بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده : فیزیک

گروه : هسته ای

محاسبه تابع ایسگور-وایس برای تعیین ساختار سیستم های چند ذره ای

دانشجو : سارا رحمانی

استاد راهنما :

دکتر حسن حسن آبادی

استاد مشاور :

مهندس حامد رحیم اف

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

شهریورماه۱۳۹۲

پیوست شماره۲

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : فیزیک

گروه : هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سارا رحمانی

تحت عنوان: محاسبه تابع ایسگور-وایس برای تعیین ساختار سیستم های چند ذره ای

در تاریخ .... توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد مورد ارزیابی و با درجه .... مورد پذیرش قرار گرفت.

اساتید راهنما	امضاء	اساتید مشاور	امضاء
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	

اساتید داور	امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء
نام و نام خانوادگی :		نام و نام خانوادگی :	
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			
نام و نام خانوادگی :			

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم که وجودشان مایه دلگرمی و نشاط زندگیم است.

تشکر و قدردانی

خدا را ستایش می‌کنم چنانکه خود از بندگان خواسته است، و برای هر چیزی اندازه‌ای قرار داده و برای هر اندازه‌ای مدتی معین کرده، و هر مدتی را حسابی مقرر داشته است. حال که به لطف پروردگار نگارش این پایان نامه را به اتمام رسانده‌ام، بر خود لازم می‌دانم از همه عزیزانی که در این مسیر مرا یاری رسانده‌اند قدردانی کنم. از زحمات بی‌دریغ و خالصانه استادمحترم راهنما جناب آقای دکتر حسن حسن آبادی که راهنمایی‌هایمهم ایشان نقش ارزنده‌ای در پیشبرد این تحقیق داشته‌است صمیمانه تشکر می‌کنم و بخاطر همه لحظات ارزشمندی که در یادگیری از این استاد بزرگوار سپری شدسپاسگزارم. از اساتید بزرگوارم، آقای مهندس حامد رحیم اف و آقای دکتر صابر زرین کمرو همچنین خانم‌ها مقصودی و حسن آبادیقدردانی می‌نمایم. از خداوند متعال موفقیت روزافزون تمامی این عزیزان را آرزومندم.

تعهد نامه

اینجانب **سارا رحمانی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته **فیزیک هسته ای** دانشکده **فیزیک** دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه **محاسبه تابع ایسگور-وایس برای تعیین ساختار سیستم های چند ذره ای** تحت راهنمائی دکتر **حسن حسن آبادی** متعهد می شوم.

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .**تاریخ ۱۳۹۲/۰۶/۱۶**

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامهبدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد**.**

چکیده

تعیین تابع ساختار هادرون‌ها یکی از مهمترین مسائل فیزیکی درQCDاست. برای این منظور ابتدا ویژه توابع و ویژه حالت‌های سیستم را تعیین می‌کنیم و سپس با استفاده ازتابع موج تعیین شده تابع ایسگور-وایس را برای این سیستم بدست می‌آوریم. این تابع دارای این خصوصیت است که به کمک آن می‌توان خواص استاتیکی سیستم را مشخص نمود. برای تعیین تابع موج سیستم در حالت غیرنسبیتی از معادله شرودینگر و برای سیستم‌های نسبیتی از معادلات سالپیتر، کلاین- گوردن (KG) و دافین-کمر-پتیو (DKP) استفاده می‌کنیم. بررسی حالت نسبیتی سیستم دو ذره‌ای لازم است، در سیستم مرکز جرم انجام شود. سپس با استفاده از تابع موج بدست آمده به بررسی تابع ایسگور- وایس پرداخته و خواص استاتیکی سیستم مزونی را استخراج می‌کنیم.

ما مزون‌های B, D, B_s, D_s, B_c را بررسی می‌کنیم که به ترتیب شامل ساختارهای کوارکی $b\bar{u}, c\bar{u}, b\bar{s}, c\bar{s}, b\bar{c}$ هستند. در چارچوب غیرنسبیتی با استفاده از معادله شرودینگر ابتدا تابع موج حالت پایه مزونی را می‌یابیم و سپس به بررسی غیر نسبیتی مشخصات سیستم مزونی می‌پردازیم. همچنین رفتار تابع ایسگور- وایس را در مورد دو کوارکونیوم $\eta_c(c\bar{c})$و $\eta_b(b\bar{b})$ به کار می‌گیریم.

در فصل سوم بررسی نیمه نسبیتی تابع ایسگور- وایس را برای مزون‌های B و Dنشان می‌دهیم. در فصل چهارم رفتار تابع ایسگور-وایس را در حالت نسبیتی برای مزون‌های نیمه سنگین ارائه می‌کنیم. ما در این فصل علاوه بر مزون‌های اسپین صفر اشاره شده، پارامترهای تابع ایسگور- وایس را برای مزون‌های با اسپین یک شامل J/ψو Υ بدست می‌آوریم.

کلمات کلیدی: مزون، تابع ایسگور- وایس، معادله سالپیتر،معادلهKG، معادله DKP

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه:

۱- رحمانی سارا، حسن آبادی حسن، بررسی تابع ایسگور- وایس برای معادله دی کی پی (کنفرانسفیزیک ایران، بیرجند، شهریور ۱۳۹۲).

[2] H. Hassanabadi, S. Rahmaniand S. Zarrinkamar, Study of Heavy-Light Mesons via the Spinless Salpeter Equation, Isgur-Wise Function and Cornell Interaction, accepted in Chinese Physics C.

[3]H. Hassanabadi, S. Rahmaniand S. Zarrinkamar, Study of Heavy-Light Mesons via the Klein-Gordon Equation, Isgur-Wise Function and Cornell Interaction, accepted in Indian Journal of Physics.

[4] S. Rahmani, H. Hassanabadiand S. Zarrinkamar, Isgur-Wise Function Parameters and Mesons Mass under the Schrödinger Equation, Submitted to Physica Scripta.

فهرست مطالب

فهرست اشکال

فهرست جداول

فصل اول

تابع ایسگور- وایس

۱-۱-مقدمه

سیستم متشکل از دو کوارک، با یک کوارک سنگین و یک کوارک سبک مرکز توجه سال‌های زیادی بوده است. در گذارهای نیمه لپتونی برای مزون‌ها در حد جرمی کوارک نامحدود تمام فرم فاکتورهای مزونی می توانند در ترم‌های تابع عمومی ایسگور- وایس بیان گردندکه تابعی بر حسب تابع موج مزون‌هاست. بنابراین تابع موج مزونی برای مطالعه پرجزییات این تابع ضروری است.از آنجایی که تابع ایسگور- وایس مستقیما به تابع موج مربوط می شود این تابع ابزار اساسی برای فهمیدن فرایندهای واپاشی و مکانیزم مرتبط است. ساختار مدل‌های پدیده‌شناختی QCD[1]برای پیش بینی خصوصیات هادرون‌ها مانند جرم، ثابت‌های واپاشی و پهناهای واپاشیبسیار مفید است. مدل‌های پتانسیل برای مزون‌ها شامل پتانسیل بین کوارک‌های سبک و سنگین در مطالعه خصوصیات هادرون‌ها بسیار موفقیت آمیز بوده است.

پیش‌بینی تابع ایسگور- وایس می‌تواند به عنوان مقیاسی از اعتبار مدل در نظر گرفته شود. شناخت تابع ایسگور- وایس در محاسبه مقادیرعددی نسبت‌های انشعابی در واپاشی‌های نیمه لپتونی و نیزیافتن اعضای ماتریس CKM[2]ضروری است. ماتریسCKM در مدل استاندارد معرفی می‌شود که شامل اطلاعاتی از شدت واپاشی‌های ضعیف است.

واپاشی‌های ضعیف هادرونی که شامل کوارک‌های سنگین هستند برای آزمایش مدل استاندارد و اندازه گیری پارامترهای مربوط به آن به کار گرفته می‌شوند. این واپاشی‌ها وسیله مناسبی برای بدست آوردن درایه های ماتریس CKMمی باشند. به کارگیری راه‌های کاملا مستقل برای بررسی این واپاشی‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است.

[1] Quantum chromodynamics
[2] Cabibbo–Kobayashi– Maskawa

تابع ایسگور- وایسدر سال۱۹۸۹ توسط ناتان ایسگور[۳]ومارک وایس[۴]ارائه شد. سال ۱۹۹۵،السن[۵]و وسلی[۶]مدل شار نسبیتی این تابع را برای توصیف واپاشی‌های نیمه لپتونی مزون‌هایBارائه کردند. اخیرا Hazarika وChoudhuryتابع ایسگور- وایس را در یک مدل پتانسیل برهم‌کنش قوی بررسی کرده‌اند. آنالیز تابع ایسگور- وایس و مشتقات آن شامل شیب و خمیدگی تابع با مدل کوارکی نیمه سنگینQCDتوسط RoyوChoudhuryارائه شده‌است. Roy،Hazarika وChoudhury تابع ایسگور- وایس را برای مزون‌های نیمه سنگین در مدل پتانسیل ابعاد بالا ارائه کرده‌اند.IWF در ترم‌های توابع ایری گزارش شدهاست و پارامترهای IW داخل چارچوب مدل کوارکی QCD گزارش شده‌است. با انجام تحلیل‌هایی در ابعاد اختیاری، مشتقات IW برای مزون‌های D وB با بعضی حدود برشی در انتگرال‌های IWFارائه شده‌است [۶-۱].

۱-۲- تابع ایسگور-وایس

ابزارهای رایج ما در فیزیک ذرات مزیت‌ها و شکست‌های آن‌هاست. بعضی از آنها خیلی قوی و دقیق هستند، اما از سوی دیگر بسیار پیچیده‌اند. در میان روش‌های متنوع که در فیزیک ذرات بارها استفاده شده‌است، ما به طور خاص فرمالیزم IW را به عنوان ابزاری توانا برای تحلیل مزون‌های نیمه سنگین می شناسیم. تابع IW می‌تواند به خوبی گذارهای مزونی و شعاع باری‌شان را توضیح دهد. نتایج موفقیت آمیز فرمالیزم انگیزه بخش خیلی از مطالعات مختلف در این بخش شده‌است. خصوصیات گذارها و مدهای واپاشی مزون‌های B و D برای مدل استاندارد در فیزیک ذرات اهمیت خاصی دارد. شناخت کافی این مزون‌ها در مطالعه مزون کمتر شناخته شده J/ψ راهنمای ارزشمندی است. شیوه‌های مختلفی برای

[۳]Nathan Isgur

[۴]Mark Wise

[۵]Olsson

[۶]Veseli

تحقیق این مزون‌ها وجود دارد. یکی از این شیوه‌ها با شکست‌ها و مزایای خودش فرمالیزم تابع ایسگور-وایس است. این فرمالیزم به خوبی در حد کوارک سنگین کار می‌کند. IWF تابع چارسرعت دو مزون است که در صفر بازگشتی بهنجار شده‌است. به جای اینکه بین هادرون سنگین و دامنه‌های کوارک مرتبط ارتباط مستقیم برقرار کنیم، ما تنها به شناخت $\zeta(y)$ نیازمندیم. این فرم فاکتور عمومی همه اثرات برهم-کنش بین درجات آزادی سبک و سنگین را ارائه می‌دهد. انگیزه محاسبه تابع ایسگور- وایس این است که به مقادیر عددی نسبت‌های شاخه‌ای واپاشی‌های نیمه لپتونی و عضو ماتریس CKM منجر می‌شود. از سویی دیگر اطلاعات IWF می‌تواند جرم مزون‌ها، ثابت‌های واپاشی، مدهای واپاشیو اعضای ماتریسCKM را تعیین کند. همین‌طور این تابع می‌تواند به عنوان یک فرم فاکتور عمومی که شامل اثرات بر هم‌کنش-های بین اجزای سازنده‌ی سبک و سنگین می‌شود مشاهده گردد. به عبارت دیگر IWF نشان‌دهنده‌ی همپوشانی درجات آزادی سبک تابع موج در مزون‌های ابتدایی و نهایی می‌باشد. در سال‌های اخیر برای شناخت واپاشی‌های ضعیف هادرونی شامل یک کوارک سنگین تلاش شده‌است. تابع ایسگور-وایس برهم-کنش‌های قوی کوارک‌ها و گلئون‌ها را شامل می‌شود. این تابع مستقل از جرم کوارک سنگین است و تنها به ضرب ناوردای چارسرعت حالت ابتدایی و نهایی هادرون‌ها بستگی دارد [۶-۳].

ما تابع $\zeta(y)$ را نزدیک صفر بازگشتی که در آن‌جا چارسرعت مزون ها قبل و بعد گذار مساویند مطالعه می‌کنیم که به صورت بسط سری تیلور پارامتربندی می‌شود. محدوده جنبشی قابل دسترس در واپاشی-های نیمه لپتونی قلمرو کوچکی دارد (y=1 تا 1.43). بنابراین شعاع باری و پارامتر تحدب IWF در محدوده فیزیکی قابل دسترس تعیین می‌گردند.در نقطه بازگشتی کوچک تابع ایسگور-وایس توسط رابطه زیر مدل بندی می‌شود:

$$\zeta(\omega) = 1 - \rho^2(\omega - 1) + o[(\omega - 1)^2] \qquad (1\text{-}1)$$

به دلیل پایستگی جریان، $\zeta(1)=1$ است. تابع ایسگور-وایس به مدل خطی فیت می‌شود.

سیستم متشکل از یک کوارک سنگین در دهه‌های اخیر مورد توجه زیادی بوده‌است.در نزدیکی حد کوارک سنگین ($m_b, m_c \to \infty$) در هر مقدار ثابت ω تابع ایسگور-وایس به جرم کوارک‌های سنگین وابستگی ندارد. در حد جرم کوارک سنگین بی‌نهایت، بخش کوارک سنگین QCD مستقل از جرم‌های کوارک و نیز لاگرانژی موثر در نظریه موثر کوارک سنگین (HQET) می‌شود که تقارن‌های طعمی اسپین جمعی را نشان می‌دهد و محاسبات اعضای ماتریس گذارهای الکتروضعیف را ساده می‌کند. در گذارهای نیمه لپتونی در حد جرمی کوارک بی‌نهایت همه فرم فاکتورهای مزونی در ترم‌های تابع عمومی به نام ایسگور- وایس بیان می‌گردند[۱]. شکل تابع ایسگور-وایس و مشتقاتش (شیب و تحدب) در صفر بازگشتی، برای تعیین اعضای ماتریس CKM ضروری است و این بیان قابل قبولی از ایسگور-وایس را نیاز دارد. بخش اصلی تابع ایسگور- وایس تابع موج مزون‌هاست.

برای مزون شامل یک کوارک سنگین (cوbوt)، جرم کوارک سنگین خیلی بزرگتر از پارامتر مقیاسی در کرومودینامیک کوانتومی یعنی Λ_{QCD} می‌باشد. چارسرعت کوارک سنگین تقریبا همان چارسرعت مزون است و در چارچوب آزاد مزون، کوارک سنگین به صورت یک منبع ایستای رنگ ظاهر می‌شود. این تقارن طعم اسپین و کاهش فرم فاکتورها را به میان می‌آورد. همه شش فرم فاکتور در واپاشی نیمه لپتونی اکنون در ترم‌های تابع عمومی وابسته به انتقال سرعت قابل بیان هستند. این تابع به نام ایسگور- وایس شناخته می‌شود. این تابع همپوشانی توابع موج درجات آزادی سبک مزون‌های ابتدایی و نهایی را اندازه می‌گیرد. IWF $\zeta(v,v')$ یک تابع بر حسب چارسرعت v, v' ذره سنگین قبل و بعد واپاشی است. همانطور که $E_{recoil}=\mu(v.v'-1)$ انرژی بازگشتی حالت مزون نهایی P' (از جرم μ) در چارچوب آزاد مزون ابتدایی Pمی‌باشد، نقطه $y=v.v'=1$ نیز به حد صفر بازگشتی برمی‌گردد. IWF در نقطه صفر بازگشتی بهنجار شده‌است که پیامدی از پایستگی جریان است. اگر $y=v.v'$، سپس برای صفر بازگشتی داریم:y=1و

$\zeta(y)=1$. در مدل کوارکی غیرنسبیتی (NRQM)، IWF همپوشانی بین توابع موج درجات آزادی سبک را توصیف می‌کند[۷].

در حد کوارک سنگین، کوارک سنگین در هادرون‌های سنگین سرعت ثابت دارد که با سرعت هادرون سنگین مساوی است و اسپین کوارک سنگین با سیستم کوارک سبک در هادرون از برهم‌کنش قوی آن جدا می‌شود. سیستم کوارک سبک هیچ خصوصیتی از کوارک سنگین به جز سرعت آن را نمی‌تواند ببیند.

۱-۳- پارامترهای تابع ایسگور- وایس

ما فرمول‌بندی‌مان ازIWFرا تا ترم مربعی در بسط محدود می‌کنیم. تحت این فرض در نزدیکی نقطه صفر بازگشتی، IWF را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\zeta(y)=1-\rho^2(y-1)+C(y-1)^2+\dots \qquad (۲-۱)$$

در اینجا ρ^2 شیب (شعاع باری) و C انحنا (پارامتر تحدب) تابع ایسگور- وایس است، که در نقطه صفر بازگشتی به صورت زیر اندازه‌گیری شده‌اند:

$$\rho^2=-\frac{\delta\zeta(y)}{\delta y}\Big|_{y=1}\,,\; C=\frac{\delta^2\zeta(y)}{\delta y^2}\Big|_{y=1} \qquad (۳-۱)$$

محاسبه ρ^2و C تاییدی برایHQETرا در حد جرم کوارک نامحدود فراهم می‌کند. تلاش‌های زیادی برای محاسبه ρ^2و C از تئوری و مدل‌ها (منابع [۴-۱۱]) شده‌است. پارامتر تحدب C اندازه و جهت تحدب شکل IWF را نشان می‌دهد. تحدب منفی، تقعر IWFدر رسم را نتیجه خواهد داد. گرچه، به صورت عمومی IWF انتظار دارد برای همه $y>1$ تحدب مثبت داشته باشد. یک دلیل کمی برای محاسبه تحدب در امتداد پارامتر شیب (خارج از مشتق اول) این است که مشتقات بالاتر نقش غیرقابل صرف نظری در $y>1$ بازی می‌کنند و اینکه دیتاها دقیق‌تر بیرون می‌آیند.

تابع ایسگور-وایس فرم‌های مختلفی دارد اما همانطور که y افزایش می‌یابد ترم‌های مراتب بالاتر تفاوت ایجاد می‌کنند، تا آنجا که شکل IWFمورد علاقه است. برای مقادیر بزرگتر پارامتر شیب ($\rho^2 > 1$)، مهم است که ترم‌های بالاتر در بسط IWF نزدیک y=1 در تحلیل‌های دیتای تجربی وارد شوند. هم‌چنین نگهداشتن تنها اولین ترم در بسط به تخمین ناچیز پارامتر شیب منجر می‌شود. بنابراین ترم مربعی (تحدب) برای گرفتن نتایج قابل اطمینان ضروری باشد. هم‌چنین این خیلی مهم است که بینش تئوری برای برون‌یابی پارامترهای بسط به y=1 داشته‌باشیم. همانطور که تحلیل‌های تئوری و تجربی حاضر تا نتایج شیب و تحدب متمرکز هستند.

قابل ذکر است برای تحلیل‌های معتبر IWF، دو ترم اول در بسط IWF نیاز است که در فرض در نظر گرفته شود، بنابراین ضروری است که هم شیب و هم تحدب حساب شود. محاسبه ρ^2 و C یک اندازه گیری قابل اطمینان از HQET در حد جرمی نامحدود و نیز یک تست معتبر برای تایید تابع موج‌مان فراهم می‌کند. در پایه عمومی، پارامتر شیب بایستی مقداری نزدیک واحد داشته‌باشد و تحدبIWF انتظار می‌رود مقدار کوچک مثبت برای تمام y > 1 داشته باشد [۷].

در محدوده $v_R.v'_R$ فرم فاکتورها تقریبا رفتار خطی دارند:

$$\zeta(v_R.v'_R) = 1 - \rho^2(v_R.v'_R - 1). \qquad (۴-۱)$$

در جدول ۱-۱ مقادیری که از تابع ایسگور- وایس در مدل‌ها و منابع مختلف محاسبه شده‌اند، ارائه نموده-ایم.

جدول۱-۱- مقادیر پارامتر های تابع ایسگور- وایس در مدل‌های مختلف [۷ و ۹]

منابع و مدل‌ها	شیب	تحدب
CLEO [۷]	۱,۶۷	-
MIT bag model [۹]	2.35	3.95
Pole ansatz [۹]	1.42	2.71
Le Youanc et al[۹]	$\geq$ ۰,۷۵	$\geq$ ۰,۴۷
Skryme Model[۹]	۱,۳	۰,۸۵
Neubert[۹]	۰,۸۲ $\pm$ ۰,۰۹	-
UK QCD Collab.[۷]	۰,۸۳	-
BELLE[۷]	۱,۳۵	-
HFAG[۷]	۱,۱۷ $\pm$ ۰,۰۵	-
Huang[۷]	۱,۳۵ $\pm$ ۰,۱۲	-
Rosner [۹]	۱,۶۶	۲,۷۶
Mannel [۹]	۰,۹۸	۰,۹۸

۱-۴- فرم‌های مختلف تابع ایسگور-وایس

مدلسازی IWFتوسط شرط برون‌یابی به صفر بازگشتی هدایت شده‌است. در حقیقت فرمول‌بندی یکتایی از IWF وجود ندارد و تحلیل‌های مختلف عبارات مختلف IWF را تولید می‌کنند. این عبارات در مقادیر بزرگ y فرق دارند اما در بازه $y \approx 1$ توافق دارند. عموما دیتای تجربی موجود با فرم خطی IWF $[\zeta(y)=1-\rho^2(y-1)]$ شامل فقط ترم مشتق مرتبه اول فیت می‌شود [۷].

تئوری موثر کوارک سنگین برای نرخ واپاشی $\bar{B} \to D^{(*)} l \bar{\nu}_l$ ترم‌های فرم فاکتور عمومی یعنی تابع ایسگور- وایس را نتیجه می‌دهد. اگر تابع موج مزونی در چارچوب آزاد و انرژی درجات آزادی سبک E_q مشخص باشند سپس تابع ایسگور- وایس برای یک $\omega = v.v'$ داده شده (وقتی که v و v' چارسرعت دو هادرون باشند) از معادله زیر قابل محاسبه‌است:

$$\zeta(\omega) = \frac{2}{\omega+1}\left\langle j_0\left(2E_q\sqrt{\frac{\omega-1}{\omega+1}}r\right)\right\rangle \qquad (۵-۱)$$

که مقدار متوسط کمیت به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\left\langle A \right\rangle = \int_0^\infty dr\ r^2\ R(r)A(r)R(r) \qquad (۶-۱)$$

بنابراین مشتقات اول و دوم در نقطه صفر بازگشتی به صورت زیر هستند[۳]

$$\zeta'(1) = -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}E_q^2\left\langle r^2\right\rangle\right) \qquad (۷-۱)$$

$$\zeta''(1) = \frac{1}{2}+\frac{2}{3}E_q^2\left\langle r^2\right\rangle+\frac{1}{15}E_q^4\left\langle r^4\right\rangle \qquad (۸-۱)$$

مشتقات بالاتر می‌توانند مشابها محاسبه شوند اگر مطلوب باشند. نتایج بدست آمده به ترتیب زیرند:

$$\begin{aligned}\zeta'(1) &= -1.16 \pm 0.17\\ \zeta''(1) &= 2.64 \pm 0.74\end{aligned} \qquad (۹-۱)$$

از جمله کاربردهای مستقیم این پارامتربندی، استخراج قابل قبولی از شیب IW در نقطه صفر بازگشتی است و برای اولین بار حدس قابل قبولی را از مشتق مرتبه دوم ارائه می‌دهد [۳]. (توجه شود این پارامتربندی در سال ۱۹۹۵ ارائه شده‌است)

با به کارگیری تقارن کوارک سنگین داریم:

$$\zeta(\omega) = 1 - \exp\left(-\frac{0.582}{\sqrt{\omega^2 - 1}}\right) \qquad (۱۰-۱)$$

در محدوده جنبشی واپاشی‌های نیمه لپتونیقابل دسترس($1 \le \omega \le 1.6$)، این پارامتربندی مشخصات فیزیکی نزدیک به مقدار انتظاری درست برای تابع ایسگور- وایس دارد[۱۲].

پارامتربندی نیوبرت- ریکرت[۷] از تابع ایسگور- وایس به شکل زیر است [۱۳]:

$$\zeta(\omega) = \frac{2}{\omega+1}\exp\left[(2\rho^2 - 1)\frac{1-\omega}{1+\omega}\right] \qquad (۱۱-۱)$$

در حد جرم نامحدود، تئوری موثر کوارک سنگین پیش‌بینی می‌کند تابع ایسگور- وایس به همپوشانی درجه آزادی سبک تابع موج ضرب‌شده توسط یک عامل جنبشی مرتبط است.در مورد گذارهای حالت پایه به حالت پایه داریم[۱۴]:

$$\zeta(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\omega+1}} < \Phi_{Q'l} | \Phi_{Ql} > \qquad (۱۲-۱)$$

کت در معادله بالا تابع موج درجه آزادی سبک اصلی Φ_{Ql} و برا ذره دختر $\Phi_{Q'l}$ را توصیف می‌نماید. تابع ایسگور- وایس مستقل از اسپین کوارک سنگین است.

برای مزون‌های نیمه سنگین، اسپین کوارک سنگین $S_{\bar{Q}}$ و اسپین آنتی کوارک سبک S_q، به صورت $\frac{1}{m_{\bar{Q}}}$ جدا می‌شوند و در حدی که جرم کوارک سنگین به بی‌نهایت برود اسپین‌ها توسط برهم‌کنش‌های قوی به طور مجزا پایسته‌اند. تابع ایسگور- وایس می‌تواند به صورت همپوشانی توابع موج توصیف‌کننده درجات آزادی سبک در دو مزون تعریف شود [۳]:

[۷] Neubert-Rieckert

$$\zeta(\omega)=\sqrt{\frac{2}{\omega+1}}<\psi_{H_{\bar{c}}}|\psi_{H_{\bar{b}}}> \qquad (۱۳-۱)$$

بعضی از فرم‌های تابع ایسگور- وایس در مدل‌های مختلفبه همراه مقدار پارامترهای محاسبه شده در آنها به شرح زیرند:

۱) مدل کیسه‌ای MIT [۸] فرم تابع ایسگور- وایس را به صورت زیر ارائه می‌دهد:

$$\zeta(\omega)=(\frac{2}{\omega+1})^{3.5+\frac{1.2}{\omega}} \qquad (۱۴-۱)$$

این مدل مقادیر شعاع باری و پارامتر تحدب را به صورت زیر می‌دهد [۱۵]:

$$\rho^2=2.35\ ,\ C=3.95 \qquad (۱۵-۱)$$

۲) در مدل کوارکی ساده [۹] تابع ایسگور- وایس توسط فرمول زیر تقریب زده می‌شود:

$$\zeta(\omega)=(\frac{2}{\omega+1})^{1.32+\frac{0.70}{\omega}} \qquad (۱۶-۱)$$

که مقدار محاسبه شده شعاع باری و پارامتر تحدب به ترتیب ۱ و ۱,۱۱ هستند[۱۵].

۳) قاعده جمع کرومودینامیک کوانتومی [۱۰] پیش‌بینی می‌کند که:

$$\zeta(\omega)=(\frac{2}{\omega+1})^{\frac{1}{2}}\exp[-0.8\frac{\omega-1}{\omega+1}]. \qquad (۱۷-۱)$$

مقدار شعاع باری و پارامترتحدب در این مدل به صورت زیر پیش‌بینی شده‌اند [۱۵]:

[۸] MIT Bag model

[9] Simple Quark Model

[10] QCD Sum Rule

$$\rho^2 = 0.65 \ , \ C = 0.47 \qquad (۱۸-۱)$$

۴) تابع ایسگور- وایس در مدل اسکایرم [11] فرم روبرو را دارد:

$$\zeta(\omega) = 0.99 \exp[-1.3(\omega - 1)] \qquad (۱۹-۱)$$

با $\rho^2 = 1.3 \, , C = 0.85$ [۱۵].

۵) مدل سه‌کوارکی نسبیتی[12] فرم تقریبی تابع ایسگور- وایس نزدیک نقطه صفر بازگشتی را به صورت زیر محاسبه می‌کند:

$$\zeta(\omega) = (\frac{2}{\omega + 1})^{1.7 + \frac{1}{\omega}} \qquad (۲۰-۱)$$

که مقادیر عددی $\rho^2 = 1.35 \, , C = 1.75$ را نشان می‌دهد [۱۵].

۶) در مدل کوارکی چارچوب ممنتوم بی‌نهایت[13]، انتگرال‌های همپوشانی برای توابع موج هادرونی باریون دختر و مادر در چارچوب ممنتوم بی‌نهایت محاسبه شده، به فرم زیر از تابع ایسگور- وایس منجر می‌شود:

$$\zeta(\omega) = (\frac{1}{\omega})^{2m + \frac{1}{2}} \exp[-\kappa^2 \frac{\omega - 1}{2\omega}] \frac{H_{2m}(\kappa \sqrt{\frac{\omega + 1}{2\omega}})}{H_{2m}(\kappa)} \qquad (۲۱-۱)$$

که در آن داریم:

$$H_l(x) = \int_{-x}^{\infty} dy \ (y + x)^l \, e^{-z^2} \qquad (۲۲-۱)$$

[11] Skyrme model
[12] The Relativistic Three Quark Model
[13] Infinite Momentum Frame Quark Model

با m = 1 و $\kappa = 1.5$. مقادیر مرتبط با این مدل $C = 6.81$, $\rho^2 = 3.04$ هستند [۱۵].

مشخص شده‌است که تابع ایسگور- وایس مستقل از جرم‌های کوارک سنگین می‌باشد و در صفر بازگشتی (که $v = v'$)، $\zeta(1) = 1$، بهنجار شده‌است. رفتار تابع ایسگور- وایس بخصوص نزدیک صفر بازگشتی مورد علاقه‌است و به صورت عمومی این رفتار را به واسطه سری تیلور نزدیک نقطه بازگشتی پارامتربندی می کنیم. یعنی:

$$\zeta(\omega) = 1 - \rho^2(\omega - 1) + C(\omega - 1)^2 + o[(\omega - 1)^3] \qquad (۲۳-۱)$$

محدوده جنبشی واپاشی نیمه لپتونی در محدوده کوچک (۱٫۴۳ تا ۱ = ω) قابل دسترس است. شناخت دقیق از شعاع باری می‌تواند اساسا تابع ایسگور- وایس را در محدوده فیزیکی تعیین نماید و پارامتر تحدب تصحیحاتی به وابستگی خطی ساده می‌دهد[۱۵].

برای مزون‌های نیمه سنگین تابع ایسگور- وایس به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\zeta(y) = \int_0^\infty 4\pi r^2 |\Psi(r)|^2 \cos(pr) dr \qquad (۲۴-۱)$$

که در آن داریم:

$$p^2 = 2\mu^2(y - 1) \qquad (۲۵-۱)$$

μ جرم کاهش‌یافته و $\Psi(r)$ تابع موج سیستم هادرونی است. توابع ایسگور- وایس فرم فاکتورها را در المان‌های ماتریس گذار سنگین توصیف می‌کنند. به عنوان نمونه برای واپاشی‌های B به D و همینطور B به D^*، همپوشانی انتگرالی را انتظار خواهیم داشت تا تابع ایسگور- وایس محاسبه شود اما باید در اینجا تاکید شود ما این تابع را در نزدیکی صفر بازگشتی جایی که چارسرعت مزون قبل و بعد گذار مساویند

بررسی نموده‌ایم. برای مزون‌های مختلف تابع موج را محاسبه نموده و سپس آن‌ها را برای یافتن پارامترهای تابع ایسگور- وایس مرتبط به کار گرفته‌ایم.

فصل دوم

مطالعه غیرنسبیتی تابع ایسگور- وایس

۲-۱- مقدمه

در فیزیک نظری، QCD تئوری توصیف‌کننده برهم‌کنش‌های کوارک‌ها و گلئون‌هاست که هادرون‌ها را می‌سازند.تابع موج برای مزون‌های نیمه سنگین در چارچوب مدل پتانسیل QCD محاسبه شده‌است. همانطور که می‌دانیم،تابع ایسگور- وایس به همپوشانی تابع موج بازمی‌گردد و برای یافتن تابع موج انتخاب برهم‌کنش ضروری است. تاکنون پتانسیل‌های گوناگونی در این محدوده استفاده شده‌اند تا طیف مزونی را تعیین کنند. در میان پتانسیل‌ها، پتانسیل کرنل[۱۴][۹] که شامل جمله خطی و کولمبی است در بررسی مزونی اهمیت ویژه‌ای دارد. در سال‌های اخیر این پتانسیل در بیان ویژگی‌های مزون ازجمله جرم، ثابت واپاشی و پهنای واپاشی موفقیت بسزایی داشته است. از پتانسیل کرنلبا فرم زیر در سال‌های اخیر در بدست آوردن تابع موج مزونی و مطالعه تابع ایسگور- وایس استفاده شده‌است [۶].

$V(r) = -C_F \dfrac{\alpha_s}{r} + br + c$ که در آن C_F عامل رنگ به صورت $C_F = \dfrac{N_C^2 - 1}{2N_C}$ معرفی می‌گردد. N_C عدد کوانتومی رنگ است. برای $N_C = 3$ خواهیم داشت: $C_F = \dfrac{4}{3}$

r شعاع موثر حالت مزونی است. پارامترهای پتانسیل توسط فیت کردن نتایج محاسبات به جرم‌های اندازه‌گیری شده حالت‌های مزونی تعیین می‌شوند. بخش $\dfrac{1}{r}$ مربوط به تبادل یک گلئون بین یک کوارک و آنتی کوارک است و به عنوان کولمبیک شناخته می‌شود و بخش br بخش محدودکننده پتانسیل است. در واقع محدودکننده رنگ، این اثر فیزیکی است که کوارک‌ها نمی توانند به صورت مجزا باشند و بنابراین

[14] Cornell potential

به صورت مستقیم مشاهده نمی‌شوند. پتانسیل کرنل هر دو مفهوم QCD یعنی آزادی مجانبی (ترم کولمبی) و محبوسیت (ترم خطی) را شامل می‌شود.

با پتانسیل کولمبی بعلاوه خطی دو انتخاب وجود دارد:

۱) پتانسیل کولمبی به عنوان اصلی فرض شود و ترم خطی آن به عنوان اختلال در مدل پتانسیل در نظر گرفته شود.

۲) ترم خطی پتانسیل کرنل به عنوان ترم اصلی در نظر گرفته شود و ترم اختلالی آن کولمبی باشد.

برای بدست آوردن تابع موج در چارچوب غیرنسبیتی روش‌های مختلفی استفاده شده‌است که در ادامه به بررسی بعضی از آن‌ها می‌پردازیم. سپس در این چارچوب رفتار تابع ایسگور- وایس را برای مزون‌های نیمه سنگین خواهیم دید.

۲-۲- بررسی تابع ایسگور- وایس با پتانسیل کرنل

در دستیافت غیر نسبیتی، معادله شرودینگر دو بعدی با یک پتانسیل به کار گرفته شده‌است تا تابع موج مزون بدست آید و سپس تحلیل‌های آماری و دینامیکی خصوصیات مزون‌ها انجام شده‌است. مشکل این است که معادله شرودینگر با یک پتانسیل کاملا دقیق حل نمی‌شود. بنابراین از متد اختلال مکانیک کوانتوم در حل معادله شرودینگر با پتانسیل کرنل استفاده شده‌است.

با در نظر گرفتن ترم خطی پتانسیل کرنل به عنوان ترم اصلی تابع موج غیر اختلالی منجر به توابع ایری خواهد شد. در اینجا راه حلی برای یافتن تابع موج مزونی معرفی شده‌است[۶].

معادله شرودینگر دو بعدی برای هامیلتونی اصلی در حالت پایه $l=0$ و با قرار دادن $\hbar=1$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}R_0(r)+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}R_0(r)\right]-2\mu brR_0(r)+2\mu ER_0(r)=0 \quad (۱-۲)$$

با در نظر گرفتن تابع موج شعاعی به صورت $R_0(r)=\frac{u(r)}{r}$ و نیز مشتقات این تابع و با قرار دادن آن‌ها در معادله شرودینگر خواهیم داشت:

$$\frac{d^2u}{dr^2}-(2\mu br-2\mu E)u=0 \quad (۲-۲)$$

برای اینکه رابطه بالا را به فرم تابع ایری $\frac{d^2u}{d\rho^2}-\rho u=0$ در آوریممتغیر زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\rho=\alpha+\beta r \quad (۳-۲)$$

با قرار دادن آن در رابطه (۲-۲) داریم.

$$\frac{d^2u}{d\rho^2}-(2\mu b(\frac{1}{\beta^3}(\rho-\alpha))-\frac{2\mu E}{\beta^2})u=0 \quad (۴-۲)$$

حال ضریب همراه ρ را برابریک و جملات باقی‌مانده را برابر صفر می‌گیریم.در نتیجه مقدار متغیر فرم ایری به شکل زیر می‌شود.

$$\rho=(2\mu b)^{\frac{1}{3}}r-(\frac{2\mu}{b^2})^{\frac{1}{3}}E \quad (۵-۲)$$

حل معادله دیفرانسیلی همگن مرتبه دوم ایری ترکیبی از دو تابع $Bi[r]$ و $Ai[r]$ را شامل می‌شود. با توجه به ماهیت تابع ایری، برای متناهی بودن تابع موج بایستی بخش $Bi[r]$ حذف شود.تابع موج شعاعی فرم زیر را دارد:

$$u(r)=NAi\left[(2\mu b)^{\frac{1}{3}}(r-\frac{E}{b})\right] \quad (۶-۲)$$

با استفاده از این شرط $u(0)=0$ و رابطه $\rho=(2\mu b)^{\frac{1}{3}}r-(\frac{2\mu}{b^2})^{\frac{1}{3}}E$ انرژیحالت پایه بدست می‌آید.

$$E=-(\frac{b^2}{2\mu})^{\frac{1}{3}}\rho_0 \qquad (۲-۷)$$

ρ_0 صفر تابع ایری است.بنابراین برای تابع موج غیر مختل خواهیم داشت:

$$\overset{0}{\Psi}(r)=\frac{N}{r}Ai\left[\rho_0+\rho_1 r\right] \qquad (۲-۸)$$

که پارامترهای آن به ترتیب روبرو هستند. $\rho_1=(2\mu b)^{\frac{1}{3}}$ ، $\rho_0=-(\frac{2\mu}{b^2})^{\frac{1}{3}}E$

برای تابع موج و انرژی مرتبه اول اختلال داریم [۶]:

$$H_0|\Psi'(r)>+H'|\Psi^0(r)>=w^0|\Psi'(r)>+w'|\Psi^0(r)> \qquad (۲-۹)$$

پارامترهای آن w' انرژی اختلالی، H_0 هامیلتونی اصلی، E_0 انرژی بخش اصلی و H' هامیلتونی اختلالی در زیر معرفی می‌شوند.

$$w'=\int_0^\infty 4\pi r^2 H'|\Psi^0(r)|^2\,dr \qquad (۲-۱۰)$$

$$H_0=\frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+br \qquad (۲-۱۱)$$

$$w^0=E \qquad (۲-۱۲)$$

با قرار دادن هامیلتونی در معادله (۲-۹) خواهیم داشت:

برای بخش اختلالی تابع $\left[\frac{-1}{2\mu}(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr})+br-E\right]\Psi'(r)=\left[\frac{B}{r}+w'\right]\Psi^0(r)$ (۲-۱۳)

موج به شیوه زیر عمل می‌کنیم. در محاسبات زیر $\Psi'(r)=R(r)$ مطلوب است. با توجه به فرم تابع موج اصلی، تابع موج اختلالی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$R(r)=\frac{1}{r}F(r)Ai\left[\rho\right]=\frac{1}{r}F(r)Ai\left[\rho_0+\rho_1 r\right] \qquad (۲-۱۴)$$

مشتقات تابع ایری را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} Ai'\left[\rho\right]&=\frac{dAi\left[\rho\right]}{dr}=z\left[\rho\right]Ai\left[\rho\right] \\ Ai''\left[\rho\right]&=z'\left[\rho\right]Ai\left[\rho\right]+z\left[\rho\right]Ai'\left[\rho\right]=z'\left[\rho\right]Ai\left[\rho\right]+z^2\left[\rho\right]Ai\left[\rho\right] \end{aligned} \qquad (۲-۱۵)$$

با جایگذاری مشتقات تابع (۲-۱۴) و نیز مشتقات تابع ایری در معادله (۲-۱۳) خواهیم داشت: (۲-۱۶)

$$\begin{aligned} &F''(r)+2\rho_1 F'(r)z(\rho)+\rho_1^2\left[z^2(\rho)+z'(\rho)\right]F(r) \\ &-2\mu(br-E)F(r)=-\frac{2\mu B}{r}-2\mu w' \end{aligned}$$

برای اینکه معادله بالا را حل کنیمتوابع $z(\rho)$ و $z^2(\rho)+z'(\rho)$ به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$z\,(\rho)=\frac{k_1(r)}{r} \qquad (۲-۱۷)$$

$$\left[z^{\,2}(\rho)+z\,'(\rho)\right]=\frac{k_2(r)}{r^2} \qquad (۲-۱۸)$$

و درنتیجه خواهیم داشت:

$$F''(r)+2\rho_1 F'(r)\frac{k_1(r)}{r}+\rho_1^2 F(r)\frac{k_2(r)}{r^2}-2\mu(br-E)F(r)=-\frac{2\mu B}{r}-2\mu w' \qquad (۲-۱۹)$$

برای حل این معادله تابع F(r) را به شکل سری می‌نویسند.

$$F(r)=\sum_{l} A_l r^l \qquad (۲۰-۲)$$

پس از اندکی ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & l(l-1)\sum_{l} A_l r^{l-2} + 2\rho_1 k_1 l \sum_{l} A_l r^{l-2} + \rho_1^2 k_2 \sum_{l} A_l r^{l-2} \\ & +2\mu E \sum_{l} A_l r^l - 2\mu b \sum_{l} A_l r^{l+1} = -\frac{2\mu B}{r} - 2\mu w' \end{aligned} \qquad (۲۱-۲)$$

می‌خواهیم ضرایب تابع F(r) را بیابیم. با برابر قرار دادن توان‌های r^{-2} از طرفین معادله (۲-۲۱) در می یابیم که:

$$A_0 = 0 \qquad (۲۲-۲)$$

به همین ترتیب با برابر قرار دادن ضرایب مرتبطاز طرفین رابطه (۲-۲۱)تا پنجمین ضریب ادامه می دهیم. به نتایج زیر می‌رسیم:

$$A_1(r) = \frac{-2\mu B}{2\rho_1 k_1 + \rho_1^2 k_2} \qquad (۲۳-۲)$$

$$A_2(r) = \frac{-2\mu w'}{2+4\rho_1 k + \rho^2 k} \qquad (۲۴-۲)$$

$$A_3(r) = -\frac{2\mu E A_1}{6+6\rho_1 k_1 + \rho_1^2 k_2} \qquad (۲۵-۲)$$

$$(۲۷-۲)\,A_4(r) = -\frac{2\mu E A_2 - 2\mu b A_1}{12+8\rho_1 k_1 + \rho_1^2 k_2} \qquad (۲۶-۲)$$

$$A_5(r) = -\frac{2\mu E A_3 - 2\mu b A_2}{20+10\rho_1 k_1 + \rho_1^2 k_2}$$

بنابراین تابع موج اختلالی بدست می‌آید. تابع موج کلی را مجموع تابع موج اصلی و تابع موج اختلالی در نظر می‌گیریم. بنابراین خواهیم داشت:

$$\Psi^{tot}(r)=\frac{N'}{r}\left[1+A_1(r)r+A_2(r)r^2+A_3(r)r^3+A_4(r)r^4+...\right]Ai\left[\rho_0+\rho_1 r\right] \qquad (۲۸-۲)$$

N' ثابت بهنجارش تابع موج کلی است. تابع موج کل شامل دو مجموعه سری نامحدود می‌شود. یک مجموعه سری‌هایبا توان r و دیگری سری‌های بی نهایت خود تابع ایری را شامل می‌شود. سری ایری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Ai\left[\rho_0+\rho_1 r\right]=a_1[1+\frac{(\rho_0+\rho_1 r)^3}{6}+\frac{(\rho_0+\rho_1 r)^6}{180}+\frac{(\rho_0+\rho_1 r)^9}{12960}+...]-$$
$$b_1[(\rho_0+\rho_1 r)+\frac{(\rho_0+\rho_1 r)^4}{12}+\frac{(\rho_0+\rho_1 r)^7}{504}+\frac{(\rho_0+\rho_1 r)^{10}}{45360}+...] \qquad (۲۹-۲)$$

پس مجبوریم یک برش معقول در اینجا r_0 به حد بالای انتگرال‌ها در محاسبه ثابت‌های بهنجارش و انتگرال‌های مورد نظر دیگر بزنیم که باید از اندازه هادرون‌ها بزرگتر باشد. r_0را بزرگتر از $\frac{1}{m_h}$ در نظر می گیریم که m_h جرم هادرون است. r_0خیلی بزرگتر از اندازه مزون در نظر گرفته می‌شود. [۶]

برش حد بالایی انتگرال‌ها ماهیت و مقدار تابع ایسگور- وایس و مشتقات آن را از بین نمی‌برد زیرا تابع ایری خیلی تیز سقوط می‌کند(مقدار تابع ایری برای $r>4$ به صفر می‌رسد و معمولا خیلی ناچیز می شود) و با افزایش r افت می‌کند.

$$AiryAi[4]=0.000952$$

حال که تابع موج کل را یافتیم می‌توانیم در رابطه تابع ایسگور- وایس (۱-۲۳) قرار داده و پارامتر شیب و تحدب را بدست آوریم. نتایج عددی این روش در بخش ۲-۳ آمده‌است.

در منابعی چون [۸] تئوری اختلال وردشی بهبود یافته (VIPT) برای حل معادله شرودینگر معرفی شده-است تا تابع موج بدست آید. اشکال تئوری اختلال مرسوم این است که به یک پارامتر بسط خیلی کوچک نیاز دارد که منجر به نتایج واگرایی بعد از یک مرتبه خاص خواهد شد. VIPT مسائل خاص متد وردشی و همینطور تئوری اختلال را توسط ترکیب هر دو به طور صحیح از میان می‌برد.

در بدست آوردن تابع موج به روش VIPT به شیوه زیر عمل می‌کنیم. ابتدا تابع موج حالت j ام همانطور که در نظریه اختلال کوانتوم وجود دارد، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\psi_j = \psi_j^{(0)} + \sum_{k\neq j} \frac{\int \psi_k^{(0)*} H'_{P'j} \psi_j^{(0)} dv}{E_j^{(0)} - E_k^{(0)}} \psi_k^{(0)} \qquad (۲\text{-}۳۰)$$

Ψ_k, E_k به ترتیب انرژی و تابع موج حالت kام هستند که بر حالت jام عمودند. انرژی تصحیح شده تا مرتبه اول برای این حالت همانطور که از کوانتوم هم می‌دانیم چشمداشتی هامیلتونی است.

$$E_j = \int \psi_j^{(0)*} H \psi_j^{(0)} dv \qquad (۲\text{-}۳۱)$$

با در نظر گرفتن ترم خطی اصلی تابع موج منجر به توابع ایری خواهد شد و معادله شرودینگر شعاعی به صورت رابطه (۲-۲) می‌شود که با توجه به خصوصیات توابع ایری فرم تابع موج شعاعی به صورت معادله (۲-۶) خواهد شد و انرژی به صورت رابطه (۲-۷) می‌شود.

بنابراین تابع موج به شکل زیر می‌شود:

$$\Psi_{n0}(r) = \frac{N_n}{2\sqrt{\pi} r} Ai[(2\mu b')^{\frac{1}{3}} r + \rho_{0n}] \qquad (۲\text{-}۳۲)$$

ρ_{0n} ها صفرهای توابع ایری هستند. $Ai[\rho_{0n}] = 0$ که از رابطه زیر تبعیت می‌کند.

$$\rho_{0n} = -[\frac{3\pi(4n-1)}{8}]^{\frac{2}{3}} \qquad (۲-۳۳)$$

برای حالت 1s تابع موج که تابع موج غیر اختلالی هم هست، با استفاده از رابطه بالاو باتوجه به اینکه ریشه تابع Airy برای حالت1s (۲٫۳۱۹۴-) است، بدست خواهد آمد.

$$\Psi^{(0)} = \Psi_{10}^{0}(r) = \frac{N_1}{2\sqrt{\pi r}} Ai\,[(2\mu b')^{\frac{1}{3}} r - 2.3194] \qquad (۲-۳۴)$$

سپس تابع حالت پایه بدست آمده در (۲-۳۴) را در رابطه (۲-۳۰) قرار می‌دهیم. مقدار پارامتر b' از مینیمم کردن انرژی بدست می‌آید. این عمل تا سه ترم در جمع تکرار شده‌است و تابع موج کل با سه ترم بدست آمده‌است[۸]. با توجه به تعداد ترم‌های در نظر گرفته شده نتایج در بیشترین رضایت برای ترم تکتایه هستند و این مزیت است چون با افزایش ترم در تابع موج کلی محاسبات سنگین می‌شوند.

در [۴] ترم خطی اصلی و ترم کولمبی به عنوان اختلال در نظر گرفته شده‌است. با این فرض تابع ایری در تابع موج ظاهر می‌شود. انتگرال‌گیری سری‌های نامحدود تابع ایری در تابع ایسگور- وایس سوالی است که در اینجا بررسی می‌شود. برای پاسخ به این سوال بعضی حدود بالای برشی انتگرال تابع ایسگور-وایس براساس ماهیت تابع ایری و شرط قیدی تابع ایسگور-وایس یعنی $\zeta(1)=1$ معرفی شده‌است [۴]. ترم خطی پتانسیل کرنل به عنوان ترم اصلی است و در نتیجه هامیلتونی غیراختلالی به صورت رابطه(۲-۱۱) است.

هامیلتونی اصلی به شکل رابطه (۲-۳۵) است:

$$H' = -\frac{4\alpha_s}{3r} + c \qquad (۲-۳۵)$$

که در آن $\alpha = 0.22$ و $c = 1\,GeV$ می‌باشد. قابل توجه است در حد جرمی کوارک سنگین به بی‌نهایت که مسئله موردنظر در آن حل می‌شود، داریم:

$$\mu = \lim_{m_Q \to \infty} \frac{m_q m_Q}{m_q + m_Q} \approx m_q \tag{۳۶-۲}$$

برای یافتن تابع موج غیراختلالی مربوط به H_0 معادله شرودینگر برای پتانسیل br در حالت پایهS (l=0)، به صورت رابطه (۲-۱) نوشته می‌شود. با توجه به تعاریف بیان شده از تابع ایری و ویژگی هایش، تابع u(r)و انرژی به فرم رابطه‌های (۲-۶) و (۲-۷) می‌شود.

تابع موج شعاعی غیر اختلالی برای حالت پایه به شکل رابطه (۲-۸) خواهد شد.اولین مرتبه تابع موج اختلالی به صورت زیر می‌شود:

$$\psi'(r) = -\frac{4\alpha_s}{3}[\frac{a_0}{r} + a_1 r + a_2] \tag{۳۷-۲}$$

a_0, a_1, a_2 ترم‌هایی هستند که شامل a_s, b, μ, W', E, c می‌شوند. W' با استفاده از رابطه مرتبه اول اختلال مکانیککوانتومی بدست می‌آید. ابعاد a_0, a_1, a_2 به ترتیب $GeV^{\frac{1}{2}}, GeV^{\frac{3}{2}}, GeV^{\frac{5}{2}}$ هستند و فرم صریحی دارند. با در نظر گرفتن تابع ایری (۲-۲۹) تا مرتبه r^3 ضرایب گفته شده بدست می‌آیند. تابع موج کلی تا تصحیح مرتبه اول به صورت زیر خواهد شد.

$$\psi_{tot}(r) = N'[\frac{1}{2\sqrt{\pi} r} Ai[\rho_1 r + \rho_0] - \frac{4\alpha_s}{3}[\frac{a_0}{r} + a_1 r + a_2]] \tag{۳۸-۲}$$

محاسبه $\zeta(y)$ و مشتقات آن با حد بی‌نهایت در انتگرال آن، موجب واگرایی می‌شود. به همین دلیل بعضی حدود برشی r_0 برای این انتگرال در نظر گرفته شده‌است [۴]. براساس این فرضیات $\zeta(y)$ و مشتقاتش برای مراتب مختلف چندجمله‌ای تابع ایری هم برای تابع موج غیرمختل هم تابع موج کلی برای

بازه اختیاری $r_0 = 5$ تا $r_0 = 9$ بدست می‌آید. برای نمونه نتیجه‌ای که برای پارامترهای تابع ایسگور- وایس هنگامی که فقط تابع موج غیراختلالی فرض شود و با در نظر گرفتن $r_0 = 5$ و تابع ایری تا ترم r^3، $\rho^2 = 0.5053, C = 0.0872$ خواهد شد. در همین مورد و با در نظر گرفتن تابع موج کلی در تابع ایسگور- وایس خواهیم داشت: $\rho^2 = 0.5149, C = 0.0661$

رسم تابع ایری نشان می‌دهد که در $r < 0$ حالت نوسانی با دامنه های متناوب و در $r > 0$ به صفر میل می‌کند. ثوابت بهنجارش با افزایش مقدار r_0 معرفی شده کاهش می‌یابند و ρ^2, C افزایش می‌یابند. در خصوص مرتبه چندجمله‌ای در تابع ایری بی‌نهایت، ρ^2, C با تغییرات مراتب چندجمله‌ای این تابع خیلی تغییر نمی‌کنند. مقدار برشی بزرگتر از $r_0 = 9$ نتایج به مقادیر بزرگتر از مورد انتظار ما می‌رود. حد برشی بالای انتگرال‌ها در $\zeta(y)$ و مشتقاتش به نقطه منطقی r_0 برای نتیجه نگران‌کننده نیست بلکه به محاسبات و مقادیر قابل انتظار تجربی می‌انجامد.

۲-۳- نتایج عددی پارامترهای تابع ایسگور- وایس در مزون‌ها

پارامترهای شیب و تحدب تابع ایسگور-وایس برای مزون‌های مختلف و بازه‌های مختلفدر جداول ۲-۱ تا ۲-۴ آورده شده‌اند [۶].تغییرات تابع ایسگور-وایس برای یک مزون (D) در شکل ۲-۱ رسم شده‌است. هم-چنین تغییرات مقدار پارامتر شیب و تحدب تابع ایسگور-وایس برای چهار مزون به ترتیب در شکل های ۲-۲ و نیز ۲-۳ رسم شده‌است تا تفاوت مقدار این پارامترها برای چهار مزون آشکار شود. همانطور که پیداست با افزایش جرم کاهش یافته مزون مقدار این پارامتر ها هم افزایش می‌یابد.

جدول۲-۱- مقادیر شیب و تحدب برای مزون D [۶]

r_0	N'	ρ^2	C
۵,۰	۰,۶۶۱۶	۰,۶۸۲۱	۰,۱۱۳۸
۵,۵	۰,۵۲۴۹	۱,۲۲۴۹	۰,۳۵۷۱
۶,۰	۰,۳۶۵۵	۱,۹۰۹۹	۰,۷۳۴۲
۶,۵	۰,۲۵۶۶	۲,۴۶۳	۱,۱۲۴۷

جدول ۲-۲-مقادیر شیب و تحدب برای مزونB[۶]

r_0	N'	ρ^2	C
۴,۰	۰,۷۲۷۷	۰,۶۶۹۹	۰,۰۹۷۹
۴,۵	۰,۷۱۸۴	۰,۷۰۳۰	۰,۱۱۱۸
۵,۰	۰,۶۰۶۹	۱,۱۷۵۸	۰,۳۴۵۱
۵,۵	۰,۴۱۷۲	۲,۰۵۲۳	۰,۸۷۲۲
۶,۰	۰,۲۷۹۲	۲,۷۸۵۴	۱,۴۴۴۱

این نتایج با مقادیر مورد انتظار در مدل‌های دیگر که در جدول ۱-۱ هم آورده شده‌است، همخوانی دارد.

جدول ۲-۳- مقادیر شیب و تحدب برای مزون D_s[۶]

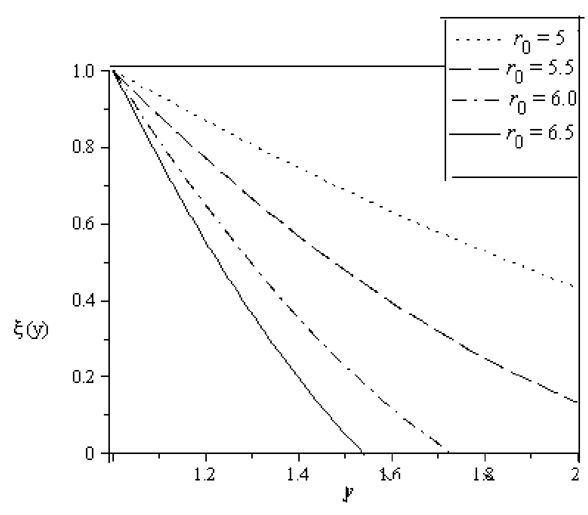
r_0	N'	ρ^2	C
۴,۴	۰,۷۶۴۸	۰,۷۹۶۸	۰,۱۳۸۸
۵,۰	۰,۴۹۴۷	۲,۱۰۵۴	۰,۹۶۶۵
۵,۵	۰,۳۱۴۵	۳,۱۰۵۹	۱,۸۱۷۶
۶,۰	۰,۲۱۲۱	۳,۸۷۸۲	۲,۶۸۷۵

مقدار حد برشی بزرگتر از ۶ منجر به نتایج بزرگتری در مقادیر شیب و تحدب خواهد شد که با مدل‌ها همخوانی نخواهد داشت.

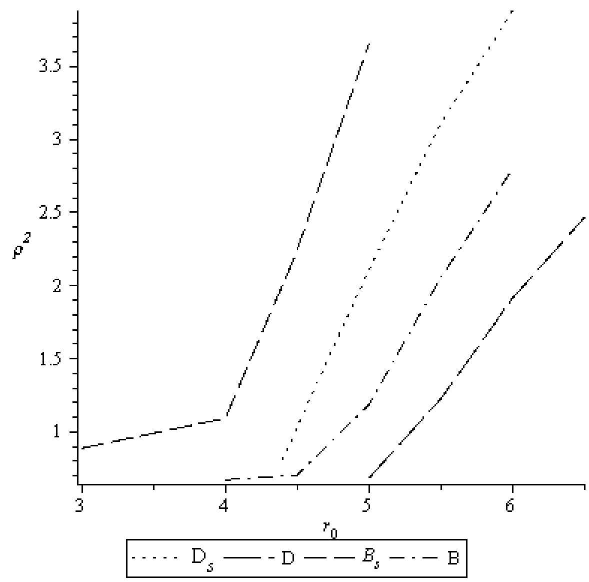
جدول ۲-۴- مقادیر شیب و تحدب برای مزون B_s [۶]

r_0	N'	ρ^2	C
۳,۰	۰,۸۵۱۱	۰,۸۷۹۲	۰,۱۶۵۱
۳,۵	۰,۸۰۸۷	۰,۹۸۰۹	۰,۲۱۰۱
۴,۰	۰,۷۸۵۵	۱,۰۹۲۴	۰,۲۸۰۵
۴,۵	۰,۵۸۲۵	۲,۲۳۱۲	۱,۱۴۲۳
۵,۰	۰,۳۵۱۲	۳,۶۴۷۱	۲,۵۲۸۲

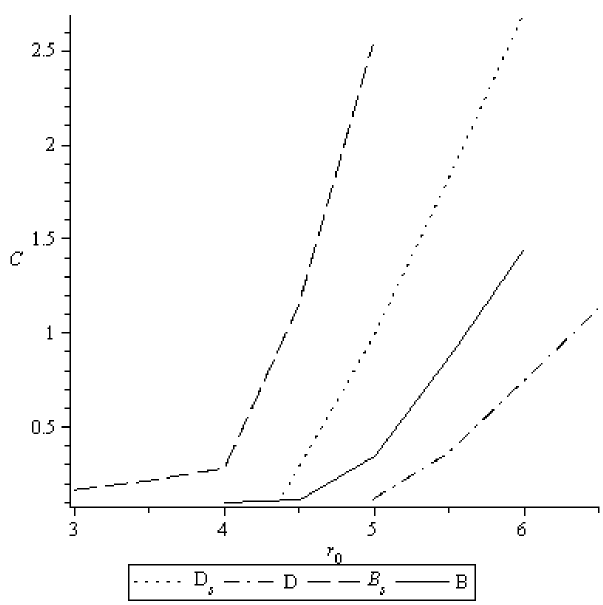
این مقادیر با در نظر گرفتن تابع ایری تا مرتبه r^{10} آورده شده‌است. اما با توجه به سقوط سریع تابع ایری نتایج از r^4 تا r^{10} خیلی تفاوت ندارند [۶].



شکل۲-۱-تغییرات تابع ایسگور-وایس در بازه های مختلف برای مزونD [۶]



شکل ۲-۲-تغییرات پارامتر شیب برای چهار مزون[۶]



شکل۲-۳-تغییرات پارامتر تحدب برای چهار مزون [۶]

۲-۴- فرم عمومی تابع موج با پتانسیل نامبو-گوتو

در مدل ریسمان کلاسیکی برای هادرون‌ها که توسط نامبو-گوتو[15] ارائه شده، پتانسیل دو کوارکی می تواند به صورت زیر بیان گردد:

$V(r)=\frac{\gamma}{r}+\sigma r+\mu_0$ که در آن ضریب $\gamma=-\frac{\pi(d-2)}{24}$ ضریب عمومی لوچر(Lüscher) است که به بعد فضا- زمان d بستگی دارد. σ کشش ریسمان است که قدرت نیروی محدودکننده بین بارهای آماری را مشخص می‌کند. مقدار آن $0.178 GeV^2$ می‌باشد. μ_0 ثابت وابسته به نظم است [۷].به منظور ساده سازی در فرمالیزم و مقایسه با پتانسیل کرنل، پتانسیل نامبو-گوتو به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$V(r)=-\frac{\gamma}{r}+\sigma r+\mu_0 \qquad , \gamma=\frac{\pi(d-2)}{24} \tag{۲-۳۹}$$

d بعد فضا- زمان است با $d=D+1$ که D همان بعد فضایی (سه بعدی) است. پتانسیل نامبو- گوتو در بعد بالاتر مشابه با پتانسیل کرنل کولمب گونه + خطی در کرومودینامیک کوانتومی است. اساس فیزیکی مدل پتانسیل ریسمان از این حقیقت حمایت می‌کند که ترم محدودکننده خطی به عنوان بخش اصلی در پتانسیل داخلی کوارک باشد و ترم لوچر در این پتانسیل به عنوان اولین تصحیح مرتبه اول به ترم محدودکننده خطی σr باشد.

در ادامه ترم خطی اصلی و ترم لوچر به عنوان اختلال گرفته شده‌است و از معادله شرودینگر D بعدی برای حل تابع موج مزونی استفاده می‌کنند. به دلیل نبود حل دقیقی برای معادله شرودینگر با ابعاد بالا با

---

[15] Yoichiro Nambu and Tetsuo Goto

پتانسیل کولمب گونه بعلاوه خطی، از متد اختلال استفاده می‌گردد. با در نظر گرفتن ترم تنظیمی $\mu_0 = 0$، σrبه عنوان ترم اصلی و نیز $-\frac{\gamma}{r}$ به عنوان ترم اختلال،هامیلتونی غیراختلالی به شکل زیر می‌شود:

$$H_0 = -\frac{\nabla_D^2}{2\mu} + \sigma r \qquad (۲-۴۰)$$

حالت پایه را بررسی می‌کنیم و بایستی تکانه زاویه‌ای را صفر بگیریم. در نتیجه معادله شرودینگر عمومی به صورت زیر خواهد شد:

$$R''(r) + \frac{D-1}{r} R'(r) + 2\mu(E - \sigma r) R(r) = 0 \qquad (۲-۴۱)$$

با استفاده از انتقال $R(r) = r^{\frac{(1-D)}{2}} U(r)$ معادله بالا به صورت زیر خواهد شد:

$$U''(r) - \frac{\Lambda(\Lambda+1)}{r^2} U(r) + 2\mu(E - \sigma r) U(r) = 0 \quad (14), \quad \Lambda = \frac{D-3}{2} \qquad (۲-۴۲)$$

با در نظرگرفتن تنها ترم خطی در پتانسیل و نیز با توجه به $\rho(r) = \rho_1 r - \rho_0$ و مشتقات آن، معادله (۲-۴۲) به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} - \frac{\Lambda(\Lambda+1)}{(\rho+\rho_0)^2} + \frac{2\mu E}{\rho_1^2} - \frac{2\mu}{\rho_1^2}\sigma\rho - \frac{2\mu}{\rho_1^3}\sigma\rho_0\right] U(\rho) = 0 \qquad (۲-۴۳)$$

دو مورد مجانبی برای معادله بالا در نظر می‌گیریم و شکل تابع موج را پیدا می‌کنیم که به شکل تابع ایری خواهد شد. در مورد ۱. $\rho \to \infty$ را در نظر می‌گیریم که در نتیجه انتظار داریم $\frac{1}{(\rho+\rho_0)^2} \to 0$.

بنابراین معادله (۲-۴۳) به صورت زیر می‌شود.

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{2\mu E}{\rho_1^{\,2}}-\frac{2\mu}{\rho_1^{\,2}}\sigma\rho-\frac{2\mu}{\rho_1^{\,3}}\sigma\rho_0\right]U(\rho)=0 \qquad (۴۴-۲)$$

طبق آنجه از پیش گفتیم، ρ_0,ρ_1 را به صورت زیر می‌گیرند.

$$\rho_1=(2\mu\sigma)^{\frac{1}{3}} \quad , \quad \rho_0=(\frac{2\mu}{\sigma^2})^{\frac{1}{3}}E \qquad \rho(r)=(2\mu\sigma)^{\frac{1}{3}}r-(\frac{2\mu}{\sigma^2})^{\frac{1}{3}}E \qquad (۴۵-۲)$$

حل معادله (۲-۴۴) منجر به توابع ایری خواهد شد.

$$U(\rho)\approx Ai[\rho]=NAi[(2\mu\sigma)^{\frac{1}{3}}r-(\frac{2\mu}{\sigma^2})^{\frac{1}{3}}E] \qquad (۴۶-۲)$$

مورد ۲. حالت مجانبی زیر را انتخاب می‌کنیم.

$\rho\to 0$ در این صورت جمله $\frac{1}{(\rho+\rho_0)^2}$ غالب خواهد بود. معادله (۲-۴۳) به شکل زیر می‌شود.

$$\left[U''(\rho)-\frac{\Lambda(\Lambda+1)}{(\rho+\rho_0)^2}U(\rho)\right]=0 \qquad (۴۷-۲)$$

که حل ناتکین آن مقدار $U(\rho)\approx(\rho+\rho_0)^{\sqrt{\Lambda(\Lambda+1)}}$ را می‌دهد. تقریب تحلیلی معادله (۲-۴۳) به صورت ضرب دو حل موارد کران بالا و پایین می‌باشد. یعنی: $U(\rho)\approx(\rho+\rho_0)^m Ai[\rho]$

با توجه به انتقال $R(r)=r^{\frac{(1-D)}{2}}U(r)$ برای تابع موج حالت پایه خواهیم داشت.

$$\begin{aligned}\Psi^0(r,D)&=Nr^{\frac{(1-D)}{2}}U(\rho)=Nr^{\frac{(1-D)}{2}}(\rho+\rho_0)^m Ai[\rho]\\&=Nr^{\frac{(1-D)}{2}}(\rho_1 r)^m Ai[\rho] \quad , \quad m=\sqrt{\Lambda(\Lambda+1)}\end{aligned} \qquad (۴۸-۲)$$

N ثابت بهنجارش تابع موج غیراختلالی است.

تابع موج با ترم لوچر به عنوان اختلال را با استفاده از معادله(۲-۹) بدست می‌آوریم. با جای‌گذاری هامیلتونی و نیز تابع موج اصلی در معادله(۲-۹) خواهیم داشت:

$$\left[-\frac{1}{2\mu}(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{D-1}{r}\frac{d}{dr})+\sigma r-E\right]R_1(r,D)=\left[\frac{\gamma}{r}+w'\right]r^{\frac{(1-D)}{2}}(\rho_1 r)^m Ai[\rho] \qquad (۲\text{-}۴۹)$$

تابع موج اختلالی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$R_1(r,D)=r^{\frac{(1-D)}{2}}F(r,D)(\rho_1 r)^m Ai[\rho] \qquad (۲\text{-}۵۰)$$

با مشتق‌گیری از این تابع تا مرتبه دوم و نیز با استفاده از معادله (۲-۱۵) و (۲-۴۹) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\rho_1^m r^{\frac{1-D+2m}{2}}Ai[\rho]\{(\frac{1-D+2m}{2}(\frac{1-D+2m}{2}-1)\frac{1}{r^2}F(r)+2\frac{1-D+2m}{2}\frac{1}{r}F'(r,D)\\&+2\frac{1-D+2m}{2}\frac{1}{r}\rho_1F(r,D)Z(r)+F''(r)+2\rho_1F'(r,D)Z(r)+\rho_1^2F(r)Z^2\\&+\rho_1^2F(r)Z'(r))+\frac{D-1}{r}(\frac{1-D+2m}{2}\frac{1}{r}F(r)+F'(r,D)+\rho_1F(r,D)Z(r))\\&-2\mu(\sigma r-E)F(r)\}=-2\mu\left[\frac{\gamma}{r}+w'\right]r^{\frac{(1-D)}{2}}(\rho_1 r)^m Ai[\rho]\end{aligned} \qquad (۲\text{-}۵۱)$$

با اندکی ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$F''(r,D)+F'(r,D)k_1(r,D)+F(r,D)k_2(r,D)-2\mu(\sigma r-E)F(r,D)=-2\mu(\frac{\gamma}{r}+w') \qquad (۲\text{-}۵۲)$$

که $k_1(r,D)$ و $k_2(r,D)$ به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$k_1(r,D)=2\frac{1-D+2m}{2}\frac{1}{r}+2\rho_1 Z(r)+\frac{D-1}{r} \qquad (۲\text{-}۵۳)$$

$$k_2(r,D)=\frac{1-D+2m}{2}(\frac{1-D+2m}{2}-1)\frac{1}{r^2}$$
$$+2\frac{1-D+2m}{2}\frac{1}{r}\rho_1 Z(r)+\rho_1^2 Z^2+\rho_1^2 Z'+\frac{D-1}{r}\frac{1-D+2m}{2}\frac{1}{r}+\rho_1 Z(r)\frac{(D-1)}{r} \qquad (۵۴\text{-}۲)$$

با انتخاب $Z^2(r)+Z'(r)=\frac{C_2(r)}{r^2}$, $Z(r)=\frac{C_1(r)}{r}$، توابع $k_1(r,D)$ و $k_2(r,D)$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$k_1(r,D)=[2\frac{1-D+2m}{2}+2\rho_1 C_1(r)+D-1]\frac{1}{r}=M_1(r,D)\frac{1}{r}$$
$$k_2(r,D)=[\frac{1-D+2m}{2}(\frac{1-D+2m}{2}-1)+(D-1)\frac{1-D+2m}{2}+2\frac{1-D+2m}{2}\rho_1 C_1(r) \qquad (۵۵\text{-}۲)$$
$$+\rho_1^2 C_2(r)+(D-1)\rho_1 C_1(r)]\frac{1}{r^2}=M_2(r,D)\frac{1}{r^2}$$

در سه بعد با قرار دادن $m=0$ داریم:

$$k_1(r,D)=2\rho_1 C_1(r)\frac{1}{r}\ ,\ k_2(r,D)=\rho_1^2 C_2(r)\frac{1}{r^2} \qquad (۵۶\text{-}۲)$$

در نتیجه در سه بعد معادله (۲-۵۲) به صورت زیر می‌شود:

$$F''(r)+2F'(r)\rho_1 C_1(r)\frac{1}{r}+F(r)\rho_1^2 C_2(r)\frac{1}{r^2}-2\mu(\sigma r-E)F(r)=-2\mu(\frac{\gamma}{r}+w') \qquad (۵۷\text{-}۲)$$

شکل عمومی تابع *F(r,D)* را به صورت زیرانتخاب می‌کنیم:

$$F(r,D)=\sum_l A_l(r,D)r^l \qquad (۵۸\text{-}۲)$$

با قرار دادن این تابع در رابطه (۲-۵۲) خواهیم داشت:

$$\sum_l A_l(r,D)[l(l-1)+M_1(r,D)l+M_2(r,D)]r^{l-2}$$
$$+2\mu E\sum_l A_l(r,D)r^l - 2\mu\sigma\sum A_l(r,D)r^{l+1} = -2\mu(\frac{\gamma}{r}+w') \qquad (۵۹\text{-}۲)$$

به ازای $l=0$ واضح است که $A_0=0$ می‌باشد. برای $l=0,1$ و با در نظر گرفتن تنها ضرایب r^{-1}رابطه زیر را خواهیم داشت.

$$A_1(r,D) = -\frac{2\mu\gamma}{M_1(r,D)+M_2(r,D)} \qquad (۶۰\text{-}۲)$$

با در نظر گرفتن $l=1,2$ و برابر قرار دادن ضرایب ثابت از طرفین داریم:

$$A_2(r,D) = -\frac{2\mu w'}{2+2M_1+M_2} \qquad (۶۱\text{-}۲)$$

به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. با برابر قرار دادن ضرایب مرتبط r و r^2 و r^3 به ترتیب ضرایب دیگر بدست خواهند آمد.

$$A_3(r,D) = \frac{4\mu^2\gamma E}{(M_1+M_2)(6+3M_1+M_2)} \qquad (۶۲\text{-}۲)$$

$$A_4(r,D) = \frac{4\mu^2 w' E(M_1+M_2) - 4\mu^2\sigma\gamma(2+2M_1+M_2)}{(M_1+M_2)(12+4M_1+M_2)(2+2M_1+M_2)} \qquad (۶۳\text{-}۲)$$

$$A_5(r,D) = -\frac{8\mu^3\gamma E^2(2+2M_1+M_2)+4\mu^2\sigma w'(6+3M_1+M_2)(M_1+M_2)}{(M_1+M_2)(20+5M_1+M_2)(6+3M_1+M_2)(2+2M_1+M_2)} \qquad (۶۴\text{-}۲)$$

با در نظر گرفتن ضرایب بالا تابع مورد نظر بدست خواهد آمد.

$$F(r,D) = A_1(r,D)r + A_2(r,D)r^2 + A_3(r,D)r^3 + A_4(r,D)r^4 + A_5(r,D)r^5 + \ldots \qquad (۶۵\text{-}۲)$$

با در نظر گرفتن رابطه بالا، تابع موج اختلالی بدست می‌آید. بنابراین تابع موج کلی به شکل زیر خواهد شد:

$$\Psi^{tot}(r,D) = N_1 r^{\frac{1-D}{2}}[1+A_1(r,D)r + A_2(r,D)r^2 + A_3(r,D)r^3 + ...](\rho_1 r)^m Ai[\rho] \qquad (۶۶-۲)$$

شرط همگرایی تابع موج کلی بدست آمده از تکنیک اختلال این است که $\Psi'(r) < \Psi(r)$. بنابراین:

$|A_1 r + A_2 r^2 + A_3 r^3 + ...| < 1$ این شرط مقادیر حدودی r_0 را ارائه می‌دهد. با در نظر گرفتن تنها دو ترم در معادله (۲-۶۶) معادله مرتبط با برش r_0 را بدست می‌آوریم:

$$A_1 r_0 + A_2 {r_0}^2 = 1 \qquad (۶۷-۲)$$

در این مقاله محاسبات تا مرتبه r^{10} ایری و ترم $A_5(r,D)$ سری‌های نامحدود دوم محدود شده‌اند. مقادیر انرژی غیر اختلالی E و انرژی مختل شده w' هم نشان داده شده‌اند. همانگونه که انتظار می‌رود انرژی مختل شده w' کمتر از انرژی غیراختلالی است. برای ساده‌سازی محاسبات، پایین ترین مرتبه ایری را در محاسبه این توابع به کار می‌گیریم.

با تابع موج ساخته شده، قادر خواهیم بود تابع ایسگور- وایس و مشتقاتش مثل شیب و تحدب آن را مطالعه نماییم. نتایج عددی این روش در بخش ۲-۵ آمده‌است.

انتخاب بخش $\frac{1}{r}$ در هامیلتونی اصلی هم قانع کننده خواهد بود هنگامی که این بخش در متد اختلال بر پتانسیل چیره شود. مشاهده شده‌است که ترم لوچر وابسته به بعد است، پس وقتی که بعد افزایش یابد، این ترم بیشتر و بیشتر چیره شود. بنابراین فرض در نظر گرفته شده که ترم لوچر اصلی باشد، توجیه می شود. با انتخاب این فرض که ترم خطی اختلالی باشد ادامه می‌دهیم [۵].

تابع موج شعاعی به شکل نمایی زیر انتخاب می‌شود.

$$R(r) = F(r)e^{-\mu\gamma r} \tag{۶۸-۲}$$

این انتخاب را در معادله شرودینگر قرار می‌دهیم. با در نظر گرفتن حالت پایه خواهیم داشت:

$$F''(r) + (\frac{D-1}{r} - 2\mu\gamma)F'(r) + (\mu^2\gamma^2 - \frac{D-1}{r}\mu\gamma + 2\mu E + \frac{2\mu\gamma}{r})F(r) = 0 \tag{۶۹-۲}$$

برای حل این معادله تابع سری زیر را با این فرض که در $D=3$بایستی $f(r,D)=1$ ، در نظر می‌گیریم.

$$f(r,D) = r^{\frac{D-3}{2}} \text{ و } F(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n f(r,D) \tag{۷۰-۲}$$

بنابراین تابع موج شعاعی به صورت زیر خواهد شد.

$$R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\frac{D-3}{2}} e^{-\mu\gamma r} \tag{۷۱-۲}$$

با استفاده از این تابع موج شعاعی غیرمختل تابع موج $\Psi^0(r)$ در حالت پایه به صورت زیر خواهد شد.

$$\Psi^0(r) = Nr^{\frac{D-3}{2}} e^{-\mu\gamma r} \tag{۷۲-۲}$$

N ثابت بهنجارش از رابطه $\int_0^\infty 4\pi r^2 |\Psi^0(r)|^2 \, dr = 1$ بدست می‌آید. انرژی مربوط به حالت غیرمختل از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$E = W^0 = -\int_0^\infty \frac{\gamma}{r} 4\pi r^2 |\Psi^0(r)|^2 \, dr = -\frac{\mu\gamma^2}{D-1} \tag{۷۳-۲}$$

انرژی بخش اختلالی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$w' = \int_0^\infty 4\pi r^2 H' |\Psi^0(r)|^2 \, dr = \frac{\sigma D}{2\mu\gamma} + \mu_0 \qquad (۷۴-۲)$$

از متد دالگارنو اختلال استفاده می‌شود و تابع موج اختلالی به صورت $\Psi'(r) = -\frac{\sigma D}{6\gamma} r^2 r^{\frac{D-3}{2}} e^{-\mu\gamma r}$ می شود. با این تابع موج مختل شده، تابع موج کلی به شکل زیر است[۵].

$$\Psi^{tot}(r) = N_1[1 - \frac{\sigma D}{6\gamma} r^2] r^{\frac{D-3}{2}} e^{-\mu\gamma r} \qquad (۷۵-۲)$$

۲- ۵ - نتایج عددی تابع ایسگور-وایس در حضور فرم عمومی تابع موج با پتانسیل نامبو-گوتو

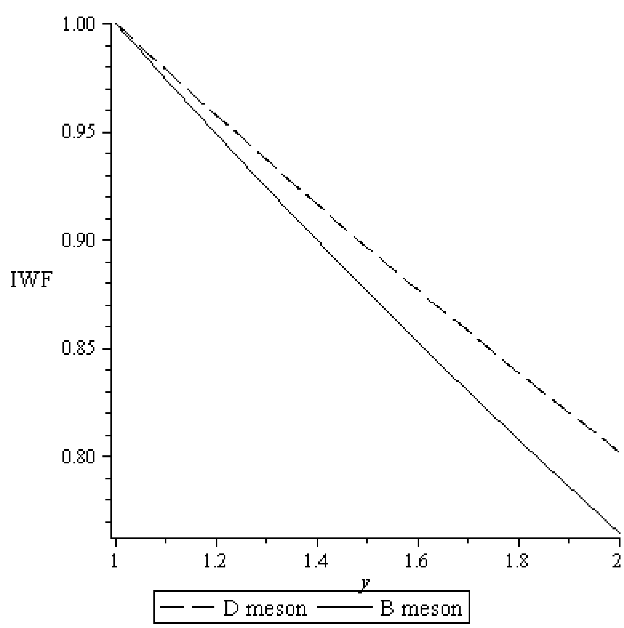
تابع ایسگور- وایس یک تابع عمومی نشان‌دهنده‌ی همه فرم فاکتورهای مزون‌های نیمه سنگین در حد جرم نامحدود گذارهای نیمه لپتونی مزون‌هاست. این کمیت در کرومودینامیک کوانتومی بنیادی است. تابع موج شامل سری‌های نامحدود ایری، حد بالای نامحدود انتگرال در محاسبات مشتقات تابع ایسگور-وایس و ثابت‌های بهنجارش منجر به واگرایی می‌شود. در مقاله[۶] گروه روی به طور موفقیت آمیزی بعضی برش‌ها به حد نامحدود بالای انتگرال در مطالعه تابع ایسگور- وایس و مشتقاتش معرفی کرده‌اند. در مقاله[۷] برش به حد بالای نامحدود را با به کارگیری شرط همگرایی تابع موج تئوری اختلال بدست آورده‌اند که محکم‌تر است.

در ادامه پارامترهای شیب (شعاع باری) و خمیدگی (پارامتر تحدب) تابع ایسگور- وایس هم در موردی که قسمت خطی پتانسیل کرنل اصلی باشد هم موردی که قسمت کولمبی اصلی باشد با شرایط خاص گزارش شده‌است.

نتایج عددی که در[۷] بدست آمده‌است، در جدول ۲-۵ گزارش شده‌است. شکل ۲-۴ تابع ایسگور- وایس را برای این دو مزون نشان می‌دهد.

جدول ۲-۵- نتایج عددی برای دو مزون ($D=3$) [۷]

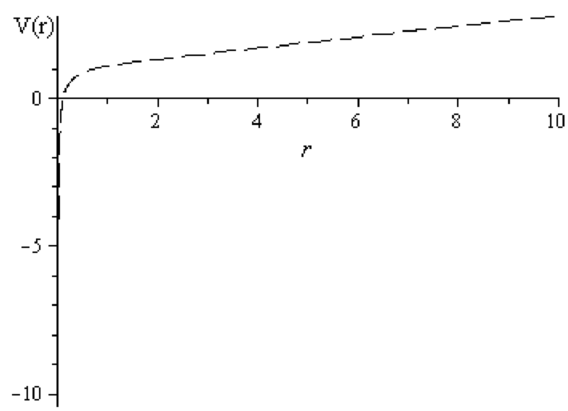
نتایج	مزون D	مزون B
r_0	۳,۶۳۵۴	۳,۴۷۱۹
ρ^2	۰,۲۱۵۸	۰,۲۶۰۸
C	۰,۰۱۷۴	۰,۰۲۵۴
E	۰,۳۴۵۹۳۸	۰,۳۵۲۷۶۴
w'	۰,۱۳۷۵۳۶	۰,۱۳۹۴۶۳



شکل۲-۴- تغییرات تابع ایسگور- وایس برای دو مزون B و D [۷]

در منبع [۵] پارامتر شیب و تحدب تابع ایسگور- وایس برای مزون B یکبار با تابع موج اصلی و بار دیگر به ازای تابع موج کلی محاسبه گردیده‌است. نتایج بدست آمده در آن با نتایج استاندارد دیگر همخوانی ندارد. علت آن می‌تواند عدم به کارگیری مقادیر حد برشی در بازه‌های انتگرال‌گیری باشد. دستیافت بعد بالا فرض ما را از ترم لوچر به عنوان ترم اصلی و ترم محدودکننده خطی اختلالی حمایت می‌کند. در ابعاد بالاتر هنگامی که ترم کولمبی محدود و محدودتر شود مقادیر پارامتر شیب و تحدب تابع ایسگور- وایس کاهش می‌یابند.

شکل ۲-۵ رفتار پتانسیل نامبو-گوتو را نمایش می‌دهد.



شکل۲-۵- پتانسیل نامبو-گوتو

۲-۶- تعیین مشخصات مزون‌های نیمه سنگین در حضور معادله شرودینگر با پتانسیل ترکیبی

در اینجا ما از پتانسیل کیلینگ بک (Killingbeck)[۱۶] استفاده می‌کنیم که شامل ترم‌های خطی، کولمبی و هارمونیک است. در واقع این پتانسیل ترم‌های هارمونی را در کنار برهم‌کنش کرنل شناخته شده دارد و منجر به نتایج رضایت بخشی در فیزیک ذرات خواهد شد. فرم این پتانسیل به صورت زیر است:

$$V(r) = a'r^2 + b'r + \frac{c'}{r} \tag{۲-۷۶}$$

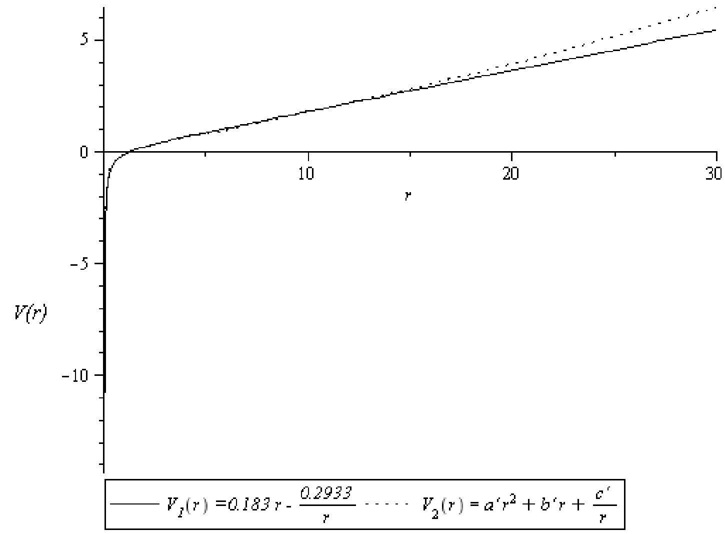
پتانسیل کرنل منبع [۶] را با پتانسیل جدید این کار فیت می‌کنیم تا مقادیر پارامترهای مجهول این پتانسیل بدست آید.

$$0.00193249997\, r^2 + 0.1574321321062\, r - \frac{0.28842195953740}{r} \tag{۲-۷۷}$$

و این همان پتانسیل مورد نظر ماست که پارامترهای آن عبارت است از:

$$\begin{aligned} a' &= 0.001932 \\ b' &= 0.157432 \\ c' &= -0.288421 \end{aligned} \tag{۲-۷۸}$$

شکل ۲-۶ تغییرات این دو پتانسیل (کرنل و ترکیبی) را نشان می‌دهد.



شکل۲-۶- مقایسه دو پتانسیل ترکیبی و کرنل

الف) تابع موج مزون

هامیلتونی اختلال در این مسئله به صورت زیر است.

$$H' = -\frac{2\mu}{\hbar^2}a'r^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2}b'r \qquad (۲\text{-}۷۹)$$

هامیلتونی اصلی به فرم زیر است:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{c'}{r} \qquad (۲\text{-}۸۰)$$

در نتیجه معادله شرودینگر با پتانسیل ترکیبی به صورت زیر است:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2}a'r^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2}b'r - \frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{c'}{r} + \frac{2\mu E_{nl}}{\hbar^2}\right)R_{nl}(r) = 0 \qquad (۲\text{-}۸۱)$$

با توجه به هامیلتونی اصلی در معادله شرودینگر داریم:

$$\frac{d^2R_{nl}^0(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR_{nl}^0(r)}{dr}+\frac{1}{r^2}[-l(l+1)-\frac{2\mu}{\hbar^2}c'r+\frac{2\mu E_{nl}}{\hbar^2}r^2]R_{nl}^0(r)=0 \qquad (۸۲-۲)$$

با مقایسه رابطه (۲-۸۲) و متد NU [۱۸-۱۷]، تابع موج اصلی سیستم مزونی مورد نظر ما به فرم زیر خواهد شد:

$$R_{nl}^0(r)=r^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)}}e^{-\sqrt{-\frac{2\mu E_{nl}}{\hbar^2}}r}L_n^{2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)}}(2\sqrt{-\frac{2\mu E_{nl}}{\hbar^2}}r) \qquad (۸۳-۲)$$

برای حالت پایه داریم:

$$R_{00}^0(r)=N_0e^{-\sqrt{-\frac{2\mu E_{00}}{\hbar^2}}r} \qquad (۸۴-۲)$$

ویژه مقدار انرژی در حالت پایه به شکل زیر است:

$$E_{00}=-\frac{\mu}{2\hbar^2}c'^2 \qquad (۸۵-۲)$$

برای بخش اختلال هامیلتونی، تابع موج اختلالی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$R'_{00}(r)=N_1[-\frac{2\mu}{\hbar^2}a'\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}r^{l'+2}-\frac{2\mu}{\hbar^2}b'\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}r^{l'+1}]R_{00}^0(r) \qquad (۸۶-۲)$$

با استفاده از رابطه (۲-۹) ضرایب تابع موج اختلالی به شرح زیر خواهند بود:

$$A_1=\frac{w'}{6b'} \qquad (۸۷-۲)$$

$$A_2=\frac{\mu}{6\hbar^2}-\frac{w'a'}{6b'^2}+\frac{\mu w'c'}{36b'\hbar^2} \quad (۸۸-۲) \quad \frac{\mu c'}{\hbar^2}a'A_1-\frac{\mu W^0}{\hbar^2}b'A_1-10a'A_2+\frac{\mu}{\hbar^2}b'c'A_2-10b'A_3=-\frac{\mu}{\hbar^2}a'$$

(۸۹-۲)

بنابراین تابع موج کلی با سه ترم در تابع موج اختلالی بدست آمده‌است. با به کارگیری تابع موج مزونی می‌توانیم خصوصیات مزون از جمله جرم ونیز شعاع باری و پارامتر تحدب در تابع ایسگور-وایس را شناسایی کنیم.

ب: تعیین جرم مزون

از مدل پتانسیل استفاده می‌کنیم تا جرم‌های مزون‌هایی همانند B_c،B_s، B، D_sو D را محاسبه نماییم. M_p جرم مزون شبه اسکالر در حالت پایه است و می تواند به صورت زیر نوشته شود [۲۰-۱۹]:

$$M_p = m_Q + m_{\bar{Q}} + \langle H \rangle \quad (۹۰-۲)$$

که شامل مجموع جرم‌های کوارک و آنتی کوارک و متوسط هامیلتونی است. متوسط هامیلتونی برای بخش اصلی همان انرژی مختل نشده سیستم است. برای بخش اختلالی از رابطه زیر بدست می‌آوریم.

$$\langle H_0 \rangle = E_{0,0}\,,\ \langle H' \rangle = \int_0^{\infty} 4\pi r^2 [-\frac{2\mu}{\hbar^2} a' r^2 - \frac{2\mu}{\hbar^2} b' r] \left| R^{tot}(r) \right|^2 dr \qquad (۹۱-۲)$$

مقادیر جرم مزون در جدول ۲-۶ آمده‌است. مقادیر پیش بینی شده ما با نتایج منتشر شده دیگر در این جدول مقایسه شده‌است. همانطور که پیداست این مقادیر سازگارند. توجه شود در انتگرال‌های مربوط به ثابت‌های بهنجارش و نیز متوسط هامیلتونین از یک مقدار حد برشی انتگرال r_0 استفاده می‌کنیم که این مقدار از شرط همگرایی زیر بدست می‌آید:

$|R'(r)| < |R(r)|$ در نتیجه به ازای r_0 معینی خواهیم داشت:

$$A_1 r_0^{\,2} + A_2 r_0^{\,3} + A_3 r_0^{\,4} = 1 \qquad (۹۲-۲)$$

از این رابطه مقدار حد برشی انتگرال‌ها بدست می‌آید که در جدول ۲-۶ آورده شده‌اند. مقدار خطای محاسبه شده برای جرم مزون B_c در مقایسه با مقدار تجربی ۰,۰۳۵۲۴ است. خطای محاسبه جرم مزون B_s در مقایسه با مقدار تجربی گزارش شده ۰,۰۴۱۰ است.

جدول ۲-۶- مقادیر جرم مزون های مختلف

mesons	$r_0\,(GeV^{-1})$	M_p(ours)	M_p [۲۱]	M_p [۲۱]	Experimental masses
D	2.3422	1.7108	1.860	2.174, 2.143	1.869 [۱۹]
B_c	1.3440	6.0633	6.507	6.283, 6.321	6.277[۱۹]
D_s	2.1115	1.8220	1.959	2.217, 2.189	1.968 [۱۹]
B_s	1.9755	5.1967	-	5.512, 5.553	5.410 [۲۱]
B	2.2361	5.0953	-	5.472, 5.516	5.313 [۲۱]

ج: تابع ایسگور وایس و پارامترهای آن

با استفاده از تابع موج کلی شیب و تحدب تابع ایسگور- وایس برای مزون‌های مورد بررسی قابل محاسبه می‌باشد.

در جدول ۲-۷ مقادیر عددی این پارامترها برای ۴ مزون آمده‌است. برای مزون B مقادیر اندازه‌گیری شده ما عبارت است از: $\rho^2 =$ ۰,۳۱۸۵ و $C =$ ۰,۰۱۹۲ که با نتایج منبع [۷] یعنی $\rho^2 =$ ۰,۲۶۰۸ و ۰,۰۲۵۴ $C =$ سازگار است. برای مزون B_s مقادیر ما ۰,۰۴۴۳ $= C$ و ۰,۴۸۲۷ $= \rho^2$ با نتایج منبع [۶]مطابقت دارند. در مورد مزون D_s مقدار پارامتر شیبی که ما اندازه گرفتیم $\rho^2 =$ ۰,۳۸۷۸ همخوانی خوبی با مقدار $\rho^2 =$ ۰,۷۹۶۸ از منبع [۶]دارد. مقادیر گزارش‌شده برای مزون D از منبع [۷] عبارت است از: ۰,۲۱۵۸

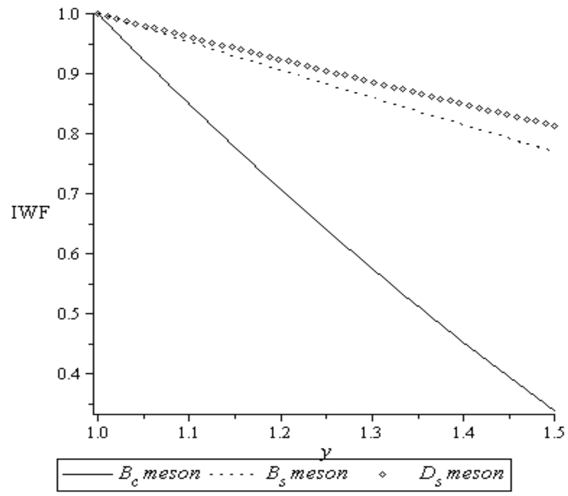
$\rho^2 =$ ۰,۲۰۰۱ و$C = $ ۰,۰۱۷۴ که توافق بسیار خوبی با نتایج ما از این مزون دارد. خطا در این مورد ۰,۲۰۰۱ است. بحث بالا نشان می دهد مقادیر بدست آمده رضایت بخش هستند.

جدول۲-۷- مقادیر پارامترهای تابع ایسگور-وایس برای مزون های مختلف در حالت غیر نسبیتی

مزون	ρ^2	C
D	0.2698	0.0138
B	0.3185	0.0192
D_s	0.3878	0.0285
B_s	0.4827	0.0443
B_c	1.5551	0.4666

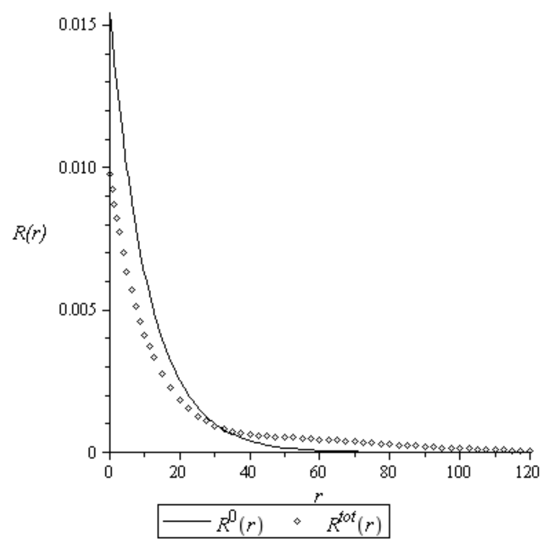
تغییرات تابع ایسگور-وایس با استفاده از رابطه (۲-۹۳) مشخص می‌شود که در شکل ۲-۷ آن را رسم نموده‌ایم.

$$\zeta(y) = 1 - \rho^2 (y-1) + C(y-1)^2 + \ldots \qquad (۹۳-۲)$$



شکل ۲-۷- تغییرات تابع ایسگور-وایس برای سه مزون در حالت غیر نسبیتی

شکل ۲-۸، تابع موج بخش اصلی با تابع موج کلی که بخش اختلال هم در برگرفته، مقایسه شده‌است. همانطور که مشاهده می‌شود، تابع موج اصلی سریع‌تر افت می‌کند.



شکل ۲-۸- تابع موج حالت پایه برای مزون B_sدر حالت غیر نسبیتی

۲-۷- تعیین پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای مزون‌های شبه اسکالر

پتانسیل هولسن برای اطلاعات اتمی، مولکولی و برهم‌کنش های هسته‌ای در نظر گرفته شده‌است که هم در محدوده‌های نسبیتی و هم غیرنسبیتی ظاهر می‌شود. پتانسیل هولسن[۱۶][22] برای مقادیر کوچک r شبیه پتانسیل کولنی عمل می‌کند و به ازای مقادیر بزرگ r به صورت نمایی کاهش می‌یابد. بنابراین پتانسیل مناسبی برای بررسی مزون‌هاست. در اینجا به بررسی حالت غیر نسبیتی می‌پردازیم.

معادله شرودینگر با در نظر گرفتن پتانسیل هولسن به عنوان برهم‌کنش سیستم مزونی به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{d^2u_{nl}(r)}{dr^2}-\frac{l(l+1)u_{nl}(r)}{r^2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{V_0}{e^{\alpha r}-1}+E_{nl}\right)u_{nl}(r)=0 \qquad (۲-۹۴)$$

با توجه به تقریب $\frac{1}{r^2}\approx\frac{\alpha^2}{(e^{\alpha r}-1)^2}$ [22] معادله (۲-۹۴) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\left[\frac{d^2u_{nl}(r)}{dz^2}-\frac{l(l+1)}{(1-z)^2}u_{nl}(r)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{V_0}{\alpha^2 z(1-z)}u_{nl}(r)+\frac{2\mu E_{nl}}{\alpha^2 z^2\hbar^2}u_{nl}(r)\right]=0 \qquad (۲-۹۵)$$

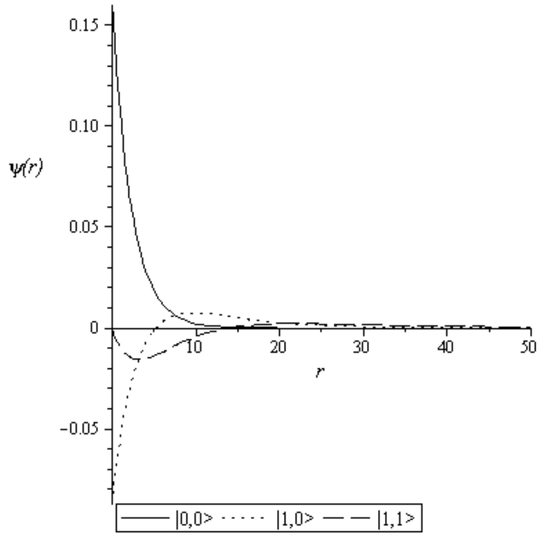
که در آن $z=e^{-\alpha r}$ است.

با استفاده از متد NU تابع موج به فرم زیر است:

$$\psi(r)=r^{-1}z^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\xi_3}}(1-z)^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\xi_3+\xi_1-\xi_2}}P_n^{\left(2\sqrt{\frac{1}{4}+\xi_3},2\sqrt{\frac{1}{4}+\xi_3+\xi_1-\xi_2}\right)}(1-2z) \qquad (۲-۹۶)$$

تابع موج برای یک کوارکونیوم در سه حالت در شکل ۲-۹ رسم شده‌است.

[۱۶] Hulthen



شکل ۲-۹- تابع موج برای چارمونیوم

انرژی سیستم با توجه به رابطه زیر محاسبه می شود:

$$\begin{aligned}&(2n+1)+(2n+1)\left(\sqrt{\frac{1}{4}+\xi_3+\xi_1-\xi_2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\xi_3}\right)\\&+n(n-1)-1-\xi_2+2\left(\frac{1}{4}+\xi_3\right)+2\sqrt{\left(\frac{1}{4}+\xi_3\right)\left(\frac{1}{4}+\xi_3+\xi_1-\xi_2\right)}=0\end{aligned} \tag{۹۷-۲}$$

که در این روابط پارامترهای زیر را داریم:

$$\xi_1=l(l+1)+\frac{2\mu V_0}{\hbar^2\alpha^2}-\frac{2\mu E_{nl}}{\alpha^2\hbar^2}\ ,\ \xi_2=\frac{2\mu V_0}{\hbar^2\alpha^2}-\frac{4\mu E_{nl}}{\alpha^2\hbar^2}\ ,\ \xi_3=-\frac{2\mu E_{nl}}{\alpha^2\hbar^2} \tag{۹۸-۲}$$

در اینجا نتایج‌مان را برای دو کوارکونیوم چارمونیوم و باتومیوم ونیز چند مزون نیمه سنگینکه همگی مزون‌های شبه اسکالرند، آورده‌ایم.

جدول ۲-۸- پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای مزون $\eta_c(c\bar{c})$

r_0	ρ^2 $(ours)$	C $(ours)$
1.5	0.7156	0.1082
2.0	1.2109	0.3178
2.5	1.7936	0.7167
3.0	2.4384	1.3643
3.5	3.1206	2.3057
4.0	3.8170	3.5654

جدول ۲-۹- پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای مزون $\eta_b(b\bar{b})$

r_0	ρ^2 $(ours)$	C $(ours)$
1.0	2.7790	1.7668
1.5	5.1555	6.6994
2.0	7.3219	15.0313
2.5	8.9444	24.9195

مقادیر جداول ۲-۸ و ۲-۹ با پارامترهای بدست آمده در مدل‌های دیگر که در فصل اول معرفی شدند، سازگاری دارند. برای نمونه نتیجه مااز شعاع باری برای چارمونیوم1.2109 همخوانی بسیار خوبی با مقدار ۱٫۱۷ در مدل HFAGدارد. به همین ترتیب برای شعاع باری $\eta_b(b\bar{b})$ مقدار بدست آمده ما 2.7790 با مدل MIT همخوانی دارد.

جدول ۲-۱۰- پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای مزون $D(c\bar{u})$ در حالت غیر نسبیتی

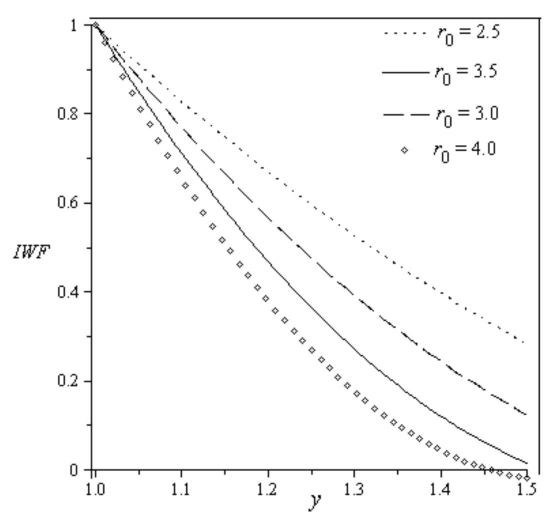
r_0	ρ^2 $(ours)$	C $(ours)$
4.0	0.6335	0.0856
4.5	0.7851	0.1330
5.0	0.9485	0.1963
5.5	1.1223	0.2781
6.0	1.3052	0.3806
6.5	1.4959	0.5061

مقادیری که در جدول‌های ۲-۱۰ و ۲-۱۱ نشان داده‌ایم با نتایج منبع [۶] سازگاری خوبی دارند که نشان می‌دهد نتایج ما رضایت بخش هستند.

جدول ۲-۱۱- پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای مزون $B_s(b\bar{s})$ در حالت غیر نسبیتی

r_0	ρ^2 $(ours)$	C $(ours)$
4.0	1.4875	0.4918
4.5	1.8189	0.7485
5.0	2.1662	1.0814
5.5	2.5248	1.4973
6.0	2.8900	2.0011
6.5	3.2577	2.5948

شکل ۲-۱۰ رفتارتابع ایسگور- وایس را برای یک کوارکونیوم نشان می‌دهد. این شکل با انتظارات ما از تابع ایسگور- وایس سازگار است.. انتظار داریم در y=1مقدار این تابع یک باشد. از آنجا که محدوده فیزیکی قابل دسترس واپاشی های نیمه لپتونی y=1 تا ۱٫۵ می‌باشد، بنابراین ما این بازه را به کار گرفته‌ایم.



شکل ۲-۱۰- رفتارتابع ایسگور- وایس برای چارمونیوم

با استفاده از رابطه (۲-۹۰) جرم چند مزون شبه اسکالر را محاسبه نموده‌ایم و در جدول ۲-۱۲ ارائه نموده‌ایم. مقادیر دیگری از سایر نتایج منتشر شده در این جدول نشان داده‌ایم تا مقادیر اندازه‌گیری شده ما با آن‌ها مقایسه شود. بدیهی است نتایج ما در مقایسه با آن‌ها در توافقند. خطای محاسبه شده در مورد جرم مزون D ۰,۰۰۶۰ است. برای جرم مزون η_b با ساختار کوارکی سنگین مقدار خطا ۰,۰۱۱۳ است.

جدول ۲-۱۲- جرم چند مزون شبه اسکالر در حالت پایه

Mesons	M_p (ours)	M_p (مقادیر دیگران)
$D(c\bar{u})$	1.8764	1.865 [۲۳]
$B(b\bar{u})$	5.2716	5.271 [۲۳]
$D_s(c\bar{s})$	2.0119	1.971 [۲۳]
$B_s(b\bar{s})$	5.4029	-
$B_c(b\bar{c})$	6.3774	6.507 [۱۹]
$\eta_c(c\bar{c})$	3.0281	3.078 [۱۶]
$\eta_b(b\bar{b})$	9.6156	9.506 [۱۶]

فصل سوم

مطالعه نیمه نسبیتی تابع ایسگور- وایس

۳-۱- مقدمه

توابع موج اصلی مکانیک کوانتومی که معادله شرودینگر غیرنسبیتی، نسبیتی دیراک،کلاین-گردن و دی--کی-پی را شامل می شوند، می توانند به خوبی به معادلات دیفرانسیلی خطی معمولی کاهش یابند.

مزون مثال آشنای سیستم دو جسمی است که ما خیلی از اوقات با آنها در فیزیک سروکار داریم. معادله اسپین صفر سالپیتر[۱۷] (SSE) یک معادله موج برای برهم‌کنش سیستم دو جسمی است. با معادله بدون اسپین سالپیتر، وابستگی زمانی و نیز درجات آزادی اسپین صرف نظر می‌شوند. معادله سالپیتر به خاطر ماهیت غیرموضعی، در راه حل‌های تحلیلی دقیق شکست می‌خورد و بنابراین مجبوریم با تکنیک‌های تقریبی کار کنیم.

۳-۲- تعیین پارامترهای تابع ایسگور- وایس در حضور معادله سالپیتر با پتانسیل کرنل

معادله سالپیتر اسپین صفر برای سیستم دو جسمی فرم زیر را دارد [۲۴و۲۲].

$$\left[\sum_{i=1,2}\left(\sqrt{-\Delta+m_i^{\,2}}-m_i\right)+V(r)-E_{n,l}\right]\chi(\vec{r})=0 \quad ,\Delta=\nabla^2$$
$$\chi(\vec{r})=Y_{l,m}(\theta,\phi)R_{n,l}(r) \tag{۳-۱}$$

برای ذرات با برهم‌کنش سنگین، تقریب زیر را داریم:

$$\sum_{i=1,2}\sqrt{-\Delta+m_i^{\,2}}=m_1+m_2-\frac{\Delta}{2\mu}-\frac{\Delta^2}{8\eta^3}-\ldots \tag{۳-۲}$$

[۱۷] Spinless Salpeter equation

که از روابط زیر نشات گرفته است.

$$\sum_{i=1,2}\sqrt{-\Delta+m_i^2}=\sqrt{-\Delta+m_1^2}+\sqrt{-\Delta+m_2^2}=m_1\left(1-\frac{\Delta}{m_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}+m_2\left(1-\frac{\Delta}{m_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=m_1\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta}{m_1^2}-\frac{1}{8}\frac{\Delta^2}{m_1^4}-\ldots\right)+m_2\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta}{m_2^2}-\frac{1}{8}\frac{\Delta^2}{m_2^4}-\ldots\right) \qquad (۳-۳)$$
$$=m_1+m_2-\frac{\Delta}{2}\left(\frac{m_1+m_2}{m_1m_2}\right)-\frac{\Delta^2}{8}\left(\frac{m_1^3+m_2^3}{m_1^3m_2^3}\right)-\ldots$$

رابطه $\frac{m_1^3+m_2^3}{m_1^3m_2^3}$ را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$\left(\frac{m_1^3+m_2^3}{m_1^3m_2^3}\right)=\frac{m_1^3+m_2^3}{(m_1+m_2)^3}\frac{(m_1+m_2)^3}{m_1^3m_2^3}=\frac{1}{\mu^3}\frac{(m_1+m_2)^3-3m_1^2m_2-3m_2^2m_1}{(m_1+m_2)^3}$$
$$=\frac{1}{\mu^3}\frac{(m_1+m_2)^3-3m_1m_2(m_1+m_2)}{(m_1+m_2)^3}$$
$$=\frac{1}{\mu^3}\left[1-\frac{3m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\right],\quad where\,\frac{1}{(m_1+m_2)^2}=\frac{1}{(m_1+m_2)^2}\frac{m_1^2m_2^2}{m_1^2m_2^2}=\frac{\mu^2}{m_1^2m_2^2} \qquad (۴-۳)$$
$$\frac{1}{\mu^3}\left[1-\frac{3m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}\right]=\frac{1}{\mu^3}[\frac{\frac{m_1^2m_2^2}{\mu^2}-3m_1m_2}{\frac{m_1^2m_2^2}{\mu^2}}]=\frac{1}{\mu^3}[\frac{m_1m_2-3\mu^2}{m_1m_2}]=\frac{1}{\eta^3}$$

جرم کاهش یافته به صورت مقابل تعریف می‌شود. $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$

روابط بالا به تقریب معادله (۳-۲) منجر خواهد شد.

m_1 و m_2 جرم‌های کوارک‌های سازنده مزون هستند که در اینجا مقادیر در نظر گرفته شده عبارتند از:

$$m_u=0.336GeV\,,m_s=0.483GeV\,,m_c=1.550GeV\,,m_b=4.950GeV \qquad (۵-۳)$$

با استفاده از معادلات (۳-۱ و ۳-۲)، برای بخش شعاعی خواهیم داشت.

$$\left[-\frac{\Delta}{2\mu}-\frac{\Delta^2}{8\eta^3}+V(r)\right]R_{nl}(r)=E_{nl}R_{nl}(r) \tag{۳-۶}$$

می‌دانیم

$$\Delta^2=\mathrm{p}^4=4\mu^2(E_{nl}-V(r))^2 \tag{۳-۷}$$

و نیز لاپلاسی به فرم زیر است.

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{L^2}{r^2} \tag{۳-۸}$$

با به کارگیری روابط (۳-۶)، (۳-۷) و (۳-۸) خواهیم داشت:

$$\left[-\frac{1}{2\mu}[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{L^2}{r^2}]-\frac{1}{8\eta^3}[4\mu^2(E_{nl}-V(r))^2]+V(r)-E_{nl}\right]R_{nl}(r)=0 \tag{۳-۹}$$

در نتیجه معادله سالپیتر با اسپین صفر شعاعی فرم زیر را دارد:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2R_{nl}(r)+W_{nl}(r)R_{nl}(r)-\frac{W_{nl}^2(r)}{2\tilde{m}}R_{nl}(r)=0 \tag{۳-۱۰}$$

که در آن پارامترهای $\tilde{m}$و $W_{nl}(r)$ به صورت زیر در نظر گرفته شده‌اند:

$$\begin{aligned}\tilde{m}&=\frac{m_1m_2\mu}{m_1m_2-3\mu^2}\\ W_{nl}(r)&=V(r)-E_{nl}=\alpha r-\frac{\beta}{r}-E_{nl}\end{aligned} \tag{۳-۱۱}$$

پتانسیلی که در نظر می گیریم کرنل است. در اینجا قسمت کولمبی را اصلی می‌گیریم.

$$[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{2\mu}{\hbar^2}\alpha r+\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{\beta}{r}+\frac{2\mu}{\hbar^2}E_{nl}+\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}\alpha^2 r^2$$
$$+\frac{\mu\beta^2}{\tilde{m}\hbar^2 r^2}-\frac{2\alpha\beta\mu}{\tilde{m}\hbar^2}+\frac{\mu E_{nl}^2}{\tilde{m}\hbar^2}-\frac{2\mu\alpha r E_{nl}}{\tilde{m}\hbar^2}+\frac{2\beta E_{nl}\mu}{\tilde{m}\hbar^2 r}]R_{nl}(r)=0 \quad (۱۲-۳)$$

حال رابطه (۳-۱۲) را با معادله شبه شرودینگر زیر مقایسه کرده و تکانه زاویه ای جدید را می‌یابیم.

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{l'(l'+1)}{r^2}+\frac{c}{r}\right]R_{nl}(r)=-\frac{2\mu}{\hbar^2}\varepsilon' R_{nl}(r) \quad (۱۳-۳)$$

واضح است که:

$$l'(l'+1)=l(l+1)-\frac{\mu\beta^2}{\tilde{m}\hbar^2}$$
$$c=\frac{2\mu}{\hbar^2}\beta+\frac{2\beta E_{nl}\mu}{\tilde{m}\hbar^2} \quad (۱۴-۳)$$
$$\varepsilon'_{nl}=E_{nl}-\frac{\alpha\beta}{\tilde{m}}+\frac{E_{nl}^2}{2\tilde{m}}$$

با استفاده از متدNU،تابع موج اصلی و ویژه انرژی را پیدا می‌کنیم.

$$\alpha_1=2,\quad \alpha_2=0,\quad \alpha_3=0,$$
$$-\zeta_1=\frac{2\mu}{\hbar^2}\varepsilon',\quad \zeta_2=c,\quad -\zeta_3=-l'(l'+1),$$
$$\alpha_4=-\frac{1}{2},\quad \alpha_5=0,\quad \alpha_6=\zeta_1,\quad \alpha_7=-\zeta_2, \quad (۱۵-۳)$$
$$\alpha_8=\frac{1}{4}+\zeta_3,\quad \alpha_9=\zeta_1,\quad \alpha_{10}=1+2\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_3},$$
$$\alpha_{11}=2\sqrt{\zeta_1},\quad \alpha_{12}=-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_3},\quad \alpha_{13}=-\sqrt{\zeta_1}.$$

حالت پایه $n=0,l=0$را در نظر گرفته‌ایم. پس تابع موج اصلی به شکل زیر می‌شود:

$$R_{00}^0(r)=N_0 r^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_3}}e^{-\sqrt{\zeta_1}r} \quad (۱۶-۳)$$

با استفاده از متد NUو جایگذاری ضرایب روابط (۳-۱۴) در آن بدست می‌آوریم:

$$\sqrt{-\frac{2\mu\varepsilon'}{\hbar^2}}-c+2\sqrt{-\frac{2\mu\varepsilon'}{\hbar^2}(\frac{1}{4}-\frac{\mu\beta^2}{\tilde{m}\hbar^2})}=0 \qquad (۳-۱۷)$$

در نتیجه مقدار ε'_{00}، با توجه به رابطه (۳-۱۴) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\varepsilon'_{00}=-\frac{\mu\beta^2(1+\frac{2\alpha\beta}{\tilde{m}^2})}{[1+2\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{\mu\beta^2}{\tilde{m}}}]}. \qquad (۳-۱۸)$$

به این ترتیب انرژی حالت پایه بدست می‌آید.

هامیلتونی سیستم مزونی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
&H=H_0+H',\\
&H_0=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2-\frac{\beta}{r},\\
&H'=\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}\alpha^2r^2-\frac{2\mu}{\hbar^2}\alpha(1+\frac{E_{00}}{\tilde{m}})r.
\end{aligned} \qquad (۳-۱۹)$$

تابع موج اختلالی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$R'(r)=N_1G(r)R^0_{00}(r), \qquad (۳-۲۰)$$

که در آن داریم:

$$G(r)=-zA_0r+(z'A_0-zA_1)r^2+(z'A_1-zA_2)r^3+\ldots \qquad (۳-۲۱)$$

پارامترهای آن به صورت زیر معرفی می‌شوند.

$$z=\frac{2\mu}{\hbar^2}\alpha(1+\frac{E_{00}}{\tilde{m}}),$$
$$z'=\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}\alpha^2,$$
$$c_0=-zA_0,$$
$$c_{k+1}=z'A_k-zA_{k+1},\quad k=0,1,2,... \tag{۲۲-۳}$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$G(r)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^{l+1}. \tag{۲۳-۳}$$

از ترکیب روابط (۳-۱۹) و (۳-۲۰) و (۳-۲۳) و نیز با استفاده از رابطه (۲-۹) خواهیم داشت:

$$\sum_{l=0}^{\infty}c_l l(l+1)r^{l-1}+\frac{2}{r}\sum_{l=0}^{\infty}c_l(l+1)r^l-\frac{l'(l'+1)}{r^2}\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^{l+1}+\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{\beta}{r}\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^{l+1}$$
$$+\frac{2\mu}{\hbar^2}W^0\sum_{l=0}^{\infty}c_l r^{l+1}=-\frac{2\mu}{\hbar^2}W'+\frac{2\mu^2}{\tilde{m}\hbar^4}\alpha^2r^2-\frac{4\mu^2}{\hbar^4}\alpha(1+\frac{E}{\tilde{m}})r. \tag{۲۴-۳}$$

به ازای $l=0$ با در نظر گرفتن ضرایب r^{-1} از طرفین رابطه (۳-۲۴) می‌توان نوشت.

$$2c_0-l'(l'+1)c_0=0\rightarrow c_0=0\rightarrow A_0=0$$

برای $l=0,1$ با برابر قرار دادن ضرایب ثابت از طرفین (۳-۲۴) به رابطه زیر می‌رسیم.

$$c_1=\frac{1}{6-l'(l'+1)}(-\frac{2\mu W'}{\hbar^2}) \tag{۲۵-۳}$$

با در نظر گرفتن ضرایب r برای $l=0,1,2$ خواهیم داشت.

$$c_2=\frac{1}{12-l'(l'+1)}[-\frac{4\mu^2\alpha}{\hbar^4}(1+\frac{E_{00}}{\tilde{m}})+\frac{4\mu^2\beta W'}{6-l'(l'+1)}\frac{1}{\hbar^4}], \tag{۲۶-۳}$$

حال ضرایب A_l که در تابع $G(r)$نقش داشتند با کمک روابط بالا محاسبه می‌گردند.

$$A_0 = 0,$$
$$A_1 = \frac{W'}{\alpha(6+\frac{\mu\beta^2}{\tilde{m}})(1+\frac{E_{00}}{\tilde{m}})},$$
$$A_2 = \frac{1}{2\mu\alpha(1+\frac{E_{00}}{\tilde{m}})}[\frac{\mu\alpha^2 W'}{\alpha\tilde{m}(1+\frac{E_{00}}{\tilde{m}})(6+\frac{\mu\beta^2}{\tilde{m}})} - \frac{1}{12+\frac{\mu\beta^2}{\tilde{m}}}(-4\mu^2\alpha(1+\frac{E_{00}}{\tilde{m}})+\frac{4\mu^2\beta W'}{6+\frac{\mu\beta^2}{\tilde{m}}})]$$

(۲۷-۳)

حال که ضرایب تابع را یافتیم در آن قرار می‌دهیم.

$$G(r) = \frac{W'}{\alpha(6+\frac{\mu\beta^2}{\tilde{m}})(1+\frac{E_{00}}{\tilde{m}})}r + \frac{1}{2\mu\alpha(1+\frac{E_{00}}{\tilde{m}})}[\frac{\mu\alpha^2 W'}{\alpha\tilde{m}(1+\frac{E_{00}}{\tilde{m}})(6+\frac{\mu\beta^2}{\tilde{m}})} - \frac{1}{12+\frac{\mu\beta^2}{\tilde{m}}}(-4\mu^2\alpha(1+\frac{E_{00}}{\tilde{m}})+\frac{4\mu^2\beta W'}{6+\frac{\mu\beta^2}{\tilde{m}}})]r^2+\ldots \qquad (۲۸-۳)$$

تابع موج کلی به فرم زیر است:

$$R^{tot} = N_3(R^0(r)+R'(r)) \qquad (۲۹-۳)$$

پارامترهای تابع ایسگور-وایس قابل محاسبه‌اند. در جداول ۳-۱ تا ۳-۴، نتایج عددی این پارامترها برای چهار مزون با اسپین صفر آورده شده‌است. برای مقایسه با سایر نتایج منتشر شده چند منبع در جداول آورده شده‌است. همانطورکه مشاهده می‌شود مقادیربدست آمده در محاسبات ما با منابعدیگر که در جداول آورده‌ایم، همخوانی دارد.

جدول ۳-۱- پارامترهای تابع ایسگور– وایس برای مزون B در حالت نیمه نسبیتی

<table>
<tr><th>r_0</th><th>ρ^2 (ours)</th><th>ρ^2 [۶]</th><th>ρ^2 [۷]</th><th>ρ^2 [۲۵]</th><th>C (ours)</th><th>C [۶]</th><th>C [۷]</th></tr>
<tr><td>۱,۵</td><td>۰,۰۳۱۷</td><td>–</td><td rowspan="11">0.2608</td><td rowspan="11">1.016</td><td>۰,۰۰۰۵</td><td>–</td><td rowspan="11">0.0254</td></tr>
<tr><td>۲,۰</td><td>۰,۰۵۴۶</td><td>–</td><td>۰,۰۰۱۴</td><td>–</td></tr>
<tr><td>۲,۵</td><td>۰,۰۸۶۵</td><td>–</td><td>۰,۰۰۳۸</td><td>–</td></tr>
<tr><td>۳,۰</td><td>۰,۲۱۷۸</td><td>–</td><td>۰,۰۲۱۰</td><td>–</td></tr>
<tr><td>۳,۵</td><td>۰,۷۱۲۵</td><td>–</td><td>۰,۱۱۷۹</td><td>–</td></tr>
<tr><td>۴,۰</td><td>۱,۲۰۳۳</td><td>۰,۶۶۹۹</td><td>۰,۲۷۳۲</td><td>۰,۰۹۷۹</td></tr>
<tr><td>۴,۵</td><td>۱,۶۸۸۲</td><td>۰,۷۰۳۰</td><td>۰,۴۸۸۰</td><td>۰,۱۱۱۸</td></tr>
<tr><td>۵,۰</td><td>۱,۸۵۹۵</td><td>۱,۱۷۵۸</td><td>۰,۶۱۷۷</td><td>۰,۳۴۵۱</td></tr>
<tr><td>۵,۵</td><td>۲,۰۷۰۹</td><td>۲,۰۵۲۳</td><td>۰,۷۹۷۳</td><td>۰,۸۷۲۲</td></tr>
<tr><td>۶,۰</td><td>۲,۳۵۷۵</td><td>۲,۷۸۵۴</td><td>۱,۰۵۵۲</td><td>۱,۴۴۴۱</td></tr>
<tr><td>۶,۵</td><td>۲,۶۸۹۱</td><td>–</td><td>۱,۳۹۱۶</td><td>–</td></tr>
</table>

در مورد مزون B مقادیر پارامتر شیب و تحدب در بازه ۳,۰ مطابقت خوبی با مقادیر منبع [۷] از این مزون دارد و می‌توان گفت نتایج ما رضایت بخش هستند. خطای نسبی که از مقدار پارامتر شیب در بازه ۵ بدست آوردیم ۰,۳۶۷۶ است که قابل قبول می باشد. همچنین برای پارامتر تحدب در این بازه مقدار خطای نسبی ۰,۴۴۱۳ بدست آمد.

جدول ۳-۲- پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای مزون D در حالت نیمه نسبیتی

r_0	ρ^2 (*ours*)	ρ^2 [۶]	ρ^2 [۲۵]	ρ^2 [۷]	C (*ours*)	C [۶]	C [۷]
۱,۵	۰,۰۲۴۹	–			۰,۰۰۰۳	–	
۲,۰	۰,۰۴۴۱	–			۰,۰۰۰۹	–	
۲,۵	۰,۰۶۶۴	–			۰,۰۰۲۱	–	
۳,۰	۰,۰۹۶۹	–			۰,۰۰۴۷	–	
۳,۵	۰,۲۰۲۳	–	۱,۶۷۵	0.2158	۰,۰۱۹۱	–	0.0174
۴,۰	۰,۶۰۰۹	–			۰,۰۹۶۹	–	
۴,۵	۱,۱۰۲۰	–			۰,۲۴۰۰	–	
۵,۰	۱,۵۲۹۳	–			۰,۴۲۳۵	۰,۱۱۳۸	
۵,۵	۱,۹۱۱۱	۱,۲۲۴۹			۰,۶۲۵۵	۰,۳۵۷۱	
۶,۰	۲,۰۴۴۰	۱,۹۰۹۹			۰,۷۴۹۶	۰,۷۳۴۲	
۶,۵	۲,۲۴۶۷	۲,۴۶۳			۰,۹۳۴۳	۱,۱۲۴۷	

در جدول ۳-۲، مقادیری که از منابع دیگر ارائه شده‌اند با مقادیر ما همخوانی دارند. برای نمونه، در بازه r_0=۵,۰ مقدار بدست آمده ما برای پارامتر شیب تابع ایسگور- وایس ۱,۵۲۹۳ است که با منبع[۲۵] برای پارامتر شیب مطابقت دارد.در مورد مزون D در بازه ۳,۵ مقدار شعاع باری که ما بدست آورده‌ایم مطابقت خوبی با منبع [۷] از این مزون دارد. در بازه ۵,۵ خطای محاسبه شده برای پارامترهای شیب و تحدب به ترتیب عبارتند از: ۰,۳۵۹۰ و ۰,۴۲۹۰.

جدول ۳-۳- پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای مزون D_s در حالت نیمه نسبیتی

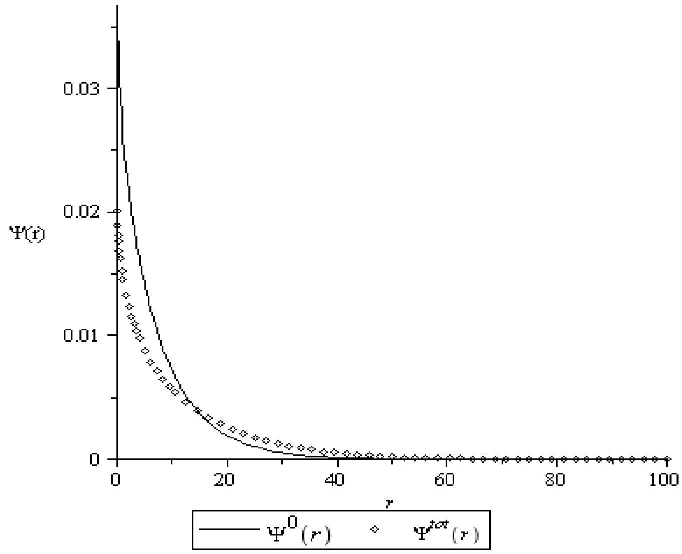
r_0	ρ^2 $(ours)$	ρ^2 [۶]	C $(ours)$	C [۶]
۱,۵	۰,۰۴۲۶	–	۰,۰۰۰۸	–
۲,۰	۰,۰۷۵۳	–	۰,۰۰۲۷	–
۲,۵	۰,۱۱۶۹	–	۰,۰۰۶۷	–
۳,۰	۰,۱۶۸۴	–	۰,۰۱۴۲	–
۳,۵	۰,۲۳۷۰	–	۰,۰۲۸۷	–
۴,۰	۰,۳۵۰۵	–	۰,۰۶۳۴	–
۴,۵	۰,۵۹۰۹	–	۰,۱۶۵۲	–
۵,۰	۱,۱۲۲۸	۲,۱۰۵۴	۰,۴۶۰۳	۰,۹۶۶۵
۵,۵	۲,۰۵۶۱	۳,۱۰۵۹	۱,۱۲۲۸	۱,۸۱۷۶
۶,۰	۳,۱۶۷۶	۳,۸۷۸۲	۲,۱۵۰۶	۲,۶۸۷۵

مقادیری که از منبع [۶] در جداول آورده شده‌اند با نتایج ما همخوانی دارند. در جدول ۳-۳ مقدار گزارش شده در منبع [۶] برای مزون D_s، ۳,۱۰۵۹ مطابقت خوبی با نتیجه ما یعنی ۳,۱۶۷۶ از شعاع باری دارد. در بازه های r_0=۵,۵ و r_0=۶ مقادیر اندازه‌گیری شده ما برای پارامتر تحدب با مقادیر منبع [۶] همخوانی بسیار خوبی دارد. در بازه ۶ خطاهای محاسبه شده برای پارامترهای شیب و تحدب به ترتیب عبارتند از: ۰,۲۲۴۳ و ۰,۲۴۹۶.

جدول ۳-۴- پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای مزون B_s در حالت نیمه نسبیتی

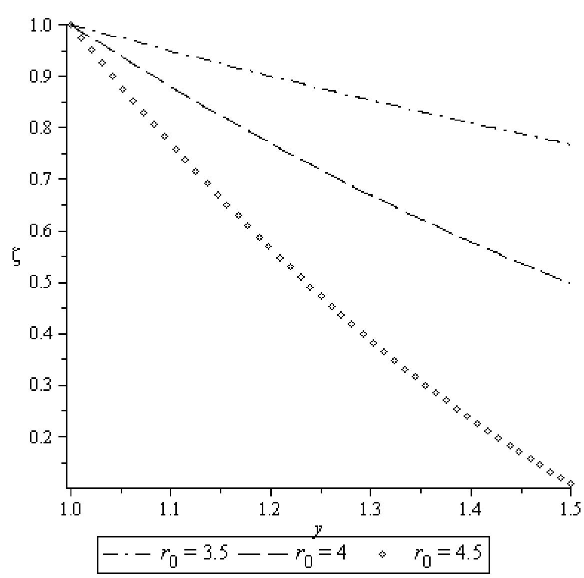
r_0	ρ^2 $(ours)$	ρ^2 [۴۷]	c $(ours)$	C [۴۷]
۱,۵	۰,۰۵۹۶	–	۰,۰۰۱۷	–
۲,۰	۰,۱۰۵۲	–	۰,۰۰۵۶	–
۲,۵	۰,۱۶۶۲	–	۰,۰۱۴۲	–
۳,۰	۰,۲۶۸۵	۰,۸۷۹۲	۰,۰۳۷۸	۰,۱۶۵۱
۳,۵	۰,۵۳۳۱	۰,۹۸۰۹	۰,۱۳۲۵	۰,۲۱۰۱
۴,۰	۱,۲۵۶۴	۱,۰۹۲۴	۰,۴۹۷۱	۰,۲۸۰۵
۴,۵	۲,۴۴۵۰	۲,۲۳۱۲	۱,۳۲۶۰	۱,۱۴۲۳
۵,۰	۳,۵۸۱۱	۳,۶۴۷۱	۲,۴۷۰۳	۲,۵۲۸۲
۵,۵	۴,۷۲۱۶	–	۴,۰۰۰۱	–
۶,۰	۵,۷۷۲۹	–	۵,۷۱۴۲	–

در شکل ۳-۱، تابع موج حالت پایه را برای مزون B نشان داده‌ایم.



شکل۳-۱- تابع موج حالت پایه برای مزونB در حالت نیمه نسبیتی

در شکل ۳-۲، تغییرات تابع ایسگور-وایس را با توجه به نتایج بدست آمده رسم کرده‌ایم که شرط $\zeta(y)|_{y=1}=1$ را برآورده می‌کند. در واقع رفتار نیمه نسبیتی از تابع ایسگور- وایس را در این بخش نشان دادیم.



شکل ۳-۲- تغییرات تابع ایسگور-وایس برای مزون B_s در حالت نیمه نسبیتی

۳-۳- بررسی تابع ایسگور- وایس در حضور معادله سالپیتر با پتانسیل پوشل-تلر

با در نظر گرفتن معادله سالپیتر (۳-۱۰) پیش می‌رویم. تابع موج را به صورت $\psi_{nl}(r)=\frac{u_{nl}(r)}{r}$ می گیریم. l تکانه زاویه‌ای سیستم مورد نظر است. با اندکی ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\frac{d^2u_{nl}(r)}{dr^2}-\frac{l(l+1)\,u_{nl}(r)}{r^2}-\frac{2\mu}{\hbar^2}W_{nl}(r)u_{nl}(r)+\frac{\mu W_{nl}^2(r)}{\tilde{m}\hbar^2}u_{nl}(r)=0 \qquad (۳۰-۳)$$

پتانسیل سیستم مزونی را پتانسیل پوشل-تلر[18][۲۶] انتخاب می‌کنیم که به فرم زیر است:

$$V=\frac{V_1}{\cosh^2(\alpha r)}+\frac{V_2}{\sinh^2(\alpha r)} \qquad (۳۱-۳)$$

با در نظر گرفتن روابط (۳-۳۰) و (۳-۳۱) می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2u_{nl}(r)}{dr^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}u_{nl}(r)-\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(\frac{V_1}{\cosh^2(\alpha r)}+\frac{V_2}{\sinh^2(\alpha r)}-E_{nl}\right)u_{nl}(r)\\&+\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}\left(\frac{V_1^2}{\cosh^4(\alpha r)}+\frac{V_2^2}{\sinh^4(\alpha r)}+\frac{2\,V_1\,V_2}{\cosh^2(\alpha r)\sinh^2(\alpha r)}-\frac{2\,V_1\,E_{nl}}{\cosh^2(\alpha r)}\right.\\&\left.-\frac{2\,V_2\,E_{nl}}{\sinh^2(\alpha r)}+E_{nl}^2\right)u_{nl}(r)=0\end{aligned} \qquad (۳۲-۳)$$

سهم اختلال به شکل زیر است:

$$H'=\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}\left(\frac{V_1^2}{\cosh^4(\alpha r)}+\frac{V_2^2}{\sinh^4(\alpha r)}+\frac{2\,V_1\,V_2}{\cosh^2(\alpha r)\sinh^2(\alpha r)}\right) \qquad (۳۳-۳)$$

از تغییر متغیر زیر استفاده می‌کنیم :

[18] Pöschl-Teller potential

$$z=\sinh^2(\alpha r)\rightarrow dz=2\alpha\sinh(\alpha r)\cosh(\alpha r)\,dr$$
$$\frac{d}{dr}=\frac{d}{dz}\frac{dz}{dr}=2\alpha\sinh(\alpha r)\cosh(\alpha r)\frac{d}{dz} \tag{۳۴-۳}$$
$$\frac{d^2}{dr^2}=4\alpha^2\sinh^2(\alpha r)\cosh^2(\alpha r)\frac{d^2}{dz^2}=4\alpha^2 z(1+z)\frac{d^2}{dz^2}$$

تقریب زیر را هم در نظر می‌گیریم که یک تقریب پکریس-گونه[۱۹][۲۲] است:

$$\frac{\alpha^2}{\sinh^2(\alpha r)}\approx\frac{1}{r^2} \tag{۳۵-۳}$$

با در نظر گرفتن تغییر متغیر (۳-۳۵) و تقریب (۳-۳۴) می‌توانیم بنویسیم.

$$\begin{aligned}&[4\alpha^2 z(1+z)\frac{d^2}{dz^2}-\frac{l(l+1)}{z}\alpha^2-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{V_1}{1+z}-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{V_2}{z}+\frac{2\mu}{\hbar^2}E_{nl}\\&-\frac{2\mu V_1E_{nl}}{\tilde{m}\hbar^2(1+z)}-\frac{2\mu V_2E_{nl}}{\tilde{m}\hbar^2 z}+\frac{\mu E_{nl}^2}{\tilde{m}\hbar^2}]u_{nl}(z)=0\end{aligned} \tag{۳۶-۳}$$

با توجه به فرم عمومی معادله NU، می‌توانیم معادله (۳-۳۶) را از این روش حل کنیم.

تابع موج به صورت زیر خواهد شد:

$$u_{nl}(z)=z^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_3}}(1+z)^{\frac{1}{2}-\sqrt{\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\frac{1}{4}}}P_n^{(2\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_3},-2\sqrt{\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\frac{1}{4}})}(1+2z) \tag{۳۷-۳}$$

با توجه به تقریب‌های در نظر گرفته شده تابع موج شعاعی اصلی در این سیستم مزونی، فرم زیر را خواهد داشت.

$$\psi_{00}^{0}(r)=(\sinh^2(\alpha r))^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_3}}(1+\sinh^2(\alpha r))^{\frac{1}{2}-\sqrt{(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\frac{1}{4})}}P_n^{(2\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_3},(-2\sqrt{\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\frac{1}{4}})}(1+2\sinh^2(\alpha r))$$
(۳۸-۳)

[۱۹] Pekeris approximation

با توجه به خواص چندجمله‌ای لژاندر، تابع موج حالت پایه به شکل زیر بدست می‌آید.

$$\psi_{00}^{0}(r)=(\sinh^2(\alpha r))^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_3}}(1+\sinh^2(\alpha r))^{\frac{1}{2}-\sqrt{(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\frac{1}{4})}} \tag{۳۹-۳}$$

انرژی حالت پایه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sqrt{\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\frac{1}{4}}-\sqrt{\frac{1}{4}+\zeta_3}-\zeta_2-2(\frac{1}{4}+\zeta_3)+2\sqrt{(\frac{1}{4}+\zeta_3)(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\frac{1}{4})}=0 \tag{۴۰-۳}$$

تابع موج اختلالی عبارت است از:

$$\psi'(r)=N'G(r)\psi_{00}^{0}(r) \tag{۴۱-۳}$$

که در آن داریم:

$$G(r)=[\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}(\frac{V_1}{\cosh^2(\alpha r)}+\frac{V_2}{\sinh^2(\alpha r)})^2]\sum_{l=0}^{\infty}A_{l'}r^{l'} \tag{۴۲-۳}$$

با توجه به تقریب رابطه (۳-۳۵) می‌توانیم تابع بالا را به شکل زیر هم بنویسیم:

$$G(r)=[\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}(\frac{V_1}{1+\alpha^2r^2}+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})^2]\sum_{l'=0}^{\infty}A_l r^{l'} \tag{۴۳-۳}$$ با

درنظرگرفتن رابطه (۲-۹)، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned}&[-\frac{\hbar^2}{2\mu}(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2\alpha}{\sinh(\alpha r)}\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)\ \alpha^2}{\sinh^2(\alpha r)})+\frac{V_1}{\cosh^2(\alpha r)}+\frac{V_2}{\sinh^2(\alpha r)}-W^0]G(r)\\&=[w'-\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}(\frac{V_1}{\cosh^2(\alpha r)}+\frac{V_2}{\sinh^2(\alpha r)})^2]\end{aligned} \tag{۴۴-۳}$$

برای دو ناحیه تابع موج اختلالی را حل می‌کنیم.دو ناحیه‌ای که در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} 1.\ \alpha^2 r^2 >> 1 \\ 2.\ \alpha^2 r^2 << 1 \end{cases} \qquad (۴۵\text{-}۳)$$

ابتدا حالت اول را در نظر می‌گیریم و تابع موج اختلالی را برای این حالت حل می‌کنیم.برای حالت اول رابطه (۳-۴۴) به صورت زیر می‌شود.

$$\frac{d^2G(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dG(r)}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}G(r)-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{V_1}{\alpha^2 r^2}G(r)-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{V_2}{\alpha^2 r^2}G(r)+\frac{2\mu}{\hbar^2}W^0G(r) = -\frac{2\mu}{\hbar^2}w'+\frac{2\mu^2}{\tilde{m}\hbar^4}\left(\frac{V_1}{\alpha^2 r^2}+\frac{V_2}{\alpha^2 r^2}\right)^2 \qquad (۴۶\text{-}۳)$$

تابع G(r) و مشتقاتش در حالت اول فرم زیر را دارند:

$$G(r)=z'\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}\ r^{l'-4} \quad ,z'=\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2\alpha^4}(V_1+V_2)^2 \qquad (۴۷\text{-}۳)$$

$$\frac{dG(r)}{dr}=z'\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}(l'-4)\ r^{l'-5} \qquad (۴۸\text{-}۳)$$

$$\frac{d^2G(r)}{dr^2}=z'\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}(l'-4)(l'-5)\ r^{l'-6} \qquad (۴۹\text{-}۳)$$

در نتیجه رابطه (۳-۴۶) به فرم زیر خواهد شد.

$$z'\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}(l'-4)(l'-5)\ r^{l'-6}+2z'\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}(l'-4)\ r^{l'-6}-l(l+1)z'\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}\ r^{l'-6} -\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{V_1}{\alpha^2}z'\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}\ r^{l'-6}-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{V_2}{\alpha^2}z'\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}\ r^{l'-6}+\frac{2\mu}{\hbar^2}W^0z'\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}\ r^{l'-4} = -\frac{2\mu}{\hbar^2}w'+\frac{2\mu^2}{\tilde{m}\hbar^4}\left(\frac{V_1}{\alpha^2 r^2}+\frac{V_2}{\alpha^2 r^2}\right)^2 \qquad (۵۰\text{-}۳)$$

با در نظر گرفتن ضرایب r^{-4} خواهیم داشت:

$$A_0=\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2\alpha^4W^0z'}(V_1+V_2)^2 \qquad (۵۱\text{-}۳)$$

برای $l'=0,1$ با در نظر گرفتن ضرایب مرتبط واضح است که $A_1=0$. برای $l'=0,1,2$ با برابر قرار دادن ضرایب r^{-4} از طرفین خواهیم داشت: $A_2=0$. به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. ضریب بعدی نیز صفر می شود $A_3=0$. با برابر قرار دادن ضرایب r^0 از طرفین رابطه بالا خواهیم داشت:

$$A_4=\frac{-w'}{W^0 z'} \tag{۵۲-۳}$$

بنابراین برای حالت اول، تابع موج اختلالی به صورت زیر می‌شود:

$$\psi_1'(r)=N'\left[\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2\alpha^4 W^0 r^4}(V_1+V_2)^2-\frac{w'}{W^0}\right]\psi_{00}^0(r) \tag{۵۳-۳}$$

حال حالت دوم را در نظر می‌گیریم و تابع موج اختلالی را برای این حالت حل می‌کنیم. برای حالت دوم رابطه(۳-۴۴) به صورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2G'(r)}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dG'(r)}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}G'(r)-\frac{2\mu}{\hbar^2}V_1G'(r)-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{V_2}{\alpha^2r^2}G'(r)+\frac{2\mu}{\hbar^2}W^0G'(r)\\&=-\frac{2\mu}{\hbar^2}w'+\frac{2\mu^2}{\tilde{m}\hbar^4}(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})^2\end{aligned} \tag{۵۴-۳}$$

تابع G(r)و مشتقاتش در این حالت به صورت زیر می‌شود:

$$G'(r)=\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})^2\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}'r^{l'} \tag{۵۵-۳}$$

$$\frac{dG'(r)}{dr}=\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}\left[\frac{-4V_2}{\alpha^2}(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})\sum_{l'=0}^{\infty}A_{l'}'r^{l'-3}+(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})^2\sum_{l'=0}^{\infty}l'A_{l'}'r^{l'-1}\right] \tag{۵۶-۳}$$

$$\frac{d^2G'(r)}{dr^2}=\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}[\frac{-4V_2}{\alpha^2}(\frac{-2V_2}{\alpha^2})\sum_{l'=0}^{\infty}A'_{l'}r^{l'-6}+\frac{-4V_2}{\alpha^2}(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})\sum_{l'=0}^{\infty}(l'-3)A'_{l'}r^{l'-4}$$
$$+(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})(\frac{-4V_2}{\alpha^2})\sum_{l'=0}^{\infty}l'A'_{l'}r^{l'-4}+(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})^2\sum_{l'=0}^{\infty}l'(l'-1)A'_{l'}r^{l'-2}] \qquad (۵۷-۳)$$

با

اندک ساده‌سازی رابطه (۳-۵۴) به رابطه زیر منجر می‌شود.

$$\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}[\frac{-4V_2}{\alpha^2}(\frac{-2V_2}{\alpha^2})\sum_{l'=0}^{\infty}A'_{l'}r^{l'-6}+\frac{-4V_2}{\alpha^2}(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})\sum_{l'=0}^{\infty}(l'-3)A'_{l'}r^{l'-4}+(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})(\frac{-4V_2}{\alpha^2})\sum_{l'=0}^{\infty}l'A'_{l'}r^{l'-4}$$
$$+(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})^2\sum_{l'=0}^{\infty}l'(l'-1)A'_{l'}r^{l'-2}]+\frac{2\mu}{\tilde{m}\hbar^2}[\frac{-4V_2}{\alpha^2}(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})\sum_{l'=0}^{\infty}A'_{l'}r^{l'-4}+(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})^2\sum_{l'=0}^{\infty}l'A'_{l'}r^{l'-2}]$$
$$-l(l+1)\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})^2\sum_{l'=0}^{\infty}A'_{l'}r^{l'-2}-\frac{2\mu}{\hbar^2}V_1\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})^2\sum_{l'=0}^{\infty}A'_{l'}r^{l'}$$
$$-\frac{2\mu}{\hbar^2}\frac{V_2}{\alpha^2}\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})^2\sum_{l'=0}^{\infty}A'_{l'}r^{l'-2}+\frac{2\mu}{\hbar^2}W^0\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})^2\sum_{l'=0}^{\infty}A'_{l'}r^{l'}$$
$$=-\frac{2\mu}{\hbar^2}w'+\frac{2\mu^2}{\tilde{m}\hbar^4}(V_1+\frac{V_2}{\alpha^2r^2})^2$$

(۵۸-۳)

حال ضرایب $A'_{l'}$ را می‌یابیم. اولین ضریب به صورت زیر می‌شود:

$$A'_0=\frac{\mu V_2}{2V_1\hbar^2\alpha^2-3\mu V_1V_2+\mu W^0V_2} \qquad (۵۹-۳)$$

واضح است که $A'_1=0$ زیرا ضرایب آن درهر دو طرف رابطه (۳-۵۸) وجود ندارد.به این ترتیب خواهیم داشت:

$$A'_2=\frac{1}{(-\frac{3V_2}{\alpha^2}\frac{\mu V_1^2}{\tilde{m}\hbar^2}+W^0\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}\frac{2V_1V_2}{\alpha^2}+3\frac{V_1^2}{\tilde{m}})}[-w'+\frac{\mu V_1^2}{\tilde{m}\hbar^2}$$
$$-\frac{\mu^2V_2V_1^2W^0-\mu^2V_2V_1^3}{\tilde{m}\hbar^2(2V_1\hbar^2\alpha^2-3\mu V_1V_2+\mu W^0V_2)}] \qquad (۶۰-۳)$$

در نتیجه، برای حالت دوم تابع موج اختلالی به صورت زیر خواهد شد.

$$\psi_2'(r) = N_2'\{\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}[V_1 + \frac{V_2}{\alpha^2 r^2}]^2[\frac{\mu V_2}{2V_1\hbar^2\alpha^2 - 3\mu V_1 V_2 + \mu W^0 V_2}$$
$$+\frac{1}{(-\frac{3V_2}{\alpha^2}\frac{\mu V_1^2}{\tilde{m}\hbar^2} + W^0\frac{\mu}{\tilde{m}\hbar^2}\frac{2V_1V_2}{\alpha^2} + 3\frac{V_1^2}{\tilde{m}})}[-w' + \frac{\mu V_1^2}{\tilde{m}\hbar^2} \tag{۳-۶۱}$$
$$-\frac{\mu^2 V_2 V_1^2 W^0 - \mu^2 V_2 V_1^3}{\tilde{m}\hbar^2(2V_1\hbar^2\alpha^2 - 3\mu V_1 V_2 + \mu W^0 V_2)}]r^2 + ..]\}\psi^0(r).$$

N_2' ثابت بهنجارش تابع موج اختلالی است.

دو تابع موج کلی برای دو ناحیه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \psi_1^{tot}(r) &= N_1^{tot}(\psi^0(r) + \psi_1'(r)) \qquad for\ \alpha^2 r^2 >> 1 \\ \psi_2^{tot}(r) &= N_2^{tot}(\psi^0(r) + \psi_2'(r)) \qquad for\ \alpha^2 r^2 << 1 \end{aligned} \tag{۳-۶۲}$$

نتایجی که برای شعاع باری و پارامتر تحدب بدست آمد، سازگاری خوبی با دیگر مدل‌ها نداشت.

فصل چهارم

مطالعه نسبیتی تابع ایسگور- وایس

۴-۱- تابع ایسگور- وایس در حضور معادله کلاین-گردن با پتانسیل کرنل

معادله کلاین-گردن مورد توجه خیلی از مطالعات تئوری و پدیدار شناختی بوده‌است. این معادله با یک زمینه نسبیتی ما را برای مطالعه ذرات با اسپین صفر آماده می‌کند. بیشترین انتخاب‌های قابل قبول برای پتانسیل‌های در نظرگرفته شده شاید با تقارن کروی آن ها باشدکه کاربردهای گسترده‌ای در خیلی از زمینه‌های فیزیک شامل ذرات و هسته‌ای دارد. معادله کلاین-گردن یک معادله موج نسبیتی است. معادلات نسبیتی شامل دو جزئ هستند: عملگر تکانه خطی چاربرداری و نیز جرم بافی‌مانده اسکالر. بنابراین، بایستی دو نوع جفت شده پتانسیل را که شامل پتانسیل چاربرداری و نیز پتانسیل اسکالر فضا-زمان هستند، معرفی نماییم.در ادامه هدفمان بررسی نسبیتی مشخصات سیستم مزونی با استفاده از تابع ایسگور- وایس است. از آنجا که یکی از معادلات موج نسبیتی کلاین-گردن است، به بررسی و حل آن می پردازیم.

ابتدا معادله کلاین-گردن را در سه بعد می‌نویسیم که به شکل زیر است [۲۸-۲۷]:

$$-\frac{d^2R_{n,l}(r)}{dr^2}-\frac{2}{r}\frac{dR_{n\,l}(r)}{dr}+\left[\frac{l(l+1)}{r^2}+(m(r)+s(r))\;\;-(E_{n,l}-V(r))\;\;\right]^2 R_{n,l}(r)=0 \qquad (۱-۴)$$

پتانسیلی که در نظر می‌گیریم پتانسیل کرنل است.پتانسیل‌های اسکالر و برداری معادله کلاین-گردن را برابر می‌گیریم. جرم در معادله کلاین-گردن همان جرم کاهش‌یافته مزون است. خواهیم داشت:

$$S(r \quad = V \quad r \quad = \alpha r - \frac{\beta}{r} \qquad (۴-۲)$$
$$m(r) = m_0$$

با در نظر گرفتن مقادیر بالا برای معادله کلاین-گردن داریم:

$$-\frac{d^2 R_{nl}(r)}{dr^2} - \frac{2}{r}\frac{dR_{nl}(r)}{dr} + [\frac{l(l+1)}{r^2} + m_0{}^2 - E_{nl}^2 - 2(E_{nl} + m_0)\frac{\beta}{r} \qquad (۴-۳)$$
$$+2(E_{nl} + m_0)\alpha r]R_{nl}(r) = 0$$

سهم اختلال در اینجا به این صورت است:

$$H' = -2(E_{nl} + m_0)\alpha r \qquad (۴-۴)$$

با مقایسه معادله (۳-۱۳) و معادله (۴-۳) ضرایب به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$l'(l'+1) = l(l+1), \qquad c = 2(E_{nl} + m_0)\beta \qquad (۴-۵)$$
$$\varepsilon'_{nl} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}(m_0{}^2 - E_{nl}^2)$$

بخش اصلی تابع موج به شکل زیر خواهد بود:

$$R_{nl}^0(r) = r^{-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)}} e^{-\sqrt{m_0{}^2 - E_{nl}^2}\, r} L_n^{2\sqrt{\frac{1}{4}+l(l+1)}}(2\sqrt{m_0{}^2 - E_{nl}^2}\, r) \qquad (۴-۶)$$

حالت پایه $n = 0, l = 0$ را انتخاب می‌کنیم. در نهایت تابع موج بخش اصلی به صورت زیر است:

$$R_{00}^0(r) = N_0\, e^{-\sqrt{m_0{}^2 - E_{00}^2}\, r} \qquad (۴-۷)$$

برای انرژی این بخش با در نظر داشتن حالت پایه خواهیم داشت:

$$\sqrt{m_0{}^2 - E_{00}^2} - 2(E_{00} + m_0)\beta + \sqrt{(m_0{}^2 - E_{00}^2)} = 0 \quad (۸-۴)$$

از این رابطه مقدار انرژی حالت پایه بدست خواهد آمد.

$$E_{00} = \frac{-m_0\beta^2 \pm \sqrt{m \;\beta \;\; -(1+\beta \;)m \;\; (\beta \;\; -1)}}{(1+\beta^2)} \quad (۹-۴)$$

یادآوری می‌کنیم روابط هامیلتونی را به صورت زیردر نظر گرفته‌ایم:

$$\begin{aligned} H_0 &= -\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla^2 - \frac{\beta}{r}, \\ H' &= -2(m_0 + E)\alpha r. \end{aligned} \quad (۱۰-۴)$$

l'تکانه زاویه‌ای سیستم مورد نظر ماست. با در نظر گرفتن رابطه (۳-۲۰) تابع شامل اختلال به صورت زیر است.

$$G(\quad = [\qquad {}_0 \qquad \alpha]\sum_{l=0}^{\infty} {}_l \; {}^{l+1} \quad (۱۱-۴)$$

معادلات (۴-۱۱) و (۴-۱۰) را در معادله (۲-۹) قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\left[-2(m_0 + E_{0,0})\alpha\right]\sum_{l=0}^{\infty} l(l+1)A_l r^{l-1} - \left[4(m_0 + E_{0,0})\alpha\right]\sum_{l=0}^{\infty}(l+1)A_l r^{l-1} \\ &-\frac{2m_0}{\hbar^2}\beta\left[2(m_0 + E_{0,0})\alpha\right]\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l - \frac{2m_0}{\hbar^2}W^0\left[2(m_0 + E_{0,0})\alpha\right]\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^{l+1} \\ &= -\frac{2m_0}{\hbar^2}w' - \frac{4m_0}{\hbar^2}(m_0 + E_{0,0})\alpha r. \end{aligned} \quad (۱۲-۴)$$

با حل رابطه (۴-۱۲) و برابر قرار دادن ضرایب مربوطه خواهیم داشت:

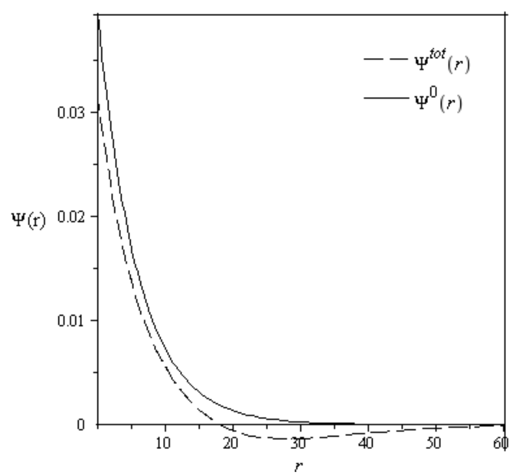
$$A_0 = 0, \quad (۱۳-۴)$$

$$A_1 = \frac{m_0 w'}{6(m_0 + E_{0,0})\alpha} \quad (۱۴-۴)$$

$$A_2 = \frac{m_0}{6}\left[1 - \frac{\beta m_0 w'}{6\alpha(m_0 + E_{0,0})}\right] \quad (۱۵-۴)$$

$$A_3 = -\frac{m_0^2}{60}\left[\frac{w' E_{0,0}}{(m_0 + E_{0,0})\alpha} + \beta\left(1 - \frac{\beta m_0 w'}{6\alpha(m_0 + E_{0,0})}\right)\right] \quad (۱۶-۴)$$

حال که ضرایب را یافتیم پس با استفاده از رابطه های (۳-۲۹) و (۴-۱۱) تابع موج اختلالی و نیز تابع موج کلی بدست آمده‌است.تابع موج کل را در شکل ۴-۱ نشان داده‌ایم.



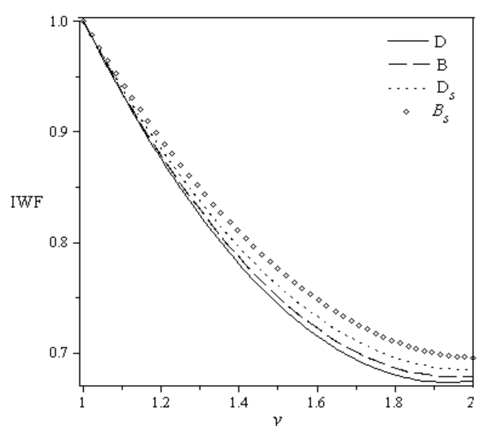
شکل ۴-۱- تابع موج نسبیتی برای مزون B در حالت نسبیتی

با استفاده از این تابع موج می توانیم مقادیر پارامتر تحدب و شعاع باری را محاسبه کنیم. پارامترهای تابع ایسگور- وایس در جدول ۴-۱ نشان داده شده‌اند.مقادیر بدست آمده در مقایسه با مدل‌های دیگر که در جدول ۱-۱ ارائه شد، قابل قبول است. علاوه بر این، نتایج بدست آمده ما با منبع [۶] سازگاری خوبی دارد. در ضمن r_0 حد بالا درانتگرال‌های مورد نظر است. این مقدار از طریق رابطه (۲-۹۲) بدست می‌آید.

جدول ۴-۱- مقادیر r_0، ρ^2 و C برای مزون های مختلف در حالت نسبیتی

مزون	r_0	ρ^2	C
D	۸,۱۹۰۲	۰,۶۹۸۶	۰,۳۷۳۸
B	۷,۱۰۹۵	۰,۶۷۵۴	۰,۳۵۴۲
D_s	۵,۹۷۴۱	۰,۶۴۱۲	۰,۳۲۶۱
B_s	۴,۸۷۲۹	۰,۵۹۱۴	۰,۲۸۷۰

برای مزون B نتیجه‌ای که از شیب ایسگور- وایس بدست آوردیم با مقدار گزارش شده ۰,۶۶۹۹ در منبع [۶] همخوانی دارد. برای این مزون مقدار پارامتر تحدب نیز با مقدار ۰,۳۴۵۱ در [۶] توافق خوبی دارد. شکل ۴-۲ رفتار تابع ایسگور- وایس را در حالت نسبیتی نشان می‌دهد.



شکل ۴-۲- تغییرات تابع ایسگور-وایس برای مزون های مختلف در حالت نسبیتی

۴-۲- تعیین مشخصات سیستم مزونی در حضور فرم عمومی معادله کلاین-گردن

در ادامه معادله کلاین-گردن را به شکل عمومی برای پتانسیل کرنل حل کرده‌ایم و پارامترهای تابع ایسگور- وایس را در این مورد بدست آورده‌ایم. تغییرات تابع ایسگور- وایس را برای این حالت رسم نموده‌ایم. هم‌چنین بحثی در مورد بازه‌های در نظر گرفته شده و همخوانی نتایج با سایر نتایج منتشرشده آورده‌ایم. در این کار، ما جرم چند مزون را تعیین کرده‌ایم که در ادامه ارائه شده‌است.

قسمت شعاعی تابع موجرا در معادله کلاین-گردن عمومی در نظر می‌گیریم.

$$\{-\frac{d^2}{dr^2}-\frac{D-1}{r}\frac{d}{dr}+\frac{l(l+D-2)}{r^2}+[M+S(r)]^2-[E_{nl}-V(r)]^2\}R_{nl}(r)=0 \quad (۱۷-۴)$$

با در نظر گرفتن تبدیل زیر

$$R_{nl}(r)=r^{-\frac{(D-1)}{2}}U_{nl}(r) \quad (۱۸-۴)$$

معادله کلاین-گردن بالا منجر به رابطه زیر خواهد شد.

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+E_{nl}^2+V^2(r)-2E_{n,l}V(r)-m_0{}^2-S^2(r)-2m_0S(r)-\frac{(D+2l-1)(D+2l-3)}{4r^2}\right]U_{n,l}(r)=0 \quad (۱۹-۴)$$

پتانسیل برداری و اسکالر را برابر پتانسیل کرنل در نظر می‌گیریم. هامیلتونی سیستم به صورت زیر است.

$$H_0=-\frac{\hbar^2}{2m_0}\nabla_D^2-\frac{\beta}{r} \quad , \nabla_D^2=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{D-1}{r}\frac{d}{dr} \quad (۲۰-۴)$$
$$H'=-2(m_0+E_{0,0})\alpha r$$

بخش اصلی تابع موج در حالت پایه به فرم زیر بدست خواهد آمد.

$$\overset{0}{R}_{0,0}(r,D)=N_0 r^{1-\frac{D}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{(D-1)(D-3)}{4}}}e^{-\sqrt{m_0^2-E_{0,0}^2}\,r} \qquad (۲۱\text{-}۴)$$

$$\frac{4(E_{0,0}+m_0)^2\beta^2}{m_0{}^2-E^2{}_{0,0}}=[1+\sqrt{1+(D-1)(D-3)}]^2 \qquad (۲۲\text{-}۴)$$

از رابطه (۴-۲۲) انرژی حالت پایه بدست می‌آید. مقادیر انرژی اصلی و انرژی اختلالی در رابطه (۲-۹) به شکل عمومی زیر معرفی می‌شوند.

$$w^0=E_{00}\quad,\quad w'=\int_0^\infty DC_D r^{D-1}H'\,|\overset{0}{R}(r)|^2\,dr \qquad (۲۳\text{-}۴)$$

برای بخش اختلالی، با استفاده از رابطه‌های (۳-۲۰)، (۲-۹) و (۴-۲۰) خواهیم داشت.

$$\sum_{l=0}^\infty l(l+1)A_l r^{l-1}+(D-1)\sum_{l=0}^\infty (l+1)A_l r^{l-1}+2m_0\beta\sum_{l=0}^\infty A_l r^l+2m_0E\sum_{l=0}^\infty A_l r^{l+1}=\frac{m_0w'}{(m_0+E_{0,0})\alpha}+2m_0r \qquad (۲۴\text{-}۴)$$

با حل رابطه (۴-۲۴) برای مقادیر مختلف سری ضرایب تابع موج اختلالی بدست می‌آیند.

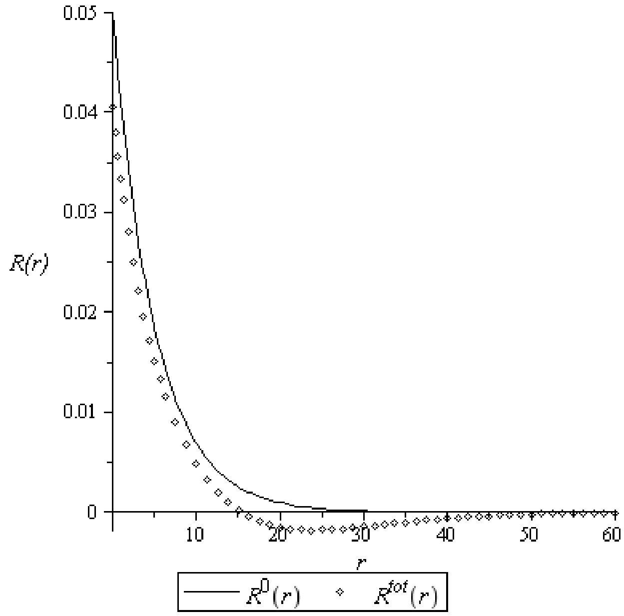
$$A_0=0 \qquad (۲۵\text{-}۴)$$

$$A_1(D)=\frac{m_0w'}{2D(m_0+E_{0,0})\alpha} \qquad (۲۶\text{-}۴)$$

$$A_2(D)=\frac{1}{[3+3D]}[2m_0-\frac{m_0{}^2\beta w'}{D(m_0+E_{0,0})\alpha}] \qquad (۲۷\text{-}۴)$$

$$A_3(D)=\frac{-1}{4[D+2]}[\frac{m_0^2w'E}{D(m_0+E_{0,0})\alpha}+\frac{2m_0^2\beta}{[3+3D]}(2-\frac{m_0\beta w'}{D(m_0+E_{0,0})\alpha})] \qquad (۲۸\text{-}۴)$$

شکل ۴-۳ تابع موج را برای مزون D_s در سه بعد نشان می‌دهد.



شکل ۴-۳- تغییرات تابع موج در حالت پایه برای مزونD_s در سه بعد

با بدست آمدن تابع موج کلی با استفاده از رابطه (۳-۲۹)، می‌توانیم تابع ایسگور- وایس و پارامترهای آن را بیابیم. در حالت کلی فرم این پارامترها به شکل زیرند [۷].

$$\rho^2 = DC_D m_0^2 \int_0^\infty r^{D+1} |R(r,D)|^2 dr \tag{۴-۲۹}$$

$$C = \frac{1}{6} DC_D m_0^4 \int_0^\infty r^{D+3} |R(r,D)|^2 \, dr \tag{۴-۳۰}$$

C_D به صورت زیر معرفی می‌شود.

$$C_D = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma(\frac{D}{2}+1)} \qquad (۴\text{-}۳۱)$$

برای بدست آوردن مقدار حد بالای انتگرال از این شرط استفاده می‌کنیم که تابع موج بخش اختلالی از تابع موج کل کمتر است. در نتیجه مقدار حد بالای انتگرال از طریق معادله (۴-۳۲) برحسب پارامترهای D, w', Eبدست می‌آید.

$$\frac{\mu w'}{2D(m_0+E_{0,0})\alpha} r_0^{\,2} + \frac{1}{[3+3D]}[2\mu - \frac{\mu^2 \beta w'}{D(m_0+E_{0,0})\alpha}] r_0^{\,3}$$
$$-\frac{1}{4[D+2]}[\frac{\mu^2 w' E}{D(m_0+E_{0,0})\alpha} + \frac{2\mu^2 \beta}{[3+3D]}(2 - \frac{\mu \beta w'}{D(m_0+E_{0,0})\alpha})] r_0^{\,4} = 1 \qquad (۴\text{-}۳۲)$$

پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای چند مزون مختلف در جداول ۴-۲ و ۴-۳ ارائه شده‌است.

جدول ۴-۲- مقادیر ρ^2، Cو r_0 با در نظر گرفتن سه ترم در تابع موج

مزون	r_0	ρ^2	C
B	۷,۱۰۷۹	۰,۶۷۴۶	۰,۳۵۳۶
D	۸,۱۸۸۵	۰,۶۹۷۹	۰,۳۷۳۲
B_s	۴,۸۷۱۵	۰,۵۹۰۶	۰,۲۸۶۵
D_s	۵,۹۷۲۶	۰,۶۴۰۴	۰,۳۲۵۶
B_c	۲,۳۴۸۸	۱,۲۴۹۰	۰,۹۶۱۱

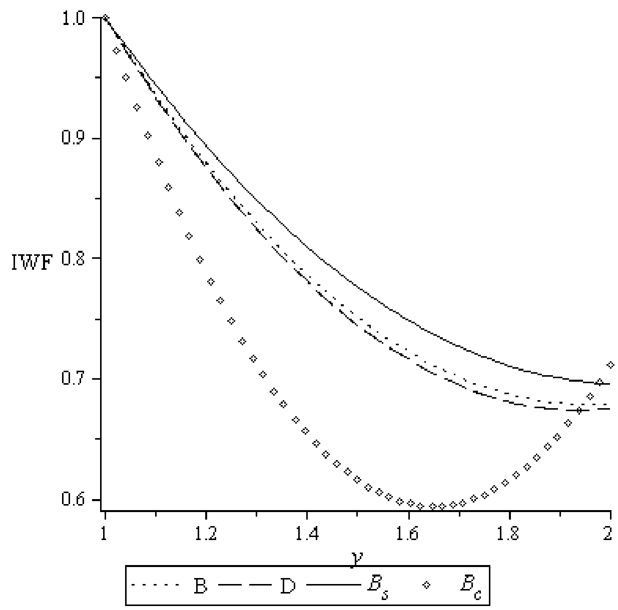
در جدول ۴-۲ مقدارپارامتر شیب برای مزون Bبا منبع [۶] که $\rho^2 =$ ۰,۶۶۹۹ گزارش شده‌است، همخوانی دارد. مقدار تحدب برای این مزون نیز با مقدار۰,۳۴۵۱ از منبع [۶] همخوانی خوبی دارد.در مورد مزون D مقادیر محاسبه شده ما با منبع [۶] سازگار است. برای مزون B_s، مقداری که ما بدست آوردیم ۰,۲۸۶۵

$C =$ مطابقت خوبی با $C = ۰٫۲۸۰۵$ [۶]دارد.در جدول ۴-۳ پارامتر شیب و تحدب تابع ایسگور-وایس برای مزون B با مقادیر اندازه‌گیری شده در منبع [۲۵] سازگارند. برای مزون D نیز، مقادیر پیش‌بینی شده و نتایج منبع [۲۵] مطابقند. برای مزون B_s مقادیر ما عبارت است از: $\rho^2 = ۳٫۵۹۸۹$ و $C = ۵٫۵۷۵۷$ که با نتایج منبع [۲۵] یعنی۲٫۶۵۲ برای پارامتر شیب و $C = ۶٫۹۰۲$ همخوانی دارند. برای مزون D_s مقدار $\rho^2 = ۳٫۸۷۸۲$ بدست آمده در [۶] با نتیجه ما توافق دارد.

جدول ۴-۳- مقادیر ρ^2، C و r_0 با در نظر گرفتن دو ترم در تابع موج

مزون	r_0	ρ^2	C
B	۱۳٫۴۹۶۵	۳٫۶۶۳۵	۵٫۷۶۷۴
D	۱۵٫۴۳۵۵	۳٫۶۸۲۱	۵٫۸۲۳۷
B_s	۹٫۵۲۹۴	۳٫۵۹۸۹	۵٫۵۷۵۷
D_s	۱۱٫۴۷۱۱	۳٫۶۳۶۶	۵٫۶۸۷۰
B_c	۳٫۲۱۴۵	۳٫۰۴۲۱	۴٫۰۹۹۷

در شکل ۴-۴ رفتار نسبیتی تابع ایسگور- وایس را برای دو مزون B و D رسم کرده‌ایم که از شرط بهنجارش تابع ایسگور- وایس در y=1 پیروی می‌کند.



شکل۴-۴- تغییرات تابع ایسگور- وایس برای مزون های Bو Dدر حالت نسبیتی

با توجه به تابع موج مزون تعیین شده، می توان جرم مزون ها را با استفاده از رابطه (۲-۹۰) بدست آورد. این رابطه شامل جرم کوارک‌های سازنده مزون و نیز متوسط هامیلتونی است. برای هامیلتونی متوسط می توان نوشت:

$$\langle H_0 \rangle = E_{0,0}\,,\ \langle H' \rangle = \int_0^\infty DC_D r^{D-1} H' \left| R^{tot}(r,D) \right|^2 dr \qquad (۳۳\text{-}۴)$$

برای حدود بالای انتگرال‌ها در یافتن متوسط هامیلتونین و نیز ثابت بهنجارش‌ها از مقدار r_0 که در جدول ۴-۲ نشان دادیم، استفاده می‌کنیم. مقادیری که برای جرم مزون‌ها یافتیم به شرح زیر است. برای مزون Dمقدار M_p= ۱,۲۴۷۰ GeV بدست آمد که قابل مقایسه با مقدار تجربی۱,۸۶۹GeV[۱۹]برای این مزون است. برای مزون D_s مقدار M_p = ۱,۴۸۸۹ GeV بدست آمد که با مقدار تجربی [۱۹] ۱,۹۶۸GeV برای این مزون همخوانی دارد. در مورد مزون سنگین-سنگین B_c نتایج بیشتر با مقدار

تجربی گزارش شده همخوانی دارد. برای این مزون مقداری که ما بدست آوردیم۶,۴۳۰۴GeVکه با مقدار تجربی [۱۹] ۶,۲۷۷ برای مزون B_c همخوانی دارد.

۴-۳- تعیین مشخصات سیستم مزونی از طریق حلمعادله دی-کی-پی با پتانسیل کرنل

معادله دافین-کمر-پتیو (Duffin-Kemmer-Petiau) در مقایسه با سایر معادلات موج نسبیتی در مکانیک کوانتومی همانند معادلات دیراک و کلاین-گردن کمتر شناخته شده‌است. این معادله، دو نمایش دارد و می تواند با هر دو اسپین صفر و نیز بوزون های اسپین یک مطالعه شود. به عنوان یک نتیجه، این یک چارچوب جذاب است و یک پیشنهاد چالش برانگیز برای معادلات پروکا و کلاین-گردن می‌باشد. مطابق شناخت ما از معادله دی-کی-پی، هم ارزی معادله دی-کی-پی و همتایانش دقیقا ثابت نشده است. معادله دی-کی-پی برعکس معادله کلاین-گردن، به طور وسیعی در نوشته ها بحث نشده‌است. با این حال، معادله با چارچوب برهمکنش های مدل پتانسیلی شامل خطی، هارمونیک، کولمبی، هولسن و غیره حل شده‌است.

فرم‌های اسپین صفر و اسپین یک معادله به ترتیب در نمایش های ۵ بعدی و ۱۰ بعدی هستند. معادله دی کی پی که کاربردهای آن از درون اتمی تا میدان‌های بزرگ فیزیک می‌باشد به خاطر مشابهتش با معادله کلاین-گردن تحت یک پتانسیل برداری می‌تواند با استفاده از تکنیک‌های مکانیک کوانتومی بررسی شود. اگر بخواهیم معادله را با پتانسیل اسکالر بررسی کنیم بعدا با یک معادله دیفرانسیلی مواجه می‌شویم که به راحتی قابل حل نیست. در ضمن هم‌ارزی معادله دی کی پی اسپین صفر با معادله کلاین گردن ممکن است شکسته شود. این در فرایندهای هادرونی در جایی که تقارن شکسته می‌شود اتفاق می-افتد.

هامیلتونی دی- کی- پی برای برهم‌کنش‌های اسکالر و برداری به فرم زیر است [۳۱-۲۹].

$$\left(\beta.\vec{p}c+mc^2+U_s+\beta^0U_V^0\right)\psi(\vec{r})=\beta^0E\psi(\vec{r}) \qquad (۴-۳۴)$$

که در آن داریم:

$$\psi(\vec{r})=\begin{pmatrix}\psi_{upper}\\ i\psi_{lower}\end{pmatrix}, \qquad (۴-۳۵)$$

مولفه های بالا و پایین این تابع به صورت ماتریس‌های زیر معرفی می‌شوند:

$$\psi_{upper}\equiv\begin{pmatrix}\phi\\ \varphi\end{pmatrix}\ \ ,\ \ \psi_{lower}\equiv\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\end{pmatrix} \qquad (۴-۳۶)$$

$$\beta^0=\begin{pmatrix}\theta & \tilde{0}\\ \bar{0}_T & 0\end{pmatrix},\ \beta^i=\begin{pmatrix}\tilde{0} & \rho^i\\ -\rho_T^i & 0\end{pmatrix} \qquad (۴-۳۷)$$

در رابطه (۴-۳۷) پارامترها به شکل ماتریس‌های صفر زیر معرفی می‌شوند:

$$\theta=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \rho^1=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ \rho^2=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\rho^2=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad (۴-۳۸)$$

در معادله (۴-۳۴)، U_s و U_V^0 به ترتیب پتانسیل اسکالر و پتانسیل برداری هستند. هامیلتونی معرفی شده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(mc^2+U_s)\phi=(E-U_V^0)\varphi+\hbar c\vec{\nabla}.\vec{A} \qquad (۴-۳۹)$$

$$\vec{\nabla}\phi=(mc^2+U_s)\vec{A}\,,\,(mc^2+U_s)\varphi=(E-U_V^0)\phi \qquad (۴-۴۰)$$

که در آن داریم: $\vec{A}=(A_1\ ,A_2\ ,A_3)$

در معادله (۴-۳۴)، ψ ویژه تابع همزمان J^2 و J_3 است که در روابط زیر مشخص شده‌اند.

$$J^2\begin{pmatrix}\psi_{upper}\\ \psi_{lower}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L^2\psi_{upper}\\ (L+S)^2\psi_{lower}\end{pmatrix}=J(J+1)\begin{pmatrix}\psi_{upper}\\ \psi_{lower}\end{pmatrix} \qquad (۴۱-۴)$$

$$J_3\begin{pmatrix}\psi_{upper}\\ \psi_{lower}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_3\psi_{upper}\\ (L_3+s_3)\psi_{lower}\end{pmatrix}=M\begin{pmatrix}\psi_{upper}\\ \psi_{lower}\end{pmatrix} \qquad (۴۲-۴)$$

راه حل عمومی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود که در آن $Y_{JL1}^{M}(\Omega)$ هارمونیک‌های کروی بهنجار و f_{nJ} ، g_{nJ} و h_{nJL} توابع موج شعاعی‌اند.

$$\psi_{JM}(r)=\begin{pmatrix}f_{nJ}(r)Y_{JM}(\Omega)\\ g_{nJ}(r)Y_{JM}(\Omega)\\ i\sum_L h_{nJL}(r)Y_{JL1}^{M}(\Omega)\end{pmatrix} \qquad (۴۳-۴)$$

ترکیب روابط در نظر گرفته شده به رابطه زیر منجر می‌شود:

$$\begin{aligned}&\frac{d^2F_{n,J}(r)}{dr^2}[1+\frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2}]-\frac{dF_{n,J}(r)}{dr}[\frac{U_s'}{(m+U_s)}(1+\frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2})]\\ &+F_{n,J}(r)[-\frac{J(J+1)}{r^2}(1+\frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2})+\frac{U_s'}{(m+U_s)}(\frac{J+1}{r}-\frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2}\frac{J}{r})\\ &-\frac{1}{\alpha_J^2}((m+U_s)^2-(E_{n,J}-U_V^0)^2]=0\end{aligned} \qquad (۴۴-۴)$$

که در آن داریم: $\alpha_J=\sqrt{(J+1)/(2J+1)}$ و $\zeta_J=\sqrt{J/(2J+1)}$

هنگامی که پتانسیل اسکالر صفر است، به فرم آشنایی از معادلاتمی‌رسیم. خواهیم داشت [۳۱-۲۹]:

$$[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{J(J+1)}{r^2}+(E_{n,J}-U_V{}^0)^2-m^2]F_{n,J}(r)=0 \qquad (۴۵-۴)$$

mرا جرم کاهش یافته مزونی در نظر می‌گیریم. پتانسیل برداری را همان پتانسیل کرنل در نظر می گیریم که به فرم زیر است:

$$U_V{}^0 = \alpha r - \frac{\beta}{r} \tag{۴۶-۴}$$

سهم اختلال را به شکل زیر می‌گیریم:

$$H' = \alpha^2 r^2 - 2E_{n,J}\alpha r \tag{۴۷-۴}$$

برای قسمت اصلی تابع موج رابطه (۴-۴۵) به فرم استاندارد رابطه NU در می‌آید.

$$[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + E_{n,J}^2 + \frac{\beta^2}{r^2} + \frac{2E_{n,J}\beta}{r} - 2\alpha\beta - m^2]\overset{0}{F}_{n,J}(r) = 0 \tag{۴۸-۴}$$

بنابراین تابع موج اصلی برای حالت پایه به صورت زیر می‌شود:

$$\overset{0}{F}_{0,0}(r) = r^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-\beta^2}} e^{-\sqrt{(2\alpha\beta - E_{0,0}^2 + m^2)}\, r} \tag{۴۹-۴}$$

انرژی حالت پایه به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$E_{0,0} = \frac{\sqrt{[2\alpha\beta + m^2]}[1 + 2\sqrt{[\frac{1}{4} - \beta^2]}}{\sqrt{4\beta^2 + [1 + 2\sqrt{[\frac{1}{4} - \beta^2]}]^2}}. \tag{۵۰-۴}$$

تابع موج بخش اختلال به صورت زیر است:

$$F'(r) = N'\left(\alpha^2(A_1 r^3 + A_2 r^4 + A_3 r^5 + A_4 r^6) - 2E_{0,0}\alpha(A_1 r^2 + A_2 r^3 + A_3 r^4 + A_4 r^5)\right)\overset{0}{F}_{0,0}(r) \tag{۵۱-۴}$$

که در آن ضرایب به شکل زیرند:

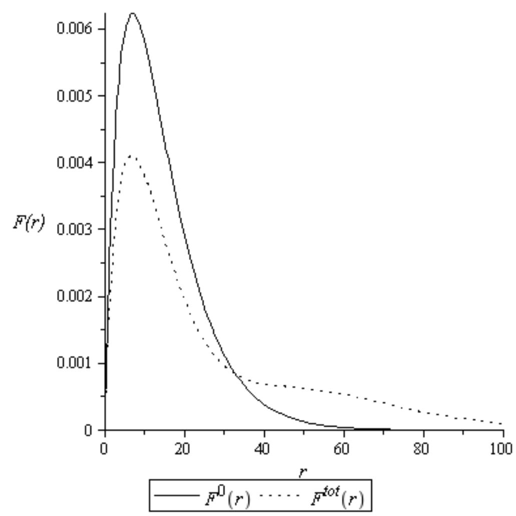
$$A_1 = \frac{mw'}{E_{0,0}\alpha\hbar^2}\frac{1}{[6-l'(l'+1)]} \qquad (۵۲-۴)$$

$$[12\alpha - l'(l'+1)\alpha - \frac{4m\beta}{\hbar^2}E_{0,0}]A_1 + [2l'(l'+1)E_{0,0} - 24E_{0,0}]A_2 = -\frac{4m}{\hbar^2}E_{0,0} \qquad (۵۳-۴)$$

$$\begin{aligned}&[\frac{2m\beta}{\hbar^2}\alpha - \frac{4m}{\hbar^2}E_{0,0}^2]A_1 + [20\alpha - l'(l'+1)\alpha - \frac{4m\beta}{\hbar^2}E_{0,0}]A_2 \\ &+[2l'(l'+1)E_{0,0} - 40E_{0,0}]A_3 = \frac{2m}{\hbar^2}\alpha\end{aligned} \qquad (۵۴-۴)$$

$$\begin{aligned}&\frac{2m}{\hbar^2}E_{0,0}\alpha A_1 + [\frac{2m\beta}{\hbar^2}\alpha - \frac{4m}{\hbar^2}E_{0,0}^2]A_2 + [30\alpha - l'(l'+1)\alpha - \frac{4m\beta}{\hbar^2}E_{0,0}]A_3 \\ &+[2l'(l'+1)E_{0,0} - 60E_{0,0}]A_4 = 0\end{aligned} \qquad (۵۵-۴)$$

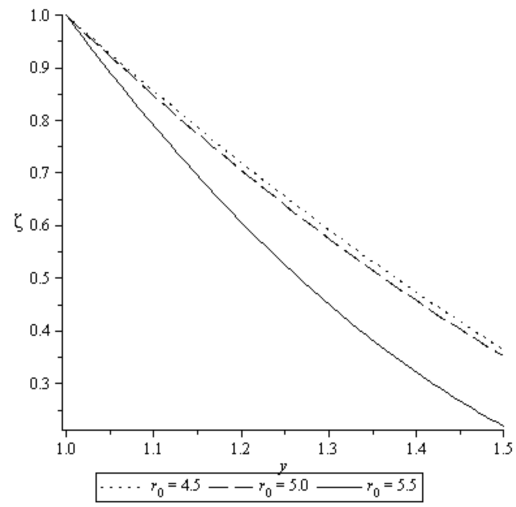
شکل ۴-۵ تابع موج حالت پایه را برای مزون Dنشان می‌دهد.



شکل۴-۵- تغییرات تابع موج حالت پایه برای مزونD

با یافتن تابع موج، سراغ تابع ایسگور- وایس می‌رویم. مقادیر عددی پارامترهای شیب و تحدب تابع ایسگور-وایس برای چند مزون با اسپین صفر آورده شده‌است. (با توجه به اینکه ما از معادله دی-کی-پی با اسپین صفر استفاده کردیم). مقدار پارامتر های ایسگور-وایس بدست آمده با نتایج منتشرشده دیگر

مطابقت دارد. مقادیر منبع [۶] برای مقایسه در جداول آورده شده‌است. همچنین تغییرات تابع ایسگور-وایس در شکل ۴-۶ نشان داده شده‌است.



شکل ۴-۶- تابع ایسگور-وایس تحت معادله دی کی پی برای مزون B_s

جداول ۴-۴ تا ۴-۷ نتایج عددی ما در بررسی نسبیتی تابع ایسگور- وایس هستند. در جدول۴-۴ در بازه ۳,۵ مقدار پیش بینی شده ما برای پارامترشیب ایسگور- وایس با مدل‌هایی که در جدول ۱-۱ آورده شد،(مقدار گزارش شده ۰,۸۳) همخوانی دارد. در بازه ۴,۵ نتایج ما با منبع [۶] برای پارامتر تحدب در توافق خوبی هستند.

جدول ۴-۴- پارامترهای تابع ایسگور- وایس تحت معادله دی کی پی برای مزون B

r_0	ρ^2 $(ours)$	ρ^2 [۶]	C $(ours)$	C [۶]
۲,۰	۰,۲۸۴۳	–	۰,۰۱۴۵	–
۲,۵	۰,۴۳۵۸	–	۰,۰۳۴۴	–
۳,۰	۰,۶۰۴۸	–	۰,۰۶۷۱	–
۳,۵	۰,۷۲۸۹	–	۰,۱۰۰۷	–
۴,۰	۰,۵۷۵۲	۰,۶۶۹۹	۰,۰۶۹۸	۰,۰۹۷۹
۴,۵	۰,۷۱۱۱	۰,۷۰۳۰	۰,۱۳۱۷	۰,۱۱۱۸
۵,۰	۲,۱۸۶۳	۱,۱۷۵۸	۰,۸۳۴۶	۰,۳۴۵۱
۵,۵	۲,۶۸۹۳	۲,۰۵۲۳	۱,۲۲۶۶	۰,۸۷۲۲
۶,۰	۳,۰۳۸۴	۲,۷۸۵۴	۱,۵۹۰۶	۱,۴۴۴۱

در جدول ۴-۵ مقدار پارامتر شیب تعیین شده ۱,۷۴۶۹ می‌باشد که همخوانی بسیار خوبی با مقدار ۱,۶۷ از مدل‌های جدول ۱-۱دارد. در بازه ۶,۵ نتایج ما و منبع [۶] برای پارامتر تحدب تابع ایسگور- وایس به ترتیب عبارتند از۱,۲۱۱۶ و ۱,۱۲۴۷. نتایجی که ما اندازه گرفته‌ایم رضایت بخش هستند.

جدول ۴-۵- پارامترهای تابع ایسگور- وایس تحت معادله دی کی پی برای مزون D

r_0	ρ^2 (ours)	ρ^2 [۶]	C (ours)	C [۶]
۲,۰	۰,۲۱۹۲	–	۰,۰۰۸۶	–
۲,۵	۰,۳۳۵۴	–	۰,۰۲۰۴	–
۳,۰	۰,۴۶۰۸	–	۰,۰۳۹۰	–
۳,۵	۰,۴۸۳۹	–	۰,۰۴۵۴	–
۴,۰	۰,۴۰۵۴	–	۰,۰۳۷۷	–
۴,۵	۱,۱۴۰۹	–	۰,۲۵۶۴	–
۵,۰	۱,۷۴۶۹	–	۰,۵۱۵۶	–
۵,۵	۱,۹۹۸۲	۱,۲۲۴۹	۰,۶۸۴۳	۰,۳۵۷۱
۶,۰	۲,۲۹۱۷	۱,۹۰۹۹	۰,۹۱۰۸	۰,۷۳۴۲
۶,۵	۲,۶۳۴۱	۲,۴۶۳	۱,۲۱۱۶	۱,۱۲۴۷
۷,۰	۳,۰۱۴۲	–	۱,۵۹۳۹	–

در جدول ۴-۶ مقداری که برای پارامتر تحدب مزونD_sبدست آورده‌ایم:۲,۳۲۸۶ با مقدار ۲,۶۸۷۵ از [۶] همخوانی دارد. در بازه ۵,۵ مقادیر ما برای شیب با منبع [۶] مطابقت دارند. همچنین منبع [۲۵] مقدار3.067 را برای پارامتر شیب این مزون گزارش داده‌است که در توافق با نتیجه ما در بازه ۵,۵ می باشد.

جدول ۴-۶- پارامترهای تابع ایسگور- وایس تحت معادله دی کی پی برای مزون D_s

r_0	ρ^2 $(ours)$	ρ^2 [۶]	C $(ours)$	C [۶]
۲,۰	۰,۳۸۸۵	–	۰,۰۲۷۲	–
۲,۵	۰,۵۹۶۰	–	۰,۰۶۴۴	–
۳,۰	۰,۸۳۲۶	–	۰,۱۲۷۰	–
۳,۵	۱,۰۵۸۰	–	۰,۲۰۹۲	–
۴,۰	۱,۰۰۱۸	–	۰,۱۹۵۹	–
۴,۵	۰,۹۳۱۹	–	۰,۱۹۸۹	–
۵,۰	۱,۵۹۱۱	۲,۱۰۵۴	۰,۶۴۰۲	۰,۹۶۶۵
۵,۵	۳,۶۶۹۲	۳,۱۰۵۹	۲,۳۲۸۶	۱,۸۱۷۶
۶,۰	۴,۳۶۵۱	۳,۸۷۸۲	۳,۲۳۶۰	۲,۶۸۷۵

مقدار پارامتر شیبی که برای مزون B_s در منبع [۲۵] ارائه شده‌است 2.652 می‌باشد. این گزرش با نتیجه ما در جدول ۴-۷ یعنی مقدار۲,۲۳۴۴ همخوانی خوبی دارد. همچنین مقادیر بدست آمده ما در این جدول با جدول ۱-۱ که نتایج مدل‌های مختلف را نشان داده‌است، سازگاری دارند.

جدول ۴-۷- پارامترهای تابع ایسگور- وایس تحت معادله دی کی پی برای مزون B_s

r_0	ρ^2 (ours)	ρ^2 [۶]	C (ours)	C [۶]
۴,۵	۱,۴۹۰۱	۲,۲۳۱۲	۰,۴۳۶۳	۱,۱۴۲۳
۵,۰	۱,۵۹۳۸	۳,۶۴۷۱	۰,۵۹۴۶	۲,۵۲۸۲
۵,۵	۲,۲۳۴۴	–	۱,۳۴۷۶	–

۴-۴- تعیین پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای مزون‌های اسپین یک

معادله دی کی پی که به سال ۱۹۳۹ بازمی گردد، ذرات اسپین صفر و اسپین یک را (که متناوبا بوزون های اسکالر و برداری می گویند) توصیف می‌کند. راه حل‌های این معادله اهمیت زیادی در فیزیک نظری داردگرچه بیشتر مقالات موجود براساس فرم معادله دی کی پی اسپین صفر است. این امر به دلیل ریاضیات مشابه معادله دی کی پی تحت ترم برداری با معادله کلاین-گردن مشهور است. معادله دی کی پی تحت برهم‌کنش اسکالر ساختار پیچیده‌تری دارد و به صورت گسترده بحث نشده‌است. بنابراین بایستی معادله اسپین یک دی کی پی را به خاطر نقش قابل توجهی که بوزون‌های برداری در پدیده‌های فیزیکی بازی می‌کنند، حل کنیم.

فرم معادله دی کی پی برای سیستم مزونی اسپین یک، تحت برهم‌کنش هولسن به صورت زیر است [۳۲]:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dr}^2}+\frac{2}{\mathrm{r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}+E_{n,0}^2-E_{n,0}(C\delta\frac{e^{-\delta r}}{1-qe^{-\delta r}})-m^2\right)\vec{F}(\vec{r})=0 \qquad (۵۶-۴)$$

تابع F(r) بدین گونه است:

$$\vec{F}(\vec{r})=r^{-1}\vec{U},\begin{pmatrix}\vec{F}_{n0}^{(1)}\\ \vec{F}_{n0}^{(2)}\\ \vec{F}_{n0}^{(3)}\end{pmatrix}=r^{-1}\begin{pmatrix}\vec{U}_{n0}^{(1)}\\ \vec{U}_{n0}^{(2)}\\ \vec{U}_{n0}^{(3)}\end{pmatrix} \qquad (۵۷-۴)$$

که در آن داریم:

$$\vec{U}_{n0}^{(1)}(\vec{r})=\vec{U}_{n0}^{(2)}(\vec{r})=\vec{U}_{n0}^{(3)}(\vec{r})=e^{-r\sqrt{m^2-E_{n,0}^2}}(1-qe^{-\delta r})P_n^{(2\sqrt{\frac{m^2-E_{n,0}^2}{\delta^2}},1)}(1-2qe^{-\delta r}) \qquad (۵۸-۴)$$

انرژی از طریق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$q(n+1)^2+\frac{q}{\delta}(2n+3)\sqrt{m^2-E_{n,0}^2}+\frac{CE_{n,0}}{\delta}=0 \qquad (۵۹-۴)$$

تابع موج سیستم از ده مولفه به صورت زیر تشکیل شده‌است:

$$\begin{gathered}\varphi_{n,l}^{(1)}(\vec{r})=i\varphi,\quad \vec{F}(\vec{r})=\left(\varphi_{n,l}^{(2)}(\vec{r}),\varphi_{n,l}^{(3)}(\vec{r}),\varphi_{n,l}^{(4)}(\vec{r})\right),\quad \vec{G}(\vec{r})=\left(\varphi_{n,l}^{(5)}(\vec{r}),\varphi_{n,l}^{(6)}(\vec{r}),\varphi_{n,l}^{(7)}(\vec{r})\right)\\ \vec{H}(\vec{r})=\left(\varphi_{n,l}^{(8)}(\vec{r}),\varphi_{n,l}^{(9)}(\vec{r}),\varphi_{n,l}^{(10)}(\vec{r})\right)\end{gathered} \qquad (۶۰-۴)$$

روابط زیر را داریم [۳۲]:

$$i\vec{\nabla}\times\vec{F}=m\vec{H}\ , \qquad (۶۱-۴)$$

$$\vec{\nabla}.\vec{G}=m\varphi\ , \qquad (۶۲-۴)$$

$$E_{n,l}\vec{G}+i\vec{\nabla}\times\vec{H}=m\vec{F}\ , \qquad (۶۳-۴)$$

$$(E_{n,l}-V(r))\vec{F}+\vec{\nabla}\varphi=m\vec{G}. \qquad (۶۴-۴)$$

با استفاده از معادلات (۴-۶۰) تا (۴-۶۴) خواهیم داشت:

$$H_{n,0}^{(1)}=H_{n,0}^{(2)}=H_{n,0}^{(3)}=0\,\vec{G}_{n,l}^{(1)}(r)=\vec{G}_{n,l}^{(2)}(r)=\vec{G}_{n,l}^{(3)}(r)=\frac{m\vec{F}}{E_{n,0}} \quad (۶۵\text{-}۴)$$

$$\text{با}\ \varphi(r)=\frac{1}{E_{n,0}}\frac{dF}{dr}+\frac{2}{r}\frac{F}{E_{n,0}} \quad (۶۶\text{-}۴)$$

یافتن تابع موج ده مولفه‌ای پارامترهای تابع ایسگور- وایس را برای چند مزون اسپین یک محاسبه می کنیم. جدول‌های ۴-۸ تا ۴-۱۱ این نتایج را نشان می‌دهند.

جدول ۴-۸- پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای مزون Y

R_0	ρ^2	C
1.0	2.5388	1.6676
1.5	5.5638	7.9639
2.0	9.1175	22.0908
2.5	12.7504	45.4405
3.0	16.1186	77.0931

جدول ۴-۹- پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای مزون J/ψ

R_0	ρ^2	C
1.0	0.2019	0.0123
1.5	0.4890	0.0690
2.0	0.9219	0.2347
2.5	1.4942	0.5970
3.0	2.1905	1.2577

جدول ۴-۱۰- پارامترهای تابع ایسگور –وایس برای مزون B^*

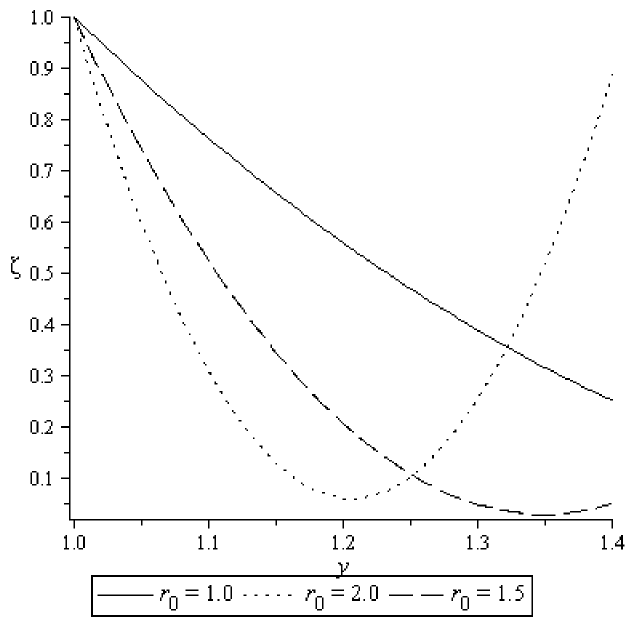
R_0	ρ^2	C
1.0	0.0314	0.0003
1.5	0.0710	0.0015
2.0	0.1286	0.0051
2.5	0.2062	0.0129
3.0	0.30574	0.0279

جدول ۴-۱۱- پارامترهای تابع ایسگور- وایس برای مزون D^*

R_0	ρ^2	C
1.0	0.0242	0.0001
1.5	0.0544	0.0009
2.0	0.0978	0.0029

2.5	0.1557	0.0074
3.0	0.2297	0.0160

برای مزون برداری Y رفتار تابع ایسگور- وایس را در شکل ۴-۷ نشان داده‌ایم. این شکل با شرط بهنجارش تابع ایسگور- وایس که قبلا توضیح داده شد سازگار است.



شکل ۴-۷- تابع ایسگور- وایس برای مزون Y

نتیجه گیری

در این پایان نامه، ما به بررسی تابع ایسگور- وایس با استفاده از حل غیر نسبیتی، نیمه نسبیتی و نسبیتی پرداخته‌ایم. برای حل غیر نسبیتی از معادله شرودینگر استفاده کرده‌ایم و تابع ایسگور- وایس را در بررسی

مزون‌ها به کارگرفته‌ایم.برای حل نیمه نسبیتی و نسبیتی با استفاده از معادلات موج سالپیتر، کلاین-گردن و دی کی پی تابع موج را یافته‌ایم و سپس به بررسی تابع ایسگور- وایس و پارامترهای آن از جمله شیب و تحدب این تابع پرداخته‌ایم. این پارامترها را در مورد مزون‌های نیمه سنگین و سنگین محاسبه نموده‌ایم و رفتار تابع ایسگور- وایس را مورد مطالعه قرار داده‌ایم. نتایج برای مزون‌های B و D با اسپین صفر مطابقت بسیار خوبی با کارهای انجام شده در این زمینه داشتند. هم‌چنین جرم این مزون‌ها را با استفاده از مدل-های پتانسیلی تعیین کرده‌ایم که همخوانی خوبی با سایر کارها و نیز مقادیر تجربی ارائه شده داشتند.

با توجه به اینکه پتانسیل ترکیبی در تعیین خصوصیات مزون موفقیت آمیز بوده‌است، معادله شرودینگر را با استفاده از پتانسیل ترکیبی حل نموده‌ایم و سپس به بررسی تابع ایسگور- وایس برای مزون‌های نیمه سنگین پرداخته‌ایم. جرم این مزون ها را هم یافته‌ایم و با سایر مقادیر جرم منتشر شده مورد مقایسهقرار داده‌ایم که قابل قبول بودند. همچنین معادله شرودینگر تحت برهم‌کنش هولسن را در بررسی تابع ایسگور- وایس به کار گرفته‌ایم.پارامترهای تابع ایسگور- وایس را برای دو کوارکونیوم $\eta_c(c\bar{c})$ و $\eta_b(b\bar{b})$ و چند مزون با اسپین صفر بدست آورده‌ایم که در توافق خوبی با سایر مدل‌ها و مقادیر استاندارد منتشر شده هستند. جرم‌های این مزون‌های شبه اسکالر که بدست آورده‌ایم، در توافق خوبی با جرم‌های گزارش شده دیگر بودند.پارامترهای تابع ایسگور-وایس را در حضور معادله سالپیتر بدون اسپین برای مزون های B، D،B_s و D_s بدست آورده‌ایم که با نتایج منتشر شده برای این مزون‌ها در توافق بودند.در حضور معادله کلاین-گردن، رفتار تابع ایسگور- وایس را ارائه داده‌ایم و نتایج‌مان در مقایسه با سایر مقالات قابل قبول بودند. در حضور فرم عمومی معادله کلاین-گردن علاوه بر بررسی رفتار تابع ایسگور- وایس برای مزون‌ها، جرم سه مزون B_c و D و D_s را تعیین کرده‌ایم که با مقادیر تجربی بدست آمده همخوانی خوبی داشتند.جرم مزون‌های با ساختار کوارکی سنگین-سنگین مطابقت بیشتری با مقادیر تجربی داشتند.رفتار تابع ایسگور- وایس رابرای مزون‌های نیمه سنگین با اسپین صفر تحت معادله دی کی پی بررسی کرده‌ایم.

نتایج بدست آمده ما با نتایجی که برای مزون‌های نیمه سنگین منتشر شده‌است، سازگار بودند.در حضور معادله دی کی پی برای سیستم اسپین یک تابع ایسگور- وایس را بررسی نموده‌ایم و پارامترهای آن را برای مزون‌های کمتر شناخته شده J/ψ و Yبدست آورده‌ایم.

نتایجی که ما از پارامترهای تابع ایسگور-وایس بدست آورده‌ایم در توافق با نتایجی که از مدل‌های دیگر برای این پارامترها محاسبه شده‌اند هستند. پارامترهای تابع ایسگور- وایس را که از مدل‌های مختلف منتشر شده‌اند، در جدول ۱-۱ از این پایان نامه آورده‌ایم.

مراجع:

[۱] Isgur N. and Wise M. B. (1989) “Weak decays of heavy mesons in the static quark approximation” **Phys. Lett.B**, 1, 232 , pp 113 .

[۲] Isgur N. and Wise M. B. (1990) “Weak transition form factors between heavy mesons” **Phys. Lett.B**, 3 , 237 , pp 527 .

[۳] Olsson M. G. and Veseli S. (1995) “Relativistic flux tube model calculation of the Isgur- Wise function” **Phys. Rev. D**, 5, 51, pp 2224.
[۴]Roy S. and Choudhury D. K. (2012) “An analysis of the Isgur-Wise Function and its derivatives within a Heavy-Light QCD Quark Model”**Mod. Phys. Lett. A**, 20, 27, pp 1250110.
[۵] Roy S., Hazarika B. J., Choudhury D. K. (2012) “Isgur-Wise Function for Heavy Light Mesons in D dimensional Potential Model”**Phys. Scr.**, 4, 86, pp 045101.
[۶]Roy S., Bordoloi N. S. and Choudhury D. K. (2013) “Isgur-Wise function within a QCD quark model with Airy’s function as the wave function of heavy-light mesons”**Can. J. Phys.**, 1, 91, pp 34.
[۷] Roy S.and Choudhury D. K. (2013) “A Higher Dimensional Potential Model Approach in the Study of Isgur-Wise Function for Heavy-Light Mesons” **Phys. Scr.**, 6, 87, pp 065101.
[۸] Hazarika B. J. and Choudhury D. K. (2012) “Isgur Wise function in a quantum chromodynamics-inspired potential model with confinement as parent in the variationally improved perturbation theory” **Pramana – J. Phys.**, 4, 78, pp 555.
[۹] Hazarika B. J. and Choudhury D. K. (2010) “Slope and curvature of Isgur Wise function using variationally improved perturbation theory in a quantum chromodynamics inspired potential model” **Pramana – J. Phys.**, 3, 75, pp 423.
[۱۰] Hazarika B. J., Pathak K. K. and Choudhury D. K. (2011) “Isgur-Wise function in a QCD potential model with Coulombic potential as perturbation” **Mod. Phys. Lett. A**, 21, 26, pp 1547.
[۱۱] Choudhury D. K. and Bordoloi N. S. (2009) “The Isgur-Wise function in an improved QCD inspired quark model” **Mod. Phys. Lett. A**, 6, 24, pp 443.
[۱۲] StefanisN. G., Karanikas A. I. and KtoridesC. N. (1996) “Worldline description of the Isgur-Wise function” arXiv: 9610491[hep-ph].
[۱۳] Neubert M. and Rieckert V. (1992) “New approach to the universal form factors in decays of heavy quarks” **Nucl. Phys. B**, 1, 382, pp 97.
[۱۴] Zalewski K. (1991) “Isgur-Wise symmetry and heavy hadron wave functions”**Phys. Lett. B**, 3, 264, pp 432.
[۱۵] ChakravertyDebrupa, DeTriptesh, Dutta-RoyBinayak and Gupta K. S. (1999) “Dispersive Bounds on The Shape Of $\Lambda_b \to \Lambda_c l\bar{\upsilon}_l$ Formfactors” **Int. J. Mod. Phys. A**, 15, 14, pp 2385.
[۱۶] KumarR. and Chand F. (2013) “Asymptotic Study to the N-Dimensional radial schrödinger equation for the quark-antiquark system” **Commun. Theor. Phys.**, 5, 59, pp

528.
[17] Hassanabadi H.,Zarrinkamar S. and Rajabi A. A. (2011) “Exact Solutions of D-Dimensional Schrödinger Equation for an Energy-Dependent Potential by NU Method” **Commun. Theor. Phys.**, 4 , 55, pp 541.
[18] Yazarloo B. H., Hassanabadi H. and Zarrinkamar S. (2012) “Oscillator strengths based on the Möbius square potential under Schrödinger equation” **Eur. Phys. J. Plus**, 127 , pp 51.
[۱۹] PathakK. K. and ChoudhuryD. K. (2012) “Open flavour charmed mesons in a quantumchromodynamics potential model” **Pramana. J. Phys.**, 6 , 79 , pp 1385.
[۲۰] Rai A. K., Patel B. and Vinodkumar P. C. (2008) “Properties of $Q\bar{Q}$ mesons in non-relativistic QCD formalism” **Phys. Rev. C**, 5 , 78, pp 055202.
[۲۱] Shahnas M. H. and Hosseinkhani H. (2000)“The spinless salpeter equation and meson dynamics”**J. Sci. I. R. Iran**, 4 , 11, pp 335.
[22] Zarrinkamar S., Rajabi A. A., Hassanabadi H. and Rahimov H. (2011) “Analytical treatment of the two-body spinless Salpeter equation with the Hulthén potential”**Phys. Scr.**, 84 , 6 , pp 065008.
[۲۳] دیوید جفری گریفیتس، ۱۳۸۴، **"مقدمه‌ای بر ذرات بنیادی"**، قهرمانی ن، چاپ اول، نوپردازان، تهران،ص ۴۳۲.

[24] Zarrinkamar S., Rajabi A. A., Yazarloo B. H. andHassanabadi H. (2013) “The Soft-CoreCoulomb potential in the semi-relativistic two-body basis”**Few-Body Syst.**, 11 , 54 , pp 2001.
[۲۵] Hazarika B. J. and ChoudhuryD. K. (2011) “Bounds on the slope and curvature of Isgur-Wise function in a QCD inspired quark model”arXiv:1102.4970 [hep-ph].
[26] Hassanabadi H., Yazarloo B. H. and LU Liang-L. (2012) “Approximate Analytical Solutions to the Generalized Pöschl–Teller Potential in *D* Dimensions” **Chin. Phys. Lett.**, 2 , 29 , pp 020303.
[27] Hassanabadi H.,Zarrinkamar S. and Rahimov H. (2011) “Approximate solution of D-dimensional Klein–Gordon equation with Hulth´en-type potential via SUSYQM” **Commun. Theor. Phys.**, 3 , 56 , pp 423.
[28] Antia A. D., Ikot A. N., Akpan I. O. and Awoga O. A. (2013) “Approximate solutions of the Klein–Gordon equation with unequal scalar and vector modified Hylleraas potential” **Indian J. Phys.**, 2 , 87 , pp 155.
[۲۹] Hassanabadi H., Yazarloo B. H., Zarrinkamar S. and Rajabi A. A. (2011) “Duffin-Kemmer-Petiau equation under a scalar Coulomb interaction”**Phys. Rev. C**, 6 , 84 , pp 064003.
[30] Zarrinkamar S., Rajabi A. A., RahimovH. and Hassanabadi H. (2011) “DKP equation uuder a vector Hulthen-typepotential: An approximate solution”**Mod. Phys. Lett. A**, 22 ,

26 , pp 1621.
[31] Zarrinkamar S., Rajabi A. A., Yazarloo B. H. and Hassanabadi H. (2013) “An approximate solution of the DKP equation under the Hulthen vector potential”**Chin. Phys. C**, 2 , 37 , pp 023101.
[32] Molaee Z., Ghominejad M., Hassanabadi H. and Zarrinkamar S. (2012) “s-wave solutions of spin-one DKP equation for a deformed Hulth´en potential in (1+3) dimensions” **Eur. Phys. J. Plus**, 127 , pp 116.

Abstract

In recent years, the so-called Isgur-Wise function (IWF) have been interested to study features of mesons in different models. To investigate IWF, we need wave function of mesons.Employing meson wave function we can study IWF for heavy-light mesons.IWF can well explain the meson transitions and their charge radii. In nonrelativistic framework we use Schrödinger equation and for relativistic and semirelativistic systems we use Salpeter, Klein- Gordon and DKP equations via different potentials.

We have considered the attractive cases of D, B, B_s, D_s and B_c mesons which have $c\bar{u}$,$b\bar{u}$,$b\bar{s}$,$c\bar{s}$ and $b\bar{c}$ structures. We have proceeded on the framework of nonrelativistic Schrödinger equation. We have studied IWF treatment for $\eta_c(c\bar{c})$ and $\eta_b(b\bar{b})$ mesons.In third chapter,we have shown IWF in semirelativistic structure and we have calculated parameters of IWF for some heavy-light and heavy mesons. In chapter four, we have investigated IWF for heavy-light mesons whithin relativistic framework. Also, we obtain IWF parameters for some spin one mesons such as J/ψ and Y mesons.Employing potential models, we have obtained masses of some heavy-lightand heavy mesons. We have compared our results with others which are in a good agreement with standard models.

Shahrood University

Physics Department

Master of Science Thesis

Calculation of Isgur-Wise function for determination structure of few-body systems

Sara Rahmani

Supervisor:

Dr. Hassan Hassanabadi

Advisor:

Hamed Rahimov

September-2013