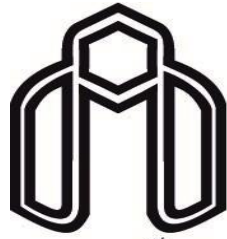


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشگاه شاهرود

دانشکده: فنیک

گروه: هسته‌ای

بررسی سیستم های دوسه ذره ای با بهیافت تبدیل لاپلاس

دانشجو: ابراهیم ممتازی بروجنی

استاد راهنما:

دکتر علی اکبر رجبی

استاد مشاور:

دکتر حسن حسن آبادی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

زمان: شانزدهم شهریور یک هزار و سیصد و نود و دو

تقدیم به دوستان پخته بسته پدرم

و

مکاه نکران مادرم

ت

تقدیر و تشکر

پس از حمد و ستایش یگانه‌ی بی همتا، خداوند بزرگ را شاکرم که این بنده کوچک را غریق دریای بی‌کران لطف و رحمتش فرمود تا قدمی بینهایت کوچک در مسیر انسانیت برداشته شود. بدین وسیله برخود لازم می‌دانم به رسم ادب از استاد ارجمندم جناب آقای پروفسور علی اکبر رجبی به خاطر قبول زحمات بی‌شمار و راهنمایی‌های ارزشمندشان به‌عنوان استاد راهنمای این اثر صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم. برخود می‌بالم که سال گذشته را در خدمت مردی به لطافت باران، به طراوت شب‌نم و به بزرگی دریا سپری کردم که در تمام لحظات و بی‌وقفه زحمات مرا به جان خریدند و نقش بسزایی در به سرانجام رسانیدن این کار داشتند، بی‌شک بهترین سال تمام عمرم را رقم زدند، به همین خاطر نهایت مراتب ادب و احترام را برای استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر حسن حسن آبادی قائلم و بسیار از ایشان سپاسگزارم که نقشی بسیار پررنگ‌تر از استاد مشاور را برای من ایفا نمودند. همچنین از اساتید بزرگوارم جناب آقای دکتر محمدرضا شجاعی و جناب آقای دکتر حسین توکلی عنبران که علاوه بر افتخار شاگردی در محضر ایشان، زحمت داوری و نقد و بررسی این اثر را بر عهده داشتند صمیمانه سپاسگزارم. پدر و مادر عزیزم، نمی‌دانم که به کدامین کلام از شما تشکر کنم، تمام هستیم را مدیون شما هستم و آرزوی قلبیم اینست که توانسته باشم اندکی از زحمات شما را جبران کنم. در نهایت از همه دوستان عزیزم که در طی این دوره افتخار آشنایی، هم‌صحبتی و زندگی در کنارشان را داشتم متشکرم.

تعهد نامه

اینجانب ابراهیم ممتازی بروجنی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته فیزیک هسته‌ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه بررسی سیستم های دو و سه ذره ای با رهیافت تبدیل لاپلاس تحت راهنمایی پروفسور علی اکبر رجبی متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

مطالعه سیستم‌های چند ذره‌ای در سالیان اخیر بسیار مورد توجه محققان و دانش پژوهان در حوزه علوم هسته‌ای بوده است به همین بهانه در این پایان نامه نیز سعی شده است تا توصیف صحیحی از سیستم‌های دو و سه ذره‌ای با استفاده از رهیافت جدید تبدیل لاپلاس ارائه شود. این رهیافت جدید روشی مناسب برای مطالعه موردی سیستم‌های دو و سه ذره‌ای در حضور پتانسیل‌های متفاوت است. این پایان نامه با معرفی و بررسی ذرات بنیادی آغاز می‌شود و پس از آن به توصیف هسته و انرژی بستگی پرداخته شده است و با معرفی پتانسیل هسته‌ای یوکاوا، با به کارگیری تبدیل لاپلاس توصیفی از هسته ارائه شده است. سپس با استفاده از رهیافت تبدیلات لاپلاس سیستم‌های دو ذره‌ای برای تعدادی از پتانسیل‌های شناخته شده مورد بررسی قرار گرفته و در نهایت یک سیستم سه ذره‌ای در حضور پتانسیل کولنی و پتانسیل برهم‌کنشی اسپین-مدار راشبا^۱ مطالعه شده است.

کلمات کلیدی : برهم‌کنش‌های چند ذره‌ای، پتانسیل‌های هسته‌ای، پتانسیل یوکاوا، رهیافت تبدیلات لاپلاس.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Solutions of the two-body Salpeter equation under the Coulomb and exponential potential for any l state with Laplace approach A. A. Rajabi, E. Momtazi, B. H. Yazarloo, H. Hassanabadi, Accepted in Chinese Physic C Journal.

^۱ Rashba spin- orbit interaction

فهرست مطالب

۱	مقدمه‌ای بر ذرات بنیادی
۱-۱	نیروهای بنیادی
۱-۱-۱	نیروی گرانش
۱-۱-۲	نیروی الکترومغناطیس

۳	 ۳-۱-۱. نیروی هسته‌ای ضعیف
۳	 ۴-۱-۱. نیروی هسته‌ای قوی
۴	 ۲-۱. ذرات بنیادی
۴	 ۱-۲-۱. هادرون
۵	 ۲-۲-۱. باریون
۶	 ۳-۲-۱. مزون
۶	 ۴-۲-۱. کوارک
۷	 ۵-۲-۱. گلوئون
۷	 ۶-۲-۱. لپتون
۸	 ۷-۲-۱. فوتون
۱۱	 ۸-۲-۱. بوزون
۱۲	 ۲. مطالعه هسته و انرژی بستگی آن
۱۳	 ۱-۲. ساختار هسته
۱۳	 ۲-۲. ویژگی پروتون‌ها و نوترون‌ها
۱۴	 ۳-۲. پراکندگی الکترون از توزیع بار هسته
۱۷	 ۴-۲. مدل‌های هسته‌ای
۱۷	 ۱-۴-۲. مدل قطره مایعی
۱۸	 ۲-۴-۲. مدل پوسته‌ای
۲۰	 ۵-۲. انرژی بستگی هسته
۲۱	 ۶-۲. انرژی جداسازی
۲۱	 ۷-۲. انرژی بستگی متوسط بر نوکلئون
۲۴	 ۳. معرفی و کاربرد تبدیلات لاپلاس
۲۵	 ۱-۳. تبدیلات لاپلاس و خواص آن
۲۹	 ۲-۳. تبدیلات معکوس لاپلاس
۳۰	 ۳-۳. مشتق‌گیری از تبدیلات لاپلاس
۳۱	 ۴-۳. کاربرد تبدیلات لاپلاس در حل تحلیلی معادله کلین گوردن
۳۹	 ۴. بررسی سیستم‌های چند ذره‌ای
۴۰	 ۱-۴. سیستم‌های دو ذره‌ای (دوترون)
۴۰	 ۱-۱-۴. خواص نیروی بین نوکلئون‌ها
۴۰	 ۲-۱-۴. دوترون
۴۱	 ۲-۴. پتانسیل یوکاوا
۴۳	 ۳-۴. محاسبه انرژی بستگی دوترون

۴۸	 حل معادله دوجسمی سالیتر با رهیافت تبدیل لاپلاس
۵۷	 ۴-۵. سیستم‌های سه ذره‌ای
۵۷	 ۴-۵-۱. تحلیل رفتار سیستم سه ذره‌ای
۶۱	 ۴-۵-۲. بررسی سیستم‌های سه ذره‌ای در حضور پتانسیل کولنی
۶۴	 ۴-۵-۳. بررسی سیستم‌های سه ذره‌ای در حضور پتانسیل برهم‌کنشی راشبا
۶۵	 نتیجه‌گیری

فهرست اشکال

۵	 شکل ۱-۱. شماتیکی از ساختار هادرون‌ها
۶	 شکل ۲-۱. شماتیکی از ساختار مزون‌ها
۷	 شکل ۳-۱. شماتیکی از گلوئون‌ها
۱۰	 شکل ۴-۱. پراکندگی کامپتون
۱۱	 شکل ۵-۱. پدیده فوتو الکتریک

شکل ۱-۶. خانواده بوزن ها و فرمیون ها	۱۱
شکل ۲-۱. چگالی بارالکتریکی ایزوتوپ سرب	۱۵
شکل ۲-۲. چگالی بارالکتریکی سه هسته سبک، متوسط و سنگین	۱۶
شکل ۲-۳. انرژی بستگی متوسط بر حسب عدد جرمی	۲۲
شکل ۲-۴. انرژی جدایی نوترون بر حسب عدد نوترونی	۲۳
شکل ۳-۱. تابع موج سیستم	۳۶
شکل ۳-۲. نمودار تغییرات انرژی بر حسب Z_s	۳۷
شکل ۳-۳. نمودار تغییرات انرژی بر حسب Z_v	۳۸

فهرست جداول

جدول ۱-۱. نیروهای بنیادی	۴
جدول ۲-۱. ویژگی باریونها با اسپین (۱/۲)	۵
جدول ۳-۱. لپتون ها	۷
جدول ۳-۱. ویژه مقادیر انرژی برای حالت های مختلف سیستم	۳۵
جدول ۴-۱. ویژه مقادیر انرژی محاسبه شده	۷۶

فصل اول

مقدمه ای بر ذرات بنیادی

فیزیک هسته‌ای، مطالعه ساختار هسته و برهم‌کنش بین اجزای تشکیل دهنده آن است. مطالعه فیزیک هسته‌ای را با بررسی برهم‌کنش‌های بنیادی موجود در طبیعت آغاز می‌کنیم. منشأ تمام نیروهای موجود در طبیعت چهار نیروی بنیادی است که عبارتند از: گرانش، الکترومغناطیس، هسته‌ای ضعیف و هسته‌ای قوی.

۱-۱-۱- نیروی گرانش

این نیرو از شناخته شده‌ترین نیروها در حوزه تجربه بشر بوده و تنها نیروی بلند بردی است که بین مواد خنثی (از نظر الکتریکی) عمل می‌کند. منشأ این نیرو جرم است، نیروی گرانشی بطور کلاسیکی با قانون گرانش عمومی نیوتن توصیف می‌شود. بر طبق

$$F = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (۱-۱)$$

که در آن G (ثابت جهانی گرانش) مقیاسی از اندازه و قدرت نیروی گرانش را به دست می‌دهد که در مقایسه با سایر نیروها فوق العاده ضعیف است.

۱-۱-۲- نیروی الکترومغناطیسی

منشأ این نیرو بارهای الکتریکی مثبت و منفی است، در حالتی که دوبار در حال سکون باشند نیروی الکترواستاتیکی بین آنها توسط قانون کولن بصورت معادله زیر محاسبه می‌شود.

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (۱-۲)$$

درمورد ذرات باردار وقتی که در حرکت باشند، نیروی دیگری غیر از نیروی الکتریکی اعمال می‌شود که نیروی مغناطیسی نام دارد، بنابراین به ذره باردار در حال حرکت نیروی الکترومغناطیسی وارد می‌شود که کمیت برداری است و منشأ این نیرو تبادل فوتون است.

۱-۱-۳- نیروی هسته‌ای ضعیف

یکی از چهار نیروی پایه در فیزیک است که در کوارک‌ها و لپتون‌ها باعث تبادل انرژی و تکانه می‌شود و بین ۱۰ تا ۱۳ بار از نیروی هسته‌ای قوی، ضعیف‌تر است. همانند سایر نیروهای پایه در فیزیک، نیروی هسته‌ای ضعیف ناشی از تبادل بوزون‌ها است و با تبادل Z^0 و $W^\pm$ شناخته می‌شود. این نیرو در فواصل میکروسکوپی عمل کرده و هنگامی بروز می‌کند که ذرات در یک نقطه با یکدیگر طلاق دارند. به دلیل ماهیت این نیرو توصیف آن با کمیت‌های کلاسیکی امکان پذیر نیست، بلکه باید آن را با فیزیک کوانتومی توصیف کرد.

۱-۴- نیروی هسته‌ای قوی

نیروی هسته‌ای قوی نیز یکی دیگر از چهار نیروی بنیادی طبیعت است که عامل پایداری کوارک‌ها و ذرات تشکیل شده از آن‌ها مثل نوترون‌ها و پروتون‌ها در هسته اتم‌ها است. از این جهت، این نیرو از نیروی الکترومغناطیسی بسیار قوی‌تر است و می‌تواند هسته اتم را با وجود نیروی دافعه بین پروتون‌ها، آن را پایدار نگه دارد. همانند نیروی الکترومغناطیسی و نیروی هسته‌ای ضعیف، توسط تبادل بوزون‌ها توجیه می‌شود که در اینجا ذره مبادله شده گلوئون نام دارد. گلوئون‌ها از هشت نوع مختلف هستند که دارای باررنگی می‌باشند و آن را بین کوارک‌ها انتقال می‌دهند. تفاوت اصلی بین برهم‌کنش‌های الکترومغناطیس و برهم‌کنش هسته‌ای قوی برد نامحدود نیروی الکترومغناطیس در مقایسه با برد کوتاه (حدود ۱ فرمی) نیروی هسته‌ای است، همانطور که در جدول (۱-۱) نشان داده شده است [۱ و ۲].

جدول ۱-۱- نیروهای بنیادی [1]

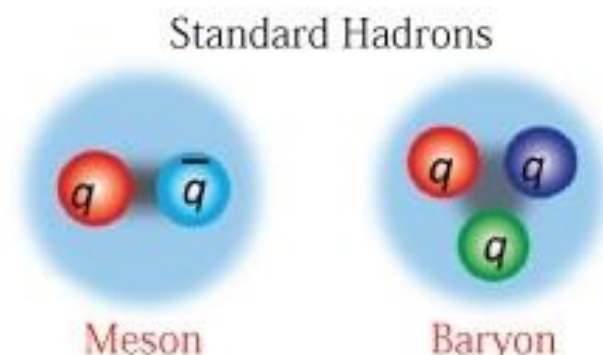
نیروهای بنیادی	عمل کننده بر	برد
گراش	همه ذرات	∞
الکترومغناطیس	همه ذرات باردار	∞
هسته‌ای ضعیف	لپتون‌ها و هادرون‌ها	$< 10^{-18} \text{ (m)}$
هسته‌ای قوی	هادرون‌ها	$\approx 10^{-15} \text{ (m)}$

۱-۲- ذرات بنیادی

همان‌طور که می‌دانیم ماده از مولکول و مولکول‌ها از اتم‌ها تشکیل شده‌اند، اتم از هسته و الکترون‌ها و هسته از پروتون و نوترون تشکیل شده است. با پیشرفت‌های جدید در عرصه علم، بویژه در کوانتوم و تکنولوژی ساخت شتابدهنده‌های عظیم‌تر بینش ما در مورد ساختار ماده تغییر کرده است. اکنون ثابت شده است که پروتون‌ها و نوترون‌ها ذرات تفکیک پذیرند و خود از کوارک‌ها تشکیل شده‌اند اما ذرات بنیادی دیگر کدام‌ها هستند؟ چند نوع کوارک داریم؟ انتقال نیرو توسط کدام ذرات صورت می‌پذیرد؟

۱-۲-۱- هادرون

هادرون‌ها ذرات زیراتمی هستند که از فرمیون‌هایی چون کوارک و آنتی کوارک و بوزون‌هایی چون گلوئون تشکیل شده‌اند. این ذرات نیروی هسته‌ای قوی اعمال می‌کنند، هادرون‌ها مانند دیگر ذرات دارای عدد کوانتومی هستند. این ذرات ممکن است در دماهای خیلی پایین خود به خود از بین بروند، دو زیر مجموعه از هادرون‌ها وجود دارد که عبارتند از باریون‌ها و مزون‌ها [2].



شکل ۱-۱- شماتیکی از ساختار هادرون‌ها [۲].

۱-۲-۲- باریون

باریون‌ها ذراتی هستند که از کوارک تشکیل شده‌اند. برای مثال پروتون از دو کوارک بالا و یک کوارک پایین تشکیل شده است و یا نوترون از یک کوارک پایین و دو کوارک بالا تشکیل شده است. باریون‌ها

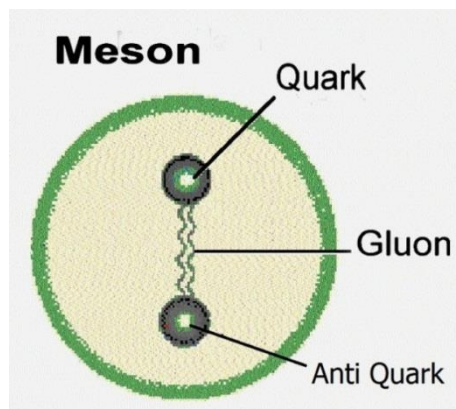
اغلب سنگین با برهم‌کنش قوی و اسپین نیمه صحیح هستند. سبک‌ترین اعضای آن پروتون‌ها هستند [2]، تعدادی از باریون‌ها طبق مدل استاندارد بصورت جدول زیر هستند.

جدول ۱-۲- ویژگی باریون‌ها با اسپین (۱/۲) [2].

جرم	بار الکتریکی	توزیع کوارکی	بار یون
۹۳۸/۲۸۰	+۱	Uud	P
۹۳۹/۵۷۳	۰	Udd	N
۱۱۱۵/۶	۰	Uds	Λ
۱۱۸۹/۴	+۱	Uus	Σ^+
۱۱۹۲/۵	۰	Uds	Σ^0
۱۱۹۷/۳	-۱	Dds	Σ^-
۱۳۱۴/۹	۰	Uss	Ξ^0
۱۳۲۱/۳	-۱	Dss	Ξ^-

۱-۲-۳- مزون

مزون‌ها ذراتی با برهم‌کنش قوی و اسپین صحیح هستند که با نوکلئون‌ها از طریق نیروی قوی برهم‌کنش می‌کنند. مزون‌ها متشکل از یک کوارک و یک پادکوارک هستند و مزون پای (π) سبک‌ترین عضو این خانواده است، تبادل مزون پای از یک نوکلئون به نوکلئون دیگر عامل عمده پیوند هسته‌ای است. جرم مزون پای تقریباً $\frac{1}{7}$ جرم پروتون است. مزون پای بصورت مثبت، منفی و خنثی وجود دارند. این ذرات نیز به نوبه خود پاد ذره هم دارند بعنوان مثال پاد ذره مزون پای مثبت، ذره مزون پای منفی است [2].



شکل ۱-۲- شماتیکی از ساختار مزون ها [2].

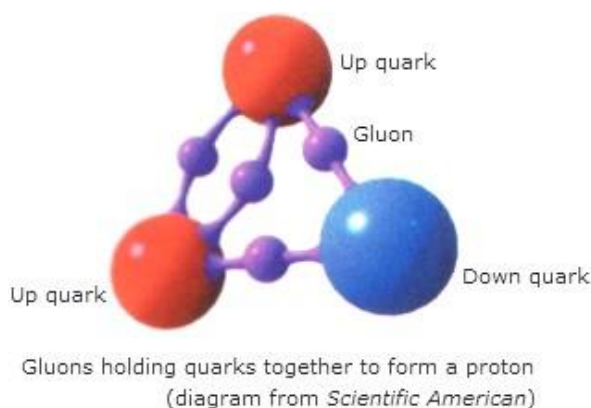
۱-۲-۴- کوارک

دست کم شش نوع کوارک وجود دارد که هرکدام از آن‌ها حاصل عدد کوانتومی جدید یعنی طعم هادرونی است و بصورت زیر تقسیم بندی می‌شوند [2]:

کوارک t	کوارک d	کوارک b
کوارک u	کوارک s	کوارک c

۱-۲-۵- گلوئون

گلوئون‌ها جرم در حال سکونشان صفر است و اسپینی مساوی یک دارند و در درون هادرون‌ها قرار دارند و در حالت آزاد مشاهده نشده‌اند.



شکل ۱-۳- شماتیکی از گلوئون ها [3].

۱-۲-۶- لپتون

لپتون‌ها ذرات بنیادی هستند و برهم‌کنش‌های قوی هیچ تأثیری بر آن‌ها ندارد، لپتون‌ها بصورت سه زوج (e, ν_e) و (μ, ν_μ) و (τ, ν_τ) و البته پاد ذره‌هایشان بصورتی که در جدول زیر نشان داده شده است تقسیم بندی می‌شوند، لپتون‌ها دارای اسپین نیمه صحیح هستند [2].

جدول ۱-۳- لپتون‌ها [2]

لپتون‌ها		
الکترون (e)	میون (μ)	میون (τ)
نوترینوی الکترون (ν_e)	نوترینوی میون (ν_μ)	نوترینوی میون (ν_τ)

۱-۲-۷- فوتون

از برخی جهات فوتون ذره‌ای بسیار نوین است، پلانک^۱ در سال ۱۹۰۰ میلادی نخستین گام را در کشف آن برداشت. او می‌خواست دلیل به اصلاح طیف جسم سیاه برای امواج الکترومغناطیس که از یک جسم داغ منتشر می‌شود را توضیح دهد، مکانیک آماری در تبیین سایر فرآیندهای حرارتی بسیار موفق بود ولی درباره میدان مغناطیسی نتایج چندان محسوس به بار نمی‌آورد. بویژه به فاجعه فرابنش^۲ منجر شد که پیش بینی می‌کرد که توان کل تشعشع یافته بی‌نهایت است. پلانک متوجه شد که اگر فرض شود تابش الکترومغناطیس کوانتیده باشد و با بسته‌های کوچک انرژی مطابق رابطه $(۱-۳)$ انجام شود، می‌توان از این فاجعه گریخت.

$$E = h\nu \quad (۱-۳)$$

^۱Max plank

^۲Ultraviolet catastrophe

که ν فرکانس تابش و h ثابت پلانک است، امروز مقداری که برای ثابت پلانک شناخته می‌شود عبارتست از:

$$h = 6.62 \times 10^{-27} \text{ (erg.s)} \quad (4-1)$$

پلانک ادعا نمی‌کرد که می‌داند چرا تابش کوانتیده است ولی گمان می‌کرد که علت آن نوع تابش می‌باشد، بنابر دلایلی سطح داغ فقط نور را بصورت بسته‌های کوچک منتشر می‌کند. انیشتین در سال ۱۹۰۵ نظر بنیادی‌تری داشت، او ایده پلانک و فرمول او را برای پدیده فوتوالکتریک بکار برد. هنگامی که پرتو الکترومغناطیس به سطح یک فلز برخورد می‌کند، الکترون‌ها از آن خارج می‌شوند. وی معتقد بود که کوانتوم نور تابیده به یک الکترون در فلز برخورد می‌کند و انرژی را آزاد می‌کند و الکترون برانگیخته از سطح فلز خارج شده و انرژی ω (که آنرا ثابت کار فلز می‌نامند و بستگی به نوع فلز دارد) را از دست می‌دهد، سپس الکترون با انرژی $E \leq h\nu - \omega$ خارج می‌شود.

بدست آوردن فرمول بالا کار آسانی است اما نتایج بسیار زیادی دارد، بیشترین انرژی الکترون مستقل از شدت نور بوده فقط بستگی به فرکانس آن دارد. بطور حتم پرتوهای شدیدتر، الکترون‌های بیشتری از سطح فلز جدا می‌کنند ولی انرژی الکترون‌ها یکسان خواهد بود. برخلاف نظریه پلانک، نظریه انیشتین با استقبال روبه‌رو نشد و در طی ۲۰ سال بعد او یک تنه از کوانتوم دفاع می‌کرد تا اینکه در سال ۱۹۱۶ میلیکان بررسی مفصل پدیده فوتوالکتریک را به پایان برد و گزارش داد که در هر مورد معادله فوتوالکتریک انیشتین بطور دقیق نتایج مشاهده شده را پیش بینی می‌کند، اما نظریه نیمه ذره‌ای که با آن انیشتین به نتیجه رسید، امروزه کاملاً غیر قابل پذیرش به نظر می‌رسد.

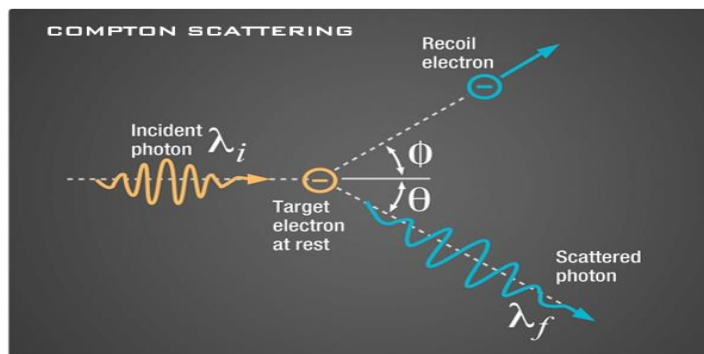
سرانجام آزمایش کامپتون در سال ۱۹۲۳ گره گشا شد، کامپتون متوجه شد که پراکندگی بوسیله یک ذره در حال سکون طبق رابطه (۵-۱) طول موج را تغییر می‌دهد :

$$\lambda' = \lambda + \lambda_c (1 - \cos \theta) \quad (5-1)$$

که λ طول موج نور تابیده و λ' طول موج پراکنده شده و θ زاویه پراکندگی است و

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} \quad (6-1)$$

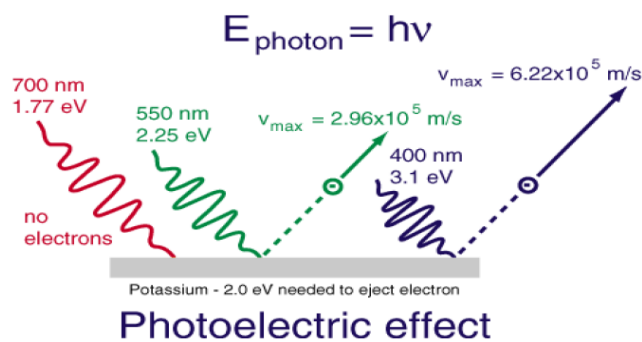
طول موج ذره کامپتون به جرم m است. این دقیقاً همان فرمولی است که نور را به عنوان ذره‌ای با جرم در حال سکون صفر و انرژی برابر با مقدار داده شده توسط پلانک و با بکارگیری بقای نسبیته انرژی و تکانه در یک برخورد کشسان معمولی در نظر می‌گرفتیم حاصل می‌گردید شکل (۴-۱).



شکل ۴-۱- پراکندگی کامپتون [4].

این یک مدرک تجربی و غیرقابل انکار مبنی بر رفتار ذره‌ای نور در مقیاس اتمی بود، این ذره را فوتون نامیدند و آن با علامت γ (اشعه گاما) نشان می‌دهند، اگر چه فوتون در ابتدا با عدم استقبال فیزیکدانان روبه رو شد ولی سرانجام جایگاه اصلی خود را در نظریه کوانتومی میدان پیدا کرد و چشم انداز تازه‌ای برای برهم‌کنش‌های الکترومغناطیس ارائه نمود. در الکترودینامیک کلاسیک، دافعه الکتریکی (مثلاً دو الکترون) را به میدان آن‌ها نسبت می‌دهیم، هر الکترون در ایجاد میدان سهیم است و هریک به آن پاسخ می‌دهد اما در نظریه کوانتومی میدان، میدان الکتریکی کوانتیده است به شکل فوتون‌ها و می‌توان برهم‌کنش را شامل جریانی از فوتون‌ها دانست که بین دوبار الکتریکی تردد می‌کنند، هر الکترون همراه آن‌ها را منتشر و جذب می‌کند و همین مطالب در مورد هر نیروی

غیرتماسی درست است. از مبادله ذرات به عنوان واسطه سخن می گویند، در الکتروپدینامیک ذره واسطه فوتون است [5].



شکل ۱-۵- پدیده فوتوالکتریک [4].

۸-۲-۱- بوزون ها

در فیزیک ذرات برهم کنش های ضعیف هسته ای، بوزون ها نقش مهمی ایفا می کنند، این ها تنها اندرکنشی هستند که می توانند ذرات پایه را عوض کنند و ضمن پیروی از قوانین بقای بار لپتونی و باریونی موجب تبدیل های متقابل آن ها شوند [5].

Fermions		Bosons	
Leptons and Quarks	Spin = $\frac{1}{2}$	Spin = 1*	Force Carrier Particles
Baryons (qqq)	Spin = $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \dots$	Spin = 0, 1, 2...	Mesons (q $\bar{q}$)

شکل ۱-۶- خانواده بوزن ها و فرمیون ها [5].

مطالعه فیزیک هسته ای نیازمند اطلاعاتی راجع به ذرات بنیادی است به همین منظور در این فصل به بررسی اجمالی این ذرات پرداخته شد.

فصل دوم

مطالعه هسته و انرژی بستگی آن

۱-۲- ساختار هسته

هسته مجموعه‌ای مقید از نوترون‌ها و پروتون‌ها است، ${}_Z^AX$ نشان دهنده هسته اتم عنصر شیمیایی X است با A (عدد جرمی) نوکلئون که تعداد Z تایی آن پروتون و تعداد $N=A-Z$ تایی آن نوترون است. به هسته‌هایی که تنها از لحاظ تعداد نوترون تفاوت دارند ایزوتوپ^۱ می‌گویند و به هسته‌های با A یکسان و Z متفاوت، ایزوبار^۲ می‌گویند.

۲-۲- ویژگی پروتون‌ها و نوترون‌ها

نوکلئون‌ها همانند لپتون‌ها فرمیون‌اند و اسپین $1/2$ دارند. جرم نوترون 0.14% درصد بیشتر از پروتون است.

$$m_n = 939.566 \text{ MeV} / c^2$$

$$m_p = 938.272 \text{ MeV} / c^2$$

نوترون بار الکتریکی خالص ندارد و بار پروتون مخالف بار الکترون است زیرا بار الکتریکی خالص اتم‌ها صفر است و پروتون‌ها سبب می‌شوند که بار الکترون‌ها کاملاً خنثی شود.

بار الکتریکی پروتون در یک نقطه تمرکز نیافته است بلکه بصورت متقارن حول مرکز پروتون توزیع شده است. با استفاده از روش‌های آزمایشگاهی شعاع این توزیع بار تقریباً $R_p \approx 0.8 \text{ fm}$ است [۶]. همچنین توزیع بار گسترده‌ای برای نوترون یافت شده است بطوریکه بار مرکزی در ناحیه مرکزی با بار منفی در فواصل دورتر خنثی می‌گردد. توزیع ماده نیز در نوکلئون‌ها به فاصله‌ای در حدود R_p گسترش می‌یابد، هم پروتون و هم نوترون دارای گشتاور دوقطبی مغناطیسی طبق معادله (۱-۲) هستند.

$$\mu_p = 2.79285 \left(e\hbar / 2m_p \right) \quad \mu_n = -1.91304 \left(e\hbar / 2m_n \right) \quad (1-2)$$

^۱Isotope

^۲Isobar

روشن است که هیچ یک از گشتاورهای مغناطیسی به مقدار $e\hbar/2m_p$ که از معادله ساده دیراک بدست می‌آید، مربوط نمی‌شوند. این موضوع اشاره صریح به این امر دارد که خود نوکلئون‌ها ذرات بنیادی نیستند [۶۵].

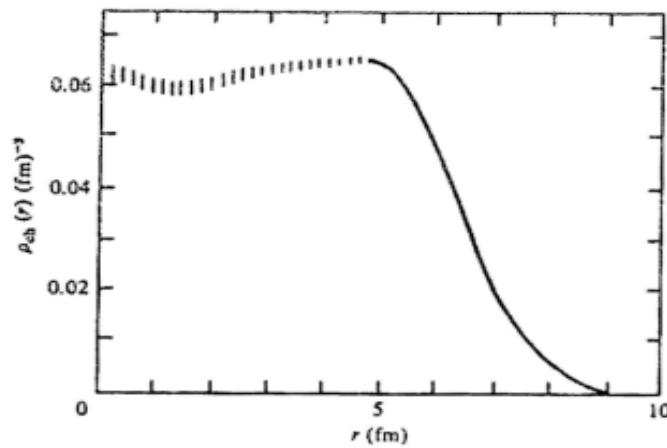
۲-۳- پراکندگی الکترون از توزیع بار هسته

تحلیل مشهور رادرفورد درباره پراکندگی ذرات آلفا (α) از ماده در سال ۱۹۱۱ روشن ساخت که اندازه هسته اتم در مقایسه با اندازه خود اتم کوچک است و توزیع الکترونی به فاصله‌ای در حدود انگسترم ($1A=10^{-10}$ m) از هسته گسترش می‌یابد. این آزمایش و آزمایش‌های پس از آن نشان دادند که توزیع نوکلئون‌ها در حدود چند فرمی ($1fm=10^{-15}$ m) محدود شده است. در دهه ۱۹۵۰ از آزمایش‌هایی که با استفاده از پراکندگی کشسان الکترون‌های پر انرژی به منظور کاویدن توزیع بار هسته‌ای انجام گرفت، اطلاعات دقیقی بدست آمد. استفاده از لپتون‌های باردار (الکترون‌ها یا میون‌ها) برای کاوش ماده هسته‌ای بسیار سودمند است، زیرا لپتون‌های باردار با نوکلئون‌ها عمدتاً از طریق نیروهای الکترومغناطیسی برهم‌کنش می‌کنند. اگر قرار باشد از آزمایش‌های پراکندگی اطلاعات مفصلی از توزیع بار هسته‌ای بدست آوریم، روشن است که λ (طول موج ذره فرودی) باید کمتر یا در حدود فواصلی باشد که چگالی بار هسته در آن تغییر می‌کند. الکترونی با طول موج $\lambda/2\pi \approx 1 fm$ تکانه برابر با $P = \frac{2\pi\hbar}{\lambda}$ دارد و در نتیجه انرژی آن برابر با رابطه (۲-۲) می‌شود.

$$E = (p^2 c^2 + m^2 c^2)^{\frac{1}{2}} \approx 200 MeV \quad (2-2)$$

در چنین انرژی‌هایی به جای استفاده از معادله شرودینگر برای توصیف الکترون، از معادله موج نسبیتی دیراک استفاده می‌شود. آزمایش‌های انجام شده سطح مقطع دیفرانسیلی $d\sigma(E, \theta)/d\Omega$ را از پراکندگی کشسان از هسته تحت زاویه θ بدست می‌دهند.

چگالی بار هسته‌ای را با تابع چگالی $e\rho_{ch}(r)$ معرفی خواهیم کرد، این تابع لزوماً تابعی متقارن و کروی نیست اما برای هسته‌هایی که متقارن و کروی‌اند یا تقریباً اینگونه‌اند می‌توان فرض کرد که چگالی بار تنها به r فاصله از مرکز هسته بستگی دارد. پس امکان آن وجود دارد که با استفاده از معادله موج دیراک برای الکترون، مقدار $d\sigma/d\Omega$ را با استفاده از $\rho_{ch}(r)$ بتوان کاملاً تعیین کرد. مسئله عکس این موضوع، یعنی یافتن $\rho_{ch}(r)$ با استفاده از دانسته‌های مربوط به $d\sigma/d\Omega$ مشکلتر است. در شکل (۱-۲) ایده مربوط به نتایج داده‌های پراکندگی وارون آمده است.



شکل ۱-۲- چگالی بار الکتریکی $^{208}_{82}\text{Pb}$ [3]

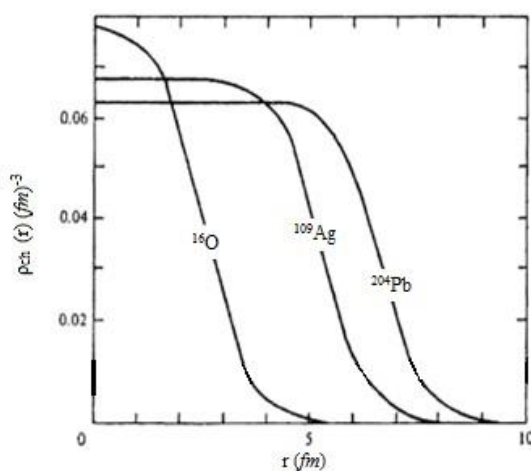
بطور معمول شکل قابل قبولی برای $\rho_{ch}(r)$ در نظر گرفته می‌شود به طوری که این شکل با عبارت ریاضی ساده، شامل چند پارامتر است. سازگارترین شکل مورد پذیرش طبق معادله (۲-۳) است.

$$\rho_{ch}(\vec{r}) = \frac{\rho_{ch}^0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}} \quad (2-3)$$

که در آن R و a پارامترهایی هستند که باید تعیین شوند. ρ_{ch}^0 نیز ثابت بهنجارش است، این ثابت به گونه‌ای انتخاب می‌شود که در شرط زیر صدق کند.

$$\int \rho_{ch}(\vec{r}) d^3\vec{r} = 4\pi \int_0^\infty \rho_{ch}(\vec{r}) r^2 dr \quad (4-2)$$

این عبارت فقط توزیع باری را توصیف می‌کند که بطور یکنواخت از مرکز هسته تا فاصله R گسترش یافته و در ناحیه خوش تعریفی نزدیک سطح به ضخامت تقریبی a ، این توزیع بار به صفر می‌گراید. در شکل (۲-۲) توزیع‌های بار هسته حاصل از داده‌های تجربی پراکندگی را برای یک هسته سبک، یک هسته متوسط و یک هسته سنگین نشان می‌دهد [4].



شکل ۲-۲- چگالی بار الکتریکی سه هسته سبک، متوسط و سنگین [3].

۴-۲- مدل‌های هسته‌ای

مدل‌های هسته‌ای به منظور توصیف جنبه‌های متفاوت هسته‌ها ارائه شده است که عبارتند از:

- ۱- مدل قطره مایعی
- ۲- مدل پوسته‌ای
- ۳- مدل شبه کوراک
- ۴- مدل خوشه هسته‌ای و ...

۴-۲-۱- مدل قطره مایعی

در این بخش یک روش نیمه تجربی را که منجر به رابطه ساده‌ای برای انرژی بستگی هسته‌ها می‌شود را معرفی می‌کنیم. این مدل بر جاذبه قوی بین نوکلئونی تأکید می‌کند که در سال ۱۹۳۵ پیشنهاد شد و در آن چند فرض اساسی وجود دارد [5].

- ۱- نیروی هسته‌ای برای هر نوکلئون یکسان است، یعنی به نوع آن که پروتون باشد یا نوترون بستگی ندارد.
 - ۲- پیوند بین نوکلئون‌ها به حالت اشباع می‌رسد.
 - ۳- هسته از ماده غیرقابل تراکم تشکیل شده است.
- فرمولی که در این مدل برای محاسبه انرژی بستگی هسته معرفی می‌شود بصورت معادله زیر است.

$$B_{tot}(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A} \pm \delta \quad (5-2)$$

که جملات در فرمول بالا به ترتیب از چپ به راست، جمله حجمی، جمله سطحی، جمله کولنی، جمله عدم تقارن و جمله تصحیح انرژی زوجیت می‌باشند.

۲-۴-۲- مدل پوسته‌ای

نظریه اتمی با استفاده از مدل پوسته‌ای توانسته است بطور کاملاً روشن، جزئیات پیچیده ساختار اتم‌ها را توضیح دهد، به همین دلیل متخصصان فیزیک هسته‌ای به امید آنکه بتوانند به توصیف روشنی از خواص هسته‌ها دست یابند، سعی کرده‌اند که در بررسی ساختار هسته‌ای از نظریه مشابهی استفاده کنند. در مدل پوسته‌ای اتم‌ها، پوسته‌ها را با الکترون که انرژی‌شان به ترتیب افزایش می‌یابد پر می‌کنند و این آرایش به گونه‌ای است که اصل طرد پائولی در آن رعایت می‌شود. بدین ترتیب، هر اتمی متشکل است از یک ناحیه مرکزی خنثی که پوسته‌های پر دارد و چند الکترون ظرفیت که خارج از ناحیه خنثی حضور دارند.

در این مدل فرض بر این است که عمده‌تاً همین الکترون‌های ظرفیت هستند که خواص اتم‌ها را تعیین می‌کنند. هنگامی که سعی می‌کنند تا این مدل را به قلمرو هسته‌ای گسترش دهند، از همان ابتدای

کار با چند مانع روبه رو می‌شویم، درمورد اتم‌ها، پتانسیل حاکم را میدان کولنی هسته تأمین می‌کند، یعنی یک عامل خارجی زیر پوسته یا مدارها را سازمان می‌دهد.

در این حالت معادله شرودینگر را با همین پتانسیل، همراه با تصحیحاتی در آن می‌توان حل کرد و انرژی لایه‌ها را محاسبه نمود، در صورتی که در مورد هسته‌ها هیچ پتانسیل یا عامل خارجی وجود ندارد. در مدل پوسته‌ای حرکت هر نوکلئون منفرد را تحت تأثیر پتانسیل واحدی که نوکلئون‌های دیگر همه در تولید آن شرکت دارند، در نظر گرفته می‌شود. یکی دیگر از مشکلات توسعه مدل لایه‌ای به قلمرو هسته‌ای این است که در مدل لایه‌ای اتمی، مدارهای فضایی برای الکترون‌ها داریم و خواص اتم‌ها برحسب این مدارها بررسی می‌شود و در این مدارها چون حجم الکترون در مقایسه با حجم اتم بسیار کوچک است برخوردی بین الکترون‌ها انجام نمی‌شود در حالی که در ابعاد هسته‌ای قطر نوکلئون‌ها در مقایسه با ابعاد هسته نسبتاً بزرگ است و یک نوکلئون ممکن در طی حرکتش در یک مدار، برخوردهای متعددی داشته باشد.

در تقریبی که برای مطالعه هسته‌های چند نوکلئونی به کار می‌رود، فرض براین است که نیروهایی را که توسط نوکلئون‌های دیگر بر یک نوکلئون وارد می‌شود می‌توان در تقریب اول با چاه پتانسیل نمایش داد. این چاه پتانسیل، پتانسیل مدل پوسته‌ای نامیده می‌شود. قدرت عمل این تقریب واضح است، زیرا مسئله پیچیده چند جسمی را به ساده‌ترین مسئله در فیزیک کوانتومی یعنی مسئله تک ذره در چاه پتانسیل تبدیل می‌کند.

اولین مرحله در مدل پوسته‌ای انتخاب پتانسیل هسته‌ای مناسب است. چاه نامتناهی، تقریب خوبی برای پتانسیل هسته‌ای نیست چون برای جدا کردن یک پروتون یا یک نوترون از هسته، با صرف انرژی کافی باید بتوانیم آن را از چاه خارج کنیم، پس عمق چاه بینهایت نیست. از طرفی لبه پتانسیل هسته‌ای نباید تیز باشد بلکه مثل توزیع بار، مقدار پتانسیل بعد از شعاع میانگین باید به آهستگی به

سمت صفر میل کند. از طرفی پتانسیل نوسانگر هماهنگ هم لبه‌اش به کافی تیز نیست و انرژی جدایی آن نیز بینهایت است، پس پتانسیلی که در نظر می‌گیریم بصورت معادله (۶-۲) است.

$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp\left(\frac{(r-R)}{a}\right)} \quad (۶-۲)$$

که به آن پتانسیل وود - ساکسون (Woods - Saxon) گفته می‌شود که در آن R شعاع میانگین و a ضخامت پوسته است که مقادیر آن‌ها به ترتیب عبارتند از: $R = 1.25 A^{1/3} \text{ fm}$, $a = 0.524 \text{ fm}$. عمق چاه V_0 چنان تنظیم می‌شود که برای انرژی‌هایی که از مرتبه 50 MeV است، مقادیر مناسبی به دست آید [4].

۲-۵- انرژی بستگی هسته

انرژی بستگی هسته را با $B_{\text{tot}}(A, Z)$ نشان می‌دهند که می‌توان آن را به دو روش زیر بیان کرد.

۱- انرژی بستگی یک هسته برابر جرمی است که وقتی Z پروتون و N نوترون گردهم آمده و هسته را تشکیل می‌دهند به انرژی تبدیل می‌شود و به هنگام تشکیل هسته مقداری انرژی برابر با انرژی بستگی هسته آزاد می‌شود.

۲- انرژی بستگی برابر با انرژی لازم برای شکستن هسته بصورت ذرات تشکیل دهنده آن یعنی Z پروتون و N نوترون است.

در واقع اختلاف بین جرم واقعی هسته و مجموع جرم تک تک نوکلئون‌های آن را به واحد انرژی انرژی بستگی کل می‌نامند. در محاسبات بجای جرم هسته‌ای، جرم اتمی در نظر گرفته می‌شود و واحد جرم اتمی که این واحد را با U نشان می‌دهند که بصورت معادله (۷-۲) تعریف می‌شود.

$$1U = \frac{1}{12}(m_{^{12}\text{C}}) \quad (۷-۲)$$

علت اینکه در محاسبات از جرم اتم بجای جرم هسته استفاده می‌شود اینست که انرژی بستگی الکترون و جرم آن در مقایسه با نوکلئون‌ها ناچیز می‌باشد، پس می‌توان از آن‌ها صرفه نظر کرد بدون اینکه در محاسبات اشکالی ایجاد کند.

$$B_{tot}(A, Z) = [ZM_p + NM_n - M_N(A, Z)]c^2 \quad (۸-۲)$$

که با اضافه و کم کردن ZMe به معادله فوق به معادله شماره (۹-۲) منجر می‌شود.

$$B_{tot}(A, Z) = [ZM_{p+e} + NM_n - M(A, Z)]c^2 \quad (۹-۲)$$

که در آن $M(A, Z)$ جرم اتمی است که هسته آن دارای جرم $M_N(A, Z)$ است [4].

۲-۶- انرژی جداسازی

مقدار انرژی لازم برای کندن یک ذره از هسته (که این ذره ممکن است نوترون، پروتون، ذره آلفا، دوترون و ... باشد) است. انرژی جداسازی را کار لازم برای جدا کردن یک ذره از هسته نیز می‌نامیم و آن را با S نشان می‌دهیم، البته وقتی چنین ذره‌ای توسط هسته‌گیر می‌افتد، این انرژی آزاد می‌شود. انرژی جدایی نوترون و پروتون به ترتیب با معادله‌های (۲-۱۰) و (۲-۱۱) تعریف می‌شوند.

$$s_n = [M_n + M_N(A-1, Z) - M_N(A, Z)]c^2 = B(A, Z) - B(A-1, Z) \quad (۲-۱۰)$$

$$s_p = [M_p + M_N(A-1, Z-1) - M_N(A, Z)]c^2 = B(A, Z) - B(A-1, Z-1) \quad (۲-۱۱)$$

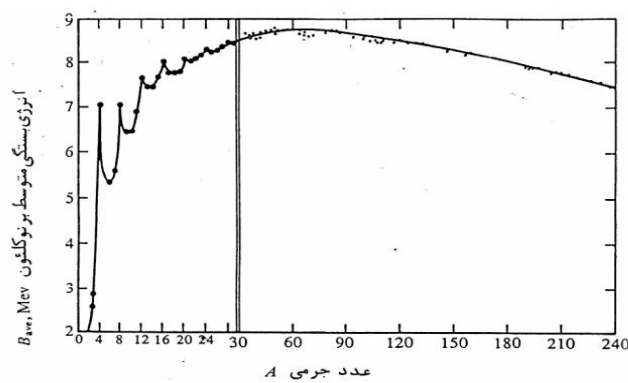
انرژی جداسازی در فیزیک هسته‌ای مانند انرژی یونش در اتم‌ها بر ساختار پوسته‌ای هسته دلالت می‌کند که مشابه ساختار پوسته‌ای اتم‌ها است.

۷-۲- انرژی بستگی متوسط بر نوکلئون

انرژی بستگی متوسط را با B_{ave} نشان می‌دهند که بصورت معادله زیر تعریف می‌شود.

$$B_{ave}(A, Z) = \frac{B_{tot}(A, Z)}{A} \quad (۱۲-۲)$$

که B_{tot} را می‌توان با اندازه‌گیری دقیق جرم توسط طیف سنجی جرمی بدست آورد. نمودار انرژی بستگی متوسط بر حسب عدد جرمی بصورت شکل (۳-۲) است.



شکل ۳-۲- انرژی بستگی متوسط بر حسب عدد جرمی [5].

تغییرات $B_{ave}(A, Z)$ بر حسب A با استفاده از داده‌های تجربی برای هسته‌های موجود در طبیعت مطابق شکل فوق است، اما این شکل چند ویژگی مهم دارد که عبارتند از :

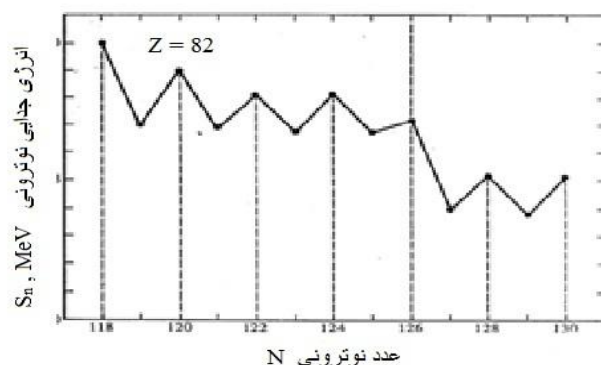
۱- منحنی جزء در ناحیه هسته‌های بسیار سبک، مقدار نسبتاً ثابتی را نشان می‌دهد و انرژی بستگی متوسط بسیار از هسته‌ها تقریباً در حدود 8 MeV برای هر نوکلئون است.

۲- منحنی در نقطه $A=60$ قله پهنی دارد و در همین ناحیه است که بستگی هسته‌ای به مقدار حداکثر می‌رسد و وجود این قله به این معنی است که به دو طریق می‌توان به تولید انرژی دست یافت. در نواحی پایین تر از $A=60$ از طریق ترکیب هسته‌های سبک و تشکیل هسته‌های سنگین‌تر و در نواحی بالاتر از $A=60$ از طریق شکستن هسته‌های سنگین و تبدیل آنها به هسته‌های سبک‌تر است. روش اول را همجوشی هسته‌ای (گداخت هسته‌ای) و روش دوم را شکافت هسته‌ای می‌نامند.

۳- انرژی بستگی متوسط در A های زیاد، کاهش می‌یابد و دلیل آن این است که با افزایش عدد اتمی، نیروی دافعه کولنی افزایش می‌یابد.

۴- افت انرژی بستگی متوسط در A های کم مربوط به این است که بستگی کامل نوکلئون‌ها فقط هنگامی به وجود می‌آید که نوکلئون به وسیله نوکلئون‌های دیگر احاطه شده باشد، چون برای نوکلئون‌ها در لایه‌ی بیرونی هسته این حالت اشباع پیش نمی‌آید و در هسته‌های سبک قسمت بیشتر نوکلئون‌هایش در سطح قرار می‌گیرد، پس انرژی بستگی کاهش می‌یابد.

۵- نکته بعدی که می‌توان به آن اشاره کرد افزایش انرژی بستگی متوسط بطور ناگهانی برای بعضی از هسته‌ها است، با توجه به این منحنی و منحنی S_n برحسب N که در شکل (۲-۳) نشان داده شده است، دیده می‌شود که برای یک Z معین S_n برای هسته‌های با N زوج بیشتر از S_n با N فرد است. همچنین برای یک N معین، S_p برای هسته‌های با Z زوج بیشتر از Z فرد می‌باشد که این اثر را زوجیت می‌نامند و باعث می‌شود که هسته‌های زوج-زوج پایدارتر از هسته‌های زوج-فرد و به همین ترتیب پایدارتر از هسته‌های فرد-فرد باشد.



شکل ۲-۴- انرژی جدایی نوترون برحسب عدد نوترونی [5].

فصل سوم

معرفی و کاربرد تبدیلات لاپلاس

۳-۱- تبدیلات لاپلاس و خواص آن

تبدیلات لاپلاس یکی از روش‌های حل معادلات دیفرانسیل است که در بسیاری از شاخه‌های کاربردی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. با استفاده از این روش، یک مسأله‌ی مقدار اولیه به یک معادله جبری

با یک دستگاه از معادلات جبری تبدیل می‌شود که با حل این معادلات و استفاده از جدول تبدیلات لاپلاس، می‌توان به جواب مسأله‌ی مقدار اولیه دست یافت. از تبدیلات لاپلاس در حل معادلات انتگرالی نیز استفاده می‌شود [7].

تعریف ۱: فرض کنید تابع f برای $0 \leq t < \infty$ تعریف شده و s یک متغیر حقیقی باشد. تابع F را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (۱-۳)$$

حوزه تعریف F مجموعه‌ی S هایی است که به ازای آن‌ها انتگرال فوق همگراست یعنی، S هایی که به ازای آن‌ها حد زیر موجود است:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f(t) dt \quad (۲-۳)$$

تابع $F(s)$ را تبدیل لاپلاس $f(t)$ می‌نامیم و آن را با $L\{f(t)\}$ نشان می‌دهیم. پس:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (۳-۳)$$

تعریف ۲: تابع $f(t)$ را در بازه متناهی $a \leq t \leq b$ پیوسته قطعه‌ای گوییم هرگاه بتوان این بازه را به تعداد متناهی زیر بازه تقسیم نمود بطوری که $f(t)$ در نقاط درونی این زیربازه پیوسته باشد و وقتی t به سمت نقاط انتهایی زیر بازه‌ها میل می‌کند، $f(t)$ دارای حد متناهی باشد.

تعریف ۳: تابع $f(t)$ را در بازه‌ی متناهی $0 \leq t < \infty$ پیوسته قطعه‌ای می‌نامیم هرگاه $f(t)$ در هر بازه‌ی متناهی به صورت $0 \leq t \leq b$ پیوسته قطعه‌ای باشد.

تعریف ۴: تابع $f(t)$ را در بازه‌ی $0 \leq t < \infty$ از مرتبه‌ی α ثابت‌های M و T باشند بطوری که:

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \forall t \geq T$$

(۴-۳)

قضیه ۱ (قضیه وجود): فرض کنید $f(t)$ در بازه $0 \leq t < \infty$ پیوسته قطعه‌ای و از مرتبه نمایی باشد، یعنی در شرط رابطه (۴) صدق کند. آنگاه $L\{f(t)\}$ برای $s > \alpha$ موجود است. از آن جا که می‌توان نوشت:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (۵-۳)$$

چون $e^{-st} f(t)$ پیوسته قطعه‌ای است، اولین انتگرال طرف راست موجود است. برای انتگرال دوم، با توجه به رابط (۴-۳)، داریم:

$$|e^{-st} f(t)| \leq M e^{-st} e^{\alpha t} = M e^{(\alpha-s)t}, t \geq T \quad (۶-۳)$$

اگر $s > \alpha$ ، آنگاه $\int_T^{\infty} M e^{(\alpha-s)t} dt$ همگراست، پس بنابر رابطه (۶-۳)، انتگرال $\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ نیز همگرا است و قضیه ثابت می‌شود و با توجه به اینکه شرایطی که در قضیه ۱ بیان شد، شرایط کافی بوده و این شرایط لازم نیستند.

قضیه ۲: اگر در بازه $0 \leq t \leq \infty$ پیوسته قطعه‌ای و از مرتبه نمایی باشد و $L\{f(t)\} = F(s)$ آن گاه:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad (۷-۳)$$

قضیه ۲ به این ترتیب اثبات می‌شود که اگر اعداد مثبت M_1, T و عدد حقیقی α وجود دارند به طور

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha t}, t \geq T$$

کلی می‌توان نوشت:

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (۸-۳)$$

از آنجا که f در بازه متناهی $0 \leq t \leq T$ پیوسته‌ی قطعه‌ای است، عدد مثبت M_2 وجود دارد بطوری که:

$$|f(t)| \leq M_2, 0 \leq t \leq T$$

بنابراین

$$|F(s)| \leq M_2 \int_0^T e^{-st} f(t) dt + M_1 \int_T^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt \quad (9-3)$$

$$|F(s)| \leq M_2 \frac{1}{s} (1 - e^{-sT}) + M_1 \frac{1}{s-\alpha} e^{-(s-\alpha)T}, \quad s > \alpha \quad (10-3)$$

حال از نامساوی فوق داریم $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ و قضیه ثابت می‌شود.

از قضیه ۲ نتیجه می‌شود که اگر $F(s)$ تابع مفروضی باشد به طوری که $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$ آن گاه $F(s)$ نمی‌تواند تبدیل لاپلاس تابعی مانند $f(t)$ باشد.

قضیه ۳ (خاصیت خطی بودن): فرض کنید $f_1(t)$ و $f_2(t)$ دو تابع باشند که تبدیل لاپلاس آن‌ها موجود است. اگر C_1 و C_2 دو ثابت دلخواه باشند، آن‌گاه:

$$L\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} = C_1 L\{f_1(t)\} + C_2 L\{f_2(t)\} \quad (11-3)$$

اثبات: بنا به تعریف می‌توان نوشت

$$L\{C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} [C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)] dt \quad (12-3)$$

چون هریک از انتگرال‌های فوق موجود هستند به رابطه (۱۱-۳) منجر می‌شود. اگر یکی از ثابت‌ها صفر باشد، بدست می‌آوریم:

$$L\{cf(t)\} = cL\{f(t)\} \quad (13-3)$$

قضیه فوق را می‌توان برای هر تعداد متناهی از توابع تعمیم داد.

قضیه ۴ (قضیه اول انتقال): اگر $L\{f(t)\} = F(s)$ آن گاه

$$L\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) \quad (14-3)$$

که اثبات رابطه فوق بصورت زیر است:

$$L\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a) \quad (15-3)$$

قضیه ۵ (تبدیل لاپلاس مشتق): فرض کنید $f(t)$ برای $t \geq 0$ پیوسته و $f'(t)$ برای $t \geq 0$ پیوسته قطعه‌ای باشد و تبدیل لاپلاس هردو تابع برای $s > s_0$ موجود باشند که s_0 عددی مفروض است. در این صورت

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) \quad (16-3)$$

اگر f' و f'' همان شرایطی که در قضیه بیان شد را داشته باشند، آنگاه از قضیه فوق نتیجه می‌شود که

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \quad (17-3)$$

بطور کلی اگر هریک از توابع f' و f'' و ... و $f^{(n)}$ در شرایط قضیه ۱ صدق کنند، آنگاه داریم [۷].

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \quad (18-3)$$

۳-۲- تبدیلات معکوس لاپلاس

تعریف ۵: فرض کنید تبدیل لاپلاس تابع f موجود و تابع F باشد، یعنی:

$$L\{f(t)\} = F(s) \quad (19-3)$$

در این صورت f را تبدیل معکوس F می‌نامیم و می‌نویسیم

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} \quad (20-3)$$

با توجه به اینکه در رابطه (۱) تابع F یکتاست، زیرا L در واقع یک تابع است، اما اگر $F(s)$ مفروضی باشد و $f(t)$ تابعی باشد که در رابطه (۱) صدق کند، آنگاه لزوماً $f(t)$ یکتا نیست، شرط یکتا بودن در قضیه زیر داده می‌شود.

قضیه ۶: اگر تابع f و g بر بازه $0 \leq t < \infty$ پیوسته قطعه‌ای باشند به طوری که تبدیل لاپلاس آن‌ها

موجود، آنگاه در هر نقطه‌ی t که f و g پیوسته باشند، $f(t) = g(t)$. از این قضیه نتیجه می‌شود که اگر

$f(t)$ پیوسته و با لاپلاس معکوس $F(s)$ برابر باشد آنگاه $f(t)$ یکتاست.

قضیه ۷ (خاصیت خطی بودن): اگر f_1 و f_2 به ترتیب تبدیل معکوس F_1 و F_2 باشند، یعنی

$$f_1(t) = L^{-1}\{F_1(s)\} \quad , \quad f_2(t) = L^{-1}\{F_2(s)\} \quad (21-3)$$

آن گاه :

$$L^{-1}\{c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)\} = c_1 L^{-1}\{F_1(s)\} + c_2 L^{-1}\{F_2(s)\} \quad (22-3)$$

که اثبات این قضیه بسادگی از خاصیت خطی بودن L نتیجه می شود [۷].

قضیه ۸ (تبدیل لاپلاس انتگرال): اگر $F(s) = L\{f(t)\}$ برای $s > s_0 \geq 0$ موجود باشد، آن گاه:

$$L\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} = \frac{F(s)}{s}, \quad s > s_0 \geq 0 \quad (23-3)$$

برای اثبات رابطه فوق تابع $g(t)$ را بصورت زیر تعریف می کنیم

$$g(t) = \int_0^t f(x)dx, \quad t \geq 0 \quad (24-3)$$

داریم $g(0)=0$ و برای هر t که f در آن پیوسته باشد، می توان نوشت $g'(t)=f(t)$ حال داریم:

$$L\{f(t)\} = L\{g'(t)\} = sL\{g(t)\} - g(0) = sL\{g(t)\} \quad (25-3)$$

و یا

$$F(s) = sL\left\{\int_0^t f(x)dx\right\} \quad (26-3)$$

و قضیه ثابت می شود و از رابطه (۵) می توان نتیجه گرفت که:

$$L^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(x)dx \quad (27-3)$$

۳-۳- مشتق گیری از تبدیلات لاپلاس

فرض کنید $F(s) = L\{f(t)\}$ برای $s > a$ موجود باشد بنابر تعریف، داریم

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \quad (28-3)$$

از رابطه (۲۳-۳) نسبت به s مشتق می گیریم، آنگاه با فرض آنکه بتوانیم ترتیب مشتق گیری و

انتگرال گیری را عوض کنیم، خواهیم داشت:

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = - \int_0^\infty e^{-st} (tf(t))dt = -L\{tf(t)\} \quad (29-3)$$

$$L\{tf(t)\} = -F'(s) \quad (30-3)$$

بطور کلی به استقرا می‌توان نشان داد که برای هر n صحیح و مثبت داریم:

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \quad (31-3)$$

قضیه ۹ (انتگرال گیری از تبدیلات لاپلاس): فرض کنید $F(s) = L\{f(t)\}$ برای $s > 0$ موجود و

رابطه $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$ نیز موجود باشد. آن‌گاه

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty F(v)dv, \quad s > 0 \quad (32-3)$$

پس با فرض آن که انتگرال‌ها همگرا باشند، می‌توان نوشت:

$$\int_0^\infty F(s)ds = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt \quad (33-3)$$

۳-۴- کاربرد تبدیلات لاپلاس در حل تحلیلی معادله کلاین-گوردن

در این بخش حل دقیقی از معادله کلاین-گوردن در حضور پتانسیل اسکالر شبه کولنی و پتانسیل

بردارای ارائه می‌شود که در آن از رهیافت تبدیلات لاپلاس برای دستیابی به ویژه مقادیر انرژی و ویژه

توابع متناظر برای حالت‌های کوانتومی متفاوت استفاده شده است [۸].

در میان توابع موج مختلف در هر دو حالت نسبیتی و غیر نسبیتی، معادله کلاین-گوردن به دلیل

توصیف مناسب ذرات با اسپین صفر بسیار مورد توجه قرار گرفته است همچنین از پتانسیل‌هایی

استفاده شده است که تقارن کروی دارند زیرا این پتانسیل های نیز کاربرد گسترده ای در شاخه های مختلف فیزیک دارند. معادله (۳-۳۴) برای معرفی این معادله در نظر گرفته شده است.

$$\{-\nabla^2 + [M + S(r)]^2\} \psi_{n,l}(r) = [E_{n,l} - V(r)]^2 \psi_{n,l}(r) \quad (3-34)$$

کمیت های استفاده شده در معادله (۳-۳۴) بصورت زیر معرفی می شود.

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}, \quad S(r) = -\frac{Z_s}{r}, \quad V(r) = -\frac{Z_v}{r} \quad (Z_s, Z_v > 0) \quad (3-35)$$

با قرار گرفتن کمیت های رابطه (۳-۳۵) در معادله (۳-۳۴)، معادله (۳-۳۶) حاصل شده است.

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + [M^2 - \frac{2MZ_s}{r} + \frac{Z_s^2}{r^2}] \right\} \psi_{n,l}(r) = \left[E_{n,l}^2 + \frac{2E_{n,l}Z_v}{r} + \frac{Z_v^2}{r^2} \right] \psi_{n,l}(r) \quad (3-36)$$

تابع موج به صورت $\psi_{n,l}(r) = r^A f(r)$ تعریف می شود که کمیت A مقدار ثابت دارد و با قرار دادن آن در معادله (۳-۳۶) به فرم معادله (۳-۳۷) تبدیل می شود.

$$\frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2(A+1)}{r} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} \{ (E_{n,l}^2 - M^2) r^2 + 2(MZ_s + E_{n,l}Z_v) r + (A(A+1) - \ell(\ell+1) - (Z_s^2 - Z_v^2)) \} f(r) = 0 \quad (3-37)$$

با استفاده از رابطه فوق مقدار کمیت A بصورت زیر بدست آمده است.

$$A^2 + A + C = 0 \rightarrow A = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4C}}{2} \quad (3-38)$$

$$C = -\ell(\ell+1) - (Z_s^2 - Z_v^2) \quad (3-39)$$

با استفاده از رابطه (۳-۳۹)، کمیت های زیر برای کوتاه نویسی در رابطه ها معرفی می شود.

$$D = 2(MZ_s + E_{n,l}Z_v), \quad P = (E_{n,l}^2 - M^2) \quad (3-40)$$

و به این ترتیب معادله (۴) به صورت زیر اصلاح می شود.

$$r \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + 2(A+1) \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{r} [Pr^2 + Dr] = 0 \quad (3-41)$$

$$rf''(r) + 2(A+1)f'(r) + \frac{1}{r} [Pr^2 + Dr] f(r) = 0$$

$$(۴۲-۳)$$

با استفاده از تبدیلات لاپلاس که در زیر معرفی شده است،

$$L\{f(r)\} = f(t) = \int_0^\infty dr e^{-tr} f(t) \quad (۴۳-۳)$$

$$L\{rf''(r)\} + 2(A+1)L\{f'(r)\} + PL\{rf(r)\} + DL\{f(r)\} = 0 \quad (۴۴-۳)$$

$$L\{rf''(r)\} = -2tf(t) - t^2 f'(t) \quad (۴۵-۳)$$

$$L\{f'(r)\} = tf(t) - f(r=0) \quad (۴۶-۳)$$

$$L\{f(r)\} = f(t) \quad (۴۷-۳)$$

$$L\{rf(r)\} = -f'(t) \quad (۴۸-۳)$$

معادله دیفرانسیل مرتبه اول با به کارگیری از تبدیلات فوق به فرم زیر حاصل می شود.

$$(t^2 + P)f'(t) - (2At + D)f(t) = 0 \quad (۴۹-۳)$$

با حل معادله (۴۹-۳) به فرم زیر منتهی می شود.

$$\ln f(t) = \ln(t + P)^{2A} + \ln\left(\frac{t - P^{1/2}}{t + P^{1/2}}\right)^{\frac{D}{2P^{1/2}} + A} \quad (۵۰-۳)$$

برای بدست آوردن یک تابع تک مقدار باید

$$n = A + \frac{D}{2P^{1/2}} \quad (۵۱-۳)$$

با توجه به شرایط و استفاده از بسط دو جمله ای معادله (۵۰-۳) به فرم زیر تبدیل می شود.

$$f_{n,l}(t) \approx \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!m!} (t + P^{1/2})^{2A-m} (2P^{1/2})^m \quad (۵۲-۳)$$

تبدیل معکوس لاپلاس به فرم زیر تعریف و برای معادله (۵۲-۳) به کار برده می شود.

$$L^{-1}\{f(t)\} = f(r) \quad , \quad L^{-1}\left\{\frac{1}{(t-a)^n}\right\} = \frac{r^{n-1}e^{ar}}{(n-1)!} \quad (۵۳-۳)$$

با اعمال تبدیل فوق رابطه زیر نتیجه می شود که در این رابطه ضریب $N_{n,l}$ ثابت نرمالیزاسیون است.

$$f_{n,l}(r) = N_{n,l} r^{-2A-1} e^{-rP^{1/2}} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{(n-m)! m!} \frac{\Gamma(-2A)}{\Gamma(m-2A)} (2rP^{1/2})^m \quad (54-3)$$

با توجه به شرایط رابطه (54-3)، توابع فوق هندسی را بصورت زیر تعریف می شود.

$${}_1F_1(-n, \sigma, x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{(n-m)! m!} \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma+m)} x^m \quad (55-3)$$

پس به این ترتیب معادله (54-3) به فرم زیر نیز قابل توصیف است.

$$f(r) = N_{n,l} r^{-2A-1} e^{-rP^{1/2}} {}_1F_1(-n, -2A, (2rP^{1/2})) \quad (56-3)$$

ارتباط بین توابع فوق هندسی^۱ و توابع لاگر^۲ که بصورت زیر تعریف می شود [۷].

$$L_n^\eta(x) = \frac{\Gamma(n+\eta+1)}{n! \Gamma(\eta+1)} {}_1F_1(-n, \eta+1, x) \quad (57-3)$$

معادله (56-3) که به فرم زیر بازنویسی می شود، همان معادله موج سیستم است که تغییر متغیرهایی که در اول این بخش معرفی شد در آن اعمال شده است.

$$f_{n,l}(r) = \frac{n! \Gamma(-2A)}{\Gamma(n-2A)} N_{n,l} r^{-2A-1} e^{-rP^{1/2}} L_n^{-2A-1}(2rP^{1/2}) \quad (58-3)$$

همچنین با جایگذاری مقادیر ثابت تعریف شده و با استفاده از رابطه (51-3) انرژی سیستم از رابطه زیر محاسبه می شود.

$$n + \frac{1 + \sqrt{1 + 4\ell(\ell+1) + 4(Z_s^2 - Z_v^2)}}{2} = \frac{(MZ_s + E_{n,l}Z_v)}{\sqrt{(E_{n,l}^2 - M^2)}} \quad (59-3)$$

در جدول (۱-۳) تعدادی از نتایج عددی با استفاده از نرم افزارهای محاسباتی، محاسبه شده است و تابع موج سیستم برای حالت های مختلف در شکل (۱-۳) آورده شده است، همچنین رفتار ویژه

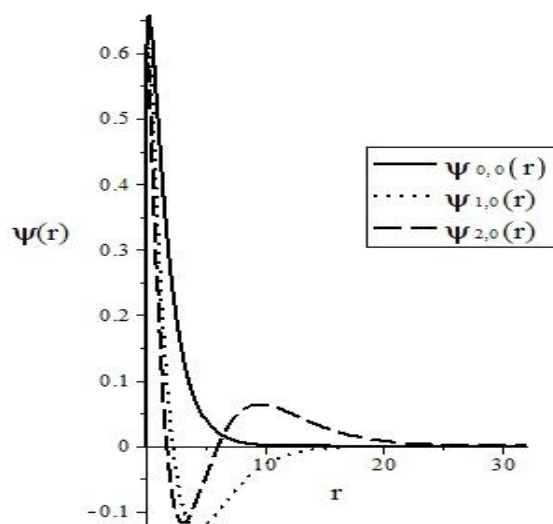
^۱ . Confluent hypergeometric function

^۲ . Laguerre polynomials function

مقادیر انرژی سیستم به ازای مقادیر مختلف Z_1 و Z_2 و مقادیر مختلف n و l در شکل های (۳-۲) و (۳-۳) ارائه شده است.

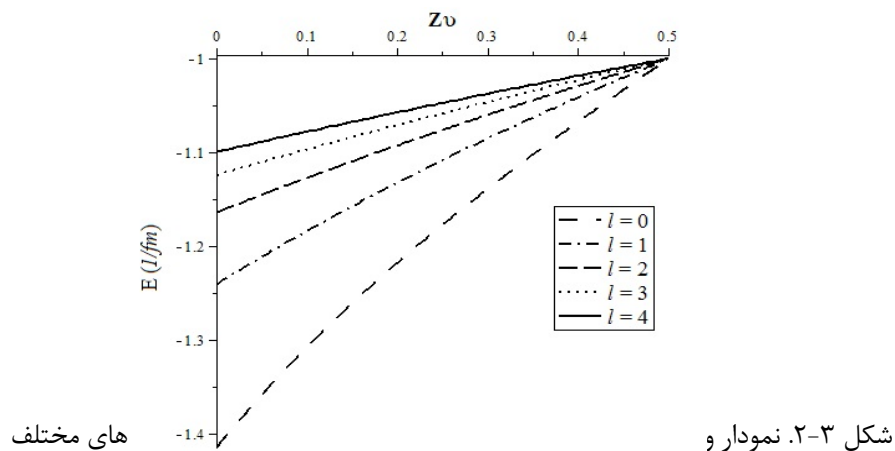
جدول ۳-۱. ویژه مقادیر انرژی برای حالت های مختلف سیستم

$ n,l\rangle$	$Z_s = 0.5, Z_v = 0.2$	$ n,l\rangle$	$Z_s = 0.5, Z_v = 0.2$
$ 0,0\rangle$	-1.۲۱۷۶۷۰۰۱۷	$ 2,0\rangle$	-۱.۰۸۸۸۰۳۸۲۲
$ 0,1\rangle$	-۱.۱۳۲۲۴۹۵۵۰	$ 2,1\rangle$	-۱.۰۷۰۲۸۳۳۰۹
$ 0,2\rangle$	-۱.۰۹۲۵۴۵۳۷۷	$ 2,2\rangle$	-۱.۰۵۷۲۳۳۸۵۳
$ 0,3\rangle$	-۱.۰۷۰۹۲۴۱۲۴	$ 2,3\rangle$	-۱.۰۴۸۱۵۵۰۷۹
$ 0,4\rangle$	-۱.۰۵۷۴۳۵۲۵۰	$ 2,4\rangle$	-۱.۰۴۱۵۳۲۴۱۸
$ 1,0\rangle$	-۱.۱۳۶۱۴۴۰۷۴	$ 3,0\rangle$	-۱.۰۶۸۵۲۰۷۹۴
$ 1,1\rangle$	-۱.۰۹۱۷۸۶۹۴۴	$ 3,1\rangle$	-۱.۰۵۶۹۴۲۸۶۶
$ 1,2\rangle$	-۱.۰۷۰۷۲۷۱۴۳	$ 3,2\rangle$	-۱.۰۴۸۰۶۴۱۹۱
$ 1,3\rangle$	-۱.۰۵۷۳۶۲۷۷۵	$ 3,3\rangle$	-۱.۰۴۱۴۹۴۵۰۸
$ 1,4\rangle$	-۱.۰۴۸۲۰۶۱۴۴	$ 3,4\rangle$	-۱.۰۳۶۴۸۱۸۲۳



شکل ۳-۱. توابع موج سیستم به ازای مقادیر $Z_s=0.5$, $Z_v=0.2$ که برای عدد کوانتومی اصلی n از ۰ تا ۲.

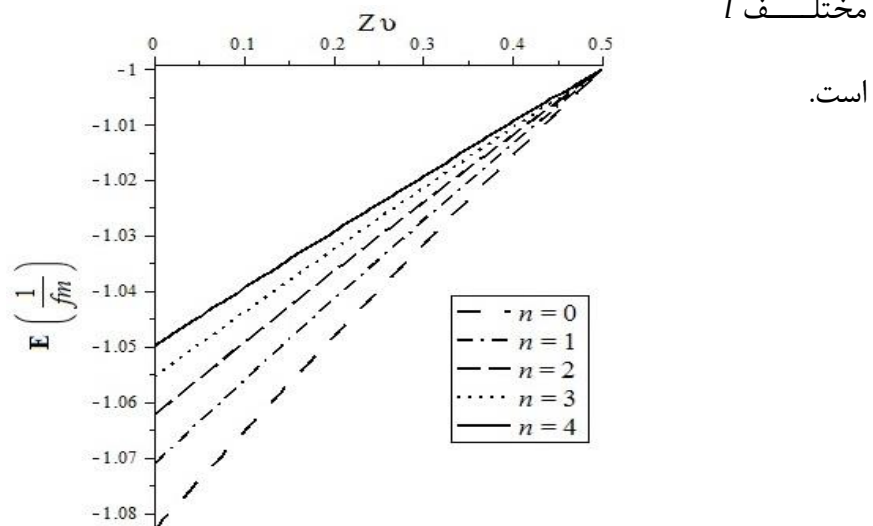
شکل فوق نمودار توابع موج برای یک سیستم دو ذره‌ای است که تحت یک پتانسیل کولنی بررسی شده است. مشاهده می‌شود در حالتی که عدد کوانتومی اصلی n معادل صفر است نمودار تابع موج مماس بر محور افقی و در هیچ نقطه‌ای این محور را قطع نمی‌کند ولی برای $n=1$ نمودار تابع موج محور افقی را در یک نقطه و برای $n=2$ نمودار تابع موج محور افقی در دو نقطه قطع می‌کند که معرف این نکته است که تابع موج بدست آمده برای سیستم با پدیده‌های فیزیکی قابل توجیه است.



در شکل ۲-۳ نمودار ویژه مقادیر انرژی با تغییر ثابت Z_v برای مقادیر مختلف l رسم شده است که نشان می‌دهد با افزایش l انرژی بستگی سیستم (عمق چاه پتانسیل) کاهش می‌یابد و با افزایش ثابت پتانسیل Z_v فاصله بین ویژه مقادیر انرژی کاهش یافته و در نزدیکی یک مقدار مشخص سیستم برای تمام l ها دارای یک تبهگنی می‌شود شاید بتوان اینطور توصیف کرد که به ازای مقادیر $Z_v=0.5$ ذره از قید موجود

مختلف l

برای آن بی معنی



شکل ۳-۳. نمودار تغییرات انرژی برحسب Z_v برای $M=1$, $Z_s=0.5$ برای n های متفاوت.

توضیحات

ارائه شده برای شکل قبلی برای شکل ۳-۳ صدق می کند با این تفاوت که در این شکل ویژه مقادیر انرژی برای مقادیر مختلف n محاسبه و رسم شده است.

فصل چهارم

بررسی سیستم های چند ذره ای

۴-۱- سیستم های دو ذره ای (دوترون)

۴-۱-۱- خواص نیروی بین نوکلئون ها

نیروی نوکلئون- نوکلئون دارای خواص زیر است [3]:

۱- نیروی هسته ای دارای بردی در حدود شعاع هسته است و در فواصل بلندتر، این نیرو بسیار ضعیف می شود.

۲- این نیرو در فواصل کوتاه قویتر از نیروی کولنی است.

۳- نیروی بین نوکلئون ها تقریباً مستقل از نوع نوکلئون ها است.

۴- بعضی از ذرات مانند الکترون ها تحت تأثیر نیروی هسته ای قرار نمی گیرند.

۵- نیروی نوکلئون - نوکلئون به اسپین نوکلئون‌ها بستگی دارد.

۴-۱-۲- دوترون

دوترون از یک پروتون و یک نوترون تشکیل شده است. دوترون دارای هیچ حالت برانگیخته‌ای نیست. انرژی بستگی آن در حدود $B_{\text{tot}} = 2.224 \text{ MeV}$ است که برای محاسبه آن می‌توان از اندازه‌گیری پرتوهای گامای گسیل شده از گیراندازی نوترون حرارتی توسط پروتون تعیین کرد.



و انرژی بستگی دوترون به فرم معادله (۲-۴) محاسبه می‌شود:

$$\left[m({}^1H) + m(n) - m({}^2H) \right] c^2 = 2.22463 \text{ MeV} \quad (۲-۴)$$

که این مقدار برابر انرژی فوتون تولید شده است.

اسپین دوترون برابر با یک است که اسپین کل دوترون برابر با برآیند اسپین ذاتی پروتون و نوترون و تکانه زاویه ای نوکلئون‌ها حول مرکز جرمشان است.

$$I = S_p + S_n + l$$

$$I = 1, \quad S_p = \frac{1}{2}, \quad S_n = \frac{1}{2}, \quad l = ? \quad (۳-۴)$$

از طرفی برآیند اسپین پروتون و نوترون می‌تواند برابر یک یا صفر باشد، در این صورت l می‌تواند دارای مقادیر $l = 0, 1, 2$ باشد. پاریته دوترون زوج است که با توجه به اینکه پاریته از رابطه $l^{(-1)}$ بدست می‌آید، می‌توان به این نتیجه رسید که $l = 1$ قابل قبول نیست. گشتاور دوقطبی مغناطیسی دوترون $\mu = 0.85\mu_N$ و گشتاور چارقطبی الکتریکی آن نیز برابر $Q = 0.00282 \text{ b}$ است [5].

۴-۲- پتانسیل یوکاوا

در سال ۱۹۳۵ هیدکی یوکاوا^۱، فیزیکدان ژاپنی یک پتانسیل ریاضی به منظور نمایش برهم کنش نوکلئون - نوکلئون پیشنهاد کرد. یوکاوا تلاش کرد تا پتانسیلی بیابد که تبادل ذراتی که منجر به نیروی هسته‌ای می‌شوند را توصیف کند. اگر m جرم در حال سکون ذره مبادله شده باشد آنگاه تا زمانی که t بزرگتر از آنچه رابطه عدم قطعیت مجاز می‌شمارد، نباشد، یک ذره مجاز می‌تواند خلق شود و برای مدت زمان t مطابق معادله (۴-۴) دوام داشته باشد.

$$t = \frac{\hbar}{mc^2} \quad (۴-۴)$$

در این صورت بزرگترین مسافتی که ذره می‌تواند حرکت کند مطابق معادله (۵-۴) است.

$$x = ct = \frac{\hbar c}{mc^2} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{mc^2} \quad (۵-۴)$$

بنابراین برای برد یک فرمی جرم ذره مبادله شده از مرتبه $200 \frac{\text{MeV}}{c^2}$ است. از سوی دیگر فوتون‌ها دارای جرم سکون صفر و برد نامحدود هستند. معادلات اساسی میدان‌های الکترومغناطیس نمی‌توانند برای میدان هسته‌ای به کار روند، زیرا در این مورد ذرات میدان بدون جرم هستند. به رابطه‌ای نیاز است که با رابطه اساسی نسبیتی معادله (۶-۴) که انرژی و جرم در حال سکون را پیوند می‌دهد، سازگار باشد.

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (۶-۴)$$

که در نظریه کوانتومی به انرژی، عملگر $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ و به تکانه عملگر $-i\hbar \nabla$ نسبت داده می‌شود، با استفاده از این جایگذاری‌ها در رابطه (۶-۴)، معادله دیفرانسیل نسبیتی شبیه معادله (۷-۴) حاصل می‌شود که معادله کلاین - گوردن نامیده می‌شود.

$$\left(\nabla^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

^۱Hideki Yukawa

(۷-۴)

که در معادله فوق φ دامنه میدان را نشان می‌دهد. حال به دنبال پتانسیلی استاتیکی خواهیم بود که جواب مستقل از زمان معادله (۸-۴) باشد.

$$\nabla^2 \varphi - k^2 \varphi = 0 \quad (۸-۴)$$

که در آن $k = \frac{mc}{\hbar}$ است. در مختصات شعاعی، جواب متقارن کروی معادله فوق بصورت رابطه (۹-۴) است.

$$\varphi = g \frac{e^{-kr}}{r} \quad (۹-۴)$$

که در معادله فوق ثابت g نمایانگر قدرت میدان پایونی است. بنابر محاسبات یوکاوا نیروی هسته‌ای باید مرتبه‌ای از $k^{-1} = \frac{\hbar}{mc}$ داشته باشد. حل معادله شرودینگر با استفاده از پتانسیل یوکاوا در دوره‌های گذشته با استفاده از روش‌های عددی و اختلالی به طور وسیعی مورد مطالعه قرار گرفته است. در این فصل حل تحلیلی معادله کلاین-گوردن با استفاده از پتانسیل یوکاوا مورد بررسی قرار گرفته است.

۳-۴- محاسبه انرژی بستگی دوترون

پتانسیل یوکاوا به فرم معادله زیر بیان می‌شود [11].

$$V(r) = -\lambda \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (۱۰-۴)$$

فرم عمومی معادله کلاین-گوردن نیز بصورت زیر بیان می‌شود.

$$\{-\nabla^2 + [\mu + S(r)]^2\} \psi(r) = [E - V(r)]^2 \psi(r) \quad (۱۱-۴)$$

فرم شعاعی عملگر لاپلاسین را بصورت رابطه (۱۲-۴) تعریف می‌شود.

$$\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (۱۲-۴)$$

در فرم معادله کلاین-گوردن معمولاً پتانسیلی که همراه با جرم معرفی می‌شود پتانسیل از جنس نرده‌ای است و پتانسیلی که همراه با انرژی در طرف دیگر رابطه معرفی می‌شود پتانسیلی از جنس پتانسیل برداری است، در این بخش هردو پتانسیل به صورت معادل برابر پتانسیل یوکاوا در نظر گرفته می‌شود.

$$S(r) = V(r) = -\lambda \frac{e^{-\alpha r}}{r} \quad (13-4)$$

با قرار گرفتن رابطه (13-4) در رابطه (11-4) به فرم معادله (14-4) منتهی می‌شود.

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \mu^2 - \frac{2\mu\lambda e^{-\alpha r}}{r} + \frac{\lambda^2 e^{-2\alpha r}}{r^2} \right] \psi(r) = \left[E^2 + \frac{2E\lambda e^{-\alpha r}}{r} + \frac{\lambda^2 e^{-2\alpha r}}{r^2} \right] \psi(r) \quad (14-4)$$

برای حذف مشتق اول از صورت معادله (14-4)، تغییر متغیری که با رابطه (15-4) معرفی شده است در رابطه (14-4) اعمال می‌شود.

$$\psi(r) = \frac{U(r)}{r} \quad (15-4)$$

پس از اعمال تغییر متغیر، فرم معادله (16-4) حاصل می‌شود.

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2\lambda(\mu+E)e^{-\alpha r}}{r} + E^2 - \mu^2 \right\} U(r) = 0 \quad (16-4)$$

فرم معادله (17-4) با قرار گرفتن ثابت‌هایی که در رابطه (18-4) معرفی شده است حاصل می‌شود.

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}(B) - \frac{1}{r^2}(C) + D \right\} U(r) = 0 \quad (17-4)$$

$$\begin{cases} B = 2\lambda(\mu+E)e^{-\alpha r} \\ C = \ell(\ell+1) \\ D = E^2 - \mu^2 \end{cases} \quad (18-4)$$

برای امکان استفاده از تبدیلات لاپلاس، تغییر متغیر رابطه (19-4) معرفی می‌شود.

$$U(r) = r^A f(r) \quad (۱۹-۴)$$

به این ترتیب معادله (۱۷-۴)، پس از اعمال تغییر متغیر به فرم معادله (۲۰-۴) تبدیل می‌شود.

$$\left\{ \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2A}{r} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} (D(r^2) + B(r) + A(A-1) - C) f(r) \right\} = 0 \quad (۲۰-۴)$$

و با استفاده از رابطه (۲۰-۴) مقداری برای ثابت A به فرم رابطه (۲۱-۴) بدست آمده است که فقط به ازای مقادیر منفی نتایج بدست آمده مناسب است.

$$(A^2 - A - C) = 0 \rightarrow A = \frac{1 \pm \sqrt{1-4C}}{2} \quad (۲۱-۴)$$

بعد از آن فرم معادله (۲۲-۴) بدست آمده است.

$$\left\{ \frac{d^2 f(r)}{dr^2} + \frac{2A}{r} \frac{df(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} (D(r^2) + B(r)) f(r) \right\} = 0 \quad (۲۲-۴)$$

می‌توان رابطه (۲۲-۴) را به فرم زیر بازنویس کرد.

$$\left\{ rf''(r) + 2Af'(r) + \frac{1}{r} (D(r^2) + B(r)) f(r) \right\} = 0 \quad (۲۳-۴)$$

اکنون رابطه (۲۳-۴) به گونه‌ای است که می‌توان رهیافت تبدیل لاپلاس را بر این معادله اعمال کرد

که اثر عملگر تبدیل لاپلاس بر روی جمله‌های رابطه (۲۳-۴) بصورت مجزا آورده شده است [7].

$$L\{rf''(r)\} = -2tf(t) - t^2 f'(t) \quad (۲۴-۴)$$

$$L\{f'(r)\} = tf(t) - f(r=0) \quad (۲۵-۴)$$

$$L\{f(r)\} = f(t) \quad (۲۶-۴)$$

$$L\{rf(r)\} = -f'(t) \quad (۲۷-۴)$$

با قرار گرفتن روابط تبدیل یافته در رابطه (۲۳-۴) فرم جدیدی برای این معادله حاصل شده است.

$$(t^2 + D) f'(t) - [2(A-1)t + B] f(t) = 0 \quad (۲۸-۴)$$

با استفاده از جداسازی متغیرها در رابطه (۲۸-۴) به فرم رابطه (۲۹-۴) منجر شده است.

$$\int \frac{df(t)}{f(t)} = \int \frac{[(2A-2)t + B]}{(t^2 + D)} dt$$

(۲۹-۴)

با توجه به فرم رابطه (۲۹-۴) و حل انتگرال مربوطه، رابطه (۳۰-۴) حاصل می شود.

$$\ln f(t) = (2A-2) \int \frac{t}{(t^2 - (iD^{1/2})^2)} dt + B \int \frac{1}{(t^2 - (iD^{1/2})^2)} dt \quad (۳۰-۴)$$

پاسخ انتگرال ها که به وسیله روابط (۳۱-۴) و (۳۲-۴) معرفی شده است [7].

$$\int \frac{t}{(t^2 - (iD^{1/2})^2)} dt = \frac{1}{2} \ln(t^2 + D) \quad (۳۱-۴)$$

$$\int \frac{1}{(t^2 - (iD^{1/2})^2)} dt = \frac{1}{2iD^{1/2}} \ln\left(\frac{t - iD^{1/2}}{t + iD^{1/2}}\right) \quad (۳۲-۴)$$

با قرار گرفتن پاسخ انتگرال ها در معادله (۳۰-۴) به فرم معادله (۳۳-۴) منجر می شود.

$$\ln f(t) = (A-1) \ln(t^2 + D) + \frac{B}{2iD^{1/2}} \ln\left(\frac{t - iD^{1/2}}{t + iD^{1/2}}\right)$$

$$\ln f(t) = \ln(t - iD^{1/2})^{A-1} + \ln(t + iD^{1/2})^{A-1} + \ln(t + D^{1/2})^{\frac{-B}{2iD^{1/2}}} - \ln(t - iD^{1/2})^{\frac{-B}{2iD^{1/2}}} \quad (۳۳-۴)$$

(۳۴-۴)

$$\ln f(t) = \ln(t - iD^{1/2})^{2A-2} + \ln\left(\frac{t + iD^{1/2}}{t - iD^{1/2}}\right)^{\frac{-B}{2iD^{1/2}} + A-1} \quad (۳۵-۴)$$

رابطه (۳۶-۴) معادل یک مقدار ثابت در نظر گرفته می شود تا به یک تابع تک مقدار منجر شود.

$$n = \frac{-B}{2D^{1/2}} + A - 1 \quad (۳۶-۴)$$

بدین ترتیب

$$\ln f(t) = \ln(t - iD^{1/2})^{2A-2-n} + \ln(t + iD)^n \quad (۳۷-۴)$$

در این مرحله از تقریب رابطه (۳۸-۴) استفاده شده است.

$$f(t) \approx (t - iD^{1/2})^{2A-2-n} (t + iD)^n \quad (۳۸-۴)$$

جمله دوم رابطه (۳۸-۴) به وسیله بسط دوجمله ای منجر به رابطه (۳۹-۴) شده است.

$$(t + iD)^n = (t - iD + 2iD)^n = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)!m!} (t - iD^{1/2})^{n-m} (2iD^{1/2})^m \quad (39-4)$$

با قرار گرفتن رابطه (39-4) در صورت معادله (38-4)، معادله زیر حاصل شده است.

$$f(t) \approx \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)!m!} (t - iD^{1/2})^{2A-2-m} (2iD^{1/2})^m \quad (40-4)$$

سپس برای استفاده از رهیافت معکوس تبدیل لاپلاس معادله (41-4) بدست آمده است.

$$f(t) \approx \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)!m!} (2iD^{1/2})^m \frac{1}{(t - iD^{1/2})^{m-2A+2}} \quad (41-4)$$

در این مرحله، تبدیل معکوس لاپلاس به فرم رابطه (42-4) و (43-4) معرفی می شود [7].

$$L^{-1}\{f(t)\} = f(r) \quad (42-4)$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(t-a)^n}\right\} = \frac{r^{n-1}e^{ar}}{(n-1)!} \quad (43-4)$$

رابطه (44-4) فرم تبدیل یافته معادله (41-4) است.

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(t - iD^{1/2})^{m-2A+2}}\right\} = \frac{r^{m-2A+1}e^{iD^{1/2}r}}{(m-2A+1)!} = \frac{r^{m-2A+1}e^{iD^{1/2}r}}{\Gamma(m-2A+2)} \quad (44-4)$$

به این ترتیب بعد از اعمال تبدیل معکوس لاپلاس در رابطه (41-4)، فرم جدید برای این رابطه به

صورت زیر تعریف شده است که در این رابطه $N_{n,l}$ ثابت نرمالیزاسیون است.

$$f(r) = Nr^{1-2A}e^{iD^{1/2}r} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!m!} \frac{\Gamma(2-2A)}{\Gamma(m-2A+2)} (2iD^{1/2}r)^m \quad (45-4)$$

تعریف توابع فوق هندسی با رابطه (46-4) آورده شده است [7].

$${}_1F_1(-n, \sigma, x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!m!} \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma+m)} x^m \quad (46-4)$$

با توجه به رابطه (45-4)، می توان این رابطه را برحسب توابع فوق هندسی نیز نوشت که فرم معادله

فوق هندسی برای این رابطه با رابطه (47-4) آورده شده است.

$${}_1F_1(-n, 2-2A, 2D^{1/2}r) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{(n-m)! m!} \frac{\Gamma(2-2A)}{\Gamma(2-2A+m)} (2D^{1/2}r)^m \quad (47-4)$$

به این ترتیب فرم جدیدی که برای رابطه (45-4) بدست آمده است.

$$f(r) = Nr^{1-2A} e^{iD^{1/2}r} {}_1F_1(-n, 2-2A, 2iD^{1/2}r) \quad (48-4)$$

در انتها تابع موج سیستم با رابطه (48-4) بدست آمده است [11-23].

4-4- حل معادله دو جسمی سالپیتور در حضور پتانسیل‌های کولنی و نمایی برای هر عدد کوانتومی l

با رهیافت تبدیلات لاپلاس

حل معادله موج در حالت نسبیتی و غیرنسبیتی نقش مهمی در فیزیک هسته‌ای و سایر شاخه‌های مرتبط دارد که به این ترتیب انگیزه لازم برای توصیف سیستم‌های فیزیکی در حالت‌های مختلف را فراهم می‌آورد. بر این اساس در این بخش معادله دو جسمی سالپیتور برای ذرات با اسپین صفر در حضور دو پتانسیل کولنی و نمایی حل شده است. تبدیلات لاپلاس بصورت گسترده در فیزیک و مهندسی به کار گرفته می‌شود که معادله سالپیتور هم با استفاده از این تبدیل به یک معادله مرتبه اول تقلیل می‌یابد و حل این معادله را ساده‌تر می‌کند [24-27].

معادله سالپیتور در سیستم مرکز جرم و در حضور پتانسیل با تقارن کروی به صورت زیر است [24].

$$\left[\sum_{i=1,2} \sqrt{m_i^2 - \Delta} + V(r) - E_{n,l} - m_1 - m_2 \right] \chi(\vec{r}) = 0 \quad (49-4)$$

که در این رابطه

$$\chi(\vec{r}) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (50-4)$$

همچنین کمیت‌های m_1 و m_2 جرم ذرات و $\Delta = \nabla^2$ و $V(r)$ پتانسیل برهم‌کنش و انرژی مجموع سیستم با کمیت $E_{n,l}$ معرفی می‌شود، در برهم‌کنش‌های قوی ذرات، معادله (۴-۴۹) به صورت زیر نیز نوشته می‌شود.

$$\left[-\frac{1}{2\mu} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) - \frac{\mu^2}{2\eta^3} (V(r) - E_{n,l})^2 + (V(r) - E_{n,l}) \right] R_{n,l}(r) = 0 \quad (۵۱-۴)$$

با استفاده از رابطه تبدیل

$$R_{n,l}(r) = \frac{\psi_{n,l}(r)}{r} \quad (۵۲-۴)$$

معادله (۵۱-۴) به رابطه زیر منجر می‌شود.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + W_{n,l}(r) - \frac{W_{n,l}^2(r)}{2\tilde{m}} \right] \psi_{n,l}(r) = 0 \quad (۵۳-۴)$$

که کمیت‌های زیر را شامل می‌شود.

$$W_{n,l}(r) = V(r) - E_{n,l} \quad (۵۴-۴)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad \eta = \mu \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 m_2 - 3\mu^2} \right)^{1/3}, \quad \tilde{m} = \frac{\eta^3}{\mu^2}$$

ابتدا به بررسی معادله سالپیتز در حضور پتانسیل کولنی پرداخته می‌شود و فرم عمومی پتانسیل کولنی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V(r) = -\frac{C}{r} \quad (۵۵-۴)$$

ضریب C در رابطه فوق ثابت است، قرارداد پتانسیل کولنی در معادله (۵۱-۴) به رابطه زیر منجر می‌شود.

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2} (D + E'_{n,l} r + F r^2) \right] R_{n,l}(r) = 0 \quad (۵۶-۴)$$

که کمیت‌های ثابت در رابطه فوق به صورت رابطه (۵۷-۴) معرفی می‌شود.

$$D = \frac{\mu C^2}{\hbar^2 \tilde{m}} - \ell(\ell+1), \quad E'_{n,l} = \frac{2\mu C}{\hbar^2} + \frac{2\mu C E_{n,l}}{\hbar^2 \tilde{m}}, \quad F = \frac{2\mu E_{n,l}}{\hbar^2} + \frac{\mu E_{n,l}^2}{\hbar^2 \tilde{m}}$$

$$(57-4)$$

تغییر متغیر زیر در رابطه (56-4) لحاظ می‌شود.

$$R_{n,l}(r) = r^A f_{n,l}(r) \quad (58-4)$$

که کمیت A ثابت است و با اعمال تغییر متغیر فوق در رابطه (56-4) معادله زیر را منتج می‌شود.

$$\left[\frac{d^2 f_{n,l}(r)}{dr^2} + \frac{(2A+1)}{r} \frac{df_{n,l}(r)}{dr} + \frac{1}{r^2} [Fr^2 - E'_{n,l}r + (A^2 + A + D)] f_{n,l}(r) \right] = 0 \quad (59-4)$$

با توجه به معادله فوق

$$A^2 + A + D = 0 \rightarrow A = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4D}}{2} \quad (60-4)$$

مقادیر منفی برای معادله فوق منجر به نتایج فیزیکی برای تابع موج می‌شود.

که به این ترتیب معادله همشار فوق هندسی و مقدار کمیت A بدست آمده است و معادله (59-4)

به صورت معادله زیر اصلاح می‌شود

$$\left[r \frac{d^2 f_{n,l}(r)}{dr^2} + (2A+1) \frac{df_{n,l}(r)}{dr} + \frac{1}{r} [Fr^2 - E'_{n,l}r] f_{n,l}(r) \right] = 0 \quad (61-4)$$

همانطور که در فصل قبل توضیح داده شد، تبدیلات لاپلاس به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L\{f(r)\} = f(t) = \int_0^\infty dr e^{-tr} f(r) \quad (62-4)$$

$$L\{rf''(r)\} + (2A+1)L\{f'(r)\} + FL\{rf(r)\} - EL\{f(r)\} = 0 \quad (63-4)$$

$$L\{rf''(r)\} = -2tf(t) - t^2 f'(t) \quad (64-4)$$

$$L\{f'(r)\} = tf(t) - f(r=0) \quad (65-4)$$

$$L\{f(r)\} = f(t) \quad (۶۶-۴)$$

$$L\{rf(r)\} = -f'(t) \quad (۶۷-۴)$$

با قرار گرفتن روابط تبدیل یافته در رابطه (۶۳-۴) رابطه زیر بدست آمده است.

$$-2tf(t) - t^2 f'(t) + (2A+1)tf(t) - Ff'(t) - Ef(t) = 0 \quad (۶۸-۴)$$

و معادله دیفرانسیل مرتبه اول زیر بدست می آید.

$$(t^2 + F) \frac{df(t)}{dt} - [(2A-1)t - E] f(t) = 0 \quad (۶۹-۴)$$

که حل معادله فوق به رابطه زیر منتج می شود.

$$\ln f(t) = (A - \frac{1}{2}) \ln(t^2 - (-F^{1/2})^2) + \frac{E}{2F^{1/2}} \ln(\frac{t + F^{1/2}}{t - F^{1/2}}) \quad (۷۰-۴)$$

و همچنین

$$\ln f(t) = \ln(t - F^{1/2})^{2A-1} + \ln(\frac{t + F^{1/2}}{t - F^{1/2}})^{\frac{E}{2F^{1/2}} + A - \frac{1}{2}} \quad (۷۱-۴)$$

برای بدست آوردن تابع موج سیستم شرط زیر اعمال شده است.

$$n = \frac{E}{2F^{1/2}} + A - \frac{1}{2} \quad (۷۲-۴)$$

با قراردادن مقادیر ثابت تعریف شده در روابط قبل، فرم معادله (۷۲-۴) به صورت زیر نیز بیان می شود.

$$n = \left(\frac{\frac{2\mu C}{\hbar^2} + \frac{2\mu C E_{n,l}}{\hbar^2 \tilde{m}}}{2(\frac{2\mu E_{n,l}}{\hbar^2} + \frac{\mu E_{n,l}^2}{\hbar^2 \tilde{m}})^{\frac{1}{2}}} \right) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{4\mu C^2}{\hbar^2 \tilde{m}} + 4\ell(\ell+1) \right)^{\frac{1}{2}} - 1 \quad (۷۳-۴)$$

با اعمال شرط رابطه (۷۲-۴)، معادله (۷۱-۴) به فرم زیر بازنویسی شده است.

$$\ln f(t) = \ln(t - F^{1/2})^{2A-1-n} + \ln(t + F^{1/2})^n \quad (74-4)$$

با استفاده از تقریب زیر برای معادله (74-4) و استفاده از رابطه (75-4) که تعریف بسط دو جمله‌ای است رابطه (76-4) را نتیجه می‌دهد که در نهایت فرم معادله (77-4) خواهد رسید.

$$f(t) \approx (t - F^{1/2})^{2A-1-n} (t + F^{1/2})^n \quad (75-4)$$

$$(t + F^{1/2})^n = (t - F^{1/2} + 2F^{1/2})^n = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)!m!} (t - F^{1/2})^{n-m} (2F^{1/2})^m \quad (76-4)$$

$$f(t) \approx \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)!m!} (t - F^{1/2})^{2A-1-m} (2F^{1/2})^m \quad (77-4)$$

برای تبدیل شدن به فرم مناسب برای استفاده از تبدیل معکوس لاپلاس رابطه (77-4) به فرم زیر بازنویسی می‌شود.

$$f(t) \approx \sum_{m=0}^n \frac{n!}{(n-m)!m!} (2F^{1/2})^m \frac{1}{(t - F^{1/2})^{m-2A+1}} \quad (78-4)$$

با توجه به معادله فوق، اکنون می‌توان از تبدیل لاپلاس وارون که به وسیله رابطه (79-4) معرفی شده است، استفاده کرد.

$$L^{-1} \left\{ \frac{1}{(t-a)^n} \right\} = \frac{r^{n-1} e^{ar}}{(n-1)!} \quad (79-4)$$

با استفاده از روابط فوق و تعریف ثابت N بعنوان ثابت بهنجارش یا ثابت نرمالیزاسیون، تابع موج با معادله (80-4) بیان می‌شود.

$$f(r) = N r^{1-2A} e^{F^{1/2}r} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!m!} \frac{\Gamma(-2A+2)}{\Gamma(m-2A+2)} (-2F^{1/2}r)^m \quad (80-4)$$

تابع فوق هندسی با رابطه (81-4) تعریف می‌شود که از آن در رابطه (80-4) استفاده می‌شود.

$${}_1F_1(-n, \sigma, x) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{(n-m)!m!} \frac{\Gamma(\sigma)}{\Gamma(\sigma+m)} x^m \quad (81-4)$$

به این ترتیب با حل معادله سالپیتز در حضور پتانسیل کولنی برای سیستم دو جسمی و با استفاده از توابع فوق هندسی تابع موج تحت رابطه (۸۲-۴) معرفی شده است.

$$f(r) = Nr^{1-2A} e^{D^{1/2}r} {}_1F_1(-n, 2-2A, 2F^{1/2}r) \quad (۸۲-۴)$$

از طرفی با استفاده از رابطه (۸۳-۴) که بیان کننده ارتباط بین توابع فوق هندسی و چند جمله‌ای‌های لاگر است می توان به فرم دیگری از تابع موج دست یافت که در رابطه (۸۴-۴) بیان شده است.

$$L_n^\eta(x) = \frac{\Gamma(n+\eta+1)}{n!\Gamma(\eta+1)} {}_1F_1(-n, \eta+1, x) \quad (۸۳-۴)$$

$$f(r) = \frac{n!\Gamma(2-2A)}{\Gamma(n+2-2A)} Nr^{1-2A} e^{F^{1/2}r} L_n^{1-2A}(2F^{1/2}r) \quad (۸۴-۴)$$

اکنون در ادامه مبحث معادله سالپیتز در حضور یک پتانسیل نمایی بررسی می شود که پتانسیل نمایی نیز به صورت زیر تعریف می شود.

$$V(r) = v_0 e^{-\alpha(r-r_0)} \quad (۸۵-۴)$$

همانند آنچه که برای پتانسیل کولنی انجام شد معادله (۸۵-۴) در فرم کلی معادله سالپیتز جایگذاری می شود و رابطه زیر را نتیجه می دهد.

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + \left(v_0 e^{-\alpha(r-r_0)} - E_{n,l} \right) - \frac{(v_0^2 e^{-2\alpha(r-r_0)} + E_{n,l}^2 - 2v_0 e^{-\alpha(r-r_0)} E_{n,l})}{2\tilde{m}} \right] \psi_{n,l}(r) = 0 \quad (۸۶-۴)$$

تقریب زیر برای حل بهتر معادله (۸۶-۴) معرفی می شود.

$$\frac{1}{r^2} \square \left(c_0 + c_1 e^{-\alpha x} + c_2 e^{-2\alpha x} \right) \quad (۸۷-۴)$$

که در این تقریب

$$x = \frac{r - r_0}{r_0}, \quad \alpha = ar_0$$

$$c_0 = \frac{1}{r_0^2} \left(1 - \frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} \right), \quad c_1 = \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{4}{\alpha} - \frac{6}{\alpha^2} \right), \quad c_2 = \frac{1}{r_0^2} \left(-\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} \right) \quad (۸۸-۴)$$

همچنین تغییر متغیر زیر نیز در روابط به کار برده می‌شود.

$$z = e^{-\alpha x} \quad (۸۹-۴)$$

با اعمال تغییر متغیر و تقریب که در موارد فوق ذکر شد معادله (۸۶-۴) به فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d}{dz} - \frac{1}{z^2} \left[\frac{1}{\alpha^2} (Bz + Cz^2 + D) \right] \right) \psi_{n,l}(z) = 0 \quad (۹۰-۴)$$

که در معادله فوق ثابت‌ها بصورت زیر معرفی شده است.

$$B = r_0^2 \left(c_1 \ell(\ell+1) + \frac{2\mu v_0}{\hbar^2} + \frac{2v_0 E_{nl} \mu}{\tilde{m} \hbar^2} \right)$$

$$C = r_0^2 \left(-\frac{\mu v_0^2}{\tilde{m} \hbar^2} + c_2 \ell(\ell+1) \right) \quad (۹۱-۴)$$

$$D = r_0^2 \left(c_0 \ell(\ell+1) - \frac{2\mu E_{nl}}{\hbar^2} - \frac{\mu E_{nl}^2}{\tilde{m} \hbar^2} \right)$$

و مجدد تغییر متغیر زیر در معادله شماره (۹۰-۴) اعمال می‌شود

$$\psi_{n,l}(z) = z^A f_{n,l}(z) \quad (۹۲-۴)$$

و معادله زیر را نتیجه می‌دهد.

$$\left\{ \frac{d^2 f_{n,l}(z)}{dz^2} + \frac{(2A+1)}{z} \frac{df_{n,l}(z)}{dz} - \frac{1}{z^2} [B'z + C'z^2 + (D' - A^2)] f_{n,l}(z) \right\} = 0 \quad (۹۳-۴)$$

ثابت‌های جدیدی که در رابطه فوق معرفی شده است، به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$B' = \frac{B}{\alpha^2}, \quad C' = \frac{C}{\alpha^2}, \quad D' = \frac{D}{\alpha^2} \quad (۹۴-۴)$$

$$D' - A^2 = 0 \rightarrow A = \pm\sqrt{D'} \rightarrow A = -\sqrt{D'} \quad (95-4)$$

به این ترتیب را بطله (93-4) بصورت زیر بازنویسی می شود.

$$\left\{ z \frac{d^2 f_{n,l}(z)}{dz^2} + (2A+1) \frac{df_{n,l}(z)}{dz} - \frac{1}{z} [B'z + C'z^2] f_{n,l}(z) \right\} = 0 \quad (96-4)$$

مجدداً با اعمال تبدیلات لاپلاس در رابطه فوق، همان گونه که برای پتانسیل کولنی به کار برده شد به رابطه زیر منجر می شود.

$$(t^2 - C') \frac{df_{n,l}(t)}{dt} - [(2A+3)t - B'] f_{n,l}(t) = 0 \quad (97-4)$$

و از حل معادله بالا رابطه زیر نتیجه می شود.

$$f_{n,l}(t) \approx (t + C'^{1/2})^{-(2D'^{1/2}-3)} \left(\frac{t - C'^{1/2}}{t + C'^{1/2}} \right)^{-B'/2(C'^{1/2}) - \frac{1}{2}(2D'^{1/2}-3)} \quad (98-4)$$

شرط زیر برای بدست آوردن یک تابع موج تک مقدار اعمال می شود.

$$n = -B' / 2(C'^{1/2}) - \frac{1}{2}(2D'^{1/2} - 3) \quad (99-4)$$

همچنین با استفاده بسط سری همانند آن چه که در قبل انجام شد به رابطه زیر منجر می شود

$$f_{n,l}(t) \approx \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} (t + C'^{1/2})^{-(2D'^{1/2}-3)-m} (-2C'^{1/2})^m \quad (100-4)$$

اکنون تبدیل معکوس لاپلاس برای رابطه فوق استفاده شده که نتیجه زیر حاصل می شود و مجدداً در

این رابطه نیز ثابت N یک ضریب نرمالیزاسیون یا ثابت بهنجارش است.

$$f_{n,l}(z) \approx Nz^{(2D'^{1/2}-4)} e^{-C'^{1/2}z} \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{m!(n-m)!} \frac{\Gamma(2D'^{1/2}-3)}{\Gamma(2D'^{1/2}+m-3)} (2C'^{1/2}z)^m \quad (101-4)$$

با جایگذاری روابط فوق هندسی

$$f_{n,l}(z) = Nz^{(2D'^{1/2}-4)} e^{-C'^{1/2}z} {}_1F_1(-n, 2D'^{1/2}-3, 2C'^{1/2}z)$$

(۱۰۲-۴)

مجدداً با به کارگیری رابطه‌ای که بین توابع فوق هندسی و چند جمله‌ای‌های لاگر وجود دارد رابطه زیر نتیجه شده است.

$$f_{n,l}(z) = \frac{n! \Gamma(2D^{1/2} - 3)}{\Gamma(n + 2D^{1/2} - 3)} N z^{(2D^{1/2} - 4)} e^{-C^{1/2} z} L_n^{2D^{1/2} - 4}(2C^{1/2} z) \quad (۱۰۳-۴)$$

و به این ترتیب معادله سالپتر برای دو مدل مشهور پتانسیل یعنی پتانسیل کولنی و پتانسیل‌های نمایی و برای سیستم‌های دو ذره‌ای محاسبه شد.

۴-۵- سیستم‌های سه ذره‌ای

۴-۵-۱- تحلیل رفتار سیستم‌های سه ذره‌ای

برای بررسی سیستم‌های چند نوکلئونی از مدل غیر نسبیتی استفاده می‌شود که همان معادله شرودینگر است ولی در معادله شرودینگر اسپین نقش ندارد، پس باید در هنگام نوشتن تابع موج کل سیستم تابع موج فضایی در تابع موج اسپینی ضرب می‌شود. برای یک مجموعه ۳ ذره‌ای معادله شرودینگر بصورت $H\psi = E\psi$ که در این رابطه، هامیلتونی سیستم را در حضور یک پتانسیل قیدی و یک پتانسیل ناشی از برهم‌کنش‌های بین ذره‌ای به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$H = \sum_{i=1, j=1, i < j} \left(\frac{P_i^2}{2m_i} + V(r_i) + V(r_{ij}) \right) \quad (104-4)$$

$$V(r_{ij}) = \frac{1}{2} k \sum_{i=1, j=1, i < j}^N r_{ij}^2 \quad (105-4)$$

$V(r_i)$ را تحت عنوان پتانسیل محبوس کننده شناخته می شود که اثر عوامل خارجی یا محیطی مثل میدان های الکتریکی و مغناطیسی است. با تعریف کمیت های زیر، صورت جدید هامیلتونی سیستم طبق معادله (107-4) بیان می شود.

$$P_i = \frac{\hbar}{i} \nabla \rightarrow P_i^2 = -\hbar^2 \nabla_i^2, \quad \vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j \quad (106-4)$$

$$H = \sum_{i=1, j=1, i < j} \left\{ -\hbar^2 \nabla_i^2 + V(r_i) + V(r_{ij}) \right\} \quad (107-4)$$

اکنون برای حل معادله بالا از مختصات ژاکوبی که در ادامه معرفی شده است، استفاده می شود. در این مختصات بردارهای جدیدی تعریف می شود که به واسطه آنها معادله شرودینگر به دو بخش مرکز جرم و نسبی تقسیم شده و حل این معادله را برای سیستم های چند ذره ای ممکن می سازد.

$$\xi_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left(r_{i+1} - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i r_j \right), \quad \vec{R} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (108-4)$$

برای یک مجموعه سه ذره ای به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \vec{R} &= \frac{1}{3} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3), \\ \xi_1 &= \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\sqrt{2}}, \\ \xi_2 &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\vec{r}_3 - \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) \right) = \frac{1}{\sqrt{6}} [2\vec{r}_3 - (\vec{r}_1 + \vec{r}_2)] \end{aligned} \quad (109-4)$$

بردارهای معرفی شده عبارتند از :

بردار مرکز جرم R ، ξ_1 بردار نسبی ذره اول و دوم و ξ_2 بردار نسبی مرکز جرم دو ذره اول و دوم نسبت به ذره سوم است. تمام ساز و کار معرفی شده برای آن است که بتوانیم معادله شرودینگر را حل

کنیم. تغییر متغیر زیر برای ادامه کار معرفی می شود.

$$X = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i^2}$$

$$(۱۱۰-۴)$$

در این مسئله سیستم را بدون حضور عامل خارجی فرض کرده پس جمله V_i از معادله هامیلتونی حذف می شود و پتانسیل برهم کنشی بین ذرات از جنس پتانسیل نوسانی در نظر گرفته شده است.

$$V(\vec{r}_{ij}) = \frac{1}{2}k[(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 + (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 + (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2] \quad (۱۱۱-۴)$$

به این ترتیب جداسازی متغیرها بصورت زیر انجام می شود.

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 &= 3R \\ \vec{r}_2 - \vec{r}_1 &= \sqrt{2}\xi_1 \rightarrow \vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \sqrt{2}\xi_1 \\ 2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2 &= \sqrt{6}\xi_2 \end{aligned} \quad (۱۱۲-۴)$$

بنابراین بردارهای جابه جایی در مختصات ژاکوبی به صورت زیر است.

$$\begin{cases} \vec{r}_1 = R - \frac{\sqrt{6}}{6}\xi_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_1 \\ \vec{r}_2 = R - \frac{\sqrt{6}}{6}\xi_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\xi_1 \\ \vec{r}_3 = R + \frac{\sqrt{6}}{3}\xi_2 \end{cases} \quad (۱۱۳-۴)$$

با توجه به معادله هامیلتونی سیستم رابطه زیر محاسبه شده است.

$$\begin{cases} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = 2\xi_1^2 \\ (\vec{r}_1 - \vec{r}_3)^2 = \frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{3}{2}\xi_2^2 + \frac{\sqrt{12}}{2}\xi_1 \cdot \xi_2 \\ (\vec{r}_2 - \vec{r}_3)^2 = \frac{1}{2}\xi_1^2 + \frac{3}{2}\xi_2^2 - \frac{\sqrt{12}}{2}\xi_1 \cdot \xi_2 \end{cases} \quad (۱۱۴-۴)$$

فرم پتانسیل برهم کنشی بین ذرات در مختصات ژاکوبی به صورت زیر است.

$$V = \frac{3}{2}k[\xi_1^2 + \xi_2^2] \quad (۱۱۵-۴)$$

همچنین

$$\begin{cases} P_1^2 = m_1^2 \cdot \dot{r}_1^2 = m_1^2 \cdot \left(\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{6}\dot{\xi}_2^2 - \sqrt{2}\dot{R}\dot{\xi}_1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\dot{R}\dot{\xi}_2 + \frac{\sqrt{12}}{6}\dot{\xi}_1 \cdot \dot{\xi}_2 \right) \\ P_2^2 = m_2^2 \cdot \dot{r}_2^2 = m_2^2 \cdot \left(\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\dot{\xi}_1^2 + \frac{1}{6}\dot{\xi}_2^2 + \sqrt{2}\dot{R}\dot{\xi}_1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\dot{R}\dot{\xi}_2 - \frac{\sqrt{12}}{6}\dot{\xi}_1 \cdot \dot{\xi}_2 \right) \\ P_3^2 = m_3^2 \cdot \dot{r}_3^2 = m_3^2 \cdot \left(\dot{R}^2 + \frac{2}{3}\dot{\xi}_2^2 + \frac{2\sqrt{6}}{3}\dot{R}\dot{\xi}_2 \right) \end{cases} \quad (۱۱۶-۴)$$

هامیلتونی سیستم با معادله زیر تعریف می شود.

$$H = \frac{P_1^2}{2m_1} + \frac{P_2^2}{2m_2} + \frac{P_3^2}{2m_3} + V \quad (117-4)$$

جرم هر سه ذره بطور یکسان در نظر گرفته می شود.

$$m_1 = m_2 = m_3 \quad (118-4)$$

در نهایت فرم هامیلتونی سیستم به صورت زیر بیان می شود.

$$H = \frac{m}{2} [3\dot{R}^2 + \dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2] + \frac{3}{2} k [\xi_1^2 + \xi_2^2] \quad (119-4)$$

جرم کل سیستم برابر است با حاصل جمع جرم ها که با رابطه (120-4) معرفی شده است.

$$m_1 + m_2 + m_3 = M_R \quad (120-4)$$

رابطه (121-4) هامیلتونی بخش مرکز جرم سیستم را معرفی می کند.

$$H_R = \frac{1}{2} [m_1 + m_2 + m_3] \dot{R}^2 = \frac{1}{2} M_R \dot{R}^2 = \frac{P_R^2}{2M_R} \quad (121-4)$$

به این ترتیب هامیلتونی کل یک سیستم سه جسمی شامل سه بخش است، یک بخش مرکز جرم و دو بخش نسبی است.

$$H = \frac{m}{2} [3\dot{R}^2 + \dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2] + \frac{3}{2} k [\xi_1^2 + \xi_2^2] \quad (122-4)$$

$$H\psi = (H_R + H_{\xi_1} + H_{\xi_2})\psi = (E_R + E_{\xi_1} + E_{\xi_2})\psi \quad (123-4)$$

و بدین ترتیب تابع موج سیستم نیز به صورت یک بخش مرکز جرم و دو بخش نسبی است.

$$\psi = \psi_R + \psi_{\xi_1} + \psi_{\xi_2} \quad (124-4)$$

معادله شرودینگر برای بخش مرکز جرم سیستم با رابطه (125-4) معرفی شده است.

$$H_R \psi_R = E_R \psi_R \rightarrow \frac{P_R^2}{2M_R} \psi_R = E_R \psi_R$$

$$(۱۲۵-۴)$$

هامیلتونی بخش نسبی نیز با رابطه (۱۲۶-۴) معرفی شده است.

$$H_{\xi_1} + H_{\xi_2} + V = \frac{m}{2} [\dot{\xi}_1^2 + \dot{\xi}_2^2] + \frac{3}{2} k [\xi_1^2 + \xi_2^2] \quad (۱۲۶-۴)$$

و همچنین هامیلتونی و ویژه مقادیر انرژی برای بخش‌های نسبی در روابط زیر آورده شده است.

$$H_{\xi_1} = \frac{m}{2} \dot{\xi}_1^2 + \frac{3}{2} k \xi_1^2 \rightarrow E_{\xi_1} = (n_{\xi_1} + \frac{3}{2}) \hbar \omega \quad (۱۲۷-۴)$$

$$H_{\xi_2} = \frac{m}{2} \dot{\xi}_2^2 + \frac{3}{2} k \xi_2^2 \rightarrow E_{\xi_2} = (n_{\xi_2} + \frac{3}{2}) \hbar \omega \quad (۱۲۸-۴)$$

با توجه به معادلات گذشته انرژی سیستم نیز شامل سه بخش است که همانند هامیلتونی از یک بخش مرکز جرم و دو بخش نسبی تشکیل شده است.

$$E_T = E_{\xi_1} + E_{\xi_2} + E_R \quad (۱۲۹-۴)$$

به این ترتیب در حالت کلی و برای یک مجموعه N ذره‌ای با پتانسیل برهم‌کنشی نوسانی، هامیلتونی سیستم در مختصات ژاکوبی با یک بخش ذره آزاد که معرف مرکز جرم سیستم است و N-1 بخش نوسانگر هماهنگ بیان می‌شود.

۴-۵-۲- بررسی سیستم‌های سه ذره‌ای در حضور پتانسیل کولنی

در این بخش، با یک روش تحلیلی، سیستم سه ذره‌ای در حضور پتانسیل کولنی بررسی می‌شود. ضرایب تبدیل ژاکوبی و همچنین مختصات فوق‌کروی به‌کار برده شده و هامیلتونی سیستم برحسب بخش مرکز جرم و بخش نسبی بدست آورده می‌شود و بدین وسیله چارچوب این سیستم‌ها شامل تابع موج و طیف انرژی مورد محاسبه قرار می‌گیرد [۲۸].

هامیلتونی سیستم سه ذره‌ای در دو بخش نسبی و مرکز جرم و در حضور پتانسیل کولنی به فرم زیر

معرفی شده است.

$$H_{tot} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{p_j^2}{2m_e^*} \right) + \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^{j-1} \frac{e^2}{k |\vec{r}_j - \vec{r}_l|} \quad 55$$

(۱۳۰-۴)

که p_j و m_e^* به ترتیب بیان کننده تکانه نوکلئون λ ام و جرم مؤثر هستند.

با فرض اینکه سه ذره یکسان به جرم m که در فضا قرار گرفته و هیچ نیروی خارجی بر سیستم اثر نمی گذارد، بردار مرکز جرم سیستم و بردارهای مکان نسبی ذرات به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{R} = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3) \quad (۱۳۱-۴)$$

$$\begin{cases} R = \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\ \rho = \vec{r}_{13} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 \\ \lambda = \vec{r}_{23} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3 \end{cases} \quad (۱۳۲-۴)$$

با استفاده از مختصات ژاکوبی می توان نوشت.

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \\ \vec{\xi}_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \end{aligned} \quad (۱۳۳-۴)$$

بجای کمیت های $\vec{\rho}$ و $\vec{\lambda}$ ، از مختصات فوق کروی که شامل فوق شعاع x و فوق زاویه ξ به ترتیب توسط روابط زیر ارائه شده است استفاده می شود.

$$x = \sqrt{\rho^2 + \lambda^2}, \quad \xi = \arctan\left(\frac{\rho}{\lambda}\right) \quad (۱۳۴-۴)$$

$$M_e^* = 3m_e^*, \quad m_\rho = m_\lambda = m_e^* \quad (۱۳۵-۴)$$

برای توصیف پتانسیل کولنی در برهم کنش سه جسمی که در هامیلتونی سیستم معرفی شده است کمیت هایی برحسب فوق شعاع و با استفاده از تعریف مختصات ژاکوبی، به صورت زیر معرفی می شود.

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{\lambda} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\rho}, \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{\sqrt{6}}{6}\vec{\lambda} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{\rho}, \quad \vec{r}_3 = \vec{R} - \frac{\sqrt{6}}{3}\vec{\lambda} \quad (۱۳۶-۴)$$

با فرض اینکه $\vec{\rho} \cdot \vec{\lambda} = 0$ و $|\vec{\rho}| = \alpha|\vec{\lambda}|$ روابط زیر را می توان استخراج کرد.

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \frac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} x \quad (137-4)$$

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_3| = \frac{\sqrt{3} + \alpha}{\sqrt{2(1+\alpha^2)}} x \quad (138-4)$$

$$|\vec{r}_2 - \vec{r}_3| = \frac{\sqrt{3} - \alpha}{\sqrt{2(1+\alpha^2)}} x \quad (139-4)$$

بنابراین برهم‌کنش کولنی معرفی شده در معادله (۱۳۰-۴) به فرم زیر تبدیل می‌شود.

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^{j-1} \frac{e^2}{k|\vec{r}_j - \vec{r}_l|} = \frac{e^2}{kx} \left(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{2}\alpha} + \frac{\sqrt{2(1+\alpha^2)}}{\sqrt{3} + \alpha} + \frac{\sqrt{2(1+\alpha^2)}}{\sqrt{3} - \alpha} \right) = \frac{e^2 \eta}{kx} = \frac{c}{x} \quad (140-4)$$

که کمیت η و سپس کمیت c بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$\eta = \frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{\sqrt{2}\alpha} + \frac{\sqrt{2(1+\alpha^2)}}{\sqrt{3} + \alpha} + \frac{\sqrt{2(1+\alpha^2)}}{\sqrt{3} - \alpha} \quad (141-4)$$

$$c = \frac{e^2 \eta}{k} \quad (142-4)$$

بنابراین با در نظر گرفتن فرض‌های اعمال شده، پتانسیل کولنی در سیستم‌های چند نوکلئونی به

همان حالت شناخته شده برای سیستم‌های تک ذره ای رفتار می‌کند.

$$\sum_{j=1}^3 \frac{p_j^2}{2m_e^*} = \frac{p_{c.m.}^2}{2M_e^*} + \frac{p_\rho^2}{2m_\rho} + \frac{p_\lambda^2}{2m_\lambda} \quad (143-4)$$

$$\frac{p_\rho^2}{2m_\rho} + \frac{p_\lambda^2}{2m_\lambda} = \frac{-\hbar^2}{2m_e^*} \left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{3d}{xdx} - \frac{\gamma(\gamma+2)}{x^2} \right) \quad (144-4)$$

۴-۵-۳- بررسی سیستم‌های سه ذره‌ای در حضور پتانسیل برهم‌کنش اسپین-مدار راشبا^۱

^۱.Rashba spin-orbit interaction

در این بخش، با یک روش تحلیلی، سیستم سه نوکلئونی در حضور برهم‌کنش اسپین-مدار راشبا بررسی می‌شود. ضرایب تبدیل ژاکوبی و همچنین مختصات فوق کروی به کار برده شده و هامیلتونی سیستم برحسب بخش مرکز جرم و بخش نسبی بدست آورده می‌شود و بدین وسیله چارچوب این سیستم‌ها شامل تابع موج و طیف انرژی مورد محاسبه قرار گرفته و نشان داده می‌شود که در بعضی از موارد منجر به توابع بسل می‌شود [۲۹-۳۱].

هامیلتونی سیستم سه نوکلئونی در دو بخش نسبی و مرکز جرم و در حضور پتانسیل برهم‌کنش اسپین مدار راشبا به صورت زیر معرفی شده است.

$$H_{tot} = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{p_j^2}{2m_e^*} + H_{s-o}^{(j)} \right) \quad (۱۴۵-۴)$$

که p_j و m_e^* به ترتیب بیان کننده تکانه نوکلئون j ام و جرم مؤثر هستند. پتانسیل محدود کننده نیز به صورت زیر معرفی شده است.

$$H_{s-o}^{(j)} = \alpha_R \left(\sigma_x^{(j)} p_y^{(j)} - \sigma_y^{(j)} p_x^{(j)} \right) \quad (۱۴۶-۴)$$

و همچنین ρ و ρ_0 شعاع را در یک صفحه دوبعدی نشان می‌دهند و α_R ثابت برهم‌کنش اسپین-مدار و ماتریس‌های استاندارد پائولی که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (۱۴۷-۴)$$

مشابه آنچه که برای حالت قبلی در حضور پتانسیل کولنی در نظر گرفت شده است، با فرض اینکه سه ذره یکسان به جرم m که با آرایش زیر در فضا قرار گرفته و نیروی خارجی بر سیستم وارد نمی‌شود، بردار مرکز جرم سیستم و بردارهای مکان نسبی ذرات به صورت زیر تعریف می‌شود.

با معرفی مختصات ژاکوبی در فضای دوبعدی رابطه‌های زیر را بدست می‌دهد.

$$\begin{aligned}
R_x &= \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad R_y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \\
\rho_x &= \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}, \quad \rho_y = \frac{y_1 - y_2}{\sqrt{2}}, \\
\lambda_x &= \frac{x_1 + x_2 - 2x_3}{\sqrt{6}}, \quad \lambda_y = \frac{y_1 + y_2 - 2y_3}{\sqrt{6}},
\end{aligned} \tag{۱۴۸-۴}$$

که (R_x, R_y) و (ρ_x, ρ_y) به ترتیب مؤلفه های مرکز جرم و حرکت نسبی از نوکلئون ۱ و نوکلئون ۲ است. (λ_x, λ_y) بیان کننده حرکت نسبی نوکلئون سوم نسبت به مرکز جرم دو نوکلئون ۱ و ۲ است. اکنون سعی شده است فرم ساده شده ای برای برهم کنش اسپین-مدار بدست آورده شود. رابطه کلی برهم کنش اسپین-مدار بصورت زیر معرفی می شود.

$$\begin{aligned}
H_{s-o} &= \sum_{j=1}^3 H_{s-o}^{(j)} = \alpha_R \sum_{j=1}^3 (\sigma_x^{(j)} p_y^{(j)} - \sigma_y^{(j)} p_x^{(j)}) \\
&= \frac{\hbar \alpha_R}{j} \begin{pmatrix} 0 & \sum_{j=1}^3 (i \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j}) \\ \sum_{j=1}^3 (-i \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j}) & 0 \end{pmatrix}, \quad i = \sqrt{-1}
\end{aligned} \tag{۱۴۹-۴}$$

با استفاده از رابطه (۱۴۸-۴) می توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial R_x} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \rho_x} + \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\partial}{\partial \lambda_x} \tag{۱۵۰-۴}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial R_x} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial \rho_x} + \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\partial}{\partial \lambda_x} \tag{۱۵۱-۴}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial R_x} - \frac{2}{\sqrt{6}} \frac{\partial}{\partial \lambda_x} \tag{۱۵۲-۴}$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial R_x}, \quad \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial R_y} \tag{۱۵۳-۴}$$

با تبدیلات فوق، رابطه (۱۴۹-۴) به فرم زیر تبدیل می شود.

$$H_{s-o} = \sum_{j=1}^3 H_{s-o}^{(j)} = \frac{\hbar \alpha_R}{i} \begin{pmatrix} 0 & i \frac{\partial}{\partial R_x} + \frac{\partial}{\partial R_y} \\ -i \frac{\partial}{\partial R_x} + \frac{\partial}{\partial R_y} & 0 \end{pmatrix} \quad (154-4)$$

مشاهده می‌شود که برهم‌کنش اسپین-مدار تنها به مؤلفه مرکز جرم وابسته است، با بکارگیری رابطه (149-4) و انرژی جنبشی در رابطه (145-4) رابطه زیر بدست می‌آید. هامیلتونی رابطه (145-4) بصورت زیر حاصل می‌شود.

$$H_{tot} = \frac{p_{c.m.}^2}{2M_e^*} + \frac{\hbar \alpha_R}{i} \begin{pmatrix} 0 & i \frac{\partial}{\partial R_x} + \frac{\partial}{\partial R_y} \\ -i \frac{\partial}{\partial R_x} + \frac{\partial}{\partial R_y} & 0 \end{pmatrix} \quad (155-4)$$

و هامیلتونی مجموع به دو بخش مجزای مختصات مرکز جرم و نسبی تقسیم شده است.

$$H_{tot} = H(R_{c.m.}) + H(x) \quad (156-4)$$

که $H(R_{c.m.})$ شامل V_{Con} است. یک حالت مشابه برای ویژه مقادیر سیستم نیز به‌صورت زیر است که n, m و γ اعداد کوانتومی سیستم هستند.

$$E_{n,m,\gamma} = E_{m.c.m.} + E_{n,\gamma} \quad (157-4)$$

از این قسمت وارد محاسبات مربوط به مرکز جرم سیستم می‌شویم.

قبل از اینکه به محاسبات ادامه دهیم باید به این نکته توجه کرد که مسئله در دو ناحیه بررسی شده است، ناحیه اول وقتی که $\rho < \rho_0$ و پتانسیل صفر و در ناحیه دوم، $\rho > \rho_0$ و یک مقدار ثابت برای پتانسیل در نظر گرفته می‌شود. این نواحی را می‌توان معادل حالت‌هایی که $R_{c.m.} < R_{0,c.m.}$

$$\begin{cases} \psi_{1,n,\gamma,m}(x, R_{c.m.}) = Q_{1,n,\gamma}(x) \psi_{1,m,c.m.}(R_{c.m.}), \\ \psi_{2,n,\gamma,m}(x, R_{c.m.}) = Q_{2,n,\gamma}(x) \psi_{2,m,c.m.}(R_{c.m.}), \end{cases}$$

و نیز در نظر گرفت، بنابراین موج بصورت زیر ارائه شده است.

$$(۱۵۸-۴)$$

که

$$\begin{cases} \psi_{1,m,c.m.}(R_{c.m.}) = \begin{pmatrix} u_1(R_{c.m.})e^{im\varphi} \\ w_1(R_{c.m.})e^{i(m+1)\varphi} \end{pmatrix} \\ \psi_{2,m,c.m.}(R_{c.m.}) = \begin{pmatrix} u_2(R_{c.m.})e^{im\varphi} \\ w_2(R_{c.m.})e^{i(m+1)\varphi} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (۱۵۹-۴)$$

تابع موج شعاعی $u(R_{c.m.})$ و $w(R_{c.m.})$ در ناحیه که $R_{c.m.} = 0$ بطور طبیعی کاهش می یابد

هنگامی که $R_{c.m.} \rightarrow \infty$ معادله شرودینگر مربوط به مرکز جرم در ناحیه اول بصورت زیر است.

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2M_e^*} \left(\frac{\partial^2}{\partial R_x^2} + \frac{\partial^2}{\partial R_y^2} \right) + \frac{\hbar\alpha_R}{i} \begin{pmatrix} 0 & i\frac{\partial}{\partial R_x} + \frac{\partial}{\partial R_y} \\ -i\frac{\partial}{\partial R_x} + \frac{\partial}{\partial R_y} & 0 \end{pmatrix} \right) \psi_{1,m,c.m.}(R_{c.m.}) = E_{m,c.m.} \psi_{1,m,c.m.}(R_{c.m.}) \quad (۱۶۰-۴)$$

با انتخاب $R_{c.m.} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$ و $R_y = R_{c.m.} \sin \varphi$ و $R_x = R_{c.m.} \cos \varphi$ به سادگی بدست می آید که

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial R_x} &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial R_{c.m.}} - \frac{\sin \varphi}{R_{c.m.}} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial R_y} &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial R_{c.m.}} - \frac{\cos \varphi}{R_{c.m.}} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (۱۶۱-۴)$$

حال تلاش می شود تا صورت ساده تری برای رابطه (۱۶۰-۴) بدست آورده شود.

$$\frac{\hbar\alpha_R}{i} \begin{pmatrix} 0 & i\frac{\partial}{\partial R_x} + \frac{\partial}{\partial R_y} \\ -i\frac{\partial}{\partial R_x} + \frac{\partial}{\partial R_y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(R_{c.m.})e^{im\varphi} \\ w_1(R_{c.m.})e^{i(m+1)\varphi} \end{pmatrix} \quad (۱۶۲-۴)$$

با قراردادن رابطه (۱۶۱-۴) در معادله فوق بدست می آید که

$$\frac{\hbar\alpha_R}{i} \begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1(R_{c.m.})e^{im\varphi} \\ w_1(R_{c.m.})e^{i(m+1)\varphi} \end{pmatrix} \quad (۱۶۳-۴)$$

$$A = i \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial R_{c.m.}} - \frac{\sin\varphi}{R_{c.m.}} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) + \left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial R_{c.m.}} - \frac{\cos\varphi}{R_{c.m.}} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) \quad (۱۶۴-۴)$$

$$B = -i \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial R_{c.m.}} - \frac{\sin\varphi}{R_{c.m.}} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right) + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial R_{c.m.}} - \left(\frac{\cos\varphi}{R_{c.m.}} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

$$\alpha_R \begin{pmatrix} C - iD \\ E - iF \end{pmatrix} \quad (۱۶۵-۴)$$

$$C = \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial R_{c.m.}} - i(m+1) \frac{\sin\varphi}{R_{c.m.}} \right) w_1(R_{c.m.}) e^{i(m+1)\varphi} \quad (۱۶۶-۴)$$

$$D = \left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial R_{c.m.}} + i(m+1) \frac{\cos\varphi}{R_{c.m.}} \right) w_1(R_{c.m.}) e^{i(m+1)\varphi} \quad (۱۶۷-۴)$$

$$E = - \left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial R_{c.m.}} - i(m) \frac{\sin\varphi}{R_{c.m.}} \right) u_1(R_{c.m.}) e^{im\varphi} \quad (۱۶۸-۴)$$

$$F = \left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial R_{c.m.}} + i(m) \frac{\cos\varphi}{R_{c.m.}} \right) u_1(R_{c.m.}) e^{im\varphi} \quad (۱۶۹-۴)$$

قبل از بازگشتن به رابطه (۱۶۰-۴)، پارامترهای بدون بعد زیر معرفی می شوند.

$$\varepsilon_m = \frac{2M_e^* R_{0,c.m.}^2 E_{m,c.m.}}{\hbar^2} \quad (۱۷۰-۴)$$

$$v = \frac{2M_e^* R_{0,c.m.}^2 V_0}{\hbar^2} \quad (۱۷۱-۴)$$

$$R = \frac{R_{c.m.}}{R_{0,c.m.}} \quad (۱۷۲-۴)$$

$$\alpha' = \frac{2M_e^* R_{0,c.m.} \alpha_R}{\hbar} \quad (۱۷۳-۴)$$

ترکیب رابطه (۱۶۰-۴) با ثابت های تعریف شده فوق به معادلات زیر منجر می شود.

$$R^2 \frac{d^2 u_1}{dR^2} + R \frac{du_1}{dR} + (k_1^+ k_1^- R^2 - m^2) u_1 - (k_1^+ - k_1^-) R^2 \left(\frac{dw_1}{dR} + \frac{m+1}{R} w_1 \right) = 0 \quad (۱۷۴-۴)$$

$$R^2 \frac{d^2 w_1}{dR^2} + R \frac{dw_1}{dR} + (k_1^+ k_1^- R^2 - (m+1)^2) w_1 + (k_1^+ - k_1^-) R^2 \left(\frac{du_1}{dR} + \frac{m}{R} u_1 \right) = 0 \quad (۱۷۵-۴)$$

که در آن

$$k_1^\pm = \sqrt{\varepsilon_m + \frac{\alpha'^2}{4}} \pm \frac{\alpha'}{2}, \quad (۱۷۶-۴)$$

که روابط زیر در آن صدق می کند:

$$k_1^+ k_1^- = \varepsilon_m, \quad k_1^+ - k_1^- = \alpha', \quad (۱۷۷-۴)$$

بطور مشابه برای ناحیه ۲ نیز بدست می آید:

$$R^2 \frac{d^2 u_2}{dR^2} + R \frac{du_2}{dR} - (k_2^+ k_2^- R^2 + m^2) u_2 + i(k_2^+ - k_2^-) R^2 \left(\frac{dw_2}{dR} + \frac{m+1}{R} w_2 \right) = 0 \quad (۱۷۸-۴)$$

$$R^2 \frac{d^2 w_2}{dR^2} + R \frac{dw_2}{dR} - (k_2^+ k_2^- R^2 - (m+1)^2) w_2 - i(k_2^+ - k_2^-) R^2 \left(\frac{du_2}{dR} - \frac{m}{R} u_2 \right) = 0 \quad (۱۷۹-۴)$$

که در روابط فوق

$$k_2^\pm = \sqrt{\nu - \varepsilon_m + \frac{\alpha'^2}{4}} \pm i \frac{\alpha'}{2}, \quad (۱۸۰-۴)$$

نکته این که با قرار دادن $\alpha' = 0$ بدست می آید که $k_1^+ = k_1^-$ و $k_2^+ = k_2^-$. با استفاده از ویژگی های

تابع بسل و بسل تعمیم یافته ترکیب خطی زیر را در ناحیه اول بررسی شده است [14].

$$u_1 = c_1 f_1(m, \varepsilon_m, \alpha', R) + d_1 g_1(m, \varepsilon_m, \alpha', R) \quad (۱۸۱-۴)$$

$$w_1 = c_1 g_1(m+1, \varepsilon_m, \alpha', R) + d_1 f_1(m+1, \varepsilon_m, \alpha', R) \quad (۱۸۲-۴)$$

که در روابط فوق

$$f_1(m, \varepsilon_m, \alpha', R) = \frac{1}{2} [j_m(k_1^- R) + j_m(k_1^+ R)] \quad (۱۸۳-۴)$$

$$g_1(m, \varepsilon_m, \alpha', R) = \frac{1}{2} [j_m(k_1^- R) - j_m(k_1^+ R)] \quad (۱۸۴-۴)$$

باید به این نکته توجه شود که در ناحیه ۱ و ۲ به ترتیب $0 \leq R \leq 1$ و $1 \leq R \leq \infty$ به روش استدلال مشابه روابط زیر بدست آمده است.

$$u_2 = c_2 f_2(m, \varepsilon_m, \nu, \alpha', R) + d_2 g_2(m, \varepsilon_m, \nu, \alpha', R) \quad (۱۸۵-۴)$$

$$w_2 = c_2 g_2(m+1, \varepsilon_m, \nu, \alpha', R) + d_2 f_2(m+1, \varepsilon_m, \nu, \alpha', R) \quad (۱۸۶-۴)$$

با در نظر گرفتن

$$f_2(m, \varepsilon_m, \nu, \alpha', R) = \frac{1}{2} [K_m(k_2^- R) + K_m(k_2^+ R)] \quad (۱۸۷-۴)$$

$$g_2(m, \varepsilon_m, \nu, \alpha', R) = \frac{i}{2} [K_m(k_2^- R) - K_m(k_2^+ R)] \quad (۱۸۸-۴)$$

با اعمال شرط پیوستگی تابع موج شعاعی و مشتق تابع در نقاط $R_{c.m.} = R_{0,c.m.}$ و $R=1$ بدست آمده است:

$$u_1(m, \varepsilon_m, \alpha', 1) = u_2(m, \varepsilon_m, \nu, \alpha', 1) \quad (۱۸۹-۴)$$

$$u_1'(m, \varepsilon_m, \alpha', 1) = u_2'(m, \varepsilon_m, \nu, \alpha', 1) \quad (۱۹۰-۴)$$

$$w_1(m, \varepsilon_m, \alpha', 1) = w_2(m, \varepsilon_m, \nu, \alpha', 1) \quad (۱۹۱-۴)$$

$$w_1'(m, \varepsilon_m, \alpha', 1) = w_2'(m, \varepsilon_m, \nu, \alpha', 1) \quad (۱۹۲-۴)$$

با قراردادن معادلات (۱۸۱-۴) تا (۱۸۸-۴) در روابط (۱۸۹-۴) تا (۱۹۲-۴) منتج به رابطه زیر است.

$$M(m, \varepsilon_m, \alpha', 1) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = 0$$

(۱۹۳-۴)

که ماتریس M با رابطه (۱۹۴-۴) به صورت زیر تعریف می شود.

$$\begin{pmatrix} f_1(m, \varepsilon_m, \alpha', 1) & -f_2(m, \varepsilon_m, v, \alpha', 1) & g_1(m, \varepsilon_m, \alpha', 1) & -g_2(m, \varepsilon_m, v, \alpha', 1) \\ f'_1(m, \varepsilon_m, \alpha', 1) & -f'_2(m, \varepsilon_m, v, \alpha', 1) & g'_1(m, \varepsilon_m, \alpha', 1) & -g'_2(m, \varepsilon_m, v, \alpha', 1) \\ g_1(m+1, \varepsilon_m, \alpha', R) & -g_2(m+1, \varepsilon_m, v, \alpha', 1) & f_1(m+1, \varepsilon_m, \alpha', 1) & -f_2(m+1, \varepsilon_m, v, \alpha', 1) \\ g'_1(m+1, \varepsilon_m, \alpha', R) & -g'_2(m+1, \varepsilon_m, v, \alpha', 1) & f'_1(m+1, \varepsilon_m, \alpha', 1) & -f'_2(m+1, \varepsilon_m, v, \alpha', 1) \end{pmatrix}$$

و ویژه مقادیر انرژی سیستم به صورت زیر تعیین می شود.

$$\det M(m, \varepsilon_m, v, \alpha') = 0 \quad (۱۹۵-۴)$$

به این ترتیب ویژه مقادیر انرژی محاسبه می شود، تابع موج نهایی از حاصل ضرب بخش نسبی و بخش

مرکز جرم محاسبه می شود، در جدول زیر نیز تعدادی از ویژه مقادیر انرژی محاسبه شده که با

استفاده از نرم افزارهای محاسباتی بدست می آید، ارائه شده است.

جدول ۴-۱. ویژه مقادیر انرژی محاسبه شده.

β	State $ n, \gamma, m\rangle$	Energy	State $ n, \gamma, m\rangle$	Energy	State $ n, \gamma, m\rangle$	Energy
0	$ 1, 0, 0\rangle$	0.9149	$ 1, 0, 1\rangle$	1.0717	$ 1, 0, 2\rangle$	3.5784
1	$ 1, 0, 0\rangle$	-1.0783	$ 1, 0, 1\rangle$	0.7651	$ 1, 0, 2\rangle$	3.1351
5	$ 1, 0, 0\rangle$	-3.7083	$ 1, 0, 1\rangle$	-3.0816	$ 1, 0, 2\rangle$	-1.8083
10	$ 1, 0, 0\rangle$	-9.9916	$ 1, 0, 1\rangle$	-9.9816	$ 1, 0, 2\rangle$	-9.8616
0	$ 2, 0, 0\rangle$	0.1829	$ 2, 0, 1\rangle$	2.1697	$ 2, 0, 2\rangle$	4.6763
1	$ 2, 0, 0\rangle$	0.0197	$ 2, 0, 1\rangle$	1.8629	$ 2, 0, 2\rangle$	4.2329
5	$ 2, 0, 0\rangle$	-2.6103	$ 2, 0, 1\rangle$	-1.9837	$ 2, 0, 2\rangle$	-0.7103
10	$ 2, 0, 0\rangle$	-8.8937	$ 2, 0, 1\rangle$	-8.8837	$ 2, 0, 2\rangle$	-8.7637
0	$ 2, 1, 0\rangle$	0.6348	$ 2, 1, 1\rangle$	2.6215	$ 2, 1, 2\rangle$	5.1281
1	$ 2, 1, 0\rangle$	0.4715	$ 2, 1, 1\rangle$	2.3148	$ 2, 1, 2\rangle$	4.6848
5	$ 2, 1, 0\rangle$	-2.1585	$ 2, 1, 1\rangle$	-1.5318	$ 2, 1, 2\rangle$	-0.2585
10	$ 2, 1, 0\rangle$	-8.4418	$ 2, 1, 1\rangle$	-8.4318	$ 2, 1, 2\rangle$	-8.3118

نتیجه گیری

در این پایان نامه نیروهای بنیادی، ذرات بنیادی و مطالعه هسته و انرژی بستگی آن در قسمت اول مورد بررسی قرار گرفت و سعی شد مروری اجمالی بر این مباحث انجام شود تا بستر مناسب برای فصل‌های بعدی فراهم شود، پس از آن در فصل‌های سوم و چهارم به معرفی رهیافتی جدید در حل مسائل مربوط به برهم‌کنش‌های هسته‌ای برای سیستم‌های متفاوت در حالت ذره منفرد، سیستم‌های دوجسمی و سه جسمی پرداخته شد که دریچه‌ای جدید برای بررسی و مطالعه این سیستم‌ها در حالت‌های متفاوت و تحت تأثیر پتانسیل‌های مختلف را فراهم آورده است.

برای بیان نتیجه پررنگ تر از آنچه که در بالا ارائه شد می‌توان به این نکات اشاره کرد که برای سیستم‌های سه جسمی با در نظر گرفتن برهم‌کنش اسپین مدار راشبا ملاحظه می‌شود که این برهم‌کنش، فقط تابع مرکز جرم سیستم است و همچنین با در نظر گرفتن برهم‌کنش کولنی، برای سیستم سه جسمی برای حل تحلیلی مسئله باید سیستم دارای تعادل فوق کروی باشد و در ضمن با در نظر گرفتن متغیر فوق شعاع (x)، تابع موج چنین سیستمی فقط وابسته به این متغیر خواهد بود و به این ترتیب است که انرژی سیستم محاسبه می‌شود.

پیوست الف

معرفی فضای فوق کروی

از میان روش‌های مختلفی که برای حل معادله شرودینگر مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش بسط هماهنگ فوق کروی یکی از کارآمدترین روش‌ها است.

اما در این روش به دلیل وجود واگنی بالا، برای هر نوع مسئله باید پایه‌ای خاص را در نظر گرفت. این حقیقت پیامدی از این خاصیت است که برای یک برهم‌کنش دو جسمی، پایه پتانسیل توصیف کاملی از هم بستگی‌های دو جسمی ارائه می‌دهد، بنابراین برای فراتر از محدوده باید همبستگی‌های چند جسمی معرفی شوند این همبستگی‌ها تنها سهم کمی خواهند داشت چرا که احتمال برهم‌کنش هم زمان سه ذره یا بیشتر، حداقل در مسائل حالت‌های مقید هسته‌ای بسیار اندک است.

هماهنگ‌های فوق کروی

فرض کنید $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ مجموعه‌ای از مختصه‌های خطی باشد. یک چند جمله‌ای همگن $H_{(L)}(\xi_1, \dots, \xi_N)$ از مرتبه L وقتی هماهنگ است که در معادله لاپلاس صدق کند.

با تعریف فوق شعاع

$$r^2 = \left[\sum_{i=1}^N \xi_i^2 \right] \quad (\text{الف-۱})$$

تابع

(الف-۲)

$$Y_{(L)}(\Omega) = r^{-L} H_{(L)}(\xi) \quad (\xi_1, \dots, \xi_n)$$

$H_{(L)}(\xi)$ بیانگر مقدار چند جمله‌ای هماهنگ بر روی سطح فوق کره به شعاع واحد ($r = 1$) است.

این مورد را یک هماهنگ کروی می‌نامند. Ω مجموعه‌ای از $(3N-1)$ مختصه زاویه‌ای است که مکان نقطه‌ای بر روی سطح کره واحد $r=1$ را توصیف می‌کنند. (L) مجموعه‌ای از $(3N-1)$ عدد است که چند جمله‌ای $H_{(L)}(\xi_1, \dots, \xi_N)$ را مشخص می‌کند. پایه هماهنگ فوق کروی $(\xi_1, \dots, \xi_N)$ را می‌توان با روابط بازگشتی محاسبه نمود. برای این کار از این خاصیت استفاده می‌شود که هماهنگ فوق کروی برای توابعی که روی سطح فوق کره واحد تعریف می‌شوند، پایه کاملی را تشکیل می‌دهند بنابراین اگر تشکیل یک مجموعه کاملی از هماهنگ‌های فوق کروی متعامد را برای مختصه‌های بدهد، توسط جواب معادلات زیر بیان می‌شود.

(الف-۳)

$$\int H_{(L)}(\xi_1, \dots, \xi_q) P_n^{(L)}(\xi_{q+1}) P_{n'}^{(L')}(\xi_{q+1}) H_{(L')}(\xi_1, \dots, \xi_q) d\Omega_{q+1} = \delta_{|L|, |L'|} \delta_{n, n'}$$

که در این انتگرال گیری بر روی سطح فوق کره واحد در فضای $(q+1)$ بعدی محاسبه می‌شود و p چند جمله‌ای‌ها هستند. وقتی مجموعه اعداد $|L|, |L'|$ یکسان باشند نماد کرونکر $\delta_{|L|, |L'|}$ یک و در غیر این صورت برابر با صفر است. عنصر سطحی متناظر باید مختصه‌های فوق کروی باشند.

عملگر لاپلاسی از مختصات فوق کروی و در فضای D بعدی تبدیل می‌شود به

(الف-۴)

$$\nabla^2 = \sum_{i=1}^N \nabla_i^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} + \frac{L^2(\Omega)}{r^2}$$

که $L^2(\Omega)$ عملگر مداری بزرگ است.

فرض کنید می‌خواهیم تابعی مانند $V(r_{ij})$ که تابعی از فاصله بین ذرات ($r_{ij} = r_i - r_j$) است را در هماهنگ فوق کروی بسط دهیم. مجموعه‌ای از مختصه‌های ژاکوبی را تعریف می‌کنیم که برای آنها

$$r^2 = 2 \sum_{i=1}^A (x_i - X)^2 = \frac{2}{A} \sum_{k,l>k} r_{kl}^2, X = \frac{1}{A} \sum_l x_l, A = N + 1 \quad (\text{الف - ۵})$$

پایه هماهنگ فوق کروی که برای بسط $V(r_{ij})$ دارای تابعی از مختصه‌های ξ_j می‌باشد با $N < j$ برقرار است. هدف نهایی فرمول‌بندی فوق کروی فراهم آوردن روشی برای حل معادله شرودینگر است، فرض کنیم می‌خواهیم با یک سیستم متشکل از A ذره یکسان کار کنیم و قصد داریم معادله شرودینگر متناظر زیر را حل کنیم که در آن (x) نشان دهنده مختصه‌های x_i ذرات و $V(r_{ij})$ یک برهم‌کنش دوجسمی است.

$$\left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^A \nabla_{x_i}^2 + \sum_{i,j} V(r_{ij}) - E \right\} \psi(x) = 0 \quad (\text{الف - ۶})$$

$$\xi_i = \sqrt{\frac{2i}{i+1}} \left(x_{i+1} - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^i x_j \right), i = 1, \dots, N = A - 1 \quad (\text{الف - ۷})$$

می‌توان مرکز جسم سیستم را حذف کرد و با این کار به معادله شرودینگر زیر می‌رسیم:

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\xi) - E \right\} \psi(\xi) = 0 \quad (\text{الف - ۸})$$

در فرمول بندی فوق کروی، تابع موج به صورت زیر بسط داده می‌شود:

$$\psi(\xi) = r^{-(D-1)/2} \sum_{(L)} Y_{(L)}(\Omega) u_{(L)}(r) \quad (\text{الف - ۹})$$

واگنی پایه هماهنگ کروی آنقدر زیاد است که بدون راهنمایی برای انتخاب یک زیر مجموعه مناسب، حل معادله شرودینگر با دقت قابل قبول، ممکن نیست. این راهنمایی توسط فرآیندی که به ساخت زیر مجموعه‌هایی که بهینه نامیده می‌شوند منجر می‌گردد. ایده‌ای که به مفهوم زیر مجموعه بهینه می‌انجامد از این فرض ناشی می‌شود که اولین جمله مستقل از Ω در بسط هماهنگ فوق کروی پتانسیل $V(\xi)$ به گونه‌ای غالب است که جفت شدگی بین مؤلفه‌های هماهنگ فوق کروی مختلف تابع

موج را که توسط هماهنگ‌های پتانسیل مبادله می‌شوند، می‌توان به‌عنوان اختلال درنظر گرفت. درست بودن این فرض برای حالت پایه چند سیستم نوکلئونی (سه نوکلئونی) بررسی شده است، نتیجه این بود که برای پتانسیل‌های مختلف سهم اولین جمله فوق‌کروی در بسط پتانسیل در انرژی بستگی به ۸۰ درصد سهم کل پتانسیل می‌رسد.

نتیجه دیگر اینکه اولین جمله با پایین‌ترین مرتبه هماهنگ فوق‌کروی ($L=0$) بطور قابل ملاحظه‌ای غالب است، این نتیجه ما را به این نکته رهنمون ساخت که تابع موج تنها هماهنگ فوق‌کروی‌هایی را نگه می‌دارد که در پتانسیل بطور مستقیم به اولین جمله غالب مرتبط هستند.

هماهنگ فوق‌کروی انتخاب شده بر طبق این روند زیر مجموعه‌ای می‌سازد که اصطلاحاً مجموعه بهینه نامیده می‌شود. بنابراین زیر مجموعه هماهنگ فوق‌کروی زیر مجموعه‌ای از اعمال عملگر پتانسیل $V(\xi)$ به هماهنگ فوق‌کروی است که با کمترین مرتبه در بسط حالت مورد بررسی تولید شده است [۳۲].

مراجع :

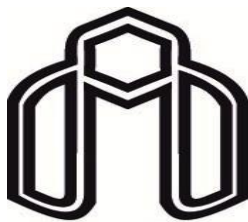
- [۱] هانس فراون فلدر، ارنست م. هنلی، ۱۳۷۴، "فیزیک زیر اتمی"، بارزی م و فلاحی م، مرکز نشر دانشگاهی، (۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۲، ۱۱۵، ۲۲۷).
- [۲] دیوید جفری گریفیتس، ۱۳۸۴، "مقدمه ای بر ذرات بنیادی"، قهرمانی ن، چاپ اول، نورپردازان، تهران، (۱۴-۱۸).
- [۳] گاتینگهام / گرینوود، ۱۳۸۷، "مبانی فیزیک هسته ای"، رحیمی ف و رضازاده ح، چاپ دوم، دانشگاه فردوسی مشهد، (۲۱، ۲۲) و (۳۷-۴۱).
- [۴] والتر میرهوف، ۱۳۷۶، "مبانی فیزیک هسته ای"، رحیمی ف، چاپ دوم، دانشگاه فردوسی مشهد، (۵۵-۵۷) و ۶۲.
- [۵] کنت کرین، ۱۳۷۱، "آشنایی با فیزیک هسته ای"، جلد اول، ابوکاظمی ا و رهبر م، چاپ پنجم، مرکز نشر دانشگاهی، (۱۵۷-۱۶۳) و (۹۰-۹۱).
- [۶] کاتینگهام / گرینوود، ۱۳۸۷، "مبانی فیزیک هسته ای"، رحیمی ف و رضا زاده ح، چاپ دوم، دانشگاه فردوسی مشهد، (۲۱-۲۲) و (۳۷-۴۱).
- [۷] M. R. Spiegel, Schaum's Outline of Theory and Problems of Laplace Transforms, Schaum Publishing Co., New York, (1965).
- [8] L. I. Schiff, Quantum Mechanics, 3rd edn. (McGraw-Hill, New York, 1955).
- [9] P. A. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, 4th edn. (Oxford Univ. Press, 1958).
- [10] A. de Lange, J. Math. Phys. 30 , 858 (1989).
- [11] F. H. M. Faisal and T. Radozycki, Phys. Rev. A48 , 554 (1993).
- [12] S. Dong and S.-H. Dong, Physica Scripta 66 , 342 (2002).
- [13] C. M. Bender and K. A. Milton, Phys. Rev. D50 , 6547 (1994).
- [14] H. X. Quan, L. Guang, W. Z. Min, N. L. Bin and M. Yan, Commun. Theor. Phys. 53, 242 (2010).
- [15] Z. M. Cang and W. Z. Bang, Chem. Phys. 16, 1863 (2007).
- [16] H. Hartmann, Theor. Chim. Acta 24, 201 (1972).
- [17] S. H. Dong, G. H. Sun and M. Lozada-Cassou, Phys. Lett. A 340, 94 (2005).

- [18] C. Z. Dong, J. Atom. Mol. Phys. 22, 483 (2005).
- [19] A. Arda and R. Sever, J. Math. Chem. DOI 10.1007/s10910-011-9944-y.
- [20] C. Berkdemir, A. Berkdemir and J. G. Han, Chem. Phys. Lett. 417, 326 (2006).
- [21] A. A. Rajabi, (2005), Iranian Journal of Physics Research, Vol. 5, No. 292005.
- [22] A. Arda, R. Sever, Math. Chem., 50, (2012), 1484.
- [23] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables (Dover Publications, 1965).
- [24] H. A. Bethe and E. E. Salpeter, Phys. Rev. 84 , 1232 (1951).
- [25] E. E. Salpeter, Phys. Rev. 87 , 328 (1952).
- [26] J. K. Chen, Z.-Y. Fang, B.-Q. Hu and Z.-X. Zhang, HEP & NP 26 , 766 (2002).
- [27] A. V. Anisovich, V. V. Anisovich, V. N. Markov, M. A. Matveev and A. V. Sarantsev, Phys. Atom. Nucl. 68 , 1573 (2005) [Yad. Fiz. 68 , 1633 (2005)].
- [28] A. A. Rajabi, (2006), Commun. Theor. Phy. 45 pp. 669-674.
- [29] A. A. RAjabi, (2005), Few- Body Systems 37, pp. 197- 213.
- [30] Sameer M. Ikdair and Ramazan Sever, (2008), Cent. Eur. J. Phys. 6 (3) 697-703.
- [31] H. Hassanabadi, H. Rahimov, S. Zarrinkamar, Few-body Syst (2012), 87-95.
- [32] M. Fabre de La Ripelle, S. A. Sofianos, R. M. Adam, (2005), Annals of Physics 316, pp. 107-159.

Abstract

Study of multi-particle systems has received much attention in recent years, researchers and scholars in the field of Nuclear Sciences because of it in this master of science thesis we try to describe two and three particle system with Laplace Transform Approach (LTA). This new approach is suitable for a case study of two and three particle systems in the presence of different potential.

This thesis begins with an introduction of elementary particles and then describes the core of the binding energy has been with the introduction of nuclear potential Yukawa, by applying the Laplace transform description of the core are provided. Then, using the Laplace transform approach for two-particle systems have been studied for a number of known potential. Finally, a system of three particles in the presence of the Coulomb potential and the interaction potential spin - orbit Rashba is studied.



Shahrood University

Physics Department

Master of Science Thesis

**Research of Two and Three Nucleons with
Laplace Transport Approach**

Supervisors:

Prof. Ali Akbar Rajabi

Dr. Hassan Hassanabadi

By:

Ebrahim Momtazi

Date:

7 September 2013