E_{n,l,\lambda} \eta}, \sqrt{\lambda^2 + (\beta + \eta + \gamma) E_{n,l,\lambda}}\right)} &(1 - 2 \cos^2 \theta) e^{i \lambda \varphi}
\end{aligned} \tag{۳۰-۳}$$

نتایج به ازای $B = \eta = \beta = \gamma = 0$ به نتایج ترم درجه دوم کاهش می‌یابد که به طور گسترده در بسیاری از شاخه‌های فیزیکی به کار می‌رود. پس از حل (بدست آوردن ویژه توابع و ویژه مقادیر انرژی) آنها می‌توانند در مطالعه انتقال تابع انرژی در طیف سنجی مزونی، طرحهای تداخلی، انتقال بار، اثرات برانگیخته و خواص استاتیکی مزونها استفاده شوند. همچنین طیف انرژی برای این پتانسیلهای غیر مرکزی به شرطی قابل مطالعه است که این پتانسیلها قابل جداسازی باشند.

به همین ترتیب با حل معادله دی-کی-پی با پتانسیل هارتمن تغییر شکل یافته^{۱۳} $\left(\frac{A}{r} - \frac{B}{r^2 \sin^2 \theta}\right)$ در (۱+۳) بعد فضا-زمانی مطابق با مراحل بالا به نتایج زیر می‌رسیم:

معادله ویژه مقداری برای بخش شعاعی:

$$E_{n,l} = -\frac{2m(n+l+1)}{\sqrt{A^2 + 4(n+l+1)^2}} \tag{۳۱-۳}$$

و برای بخش زاویه‌ای:

$$l(l+1) = n'^2 + 2\sqrt{(\lambda^2 - E_{n,l,\lambda} B)} n' + n' + \left(\lambda^2 - E_{n,l,\lambda} B + \sqrt{\lambda^2 - E_{n,l,\lambda} B}\right) \tag{۳۲-۳}$$

¹³ Hartmann ring-shaped

بنابراین

$$l = n' + \sqrt{\lambda^2 - E_{n,l,\lambda} B} \quad (33-3)$$

که تابع موج کلی عبارت است از:

$$F_{n,l,\lambda}(\vec{r}, \theta, \varphi) = r^{\left(\frac{-1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1)}\right)} e^{(-\sqrt{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2})r} L_n^{\left(2\sqrt{\frac{1}{4} + l(l+1)}\right)} \left((2\sqrt{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2})r \right) \times \quad (34-3)$$

$$\left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\lambda^2 - E_{n,l,\lambda} B)}\right)} \times \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\lambda^2 - E_{n,l,\lambda} B)}\right)} P_n^{\left(\sqrt{(\lambda^2 - E_{n,l,\lambda} B)}, \sqrt{(\lambda^2 - E_{n,l,\lambda} B)}\right)} (\cos \theta) e^{i\lambda\varphi}.$$

همچنین در حل معادله دی-کی-پی با پتانسیل مینگ-روسن^{۱۴} به اضافه‌ی یک پتانسیل تغییر شکل

$$\text{یافته مانند} \left[\frac{\alpha(\alpha-1)e^{-\frac{2r}{b}}}{b^2 \left(1 - e^{-\frac{r}{b}}\right)^2} - \frac{Ae^{-\frac{r}{b}}}{b^2 \left(1 - e^{-\frac{r}{b}}\right)} + \frac{\beta'}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\beta \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right] \text{ در (۱+۳) بعد فضا-زمانی به}$$

نتایج زیر می‌رسیم:

معادله ویژه مقداری برای بخش شعاعی:

$$n^2 + n \left(\sqrt{4l(l+1) + 4E_{n,l,\lambda}\alpha(\alpha-1) + 1} + \sqrt{4l(l+1)C_0 - 4b^2(E_{n,l,\lambda}^2 - m^2) + 1} \right) +$$

$$\sqrt{l(l+1) + E_{n,l,\lambda}\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{4}} + \sqrt{l(l+1)C_0 - b^2(E_{n,l,\lambda}^2 - m^2) + \frac{1}{4}} +$$

$$2\sqrt{(l(l+1)C_0 - b^2(E_{n,l,\lambda}^2 - m^2))(l(l+1) + E_{n,l,\lambda}\alpha(\alpha-1) + \frac{1}{4})} -$$

$$E_{n,l,\lambda}A + l(l+1) + \frac{1}{2} = 0 \quad (35-3)$$

¹⁴ Manning-Rosen

و برای بخش زاویه‌ای:

$$l(l+1) = n'^2 + \left(\sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} \beta' - E_{n,l,\lambda} \beta} + \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} \beta' + E_{n,l,\lambda} \beta + 1} \right) n' + \frac{1}{2} \left(\sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} \beta' - E_{n,l,\lambda} \beta} + \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} \beta' + E_{n,l,\lambda} \beta} + \sqrt{(\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} \beta')^2 - (E_{n,l,\lambda} \beta)^2 + \lambda^2 + E_{n,l,\lambda} \beta'} \right) \quad (3-36)$$

بنابراین داریم:

$$l = n' + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} \beta' - E_{n,l,\lambda} \beta} + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} \beta' + E_{n,l,\lambda} \beta} \quad (3-37)$$

که تابع موج کلی عبارت است از:

$$F_{n,l,\lambda}(r, \theta, \varphi) = e^{-\frac{\sqrt{(l(l+1)C_0 - b^2(E_{n,l,\lambda}^2 - m^2))}}{b} r} \left(1 - e^{-\frac{r}{b}}\right)^{\frac{1}{2} + \sqrt{l(l+1) + E_{n,l,\lambda} \alpha(\alpha-1) + \frac{1}{4}}} P_n \left(\frac{2\sqrt{l(l+1)C_0 - b^2(E_{n,l,\lambda}^2 - m^2)} + 2\sqrt{l(l+1) + E_{n,l,\lambda} \alpha(\alpha-1) + \frac{1}{4}}}{2} \right) \left(1 - 2e^{-\frac{r}{b}}\right) \times \left(\frac{1 - \cos \theta}{2}\right)^{\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} \beta' + E_{n,l,\lambda} \beta}} \times \left(\frac{1 + \cos \theta}{2}\right)^{\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} \beta' - E_{n,l,\lambda} \beta}} \times P_n \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} \beta' + E_{n,l,\lambda} \beta} + \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} \beta' - E_{n,l,\lambda} \beta}}{2} \right) (\cos \theta) e^{i \lambda \varphi} \quad (3-38)$$

با توجه به کاربرد این پتانسیل در شیمی کوانتومی و فیزیک هسته‌ای حل معادله دی-کی-پی با این

پتانسیل مهم می‌باشد.

جدول ۳-۱. انرژی حالت‌های مقید برحسب اعداد کوانتومی مختلف

β'	λ	n	n'	l	$E_{n,l,\lambda}$
1.130159911	0	0	0	1	0.9329668149
4.172264852	0	0	0	2	0.9621789569
9.211534011	0	0	0	3	0.9777566835
1.095299167	0	1	0	1	0.9662701347
3.080097395	1	1	0	2	0.9788558097
8.114470346	1	1	0	3	0.9867263012
0.06117848810	1	1	1	2	0.9788558097
3.055774379	1	1	1	3	0.9867263012
0.06013618481	1	0	1	2	0.9621789569

با حل معادله دی-کی-پی با پتانسیل وود-ساکسون تغییر شکل یافته با پارامتر q^{15} به اضافه‌ی یک

$$\text{پتانسیل تغییر شکل یافته عمومی} \left(\frac{-V_0}{1+q \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} + \frac{\alpha + \beta \cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \text{ در (۳+۱) بعد فضا-زمانی به}$$

نتایج زیر می‌رسیم:

معادله ویژه مقداری برای بخش شعاعی:

$$\begin{aligned}
 & 2n + (2n+1) \left(\sqrt{\frac{l(l+1)c_0}{R_0^2 \alpha^2} + \frac{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2}{\alpha^2}} + \sqrt{\frac{l(l+1)(c_0+c_1+c_2)}{R_0^2 \alpha^2} + \frac{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2 - E_{n,l,\lambda} V_0}{\alpha^2}} \right) \\
 & + n(n-1) + \frac{l(l+1)c_1}{R_0^2 \alpha^2} - \frac{E_{n,l,\lambda} V_0}{\alpha^2} + 2 \left(\frac{l(l+1)c_0}{R_0^2 \alpha^2} + \frac{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2}{\alpha^2} \right) \\
 & + 2 \sqrt{\left(\frac{l(l+1)c_0}{R_0^2 \alpha^2} + \frac{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2}{\alpha^2} \right) \left(\frac{l(l+1)(c_0+c_1+c_2)}{R_0^2 \alpha^2} + \frac{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2 - E_{n,l,\lambda} V_0}{\alpha^2} \right)} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{۳-۳۹}$$

¹⁵ q-deformed Woods-Saxon

و برای بخش زاویه‌ای:

$$l(l+1) = n'^2 + n' \left(2\sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}\alpha + E_{n,l,\lambda}\beta} + 1 \right) + \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}\alpha + E_{n,l,\lambda}\beta} + \lambda^2 + E_{n,l,\lambda}\alpha, \quad (40-3)$$

که تابع موج کلی عبارت است از:

$$F(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r} \left\{ \left(\frac{1}{1 + q \exp\left(\frac{r - R_0}{a}\right)} \right)^{\sqrt{\frac{l(l+1)c_0}{R_0^2 \left(\frac{R_0}{a}\right)^2} + \frac{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2}{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2}}} \left(1 - \frac{1}{1 + q \exp\left(\frac{r - R_0}{a}\right)} \right)^{\sqrt{\frac{l(l+1)(c_0 + c_1 + c_2)}{R_0^2 \left(\frac{R_0}{a}\right)^2} + \frac{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2 - E_{n,l,\lambda}V_0}{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2}}} \right. \\ \left. P_n \sqrt{\frac{l(l+1)c_0}{R_0^2 \left(\frac{R_0}{a}\right)^2} + \frac{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2}{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2}} 2 \sqrt{\frac{l(l+1)(c_0 + c_1 + c_2)}{R_0^2 \left(\frac{R_0}{a}\right)^2} + \frac{m^2 - E_{n,l,\lambda}^2 - E_{n,l,\lambda}V_0}{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2}} \left(1 - \frac{2}{1 + q \exp\left(\frac{r - R_0}{a}\right)} \right) \right\} \quad (41-3)$$

$$\left\{ \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^{\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}\alpha + E_{n,l,\lambda}\beta}} \left(1 - \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right) \right)^{\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}\alpha + E_{n,l,\lambda}\beta}} \right. \\ \left. P_n \left(\sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}\alpha + E_{n,l,\lambda}\beta}, 2 \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}\alpha + E_{n,l,\lambda}\beta} \right) \left(1 - 2 \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right) \right) \right\} e^{i\lambda\varphi},$$

برای پتانسیل نوسانی هماهنگ تغییر شکل یافته‌ی غیر مرکزی جدید^{۱۶}

$$p = 0, 1, 2 \text{ به ازای } \left(\frac{G}{2} r^2 + \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{C \cos^p \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \text{ داریم:}$$

معادله ویژه مقداری برای بخش شعاعی:

$$E_{n,l,\lambda}^2 - (2n+1)\sqrt{2E_{n,l,\lambda}G} - \sqrt{2E_{n,l,\lambda}G \left(\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 + E_{n,l,\lambda}A \right)} - m^2 = 0 \quad (42-3)$$

و برای بخش زاویه‌ای:

¹⁶ new ring-shaped non-central harmonic oscillator

به ازای $p=0$

$$l(l+1) = n'^2 + n' \left(2\sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B + E_{n,l,\lambda}C} + 1 \right) + \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B + E_{n,l,\lambda}C} + \lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B + E_{n,l,\lambda}C \quad (43-3)$$

به عبارت دیگر:

$$l = n' + \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B + E_{n,l,\lambda}C} \quad (44-3)$$

نهایتا تابع موج کلی به ازای $p=0$:

$$\begin{aligned} F_{n,l,\lambda}(\vec{r}, \theta, \varphi) = & r^{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (E_{n,l,\lambda}A + l(l+1))} \right)} e^{\left(-\sqrt{\frac{1}{8}E_{n,l,\lambda}G} \right) r^2} \times \\ & L_n^{\left(\sqrt{\frac{1}{4} + (E_{n,l,\lambda}A + l(l+1))} \right)} \left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}E_{n,l,\lambda}G} \right) r^2 \right) \\ & \times \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^{\left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B + E_{n,l,\lambda}C} \right)} \times \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^{\left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B + E_{n,l,\lambda}C} \right)} \\ & \times P_n^{\left(\sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B + E_{n,l,\lambda}C}, \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B + E_{n,l,\lambda}C} \right)} (\cos \theta) e^{i\lambda\varphi}. \end{aligned} \quad (45-3)$$

به ازای $p=1$

$$\begin{aligned} l(l+1) = & n'^2 + n' \left(\sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B + E_{n,l,\lambda}C} + \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B - E_{n,l,\lambda}C} + 1 \right) \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B + E_{n,l,\lambda}C} + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B - E_{n,l,\lambda}C} + \frac{1}{2} (\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B) \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{(\lambda^2 + E_{n,l,\lambda}B)^2 - E_{n,l,\lambda}^2 C^2} \end{aligned} \quad (46-3)$$

به عبارت دیگر:

$$l = (n' + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B + E_{n,l,\lambda} C} + \frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B - E_{n,l,\lambda} C}) \quad (47-3)$$

نهایتا تابع موج کلی به ازای $p=1$:

$$\begin{aligned} F_{n,l,\lambda}(\vec{r}, \theta, \varphi) = & r^{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (E_{n,l,\lambda} A + l(l+1))}\right)} e^{\left(-\sqrt{\frac{1}{8} E_{n,l,\lambda} G}\right) r^2} \times \\ & L_n^{\left(\sqrt{\frac{1}{4} + (E_{n,l,\lambda} A + l(l+1))}\right)} \left(\left(\sqrt{\frac{1}{2} E_{n,l,\lambda} G} \right) r^2 \right) \\ & \times \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^{\left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B + E_{n,l,\lambda} C}\right)} \times \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^{\left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B - E_{n,l,\lambda} C}\right)} \\ & \times P_n^{\left(\sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B + E_{n,l,\lambda} C}, \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B - E_{n,l,\lambda} C}\right)} (\cos \theta) e^{i \lambda \varphi}. \end{aligned} \quad (48-3)$$

به ازای $p=2$

$$\begin{aligned} l(l+1) = & n'^2 + n' \left(2 \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B + E_{n,l,\lambda} C} + 1 \right) + \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B + E_{n,l,\lambda} C} \\ & + \lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B \end{aligned} \quad (49-3)$$

نهایتا تابع موج کلی به ازای $p=2$:

$$\begin{aligned} F_{n,l,\lambda}(\vec{r}, \theta, \varphi) = & r^{\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + (E_{n,l,\lambda} A + l(l+1))}\right)} e^{\left(-\sqrt{\frac{1}{8} E_{n,l,\lambda} G}\right) r^2} \times \\ & L_n^{\left(\sqrt{\frac{1}{4} + (E_{n,l,\lambda} A + l(l+1))}\right)} \left(\left(\sqrt{\frac{1}{2} E_{n,l,\lambda} G} \right) r^2 \right) \\ & \times \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^{\left(\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B + E_{n,l,\lambda} C}\right)} \times \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^{\left(-\frac{1}{2} \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B + E_{n,l,\lambda} C}\right)} \\ & \times P_n^{\left(\sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B + E_{n,l,\lambda} C}, \sqrt{\lambda^2 + E_{n,l,\lambda} B + E_{n,l,\lambda} C}\right)} (\cos \theta) e^{i \lambda \varphi}. \end{aligned} \quad (50-3)$$

۳-۳- نوسانگر دی- کی- پی در حضور میدان مغناطیسی برای ذرات

اسپین یک

در این مبحث به بررسی معادله دی- کی- پی در حضور میدان مغناطیسی در غیاب پتانسیل و در حضور پتانسیل برای ذرات اسپین یک در دو بعد می‌پردازیم.

در حضور میدان مغناطیسی عبارت $\vec{p}$ در رابطه (۳-۹) به $(\vec{p} - q\vec{A})$ تبدیل می‌شود.

با انتخاب $\vec{F}$ به صورت زیر داریم:

$$\vec{F}(\rho, \varphi) = \vec{R}(\rho)e^{im\varphi} \quad (۳-۵۱)$$

در این حالت ∇^2 به شکل زیر می‌شود:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{q^2 B^2}{4} \rho^2 + \frac{mqB}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (۳-۵۲)$$

با جاگذاری روابط (۳-۶۶) و (۳-۶۷) در رابطه (۳-۹) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{q^2 B^2}{4} \rho^2 + \frac{mqB}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \vec{F} + (E_{n,m}(E_{n,m} - V_2) - m^2) \vec{F} = 0 \quad (۳-۵۳)$$

۳-۳-۱) در غیاب پتانسیل

در این قسمت به بررسی معادله‌ی (۳-۵۳) در حضور میدان مغناطیسی و در غیاب پتانسیل ($V_2 = 0$)

برای ذره بار دار که همان اثر آهارونف-بوهیم می‌باشد می‌پردازیم:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{q^2 B^2}{4} \rho^2 + \frac{mqB}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \vec{F} + (E_{n,m}^2 - m^2) \vec{F} = 0 \quad (۳-۵۴)$$

با قرار دادن رابطه‌ی (۳-۵۱) در رابطه‌ی (۳-۵۴) و انجام عملیات جبری به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left[\frac{\left(\frac{qBm}{2} + E_{n,m}^2 - m_0^2\right)\rho^2 - \frac{q^2 B^2}{4} \rho^4 - m^2}{\rho^2} \right] R(\rho) = 0 \quad (۳-۵۵)$$

با استفاده از تغییر متغیر $s = \rho^2$ به رابطه‌ی (۳-۵۶) می‌رسیم.

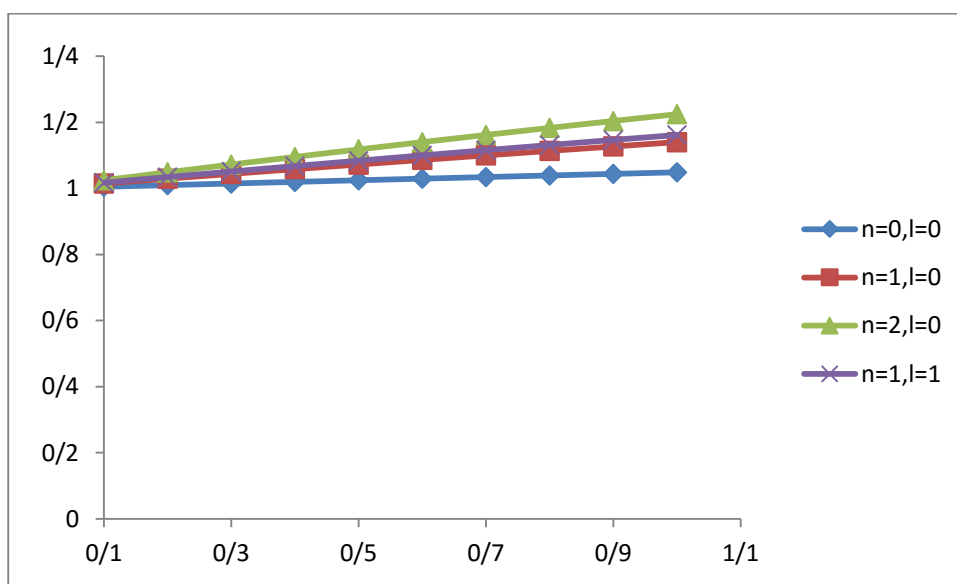
$$\frac{d^2 R(s)}{ds^2} + \frac{2}{s} \frac{dR(s)}{ds} + \left[\frac{-\frac{q^2 B^2}{16} s^2 + \left(\frac{qBm}{2} + E_{n,m}^2 - m_0^2\right)s - \frac{1}{4} m^2}{s^2} \right] R(s) = 0 \quad (۳-۵۶)$$

با استفاده از رابطه‌ی NU به معادله‌ی ویژه مقداری زیر می‌رسیم:

$$E_{n,m} = \sqrt{(2n+1)qB + \frac{1}{2}qBm + m_0^2} \quad (۳-۵۷)$$

جدول ۳-۲. انرژی برحسب اعداد کوانتومی مختلف

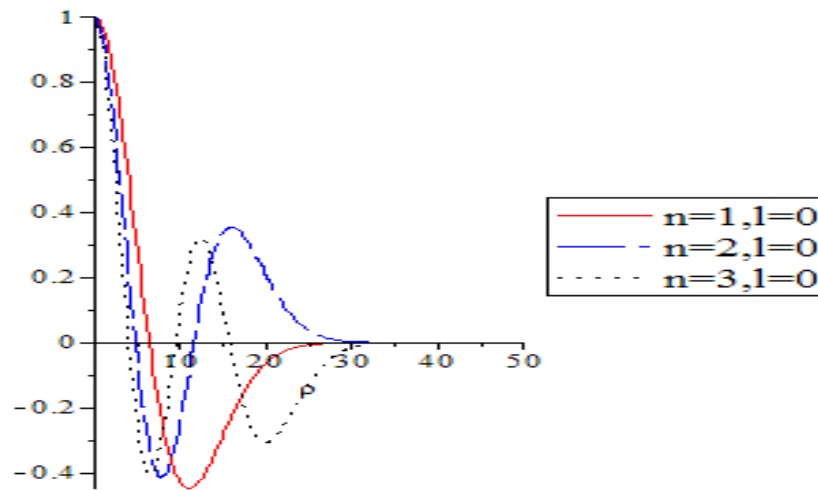
$ n, m\rangle$	$E_{n,m}$	$ n, m\rangle$	$E_{n,m}$
$ 0, 0\rangle$	1.024695077	$ 1, 1\rangle$	1.083974169
$ 1, 0\rangle$	1.072380529	$ 2, 1\rangle$	1.129158979
$ 2, 0\rangle$	1.118033989	$ 3, 1\rangle$	1.172603940
$ 3, 0\rangle$	1.161895004	$ 3, 2\rangle$	1.183215957
$ 4, 0\rangle$	1.204159458	$ 4, 1\rangle$	1.214495780
$ 5, 0\rangle$	1.244989960	$ 4, 2\rangle$	1.224744871



شکل ۳-۵. ویژه مقادیر انرژی برحسب مقادیر مختلف میدان

که تابع موج برای این حالت عبارت است از:

$$R_{n,m}(\rho) = \rho^m e^{-\frac{qB\rho^2}{4}} L_n^m\left(\frac{1}{2}qB\rho^2\right) \quad (3-58)$$



شکل ۳-۶. نمودار تابع موج بر حسب ρ

۳-۳-۲) در حضور پتانسیل

در این قسمت به بررسی معادله‌ی (۳-۵۳) با پتانسیل شبه نوسانی هماهنگ $\frac{A}{2}r^2 + \frac{G}{r^2}$ می‌پردازیم:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{q^2 B^2}{4} \rho^2 + \frac{mqB}{2} \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \vec{F} - \left(\frac{A}{2} r^2 + \frac{G}{r^2}\right) \vec{F} + (E_{n,m}^2 - m^2) \vec{F} = 0 \quad (۳-۵۹)$$

با انجام عملیات جبری همانند روابط بالا به معادله‌ی ویژه مقداری زیر می‌رسیم:

$$E_{n,m}^2 - (2n+1)\sqrt{q^2 B^2 + 2E_{n,m}A} - \sqrt{(m^2 + E_{n,m}G)(q^2 B^2 + 2E_{n,m}A)} + \frac{qBm}{2} - m_0^2 = 0 \quad (۳-۶۰)$$

جدول ۳-۳. انرژی برحسب اعداد کوانتومی مختلف در حضور پتانسیل

$ n, m\rangle$	$E_{n,m}$	$ n, m\rangle$	$E_{n,m}$
$ 0, 0\rangle$	3.121392645	$ 1, 1\rangle$	4.365837235
$ 1, 0\rangle$	4.283859068	$ 2, 1\rangle$	5.336020106
$ 2, 0\rangle$	5.270422542	$ 3, 1\rangle$	6.209337941
$ 3, 0\rangle$	6.153754521	$ 3, 2\rangle$	6.366101520
$ 4, 0\rangle$	6.966435103	$ 4, 1\rangle$	7.015150010
$ 5, 0\rangle$	7.726526256	$ 4, 2\rangle$	7.154291853

و ویژه تابع عبارت است از

$$R_{n,m}(\rho) = \rho^{\sqrt{m^2 + E_{n,m}G}} e^{-\frac{1}{4}\sqrt{q^2 B^2 + 2E_{n,m}A}\rho^2} L_n^{\sqrt{m^2 + E_{n,m}G}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{q^2 B^2 + 2E_{n,m}A}\right) \quad (۳-۶۱)$$

فصل چهارم

پراکندگی و حالت‌های مقید

۱-۴- پراکندگی بوزون‌های اسپین صفر در یک بعد

در این بخش به پراکندگی ذرات اسپین صفر در حضور پتانسیل هولسن در $(1+1)$ بعد فضا - زمانی می‌پردازیم.

همانطور که می‌دانیم معادله دی- کی- پی در حضور برهمکنش U عبارت است از:

$$(i\beta^0\partial_0 + i\beta^1\partial_1 - m - U)\psi = 0 \quad (1-4)$$

برهمکنش U می‌تواند به صورت مجموع بخش‌هایی نوشته شود که هر کدام از این بخشها یک مشخصه لورنتس خاص را دارد. در معادله دی- کی- پی اسپین صفر یک برهمکنش اسکالر و یک برهمکنش برداری به صورت زیر وجود دارد:

$$U = PS(x) + \beta^0 V_1(x) \quad (2-4)$$

که با جاگذاری در معادله $(1-4)$ داریم:

$$(i\beta^0\partial_0 + i\beta^1\partial_1 - m - PS(x) - \beta^0 V_1(x))\psi_n(x) = 0 \quad (3-4)$$

ψ یک تابع موج پنج مولفه‌ای معادله دی- کی- پی می‌باشد که به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\psi = (\phi_n^{(1)}, \phi_n^{(2)}, \phi_n^{(3)}, \phi_n^{(4)}, \phi_n^{(5)})^T \quad (4-4)$$

با جاگذاری ماتریسهای β^0 و β^1 و همچنین ماتریس تصویر برای حالت اسپین صفر در معادله $(3-4)$ می‌رسیم به پنج معادله‌ی زیر:

$$\begin{aligned}
(-m - S)\phi_n^{(1)} + (i\partial_0 - V_1)\phi_n^{(2)} - i\partial_1\phi_n^{(3)} &= 0, \\
(i\partial_0 - V_1)\phi_n^{(1)} - m\phi_n^{(2)} &= 0, \\
i\partial_1\phi_n^{(1)} - m\phi_n^{(3)} &= 0, \\
-m\phi_n^{(4)} &= 0, \\
-m\phi_n^{(5)} &= 0.
\end{aligned} \tag{۵-۴}$$

از ترکیب این معادلات به نتایج زیر می‌رسیم:

$$\phi_n^{(4)} = 0, \phi_n^{(5)} = 0, \phi_n^{(3)} = \frac{i}{m} \frac{\partial \phi_n^{(1)}}{\partial x}, \phi_n^{(2)} = \frac{(E_n - V_1)}{m} \phi_n^{(1)}. \tag{۶-۴}$$

با جاگذاری این نتایج در معادله (۵-۴) به معادله زیر می‌رسیم:

$$(-m - S)\phi_n^{(1)} + \frac{(E_n - V_1)(E_n - V_1)}{m} \phi_n^{(1)} - i \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{i}{m} \frac{\partial \phi_n^{(1)}}{\partial x} \right] = 0 \tag{۷-۴}$$

بنابراین:

$$(-m - S)\phi_n^{(1)} + \frac{(E_n - V_1)(E_n - V_1)}{m} \phi_n^{(1)} + \left(\frac{1}{m} \frac{\partial^2 \phi_n^{(1)}}{\partial x^2} \right) = 0 \tag{۸-۴}$$

در نهایت رابطه‌ی زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{d^2 \phi_n^{(1)}}{dx^2} + \left[-m^2 - mS + E_n^2 - 2E_n V_1 + V_1^2 \right] \phi_n^{(1)} = 0. \tag{۹-۴}$$

۴-۱-۱) ضرایب عبور و بازتاب

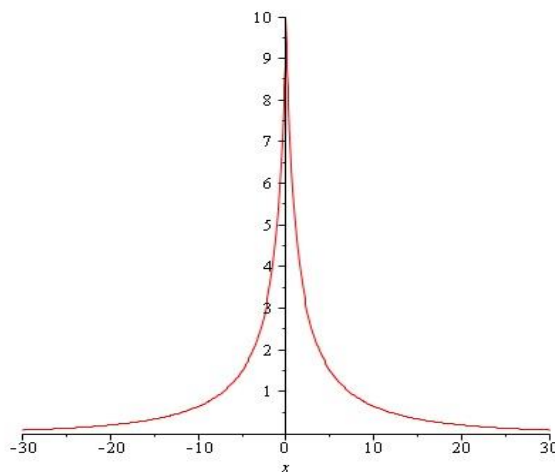
در این بخش ما به مطالعه‌ی حالت‌های پراکندگی در حضور پتانسیل هولسن می‌پردازیم:

همانگونه که در بالا اشاره شد فرم کلی پتانسیل هولسن برای حالت اسکالر و برداری به شکل زیر می‌باشد:

$$S = S_0 \left[\theta(-x) \frac{e^{\alpha x}}{1 - \tilde{q} e^{\alpha x}} + \theta(x) \frac{e^{-\alpha x}}{1 - \tilde{q} e^{-\alpha x}} \right] \quad (۴-۱۰-ا)$$

$$V_1 = V_{01} \left[\theta(-x) \frac{e^{\alpha x}}{1 - \tilde{q} e^{\alpha x}} + \theta(x) \frac{e^{-\alpha x}}{1 - \tilde{q} e^{-\alpha x}} \right] \quad (۴-۱۰-ب)$$

که S_0, V_{01}, α و $\tilde{q}$ پارامترهای ثابت پتانسیل هولسن می‌باشند.



شکل ۴-۱. نمودار پتانسیل برای $\alpha = 0.09$, $q = 0.9$

ما ابتدا به حل معادله دی-کی-پی به ازای $x < 0$ می‌پردازیم که با جاگذاری پتانسیلهای (۴-۱۰-ا) و

(۴-۱۰-ب) در معادله‌ی (۴-۹) می‌رسیم به:

$$\frac{d^2 \phi_n^{(1)L}}{dx^2} + \left[E_n^2 - m^2 - \frac{mS_0 e^{\alpha x} + 2E_n V_{01} e^{\alpha x}}{1 - \tilde{q} e^{\alpha x}} + \frac{V_{01}^2 e^{2\alpha x}}{(1 - \tilde{q} e^{\alpha x})^2} \right] \phi_n^{(1)L} = 0, \quad (12-4)$$

با تغییر متغیر $z = \tilde{q} e^{\alpha x}$ معادله (۱۲-۴) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi_n^{(1)L}}{dz^2} + \frac{(1-z)}{z(1-z)} \frac{d \phi_n^{(1)L}}{dz} + \frac{1}{[z(1-z)]^2} \left\{ \left(E_n + \frac{V_{01}}{\tilde{q}} \right)^2 - \left(m^2 - \frac{mS_0}{\tilde{q}} \right) \right\} \frac{z^2}{\alpha^2} - \\ 2 \left(E_n^2 - m^2 + \frac{mS_0}{2\tilde{q}} + \frac{EV_{01}}{\tilde{q}} \right) \frac{z}{\alpha^2} + \frac{(E_n^2 - m^2)}{\alpha^2} \} \phi_n^{(1)L} = 0, \end{aligned} \quad (13-4)$$

بنابر این تابع موج بدست آمده به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \phi_n^{(1)L} = C \tilde{q}^{\frac{\sqrt{(m^2 - E_n^2)}}{\alpha}} e^{i \sqrt{-m^2 + E_n^2} x} (1 - \tilde{q} e^{\alpha x})^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} \frac{V_{01}^2}{\tilde{q}^2 \alpha^2}}} P_n \left(\frac{2\sqrt{(m^2 - E_n^2)}}{\alpha}, \sqrt{1 - \frac{4V_{01}^2}{\tilde{q}^2 \alpha^2}} \right) (1 - 2\tilde{q} e^{\alpha x}) + \\ D \tilde{q}^{-\frac{\sqrt{(m^2 - E_n^2)}}{\alpha}} e^{-i \sqrt{-m^2 + E_n^2} x} (1 - \tilde{q} e^{\alpha x})^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} \frac{V_{01}^2}{\tilde{q}^2 \alpha^2}}} P_n \left(-\frac{2\sqrt{(m^2 - E_n^2)}}{\alpha}, \sqrt{1 - \frac{4V_{01}^2}{\tilde{q}^2 \alpha^2}} \right) (1 - 2\tilde{q} e^{\alpha x}), \end{aligned} \quad (14-4)$$

که $\phi_n^{(1)L}$ عبارت است از تابع موج فرودی (که به سمت راست حرکت می‌کند) به همراه تابع موج بازتابی (که به سمت چپ حرکت می‌کند). به طور خلاصه می‌توان تابع موج برای $x < 0$ را به این صورت نشان

داد:

$$\phi_n^{(1)L} = C \phi_n^{(1)L(inc)} + D \phi_n^{(1)L(ref)}, \quad (15-4)$$

حال به حل معادله دی-کی-پی با فرم پتانسیلی $S = S_0 \frac{e^{-\alpha x}}{1 - qe^{-\alpha x}}$ و $V_1 = V_0 \frac{e^{-\alpha x}}{1 - qe^{-\alpha x}}$ برای $x > 0$ می‌پردازیم.

در این مورد معادله (۹-۴) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d^2 \phi_n^{(1)R}}{dx^2} + \left[E_n^2 - m^2 - \frac{(mS_0 + 2E_n V_{01})e^{-\alpha x}}{1 - qe^{-\alpha x}} + \frac{(V_{01}^2)e^{-2\alpha x}}{(1 - qe^{-\alpha x})^2} \right] \phi_n^{(1)R} = 0, \quad (16-4)$$

با تغییر متغیر $y = qe^{-\alpha x}$ معادله (۱۶-۴) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \phi_n^{(1)R}}{dy^2} + \frac{(1-y)}{y(1-y)} \frac{d \phi_n^{(1)R}}{dy} + \frac{1}{[y(1-y)]^2} \left\{ \left[\left(E_n + \frac{V_{01}}{q} \right)^2 - \left(m^2 - \frac{mS_0}{q} \right) \right] \frac{y^2}{\alpha^2} - \right. \\ \left. 2 \left(E_n^2 - m^2 + \frac{mS_0 + 2E_n V_{01}}{2q} \right) \frac{y}{\alpha^2} + \frac{(E_n^2 - m^2)}{\alpha^2} \right\} \phi_n^{(1)R} = 0, \end{aligned} \quad (17-4)$$

بنابر این تابع موج بدست آمده به شکل زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \phi_n^{(1)R} = A \left((qe^{-\alpha x})^{\left[\frac{1}{\alpha} \sqrt{(m^2 - E_n^2)} \right]} (1 - qe^{-\alpha x})^{\left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{V_{01}^2}{q^2 \alpha^2}} \right]} P_n \left[\frac{2}{\alpha} \sqrt{(m^2 - E_n^2)}, \sqrt{1 - \frac{4(V_{01}^2)}{q^2 \alpha^2}} \right] (1 - 2qe^{-\alpha x}) \right) + \\ B \left((qe^{-\alpha x})^{\left[-\frac{1}{\alpha} \sqrt{(m^2 - E_n^2)} \right]} (1 - qe^{-\alpha x})^{\left[\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{V_{01}^2}{q^2 \alpha^2}} \right]} P_n \left(-\frac{2}{\alpha} \sqrt{m^2 - E_n^2}, \sqrt{1 - \frac{4(V_{01}^2)}{q^2 \alpha^2}} \right) (1 - 2qe^{-\alpha x}) \right), \end{aligned} \quad (18-4)$$

ما باید فرم مجانبی تابع موج بالا را تعیین کنیم از اینرو باید ضرایب عبور و بازتاب را پیدا کنیم. بنابراین

شکل تابع موج در $X \rightarrow \infty$ به صورت زیر می‌باشد

$$\phi_n^{(1)R}(x \rightarrow \infty) \approx B e^{i \sqrt{(-m^2 + E_n^2)x}}, \quad (19-4)$$

در حقیقت معادله (۱۹-۴) یک موج عبوری می‌باشد که از چپ به راست در حرکت است.

برای بدست آوردن ضرایب عبور و بازتاب ابتدا شرایط پیوستگی تابع موج و مشتق تابع موج را در $x=0$

بررسی می‌کنیم. یعنی:

$$\psi_R(x=0) = \psi_L(x=0), \quad (۲۰-۴)$$

$$\psi_R'(x=0) = \psi_L'(x=0)$$

از بررسی شرایط پیوستگی تابع موج و مشتق تابع موج در $x=0$ به نتایج زیر می‌رسیم:

$$B\phi_n^{(1)R(T)} = (C\phi_n^{(1)L(inc)} + D\phi_n^{(1)L(Ref)})_{x=0}, \quad (۲۱-۴)$$

و

$$B\phi_n^{(1)R(T)'} = (C\phi_n^{(1)L(inc)'} + D\phi_n^{(1)L(Ref)'})_{x=0}, \quad (۲۲-۴)$$

حال $\frac{D}{C}$ و $\frac{B}{C}$ را بدست می‌آوریم.

از معادله (۲۱-۴) داریم:

$$B = \left(\frac{C\phi_n^{(1)L(inc)} + D\phi_n^{(1)L(Ref)}}{\phi_n^{(1)R(T)}} \right)_{x=0} \quad (۲۳-۴)$$

با جاگذاری رابطه (۲۳-۴) در معادله (۲۲-۴) و انجام کمی عملیات جبری می‌رسیم به رابطه (۲۴-۴).

$$C(\phi_n^{(1)L(inc)}\phi_n^{(1)R(T)'} - \phi_n^{(1)L(inc)'}\phi_n^{(1)R(T)})_{x=0} = D(\phi_n^{(1)L(Ref)'}\phi_n^{(1)R(T)} - \phi_n^{(1)L(Ref)}\phi_n^{(1)R(T)'})_{x=0} \quad (۲۴-۴)$$

از رابطه (۲۴-۴) برای $\frac{B}{C}$ داریم:

$$\frac{B}{C} = \frac{\phi_n^{(1)L(Ref)'}(0)\phi_n^{(1)L(inc)}(0) - \phi_n^{(1)L(Ref)}(0)\phi_n^{(1)L(inc)'}(0)}{\phi_n^{(1)R(T)}(0)\phi_n^{(1)L(Ref)'}(0) - \phi_n^{(1)R(T)'}(0)\phi_n^{(1)L(Ref)}(0)}, \quad (۲۵-۴)$$

و به همین ترتیب برای $\frac{D}{C}$ داریم:

$$\frac{D}{C} = \frac{\varphi_n^{(1)R(T)'}(0)\varphi_n^{(1)L(inc)}(0) - \varphi_n^{(1)R(T)}(0)\varphi_n^{(1)L(inc)'}(0)}{\varphi_n^{(1)R(T)}(0)\varphi_n^{(1)L(Ref)'}(0) - \varphi_n^{(1)R(T)'}(0)\varphi_n^{(1)L(Ref)}(0)}, \quad (26-4)$$

برای مشخص کردن ضرایب عبور و بازتاب از چگالی شار جریان استفاده می‌کنیم.

$$J = \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \psi, \quad (27-4)$$

شارهای فرودی و بازتابی و عبوری به ترتیب به شکل $\vec{J}_{inc}$, $\vec{J}_{ref}$ و $\vec{J}_{trans}$ می‌باشند. بنابر این چگالی سمت

چپ ($x < 0$) عبارت است از $\vec{J}_L = \vec{J}_{inc} + \vec{J}_{ref}$ و سمت راست ($x > 0$) عبارت است از $\vec{J}_R = \vec{J}_{trans}$.

برای به دست آوردن شار فرودی با استفاده از رابطه (27-4) و جاگذاری β^1 داریم:

$$J_{inc} = \frac{1}{2} \left(\phi_n^{(1)*}, \phi_n^{(2)*}, -\phi_n^{(3)*}, -\phi_n^{(4)*}, -\phi_n^{(5)*} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_n^{(1)} \\ \phi_n^{(2)} \\ \phi_n^{(3)} \\ \phi_n^{(4)} \\ \phi_n^{(5)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (\phi_n^{(1)} \phi_n^{(3)*} - \phi_n^{(1)*} \phi_n^{(3)}) \quad (28-4)$$

بنابراین برای شار فرودی $\phi_n^{(1)L} = C \varphi_n^{(1)L(inc)}$ (تنها موج فرودی را در نظر می‌گیریم) می‌باشد. و داشتیم

$$\phi_n^{(3)} = \frac{i}{m} \frac{\partial \phi_n^{(1)}}{\partial x}$$

پس با جا گذاری این روابط در (28-4) به رابطه‌ی (29-4) می‌رسیم:

$$J_{inc} = \frac{1}{2} |C|^2 \left(\frac{i}{m} \right) \left(\varphi_n^{(1)L(inc)} \varphi_n^{(1)L(inc)*} - \varphi_n^{(1)L(inc)'} \varphi_n^{(1)L(inc)'} \right), \quad (29-4)$$

و به همین ترتیب برای شارهای بازتابی و عبوری به ترتیب داریم:

$$J_{ref} = \frac{1}{2} |D|^2 \left(\frac{i}{m} \right) \left(\varphi_n^{(1)L(Ref)} \varphi_n^{(1)L(Ref)*} - \varphi_n^{(1)L(Ref)'} \varphi_n^{(1)L(Ref)'} \right), \quad (30-4)$$

$$J_{trans} = \frac{1}{2} |B|^2 \left(\frac{i}{m} \right) \left(\varphi_n^{(1)R(T)} \varphi_n^{(1)R(T)*} - \varphi_n^{(1)R(T)'} \varphi_n^{(1)R(T)'} \right), \quad (31-4)$$

بنابراین برای ضرایب بازتابی و عبوری روابط زیر را بدست می‌آوریم:

$$|R| = \left| \frac{J_{ref}}{J_{inc}} \right| = \frac{|D|^2}{|C|^2} \frac{\left(\varphi_n^{(1)L(Ref)} \varphi_n^{(1)L(Ref)*} - \varphi_n^{(1)L(Ref)'} \varphi_n^{(1)L(Ref)*} \right)}{\left(\varphi_n^{(1)L(inc)} \varphi_n^{(1)L(inc)*} - \varphi_n^{(1)L(inc)'} \varphi_n^{(1)L(inc)*} \right)}, \quad (32-4)$$

$$|T| = \left| \frac{J_{trans}}{J_{inc}} \right| = \frac{|B|^2}{|C|^2} \frac{\left(\varphi_n^{(1)R(T)} \varphi_n^{(1)R(T)*} - \varphi_n^{(1)R(T)'} \varphi_n^{(1)R(T)*} \right)}{\left(\varphi_n^{(1)L(inc)} \varphi_n^{(1)L(inc)*} - \varphi_n^{(1)L(inc)'} \varphi_n^{(1)L(inc)*} \right)}, \quad (33-4)$$

که با افزایش انرژی ذره انتظار داریم ضریب عبوری بیشتر و ضریب بازتابی کاهش یابد اما در هر حال

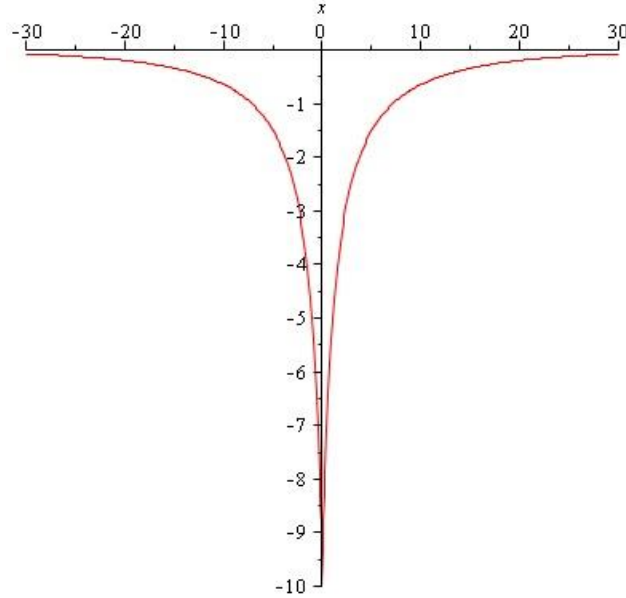
مجموع ضرایب عبوری و بازتابی برابر با یک می‌باشد.

حال به بررسی ضرایب عبور و بازتاب از دیدگاه مکانیک کلاسیک و کوانتومی به ازای حالات مختلف می‌پردازیم.

دیدگاه مکانیک کلاسیک هنگامی که انرژی ذره از ارتفاع سد پتانسیل بیشتر باشد بر این است که به دلیل پایداری انرژی، ذره در گذار از سد پتانسیل کند می‌شود یعنی سرعتش کم می‌شود اما هرگز بازتابیده نمی‌شود اما مکانیک کوانتومی بیان می‌کند که کسری از ذرات فرودی به علت خاصیت موجی ذره، بازتابیده می‌شوند. در مورد اینکه انرژی ذره از ارتفاع سد پتانسیل کمتر باشد طبق توصیف مکانیک کلاسیک بازتاب کلی داریم یعنی اینکه سد به طور کامل مانع از عبور ذرات می‌شود در حقیقت شار عبوری صفر می‌باشد. اما مکانیک کوانتومی بیان می‌کند که قسمتی از موج به درون ناحیه ممنوع نفوذ می‌کند که همان پدیده تونل زنی می‌باشد.

۴-۱-۲) حالت‌های مقید

در این بخش حل حالت مقید معادله دی-کی-پی را برای پتانسیل هولسن بررسی می‌کنیم.



شکل ۴-۲. نمودار پتانسیل برای حالت مقید

برای مورد $x < 0$ معادله‌ی (۴-۱۴) را به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$\phi_n^{(1)L(inc)} = C\tilde{q}^{\frac{\sqrt{(m^2-E_n^2)}}{\alpha}} e^{i\sqrt{-m^2+E_n^2}x} (1-\tilde{q}e^{\alpha x})^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{V_{01}^2}{q^2\alpha^2}}} P_n\left(\frac{2\sqrt{(m^2-E_n^2)}}{\alpha}, \sqrt{1 - \frac{4V_{01}^2}{q^2\alpha^2}}\right) (1-2\tilde{q}e^{\alpha x}) \quad (۴-۳۴)$$

و برای $x > 0$ داریم:

$$\phi_n^{(1)R} = A \left((qe^{-\alpha x})^{\frac{\sqrt{(m^2-E_n^2)}}{\alpha}} (1-qe^{-\alpha x})^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{V_{01}^2}{q^2\alpha^2}}} P_n\left(\frac{2\sqrt{(m^2-E_n^2)}}{\alpha}, \sqrt{1 - \frac{4V_{01}^2}{q^2\alpha^2}}\right) (1-2qe^{-\alpha x}) \right), \quad (۴-۳۵)$$

با اعمال شرایط پیوستگی روی $\phi_n^{(1)R}$ و $\phi_n^{(1)L}$ در $x=0$ بدست می‌آوریم:

$$A\varphi_n^{(1)R}(x=0)=C\varphi_n^{(1)L(inc)}(x=0), \quad (36-4)$$

9

$$A\varphi_n^{(1)R'}(x=0)=C\varphi_n^{(1)L(inc)'}(x=0), \quad (37-4)$$

از تقسیم دو رابطه بالا به عبارت زیر می‌رسیم:

$$\frac{\varphi_n^{(1)R}}{\varphi_n^{(1)R'}} - \frac{\varphi_n^{(1)L(inc)}}{\varphi_n^{(1)L(inc)'}} = 0. \quad (38-4)$$

که ویژه‌مقادیر انرژی می‌تواند از معادله‌ی (38-4) محاسبه شود.

در این حالت با افزایش عدد کوانتومی، انرژی ذره از منفی سیر صعودی پیدا کرده تا جایی که انرژی ذره

به صفر میل می‌کند که در این صورت ذره از حالت مقید به حالت آزاد می‌رود.

۲-۴- پراکندگی بوزون‌های اسپین یک در یک بعد

در این بخش به پراکندگی ذرات اسپین یک در حضور پتانسیل کاسپ اصلاح شده^{۱۷} در $(1+1)$ بعد فضا - زمانی می‌پردازیم. با استفاده از برهمکنش $U = PS(x) + \beta^0 PV(x)$ و جاگذاری در معادله $(3-4)$ به نتیجه‌ی زیر می‌رسیم.

$$(i\beta^0\partial_0 + i\beta^1\partial_1 - m - PS(x) - \beta^0 PV(x))\psi_n(x) = 0 \quad (39-4)$$

با جاگذاری ماتریسهای β^0 و β^1 و همچنین ماتریس تصویر برای حالت اسپین صفر در معادله $(39-4)$ می‌رسیم به ده معادله‌ی زیر:

$$(-m - S)\psi_n^{(1)} + i\partial_1\psi_n^{(5)} = 0, \quad (\bar{1}-40-4)$$

$$(-m - S)\psi_n^{(1)} + E_n\psi_n^{(5)} = 0 \quad (ب-40-4)$$

$$(-m - S)\psi_n^{(3)} + E_n\psi_n^{(6)} - i\partial_1\psi_n^{(10)} = 0 \quad (پ-40-4)$$

$$(-m - S)\psi_n^{(4)} + E_n\psi_n^{(7)} - i\partial_1\psi_n^{(9)} = 0 \quad (ت-40-4)$$

$$-m\psi_n^{(5)} + (E_n - V)\psi_n^{(2)} - i\partial_1\psi_n^{(1)} = 0 \quad (ج-40-4)$$

$$-m\psi_n^{(6)} + (E_n - V)\psi_n^{(3)} = 0 \quad (چ-40-4)$$

$$-m\psi_n^{(7)} + (E_n - V)\psi_n^{(4)} = 0 \quad (ح-40-4)$$

$$-m\psi_n^{(8)} = 0 \quad (د-40-4)$$

¹⁷ Modified Cusp

$$-m\psi_n^{(9)} - i\partial_1\psi_n^{(4)} = 0 \quad (4-40-ز)$$

$$-m\psi_n^{(10)} + i\partial_1\psi_n^{(3)} = 0 \quad (4-40-م)$$

از ترکیب این معادلات به نتایج زیر می‌رسیم:

$$\psi_n^{(1)} = \frac{i}{m+S}\partial_1\psi_n^{(5)}, \psi_n^{(2)} = \frac{E_n}{m+S}\psi_n^{(5)}, \psi_n^{(3)} = \frac{m}{E_n-V}\psi_n^{(6)}, \psi_n^{(7)} = \frac{E_n-V}{m}\psi_n^{(4)},$$

$$\psi_n^{(8)} = 0, \psi_n^{(9)} = -\frac{i}{m}\partial_1\psi_n^{(5)}, \psi_n^{(10)} = \frac{i}{m}\partial_1\psi_n^{(3)} \quad (4-41)$$

با جا گذاری روابط (4-41) در معادلات (4-40) به ۳ معادله مشابه درجه ۲ به شکل زیر می‌رسیم.

$$\frac{d^2\psi_n^{(4)}}{dx^2} + (E_n^2 - E_nV - m^2 - mS)\psi_n^{(4)} = 0$$

$$\frac{d^2\psi_n^{(5)}}{dx^2} + (E_n^2 - E_nV - m^2 - mS)\psi_n^{(5)} = 0 \quad (4-42)$$

$$\frac{d^2\psi_n^{(6)}}{dx^2} + (E_n^2 - E_nV - m^2 - mS)\psi_n^{(6)} = 0$$

بررسی ۳ معادله بالا نتایج یکسانی را به همراه دارد (چون طیف انرژی برای ۳ معادله بالا باید نتایج

یکسانی دهد یعنی انرژی باید تک گانه باشد) پس معادله (4-42) را بررسی می‌کنیم.

$$\frac{d^2\psi_n^{(4)}}{dx^2} + (E_n^2 - E_nV - m^2 - mS)\psi_n^{(4)} = 0 \quad (4-42)$$

ما ابتدا به حل معادله دی-کی-پی به ازای $x < 0$ می‌پردازیم

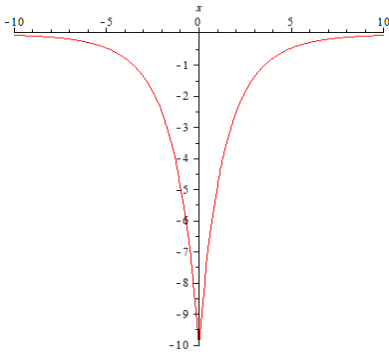
۴-۲-۱- ضرایب عبور و بازتاب

در این بخش ما به مطالعه‌ی حالت‌های پراکندگی در حضور پتانسیل کاسپ اصلاح شده می‌پردازیم. فرم کلی پتانسیل کاسپ اصلاح شده برای حالت اسکالر و برداری به شکل زیر می‌باشد:

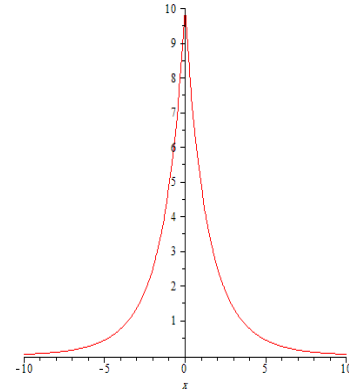
$$S = S_0 \left(e^{\frac{|x|}{a}} + e^{\frac{2|x|}{a}} \right) \quad (۴-۴۳-ا)$$

$$V = V_0 \left(e^{\frac{|x|}{a}} + e^{\frac{2|x|}{a}} \right) \quad (۴-۴۳-ب)$$

که S_0, V_0 پارامترهای ثابت پتانسیل کاسپ می‌باشند.



شکل ۴-۴. نمودار پتانسیل برای $V_0 = -5, a = 2$ برای حالت



شکل ۴-۳. نمودار پتانسیل برای $V_0 = 5, a = 2$

$$\frac{d^2 \psi_n^{(4)L}}{dx^2} + \left[E_n^2 - m^2 - (E_n V_0 + m S_0) e^{\frac{x}{a}} - (E_n V_0 + m S_0) e^{\frac{2x}{a}} \right] \psi_n^{(4)L} = 0 \quad (۴-۴۴)$$

با تغییر متغیر $y = a\sqrt{4(E_n V_0 + m S_0)} e^{x/a}$ معادله (۴-۴۴) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^2 \psi_n^{(4)L}}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{d \psi_n^{(4)L}}{dy} + \left[\frac{(E_n^2 - m^2)a^2}{y^2} + \frac{-\frac{1}{2}a\sqrt{E_n V_0 + mS_0}}{y} - \frac{1}{4} \right] \psi_n^{(4)L} = 0 \quad (45-4)$$

با جاگذاری $\psi_n^{(4)L}(y) = y^{-\frac{1}{2}} \phi_n^{(4)L}(y)$ در معادله‌ی (۴۵-۴)، معادله‌ی دیفرانسیلی ویتاکر را به صورت زیر بدست می‌آوریم.

$$\frac{d^2 \phi_n^{(4)L}}{dy^2} + \left[\frac{\frac{1}{4} + (E_n^2 - m^2)a^2}{y^2} + \frac{-\frac{1}{2}a\sqrt{E_n V_0 + mS_0}}{y} - \frac{1}{4} \right] \phi_n^{(4)L} = 0 \quad (46-4)$$

صورت کلی تابع ویتاکر به فرم زیر می‌باشد.

$$\frac{d^2 \phi_n^{(4)L}}{dy^2} + \left[\frac{\frac{1}{4} + \mu}{y^2} + \frac{\kappa}{y} - \frac{1}{4} \right] \phi_n^{(4)L} = 0 \quad (46-4)$$

با $\kappa = -\frac{1}{2}a\sqrt{E_n V_0 + mS_0}$, $\mu = ia\sqrt{E_n^2 - m^2}$ که با حل معادله‌ی (۴۶-۴) به جواب زیر می‌رسیم.

$$\psi_n^{(4)L}(y) = A_1 y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(y) + A_2 y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(y) \quad (47-4)$$

جایی که $M_{\kappa, \mu}(y)$ تابع ویتاکر می‌باشد و به فرم زیر است.

$$M_{\kappa, \mu}(y) = e^{-\frac{1}{2}y} y^{\mu + \frac{1}{2}} F\left(\mu - \kappa + \frac{1}{2}; 1 + 2\mu; y\right) \quad (48-4)$$

اگر قصد داشته باشیم ضرایب عبور و بازتاب را مطالعه کنیم، ابتدا باید رفتار مجانبی تابع موج را هنگامی که X به بینهایت میل می کند تعیین کنیم. که در این صورت برای تابع موج سمت چپ داریم:

$$\psi_n^{(4)L}(x \rightarrow -\infty) = A_1 \left(a \sqrt{4(E_n V_0 + m S_0)} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} + A_2 \left(a \sqrt{4(E_n V_0 + m S_0)} \right)^{-\mu} e^{-\frac{x\mu}{a}}. \quad (49-4)$$

حال به حل معادله دی-کی-پی برای $x > 0$ می پردازیم. در این مورد معادله ی (42-4) به فرم زیر در می آید.

$$\frac{d^2 \psi_n^{(4)R}}{dx^2} + \left[E_n^2 - m^2 - (E_n V_0 + m S_0) e^{\frac{-x}{a}} - (E_n V_0 + m S_0) e^{\frac{-2x}{a}} \right] \psi_n^{(4)R} = 0 \quad (50-4)$$

با تغییر متغیر $z = a \sqrt{4(E_n V_0 + m S_0)} e^{-x/a}$ معادله (50-4) به فرم زیر تبدیل می شود:

$$\frac{d^2 \psi_n^{(4)R}}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d \psi_n^{(4)R}}{dz} + \left[\frac{(E_n^2 - m^2) a^2}{z^2} + \frac{-\frac{1}{2} a \sqrt{E_n V_0 + m S_0}}{z} - \frac{1}{4} \right] \psi_n^{(4)R} = 0 \quad (51-4)$$

با جاگذاری $\psi_n^{(4)R}(z) = z^{-\frac{1}{2}} U_n^{(4)R}(z)$ در معادله ی (51-4)، معادله ی دیفرانسیلی ویتاکر را به صورت زیر بدست می آوریم.

$$\frac{d^2 U_n^{(4)R}}{dz^2} + \left[\frac{\frac{1}{4} + (E_n^2 - m^2) a^2}{z^2} + \frac{-\frac{1}{2} a \sqrt{E_n V_0 + m S_0}}{z} - \frac{1}{4} \right] U_n^{(4)R} = 0 \quad (52-4)$$

که طبق تابع ویتاکر، $\kappa = -\frac{1}{2} a \sqrt{E_n V_0 + m S_0}$ ، $\mu = i a \sqrt{E_n^2 - m^2}$ می باشد.

بنابراین حل معادله ی (52-4) به فرم زیر می باشد.

$$\psi_n^{(4)R} = A_3 z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(z) + A_4 z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z). \quad (53-4)$$

که فرم مجانبی تابع بالا در بینهایت به شکل زیر می باشد.

$$\psi_n^{(4)R}(x \rightarrow +\infty) = A_4 \left(a \sqrt{4(E_n V_0 + m S_0)} \right)^{-\mu} e^{\frac{x\mu}{a}}. \quad (54-4)$$

برای بدست آوردن ضرایب عبور و بازتاب ابتدا شرایط پیوستگی تابع موج و مشتق تابع موج را در $x=0$

بررسی می کنیم. یعنی:

$$\begin{aligned} \psi_R(x=0) &= \psi_L(x=0), \\ \psi'_R(x=0) &= \psi'_L(x=0) \end{aligned} \quad (55-4)$$

از بررسی شرایط پیوستگی تابع موج و مشتق تابع موج در $x=0$ به نتایج زیر می رسیم:

$$\left(A_1 y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(y) + A_2 y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(y) \right)_{x=0} = \left(A_4 z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z) \right)_{x=0} \quad (56-4)$$

و

$$\left(A_1 y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(y) + A_2 y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(y) \right)'_{x=0} = \left(A_4 z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z) \right)'_{x=0} \quad (57-4)$$

حال از دو معادله ی بالا $\frac{A_2}{A_1}$ و $\frac{A_4}{A_1}$ را بدست می آوریم.

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{\left(y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(y) \right)' \left(z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z) \right) - \left(y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(y) \right) \left(z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z) \right)'}{\left(y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(y) \right) \left(z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z) \right)' - \left(y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(y) \right)' \left(z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z) \right)} \right)_{x=0} \quad (58-4)$$

9

$$\frac{A_4}{A_1} = \left(\frac{\left(y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(y) \right)' \left(y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(y) \right) - \left(y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(y) \right) \left(y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(y) \right)'}{\left(y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(y) \right) \left(z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z) \right)' - \left(y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(y) \right)' \left(z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, -\mu}(z) \right)} \right)_{x=0} \quad (59-4)$$

که با جاگذاری بدست می آوریم:

$$\frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{2(a\sqrt{E_n V_0 + mS_0} - \kappa - \frac{1}{2})\xi_1 \xi_2 + (\frac{1}{2} + \mu + \kappa)\xi_2 \xi_3 + (\frac{1}{2} - \mu + \kappa)\xi_1 \xi_4}{(1 + (2a\sqrt{E_n V_0 + mS_0})^{-2\mu} + ((a^2 - a)\sqrt{E_n V_0 + mS_0} - \kappa a + \kappa))\xi_2^2 + ((a-1)(2a\sqrt{E_n V_0 + mS_0})^{-2\mu}(1 - \mu + \kappa))\xi_2 \xi_4} \right)_{x=0} \quad (60-4)$$

$$\frac{A_4}{A_1} = \left(\frac{(1 - 2a\sqrt{E_n V_0 + mS_0} + 2\kappa)\xi_1 \xi_2 + (\frac{1}{2} + \mu + \kappa)\xi_2 \xi_3 + (-\frac{1}{2} + \mu - \kappa)\xi_1 \xi_4}{(1 + (2a\sqrt{E_n V_0 + mS_0})^{-2\mu} + ((a^2 - a)\sqrt{E_n V_0 + mS_0} - \kappa a + \kappa))\xi_2^2 + ((a-1)(2a\sqrt{E_n V_0 + mS_0})^{-2\mu}(1 - \mu + \kappa))\xi_2 \xi_4} \right)_{x=0} \quad (61-4)$$

جایی که $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ عبارتند از:

$$\xi_1 = F\left(\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; 2a\sqrt{E_n V_0 + mS_0}\right)$$

$$\xi_2 = F\left(\frac{1}{2} - \mu - \kappa; 1 - 2\mu; 2a\sqrt{E_n V_0 + mS_0}\right)$$

$$\xi_3 = F\left(-\frac{1}{2} + \mu - \kappa; 1 + 2\mu; 2a\sqrt{E_n V_0 + mS_0}\right)$$

$$\xi_4 = F\left(-\frac{1}{2} - \mu - \kappa; 1 - 2\mu; 2a\sqrt{E_n V_0 + mS_0}\right)$$

(62-4)

برای مشخص کردن ضرایب عبور و بازتاب از چگالی شار جریان استفاده می‌کنیم.

$$J = \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \psi, \quad (۶۳-۴)$$

شارهای فرودی و بازتابی و عبوری به ترتیب عبارتند از $\vec{J}_{trans}, \vec{J}_{ref}, \vec{J}_{inc}$. بنابراین چگالی شار برای سمت

$$\text{چپ و راست به ترتیب عبارتند از } \vec{J}_R = \vec{J}_{trans} \text{ و } \vec{J}_L = \vec{J}_{inc} + \vec{J}_{ref}.$$

با استفاده از رابطه (۶۳-۴) رابطه کلی برای شار به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$J = \frac{1}{2} \left(-\psi_n^{1*} \psi_n^5 - \psi_n^{3*} \psi_n^{10} + \psi_n^{4*} \psi_n^9 - \psi_n^{5*} \psi_n^1 + \psi_n^{9*} \psi_n^4 - \psi_n^{10*} \psi_n^3 \right) \quad (۶۴-۴)$$

پس برای چگالی شار فرودی داریم:

$$\psi_n^{(4)L(inc)} = \psi_n^{(5)L(inc)} = \psi_n^{(6)L(inc)} = A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x \mu}{a}} \quad (۶۵-۴)$$

که با استفاده از معادلات (۴۱-۴) داریم:

$$\begin{aligned} \psi_n^{(1)L(inc)} &= \frac{i}{m+s} \psi_n^{(5)L(inc)'} , \quad \psi_n^{(1)L(inc)*} = -\frac{i}{m+s} \psi_n^{(5)L(inc)'}^* , \quad \psi_n^{(3)L(inc)} = \frac{m}{E_n - V} \psi_n^{(6)L(inc)} \\ \psi_n^{(3)L(inc)*} &= \frac{m}{E_n - V} \psi_n^{(6)L(inc)*} , \quad \psi_n^{(10)L(inc)} = \frac{i}{E_n - V} \psi_n^{(6)L(inc)'} , \quad \psi_n^{(10)L(inc)*} = \frac{-i}{E_n - V} \psi_n^{(6)L(inc)'}^* \\ \psi_n^{(9)L(inc)} &= \frac{-i}{m} \psi_n^{(4)L(inc)'} , \quad \psi_n^{(9)L(inc)*} = \frac{-i}{m} \psi_n^{(4)L(inc)'}^* \end{aligned} \quad (66-4)$$

با استفاده از روابط (۶۵-۴) و (۶۶-۴) و جاگذاری در رابطه (۶۴-۴) برای شار فرودی بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
\vec{J}_{inc} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{i}{m+S} \left(A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} \right) \vec{\nabla} \left(A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} \right)^* - \right. \\
& \frac{im}{(E_n - V)^2} \left(A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} \right)^* \vec{\nabla} \left(A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} \right) \\
& - \frac{i}{m} \left(A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} \right)^* \nabla \left(A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} \right) - \\
& \frac{i}{m+S} \left(A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} \right)^* \nabla \left(A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} \right) \quad (67-4) \\
& + \frac{i}{m} \left(A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} \right) \vec{\nabla} \left(A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} \right)^* + \\
& \left. \frac{im}{(E_n - V)^2} \left(A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} \right) \vec{\nabla} \left(A_1 \left(2a \sqrt{E_n V_0 + m S_0} \right)^\mu e^{\frac{x\mu}{a}} \right)^* \right\}
\end{aligned}$$

هنگامی که X به سمت منهای بینهایت میل می کند Y به سمت صفر و برای شار فرودی در منهای بینهایت داریم:

$$J_{inc}(x \rightarrow -\infty) = \frac{-i\mu}{a} |A_1|^2 \left\{ \frac{1}{m+S} + \frac{m}{(E_n - V)^2} + \frac{1}{m} \right\} \quad (68-4)$$

و به همین ترتیب برای شارهای بازتابی و عبوری داریم:

$$J_{ref}(x \rightarrow -\infty) = \frac{i\mu}{a} |A_2|^2 \left\{ \frac{1}{m+S} + \frac{m}{(E_n - V)^2} + \frac{1}{m} \right\} \quad (69-4)$$

$$J_{trans}(x \rightarrow \infty) = \frac{-i\mu}{a} |A_4|^2 \left\{ \frac{1}{m+S} + \frac{m}{(E_n - V)^2} + \frac{1}{m} \right\} \quad (70-4)$$

در نهایت برای ضرایب عبور و بازتاب داریم:

$$|R| = \left| \frac{J_{Ref}}{J_{inc}} \right| = \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} \quad (۷۱-۴)$$

$$|T| = \left| \frac{J_{trans}}{J_{inc}} \right| = \frac{|A_4|^2}{|A_1|^2} \quad (۷۲-۴)$$

۴-۲-۲- حالت‌های مقید

در این بخش به حل معادله دی-کی-پی در حضور پتانسیل کاسپ برای حالت مقید می‌پردازیم.

در این حالت معادله (۴۸-۴) برای $x < 0$ تبدیل می‌شود به رابطه زیر:

$$\psi_n^{(4)L(inc)} = A_1 y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(y) \quad (۷۳-۴)$$

و برای $x > 0$ داریم:

$$\psi_n^{(4)R(Ref)} = A_3 z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(z) \quad (۷۴-۴)$$

با استفاده از شرایط پیوستگی تابع موج و مشتق تابع موج در $x=0$ داریم:

$$\left(A_1 y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(y) \right)_{x=0} = \left(A_3 z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(z) \right)_{x=0} \quad (۷۵-۴)$$

9

$$A_1 \left(y^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(y) \right)'_{x=0} = A_3 \left(z^{-\frac{1}{2}} M_{\kappa, \mu}(z) \right)'_{x=0} \quad (۷۶-۴)$$

از دو معادله بالا بدست می‌آوریم:

$$\frac{\left(y^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,\mu}(y)\right)_{x=0}}{\left(y^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,\mu}(y)\right)'_{x=0}} - \frac{\left(z^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,\mu}(z)\right)_{x=0}}{\left(z^{-\frac{1}{2}}M_{\kappa,\mu}(z)\right)'_{x=0}} = 0 \quad (77-4)$$

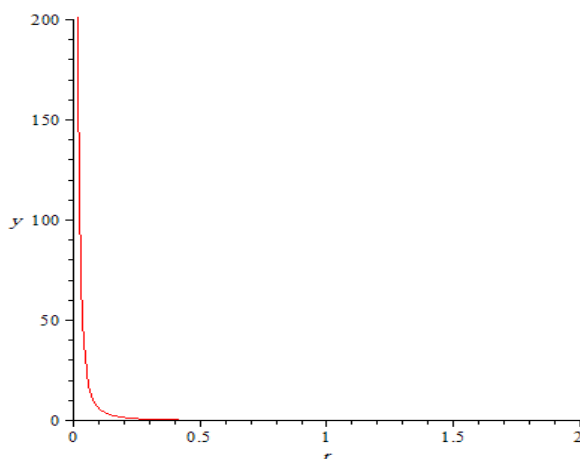
که با جا گذاری روابط در (77-4) رابطه (78-4) را بدست می آوریم.

$$\left(\frac{1-2\sqrt{E_n V_0 + m S_0 a + 2\kappa}}{a}\right)\xi_1 + \left(\frac{1+2\mu+2\kappa}{a}\right)\xi_3 = 0 \quad (78-4)$$

که از رابطه (78-4) ویژه مقادیر انرژی قابل محاسبه می باشد.

۴-۳- انتقال فاز

در این مورد به بررسی معادله دی-کی-پی در حضور پتانسیل دنگ-فان^{۱۸} در (۱+۳) بعد فضا-زمانی برای ذرات اسپین یک می‌پردازیم. پتانسیل دنگ-فان در r از صفر تا بی‌نهایت به شکل زیر می‌باشد.



شکل ۴-۵. نمودار پتانسیل دنگ-فان برای $\alpha = 4, V_0 = 0, V_1 = 1, V_2 = 1, a = 2$

برای این منظور با استفاده از معادله‌ی (۱-۳) و استخراج معادله ماکسول گونه برای حالت خاص مانند معادله (۹-۳) و جاگذاری پتانسیل دنگ-فان داریم:

$$\nabla^2 \vec{F}(\vec{r}) - E_{n,l} V_2 \vec{F}(\vec{r}) + (E_{n,l}^2 - m^2) \vec{F}(\vec{r}) = 0, \quad (۷۹-۴)$$

به طوریکه برای F و ∇^2 داریم:

$$F = F(r) = R(r). \quad (۸۰-۴)$$

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}. \quad (۸۱-۴)$$

¹⁸ Deng-Fan

با جاگذاری معادلات (۸۰-۴) و (۸۱-۴) در معادله (۷۹-۴) به معادله زیر می‌رسیم:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \vec{F} - E_{n,l} \left(V_0 + \frac{V_1}{e^{ar}-1} + \frac{V_2}{(e^{ar}-1)^2} \right) \vec{F} + (E_{n,l}^2 - m^2) \vec{F} = 0, \quad (۸۲-۴)$$

که با جدا کردن متغیرها داریم:

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR(r)}{dr} - E_{n,l} V_0 R(r) - \frac{E_{n,l} V_1 R(r)}{e^{ar}-1} - \frac{E_{n,l} V_2 R(r)}{(e^{ar}-1)^2} + (E_{n,l}^2 - m^2) R(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} R(r) = 0, \quad (۸۳-۴)$$

با انتخاب تغییر متغیر $R(r) = \frac{1}{r} U(r)$ روابط زیر را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} dR &= -\frac{1}{r^2} U(r) dr + \frac{1}{r} dU \\ \frac{dR}{dr} &= -\frac{1}{r^2} U(r) + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} \\ \frac{d^2 R}{dr^2} &= \frac{1}{r} \frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{2}{r^2} \frac{dU}{dr} + \frac{2}{r^3} U \end{aligned} \quad (۸۴-۴)$$

با جاگذاری روابط (۸۴-۴) در معادله (۸۳-۴) و سپس ضرب r در آن به معادله زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \left[-E_{n,l} V_0 - \frac{E_{n,l} V_1}{e^{ar}-1} - \frac{E_{n,l} V_2}{(e^{ar}-1)^2} + (E_{n,l}^2 - m^2) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] U(r) = 0, \quad (۸۵-۴)$$

برای رهایی از بخش مرکز گرا از تقریب $\frac{1}{r^2} \approx \alpha^2 \left(d_0 + \frac{e^{-ar}}{1-e^{-ar}} + \frac{e^{-2ar}}{(1-e^{-ar})^2} \right)$ استفاده می‌کنیم. که با

استفاده از این تقریب در معادله (۸۵-۴) به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\frac{d^2 U(r)}{dr^2} + \left[-E_{n,l} V_0 - \frac{E_{n,l} V_1}{e^{ar} - 1} - \frac{E_{n,l} V_2}{(e^{ar} - 1)^2} + (E_{n,l}^2 - m^2) - \alpha^2 l(l+1) \left(\frac{d_0 (1 - e^{-ar})^2 + e^{-ar}}{(1 - e^{-ar})^2} \right) \right] U(r) = 0, \quad (۸۶-۴)$$

که با استفاده از تغییر متغیر $s = 1 - e^{-ar}$ و روابط زیر به معادله (۸۸-۴) می‌رسیم.

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dr} &= \alpha e^{-ar} \\ \frac{dU}{dr} &= \frac{dU}{ds} \frac{dr}{ds} = \alpha e^{-ar} \frac{dU}{ds} \\ \frac{d^2 U}{dr^2} &= -\alpha^2 e^{-2ar} \frac{dU}{ds} + \alpha^2 e^{-2ar} \frac{d^2 U}{ds^2} \end{aligned} \quad (۸۷-۴)$$

$$s(1-s) \frac{d^2 U(s)}{ds^2} - s \frac{dU(s)}{ds} + \frac{1}{s(1-s)} [Ms^2 + Ns + P] U(s) = 0, \quad (۸۸-۴)$$

که برای مقادیر M و N و P داریم:

$$\begin{aligned} M &= \frac{E_{n,l}(-V_0 + V_1 - V_2) + (E_{n,l}^2 - m^2) - \alpha^2 d_0 l(l+1)}{\alpha^2} \\ N &= \frac{E_{n,l}(-V_1 + 2V_2) + \alpha^2 l(l+1)}{\alpha^2} \\ P &= \frac{-E_{n,l} V_2 + l(l+1)}{\alpha^2} \end{aligned} \quad (۸۹-۴)$$

با قرار دادن تابع موج به شکل رابطه‌ی (۹۰-۴) و قرار دادن در معادله‌ی (۸۸-۴) می‌رسیم به:

$$U(s) = s^{\mu'} (1-s)^{\nu'} g(s) \quad (۹۰-۴)$$

$$s(1-s) \frac{d^2 g}{ds^2} + [2\mu' - (2\mu' + 2\nu' + 1)s] \frac{dg}{ds} + [\mu'^2 + \nu'^2 - 2\mu'\nu' + M] g(s) = 0 \quad (۹۱-۴)$$

که معادله (۹۱-۴) می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$s(1-s)\frac{d^2g}{ds^2} + [c' - (1+a'+b')s]\frac{dg}{ds} + a'b'g(s) = 0 \quad (92-4)$$

معادله (92-4) فرم کلی معادله‌ی فوق هندسی است و حل آن به صورت تابع فوق هندسی است. بنابراین داریم:

$$g(s) = {}_2F_1(a', b', c'; s) \quad (93-4)$$

که:

$$\begin{aligned} a' &= \frac{1}{2}(2\mu' + 2\nu' + 2\sqrt{-M}) = \frac{1}{2}(2\mu' - 2i\sqrt{M+N+P} + \sqrt{-4M}) \\ b' &= \frac{1}{2}(2\mu' + 2\nu' - 2\sqrt{-M}) = \frac{1}{2}(2\mu' - 2i\sqrt{M+N+P} - \sqrt{-4M}) \\ c' &= 2\mu' \end{aligned} \quad (94-4)$$

و

$$\begin{aligned} \nu'^2 &= -(M+N+P) \Rightarrow \nu' = -ik, \quad k = \sqrt{M+N+P} \\ \mu'^2 - \mu' &= -P \Rightarrow \mu' = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4P}) \end{aligned} \quad (95-4)$$

بنابراین تابع موج کلی سیستم عبارت است از:

$$U(s) = s^{\mu'}(1-s)^{\nu'} g(s) = s^{\mu'}(1-s)^{\nu'} {}_2F_1(a', b', c'; s) \quad (96-4)$$

یا:

$$U(r) = N_{n,l} (1-e^{-\alpha r})^{\mu'} e^{i\alpha k r} {}_2F_1(a', b', c'; s) \quad (97-4)$$

برای بدست آوردن یک حل متناهی a' یا b' باید مقدار صحیح منفی باشند. این مورد ایجاب می‌کند که:

$$\frac{1}{2} \left(2\mu' - 2i \sqrt{\frac{-E_{n,l}V_0 + (E_{n,l}^2 - m^2) - \alpha^2(d_0 - 1)l(l+1) + l(l+1)}{\alpha^2}} + \sqrt{\frac{-4E_{n,l}(-V_0 + V_1 - V_2) - 4(E_{n,l}^2 - m^2) + 4\alpha^2d_0l(l+1)}{\alpha^2}} \right) = -n \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (98-4)$$

که معادله ویژه مقداری انرژی می تواند از معادله بالا پیدا شود.

بنابر این بدست آوردن ثابت بهنجار و انتقال فاز از خواص تابع فوق هندسی زیر پیروی می کنیم.

$${}_2F_1(a, b, c; 0) = 1 \quad (\bar{A}-99-4)$$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b, c; s) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(a, b, a+b-c+1; 1-s) + \\ (1-s)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} {}_2F_1(c-a, c-b, c-a-b+1; 1-s) \end{aligned} \quad (99-4 \text{ ب})$$

با استفاده از معادلات ($\bar{A}-99-4$) و ($\text{ب}-99-4$) و ${}_2F_1(a', b', c'; 1-e^{-\alpha r})$ برای $r \rightarrow \infty$ می تواند نوشته

شود:

$${}_2F_1(a', b', c'; 1-e^{-\alpha r}) = \Gamma(c') \left[\frac{\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')} + \frac{\Gamma(a'+b'-c')}{\Gamma(a')\Gamma(b')} e^{-\alpha(c'-a'-b')r} \right] \quad (100-4)$$

با وارد کردن روابط زیر در معادله بالا، به رابطه ($102-4$) می رسیم:

$$\begin{aligned} c' - a' - b' &= 2ik = (a' + b' - c')^* \\ c' - a' &= b'^* \\ c' - b' &= a'^* \end{aligned} \quad (101-4)$$

$${}_2F_1(a', b', c'; 1-e^{-\alpha r}) = \Gamma(c') \left[\frac{\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')} + \left[\frac{\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')} \right]^* e^{-2i\alpha kr} \right] \quad (102-4)$$

با قرار دادن عبارت $\left| \frac{\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')} \right| e^{i\delta'}$ به جای $\frac{\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')}$ و وارد کردن در رابطی

(۱۰۲-۴) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$${}_2F_1(a', b', c'; 1 - e^{-\alpha r}) = \Gamma(c') \left| \frac{\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')} \right| e^{-i\alpha kr} \left[e^{i(\alpha kr + \delta')} + e^{-i(\alpha kr + \delta')} \right] \quad (10.3-4)$$

بنابراین برای حالت مجانبی رابطه‌ی (۹۷-۴) در $r \rightarrow 0$ داریم:

$$U(s) = 2N_{n,l} \Gamma(c') \left| \frac{\Gamma(c'-a'-b')}{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')} \right| \sin\left(\alpha kr + \frac{\pi}{2} + \delta'\right) \quad (10.4-4)$$

با مقایسه‌ی معادله‌ی (۱۰۴-۴) با شرایط مرزی در $r \rightarrow \infty$ به $u(\infty) = 2 \sin(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l)$ میل می‌کند.

و روابط برای انتقال فاز و ثابت بهنجارش به ترتیب به فرم زیر داده می‌شود.

$$\delta_l = \frac{\pi}{2} + \frac{l\pi}{2} + \delta' = \frac{\pi}{2} + \frac{l\pi}{2} + \arg[\Gamma(c'-a'-b')] - \arg[\Gamma(c'-a')] - \arg[\Gamma(c'-b')] \quad (10.5-4)$$

$$N_{n,l} = \frac{1}{\Gamma(c')} \left| \frac{\Gamma(c'-a')\Gamma(c'-b')}{\Gamma(c'-a'-b')} \right| \quad (10.6-4)$$

با استفاده از رابطه (۱۰۵-۴) که معرف انتقال فاز برای ذرات با اسپین یک در (۱+۳) بعد فضا-زمانی، و

همچنین استفاده از قضیه اپتیکی می‌توان به محاسبه‌ی سطح مقطع پراکندگی پرداخت.

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l \quad (10.7-4)$$

نتیجه گیری

در این پایان نامه به بررسی معادله‌ی دی-کی-پی از لحاظ تاریخی و نحوه‌ی توسعه و پیشرفت معادله‌ی دی-کی-پی در دوره‌های مختلف زمانی بحث شد. سپس به بررسی خصوصیات جبری معادله دی-کی-پی و اثبات برخی روابط آن پرداخته شد. در ادامه معادله دی-کی-پی مستقل از زمان بدست آورده شد و همچنین با استفاده از حد غیر نسبیتی معادله دی-کی-پی به یک معادله‌ی شرودینگر گونه برای ذره آزاد رسیدیم. همچنین این معادله را در حضور برهمکنش‌ها نیز مورد مطالعه مطالعه قرار دادیم و با معرفی مختصری از پتانسیل‌های مرکزی و غیر مرکزی به حل معادله دی-کی-پی در حضور این پتانسیل‌ها پرداختیم و از معادله دی-کی-پی به استخراج معادلات ماکسول پرداخته شد و معادله‌ی دی-کی-پی برای ذره آزاد و همچنین این معادله در حضور پتانسیل بدست آورده شد.

با حل معادله دی-کی-پی در حضور پتانسیل برای ذرات با اسپین صفر و یک، توابع موج به ترتیب شامل ۵ مولفه و ۱۰ مولفه بودند که با استفاده از این ۵ مولفه و ۱۰ مولفه معادله‌ی ویژه مقداری برای ذرات با اسپین صفر و یک به ازای اعداد کوانتومی بدست آمد که می‌توان با استفاده از اعداد کوانتومی مختلف مقادیر مختلفی برای ویژه مقدار انرژی بدست آورد.

در ادامه پراکندگی و حالت‌های مقید بخش اسپین صفر و یک در حضور پتانسیل هولسن و کاسپ اصلاح شده در (۱+۱) بعد فضا-زمانی بررسی شد و با حل معادلات فوق هندسی توانستیم ضرایب عبور و بازتاب را تعیین کنیم و نتیجه بگیریم که با افزایش انرژی ذره ضریب عبوری افزایش و ضریب بازتابی کاهش می‌یابد اما می‌دانیم که در هر حال مجموع ضرایب عبور و بازتاب برابر یک خواهد بود که معرف بقای احتمال می‌باشد. همچنین در مورد حالت مقید می‌دانیم که با افزایش عدد کوانتومی، انرژی ذره افزایش یافته ذره از حالت مقید به حالت آزاد برانگیخته می‌شود.

در ادامه به حل معادله دی-کی-پی در حضور پتانسیل دنگ-فان در $(1+3)$ بعد فضا-زمانی (انتقال فاز) برای ذرات با اسپین یک پرداختیم که می‌توانیم با استفاده از رابطه‌ی انتقال فاز برای ذرات با اسپین یک و قضیه‌ی ایتیکی به محاسبه‌ی سطح مقطع پراکندگی بپردازیم.

نتایج بدست آمده را می‌توان برای ساختار مزونهای با اسپین صفر و یک به کار برد و به محاسبه‌ی خصوصیات استاتیکی ذرات پرداخت.

ضمیمه الف

روش Nikiforov-Uvarov

این روش ما را در حل معادلات دیفرانسیلی مرتبه دوم قادر می سازد به گونه ای که فرم استاندارد معادله ی زیر را بررسی می کنیم [36]

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)}\psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)}\psi(s) = 0, \quad (\text{الف-۱})$$

که پریم علامت مشتق بر حسب s می باشد. همچنین $\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ چند جمله ایهای درجه دوم هستند و $\tilde{\tau}(s)$ یک چند جمله ای درجه اول می باشد. با استفاده از تبدیل زیر

$$\psi(s) = W(s)F(s), \quad (\text{الف-۲})$$

معادله (الف-۱) به فرم فوق هندسی زیر کاهش می یابد:

$$\sigma(s)\phi''(s) + \tau(s)\phi'(s) + \lambda\phi(s) = 0 \quad (\text{الف-۳})$$

و

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s) \quad \tau'(s) < 0 \quad (\text{الف-۴})$$

علاوه بر این معادله (الف-۱) یک جواب خاص با درجه ی n دارد و در رابطه زیر صدق می کند

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s) \quad \text{with } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{الف-۵})$$

به جهت تعیین معادله‌ی ویژه مقداری تعاریف بیان شده در روش NU عبارتست از

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)} \quad (\text{الف-۶})$$

$$\lambda = k + \pi'(s)$$

به طوریکه λ ثابت است. $\pi(s)$ چند جمله‌ای مرتبه اول است. مقادیر k از ۸۸ بدست می‌آید.

همانطوری که $\phi(s)$ به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\phi_n(s) = \frac{C_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s) \rho(s)] \quad (\text{الف-۷})$$

به طوریکه C_n ثابت بهنجارش می‌باشد و تابع $\rho(s)$ در شرط زیر صدق می‌کند

$$[\sigma(s)\rho(s)]' = \tau(s)\rho(s) \quad (\text{الف-۸})$$

روش NU :

معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم را به صورت زیر بررسی می‌کنیم

$$\frac{d^2}{ds^2} \psi_n(s) + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} \psi_n(s) + \frac{-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3}{[s(1 - \alpha_3 s)]^2} \psi_n(s) = 0. \quad (\text{الف-۹})$$

در اینجا تنها فرم استاندارد NU معرفی می‌شود.

با مقایسه‌ی معادلات (الف-۹) و (الف-۲) داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(s) &= \alpha_1 - \alpha_2 s, \\ \sigma(s) &= s(1 - \alpha_3 s), \\ \tilde{\sigma}(s) &= -\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3, \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۰})$$

و با جاگذاری معادلات (الف-۱۰) در معادله (الف-۷) خواهیم داشت

$$\alpha_4 + \alpha_5 s \pm \sqrt{(\alpha_6 - k \alpha_3) s^2 + (\alpha_7 + k) s + \alpha_8}, \quad \pi(s) = \quad (\text{الف-۱۱})$$

به طوریکه [37]

$$\begin{aligned} \alpha_4 &= \frac{1}{2}(1 - \alpha_1), \\ \alpha_5 &= \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3), \\ \alpha_6 &= \alpha_5^2 + \xi_1, \\ \alpha_7 &= 2\alpha_4\alpha_5 - \xi_2, \\ \alpha_8 &= \alpha_4^2 + \xi_3, \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۲})$$

بنابراین با بررسی جذر ریشه‌ی جداکننده که برابر صفر است در معادله‌ی (الف-۷) می‌توانیم تعیین کنیم

$$k_{1,2} = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) \pm 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9}, \quad (\text{الف-۱۳})$$

با

$$\alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6, \quad (\text{الف-۱۴})$$

از معادله‌ی (الف-۱۳) می‌توانیم به راحتی مقادیر مختلف k را بدست آوریم

$$k = -(\alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8) - 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9}, \quad (\text{الف-۱۵})$$

$\pi(s)$ به صورت زیر بدست خواهد آمد

$$\pi(s) = \alpha_4 + \alpha_5 s - [(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8}], \quad (\text{الف-۱۶})$$

بنابراین

$$\tau(s) = \alpha_1 + 2\alpha_4 - (\alpha_2 - 2\alpha_5)s - [(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8})s - \sqrt{\alpha_8}], \quad (\text{الف-۱۷})$$

معادله ویژه مقداری به آسانی به صورت زیر بدست آید

$$\alpha_2 n - (2n+1)\alpha_5 + (2n+1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + n(n-1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0. \quad (\text{الف-۱۸})$$

و توابع موج به کمک روابط زیر تعیین می شوند [38]

$$\begin{aligned} \rho(s) &= s^{\alpha_{10}-1} (1-\alpha_3 s)^{(\alpha_{11}/\alpha_3)-\alpha_{10}-1}, \\ \Phi_n(s) &= P_n^{(\alpha_{10}-1, (\alpha_{11}/\alpha_3)-\alpha_{10}-1)} (1-2\alpha_3 s), \\ W(s) &= s^{\alpha_{12}} (1-\alpha_3 s)^{-\alpha_{12}-(\alpha_{13}/\alpha_3)}, \\ \Psi_n(s) &= s^{\alpha_{12}} (1-\alpha_3 s)^{-\alpha_{12}-(\alpha_{13}/\alpha_3)} P_n^{(\alpha_{10}-1, (\alpha_{11}/\alpha_3)-\alpha_{10}-1)} (1-2\alpha_3 s), \end{aligned} \quad (\text{الف-۱۹})$$

به طوریکه $P_n^{(\alpha_{10}-1, (\alpha_{11}/\alpha_3)-\alpha_{10}-1)} (1-2\alpha_3 s)$ چند جمله ایهای ژاکوبی می باشد [39]

$$\begin{aligned} \alpha_{10} &= \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8}, \\ \alpha_{11} &= \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}), \\ \alpha_{12} &= \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}, \\ \alpha_{13} &= \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}). \end{aligned} \quad (\text{الف-۲۰})$$

مراجع:

- [1] R. A. Krajcik and M. M. Nieto, (1977), *Am. J. Phys.* **45**, 818
- [2] P.A.M. Dirac, (1936). *Proc. R. Soc. London, Ser. A*, **155**, 447
- [3] V.K. Mishra, S. Hama, B.C. Clark, (1991), *Phys. Rev. C*, **43**, 2 .
- [4] N. Kemmer, (1939). *Proc. Roy. Soc. A*, .173 91.
- [5] R. J. Duffin, (1938). *Phys. Rev.* **54** 1114.
- [6] G. Petiau, Ph. D Thesis, University of Paris, 1936; Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect **8. 16** (1936).
- [V] W. Greiner, (2000) *Relativistic Quantum Mechanics: Wave Equations*, 3rd Ed. Springer, Berlin.
- [8] H. Umezawa, (1956). *Quantum Field theory*, North-Holland, Amsterdam.
- [9] L.B. Castro, A.S. de Castro, **1 Jun** (2011). arXiv: 1106.0185v1 [hep-th].
- [10] A.A. Khelashvili, (1982). *Theor. Math. Phys.* **51**, 447
- [11] J.N. Ginocchio, A. Leviatan, (1998). *Phys. Lett. B*, **425**, 1.
- [12] M.V. Zhukov, B.V. Danilin, D.V. Fedorov, J.S. Vaagen, F.A. Gareev, J. Bang, (1991). *Lett. B*, **265**, 19
- [13] A. Arda, nad R. Sever, *J. Math. Chem*, **2012**, DOI: 10.1007/s10910-012-0011-0.
- [14] A. Rahan, F.H. Stillingner, H.L. Lemberg, (1975). *J. Chem. Phys.* **63**, 5223.
- [15] L. Hulthen, (1942). *Arkiv. Mat. Astr. Fysik.* **28A**(5).
- [16] T. Tietz, (1961). *Chem. Phys.* **35**, 1917 .
- [17] C. S. Lam and Y. P. Varshni, (1971). *Phys. Rev. A*, **4**, 1875 .

- [18] L. Hulthen, M. Sugawara and S. Flügge (ed.), *Handbuch der Physik* (Springer-Verlag, Berlin, 1957).
- [19] A. A. Berezin, (1972). *Phys. Status. Solidi(b)*, **50**, 71
- [20] P. Pyykko and J. Jokisaari, (1975). *Chem. Phys.* **10**, 293.
- [21] R. D. Woods and D. S. Saxon, (1954). *Phys. Rev.* **95**, 577
- [22] S. E. Massen and C. P. Panos, (1997). *Phys. Lett. A*. **246**, 530.
- [23] B. A. Kotsos and M. E. Grypeos, (1997). *Physica B*. **229**, 173.
- [24] H. Nicolai, (1976). *J. Phys. A*, **9**, 1497.
- [25] O. V. Bessulova, E. A. Romanovsky and T. I. Spasskaya, (2003). *J. Phys. G* **29**, 1193
- [26] R.J. Le Roy, R.B. Bernstein, (1970). *Chem. Phys.* **52**, 3869
- [27] J. Cai, P. Cai, A. Inomata, (1986). *Phys. Rev. A*, **34**, 4621
- [28] E. Romera, P. Sánchez-Moreno, J.S. Dehesa, (2006). *J. Math. Phys.* **47**, 103504
- [29] H. X. Quan, L. Guang, W. Z. Min, N. L. Bin and M. Yan, (2010). *Commun. Theor. Phys.* **53**, 242
- [30] Z. M. Cang and W. Z. Bang, (2007). *Chem. Phys.* **16**, 1863.
- [31] F. Yasuk, I. Boztosun and A. Durmus, [arXiv: quant-th/ 0605007].
- [32] Y. Aharonov, D. Bohm. (1959). *Phys. Rev.* **115**, 485.
- [33] S.H. Patil, K.D. Sen. (2007). *Phys. Lett. A* **362**, 109.
- [34] M. Sage, J. Goodisman. (1985). *Am. J. Phys.* **53**, 350.
- [35] A. Çetin. (2008). *Phys. Lett. A* **372**, 3852.

- [36] A. F. Nikiforov and V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics* (Birkhauser, Basel, 1988).
- [37] L. Hulth  n, (1942). *Ark. Mat. Astron. Fys.* **28 A**,
- [38] C. Tezcan and R. Sever, (2009). *Int. J. Theor. Phys.* **48** 337 .
- [39] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Function with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, 10th Printing. (Dover, New York, 1972).

Abstract

DKP equation is the special case of the first-order relativistic wave equations for arbitrary spin particles. DKP equation is a Dirac-Like equation which describes spin-0 and spin-1 particles. This equation is of great importance in many areas of physics including cosmology, meson spectroscopy and nuclear hadron interactions. So the particles like photons, gluons, mesons, excitons, can be considered by DKP equation.

In this thesis, we discussed about DKP theory. Then we have explained about the properties of DKP equation. Also we have studied DKP equation under of central and non-central potentials and investigate energy eigenvalues and eigenfunctions. Then we have considered the scattering of spin-zero and spin-one bosons in (1+1) dimension and obtained transmission and reflection coefficients and bound states of spin-zero and spin-one bosons. Also we have considered the scattering of spin-one bosons in (3+1) dimensions and introduced the phase shift.

Key Words: DKP equation, central and non-central potentials, energy eigenvalues and eigenfunctions, NU method, transmission and reflection coefficients, Bound state solutions.



Shahrood University of Technology

Physics Department

Master of Science Thesis

Determination of bound states and excited states of particles by spin one by using of DKP relativistic equation in the presence of electromagnetic field

Supervisor:

Dr. Hassan Hassanabadi

By:

Mehdi Kamali

September– 2013

