





دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده : فیزیکی

گروه: فیزیکی هسته ای

معادلات دی کی پی و سالیپی تر بدون اسپین در مدل هسته ای پتانسیل

دانشجو : صابر زری ن کمر

استاد راهنما : پروفسور علی اکبر رجبی

رساله دکتری جهت اخذ مدرک دکتری

سال و ماه انتشار : بهمن ۹۱

دانشگاه صنعتی شاهرود

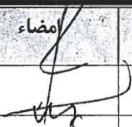
دانشکده : فیزیک

گروه : هسته‌ای

رساله دکتری

معادلات دی کی پی و سالپتر بدون اسپین در مدل هسته ای پتانسیل

تاریخ ۱۳۹۱/۱۱/۲۴ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ رساله دکتری مورد ارزیابی و با درجه مورد
برش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی		نام و نام خانوادگی : علی اکبر رجبی
	نام و نام خانوادگی		نام و نام خانوادگی :

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
			نام و نام خانوادگی : دکتر حسین موحدیان
	نام و نام خانوادگی : دکتر حسین توکلی عنبران		نام و نام خانوادگی : دکتر حسین مهربان
			نام و نام خانوادگی : دکتر علی اصغر مولوی

به پدر و مادرم

برای بیستم و امی‌دهای سال‌های‌شان

به همسرم

برای شکی‌بایی و مهربانی بی‌حدش

به خواهر و برادرم

که دنیای منند.

با تمام دل

از

اساتیدم، که فراتر از واژه مدیونشانم، پرفسور علی اکبر رجبی و دکتر حسن حسن آبادی

اساتید دانشکده فیزیکی و به ویژه : دکتر حسین موحدیان، دکتر حسین عشقی، دکتر سعید حسامی

دوستان بزرگوالم، آقایان مهندس حامد رحیمی اف، مهندس علی رحمانی ، مهدی کمالی ، ابراهیم میمنتظری،

سرکار خانم ها سمیه حسن آبادی، بنت الهدی یازرلو، الهام مقصودی، سمیه رحمانی، الهام جوادی منش

و خانواده صبورم، که وجودشان لبخند خوب خداست،

ممنونم

دانشجو تایید می نماید که مطالب مندرج در این رساله نتیجه تحقیقات خودش می باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات ، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این رساله متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد.

ماه و سال

فصل یک.....	۱
مقدمه.....	۲۱
فصل دو.....	۵
معادلات سالپی-تر بدون اسپین و دی-کی-پی.....	۵
۱-۲ معادله سالپی-تر بدون اسپین.....	۵
۱-۱-۲ حالت خاص جرم های مساوی.....	۷
۲-۱-۲ معادله سالپیتر بدون اسپین (تک جسمی).....	۷
۳-۱-۲ کرانهای بالای تحلیلی.....	۸
۴-۱-۲ نامساوی های عملگری.....	۹
۵-۱-۲ کران شرودینگری.....	۹
۶-۱-۲ یک کران مجذوری.....	۱۰
۷-۱-۲ تعمیم نتایج.....	۱۱
۸-۱-۲ روش وردشی.....	۱۲
۲-۲ معادله دی-کی-پی.....	۱۴
فصل سه.....	۱۹
روشهای تحلیلی.....	۱۹
۱-۳ مقدمه ای بر مکانیک کوانتومی ابرتقارنی.....	۲۰
۱-۱-۳ معادله دیراک را در حضور تقارن های اسپینی و شبه اسپینی.....	۲۳
۲-۱-۳ حد تقارن اسپینی.....	۲۴
۳-۱-۳ حد تقارن شبه اسپینی.....	۲۶
۲-۳ روش NU.....	۲۶
۱-۲-۳ فرم پارامتریکی روش.....	۲۷
۳-۳ روش حدس زدن.....	۲۹
فصل چهار.....	۳۱
معادله سالپی-تر بدون اسپین دوجسمی تحت برهمکنشهای مختلف.....	۳۱
۱-۴ پتانسیل نمایی.....	۳۲

۳۵	۲-۴ پتانسیل یوکاوا.....
۳۸	۳-۴ پتانسیل وودز-ساکسون.....
۴۳	۴-۴ سالپتر برای هالسن.....
۴۵	
	۵-۴ معادله سالپیتر تحت برهمکنش کولنی هسته نرم
۴۷	۴-۵-۱ حالت خاص $f=0$
۵۲	۴-۶ کرنل.....
۵۴	 فصل پنج
۵۴	 معادله دی-کی-پی تحت برهمکنشهای مختلف
۵۵	۵-۱ دی کی پی تحت پتانسیل نمایی.....
۵۶	۵-۲ پتانسیل یوکاوا.....
۵۵	۵-۲-۱ حالت‌های مقید.....
۵۵	۵-۳ دی کی پی تحت وودز-ساکسون.....
۵۶	۵-۴ معادله دی کی پی تحت یک برهمکنش برداری هالسن.....
۶۲	۵-۵ معادله دی کی پی در حضور برهمکنش اسکالر کولنی.....
۶۴	۵-۶ معادله دی کی پی تحت پتانسیل‌های اسکالر و برداری کرنل.....
۷۰	۵-۷ دی کی پی تحت دنگ فن.....
۷۵	 فصل شش
۷۶	 بررسی
۷۷	۶-۱ بررسی.....
۷۸	جدول ۱,۶. مشخصات مزون B به ازای $\mu = 0.318$
۷۹	جدول ۳,۶. مشخصات مزون D_s به ازای $\mu = 0.368$
۸۰	 فصل هفت
۸۰	 نتیجه گیری و پیشنهادات
۸۲	 منابع و مآخذ
	 چکیده انگلیسی

1. S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, Dirac equation for the harmonic scalar and vector potentials and linear plus coulomb-like tensor potential; the SUSY approach, Ann. Phys. (New York) 325 (2010) 1720.
2. S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, Dirac equation in the presence of coulomb and linear terms in $(1 + 1)$ dimensions; the supersymmetric approach, Ann. Phys. (New York) 325 (2010) 2522.
3. S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi, H. Hassanabadi and H. Rahimov, Analytical treatment of the two-body spinless Salpeter equation with the Hulthén potential Phys. Scr. 84 (2011) 065008.
4. B. H. Yazarloo, H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar and A. A. Rajabi, Duffin-Kemmer-Petiau equation under a scalar Coulomb interaction, Phys. Rev. C. 84 (2011) 064003.
5. S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi, H. Hassanabadi and H. Rahimov, DKP Equation Under a Vector HULTHÉN-TYPE Potential: AN Approximate Solution, Mod. Phys. Lett. A 26 (2011) 1621.
6. S. Hassanabadi, A. A. Rajabi and S. Zarrinkamar, Cornell and Kratzer Potentials Within the Semi-relativistic Treatment, Mod. Phys. Lett. A 27 (2012) 1250057.
7. S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, Solutions of the Two-Body Salpeter Equation Under an Exponential Potential for Any l-State, Few-Body Sys. 52 (2012) 165.
8. S. Hassanabadi, A. A. Rajabi, B. H. Yazarloo, S. Zarrinkamar and H. Hassanabadi, Quasi-Analytical Solutions of DKP Equation under the Deng-Fan Interaction, AHEP 804652 (2012) doi:10.1155/2012/804652.
9. S. Hassanabadi, A. A. Rajabi, S. Zarrinkamar and H. Hassanabadi, DKP equation under vector and scalar Cornell interactions, Phys. Elem. Part. Nucl. Lett. Theor. 10 (2013) 28.

10. S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi, B. H. Yazarloo and H. Hassanabadi, the Soft-core Coulomb potential in the semi-relativistic two-body basis, Few-Body Sys. (2013) 10.1007/s00601-012-0527-7.
11. S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi, B. H. Yazarloo and H. Hassanabadi, An approximate solution of the DKP equation under the Hulthén vector potential, Chin. Phys. C (2013).
12. H. Hassanabadi, B. H. Yazarloo, S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi, DKP equation under scalar and vector Cornell Interactions, accepted in Phys. Elem. Part. Nucl. Lett. (2013).
13. S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, The exponential potential within a semi-relativistic two-body formulation via Nikiforov-Uvarov technique, 15th Physical Chemistry conference, Tehran university, Tehran, Iran (2012).
14. S. Zarrinkamar, A. A. Rajabi and H. Hassanabadi, The Schrodinger Equation under a q-deformed Morse plus Coulomb interaction, 15th Physical Chemistry Conference, Tehran University, Tehran (2012).

۱۵- زری ن کمر، صابر، رجیبی، علی اکبر، حسن ابادی، حسن : معادله دی کی پس تحت ی یک پتانسیل برداری نمایی، دومی ن کنفرانس سالیانه ذرات بنیادی و می دان ها ، دانشگاه سمنان، سمنان ۱۳۹۰.

چکیده فارسی

مدل پتانسیل کماکان یکی از مدل‌های مورد بحث در فیزیکی هسته‌ای نظری و ذرات بنیادی است. مهم‌ترین موضوع، و به نوعی دشوارترین قسمت کار، در این مدل پیدا کردن جواب‌های معادله مورد بررسی تحت یک پتانسیل موفق است. تاکنون کارهای بسیاری از ذرات بنیادی بر روی معادلات شناخته شده مکانیکی کوانتومی غیرنسبی‌تی و نسبیتی، و به طور مشخص معادلات شرودینگر، دی‌راک و کلی-گوردون، انجام شده است. در این رساله دو معادله دی-کی-پی و سالیپتر بدون اسپین را در نظر می‌گیریم که علی‌رغم ساختار جذاب کمتر مورد بررسی قرار گرفته‌اند. معادله اول هم قابلیت بررسی ذرات نسبیتی اسپین صفر (که مورد بحث ما است) و هم ذرات نسبیتی اسپین یک را دارد. معادله دوم، که پس از یک سری از تقریب‌ها از معادله بته-سالیپتر منتج می‌شود، دارای ماهیت نیمه-نسبی‌تی بوده و در یک فرمول‌بندی دو جسمی معرفی می‌شود. و در ابتدا، با روش‌های کاملاً تحلیلی به حل این معادلات تحت پتانسیل‌های موفق مانند نمایی، کولنی، هالسن، وودز-ساکسون، یوکاوا و کرنل خواهیم پرداخت و سپس برخی مزون‌های اسپین صفر را بررسی می‌کنیم.

کلیدواژه: معادله دی-کی-پی، معادله سالیپتر بدون اسپین، سیستم دوجسمی، مدل پتانسیل.

فصل ی‌ک

مقدمه

معادلات موج مکانیک کوانتومی کماکان یکی از جذابترین گزینه‌ها برای بررسی سیستم‌های فیزیکی به شمار می‌روند. معادله موج غیرنسبیتی شرودینگر^۱، علی‌رغم قدمتی که دارد، هنوز یکی از مسائل باز ریاضی فیزیک است و جواب‌های تحلیلی دقیق این معادله حتی برای پرکاربردترین پتانسیل‌های فیزیکی مانند ترکیب جملات هارمونیک و کولنی و یا کرنل، هنوز ارائه نشده‌اند.

در محدوده نسبیتی، گزینه‌های رایج و آشنا عبارتند از معادلات دیراک^۲ و کلین-گوردون^۳ که به ترتیب ذرات نسبیتی با اسپین $1/2$ و 0 را توصیف می‌کنند. این معادلات با روش‌های مختلفی توسط افراد بسیاری مورد بررسی قرار گرفته‌اند و جواب‌های تحلیلی و عددی بسیاری در اختیار هستند. دلیل این موضوع این است که این دو معادله در بسیاری از موارد به یک معادله شبه-شرودینگر تبدیل می‌شوند که از روش‌های مرسوم مکانیک کوانتومی غیرنسبیتی قابل حل هستند. این معادلات در حضور پتانسیل‌های رایج مانند نمایی، کولنی، هارمونیک و ... حل شده‌اند. چند نمونه از این حل‌های تحلیلی عبارتند از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی^۴، روش نی‌کوفروو-ی‌وواروو^۵، روش وردشی^۶، تبدیلات کانونی‌ک^۷، جبر لی^۸، روش کسرهای دنباله‌دار^۹ و غی‌ره. اما دو معادله بسیار پرکاربرد دی-کی-پی^{۱۰} و سالپیتر بدون اسپین^{۱۱} کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند. معادله دوم، همان‌طور که از عنوانش برمی‌آید، برای توصیف ذرات اسپین صفر به کار می‌رود و می‌توان آن را به‌عنوان رایج‌ترین جایگزین معادله بته-سالپیتر سه‌بعدی دانست که برای توصیف

¹ Schrödinger

² Dirac

³ Klein-Gordon

⁴ Supersymmetry quantum mechanics

⁵ Nikiforov-Uvarov

⁶ Variation

⁷ Canonical transformation

⁸ Lie algebras

⁹ Continued fractions

¹⁰ Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)

¹¹ spinless Salpeter equation

حالت‌های مقید در نظریه کوانتومی میدان به کار می‌رود. از طرفی، معادله بته-سالپتر^۱ هم اثرات نسبیتی را دربرمی‌گیرد و هم برای توصیف کوارک‌ها به کار می‌رود که جز بنیادی مواد هسته‌ای و مزون‌ها هستند. از آنجایی که نمی‌توان حل کاملی برای این معادله ارائه داد، ناگزیر هستیم بر روی نزدیکترین گزینه کار-کنیم. نتایج به دست آمده از معادله سالپتر همخوانی قابل قبولی با الکترومدی-نامیک و کرومودی-نامیک کوانتومی دارد. به طور مشخص، توصیف هادرون‌ها بر اساس این معادله به عنوان یک روش استاندارد شناخته می‌شود. اما مشکل از این جا ناشی می‌شود که این معادله به صورت تحلیلی قابل حل نیست. به همین خاطر، اغلب معادله‌های منتج از این معادله در فیزیک هسته‌ای نظری مورد استفاده قرار می‌گیرند: یعنی معادله سالپتر کاهش یافته^۲ و معادله سالپتر بدون اسپین. معادله اخیر قابل تعمیم به سیستم‌های دوجسمی نیز هست، اما مشکلی که وجود دارد غیرموضعی بودن معادله است. بنابراین، ناگزیر از تقریب‌هایی برای حل معادله استفاده می‌کنیم تا معادله از فرم غیرموضعی^۳ خارج شود. در قدم بعدی پتانسیل‌های رایج مانند نمایی، کولنی، هالسن^۴ و کرنل را در نظر گرفته و با استفاده از تکنیک‌های تحلیلی و بدون بهره‌گیری از روش‌های پرزحمت و وقت‌گیر عددی به حل مسئله می‌پردازیم. معادله دی-کی-پی، همانند معادله کلین-گوردون، می‌تواند دو پتانسیل برداری و اسکالر را در خود بگنجاند. در غیاب پتانسیل اسکالر، کار کردن با این معادله به مراتب ساده‌تر از وقتیست که پتانسیل اسکالر حاضر است. حتی در مثال‌های ساده جواب‌ها به فرم معادله هی-ون ظاهر می‌شوند که بسیاری از پی‌چیده‌تر از معادلات فوق-هندسی هستند. مهمترین ویژگی این معادله این است که می‌تواند هم ذرات اسپین صفر و هم ذرات اسپین ۱/۲ را به طور نسبیتی بررسی نماید. این نکته وقتی با ارزش‌تر به نظر می‌رسد که توجه داشته باشیم مقالات حاضر درباره معادله پروکا و ذرات اسپین ۱/۲ بسیاری محدود هستند. برجسته‌ترین دلیل این موضوع هم شاید پیچیدگی معادله پروکا باشد.

¹ Bethe-Salpeter

² Reduced saltpeter equation

³ nonlocal

⁴ Hulthén

فصل دو

معادلات سالپیتر بودن اسپین و دی-کی-پی

چارچوب مناسب برای توصیف حالات مقید در نظریه کوانتومی میدان نسبیتی، معادله بته-سالیتر است. حالت مقید $|M\rangle$ یک فرمیون و یک پادفرمیون با اسپین $1/2$ را در نظر بگیرید که دارای جرم‌های M_1, M_2 و تکانه‌های P_1, P_2 هستند. در فرمول‌بندی بته-سالیتر، این حالت مقید با دامنه بته-سالیتر Ψ توصیف می‌شود که یک تبدیل فوری عملگرهای میدان به فرم زیر است:

$$\Psi(P) = \exp(iKX_{CM}) \int d^4X \exp(iPX) \langle 0 | T(\psi(X_1) \bar{\psi}(X_2)) | M(K) \rangle, \quad (1-1-2)$$

که در این رابطه مطابق معمول $K = P_1 + P_2$ ، P تکانه نسبی، X_{CM} مختصه مرکز جرم و $X = X_1 - X_2$ مختصه نسبی است. دامنه در معادله

$$S_1^{-1}(P_1) \Psi(P) S_2^{-1}(-P_2) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4K (P, Q) \Psi(Q), \quad (2-1-2)$$

صدق می‌کند که دارای دو جز دینامیکی زیر است:

- انتشارگر فرمیونی کامل ذره i ($i=1,2$) که با $S(P, M)$ نشان داده می‌شود و اغلب با فرم آزادش تقریب زده می‌شود:

$$S_0^{-1}(P, M) = -i(\gamma_\mu P^\mu - M), \quad (3-1-2)$$

- کرنل برهم‌کنشی که به نوعی جمع دیاگرام‌های فینمن است و در پایین‌ترین مرتبه الکترودینامیک کوانتومی عبارتست از:

$$K(P, Q) = \frac{e^2}{(P-Q)^2} \gamma^\mu \otimes \gamma_\mu, \quad (4-1-2)$$

اکنون تقریب پایا را در نظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم کرنل تنها به سه-تکانه‌های نسبی حالت اولیه $\vec{Q}$ و حالت نهایی $\vec{Q}$ وابسته است:

$$K(P, Q) = K(\vec{P}, \vec{Q}). \quad (5-1-2)$$

اکنون تابع موج مستقل از زمان $\Phi(\vec{P})$ را تعریف می‌کنیم:

$$\Phi(\vec{P}) \equiv \int dP_0 \Psi(\vec{P}, P_0), \quad (6-1-2)$$

و در نهایت می‌رسیم به

$$\Phi(\vec{P}) \equiv \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \left[\frac{\Lambda_1^+ \gamma_0 K(\vec{P}, \vec{Q}) \Phi(\vec{Q}) \gamma_0 (\Lambda_2^+)^c}{E - \sqrt{\vec{P}_1^2 + M_1^2} - \sqrt{\vec{P}_2^2 + M_2^2}} - \frac{\Lambda_1^- \gamma_0 K(\vec{P}, \vec{Q}) \Phi(\vec{Q}) \gamma_0 (\Lambda_2^-)^c}{E + \sqrt{\vec{P}_1^2 + M_1^2} + \sqrt{\vec{P}_2^2 + M_2^2}} \right], \quad (7-1-2)$$

که عملگرهای تصویر انرژی عبارتند از

$$\Lambda_i^\pm \equiv \frac{\sqrt{\vec{P}_i^2 + M_i^2} \pm \gamma_0 (\vec{\gamma} \cdot \vec{P}_i + M_i)}{2\sqrt{\vec{P}_i^2 + M_i^2}}, \quad (8-1-2)$$

$$(\Lambda_i^\pm)^c \equiv (C^{-1} \Lambda_i^\pm C)^T = \Lambda_i^\mp, \quad (9-1-2)$$

و C ماتریس همیوگ بار است. اکنون با صرف نظر کردن از جمله دوم سمت راست معادله سالپیتز و در نظر گرفتن تقریب

$$E - \sqrt{\vec{P}_1^2 + M_1^2} - \sqrt{\vec{P}_2^2 + M_2^2} \ll E + \sqrt{\vec{P}_1^2 + M_1^2} + \sqrt{\vec{P}_2^2 + M_2^2}, \quad (10-1-2)$$

به معادله سالپیتز کاهش یافته می‌رسیم

$$\begin{aligned} & (E - \sqrt{\vec{P}_1^2 + M_1^2} - \sqrt{\vec{P}_2^2 + M_2^2}) \Phi(\vec{P}) = \\ & \Phi(\vec{P}) \equiv \int \frac{d^3Q}{(2\pi)^3} \Lambda_1^+ \gamma_0 K(\vec{P}, \vec{Q}) \Phi(\vec{Q}) \gamma_0 (\Lambda_2^+)^c, \end{aligned} \quad (11-1-2)$$

با صرف نظر کردن از درجات آزادی اسپینی، این فرض که کرنل از نوع کنولوشن باشد، یعنی

$$K(\vec{P}, \vec{Q}) = K(\vec{P} - \vec{Q}), \quad (12-1-2)$$

و محدود کردن بحث به حالت‌های با انرژی مثبت داریم

$$\left[\sqrt{\vec{P}_1^2 + M_1^2} + \sqrt{\vec{P}_2^2 + M_2^2} + V(\vec{X}) \right] \psi = E \psi. \quad (13-1-2)$$

که معادله سالپیتز بدون اسپین نام دارد و شامل جمله برهم‌کنشی است. به طور خاص، در چارچوب

مرکز جرم سیستم دوجسمی داریم

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad (14-1-2)$$

که

$$H = \sqrt{\vec{P}_1^2 + M_1^2} + \sqrt{\vec{P}_2^2 + M_2^2} + V(\vec{X}), \quad (15-1-2)$$

۲-۱-۱ حالت خاص جرم های مساوی

در حالت خاص سیستمی با جرم های مساوی $M_1 = M_2 = M$ ، می توان معادله دو جسمی را به سادگی به یک معادله معادل تک جسمی تبدیل کرد. برای مثال، معادله نیمه-نسبیتی زیر را که شامل یک پتانسیل توانی است

$$H = 2\sqrt{\vec{P}^2 + M^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n R^n, \quad R \equiv |\vec{X}|, \quad (16-1-2)$$

به همراه تبدیل

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \lambda \vec{P}, \\ \vec{x} &= \frac{\vec{X}}{\lambda}, \end{aligned} \quad (17-1-2)$$

که

$$[\vec{x}, \vec{p}] = [\vec{X}, \vec{P}], \quad (18-1-2)$$

در نظر بگیرید. با انتخاب هامیلتونی نیمه-نسبیتی

$$\begin{aligned} H &= \sqrt{4\vec{P}^2 + 4M^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n R^n \\ &= \sqrt{\vec{P}^2 + 4M^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} k_n 2^n r^n, \end{aligned} \quad (19-1-2)$$

و در نظر گرفتن

$$\begin{aligned} m &= 2M, \\ a_n &= 2^n k_n, \end{aligned} \quad (20-1-2)$$

به هامیلتونی تک-جسمی معادل زیر می رسیم

$$H = \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n r^n, \quad r \equiv |\vec{x}|, \quad (21-1-2)$$

۲-۱-۲ معادله سالپیتر بدون اسپین (تک جسمی)

با توجه به بحث بالا، اکنون تنها کافیت هامیلتونی خودالحاقی

$$H = T + V, \quad (22-1-2)$$

را وارد بحث کنیم که T نشان دهنده ریشه عملگر نسبیتی انرژی جنبشی (آزاد) ذره‌ای به جرم m و تکانه $\vec{p}$ است:

$$T = T(\vec{p}) \equiv \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}, \quad (23-1-2)$$

و $V(\vec{x})$ یک عملگر برهم‌کنش مستقل از زمان است. بنابراین، معادله سالپتر بدون اسپین عبارتست از

$$H|\chi_k\rangle = E_k|\chi_k\rangle, \quad (24-1-2)$$

و

$$E_k \equiv \frac{\langle \chi_k | H | \chi_k \rangle}{\langle \chi_k | \chi_k \rangle}, \quad (25-1-2)$$

و می‌توان این معادله را به‌عنوان ساده‌ترین تعمیم نسبیتی معادله شرودینگر در نظر گرفت.

۳-۱-۲ کران‌های بالای تحلیلی

اصل کمینه - بیشینه

می‌توان این اصل را به چند بیان مختلف بیان نمود. در اینجا کاربردی‌ترین نوع آن را در نظر می‌گیریم.

فرض کنید H یک عملگر خودالحاقی باشد که از پای‌بن کران‌دار است و

$$E_k \leq \sup_{|\psi\rangle \in D_{k+1}} \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots, \quad (26-1-2)$$

که

$$E_0 \leq E_1 \leq E_2 \dots \quad (27-1-2)$$

- D_d یک زیر فضای D بعدی از دامنه H باشد.

با این شرایط، k امین ویژه مقدار در نامساوی زیر صدق می‌کند.

$$E_k \leq \sup_{|\psi\rangle \in D_{k+1}} \frac{\langle \psi | O | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \quad \text{for } k = 0, 1, 2, \dots \quad (28-1-2)$$

۲-۱-۴ نامساوی های عملگری

نیازی به گفتن نیست که ما به دنبال جایگزین مناسب تری برای عملگر انرژی جنبشی هستیم. بنابراین باید روش کمی-بیشینه را برای یک نامساوی عملگری به کار بگیریم. نامساوی $H \leq O$ را در نظر بگیرید، با این کار داریم:

$$\begin{aligned} E_k &\equiv \frac{\langle \chi_k | H | \chi_k \rangle}{\langle \chi_k | \chi_k \rangle} \\ &\leq \sup_{|\psi\rangle \in D_{k+1}} \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \\ &\leq \sup_{|\psi\rangle \in D_{k+1}} \frac{\langle \psi | O | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}. \end{aligned} \quad (29-1-2)$$

اکنون فرض کنید که زیرفضای $(k+1)$ -بعدی D_{k+1} در این نامساوی ها توسط $(k+1)$ ویژه تابع اولیه عملگر علامت زده می شود و

$$\hat{E}_0 \leq \hat{E}_1 \leq \hat{E}_2 \dots \quad (30-1-2)$$

در این صورت

$$\sup_{|\psi\rangle \in D_{k+1}} \frac{\langle \psi | O | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \hat{E}_k, \quad (31-1-2)$$

در نتیجه ویژه مقدار E_k از بالا با ویژه مقدار متناظر $\hat{E}_k$ کراندار است و

$$E_k \leq \hat{E}_k, \quad (32-1-2)$$

۲-۱-۵ کران شرودینگری

ساده ترین کران بالای این نظریه از هامیلتونی شرودینگر متناظر به دست می آید. با استفاده از مثبت بودن مجذور عملگر $(T - m)$ داریم

$$\begin{aligned} 0 &\leq (T - m)^2 \\ &= T^2 + m^2 - 2mT \\ &= \vec{p}^2 + 2m^2 - 2mT. \end{aligned} \quad (33-1-2)$$

با فرض مثبت بودن m داریم

$$T \leq m + \frac{\bar{p}^2}{2m}, \quad (34-1-2)$$

و در نتیجه برای هامیلتونی سالیتر داریم

$$H \leq H_S, \quad (35-1-2)$$

که در آن هامیلتونی شرودینگر عبارت است از

$$H_S = m + \frac{\bar{p}^2}{2m} + V, \quad (36-1-2)$$

برای مثال، برای پتانسیل کولنی انرژی متناظر هامیلتونی شرودینگر برابر است با

$$E_{S,n} = m \left(1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right), \quad (37-1-2)$$

که اعداد کوانتومی با رابطه زیر مرتبطند

$$\begin{aligned} n &= n_r + l + 1, \\ n_r &= 0, 1, 2, \dots, \\ l &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (38-1-2)$$

۲-۱-۶ یک کران مجذوری

برای رسیدن به منظورمان، مجذور هامیلتونی را در نظر بگیرید

$$Q \equiv H^2 = T^2 + V^2 + VT + TV, \quad (39-1-2)$$

و ویژه مقادیر این معادله را می توان از همان معادله ویژه مقاداری اصلی حل کرد

$$Q|\chi_k\rangle = E_k^2|\chi_k\rangle, \quad (40-1-2)$$

اکنون مثبت بودن عملگر خود الحاقی $(T - m - V)$ منجر می شود به

$$\begin{aligned} 0 &\leq (T - m - V)^2 \\ &= T^2 + m^2 + V^2 - 2mT + 2mV - TV - VT, \end{aligned} \quad (41-1-2)$$

و چون

$$0 \leq m \leq T, \quad (42-1-2)$$

می توان به یک نامساوی مفید برای عملگر پادجابه جایی $VT + TV$ انرژی جنبشی و پتانسیل رسید:

$$\begin{aligned}
TV + VT &\leq T^2 + m^2 + V^2 - 2mT + 2mV \\
&\equiv \vec{p}^2 + 2m^2 + V^2 - 2mT + 2mV \\
&\leq \vec{p}^2 + V^2 + 2mV.
\end{aligned} \tag{43-1-2}$$

با در نظر داشتن معادله اخیر، داریم

$$Q \leq R, \tag{44-1-2}$$

که

$$R \equiv 2\vec{p}^2 + m^2 + 2V^2 + 2mV. \tag{45-1-2}$$

و با توجه به اصل کمینه-بیشینه، مجذور ویژه مقادیر انرژی E_k معادله سالپیتز بدون اسپین از بالا با

رابطه زیر محدود به ویژه مقادیر $\mathcal{E}_{R,K}$ عملگر R هستند:

$$E_k \leq \sqrt{\mathcal{E}_{R,K}}, \tag{46-1-2}$$

تنها برای پتانسیل کولنی است که عملگر R دارای همان ساختار هامیلتونی شرودینگر است با این تفاوت

که یک عدد کوانتومی زاویه ای موثر داریم که از رابطه $L(L+1) = l(l+1) + \alpha^2$ به دست می آید و بدین

معناست که

$$L = \frac{\sqrt{1 + 4[l(l+1) + \alpha^2]} - 1}{2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \tag{47-1-2}$$

بنابراین ویژه مقادیر عملگر R عبارتند از

$$\mathcal{E}_{R,N} = m^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{2N^2} \right), \quad N = n_r + L + 1, \quad n_r = 0, 1, 2, \dots \tag{48-1-2}$$

می‌توان با اندکی تغییر کران‌های شرودینگری را بهتر کرد. برای این کار از ایده مثبت بودن مجذور عملگر $T - \mu$ استفاده می‌کنیم که μ یک پارامتر حقیقی دلخواه با بعد جرم است:

$$\begin{aligned} 0 &\leq (T - \mu)^2 \\ &= T^2 + \mu^2 - 2\mu T \\ &\equiv \vec{p}^2 + m^2 + \mu^2 - 2\mu T. \end{aligned} \quad (49-1-2)$$

ی‌ا به طور معادل

$$T \leq \frac{\vec{p}^2 + m^2 + \mu^2}{2\mu}. \quad (50-1-2)$$

این رابطه را می‌توان بر حسب هامی‌لتونی‌ها مطابق زیر نوشت

$$H \leq \hat{H}_s(\mu), \quad \text{with } \hat{H}_s(\mu) = \frac{\vec{p}^2 + m^2 + \mu^2}{2\mu}, \quad (51-1-2)$$

با در نظر گرفتن مجدد اصل کمی‌نه-بی‌شی‌نه،

$$E_k \leq \hat{E}_{S,k}(\mu), \quad \mu > 0, \quad (52-1-2)$$

و در نتیجه

$$E_k \leq \min_{\mu > 0} \hat{E}_{S,k}(\mu), \quad (53-1-2)$$

برای پتانسیل کولنی،

$$\hat{E}_{S,n}(\mu) = \frac{1}{2\mu} \left[m^2 + \mu^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{n^2} \right) \right], \quad n = n_r + l + 1, \quad (54-1-2)$$

و با کمی‌نه کردن $\hat{E}_{S,n}$ نسبت به پارامتر μ داری

$$\min_{\mu > 0} \hat{E}_{S,k}(\mu) = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n^2}}, \quad \text{for } \alpha \leq \alpha_c, \quad (55-1-2)$$

این کران‌ها برای تمام مقادیر ثابت جفت‌شدگی کولنی α که $\alpha \leq \alpha_c$ و همچنین تمام ترازهای برانگیخته برقرار است و کران‌های شرودینگری را بهبود می‌بخشد.

۲-۱-۸ روش وردشی

در این وضعیت روش کمینه-بی-شینه تبدیل می‌شود به

$$E_0 \leq \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (56-1-2)$$

برای بهینه کردن جواب مجموعه‌ای از حالت‌های حدسی $\{|\psi_\lambda\rangle\}$ را در نظر می‌گیریم. سپس مقدار

انتظاری هامی‌لتونی را نسبت به حالت حدسی $\{|\psi_\lambda\rangle\}$ محاسبه می‌کنیم:

$$E(\lambda) \equiv \frac{\langle \psi_\lambda | H | \psi_\lambda \rangle}{\langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle}, \quad (57-1-2)$$

در مرحله بعدی $\lambda_{\min}$ را که $E(\lambda)$ کمی‌نه می‌کند انتخاب می‌کنیم و سپس $E(\lambda_{\min})$ را محاسبه می‌-

نماییم. با انجام این روند به یک کران بالای بهینه شده برای حالت پایه می‌رسیم:

$$E_0 \leq E(\lambda_{\min}), \quad (58-1-2)$$

برای رهایی از فرم رادی‌کالی در هامی‌لتونی، از ایده ساده

$$\langle \psi | O | \psi \rangle^2 \leq \langle \psi | O^2 | \psi \rangle \langle \psi | \psi \rangle, \quad (59-1-2)$$

یا به طور معادل

$$\frac{|\langle \psi | O | \psi \rangle|}{\langle \psi | \psi \rangle} \leq \sqrt{\frac{\langle \psi | O^2 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}}. \quad (60-1-2)$$

استفاده می‌کنیم

$$\frac{|\langle \psi | T | \psi \rangle|}{\langle \psi | \psi \rangle} \leq \sqrt{\frac{\langle \psi | T^2 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}}, \quad (61-1-2)$$

با اعمال این نامساوی به هامی‌لتونی نیمه-نسبی‌تی H داریم

$$\begin{aligned}
E_0 &\leq \frac{\langle \psi | H | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \\
&= \frac{\langle \psi | T + V | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \\
&\leq \sqrt{\frac{\langle \psi | T^2 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}} + \frac{\langle \psi | V | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} \\
&\equiv \sqrt{\frac{\langle \psi | \vec{p}^2 | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}} + m^2 + \frac{\langle \psi | V | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}.
\end{aligned} \tag{62-1-2}$$

در این وضعیت تنها کافیست مقداری انتظاری $\vec{p}^2$ و V محاسبه شوند. برای پتانسیل کولنی، با در-
نظرگرفتن تابع حدسی اتم هیدروژن، یعنی

$$\psi_\lambda(x) = \sqrt{\frac{\lambda^3}{\pi}} \exp(-\lambda r), \quad \lambda > 0, \tag{63-1-2}$$

داریم

$$\frac{\langle \psi_\lambda | \vec{p}^2 | \psi_\lambda \rangle}{\langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle} = \lambda^2, \tag{64-1-2}$$

$$\frac{\langle \psi_\lambda | r^{-1} | \psi_\lambda \rangle}{\langle \psi_\lambda | \psi_\lambda \rangle} = \lambda, \tag{65-1-2}$$

با وارد کردن این مقداری انتظاری در عبارت‌های بالا به کران بالای تک متغیره

$$E_0 \leq \sqrt{\lambda^2 + m^2} - \alpha\lambda, \tag{66-1-2}$$

می‌رسیم که می‌نی‌مم مطلق آن

$$E_0 \leq m\sqrt{1 - \alpha^2}, \tag{67-1-2}$$

است و در نتیجه

$$E_{s,0} = m \left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right). \tag{68-1-2}$$

۲-۲ معادله‌ی دی-کی-پی

در فیزیکی ذرات بنیادی برای توصیف ذرات در مکانیک کوانتومی غیرنسبیته از معادله شرودینگر و در مکانیک کوانتومی نسبیه از معادلات کلاین-گوردن (ذرات با اسپین صفر)، دیراک (ذرات با اسپین $\frac{1}{2}$)، پروکا^۱ (ذرات با اسپین یک) و دافین-کمر-پتیو (ذرات با اسپین صفر و یک) استفاده می‌شود.

در این فصل سعی بر آن داریم به بررسی معادله دی-کی-پی بپردازیم که بیش از هفتاد سال پیش معرفی شده است. این معادله فیزیکی‌دانان نظری را قادر می‌ساخت که هم ذرات با اسپین صفر و هم اسپین یک را در قالب یک معادله در بخش نسبیه مورد بررسی قرار دهند [۹-۱۲]. این معادله برای بررسی و تحلیل برهم‌کنش‌های نسبیه هادرون‌های با اسپین صفر و یک با هسته، به عنوان جای‌گزین معادله‌های مرتبه دوم کلاین-گوردن و پروکا استفاده شده است. معادله دی-کی-پی تعمیم مستقیم از معادله دیراک است که در آن ماتریس‌های β جای‌گزین ماتریس‌های گاما شده‌اند با این تفاوت که جبر پی‌چی‌ده‌ای با عنوان جبر دی-کی-پی در آن در نظر گرفته می‌شود.

این معادله به طور معمول در دو قالب پنج مولفه‌ای و ده مولفه‌ای نمایش داده می‌شود که به ترتیب برای بوزون‌های اسپین صفر و اسپین یک استفاده می‌شوند. معادله برای ذرات با اسپین صفر، تحت پتانسیل برداری دارای ساختار ریاضی یکسانی با همتای شناخته شده‌اش یعنی معادله کلاین-گوردن دارد و در نتیجه طی سال‌ها، جامعه فیزیکی این طور تصور می‌کردند که این معادلات کاملاً هم‌ارز هستند، اگر چه در حال حاضر می‌دانیم که این هم‌ارزی به طور کامل قابل قبول نیست [۱۳-۱۵]. این معادله کاربردهای بیشتری در مقایسه با معادله پروکا و کلاین-گوردن در مطالعه برهم‌کنش‌ها دارد [۱۶، ۱۷].

هامیلتونی دی-کی-پی در حضور برهم‌کنش‌های اسکالر و برداری به صورت معادله زیر است [۱۸-۲۰]:

^۱ Proca Equation

$$(\beta \cdot \vec{p}c + mc^2 + U_s + \beta^0 U_v^o) \psi(\vec{r}) = \beta^0 E \psi(\vec{r}), \quad (1-2-2)$$

که

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \psi_{upper} \\ i\psi_{lower} \end{pmatrix}, \quad (2-2-2)$$

و برای مؤلفه‌های بالا و پایینی داریم:

$$\psi_{upper} \equiv \begin{pmatrix} \phi \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \psi_{lower} \equiv \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}. \quad (3-2-2)$$

U_s, U_v^o بی‌انگر برهم‌کنش‌های اسکالر و برداری و β^0 ماتریس‌های 5×5 هستند که به صورت زیر

تعریف می‌شوند

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \theta & \tilde{0} \\ \bar{0}_T & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \rho^i \\ -\rho_T^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4-2-2)$$

که $\tilde{0}, \bar{0}$ و 0 ماتریس‌های صفر 2×2 ، 2×3 و 3×3 می‌باشند، و

$$\theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5-2-2)$$

پس از محاسبات، معادله در سه بعد به صورت زیر نوشته می‌شود [۹-۱۲]

$$\begin{aligned} (mc^2 + U_s) \phi &= (E - U_v^o) \varphi + \hbar c \vec{\nabla} \cdot \vec{A}, \\ \vec{\nabla} \phi &= (mc^2 + U_s) \vec{A}, \\ (mc^2 + U_s) \varphi &= (E - U_v^o) \phi. \end{aligned} \quad (6-2-2)$$

که $\vec{A} = (A_1, A_2, A_3)$ می‌باشد و ψ به طور همزمان ویژه توابع J^2 و J_3 است

$$\begin{aligned} J^2 \begin{pmatrix} \psi_{upper} \\ \psi_{lower} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L^2 \psi_{upper} \\ (L + S)^2 \psi_{lower} \end{pmatrix} = J(J+1) \begin{pmatrix} \psi_{upper} \\ \psi_{lower} \end{pmatrix}, \\ J_3 \begin{pmatrix} \psi_{upper} \\ \psi_{lower} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} L_3 \psi_{upper} \\ (L_3 + S_3) \psi_{lower} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \psi_{upper} \\ \psi_{lower} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7-2-2)$$

جواب عمومی را به صورت رابطه (۴-۸) در نظر می‌گیریم

$$\psi_{JM}(r) = \begin{pmatrix} f_{nJ}(r)Y_{JM}(\Omega) \\ g_{nJ}(r)Y_{JM}(\Omega) \\ i \sum_L h_{nJL}(r)Y_{JL1}^M(\Omega) \end{pmatrix}, \quad (8-2-2)$$

که $Y_{JM}(\Omega)$ از مرتبه J هستند، و $Y_{JL1}^M(\Omega)$ بردارهای بهنجار شده هارمونی‌ک‌های کروی و f_{nJ} ، g_{nJ} و h_{nJL} توابع موج شعاعی هستند. معادلات بالا منجر به جفت معادلات دیفرانسیل زیر می‌شوند [۱۸-۲۰]

$$\begin{aligned} (E_{n,J} - U_v^0)F_{n,J}(r) &= (mc^2 + U_s)G_{n,J}(r), \\ \left(\frac{dF_{n,J}(r)}{dr} - \frac{J+1}{r}F_{n,J}(r) \right) &= -\frac{1}{\alpha_J}(mc^2 + U_s)H_{1,n,J}(r), \\ \left(\frac{dF_{n,J}(r)}{dr} + \frac{J}{r}F_{n,J}(r) \right) &= \frac{1}{\zeta_J}(mc^2 + U_s)H_{-1,n,J}(r), \\ -\alpha_J \left(\frac{dH_{1,n,J}(r)}{dr} + \frac{J+1}{r}H_{1,n,J}(r) \right) &+ \zeta_J \left(\frac{dH_{-1,n,J}(r)}{dr} - \frac{J}{r}H_{-1,n,J}(r) \right) = \\ \frac{1}{\hbar c} \left((mc^2 + U_s)F_{n,J}(r) - (E_{n,J} - U_v^0)G_{n,J}(r) \right), \end{aligned} \quad (9-2-2)$$

که پس از جداسازی نتیجه می‌دهد [۱۸]:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 F_{n,J}(r)}{dr^2} \left[1 + \frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2} \right] \\ &- \frac{dF_{n,J}(r)}{dr} \left[\frac{U_s'}{(m+U_s)} \left(1 + \frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2} \right) \right] \\ &+ F_{n,J}(r) \left[-\frac{J(J+1)}{r^2} \left(1 + \frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2} \right) + \frac{U_s'}{(m+U_s)} \left(\frac{J+1}{r} - \frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2} \frac{J}{r} \right) - \frac{1}{\alpha_J^2} \left((m+U_s)^2 - (E_{n,J} - U_v^0)^2 \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (10-2-2)$$

که

$$\begin{aligned} \zeta_J &= \sqrt{J/(2J+1)}, \\ \alpha_J &= \sqrt{\frac{J+1}{2J+1}}, \\ f_{nJ}(r) &= F(r)/r, \\ g_{nJ}(r) &= G(r)/r, \\ h_{nJJ\pm 1} &= H_{\pm 1}/r. \end{aligned} \quad (11-2-2)$$

با در نظر گرفتن $U_s = 0$ به فرمول معروف معادله (۴-۱۱) می‌رسیم [۱۸-۲۰]

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}-\frac{J(J+1)}{r^2}+(E_{n,J}-U_v^0)^2-m^2\right)F_{n,J}(r)=0. \quad (11-2-2)$$

فصل سه

روش‌های تحلیلی

روش‌های تحلیلی

در این رساله چند نمونه از روش‌های تحلیلی توانمند از جمله مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، روش نیکی-فرووی-واروو و روش حدس‌زدن را معرفی می‌کنیم.

۳-۱ مقدمه ای بر مکانیک کوانتومی ابرتقارنی

در مکانیک کوانتومی، فوق بارها^۱ (اگرچه این ترجمه خیلی مناسب نیست، بنا به محدودیت‌های زبانی از آن استفاده می‌کنیم) دو ویژه‌حالت اورتونرمال یک هامیلتونی را که دارای ویژه‌مقادیر یکسانی هستند به هم مرتبط می‌سازد. یکی از کاربردی‌ترین مدل‌های ابرتقارنی مدلی است که توسط وی‌تن^۲ فرمول‌بندی شده و مشتمل بر دو فوق بار است. برای ساده‌تر شدن بحث، با فوق‌بارهای مختلط زیر کار می‌کنیم [4]

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ A^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad (1-1-3)$$

که در آن عملگرهای خلق و فنا مطابق زیر تعریف می‌شوند

$$A = ip + \Phi(x),$$

$$A^\dagger = -ip + \Phi(x), \quad (2-1-3)$$

و هامیلتونی ابرتقارنی عبارتست از

$$H = \begin{pmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{pmatrix}, \quad (3-1-3)$$

که

$$H_\pm = \frac{p^2}{2m} + V_\pm(x), \quad (4-1-3)$$

و

$$V_\pm(x) = \Phi^2(x) \pm \Phi'(x), \quad (5-1-3)$$

از طرف دیگر شرط

$$A\phi_E^\mp(x) = \sqrt{E}\phi_E^\mp(x), \quad (6-1-3)$$

یا به طور معادل معادله دیفرانسیل مرتبه اول

$$\left(\mp \frac{\partial}{\partial x} + \Phi(x) \right) \phi_E^\mp = \sqrt{E}\phi_E^\mp, \quad (7-1-3)$$

¹ Supercharges

² Witten

یک/برتقارن خوب¹ است، یعنی $E_0 = 0$ و

$$\phi_0^-(x) = Ce^{-U}, \quad (8-1-3)$$

که C ثابت بهنجارش است و ابرپتانسیل U ² به راحتی از رابطه زیر به دست می‌آید

$$U(x) = \int_{x_0}^x dz \Phi(z), \quad (9-1-3)$$

بنابراین تا اینجا توانسته‌ایم تابع موج حالت پایه را به راحتی محاسبه کنیم. از معادله (۳) می‌توان دید که

$$\phi_0^-(x) \propto \frac{1}{\phi_0^+(x)}, \quad (10-1-3)$$

اکنون به معرفی شرط ناوردایی شکل³ می‌پردازیم. اگر شرط

$$V_+(a_0, x) = V_-(a_1, x) + R(a_1), \quad (11-1-3)$$

برقرار باشد، پتانسیل‌های همراه در اصطلاح دارای ناوردایی شکل هستند. در رابطه اخیر، a_1 مجموعه‌ای

جدید از پارامترهاست که به‌طور یکتا از طریق نگاشت $F: a_0 \mapsto a_1 = F(a_0)$ از مجموعه قدیمی a_0

تعیین می‌شود و جمله باقیمانده $R(a_1)$ شامل متغیر x نیست. در واقع، ناوردایی شکل به این معناست که

پتانسیل معادله شرودینگر، صرف نظر از یک جمله ثابت، به عنوان یک پتانسیل همراه جدید $V_-(a_1, x)$

تفسیر می‌شود که مرتبط با یک پتانسیل ابرتقارنی $\Phi(a_1, x)$ است. در صورت برقراری این شرط، همه چیز

ساده شده و ویژه مقادیر انرژی و تمام توابع موج مراتب بالاتر به راحتی از روابط زیر قابل محاسبه هستند

[3, 4]:

$$E_n = \sum_{s=1}^n R(a_s) \quad (12-1-3)$$

$$\phi_n^-(a_0, x) = \prod_{s=0}^{n-1} \left(\frac{A^+(a_s)}{[E_n - E_s]^{1/2}} \right) \phi_0^-(a_n, x) \quad (13-1-3)$$

$$\phi_0^-(a_n, x) = C \exp \left\{ - \int_0^x dz \Phi(a_n, z) \right\} \quad (14-1-3)$$

در این رابطه

¹ Good-SUSY

² Superpotential

³ Shape invariance

$$A_s^\dagger = -\frac{\partial}{\partial x} + \Phi(a_s, x), \quad (15-1-3)$$

و بنابراین اطلاعات دقیق هامیلتونی‌های زیر قابل حصول هستند

$$H_s = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_-(a_s, x) + E_s, \quad (16-1-3)$$

قابل ذکر است که ویژه‌توابع انرژی هامیلتونی‌های

$$H_s \phi_{n-s}^-(a_s, x) = E_n \phi_{n-s}^-(a_s, x), \quad n \geq s \quad (17-1-3)$$

با رابطه زیر به هم مرتبطند

$$\phi_{n-s}^-(a_s, x) = \frac{A^\dagger}{[E_n - E_s]^{1/2}} \phi_{n-(s+1)}^-(a_{s+1}, x) \quad (18-1-3)$$

به بیان ساده‌تر، اگر جواب معادله ریکاتی¹ و شرط ناوردایی شکل برقرار باشند، تمام اطلاعات سیستم قابل

محاسبه است. اکنون به بررسی یک مثال ساده می‌پردازیم. اگر

$$\Phi(x) = ax + \frac{b}{x}, \quad (19-1-3)$$

تابع موج حالت پایه مطابق زیر به دست می‌آید

$$\psi_{10}(x) = N_{10} e^{-\frac{a}{2}x^2} x^{+b}, \quad (20-1-3)$$

و پتانسیل‌های همراه عبارتند از

$$\begin{aligned} V_+ &= \Phi^2(x) + \Phi'(x) = a^2 x^2 + \frac{b(b+1)}{x^2} + (-2ab + a), \\ V_- &= \Phi^2(x) - \Phi'(x) = a^2 x^2 + \frac{b(b-1)}{x^2} + (-2ab - a), \end{aligned} \quad (21-1-3)$$

اگر نگاشتی مطابق

$$b \rightarrow b' = b+1, \quad (22-1-3)$$

را در نظر بگیریم، می‌بینیم که صرف‌نظر از یک جمله ثابت، پتانسیل‌ها یکسان هستند، یعنی شرط ناوردایی

شکل برقرار است. در نتیجه

¹ Riccati

$$b_1 = b_0 + 1 \Rightarrow b_s = b_0 + s \quad (23-1-3)$$

و

$$R(a_s) = -2a(b_{s-1} - b_s) \quad (24-1-3)$$

از طرف دیگر

$$b_s = b + s$$

$$b_{s-1} = b + (s-1) \quad (25-1-3)$$

بنابراین

$$E_n = \sum_{s=1}^n R(a_s) = R(a_1) + R(a_2) + \dots + R(a_{s-1}) + R(a_s), \quad (26-1-3)$$

مثال فیزیکی این مدل ساده، یک نوسانگر هماهنگ سه بعدی با ابرتانسیل

$$\Phi = \frac{1}{2} \omega r - \frac{(l+1)}{r}, \quad (27-1-3)$$

و پتانسیل ابرتقارنی

$$V_- = \frac{1}{4} \omega^2 r^2 + \frac{l(l+1)}{r} - \left(l + \frac{3}{2} \omega \right), \quad (28-1-3)$$

است که دارای ویژه توابع و ویژه مقادیر زیر است

$$y^{\frac{(l+1)}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) L_n^{l+\frac{1}{2}}(y), \quad y = \frac{1}{2} \omega r^2$$

$$E_n = 2\omega n, \quad (29-1-3)$$

که $L_n^{l+\frac{1}{2}}(y)$ توابع لاگر هستند.

۳-۱-۱ معادله دیراک را در حضور تقارن های اسپینی و شبه اسپینی

معادله دیراک عبارتست از [38-40]

$$H = \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta(m + S) + V - i\beta \vec{\alpha} \cdot \hat{r} U \quad (30-1-3)$$

که S, V, U به ترتیب پتانسیل های اسکالر، برداری و تانسوری هستند و ماتریس های مرسوم را در نظر

می گیریم. تابع موج کلی عبارتست از

$$\Psi_{njmk} = \begin{pmatrix} f_{nk}(\vec{r}) \\ g_{nk}(\vec{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \frac{f_{nk}(r)}{r} \varphi_{jmk}^l(\hat{r}) \\ i \frac{g_{nk}(r)}{r} \varphi_{jm(-k)}^{\bar{l}}(\hat{r}) \end{pmatrix}, \quad (31-1-3)$$

که φ_{jmk}^l هماهنگ‌های کروی اسپینی هستند و رابطه بین اعداد کوانتومی عبارتست از

$$k = \begin{cases} -(l+1) = -(j + \frac{1}{2}), & j = l + \frac{1}{2}, & \text{aligned spin } (k < 0) \\ l = +(j + \frac{1}{2}), j = l - \frac{1}{2}, & j = l + \frac{1}{2} & \text{unaligned spin } (k > 0) \end{cases}, \quad (32-1-3)$$

می‌توان نشان داد مولفه‌های بالا و پایین به ترتیب در معادلات شبه-شرودینگر زیر صدق می‌کنند

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k(k+1)}{r^2} - \frac{2k}{r}U + \frac{dU}{dr} + U^2 \right) g_k(r) \\ & - \frac{\frac{d\Delta}{dr}}{(E+m-\Delta)} \left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r} - U \right) g_k(r) \\ & = + (E+m-\Delta)(E-m-\Sigma) g_k(r), \end{aligned} \quad (33-1-3)$$

$$\begin{aligned} & \left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{k(k-1)}{r^2} - \frac{2k}{r}U - \frac{dU}{dr} + U^2 \right) f_k(r) \\ & - \frac{\frac{d\Sigma}{dr}}{(E-m-\Sigma)} \left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r} + U \right) f_k(r) \\ & = + (E+m-\Delta)(E-m-\Sigma) f_k(r), \end{aligned} \quad (34-1-3)$$

که

$$\begin{aligned} \Sigma(r) &= V(r) + S(r), \\ \Delta(r) &= V(r) - S(r), \end{aligned} \quad (35-1-3)$$

که با نمادگذاری انتخاب شده نیز همخوانی دارد.

۳-۱-۲ حد تقارن/اسپینی

در دو قسمت بعدی، حدهای اسپینی و شبه‌اسپینی را در معرفی می‌کنیم که در بررسی تغییر شکل،

باندهای مشابه و گشتاور مغناطیسی هسته‌ها کاربرد دارند [۴۴-۴۲]

در حالت اسپینی، $\Delta(r)$ را صفر در نظر می‌گیریم. بنابراین با در نظر گرفتن یک جمله هارمونیک در کنار

یک جمله تانسوری که هر دو جمله کولنی و خطی را دارد

$$\begin{aligned} U(r) &= -\frac{\alpha}{r} + \beta r, \\ \Sigma(r) &= Ar^2, \\ \Delta(r) &= 0, \end{aligned} \quad (36-1-3)$$

معادله متناظر تبدیلی می‌شود به

$$\begin{aligned} &\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(k+\alpha)(k+\alpha+1)}{r^2} + (\beta^2 + A(E_{nk} + m))r^2 + (-2k\beta + \beta - 2\alpha\beta) \right] g_k(r) = \\ &((E_{nk}^2 - m^2)) g_k(r), \end{aligned} \quad (37-1-3)$$

اکنون با در ذهن داشتن مثال ابرتقارنی قبل، ابرپتانسیل را مطابق زیر انتخاب می‌کنیم

$$\Phi(r) = \frac{(k+\alpha)}{r} + \sqrt{\beta^2 + A(E_{nk} + m)}r, \quad (38-1-3)$$

که متناظر با پتانسیل ابرتقارنی

$$V_- = \frac{(k+\alpha)(k+\alpha+1)}{r^2} + (\beta^2 + A(E_{nk} + m))r^2 + 2\left(k + \alpha - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\beta^2 + A(E_{nk} + m)} \quad (39-1-3)$$

است. این معادله را با استفاده از مکانیک کوانتومی ابر تقارنی حل کنیم. به این منظور می‌نویسیم

$$\begin{aligned} &\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(k+\alpha)(k+\alpha+1)}{r^2} + (\beta^2 + A(E_{nk} + m))r^2 + 2\left(k + \alpha - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\beta^2 + A(E_{nk} + m)} \right] g_k(r) = \\ &\varepsilon_{nk} g_k(r) \\ \varepsilon_{nk} &= \left((E_{nk}^2 - m^2) + (2k\beta - \beta + 2\alpha\beta) + 2\left(k + \alpha - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\beta^2 + A(E_{nk} + m)} \right), \end{aligned} \quad (40-1-3)$$

که

$$\tilde{k} = k + \alpha = \begin{cases} -(l+1) & \text{for } j = (l+1/2) \\ l & \text{for } j = (l-1/2) \end{cases}, \quad (41-1-3)$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \varepsilon_{nk} &= \left((E_{nk}^2 - m^2) + (2k\beta - \beta + 2\alpha\beta) + 2\left(k + \alpha - \frac{1}{2}\right)\sqrt{\beta^2 + A(E_{nk} + m)} \right) = \\ &4N\sqrt{\beta^2 + A(E_{nk} + m)}, \end{aligned} \quad (42-1-3)$$

یا به طور معادل

$$(E_{nk}^2 - m^2) = 2\sqrt{\beta^2 + A(E_{nk} + m)} \left(2N - \left(k + \alpha - \frac{1}{2} \right) \right) - (2k\beta - \beta + 2\alpha\beta), \quad (43-1-3)$$

که عدد کوانتومی اصلی ما عبارتست از

$$N = n + \tilde{k} + \frac{1}{2}, \quad (44-1-3)$$

و ویژه توابع عبارتند از

$$g_k(r) = y^{\frac{(k+\alpha+1)}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) L_n^{(k+\alpha)+\frac{1}{2}}(y),$$

$$y = (\beta^2 + A(E_{nk} + m))^{\frac{1}{2}} r^2, \quad (45-1-3)$$

۳-۱-۳ حد تقارن شبه اسپینی

این بار حد شبه اسپینی را در نظر می‌گیریم که در آن $\Sigma(r)$ صفر و $\Delta(r) = Ar^2$ است:

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(\alpha+k-1)(\alpha+k)}{r^2} + r^2(A(E_{nk} - m) + \beta^2) + (-2k\beta - 2\alpha\beta - \beta) \right) f_k(r) =$$

$$(E_{nk}^2 - m^2) f_k(r), \quad (46-1-3)$$

که آن را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\left(-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{(\alpha+k-1)(\alpha+k)}{r^2} + r^2(A(E_{nk} - m) + \beta^2) + 2\left(\alpha + k - \frac{3}{2}\right)\sqrt{\beta^2 + A(E_{nk} - m)} \right) =$$

$$\varepsilon'_{nk} f_k(r), \quad (47-1-3)$$

و با استدلالی مطابق وضعیت قبل

$$\varepsilon'_{nk} = \left((E_{nk}^2 - m^2) + (2k\beta + 2\alpha\beta + \beta) + 2\left(k + \alpha - \frac{3}{2}\right)\sqrt{\beta^2 + A(E_{nk} - m)} \right),$$

$$\varepsilon'_{nk} = 4N\sqrt{\beta^2 + A(E_{nk} - m)}, \quad (48-1-3)$$

$$f_k(r) = y^{\frac{(\alpha+k)}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}y\right) L_n^{\alpha+k-\frac{1}{2}}(y),$$

$$y = \sqrt{(A(E_{nk} - m) + \beta^2)} r^2, \quad (49-1-3)$$

۲-۳ روش NU

این روش برای حل بسیاری از معادلات ریاضی فیزیکی از فیزیکی ذرات گرفته تا کیهان شناسی و فیزیکی سیاه چاله ها کاربرد داشته است. معادله ای به فرم را در نظر بگیری:

$$\psi''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \psi'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \psi(s) = 0, \quad (1-2-3)$$

$\sigma(s)$ و $\tilde{\sigma}(s)$ چند جمله ای های حد اکثر از مرتبه دو هستند و حد اکثر مرتبه $\tilde{\tau}(s)$ یک است. با استفاده

از تبدیلی

$$\psi(s) = W(s)\Phi(s), \quad (2-2-3)$$

معادله قبل تبدیلی می شود به

$$\sigma(s)\Phi''(s) + \tau(s)\Phi'(s) + \lambda\Phi(s) = 0, \quad (3-2-3)$$

که

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s), \quad \tau'(s) < 0. \quad (4-2-3)$$

معادله اصلی ما یک جواب خصوصی درجه دارد و

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2}\sigma''(s), \quad \text{with } n = 0, 1, 2, \dots \quad (5-2-3)$$

برای به دست آوردن انرژی سیستم، ناگزیری جواب معادله

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + k\sigma(s)},$$

$$\lambda = k + \pi'(s), \quad (6-2-3)$$

را پیدا کنی که در آن λ یک ثابت است. عبارت زیر رادی کال باید توان دو یک عبارت درجه یک

باشد چرا که $\pi(s)$ از درجه یک است و می توان جواب معادله اولیه بر حسب فرمول رودری گز نوشت

$$\Phi_n(s) = \frac{C_n}{\rho(s)} \frac{d^n}{ds^n} [\sigma^n(s)\rho(s)], \quad (7-2-3)$$

در این رابطه C_n ثابت بهنجارش است و تابع وزن در رابطه

$$[\sigma(s)\rho(s)]' = \tau(s)\rho(s). \quad (8-2-3)$$

صدق می کند. ضریب دی گر در رابطه لگاریتمی

$$\frac{d}{ds} \ln W(s) = \frac{\sigma(s)}{\pi(s)}. \quad (9-2-3)$$

صدق می کند.

۳-۲-۱ فرم پارامتری ک روش

در فرم پارامتری این روش، کار ساده تر شده است. معادله

$$\left\{ \frac{d^2}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d}{ds} + \frac{1}{[s(1 - \alpha_3 s)]^2} [-\xi_1 s^2 + \xi_2 s - \xi_3] \right\} \psi = 0 \quad (10-2-3)$$

را در نظر بگیری. طبق روش پارامتری ک، ویژه توابع عبارتند از

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}-\alpha_{10}}{\alpha_3}-1)} (1 - 2\alpha_3 s) \quad (11-2-3)$$

و ویژه مقادیر انرژی از رابطه

تعیین می شوند که در آن

$$\alpha_2 n - (2n+1)\alpha_5 + (2n+1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3 \sqrt{\alpha_8}) + n(n-1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3 \alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} = 0, \quad (12-2-3)$$

و

$$\alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1),$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3),$$

$$\alpha_6 = \alpha_5^2 + \xi_1,$$

$$\alpha_7 = 2\alpha_4 \alpha_5 - \xi_2,$$

$$\alpha_8 = \alpha_4^2 + \xi_3,$$

$$\alpha_9 = \alpha_3 \alpha_7 + \alpha_3^2 \alpha_8 + \alpha_6,$$

$$\alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8},$$

$$\alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}),$$

$$\alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}$$

$$\alpha_{13} = \alpha_5 - (\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}). \quad (13-2-3)$$

در حالت خاص $\alpha_3 = 0$ ، از روابط

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}-\alpha_{10}-1}{\alpha_3})} (1-2\alpha_3 s) = L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11}s), \quad (14-2-3)$$

و

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} (1-\alpha_3 s)^{-\alpha_{12}-\frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} = e^{\alpha_{13}s}, \quad (15-2-3)$$

داری^۳

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}} e^{\alpha_{13}s} L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11}s), \quad (16-2-3)$$

۳-۳ روش حدس زدن^۱

در بسیاری از معادلات نمی‌توان جوابی دقیقی پیدا کرد. در چنین مواردی می‌توان با حل یک معادله

ریکاتی جوابی مناسب برای مسئله حدس زد. برای روشن شدن موضوع جوابی به فرم

$$R_n(x) = f_n(x) \exp(g_n(x)), \quad (1-3-3)$$

را در نظر می‌گیریم که در آن

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } n=0 \\ \prod_{i=1}^n (x-\alpha_i^n), & \text{if } n \geq 1 \end{cases}. \quad (2-3-3)$$

اگر جواب حالت پایله را در نظر بگیری^۳، یعنی

$$R_0(x) = \exp(g_0(x)), \quad (3-3-3)$$

و در معادله شرودی^۳ نگر جای‌گذاری کنیم به یک معادله ریکاتی می‌رسی^۳ که طرف دوم آن پتانسیل

معادله شرودی^۳ نگر است، یعنی

$$g_0''(x) + g_0'^2(x) \equiv G'(x) + G^2(x) = V_{\text{eff}}(x). \quad (4-3-3)$$

^۱ Ansatz

به طور مثال، پتانسیل مورس را در نظر بگیری:

$$V(r) = D_e [q - \exp(-\alpha x)]^2 = D_e \exp(-2a(r - r_e)) - 2qD_e \exp(-a(r - r_e)) + q^2 D_e, \quad (5-3-3)$$

معادله شرودی نگر متناظر عبارتست از

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} V(r) - \frac{(D+2l-1)(D+2l-3)}{4r^2} + \frac{2\mu E_{n,l}}{\hbar^2} \right] R_{n,l}(r) = 0, \quad (6-3-3)$$

یا با بسط تابع نمایی داری:

$$g''(x) + g'^2(x) \equiv G'(x) + G^2(x) = A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 + \frac{A_{-1}}{x} + \frac{A_{-2}}{x^2}. \quad (7-3-3)$$

معادله ریکاتی متناظر عبارتست از

$$g''(x) + g'^2(x) \equiv G'(x) + G^2(x) = A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 + \frac{A_{-1}}{x} + \frac{A_{-2}}{x^2}. \quad (8-3-3)$$

که جوابی به فرم زیر دارد

$$g(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta \ln x. \quad (9-3-3)$$

با قرار دادن این جواب در معادله و مساوی قرار دادن توان‌های متناظر داری:

$$\left(\frac{2\mu a^2}{\hbar^2} (D_e e^{2ar_e} - 2qD_e e^{ar_e} + q^2 D_e) + \frac{2\mu E_{n,l} a^2}{\hbar^2} \right) = \gamma^2 + 2\beta,$$

$$\frac{2\mu a^2}{\hbar^2} (2D_e e^{2ar_e} - qD_e e^{ar_e}) = 6\alpha\delta + 4\beta\gamma + 4\beta\delta + 6\alpha,$$

$$\frac{2\mu a^2}{\hbar^2} (2D_e e^{2ar_e} - qD_e e^{ar_e}) = 4\beta^2 + 6\alpha\gamma,$$

$$\frac{2\mu a^2}{\hbar^2} \left(\frac{4D_e e^{2ar_e}}{3} - \frac{qD_e e^{ar_e}}{3} \right) = 12\alpha\beta,$$

$$\frac{2\mu a^2}{\hbar^2} \left(\frac{2D_e e^{2ar_e}}{3} - \frac{qD_e e^{ar_e}}{12} \right) = 9\alpha^2,$$

$$\frac{2\mu a^2 C}{\hbar^2} = 2\gamma\delta,$$

$$\frac{\mu a^4 (D + 2l - 1)(D + 2l - 3)}{2\hbar^2} = \delta^2 - \delta. \quad (10-3-3)$$

که جواب مسئله را تعیین می کند. این روش علی رغم سادگی در حل بسیاری از مسایل فیزیکی، از

فیزیکی ذرات و هسته ای گرفته تا کیهان شناسی مورد استفاده قرار گرفته است.

فصل چهار

معادله سالپیتر بدون اسپین دوجسمی تحت برهم کنش های مختلف

معادله سالپیتر بدون اسپین را می‌توان به عنوان تقریب مناسبی برای معادله بته-سالپیتر در نظر گرفت که برای توصیف حالت‌های مقید در نظریه میدان نسبیتی به کار می‌رود. در نگاهی دیگر این معادله تعمیم معادله موج غیرنسبیتی شرودینگر به محدوده نسبیتی است. در این معادله بستگی زمانی و همچنین درجات آزادی اسپینی در نظر گرفته نمی‌شوند.

بر خلاف سایر معادلاتی که معمولاً با آن‌ها کار می‌کنیم، این معادله دارای جواب‌های تحلیلی دقیق نیست و در حل آن ناگزیر از استفاده از روش‌های تقریبی هستیم. جنبه‌های مختلف این معادله و پیشنهادات بسیار خوب و جالبی برای حل آن در کارهای W. Lucha, F. F. Schoberl, R. Hall ارائه شده‌اند [۱۰-۲۴]. در این قسمت، ما این معادله را تحت پتانسیلی نمایی در نظر می‌گیریم که در بسیاری از سیستم‌های فیزیکی کاربرد دارند [۲۵-۳۳].

۴-۱ پتانسیل نمایی

معادله سالپیتر بدون اسپین برای دو ذره که تحت پتانسیلی با تقارن کروی برهم‌کنش می‌کنند، در سیستم مرکز جرم عبارتست از

$$\left[\sum_{i=1,2} \sqrt{\Delta + m_i^2} + V(r) - M \right] \chi(r) = 0, \quad \Delta = \nabla^2 \quad (1-1-4)$$

که $\chi(r) = Y_{lm}(\theta, \phi) R_{nl}(r)$. برای ذرات سنگین، تقریب [۳۵-۳۹]

$$\sum_{i=1,2} \sqrt{\Delta + m_i^2} = m_1 + m_2 - \frac{\Delta}{2\mu} - \frac{\Delta^2}{8\eta^3} - \dots, \quad (2-1-4)$$

که در آن

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\eta = \mu \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 m_2 - 3\mu^2} \right)^{1/3}, \quad (3-1-4)$$

تقریبی کاملاً منطقی است. با جایگذاری داریم [۴۰-۴۵]

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + W_{nl}(r) - \frac{W_{nl}^2(r)}{2\tilde{m}} \right] \psi_{nl}(r) = 0, \quad (4-1-4)$$

که

$$W_{nl}(r) = V(r) - E_{nl}(r),$$

$$\tilde{m} = \eta^3 / \mu^2 = (m_1 m_2 \mu) / (m_1 m_2 - 3\mu^2). \quad (5-1-4)$$

اکنون یک پتانسیل نمایی به فرم $V(r) = v_0 e^{-a(r-r_0)}$ را در نظر می‌گیریم که در توصیف سیستم‌های با انرژی بالا کاربرد دارد. با این جایگذاری داریم

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + (v_0 e^{-a(r-r_0)} - E_{nl}) - \frac{(v_0^2 e^{-2a(r-r_0)} + E_{nl}^2 - 2v_0 e^{-a(r-r_0)} E_{nl})}{2\tilde{m}} \right] \psi_{nl}(r) = 0. \quad (6-1-4)$$

اکنون برای حل تحلیلی معادله از تقریب

$$\frac{1}{r^2} \approx (C_0 + C_1 e^{-\alpha x} + C_2 e^{-2\alpha x}), \quad (7-1-4)$$

استفاده می‌کنیم که در آن

$$x = \frac{r - r_0}{r_0}$$

$$\alpha = a r_0$$

$$C_0 = \frac{1}{r_0^2} \left(1 - \frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} \right),$$

$$C_1 = \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{4}{\alpha} - \frac{6}{\alpha^2} \right), \quad (8-1-4)$$

$$C_2 = \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{-1}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} \right).$$

با جایگذاری رابطه اخیر در معادله (۴) داریم

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + e^{-\alpha x} r_0^2 \left(C_1 l(l+1) + \frac{2\mu v_0}{\hbar^2} + \frac{2v_0 E_{nl} \mu}{\tilde{m} \hbar^2} \right) + e^{-2\alpha x} r_0^2 \left(-\frac{\mu v_0^2}{\tilde{m} \hbar^2} + C_2 l(l+1) \right) + r_0^2 \left(+C_0 l(l+1) - \frac{2\mu E_{nl}}{\hbar^2} - \frac{\mu E_{nl}^2}{\tilde{m} \hbar^2} \right) \right] \times \psi_{nl}(x) = 0 \quad (9-1-4)$$

اکنون یک مثال ابرتقارنی دیگر را مرور می‌کنیم. اگر ابرتانسیل را مطابق

$$\Phi(x) = A - B \exp(-\alpha x), \quad (10-1-4)$$

انتخاب کنیم، داریم

$$\begin{cases} V_+(x) = \Phi^2(x) + \Phi'(x) = A^2 + B^2 \exp(-2\alpha x) - 2B(A + \alpha/2) \exp(-\alpha x) \\ V_-(x) = \Phi^2(x) - \Phi'(x) = A^2 + B^2 \exp(-2\alpha x) - 2B(A - \alpha/2) \exp(-\alpha x) \end{cases}, \quad (11-1-4)$$

همان طور که در قسمت مربوط به حدود تقارنی معادله دیراک به اختصار اشاره شد، این پتانسیل ها تحت

یک نگاشت به فرم

$$A_1 = F(A) = A - \alpha. \quad (12-1-4)$$

دارای ناوردایی شکل هستند. بنابر این ، مشابه آنچه قبلاً گفته شد، داریم

$$\begin{aligned} A_1 &= F(A) = A - \alpha, \\ A_2 &= F(A_1) = A_1 - \alpha = A - 2\alpha, \\ &\vdots \\ A_s &= F(A_{s-1}) = A - n\alpha, \end{aligned} \quad (13-1-4)$$

و با استفاده از رابطه ویژه مقادیر انرژی و توابع موج به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{s=1}^n R(A_s) = R(A_1) + R(A_2) + \dots + R(A_n) \\ &= (A^2 - A_1^2) + (A_1^2 - A_2^2) + \dots + (A_{n-1}^2 - A_n^2) \\ &= A^2 - A_n^2 = A^2 - (A - n\alpha)^2. \end{aligned} \quad (14-1-4)$$

9

$$\begin{aligned} &y^{s-n} \exp(-y/2) L_n^{2s-2n}(y) \\ &y = (2B/\alpha) \exp(-\alpha x), \\ &s = A/\alpha. \end{aligned} \quad (15-1-4)$$

اکنون می بینیم که باز هم یک معادله شبه-شرودینگر تحت پتانسیل روزن-مورس داریم و بنابراین

$$B^2 = r_0^2 \left(-\frac{\mu v_0^2}{\tilde{m}\hbar^2} + C_2 l(l+1) \right), \quad (16-1-4)$$

$$r_0^2 \left(C_1 l(l+1) + \frac{2\mu v_0}{\hbar^2} + \frac{2v_0 E_{nl} \mu}{\tilde{m}\hbar^2} \right) = -2 \sqrt{r_0^2 \left(-\frac{\mu v_0^2}{\tilde{m}\hbar^2} + C_2 l(l+1) \right)} (A + \alpha/2), \quad (17-1-4)$$

$$A = \frac{r_0^2 \left(C_1 l(l+1) + \frac{2\mu v_0}{\hbar^2} + \frac{2v_0 E_{nl} \mu}{\tilde{m}\hbar^2} \right)}{-2 \sqrt{r_0^2 \left(-\frac{\mu v_0^2}{\tilde{m}\hbar^2} + C_2 l(l+1) \right)}} - \alpha/2, \quad (18-1-4)$$

9

$$\begin{aligned} & \left(\left(2r_0 \sqrt{-\frac{\mu v_0^2}{\tilde{m}\hbar^2} + C_2 l(l+1)} \right) / \alpha \right) \exp(-\alpha x) \left(\frac{r_0 \left(C_1 l(l+1) + \frac{2\mu v_0}{\hbar^2} + \frac{2v_0 E_{nl} \mu}{\tilde{m}\hbar^2} \right)}{-2\alpha \sqrt{-\frac{\mu v_0^2}{\tilde{m}\hbar^2} + C_2 l(l+1)}} \right)^{-1/2-n} \\ & \times \exp \left(- \left(2r_0 \sqrt{-\frac{\mu v_0^2}{\tilde{m}\hbar^2} + C_2 l(l+1)} \right) / \alpha \right) \exp(-\alpha x) / 2 \\ & \times L_n \left(\frac{r_0 \left(C_1 l(l+1) + \frac{2\mu v_0}{\hbar^2} + \frac{2v_0 E_{nl} \mu}{\tilde{m}\hbar^2} \right)}{-\alpha \sqrt{-\frac{\mu v_0^2}{\tilde{m}\hbar^2} + C_2 l(l+1)}} \right)^{-1/2-2n} \left(\left(2r_0 \sqrt{-\frac{\mu v_0^2}{\tilde{m}\hbar^2} + C_2 l(l+1)} \right) / \alpha \right) \exp(-\alpha x), \end{aligned} \quad (19-1-4)$$

رابطه انرژی نی‌ز عبارتست از

$$\begin{aligned} & r_0^2 \left(C_0 l(l+1) - \frac{2\mu E_{nl}}{\hbar^2} - \frac{\mu E_{nl}^2}{\tilde{m}\hbar^2} \right) = \\ & \left(\frac{r_0 \left(C_1 l(l+1) + \frac{2\mu v_0}{\hbar^2} + \frac{2v_0 E_{nl} \mu}{\tilde{m}\hbar^2} \right)}{2 \sqrt{\left(C_2 l(l+1) - \frac{\mu v_0^2}{\tilde{m}\hbar^2} \right)}} + \left(N + \frac{1}{2} \right) \alpha \right)^2, \end{aligned} \quad (20-1-4)$$

۴-۲ پتانسیل یوکاوا^۱

در این قسمت پتانسیل معروف یوکاوا را در نظر می‌گیریم:

^۱ Yukawa

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad (1-2-4)$$

معادله سالیبی تر متناظر عبارتست از

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + (V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} - E_{n,l}) - \frac{1}{2\tilde{m}} (V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} - E_{n,l})^2 \right] \psi_{n,l}(r) = 0. \quad (2-2-4)$$

در ابتدا تقریب‌های

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{4\alpha^2 e^{-2\alpha r}}{(1-e^{-2\alpha r})^2}, \quad (3-2-4)$$

and

$$\frac{1}{r} \approx \frac{2\alpha e^{-\alpha r}}{(1-e^{-2\alpha r})}, \quad (4-2-4)$$

را معرفی می‌کنیم. با این کار می‌رسی‌م به

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - 4\alpha^2 l(l+1) \frac{e^{-2\alpha r}}{(1-e^{-2\alpha r})^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} (2V_0 \alpha \frac{e^{-2\alpha r}}{1-e^{-2\alpha r}} - E_{n,l}) + \frac{\mu}{\hbar^2 \tilde{m}} (2V_0 \alpha \frac{e^{-2\alpha r}}{1-e^{-2\alpha r}} - E_{n,l})^2 \right] \times \psi_{n,l}(r) = 0. \quad (5-2-4)$$

برای حل این معادله ابتدا تبدیلی $z = e^{-2\alpha r}$ را معرفی می‌کنیم. با این کار داریم

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1-z}{z(1-z)} \frac{d}{dz} + \frac{1}{[z(1-z)]^2} \left\{ -\left(-\frac{\mu}{\hbar^2 \alpha^2} (V_0 + \frac{E_{n,l}}{2}) - \frac{\mu V_0^2}{\hbar^2 \tilde{m}} - \frac{\mu E_{n,l}^2}{4\hbar^2 \tilde{m} \alpha^2} + \frac{\mu V_0 E_{n,l}}{\hbar^2 \tilde{m} \alpha^2} \right) z^2 \right. \right. \\ \left. \left. + (-l(l+1) - \frac{\mu V_0}{\hbar^2 \alpha} - \frac{\mu E_{n,l}}{\hbar^2 \alpha^2} - \frac{\mu E_{n,l}^2}{2\hbar^2 \tilde{m} \alpha^2} - \frac{\mu V_0 E_{n,l}}{\hbar^2 \tilde{m} \alpha^2}) z \right. \right. \\ \left. \left. - \left(-\frac{\mu E_{n,l}^2}{4\hbar^2 \tilde{m} \alpha^2} - \frac{\mu E_{n,l}}{2\hbar^2 \alpha^2} \right) \right\} \right] \psi_{n,l}(z) = 0. \quad (6-2-4)$$

و پارمترهای موردنیاز در روش NU عبارتند از

$$\xi_1 = -\frac{\mu}{\hbar^2 \alpha^2} (V_0 + \frac{E_{n,l}}{2}) - \frac{\mu V_0^2}{\hbar^2 \tilde{m}} - \frac{\mu E_{n,l}^2}{4\hbar^2 \tilde{m} \alpha^2} + \frac{\mu V_0 E_{n,l}}{\hbar^2 \tilde{m} \alpha^2}, \\ \xi_2 = -l(l+1) - \frac{\mu V_0}{\hbar^2 \alpha} - \frac{\mu E_{n,l}}{\hbar^2 \alpha^2} - \frac{\mu E_{n,l}^2}{2\hbar^2 \tilde{m} \alpha^2} - \frac{\mu V_0 E_{n,l}}{\hbar^2 \tilde{m} \alpha^2}, \\ \xi_3 = -\frac{\mu E_{n,l}^2}{4\hbar^2 \tilde{m} \alpha^2} - \frac{\mu E_{n,l}}{2\hbar^2 \alpha^2}, \\ \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1. \quad (7-2-4)$$

و معادله انرژی متناظر عبارتست از

$$n + \frac{1}{2} (2n+1) + (2n+1) \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_3 - \xi_2} + \sqrt{\xi_3} \right) + n(n-1) - \xi_2 + 2\xi_3 + 2\sqrt{\xi_3 \left(\frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_3 - \xi_2 \right)} = 0, \quad (8-2-4)$$

توابع موج هم عبارتند از

$$\psi_{n,l}(z) = z^{\alpha_{12}} (1-z)^{-\alpha_{12}-\alpha_{13}} p_n^{(\alpha_{10}-1, \alpha_{11}-\alpha_{10}-1)} (1-2z). \quad (9-2-4)$$

که

$$\alpha_4 = 0,$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{4} + \xi_1,$$

$$\alpha_7 = -\xi_2,$$

$$\alpha_8 = \xi_3,$$

$$\alpha_9 = \frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_3 - \xi_2,$$

$$\alpha_{10} = 1 + 2\sqrt{\xi_3},$$

$$\alpha_{11} = 2 + 2\left(\sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_3 - \xi_2} + \sqrt{\xi_3}\right),$$

$$\alpha_{12} = \sqrt{\xi_3},$$

$$\alpha_{13} = -\frac{1}{2} - \left(\sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_3 - \xi_2} + \sqrt{\xi_3}\right). \quad (10-2-4)$$

و در نتیجه

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}} (1-\alpha_3 s)^{-\alpha_{12}-\frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} p_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3}-\alpha_{10}-1)} (1-2\alpha_3 s), \quad (11-2-4)$$

جدول ۱،۴. انرژی سیستم برای پتانسیل یوکاوا به ازای

$$\alpha = 0.001, V_0 = -0.7, \mu = \frac{1}{2}, \tilde{m} = 2 \text{ and } \hbar = 1$$

$ n,l\rangle$	$E_{0,l}$	$ n,l\rangle$	$E_{1,l}$	$ n,l\rangle$	$E_{2,l}$	$ n,l\rangle$	$E_{3,l}$
$ 0,0\rangle$	0.2917844975	$ 1,0\rangle$	0.2909912076	$ 2,0\rangle$	0.2901983486	$ 3,0\rangle$	0.2894059234

$ 0,1\rangle$	0.2917807046	$ 1,1\rangle$	0.2909874117	$ 2,1\rangle$	0.2901945495	$ 3,1\rangle$	0.2894021212
$ 0,2\rangle$	0.2917731190	$ 1,2\rangle$	0.2909798198	$ 2,2\rangle$	0.2901869514	$ 3,2\rangle$	0.2893945169
$ 0,3\rangle$	0.2917617409	$ 1,3\rangle$	0.2909684324	$ 2,3\rangle$	0.2901755547	$ 3,3\rangle$	0.2893831108
$ 0,4\rangle$	0.2917465708	$ 1,4\rangle$	0.2909532499	$ 2,4\rangle$	0.2901603597	$ 3,4\rangle$	0.2893679034
$ 0,5\rangle$	0.2917276092	$ 1,5\rangle$	0.2909342727	$ 2,5\rangle$	0.2901413671	$ 3,5\rangle$	0.2893488952
$ 0,6\rangle$	0.2917048569	$ 1,6\rangle$	0.2909115017	$ 2,6\rangle$	0.2901185774	$ 3,6\rangle$	0.2893260870
$ 0,7\rangle$	0.2916783146	$ 1,7\rangle$	0.2908849377	$ 2,7\rangle$	0.2900919917	$ 3,7\rangle$	0.2892994795
$ 0,8\rangle$	0.2916479835	$ 1,8\rangle$	0.2908545817	$ 2,8\rangle$	0.2900616108	$ 3,8\rangle$	0.2892690739
$ 0,9\rangle$	0.2916138645	$ 1,9\rangle$	0.2908204348	$ 2,9\rangle$	0.2900274360	$ 3,9\rangle$	0.2892348711
$ 0,10\rangle$	0.2915759590	$ 1,10\rangle$	0.2907824983	$ 2,10\rangle$	0.2899894685	$ 3,10\rangle$	0.2891968726

۳-۴ پتانسیل وودز-ساکسون^۱

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + \exp(\frac{r-R_0}{a})}, \quad (1-3-4)$$

و معادله متناظر تبدیلی می شود به

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} + \left(-\frac{V_0}{1 + \exp(\frac{r-R_0}{a})} - E_{n,l} \right) - \frac{1}{2\tilde{m}} \left(-\frac{V_0}{1 + \exp(\frac{r-R_0}{a})} - E_{n,l} \right)^2 \right] \psi_{n,l}(r) = 0. \quad (2-3-4)$$

با تبدیلی به فرم

$$x = \frac{r-R_0}{R_0}, \quad \alpha = \frac{R_0}{a} \quad (3-3-4)$$

معادله سالیپی تر تبدیلی می شود به

¹ Woods-Saxon

$$\left[\frac{1}{R_0^2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{R_0^2(1+x)^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(-\frac{V_0}{1+\exp(\alpha x)} - E_{n,l} \right) + \frac{\mu}{\hbar^2 \tilde{m}} \left(-\frac{V_0}{1+\exp(\alpha x)} - E_{n,l} \right)^2 \right] \psi_{n,l}(x) = 0. \quad (4-3-4)$$

برای این که بتوان جوابی کلی را به دست آورد، تقریب زیر را معرفی می‌کنیم:

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{1}{R_0^2} \frac{1}{(1+x)^2} \approx \frac{1}{R_0^2} \left(C_0 + \frac{C_1}{1+\exp(\alpha x)} + \frac{C_2}{(1+\exp(\alpha x))^2} \right) \quad (5-3-4)$$

که

$$\begin{aligned} C_0 &= 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2}, \\ C_1 &= \frac{8}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2}, \\ C_2 &= \frac{48}{\alpha^2}, \end{aligned} \quad (6-3-4)$$

با استفاده از این تقریب، داریم

$$\left\{ \frac{1}{R_0^2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{l(l+1)}{R_0^2} \left(C_0 + \frac{C_1}{1+\exp(\alpha x)} + \frac{C_2}{(1+\exp(\alpha x))^2} \right) - \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(-\frac{V_0}{1+\exp(\alpha x)} - E_{n,l} \right) + \frac{\mu}{\hbar^2 \tilde{m}} \left(-\frac{V_0}{1+\exp(\alpha x)} - E_{n,l} \right)^2 \right\} \psi_{n,l}(x) = 0. \quad (7-3-4)$$

اکنون با استفاده از $y = e^{\alpha x}$ این معادله را به فرم

$$\left[\frac{d^2}{dy^2} + \frac{1+y}{y(1+y)} \frac{d}{dy} + \frac{1}{[y(1+y)]^2} \left\{ -\left(-\frac{C}{\alpha^2}\right)y^2 + \left(\frac{B}{\alpha^2} + \frac{2C}{\alpha^2}\right)y - \left(-\frac{A}{\alpha^2} - \frac{B}{\alpha^2} - \frac{C}{\alpha^2}\right) \right\} \right] \psi_{n,l}(y) = 0 \quad (8-3-4)$$

می‌نویسیم که در آن

$$\begin{aligned} A &= -l(l+1)C_2 + \frac{\mu V_0^2 R_0^2}{\hbar^2 \tilde{m}}, \\ B &= -l(l+1)C_1 + \frac{2\mu V_0 R_0^2}{\hbar^2} + \frac{2\mu V_0 R_0^2}{\hbar^2 \tilde{m}}, \\ C &= -l(l+1)C_0 + \frac{2\mu E_{n,l} R_0^2}{\hbar^2} + \frac{\mu E_{n,l}^2 R_0^2}{\hbar^2 \tilde{m}}, \end{aligned} \quad (9-3-4)$$

همان‌طور که واضح است، این معادله به فرم فوق‌هندسی تبدیلی شده است و پارامترهای مورد نیاز

عبارتند از

$$\xi_1 = -\frac{C}{\alpha^2}, \quad \xi_2 = \frac{B+2C}{\alpha^2}, \quad \xi_3 = \frac{-A-B-C}{\alpha^2}$$

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = -1$$

$$\alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_6 = \frac{1}{4} + \xi_1, \quad \alpha_7 = -\xi_2, \quad \alpha_8 = \xi_3$$

$$\alpha_9 = \frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_3 + \xi_2, \quad \alpha_{10} = 1 + 2\sqrt{\xi_3},$$

$$\alpha_{11} = -2 + 2(\sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_3 + \xi_2} - \sqrt{\xi_3}), \quad \alpha_{12} = \sqrt{\xi_3},$$

$$\alpha_{13} = \frac{1}{2} - (\sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_3 + \xi_2} - \sqrt{\xi_3}), \quad (10-3-4)$$

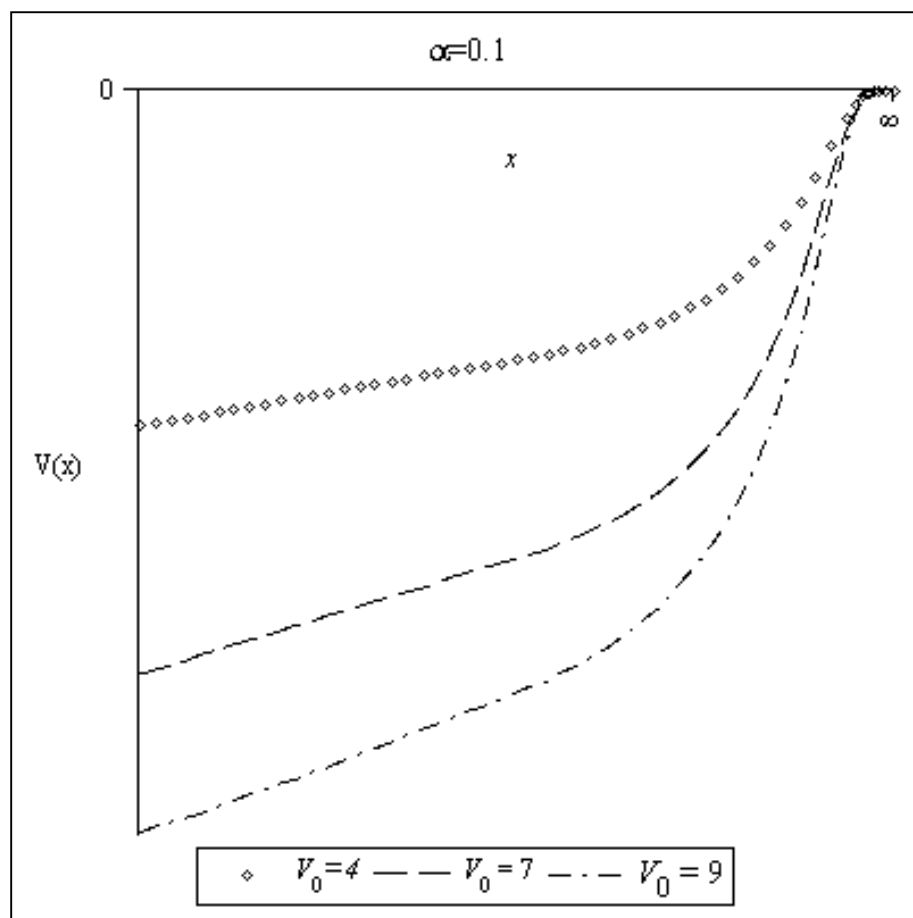
در نتیجه

$$-n - \frac{1}{2}(2n+1) + (2n+1)(\sqrt{\frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_3 + \xi_2} - \sqrt{\xi_3}) - n(n-1)$$

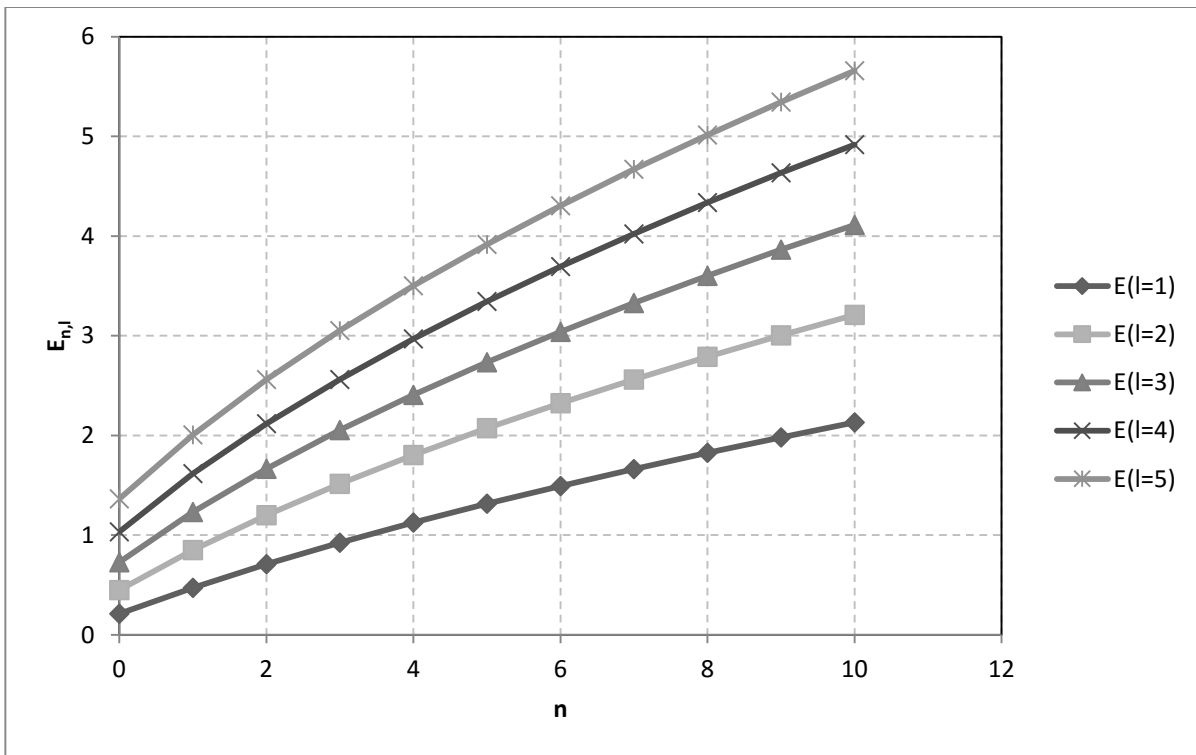
$$-\xi_2 - 2\xi_3 + 2\sqrt{\xi_3}(\frac{1}{4} + \xi_1 + \xi_3 + \xi_2) = 0, \quad (11-3-4)$$

$$\psi_{n,l}(y) = y^{\alpha_{12}}(1+y)^{-\alpha_{12}+\alpha_{13}} p_n^{(\alpha_{10}-1, -\alpha_{11}-\alpha_{10}-1)}(1+2y). \quad (12-3-4)$$

در جدول طیف انرژی سیستم گزارش داده شده است.



شکل ۱,۴. پتانسیل وودز-ساکسون



شکل ۲،۴. انرژی پتانسیل وودز-ساکسون به ازای $\alpha = 0.1, V_0 = 0.02, \mu = \frac{1}{2}, \tilde{m} = 2, r_0 = 4$ and $\hbar = 1$

جدول ۳،۴. انرژی سیستم برای پتانسیل وودز-ساکسون به ازای

$$\alpha = 0.1, V_0 = 0.02, \mu = \frac{1}{2}, \tilde{m} = 2, r_0 = 4 \text{ and } \hbar = 1$$

$ n, l\rangle$	$E_{0,l}$	$ n, l\rangle$	$E_{1,l}$	$ n, l\rangle$	$E_{2,l}$	$ n, l\rangle$	$E_{3,l}$
----------------	-----------	----------------	-----------	----------------	-----------	----------------	-----------

$ 0,0\rangle$	-0.727861667	$ 1,0\rangle$	-.140284105	$ 2,0\rangle$	-0.068680033	$ 3,0\rangle$	-0.046192722
$ 0,1\rangle$	0.479792734	$ 1,1\rangle$	1.143856306	$ 2,1\rangle$	1.687396737	$ 3,1\rangle$	2.157965985
$ 0,2\rangle$	0.861986096	$ 1,2\rangle$	1.830828599	$ 2,2\rangle$	2.597613966	$ 3,2\rangle$	3.251614486
$ 0,3\rangle$	1.246292653	$ 1,3\rangle$	2.440449462	$ 2,3\rangle$	3.373570362	$ 3,3\rangle$	4.165344056
$ 0,4\rangle$	1.634619139	$ 1,4\rangle$	3.006699480	$ 2,4\rangle$	4.074709669	$ 3,4\rangle$	4.979661087
$ 0,5\rangle$	2.026402250	$ 1,5\rangle$	3.544193272	$ 2,5\rangle$	4.726269886	$ 3,5\rangle$	5.728248822
$ 0,6\rangle$	2.420929093	$ 1,6\rangle$	4.061037315	$ 2,6\rangle$	5.342083410	$ 3,6\rangle$	6.429394261
$ 0,7\rangle$	2.817613025	$ 1,7\rangle$	4.562305120	$ 2,7\rangle$	5.930747284	$ 3,7\rangle$	7.094401062
$ 0,8\rangle$	3.216004433	$ 1,8\rangle$	5.051413663	$ 2,8\rangle$	6.498035879	$ 3,8\rangle$	7.730840669
$ 0,9\rangle$	3.615762715	$ 1,9\rangle$	5.530783459	$ 2,9\rangle$	7.048041296	$ 3,9\rangle$	8.34407392
$ 0,10\rangle$	4.016628558	$ 1,10\rangle$	6.002194502	$ 2,10\rangle$	7.583780839	$ 3,10\rangle$	8.93805517

۴-۴ سالپيتر برای هالسن^۱

این بار پتانسیل هالسن زیر را در نظر می گیریم

$$V(r) = -\frac{V_0}{e^{\alpha r} - 1}, \quad (1-4-4)$$

که V_0, α ثابت هستند. با انتخاب $\psi_{nl}(r) = \frac{U_{n,l}(r)}{r}$ معادله قبل تبدیل می شود به

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2\mu r^2} - \frac{V_0}{e^{\alpha r} - 1} - E_{nl} - \frac{1}{2\tilde{m}} \frac{V_0^2}{(e^{\alpha r} - 1)^2} - \frac{E_{nl}^2}{2\tilde{m}} - \frac{V_0 E_{nl}}{2\tilde{m}(e^{\alpha r} - 1)} \right] U_{n,l}(r) = 0, \quad (2-4-4)$$

قبل از اینکه ادامه دهیم، از تقریب قابل قبول ۴۷

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2}{(e^{\alpha r} - 1)^2}, \quad (3-4-4)$$

استفاده می کنیم. با این کار داریم

¹ Hulthén

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\mu V_0 - \frac{\mu V_0 E_{nl}}{\tilde{m}}}{\hbar^2 (1 - e^{-\alpha r})} e^{-\alpha r} - \frac{l(l+1)\alpha^2 - \frac{\mu V_0^2}{\tilde{m}\hbar^2}}{(1 - e^{-\alpha r})^2} e^{-2\alpha r} + \frac{2\mu E_{nl}}{\hbar^2} + \frac{\mu E_{nl}^2}{\tilde{m}\hbar^2} \right\} U_{n,l}(r) = 0, \quad (4-4-4)$$

اکنون با تغییر متغیر $z = e^{-\alpha r}$ و انتخاب

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\mu V_0 - \frac{\mu V_0 E_{nl}}{\tilde{m}}}{\hbar^2}, \\ B &= -l(l+1)\alpha^2 - \frac{\mu V_0^2}{\tilde{m}\hbar^2}, \\ C &= \frac{2\mu E_{nl}}{\hbar^2} + \frac{\mu E_{nl}^2}{\tilde{m}\hbar^2}, \end{aligned} \quad (5-4-4)$$

می‌رسیم به

$$\left\{ \frac{d^2}{dz^2} + \frac{(1-z)}{z(1-z)} \frac{d}{dz} + \frac{1}{z^2(1-z)^2} \left[\frac{1}{\alpha^2} (-A+B+C)z^2 + \frac{1}{\alpha^2} (-2C+A)z + \frac{1}{\alpha^2} C \right] \right\} U_{n,l}(z) = 0, \quad (6-4-4)$$

با مقایسه داریم

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1, \\ \alpha_2 &= 1, \\ \alpha_3 &= 1 \\ \xi_1 &= \frac{-1}{\alpha^2} (-A+B+C), \\ \xi_2 &= \frac{1}{\alpha^2} (-2C+A) \\ \xi_3 &= \frac{-1}{\alpha^2} C \end{aligned}$$

و سایر ضرایب مطابق زیر به دست می‌آیند

$$\alpha_4 = 0,$$

$$\alpha_5 = -\frac{1}{2},$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{4} + \xi_1,$$

$$\alpha_7 = -\xi_2$$

$$\alpha_8 = \xi_3$$

$$\alpha_9 = -\xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4} + \xi_1$$

$$\alpha_{10} = 1 + 2\sqrt{\xi_3},$$

$$\alpha_{11} = 2(\sqrt{-\xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4} + \xi_1} + \sqrt{\xi_3})$$

$$\alpha_{12} = \sqrt{\xi_3},$$

$$\alpha_{13} = -\frac{1}{2} - (\sqrt{-\xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4} + \xi_1} + \sqrt{\xi_3}), \quad (7-4-4)$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} & n + \frac{1}{2}(2n+1) + (2n+1)(\sqrt{-\xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4} + \xi_1} + \sqrt{\xi_3}) \\ & + n(n-1) - \xi_2 - 2\xi_2\xi_3 + 2\sqrt{\xi_3(-\xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4} + \xi_1)} = 0, \end{aligned} \quad (8-4-4)$$

یا

$$\begin{aligned} & n + \frac{1}{2}(2n+1) + (2n+1)(\sqrt{-[\frac{1}{\alpha^2}(-2C+A)] + [\frac{-1}{\alpha^2}C] + \frac{1}{4} + [\frac{-1}{\alpha^2}(-A+B+C)]} + \\ & \sqrt{\xi_3}) + n(n-1) - [\frac{1}{\alpha^2}(-2C+A)] - \\ & 2[\frac{1}{\alpha^2}(-2C+A)][\frac{-1}{\alpha^2}C] + \\ & 2\sqrt{(\frac{-1}{\alpha^2}C)(-\frac{1}{\alpha^2}(-2C+A)) + (\frac{-1}{\alpha^2}C) + \frac{1}{4} + [\frac{-1}{\alpha^2}(-A+B+C)]} = 0, \end{aligned} \quad (9-4-4)$$

و ویژه توابع عبارتند از

$$U_{n,l}(z) = z^{\sqrt{\xi_3}}(1-z)^{-\sqrt{\xi_3} - \frac{1}{2} - (\sqrt{-\xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4} + \xi_1} + \sqrt{\xi_3})} P_n^{(1+2\sqrt{\xi_3}-1, 2(\sqrt{-\xi_2 + \xi_3 + \frac{1}{4} + \xi_1} + \sqrt{\xi_3})-1+2\sqrt{\xi_3}-1)}(1-2z), \quad (10-4-4)$$

این پتانسل عبارتست از

$$V(r) = \frac{g}{r} - \frac{f}{r+\beta}, \quad (1-5-4)$$

معادله متناظر دارای فرم زیر است

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2}{dr^2} - (2\mu g + \frac{2\mu g f}{\beta \tilde{m}} + \frac{2g E_{n,l} \mu}{\tilde{m}}) \frac{1}{r} + (\frac{\mu g^2}{\tilde{m}} - l(l+1)) \frac{1}{r^2} \right. \\ & \left. + (2\mu f + \frac{2g f \mu}{\beta \tilde{m}} + \frac{2f E_{n,l} \mu}{\tilde{m}}) \frac{1}{r+\beta} + \frac{\mu f^2}{\tilde{m}} \frac{1}{(r+\beta)^2} + 2\mu(E_{n,l} + \frac{E_{n,l}^2}{2\tilde{m}}) \right] \psi_{n,l}(r) = 0. \end{aligned} \quad (2-5-4)$$

اکنون جوابی مطابق زیر را معرفی می‌کنیم

$$\psi_{n,l}(r) = h_n(r) \exp(s_l(r)), \quad (3-5-4)$$

که در آن

$$h_n(r) = \begin{cases} 1, & \text{if } n=0 \\ \prod_{i=1}^n (r - \alpha_i^n), & \text{if } n \geq 1 \end{cases}, \quad (4-5-4)$$

$$s_l(r) = \delta \ln(r) + \eta \ln(r+\beta) + \xi r. \quad (6-5-4)$$

پس از قراردادن این جواب در معادله می‌رسیم به

$$\begin{aligned} & \psi_{0,l}''(r) = \\ & \left[\left(\frac{2\delta\eta}{\beta} + 2\delta\xi \right) \frac{1}{r} + (\delta^2 - \delta) \frac{1}{r^2} + \left(-\frac{2\delta\eta}{\beta} + 2\eta\xi \right) \frac{1}{r+\beta} + (\eta^2 - \eta) \frac{1}{(r+\beta)^2} + \xi^2 \right] \psi_{0,l}(r). \end{aligned} \quad (7-5-4)$$

با جای‌گذاری جواب پی‌شنهادی و مساوی قراردادن توان‌ها می‌رسیم به

$$\begin{aligned}
\frac{2\delta\eta}{\beta} + 2\delta\xi &= (2\mu g + \frac{2\mu g f}{\beta\tilde{m}} + \frac{2gE_{0,l}\mu}{\tilde{m}}), \\
\delta^2 - \delta &= -\frac{\mu g^2}{\tilde{m}} + l(l+1), \\
-\frac{2\delta\eta}{\beta} + 2\eta\xi &= -(2\mu f + \frac{2gf\mu}{\beta\tilde{m}} + \frac{2fE_{0,l}\mu}{\tilde{m}}), \\
\eta^2 - \eta &= -\frac{\mu f^2}{\tilde{m}}, \\
\xi^2 &= -2\mu(E_{0,l} + \frac{E_{0,l}^2}{2\tilde{m}}).
\end{aligned} \tag{8-5-4}$$

که طیف انرژی را تعین می کنند. اکنون حالت بعدی را در نظر می گیریم. در این وضعیت

$$h_1(r) = r - a_1^1. \tag{9-5-4}$$

و معادله شبه شرودی نگر ما تبدیلی می شود به

$$\begin{aligned}
\psi_{1,l}''(r) &= [(\frac{2\delta\eta}{\beta} + 2\delta\xi)\frac{1}{r} + (\delta^2 - \delta)\frac{1}{r^2} + (-\frac{2\delta\eta}{\beta} + 2\eta\xi)\frac{1}{r+\beta} + (\eta^2 - \eta)\frac{1}{(r+\beta)^2} + \xi^2 \\
&+ \frac{2\delta}{r(r-a_1^1)} + \frac{2\eta}{(r+\beta)(r-a_1^1)} + \frac{2\xi}{r-a_1^1}] \psi_{1,l}(r),
\end{aligned} \tag{10-5-4}$$

ی

$$\begin{aligned}
(r-a_1^1)\psi_{1,l}''(r) &= [(-\frac{2a_1^1\delta\eta}{\beta} - 2a_1^1\delta\xi + \delta^2 + \delta)\frac{1}{r} - a_1^1(\delta^2 - \delta)\frac{1}{r^2} \\
&+ (\eta^2 + \eta + (-a_1^1 - \beta)(-\frac{2\delta\eta}{\beta} + 2\eta\xi))\frac{1}{r+\beta} \\
&- (a_1^1 + \beta)(\eta^2 - \eta)\frac{1}{(r+\beta)^2} + (-a_1^1\xi^2 + 2\xi + 2\eta\xi + 2\xi\delta) + \xi^2 r] \psi_{1,l}(r),
\end{aligned} \tag{11-5-4}$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned}
(r-a_1^1)\psi_{1,l}''(r) &= \\
&[-(a_1^1(2\mu g + \frac{2\mu g f}{\tilde{m}\beta} + \frac{2\mu g E_{1,l}}{\tilde{m}}) - l(l+1) + \frac{\mu g^2}{\tilde{m}})\frac{1}{r} + a_1^1(\frac{\mu g^2}{\tilde{m}} - l(l+1))\frac{1}{r^2} \\
&- ((\beta + a_1^1)(2\mu f + \frac{2\mu g f}{\tilde{m}\beta} + \frac{2\mu f E_{1,l}}{\tilde{m}}) + \frac{\mu f^2}{\tilde{m}})\frac{1}{r+\beta} \\
&+ (\beta + a_1^1)\frac{\mu f^2}{\tilde{m}}\frac{1}{(r+\beta)^2} - (-2\mu g + 2\mu f - \frac{2\mu g E_{1,l}}{\tilde{m}} + \frac{2\mu f E_{1,l}}{\tilde{m}}) \\
&- 2\mu a_1^1(E_{1,l} + \frac{E_{1,l}^2}{2\tilde{m}}) - 2\mu(E_{1,l} + \frac{E_{1,l}^2}{2\tilde{m}})r] \psi_{1,l}(r).
\end{aligned} \tag{12-5-4}$$

و با مساوی قرار دادن طرفین متناظر

$$\begin{aligned}
 -\frac{2a_1^1\delta\eta}{\beta} - 2a_1^1\delta\xi + \delta^2 + \delta &= -(a_1^1(2\mu g + \frac{2\mu g f}{\tilde{m}\beta} + \frac{2\mu g E_{1,l}}{\tilde{m}}) - l(l+1) + \frac{\mu g^2}{\tilde{m}}), \\
 -(\delta^2 - \delta) &= (\frac{\mu g^2}{\tilde{m}} - l(l+1)), \\
 \eta^2 + \eta + (-a_1^1 - \beta)(-\frac{2\delta\eta}{\beta} + 2\eta\xi) &= -(-(\beta + a_1^1)(2\mu f + \frac{2\mu g f}{\tilde{m}\beta} + \frac{2\mu f E_{1,l}}{\tilde{m}}) + \frac{\mu f^2}{\tilde{m}}), \\
 -(\eta^2 - \eta) &= \frac{\mu f^2}{\tilde{m}}, \\
 -a_1^1\xi^2 + 2\xi + 2\eta\xi + 2\xi\delta &= -(-2\mu g + 2\mu f - \frac{2\mu g E_{1,l}}{\tilde{m}} + \frac{2\mu f E_{1,l}}{\tilde{m}} - 2\mu a_1^1(E_{1,l} + \frac{E_{1,l}^2}{2\tilde{m}})), \\
 \xi^2 &= -2\mu(E_{1,l} + \frac{E_{1,l}^2}{2\tilde{m}}), \tag{13-5-4}
 \end{aligned}$$

که طیف انرژی را تعیین می کند. در واقع با داشتن $\mu, \tilde{m}, \beta, g$ ، موارد $E_{1,l}, \delta, \eta, \xi, f, a_1^1$ قابل

محاسبه هستند. به ازای مقادیر $m_1 = 1, m_2 = 1, g = -0.5, \beta = \frac{1}{2}$ ، انرژی در جدول گزارش داده شده

است. حالت های بالاتر با انتخاب $h_3(r) = (r - \alpha_1^3)(r - \alpha_2^3)(r - \alpha_3^3)$ و $h_2(r) = (r - \alpha_1^2)(r - \alpha_2^2)$

... قابل محاسبه هستند.

۴-۵-۱ حالت خاص $f=0$

این حالت عملاً همان پتانسیل کولنی است: $V(r) = \frac{g}{r}$. در چنین وضعیتی معادله سالیتر تبدیلی

می شود به

$$[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l'(l'+1)}{r^2} + \frac{g'}{r} + E'_{n,l}] \psi_{n,l}(r) = 0, \tag{14-5-4}$$

که

$$l' = \frac{1}{2}[-1 \pm \sqrt{1 + 4(-\frac{\mu g^2}{\tilde{m}} + l(l+1))}]$$

$$g' = 2\mu g + \frac{2gE_{n,l}\mu}{\tilde{m}},$$

$$E'_{n,l'} = 2\mu(E_{n,l} + \frac{E_{n,l}^2}{2\tilde{m}}), \quad (15-5-4)$$

تابع موج این معادله دقیقاً قابل حل است و

$$\psi_{0,l'}(r) = r^{l'+1} \exp(-\sqrt{-E'_{0,l'}}r) \quad (16-5-4)$$

و انرژی متناظر با آن عبارتست از

$$E_{0,l'} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\frac{4\mu^2 g^2}{\tilde{m}^2} + 4(l'+1)^2 \frac{\mu}{\tilde{m}})} (-(\frac{8\mu^2 g^2}{\tilde{m}} + 8\mu(l'+1)))$$

$$\pm \sqrt{(\frac{8\mu^2 g^2}{\tilde{m}^2} + 8\mu(l'+1))^2 - 16\mu^2 g^2 (\frac{4\mu^2 g^2}{\tilde{m}^2} + 4(l'+1)^2 \frac{\mu}{\tilde{m}})}. \quad (17-5-4)$$

اکنون این جواب دقیق را با جواب خود مقایسه می‌کنیم. به ازای $f=0$ ، داریم

$$2\delta\xi = -(2\mu g + \frac{2gE_{0,l'}\mu}{\tilde{m}}),$$

$$\delta^2 - \delta = l'(l'+1),$$

$$\xi^2 = -2\mu(E_{0,l'} + \frac{E_{0,l'}^2}{2\tilde{m}}), \quad (18-5-4)$$

و

$$\xi = -\sqrt{-2\mu(E_{0,l'} + \frac{E_{0,l'}^2}{2\tilde{m}})}, \quad (19-5-4)$$

$$\delta = l' + 1, \quad (20-5-4)$$

این جواب برای حالت پایانه نتیجه می‌دهد

$$E_{0,l'} = \frac{1}{2} \frac{1}{(\frac{4\mu^2 g^2}{\tilde{m}^2} + 4(l'+1)^2 \frac{\mu}{\tilde{m}})} (-(\frac{8\mu^2 g^2}{\tilde{m}} + 8\mu(l'+1)))$$

$$\pm \sqrt{(\frac{8\mu^2 g^2}{\tilde{m}^2} + 8\mu(l'+1))^2 - 16\mu^2 g^2 (\frac{4\mu^2 g^2}{\tilde{m}^2} + 4(l'+1)^2 \frac{\mu}{\tilde{m}})}, \quad (21-5-4)$$

که با جواب دقیق همخوانی دارد.

جدول ۳،۴ انرژی پتانسیل هسته-نرم

$ n,l\rangle$	$E_{0,l}$	δ	η	ξ	f
$ 0,0\rangle$	- 0.1707706162	0.933012701	0.03227418780	-0.4043265578	0.3534547473
$ 0,1\rangle$	- 0.03278598585	1.979019946	0.01347214880	- 0.1803254159	0.2305701629
$ 0,2\rangle$	- 0.01208578196	2.987468593	0.006547063199	- 0.1097691461	0.1612972308
$ 0,3\rangle$	- 0.00604976309	3.991060011	0.003787635925	- 0.0777213817	0.1228542183

۴-۶ کرنل^۱

این بار پتانسیل کرنل را در نظر می‌گیریم:

$$V(r) = ar + \frac{b}{r}. \quad (1-6-4)$$

با جای‌گذاری در معادله اصلی داریم

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{A}{r^2} + \frac{B}{r} + Cr^2 + fr + h \right] \psi_{n,l}(r) = 0, \quad (2-6-4)$$

که

$$A = -l(l+1) + \frac{\mu b^2}{\hbar^2 \tilde{m}},$$

$$B = -\frac{2\mu b}{\hbar^2} - \frac{2E_{n,l}b\mu}{\hbar^2 \tilde{m}},$$

$$C = \frac{\mu a^2}{\hbar^2 \tilde{m}},$$

$$f = -\frac{2\mu a}{\hbar^2} - \frac{2\mu E_{n,l}a}{\hbar^2 \tilde{m}},$$

$$h = \frac{2\mu E_{n,l}}{\hbar^2} + \frac{\mu E_{n,l}^2}{\hbar^2 \tilde{m}} + \frac{2ab\mu}{\hbar^2 \tilde{m}}. \quad (3-6-4)$$

اکنون جوابی به فرم

$$\psi_{n,l}(r) = g_n(r) \exp(y_l(r)), \quad (4-6-4)$$

را پیشنهاد می‌دهیم که در آن

¹ Cornell

$$g_n(r) = \begin{cases} 1, & \text{if } n=0 \\ \prod_{i=1}^n (r - \alpha_i^n), & \text{if } n \geq 1 \end{cases}, \quad (5-6-4)$$

مطابق آنچه در بخش سوم گفته شد، با حل معادله ری‌کاتی متناظر داری‌م

$$g_n(r) = 1, \quad (6-6-4)$$

$$y_l(r) = \delta \ln(r) + \beta r^2 + \gamma r. \quad (7-6-4)$$

پس از جای‌گذاری داری‌م

$$\psi''_{n,l}(r) = [(\delta^2 - \delta) \frac{1}{r^2} + (2\delta\gamma) \frac{1}{r} + 4\beta^2 r^2 + 4\beta\gamma r + (\gamma^2 + 2\beta + 4\beta\delta)] \psi_{n,l}(r). \quad (8-6-4)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\delta^2 - \delta = -A,$$

$$2\delta\gamma = -B,$$

$$4\beta^2 = -C,$$

$$4\beta\gamma = -f,$$

$$\gamma^2 + 2\beta + 4\beta\delta = -h. \quad (9-6-4)$$

به راحتی می‌توان از این رابطه طی ف حالت بدون گره را تعیین کرد.

فصل پنج

معادله دی-کی-پی تحت برهم کنش های مختلف

۵-۱ دی کی پی تحت پتانسیل نمای

این بار پتانسیل نمای

$$U_v = Ve^{-a(r-r_0)}, \quad (1-1-5)$$

را انتخاب می‌کنیم. جواب‌های متناظر این معادله با روشی تحلیلی قابل حل نیست و ناچاری از روشی تقریبی استفاده می‌کنیم. معادله متناظر عبارتست از

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + E^2 + 2EV \exp(-a(r-r_0)) + V^2 \exp(-2a(r-r_0)) - m^2 \right) F(r) = 0. \quad (2-1-5)$$

که با انتخاب تقریب

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} &\approx (C_0 + C_1 e^{-\alpha x} + C_2 e^{-2\alpha x}), \\ x &= \frac{r-r_0}{r_0}, \\ \alpha &= ar_0, \end{aligned} \quad (3-1-5)$$

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{r_0^2} \left(1 - \frac{3}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} \right), \\ C_1 &= \frac{1}{1r_0^2} \left(\frac{4}{\alpha} - \frac{6}{\alpha^2} \right), \\ C_2 &= \frac{1}{r_0^2} \left(\frac{-1}{\alpha} + \frac{3}{\alpha^2} \right). \end{aligned} \quad (4-1-5)$$

تبدیل می‌شود به

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - e^{-\alpha x} (C_1 J(J+1) - 2EV) r_0^2 + e^{-2\alpha x} (V^2 - C_2 J(J+1)) r_0^2 + (C_0 J(J+1) + E^2 - m^2) r_0^2 \right) F(x) = 0, \quad (5-1-5)$$

این معادله در واقع همان پتانسیل غی‌رنسبی‌تی موریس است که در آن

$$\begin{aligned} B &= \pm r_0 \sqrt{(V^2 - C_2 J(J+1))}, \\ A &= \pm r_0 \sqrt{C_0 J(J+1)}, \\ \beta &= \frac{r_0^2 (C_1 J(J+1) - 2EV)}{B} - 2A. \end{aligned} \quad (6-1-5)$$

و بنابراین جواب‌ها عبارتند از

$$\begin{aligned}
F(x) &= C_n y^{s-n} \exp(-y/2) L_n^{2s-2n}(y), \\
y &= (2B/\beta) \exp(-\beta x), \\
s &= A/\beta.
\end{aligned} \tag{7-1-5}$$

و ویژه توابع انرژی از رابطه

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n &= r_0^2 (E^2 - m^2) = \\
C_0 J(J+1) r_0^2 - r_0 &\left(\pm \sqrt{C_0 J(J+1)} - n \left(\frac{(C_1 J(J+1) - 2EV)}{\pm \sqrt{(V^2 - C_2 J(J+1))}} \mp 2\sqrt{C_0 J(J+1)} \right) \right)^2.
\end{aligned} \tag{8-1-5}$$

قابل محاسبه هستند.

۵-۲ پتانسیل یوکاوا

با جای گذاری پتانسیل یوکاوا داریم

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + \left(E_{n,J} + \frac{\eta}{r} e^{-\alpha r} \right)^2 - m^2 \right) F_{n,J}(r) = 0. \tag{1-2-5}$$

اکنون تقریب زیر را معرفی می کنیم

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{4\alpha^2 e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})^2}, \tag{2-2-5}$$

و معادله تبدیلی می شود به

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{4J(J+1)\alpha^2 e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})^2} + E_{n,J}^2 + \frac{4\eta^2 \alpha^2 e^{-4\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})^2} + \frac{4E_{n,J}\eta\alpha e^{-2\alpha r}}{(1 - e^{-2\alpha r})} - m^2 \right) F_{n,J}(r) = 0. \tag{3-2-5}$$

برای حل این معادله ابتدا تبدیلی $s = e^{-2\alpha r}$ را اعمال می کنیم و معادله را به فرم زیر می نویسیم

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{ds^2} + \frac{(1-s)}{s(1-s)} \frac{d}{ds} + \\
&\frac{1}{s^2(1-s)^2} \left\{ s^2 \left[\frac{E^2}{4\alpha^2} + \eta^2 - \frac{m^2}{4\alpha^2} - \frac{E\eta}{\alpha} \right] + s \left[-J(J+1) - \frac{E^2}{2\alpha^2} + \frac{E\eta}{\alpha} + \frac{m^2}{2\alpha^2} \right] + \frac{E^2}{4\alpha^2} - \frac{m^2}{4\alpha^2} \right\} F_{n,J}(r) = 0.
\end{aligned} \tag{4-2-5}$$

۵-۲-۱ حالت‌های مقید

معادله اخیری به فرم استاندارد معادله NU تبدیلی شده است و اکنون می‌توان جواب‌های آن را به آسانی با مقایسه به‌دست آورد:

$$n(n+1) + \frac{1}{2} + (2n+1)\sqrt{\frac{1}{4} + J(J+1)} + (2n+1)\sqrt{\frac{-E_{n,J}^2}{4\alpha^2} + \frac{m^2}{4\alpha^2}} +$$

$$J(J+1) - \frac{E_{n,J}\eta}{\alpha} + 2\sqrt{\left(\frac{1}{4} + J(J+1)\right)\left(-\frac{E_{n,J}^2}{4\alpha^2} + \frac{m^2}{4\alpha^2}\right)} = 0, \quad (5-2-5)$$

و ویژۀ توابع متناظر بر حسب توابع ژاکوبی عبارتند از

$$F_{n,J} = s^{\sqrt{\frac{E_{n,J}^2}{4\alpha^2} + \frac{m^2}{4\alpha^2}}} (1-s)^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + J(J+1)}} P_n^{(2\sqrt{\frac{E_{n,J}^2}{4\alpha^2} + \frac{m^2}{4\alpha^2}}, 2\sqrt{\frac{1}{4} + J(J+1)})} (1-2s). \quad (6-2-5)$$

جدول ۵، ۱. انرژی پتانسیلی و کوا به ازای $\alpha = 0.001, \eta = 0.7, m = 1$

$ n, J\rangle$	for $E_{0,J}$ $\alpha = 0.001, \eta = 0.7$	$ n, J\rangle$	for $E_{1,J}$ $\alpha = 0.001, \eta = 0.7$	$ n, J\rangle$	for $E_{2,J}$ $\alpha = 0.001, \eta = 0.7$	$ n, J\rangle$	for $E_{3,J}$ $\alpha = 0.001, \eta = 0.7$
$ 0,0\rangle$	0.974500	$ 1,0\rangle$	0.985702	$ 2,0\rangle$	0.991016	$ 3,0\rangle$	0.993936
$ 0,1\rangle$	0.985702	$ 1,1\rangle$	0.991016	$ 2,1\rangle$	0.993936	$ 3,1\rangle$	0.995706

$ 0,2\rangle$	0.991016	$ 1,2\rangle$	0.993936	$ 2,2\rangle$	0.995706	$ 3,2\rangle$	0.996856
$ 0,3\rangle$	0.993936	$ 1,3\rangle$	0.995706	$ 2,3\rangle$	0.996856	$ 3,3\rangle$	0.997644
$ 0,4\rangle$	0.995706	$ 1,4\rangle$	0.996856	$ 2,4\rangle$	0.997644	$ 3,4\rangle$	0.998205
$ 0,5\rangle$	0.996856	$ 1,5\rangle$	0.997644	$ 2,5\rangle$	0.998205	$ 3,5\rangle$	0.998618
$ 0,6\rangle$	0.997644	$ 1,6\rangle$	0.998205	$ 2,6\rangle$	0.998618	$ 3,6\rangle$	0.998928
$ 0,7\rangle$	0.998205	$ 1,7\rangle$	0.998618	$ 2,7\rangle$	0.998928	$ 3,7\rangle$	0.999167
$ 0,8\rangle$	0.998618	$ 1,8\rangle$	0.998928	$ 2,8\rangle$	0.999172	$ 3,8\rangle$	0.999352
$ 0,9\rangle$	0.998928	$ 1,9\rangle$	0.999167	$ 2,9\rangle$	0.999352	$ 3,9\rangle$	0.999499
$ 0,10\rangle$	0.999167	$ 1,10\rangle$	0.999352	$ 2,10\rangle$	0.999499	$ 3,10\rangle$	0.999615

۵-۳- دی کی پی تحت وودز-ساکسون

همان طور که در قسمت مربوط به معادله سالپیتر گفته شد، این پتانسیل دارای فرم

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-a}{r_0}\right)} \quad (1-3-5)$$

است که در آن V_0 و r_0 ثابت هستند. اکنون با معرفی تقریب

$$\frac{1}{r^2} \sim b + \frac{c}{1 + \exp\left(\frac{r-a}{r_0}\right)} + \frac{d}{\left(1 + \exp\left(\frac{r-a}{r_0}\right)\right)^2} \quad (2-3-5)$$

که در آن

$$b = \frac{1}{a^2} \left(1 - \frac{3r_0}{a} + \frac{3r_0^2}{a^2}\right) \quad (3-3-5)$$

$$c = \frac{1}{a^2} \left(\frac{4r_0}{a} - \frac{6r_0^2}{a^2}\right) \quad (4-3-5)$$

$$d = \frac{1}{a^2} \left(-\frac{r_0}{a} + \frac{3r_0^2}{a^2}\right) \quad (5-3-5)$$

جوابهای معادله عبارتند از []

$$F_{n,J} = \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-a}{r_0}\right)} \right)^{r_0 \sqrt{bJ(J+1)+m^2-E_{n,J}^2}} \left(1 - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-a}{r_0}\right)} \right)^{r_0 \sqrt{J(J+1)(b+c+d)-(E_{n,J}-eV_0)^2+m^2}}$$

$$\times P_n^{(2r_0 \sqrt{bJ(J+1)+m^2-E_{n,J}^2}, 2r_0 \sqrt{J(J+1)(b+c+d)-(E_{n,J}-eV_0)^2+m^2})} \left(1 - \frac{2}{1 + \exp\left(\frac{r-a}{r_0}\right)} \right) \quad (6-5-5)$$

و رابطه انرژی عبارتست از

$$2n + (2n+1)r_0(\sqrt{J(J+1)(b+c+d)-(E_{n,J}-eV_0)^2+m^2} + \sqrt{bJ(J+1)+m^2-E_{n,J}^2}) +$$

$$n(n+1) + r_0^2(2eV_0E_{n,J} + cJ(J+1)) + 2r_0^2(bJ(J+1)+m^2-E_{n,J}^2) -$$

$$2r_0^2\sqrt{(bJ(J+1)+m^2-E_{n,J}^2)[J(J+1)(b+c+d)-(E_{n,J}-eV_0)^2+m^2]} = 0 \quad (7-3-5)$$

۴-۵ معادله DKP تحت یک برهم کنش برداری هالسن

در این کار پتانسیل هالسن را مورد بررسی قرار می دهیم، یعنی

$$U_v^0(r) = -\frac{U_0}{e^{ar}-1}, \quad (1-4-5)$$

که U_0 یک کمیت ثابت است. برای حل تحلیلی معادله، از تقریب مناسب زیر استفاده می کنیم

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2}{(e^{ar}-1)^2}, \quad (2-4-5)$$

با این کار، داریم

$$\left\{ -\frac{d^2}{dr^2} + V_{eff,n,J}(r) \right\} F_{n,J}(r) = \lambda_{n,J} F_{n,J}(r), \quad (3-4-5)$$

که

$$V_{eff,n,J}(r) = \frac{U_0^2 + J(J+1)\alpha^2}{(e^{ar}-1)^2} - \frac{2E_{n,J}U_0}{(e^{ar}-1)}, \quad (4-4-5)$$

$$\lambda_{n,J} = E_{n,J}^2 - m_0^2, \quad (5-4-5)$$

اکنون با در ذهن داشتن روش مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، ابرتانسیل را مطابق

$$\Phi(r) = \frac{-A}{(e^{\alpha r} - 1)} + B, \quad (6-4-5)$$

انتخاب می کنیم که در آن

$$A = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\{U_0^2 + J(J+1)\alpha^2\}}}{2}$$

$$B = \frac{(-A^2 + U_0^2 + J(J+1)\alpha^2 + 2E_{n,J}U_0)}{2A}$$

$$\lambda_{0,J} = -B^2, \quad (7-4-5)$$

و $A, B > 0$. داشتیم

$$V_{\pm}(r) = \Phi^2(r) \pm \Phi'(r) \quad (8-4-5)$$

و تابع موج حالت پایه مطابق زیر به دست می آید

$$F_{0,J}(r) = N_{0,J} \exp\left[-\int \Phi(r) dr\right], \quad (9-4-5)$$

پتانسیل های همراه در این وضعیت عبارتند از

$$V_+(r) = \frac{A(A+\alpha)e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2} - \frac{(U_0^2 + J(J+1)\alpha^2) + (2E_{n,l}U_0)}{e^{\alpha r} - 1} + \frac{(-A^2 + U_0^2 + J(J+1)\alpha^2 + 2E_{n,l}U_0)}{2A},$$

$$V_-(r) = \frac{A(A-\alpha)e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2} - \frac{(U_0^2 + J(J+1)\alpha^2) + (2E_{n,l}U_0)}{e^{\alpha r} - 1} + \frac{(-A^2 + U_0^2 + J(J+1)\alpha^2 + 2E_{n,l}U_0)}{2A}, \quad (10-4-5)$$

و همانطور که می بینیم تحت یک نگاشت انتقالی ناوردا هستند. ویژه مقادیر انرژی عبارتند از

$$\lambda_{0,J}^{(-)} = 0$$

$$\lambda_{n,J}^{(-)} = \sum_{k=1}^n R(a_k) = \left(\frac{A^2 - (U_0^2 + J(J+1)\alpha^2) - (2E_{n,J}U_0)}{2A} \right)^2 - \left(\frac{(A+n\alpha)^2 - (U_0^2 + J(J+1)\alpha^2) - (2E_{n,J}U_0)}{2(A+n\alpha)} \right)^2 \quad (11-4-5)$$

و در نتیجه طیف کامل سیستم عبارتست از

$$\lambda_{n,J} = \lambda_{n,J}^{(-)} + \lambda_{0,J} = - \left(\frac{(A+n\alpha)^2 - (U_0^2 + J(J+1)\alpha^2) - (2E_{n,J}U_0)}{2(A+n\alpha)} \right)^2 \quad (12-4-5)$$

یا به فرم فشرده‌تر

$$E_{n,J}^2 = m_0^2 - \left(\frac{(A+n\alpha)^2 - (U_0^2 + J(J+1)\alpha^2) - (2E_{n,J}U_0)}{2(A+n\alpha)} \right)^2. \quad (13-4-5)$$

در جدول زیر ویژه مقادیر انرژی را به ازای $\alpha = 0.15$ گزارش کرده‌ایم.

جدول ۲،۵. انرژی پتانسیل هالسن

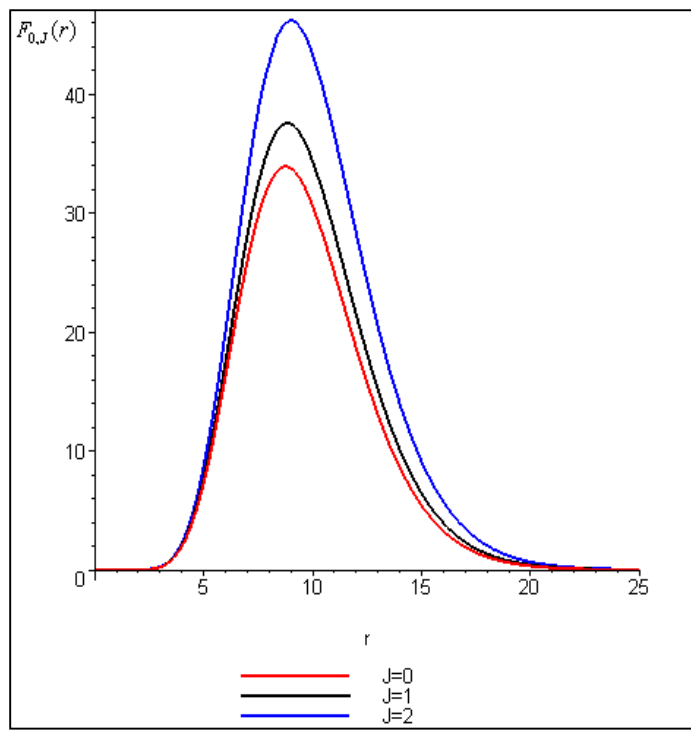
n	J				
	0	1	2	3	4
0	0.769358	0.866548	0.935606	0.978947	0.998528
1	0.780888	0.875047	0.94131	0.982084	0.999257
2	0.806502	0.893658	0.953506	0.988388	0.999998
3	0.841774	0.918638	0.969087	0.995286	0.998594
4	0.881415	0.945541	0.984341	0.999653	0.992323
5	0.920373	0.97013	0.995682	0.998365	0.978278
6	0.954454	0.988851	0.999999	0.98852	0.953413
7	0.980478	0.998907	0.994653	0.967319	0.914167
8	0.996132	0.998068	0.977211	0.93162	0.855383
9	0.999654	0.984321	0.944968	0.876967	0.767092
10	0.989454	0.955383	0.894063	0.795046	0.618465

باید توجه داشته باشیم تقریبی که استفاده می‌کنیم در محدوده $\alpha < 0.2$ تقریب مناسبی است. با توجه به

روابطی که پیشتر داشتیم، تابع موج حالت پایه برابر است با

$$F_{0,J}(r) = N_{0,J} (e^{ar} - 1)^{\frac{A}{\alpha}} \times \exp\left[\left\{ \frac{(-A^2 + U_0^2 + J(J+1)\alpha^2 + 2E_{n,J}V_0)}{2A} - A \right\} r\right] \quad (14-4-5)$$

که در شکل زیر آمده است.



شکل ۵، ۱. تابع موج تحت هالسن

توابع موج مراتب بالاتر به راحتی از روابط (۱۹) قابل محاسبه هستند. نتیجه اینکه تابع موج کلی سیستم

به صورت زیر است

$$\psi_{JM}(r) = \begin{pmatrix} f_{nJ}(r)Y_{JM}(\Omega) \\ g_{nJ}(r)Y_{JM}(\Omega) \\ i \sum_L h_{nJL}(r)Y_{JL1}^M(\Omega) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Y_{JM}(\Omega) \\ \frac{(E_{0,J} - U_v^0)}{mc^2} Y_{JM}(\Omega) \\ i \frac{-\alpha_J}{mc^2} \left\{ A \frac{e^{ar}}{(e^{ar} - 1)} + \left\{ \frac{(-A^2 + U_0^2 + J(J+1)\alpha^2 + 2E_{0,l}V_0)}{2A} - A \right\} - \frac{J+1}{r} \right\} Y_{J11}^M(\Omega) \\ + i \frac{\zeta_J}{mc^2} \left\{ A \frac{e^{ar}}{(e^{ar} - 1)} + \left\{ \frac{(-A^2 + U_0^2 + J(J+1)\alpha^2 + 2E_{0,l}V_0)}{2A} - A \right\} + \frac{J}{r} \right\} Y_{J-11}^M(\Omega) \end{pmatrix} r F_{0,J}(r),$$

(15-4-5)

بررسی مبسوط تر ساختار ابرتقارنی معادله DKP در مرجع آمده است. نکته دیگری که باید توجه داشت

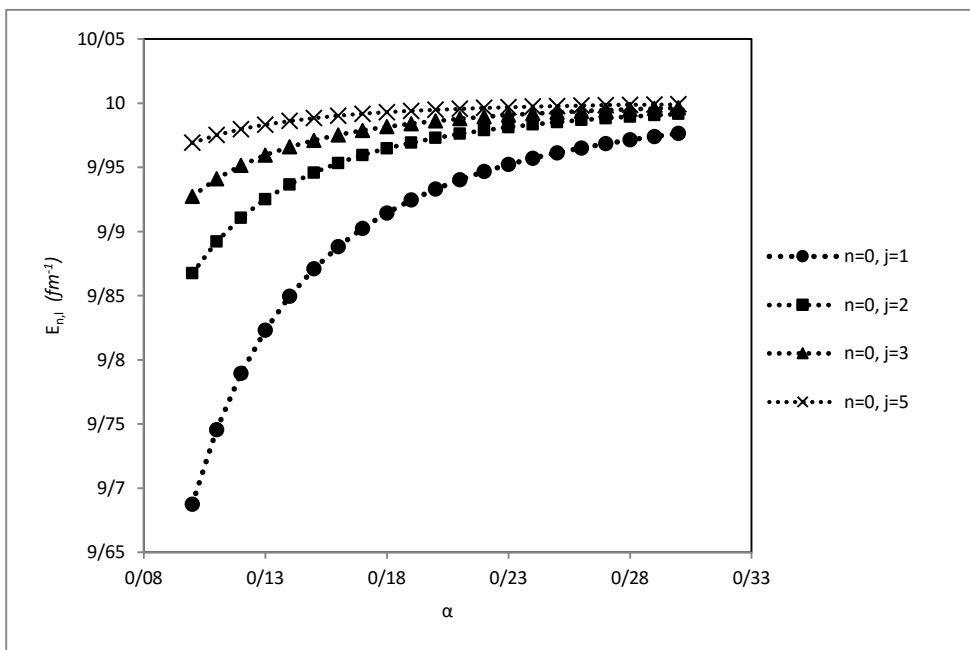
این است وقتی یک مسئله نیم-خط را (منظور معادلاتی هستند که در آن ها r کروی داریم و بنابر این

$0 \leq r < +\infty$) با یک وضعیت تمام خط (شامل $-\infty < x < +\infty$) مشابهت سازی می کنیم، بایستی دقت

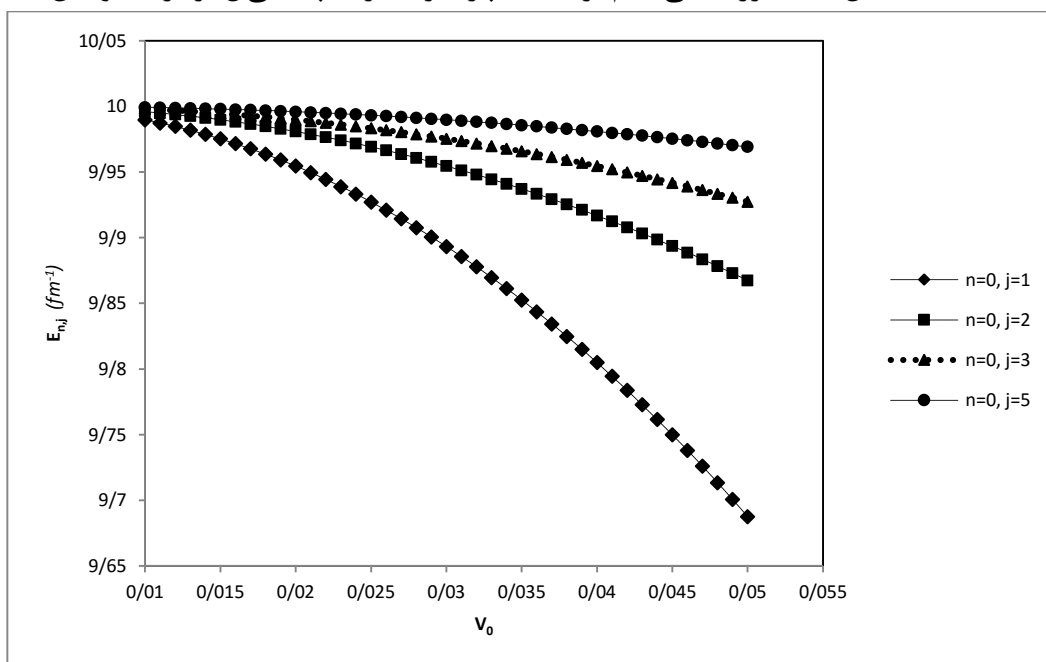
کافی مورد اعداد کوانتومی اعمال شود.

جدول ۳،۵. ویژه مقادی ر انرژی به ازای حالت های مختلف برای پتانسیل برداری هالسن

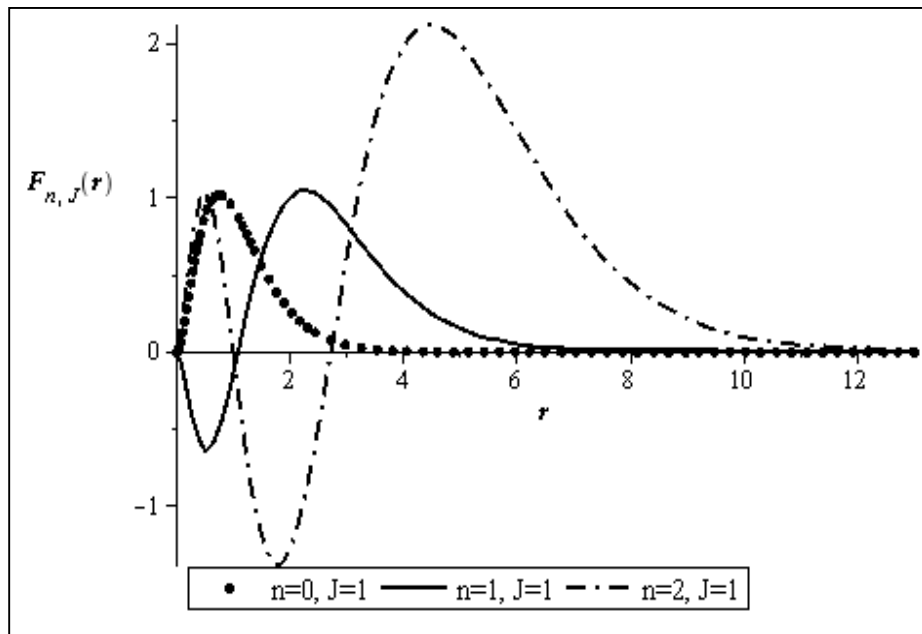
$ n, J\rangle$	$E_{n,J}$	$ n, J\rangle$	$E_{n,J}$
$ 0,0\rangle$	7.096023618	$ 2,0\rangle$	9.830010003
$ 0,1\rangle$	9.687495014	$ 2,1\rangle$	9.939720311
$ 0,2\rangle$	9.867457411	$ 2,2\rangle$	9.966533865
$ 0,3\rangle$	9.927476105	$ 2,3\rangle$	9.979694256
$ 0,4\rangle$	9.954672859	$ 2,4\rangle$	9.987025400
$ 0,5\rangle$	9.969225011	$ 2,5\rangle$	9.991432557
$ 1,0\rangle$	9.511536512	$ 3,0\rangle$	9.922948020
$ 1,1\rangle$	9.874625818	$ 3,1\rangle$	9.969030744
$ 1,2\rangle$	9.935590908	$ 3,2\rangle$	9.982591989
$ 1,3\rangle$	9.961774549	$ 3,3\rangle$	9.989716791
$ 1,4\rangle$	9.975336341	$ 3,4\rangle$	9.993800843
$ 1,5\rangle$	9.983180686	$ 3,5\rangle$	9.996256663



شکل ۲,۵. انرژی سی‌ستم بر حسب پارامتر α برای پتانسیل برداری هولسن



شکل ۳,۵. انرژی سی‌ستم بر حسب پارامتر V_0 برای پتانسیل برداری هولسن



شکل ۴، ۵. تابع موج سی‌ستم برای پتانسیل برداری هولسن به ازای مقادیر مختلف n ، و $\alpha = 0.1$ ،
 $m = 10$ ، $V_0 = 0.05$

۵-۵- معادله‌ی DKP در حضور برهم‌کنش اسکالر کولنی

در اینجا پتانسیل اسکالر کولنی زیر را در نظر می‌گیریم [۲۱]

$$U_s = \frac{k}{r}, \quad (1-5-5)$$

معادله متناظر عبارتست از

$$\begin{aligned} \frac{d^2 F_{n,J}(r)}{dr^2} + \frac{dF_{n,J}(r)}{dr} \left[\frac{\frac{k}{r^2}}{m + \frac{k}{r}} \right] \\ + F_{n,J}(r) \left[-\frac{J(J+1)}{r^2} - \frac{kC}{A} \left(\frac{1}{r^3 [m + \frac{k}{r}]} \right) - \frac{1}{\alpha_J^2 A} \left(m + \frac{k}{r} \right)^2 + \frac{E_{n,J}^2}{\alpha_J^2 A} \right] = 0, \end{aligned} \quad (2-5-5)$$

که در آن

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2}, \\ C &= J + 1 - \frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2} J. \end{aligned} \quad (3-5-5)$$

با تغییری در متغیر

$$F_{n,J}(r) = \sqrt{m + \frac{k}{r}} \phi_{n,J}(r), \quad (4-5-5)$$

می‌رسی‌م به

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \phi_{n,J}(r)}{dr^2} + \left[\frac{k}{r^3(m + \frac{k}{r})} - \frac{3k^2}{2r^4(m + \frac{k}{r})^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} \right. \\ & \left. - \frac{kC}{A(m + \frac{k}{r})r^3} - \frac{1}{\alpha_J^2 A} - \frac{m^2}{\alpha_J^2 A} + \frac{E_{n,J}^2}{\alpha_J^2 A} - \frac{k^2}{\alpha_J^2 A} \frac{1}{r^2} - \frac{2mk}{\alpha_J^2 A} \frac{1}{r} \right] \phi_{n,J}(r) = 0, \end{aligned} \quad (6-5-5)$$

معادله اخیری، پس از جداسازی متغیرها تبدیلی می‌شود به

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \phi_{n,J}(r)}{dr^2} + \left[\left(\frac{2m}{k} + \frac{Cm}{Ak} - \frac{2mk}{\alpha_J^2 A} \right) \frac{1}{r} + \left(-\frac{1}{2} - J(J+1) - \frac{C}{A} - \frac{k^2}{\alpha_J^2 A} \right) \frac{1}{r^2} \right. \\ & \left. + \left(-\frac{m^2}{2k} - \frac{Cm^2}{Ak} \right) \frac{1}{k+mr} - \frac{3}{2} m^2 \frac{1}{(k+mr)^2} + \left(\frac{E_{n,J}^2}{\alpha_J^2 A} - \frac{m^2}{\alpha_J^2 A} \right) \right] \phi_{n,J}(r) = 0. \end{aligned} \quad (7-5-5)$$

اکنون جوابی به فرم

$$\phi_{n,J}(r) = f_n(r) \exp(g_J(r)), \quad (8-5-5)$$

را پی‌شنهاد می‌کنیم که در آن

$$\begin{aligned} f_n(r) &= \begin{cases} 1 & n=0 \\ \prod_{i=1}^n (r - \alpha_i^n) & n>0, \end{cases} \\ g_J(r) &= \gamma \ln(mr + k) + \delta \ln(r) + \xi r. \end{aligned} \quad (9-5-5)$$

با جای‌گذاری این جواب داریم

$$\begin{aligned} \phi_{n,J}''(r) &= \\ & \left[\left(2\xi\delta + \frac{2\delta\gamma m}{k} \right) \frac{1}{r} + (\delta^2 - \delta) \frac{1}{r^2} + \left(2\xi\gamma m - \frac{2\delta\gamma m^2}{k} \right) \frac{1}{k+mr} + (\gamma^2 m^2 - \gamma m^2) \frac{1}{(k+mr)^2} + \xi^2 \right] \phi_{n,J}(r), \end{aligned} \quad (10-5-5)$$

و با برابر قرار دادن متناظر می‌رسی‌م به

$$\begin{aligned}
2\xi\delta + \frac{2\delta\gamma m}{k} &= -\left(\frac{2m}{k} + \frac{Cm}{Ak} - \frac{2mk}{\alpha_j^2 A}\right), \\
\delta^2 - \delta &= -\left(-\frac{1}{2} - J(J+1) - \frac{C}{A} - \frac{k^2}{\alpha_j^2 A}\right), \\
2\xi\gamma m - \frac{2\delta\gamma m^2}{k} &= -\left(-\frac{m^2}{2k} - \frac{Cm^2}{Ak}\right), \\
\gamma^2 m^2 - \gamma m^2 &= \frac{3}{2} m^2, \\
\xi^2 &= -\left(\frac{E_{n,J}^2}{\alpha_j^2 A} - \frac{m^2}{\alpha_j^2 A}\right).
\end{aligned} \tag{11-5-5}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
\delta &= \frac{1}{2} \left[1 \pm \left(1 + 4 \left(\frac{1}{2} + J(J+1) + \frac{C}{A} + \frac{k^2}{\alpha_j^2 A} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right], \\
\gamma &= \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}, \\
\xi &= \pm \sqrt{\left(\frac{m^2}{\alpha_j^2 A} - \frac{E_{n,J}^2}{\alpha_j^2 A} \right)}, \\
2\xi\delta m + 2\xi\gamma m + \frac{3m^2}{2k} - \frac{2m^2 k}{\alpha_j^2 A} &= 0.
\end{aligned} \tag{12-5-5}$$

بنابراین، جواب نهایی عبارتست از

$$F_{0,J}(r) = \sqrt{m + \frac{k}{r}} (mr + k)^{\gamma} r^{\delta} \exp(\xi r). \tag{13-5-5}$$

۵-۶ معادله DKP تحت پتانسیل‌های اسکالر و برداری کرنل

که یکی از موفق‌ترین برهمکنش‌های فیزیکی ذرات است و هر دو جمله محبوس‌کننده و غیرمحبوس‌کننده را داراست. ضریب جمله کولنی در واقع در برگیرنده ضریب جفت‌شدگی قوی است و ضریب جمله خطی فاصله‌بین‌کواری است و در بسیاری موارد این برهمکنش را به صورت $-\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + kr$ می‌نویسند. در حضور پتانسیل‌های اسکالر و برداری کرنل معادلات (۴-۲۴) و (۴-۲۴) [۲۴]

$$\begin{aligned}
U_s &= a_s r + \frac{b_s}{r} \\
U_v^0 &= a_v r + \frac{b_v}{r}
\end{aligned} \tag{1-6-5}$$

که یکی از موفق‌ترین برهمکنش‌های فی‌زیک ذرات است و هر دو جمله محبوس‌کننده و غی‌رمحبوس‌کننده را داراست. ضریب جمله کولنی در واقع در برگی‌رنده ضریب جفت‌شدگی قوی است و ضریب جمله خطی فاصله بین کوارکی است و در بسیاری موارد این برهم‌کنش را به صورت $kr - \frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}$ می‌نویسند. با جای‌گذاری در معادله اصلی داریم:

$$\frac{d^2 F_{n,J}(r)}{dr^2} - \frac{dF_{n,J}(r)}{dr} \left[\frac{a_s - \frac{b_s}{r^2}}{m + a_s r + \frac{b_s}{r}} \right] + F_{n,J}(r) \left[-\frac{J(J+1)}{r^2} + \frac{C}{A} \left(\frac{a_s - \frac{b_s}{r^2}}{r[m + a_s r + \frac{b_s}{r}]} \right) - \frac{1}{\alpha_J^2 A} \left\{ (m + a_s r + \frac{b_s}{r})^2 - (E_{n,J} - a_v r - \frac{b_v}{r})^2 \right\} \right] = 0, \quad (2-6-5)$$

که

$$A = 1 + \frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2},$$

$$C = J + 1 - \frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2} J. \quad (3-6-5)$$

معادله اخیر با روش‌های مرسوم حل نمی‌شود و بنابراین ناگزیر از روش حدس‌زدن استفاده خواهیم کرد. به این منظور، ابتدا تغییری را متغیر

$$F_{n,J}(r) = \sqrt{m + a_s r + \frac{b_s}{r}} \phi_{n,J}(r), \quad (4-6-5)$$

را اعمال می‌کنیم تا معادله قبل تبدیلی شود به

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 \phi_{n,J}(r)}{dr^2} + \left[\frac{b_s}{a_s r^2 (r^2 + \frac{m}{a_s} r + \frac{b_s}{a_s})} - \frac{3r^2}{4(r^2 + \frac{m}{a_s} r + \frac{b_s}{a_s})^2} + \frac{3b_s}{2a_s (r^2 + \frac{m}{a_s} r + \frac{b_s}{a_s})^2} \right. \\ & - \frac{Cb_s}{Aa_s r^2 (r^2 + \frac{m}{a_s} r + \frac{b_s}{a_s})} - \frac{3b_s^2}{4a_s^2 r^2 (r^2 + \frac{m}{a_s} r + \frac{b_s}{a_s})^2} \\ & - (J(J+1) + \frac{(b_s^2 - b_v^2)}{A\alpha_J^2}) \frac{1}{r^2} + \frac{C}{A} \frac{1}{(r^2 + \frac{m}{a_s} r + \frac{b_s}{a_s})} \\ & - \frac{1}{A\alpha_J^2} (m^2 + 2a_s b_s - E_{n,J}^2 - 2a_v b_v) - \frac{(a_s^2 - a_v^2)}{A\alpha_J^2} r^2 \\ & \left. - \frac{(2ma_s + 2E_{n,J}a_v)}{\alpha_J^2 A} r - \frac{(2mb_s + 2E_{n,J}b_v)}{\alpha_J^2 A} \frac{1}{r} \right] \phi_{n,J}(r) = 0. \end{aligned} \quad (5-6-5)$$

این معادله را کمی مرتبتر و به صورت زیر می نویسیم

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 \phi_{n,J}}{dr^2} + \left[\left(-\frac{3b_2}{4} + \frac{3b_s b_3}{2a_s} - \frac{3b_s^2 h}{4a_s^2} \right) \frac{1}{(r+r_1)^2} + \right. \\
 & \left(-\frac{3d_2}{4} + \frac{3b_s d_3}{2a_s} - \frac{3b_s^2 N}{4a_s^2} \right) \frac{1}{(r+r_2)^2} \\
 & + \left(\frac{b_s d_1}{a_s} - \frac{3c_2}{4} + \frac{3b_s c_3}{2a_s} - \frac{3b_s^2 M}{4a_s^2} + \frac{cb_5}{A} - \frac{cb_s d_1}{a_s A} \right) \frac{1}{(r+r_2)} \\
 & + \left(\frac{b_s c_1}{a_s} - \frac{3a_2}{4} + \frac{3b_s a_3}{2a_s} - \frac{3b_s^2 g}{4a_s^2} + \frac{ca_5}{A} - \frac{cb_s c_1}{Aa_s} \right) \frac{1}{(r+r_1)} \\
 & + \left(\frac{b_s a_1}{a_s} - \frac{3b_s^2 s}{4a_s^2} - \frac{(2mb_s + 2E_{n,J} b_v)}{A\alpha_J^2} - \frac{cb_s a_1}{a_s A} \right) \frac{1}{r} + \\
 & \left(\frac{b_s b_1}{a_s} - \frac{3b_s^2 f}{4a_s^2} - J(J+1) + \frac{(-b_s^2 + b_v^2)}{A\alpha_J^2} - \frac{cb_s b_1}{Aa_s} \right) \frac{1}{r^2} \\
 & - \frac{(2ma_s + 2E_{n,J} a_v)}{A\alpha_J^2} r - \frac{(a_s^2 - a_v^2)}{A\alpha_J^2} r^2 - \frac{1}{A\alpha_J^2} (m^2 + 2a_s b_s - E_{n,J}^2 - 2a_v b_v) \phi_{n,J}(r) = 0. \quad (6-6-5)
 \end{aligned}$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \frac{\frac{m}{a_s} + \sqrt{\frac{m^2}{a_s^2} - 4 \frac{b_s}{a_s}}}{2}, \quad r_2 = \frac{\frac{m}{a_s} - \sqrt{\frac{m^2}{a_s^2} - 4 \frac{b_s}{a_s}}}{2}, \\
 a_1 &= -\frac{r_1 + r_2}{(r_1 r_2)^2}, \quad d_1 = \frac{1}{(r_1 - r_2) r_2^2}, \\
 b_1 &= \frac{1}{r_1 r_2}, \quad c_1 = -a_1 - d_1, \quad a_2 = \frac{2r_2 r_1}{(r_1 - r_2)^3}, \quad c_2 = -\frac{2r_2 r_1}{(r_1 - r_2)^3} \\
 b_2 &= \frac{r_1^2}{(r_1 - r_2)^2}, \quad d_2 = \frac{r_2^2}{(r_1 - r_2)^2}, \quad a_3 = \frac{2}{(r_1 - r_2)^3}, \quad c_3 = -\frac{2}{(r_1 - r_2)^3} \\
 b_3 &= \frac{1}{(r_2 - r_1)^2}, \quad d_3 = \frac{1}{(r_2 - r_1)^2}, \quad s = -\frac{2(r_2 + r_1)}{r_1^3 r_2^3}, \quad f = \frac{1}{(r_1 r_2)^2}, \quad h = \frac{1}{r_1^2 (r_1 - r_2)^2} \\
 g &= \frac{2(2r_1 - r_2)}{r_1^3 (r_1 - r_2)^3}, \quad M = \frac{2(-2r_2 + r_1)}{r_2^3 (r_1 - r_2)^3}, \quad N = \frac{1}{r_2^2 (r_1 - r_2)^2} \\
 a_5 &= \frac{1}{r_2 - r_1}, \quad b_5 = \frac{1}{r_1 - r_2}, \quad (7-6-5)
 \end{aligned}$$

فرم

به

جوابی

اکنون

$$\phi_{n,J}(r) = f_n(r) \exp(g_J(r)), \quad (8-6-5)$$

را پیشنهاد می دهیم که در آن

$$f_n(r) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \prod_{i=1}^n (r - \alpha_i^n) & n > 0, \end{cases}$$

$$g_J(r) = \beta \ln(r + r_1) + \gamma \ln(r + r_2) + \xi \ln(r) + \delta r + \eta r^2. \quad (9-6-5)$$

با جای‌گذاری این معادله در معادله داری

$$\begin{aligned} \phi_{0,J}''(r) = & [(\beta^2 - \beta) \frac{1}{(r + r_1)^2} + (\gamma^2 - \gamma) \frac{1}{(r + r_2)^2} + (2\delta\gamma - 4\gamma\eta r_2 + 2\beta\gamma b_5 - \frac{2\xi\gamma}{r_2}) \frac{1}{r_2} \frac{1}{(r + r_2)} \\ & + (2\beta\delta - 4\eta\beta r_1 - \frac{2\xi\beta}{r_1} + 2\beta\gamma a_5) \frac{1}{(r + r_1)} + (2\xi\delta + \frac{2\beta\xi}{r_1} + \frac{2\gamma\xi}{r_2}) \frac{1}{r} + (\xi^2 - \xi) \frac{1}{r^2} \\ & + 4\eta^2 r^2 + (4\delta\eta)r + (\delta^2 + 2\eta + 4\eta\beta + 4\eta\gamma + 4\eta\xi)] \phi_{0,J}(r). \end{aligned} \quad (10-6-5)$$

با مساوی قرار دادن توان‌های متناظر در طرفین داری

$$\begin{aligned} \beta^2 - \beta = & -(-\frac{3b_2}{4} + \frac{3b_s b_3}{2a_s} - \frac{3b_s^2 h}{4a_s^2}) \\ \gamma^2 - \gamma = & -(-\frac{3d_2}{4} + \frac{3b_s d_3}{2a_s} - \frac{3b_s^2 N}{4a_s^2}) \\ 2\delta\gamma - 4\gamma\eta r_2 + 2\beta\gamma b_5 - \frac{2\xi\gamma}{r_2} = & -(\frac{b_s d_1}{a_s} - \frac{3c_2}{4} + \frac{3b_s c_3}{2a_s} - \frac{3b_s^2 M}{4a_s^2} + \frac{cb_5}{A} - \frac{cb_s d_1}{a_s A}) \\ 2\beta\delta - 4\eta\beta r_1 - \frac{2\xi\beta}{r_1} + 2\beta\gamma a_5 = & -(\frac{b_s c_1}{a_s} - \frac{3a_2}{4} + \frac{3b_s a_3}{2a_s} - \frac{3b_s^2 g}{4a_s^2} + \frac{ca_5}{A} - \frac{cb_s c_1}{Aa_s}) \\ 2\xi\delta + \frac{2\beta\xi}{r_1} + \frac{2\gamma\xi}{r_2} = & -(\frac{b_s a_1}{a_s} - \frac{3b_s^2 s}{4a_s^2} - \frac{(2mb_s + 2E_{n,J}b_v)}{A\alpha_J^2} - \frac{cb_s a_1}{a_s A}) \\ \xi^2 - \xi = & -(\frac{b_s b_1}{a_s} - \frac{3b_s^2 f}{4a_s^2} - J(J+1) + \frac{(-b_s^2 + b_v^2)}{A\alpha_J^2} - \frac{cb_s b_1}{Aa_s}) \\ 4\eta^2 = & \frac{(a_s^2 - a_v^2)}{A\alpha_J^2} \\ 4\delta\eta = & \frac{(2ma_s + 2E_{n,J}a_v)}{A\alpha_J^2} \\ \delta^2 + 2\eta + 4\eta\beta + 4\eta\gamma + 4\eta\xi = & \frac{1}{A\alpha_J^2} (m^2 + 2a_s b_s - E_{n,J}^2 - 2a_v b_v). \end{aligned} \quad (11-6-5)$$

که

$$\beta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\left(-\frac{3b_2}{4} + \frac{3b_s b_3}{2a_s} - \frac{3b_s^2 h}{4a_s^2}\right)}}{2},$$

$$\gamma = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\left(-\frac{3d_2}{4} + \frac{3b_s d_3}{2a_s} - \frac{3b_s^2 N}{4a_s^2}\right)}}{2},$$

$$\xi = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\left(\frac{b_s b_1}{a_s} - \frac{3b_s^2 f}{4a_s^2} - J(J+1) + \frac{(-b_s^2 + b_v^2)}{A\alpha_J^2} - \frac{cb_s b_1}{Aa_s}\right)}}{2},$$

$$\eta = \pm \sqrt{\frac{(a_s^2 - a_v^2)}{4A\alpha_J^2}},$$

$$\delta = -\frac{1}{2\beta} \left(\frac{b_s c_1}{a_s} - \frac{3a_2}{4} + \frac{3b_s a_3}{2a_s} - \frac{3b_s^2 g}{4a_s^2} + \frac{ca_5}{A} - \frac{cb_s c_1}{Aa_s} - 4\eta\beta r_1 - \frac{2\xi\beta}{r_1} + 2\beta\gamma a_5 \right). \quad (12-6-5)$$

که رابطه انرژی را مطابق زیر نتایج می دهد:

$$\begin{aligned} & 2\xi\delta + \frac{2\beta\xi}{r_1} + \frac{4\gamma\xi}{r_2} - 2\delta\gamma + 4\gamma\eta r_2 - 2\beta\gamma b_5 \\ & + 4\delta\eta + \delta^2 + 2\eta + 4\eta\beta + 4\eta\gamma + 4\eta\xi = -\left(\frac{b_s a_1}{a_s} - \frac{3b_s^2 s}{4a_s^2} - \frac{(2mb_s + 2E_{n,J}b_v)}{A\alpha_J^2} - \frac{cb_s a_1}{a_s A}\right) \\ & + \left(\frac{b_s d_1}{a_s} - \frac{3c_2}{4} + \frac{3b_s c_3}{2a_s} - \frac{3b_s^2 M}{4a_s^2} + \frac{cb_5}{A} - \frac{cb_s d_1}{a_s A}\right) \\ & + \frac{(2ma_s + 2E_{n,J}a_v)}{A\alpha_J^2} + \frac{1}{A\alpha_J^2} (m^2 + 2a_s b_s - E_{n,J}^2 - 2a_v b_v). \end{aligned} \quad (13-6-5)$$

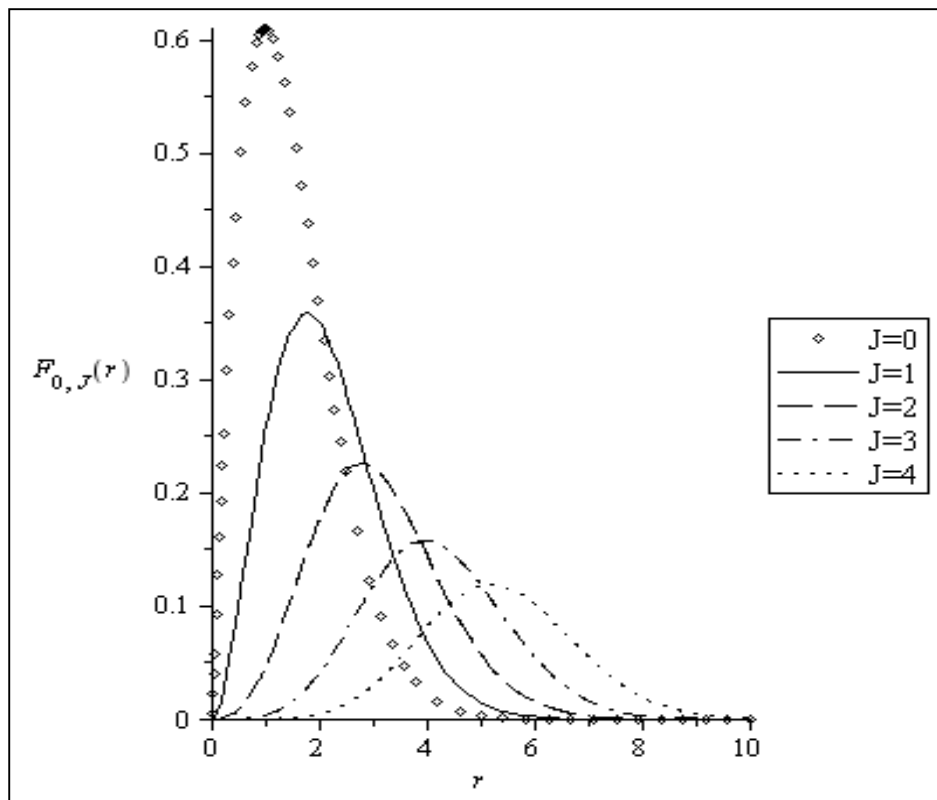
ویژه مقادیر انرژی سیستم و ضریب بهنجارش در جدول آمده اند. تابع موج در شکل رسم شده است.

جدول ۴,۵. ثابت بهنجارش و انرژی کرنل برای

$$a_s = 0.4, \quad b_s = 0.3, \quad a_v = 0.2, \quad b_v = 0.1, \quad m = 1$$

$$\eta = -0.1732050808, \quad \gamma = -0.5000000005, \quad \beta = -0.5000000000$$

$ n, J\rangle$	$E_{n,J}$	ξ	δ	$N_{n,J}$
$ 0,0\rangle$	2.637824618	1.539230485	$\begin{smallmatrix} - \\ 5 \end{smallmatrix}$	2.372602902
$ 0,1\rangle$	3.495550051	2.254992878	$\begin{smallmatrix} - \\ 3 \end{smallmatrix}$	0.7201493353
$ 0,2\rangle$	4.112492347	3.160826939	$\begin{smallmatrix} 0.026716733 \\ 7 \end{smallmatrix}$	0.0829224123
$ 0,3\rangle$	4.430201988	4.116628264	$\begin{smallmatrix} 0.470988712 \\ 7 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0.0040171377 \\ 57 \end{smallmatrix}$
$ 0,4\rangle$	4.480450270	5.091296113	$\begin{smallmatrix} 0.924030160 \\ 0 \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} 0.0000859787 \\ 71 \end{smallmatrix}$



شکل ۵,۵. تابع موج تحت کرنل

۷-۵ دی کی پی تحت دنگ فن

این بار معادله دی-کی-پی را تحت برهم کنش های برداری و اسکالر

$$U_s = V_0 + \frac{V_1}{e^{ar} - 1} + \frac{V_2}{(e^{ar} - 1)^2},$$

$$U_v^0 = u_0 + \frac{u_1}{e^{ar} - 1} + \frac{u_2}{(e^{ar} - 1)^2}, \quad (1-7-5)$$

در نظر می گیری. این برهم کنش حالت کلی تر برهم کنش هالسن است و در حالت حدی علاوه بر جمله کولنی، دارای یک جمله عکس مجذوری نیز هست. معادله حاصل با روش های شناخته شده قابل حل نیست. بنابراین ابتدا تبدیلی به فرم

$$F_{n,J}(r) = \sqrt{m+U_s} u_{n,J}(r), \quad (2-7-5)$$

را اعمال می‌کنیم تا معادله دی-کی-پی تبدیلی شود به

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{U_s''}{2} \frac{1}{m+U_s} - \frac{3}{4} \frac{U_s'^2}{(m+U_s)^2} - \frac{J(J+1)}{r^2} + \frac{CU_s'}{A(m+U_s)} \frac{1}{r} \right. \\ \left. - \frac{1}{A\alpha_J^2} [(m+U_s)^2 - (E_{n,J} - U_v^0)^2] \right] u_{n,J}(r) = 0. \quad (3-7-5)$$

که در آن

$$A = 1 + \frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2}, \quad C = J + 1 - \frac{\zeta_J^2}{\alpha_J^2} J, \quad (4-7-5)$$

اکنون با جای‌گذاری پتانسیل دنگ-فن داریم

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{2} (-\alpha^2 V_1 \frac{e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2} + 2\alpha^2 V_1 \frac{e^{2\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^3} - 2\alpha^2 V_2 \frac{e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^3} + 6\alpha^2 V_2 \frac{e^{2\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^4}) \right. \\ \times \frac{1}{m+V_0 + \frac{V_1}{e^{\alpha r} - 1} + \frac{V_2}{(e^{\alpha r} - 1)^2}} \\ - \frac{3}{4} \frac{1}{(m+V_0 + \frac{V_1}{e^{\alpha r} - 1} + \frac{V_2}{(e^{\alpha r} - 1)^2})^2} \left(-\frac{\alpha V_1 e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2} - \frac{2\alpha V_2 e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^3} \right)^2 - \frac{J(J+1)}{r^2} \\ \left. + \frac{C}{A(m+V_0 + \frac{V_1}{e^{\alpha r} - 1} + \frac{V_2}{(e^{\alpha r} - 1)^2})} \left(-\frac{\alpha V_1 e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2} - \frac{2\alpha V_2 e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^3} \right) \frac{1}{r} \right. \\ \left. - \frac{1}{A\alpha_J^2} \left[(m+V_0 + \frac{V_1}{e^{\alpha r} - 1} + \frac{V_2}{(e^{\alpha r} - 1)^2})^2 - (E_{n,J} - u_0 - \frac{u_1}{e^{\alpha r} - 1} - \frac{u_2}{(e^{\alpha r} - 1)^2})^2 \right] \right] u_{n,J}(r) = 0 \quad (5-7-5)$$

برای به دست آوردن جواب حالت کلی، تقریب‌های زیر را معرفی می‌کنیم

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\alpha^2}{(e^{\alpha r} - 1)^2}, \\ \frac{1}{r} \approx \frac{\alpha}{e^{\alpha r} - 1}, \quad (6-7-5)$$

با این کار می‌رسیم به

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{d^2}{dr^2} + \left(-\frac{\alpha^2 V_1}{2} \frac{e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2} + \alpha^2 V_1 \frac{e^{2\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^3} - \alpha^2 V_2 \frac{e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^3} \right. \right. \\
& \left. \left. + 3\alpha^2 V_2 \frac{e^{2\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^4} \right) \frac{1}{m + V_0 + \frac{V_1}{e^{\alpha r} - 1} + \frac{V_2}{(e^{\alpha r} - 1)^2}} \right. \\
& \left. + \left(-\frac{3}{4} \alpha^2 V_1^2 \frac{e^{2\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^4} - 3\alpha^2 V_2^2 \frac{e^{2\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^6} - 3\alpha^2 V_1 V_2 \frac{e^{2\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^5} \right) \frac{1}{(m + V_0 + \frac{V_1}{e^{\alpha r} - 1} + \frac{V_2}{(e^{\alpha r} - 1)^2})^2} \right. \\
& \left. - J(J+1)\alpha^2 \left(\frac{1}{e^{\alpha r} - 1} \right)^2 + \right. \\
& \left. \frac{C\alpha}{A} \left(\frac{1}{e^{\alpha r} - 1} \right) \left(-\alpha V_1 \frac{e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^2} - 2\alpha V_2 \frac{e^{\alpha r}}{(e^{\alpha r} - 1)^3} \right) \frac{1}{m + V_0 + \frac{V_1}{e^{\alpha r} - 1} + \frac{V_2}{(e^{\alpha r} - 1)^2}} \right. \\
& \left. - \frac{1}{A\alpha_J^2} \left\{ \left(m + V_0 + \frac{V_1}{e^{\alpha r} - 1} + \frac{V_2}{(e^{\alpha r} - 1)^2} \right)^2 - (E_{n,J} - u_0 - \frac{u_1}{e^{\alpha r} - 1} - \frac{u_2}{(e^{\alpha r} - 1)^2})^2 \right\} \right] u_{n,J}(r) = 0. \quad (7-7-5)
\end{aligned}$$

در این مرحله تبدیلی به فرم

$$u_{n,J}(z) = \frac{\phi_{n,J}(z)}{\sqrt{z}}, \quad (8-7-5)$$

را اعمال می‌کنیم و پس از تغییری متغیر

$$z = e^{\alpha r}, \quad (9-7-5)$$

می‌رسیم به

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{z^2} + \left(-\frac{V_1}{2(m+V_0)} \frac{1}{z} + \frac{V_1}{(m+V_0)} \frac{1}{z-1} - \frac{V_2}{(m+V_0)} \frac{1}{z(z-1)} + \right. \right. \\
& \left. \frac{3V_2}{(m+V_0)} \frac{1}{(z-1)^2} \right) \left(\frac{1}{(z+z_1)(z+z_2)} \right) \\
& + \left(-\frac{3V_1^2}{4(m+V_0)^2} - \frac{3V_2^2}{(m+V_0)^2} \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{3V_2V_1}{(m+V_0)^2} \frac{1}{z-1} \right) \left(\frac{1}{(z+z_1)(z+z_2)} \right)^2 \\
& - J(J+1) \frac{1}{z^2(z-1)^2} + \frac{1}{(z+z_1)(z+z_2)} \left\{ -\frac{CV_1}{A(m+V_0)} \frac{1}{z(z-1)} - \frac{2CV_2}{A(m+V_0)} \frac{1}{z(z-1)^2} \right\} \\
& - \frac{1}{A\alpha^2\alpha_j^2} ((m+V_0)^2 - (E_{n,J} - u_0)^2) \frac{1}{z^2} \\
& - \frac{1}{A\alpha^2\alpha_j^2} (V_1^2 - u_1^2 + 2V_2(m+V_0) + 2u_2(E_{n,J} - u_0)) \frac{1}{z^2(z-1)^2} \\
& - \frac{1}{A\alpha^2\alpha_j^2} (2V_1(m+V_0) + 2u_1(E_{n,J} - u_0)) \frac{1}{z^2(z-1)} \\
& - \frac{1}{A\alpha^2\alpha_j^2} (2V_2V_1 - 2u_1u_2) \frac{1}{z^2(z-1)^3} - \frac{1}{A\alpha^2\alpha_j^2} (V_2^2 - u_2^2) \frac{1}{z^2(z-1)^4} \} \phi_{n,J}(z) = 0. \quad (10-7-5)
\end{aligned}$$

پس از تجزیه کسرهای داری

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{d^2}{dz^2} + \frac{\lambda}{z} + \frac{\omega}{z^2} + \frac{s}{z-1} + \frac{q}{(z-1)^2} + \frac{p}{(z-1)^3} + \frac{N}{(z-1)^4} + \frac{g}{z+z_1} \right. \\
& \left. + \frac{h}{(z+z_1)^2} + \frac{\chi}{z+z_2} + \frac{\kappa}{(z+z_2)^2} \right] \phi_{n,J}(z) = 0. \quad (11-7-5)
\end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{1}{2} \left(\frac{V_1 - 2(m + V_0)}{m + V_0} + \sqrt{\left(\frac{V_1 - 2(m + V_0)}{m + V_0} \right)^2 - 4 \frac{m + V_0 - V_1 + V_2}{m + V_0}} \right) \\
z_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{V_1 - 2(m + V_0)}{m + V_0} - \sqrt{\left(\frac{V_1 - 2(m + V_0)}{m + V_0} \right)^2 - 4 \frac{m + V_0 - V_1 + V_2}{m + V_0}} \right) \\
\lambda &= -\frac{V_1}{2z_1 z_2 (m + V_0)} + \frac{1}{z_1 z_2} \left(\frac{V_2}{m + V_0} + \frac{CV_1}{A(m + V_0)} \right) + \frac{2V_1(m + V_0)}{A\alpha_j^2 \alpha^2} + \frac{2u_1(E_{n,J} - u_0)}{A\alpha_j^2 \alpha^2} \\
&\quad - 2J(J + 1) - \frac{2}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (V_1^2 - u_1^2 + 2V_2(m + V_0) + 2u_2(E_{n,J} - u_0)) + \\
&\quad \frac{3}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (2V_1 V_2 - 2u_1 u_2) - \frac{4}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (V_2^2 - u_2^2) \\
&\quad - \frac{2CV_2}{Az_1 z_2 (m + V_0)} \\
\omega &= \frac{1}{4} - \frac{1}{A\alpha_j^2 \alpha^2} ((m + V_0)^2 - (E_{n,J} - u_0)^2) + \frac{2V_1(m + V_0)}{A\alpha_j^2 \alpha^2} + \frac{2u_1(E_{n,J} - u_0)}{A\alpha_j^2 \alpha^2} - J(J + 1) \\
&\quad - \frac{1}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (V_1^2 - u_1^2 + 2V_2(m + V_0) + 2u_2(E_{n,J} - u_0)) + \frac{1}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (2V_1 V_2 - 2u_1 u_2) - \frac{1}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (V_2^2 - u_2^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S &= \frac{V_1}{(m + V_0)(z_1 + 1)(z_2 + 1)} + \frac{1}{(z_1 + 1)(z_2 + 1)} \left(-\frac{V_2}{m + V_0} - \frac{CV_1}{A(m + V_0)} \right) - \frac{3V_2(z_1 + z_2 + 2)}{(z_1 + 1)^2(z_2 + 1)^2(m + V_0)} \\
&\quad + \frac{6V_2^2(z_1 + z_2 + 2)}{(z_1 + 1)^3(z_2 + 1)^3(m + V_0)^2} - \frac{3V_1 V_2}{(m + V_0)^2(z_1 + 1)^2(z_2 + 1)^2} - \frac{2V_1(m + V_0)}{A\alpha_j^2 \alpha^2} - \frac{2u_1(E_{n,J} - u_0)}{A\alpha_j^2 \alpha^2} \\
&\quad + 2J(J + 1) + \frac{2}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (V_1^2 - u_1^2 + 2V_2(m + V_0) + 2u_2(E_{n,J} - u_0)) - \frac{3}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (2V_1 V_2 - 2u_1 u_2) \\
&\quad + \frac{4}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (V_2^2 - u_2^2) + \frac{2CV_2(z_1 z_2 + 2z_1 + 2z_2 + 3)}{A(m + V_0)(z_1 + 1)^2(z_2 + 1)^2} \\
q &= \frac{3V_2}{(m + V_0)(z_1 + 1)(z_2 + 1)} - \frac{3V_2^2}{(m + V_0)^2(z_1 + 1)^2(z_2 + 1)^2} - J(J + 1) - \frac{1}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (V_1^2 - u_1^2 + 2V_2(m + V_0) + 2u_2(E_{n,J} - u_0)) \\
&\quad + \frac{2}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (2V_1 V_2 - 2u_1 u_2) - \frac{3}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (V_2^2 - u_2^2) - \frac{2CV_2}{A(m + V_0)(z_1 + 1)(z_2 + 1)} \\
g &= -\frac{V_1}{2z_1(z_1 - z_2)(m + V_0)} + \frac{V_1}{(z_1 + 1)(z_1 - z_2)(m + V_0)} + \frac{1}{z_1(z_1 - z_2)(z_1 + 1)} \left(\frac{V_2}{m + V_0} + \frac{CV_1}{A(m + V_0)} \right) \\
&\quad - \frac{3V_2}{(m + V_0)(z_1 + 1)^2(z_1 - z_2)} - \frac{6V_1^2}{4(m + V_0)^2(z_1 - z_2)^3} - \frac{6V_2^2(-z_2 + 2z_1 + 1)}{(m + V_0)^2(z_1 - z_2)^3(z_1 + 1)^3} + \frac{3V_2 V_1(-z_2 + 3z_1 + 2)}{(m + V_0)^2(z_1 - z_2)^3(z_1 + 1)^2} \\
&\quad - \frac{2CV_2}{Az_1(m + V_0)(z_1 - z_2)(z_1 + 1)^2}
\end{aligned}$$

$$p = -\frac{1}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (2V_1 V_2 - 2u_1 u_2) + \frac{2}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (V_2^2 - u_2^2)$$

$$N = -\frac{1}{A\alpha_j^2 \alpha^2} (V_2^2 - u_2^2)$$

$$\begin{aligned}
h &= -\frac{3V_1^2}{4(m+V_0)^2(z_2-z_1)^2} - \frac{3V_2^2}{(m+V_0)^2(z_1-z_2)^2(z_1+1)^2} + \frac{3V_1V_2}{(m+V_0)^2(z_1-z_2)^2(z_1+1)} \\
\chi &= \frac{V_1}{2z_2(z_1-z_2)(m+V_0)} + \frac{V_1}{(z_2+1)(z_2-z_1)(m+V_0)} + \frac{1}{z_2(z_2-z_1)(z_2+1)} \left(\frac{V_2}{m+V_0} + \frac{CV_1}{A(m+V_0)} \right) \\
&\quad - \frac{3V_2}{(m+V_0)(z_2+1)^2(z_2-z_1)} + \frac{6V_1^2}{4(m+V_0)^2(z_1-z_2)^3} - \frac{6V_2^2(-z_1+2z_2+1)}{(m+V_0)^2(z_2-z_1)^3(z_2+1)^3} \\
&\quad + \frac{3V_2V_1(-z_1+3z_2+2)}{(m+V_0)^2(z_2-z_1)^3(z_2+1)^2} - \frac{2CV_2}{Az_2(m+V_0)(z_2-z_1)(z_2+1)^2} \\
\kappa &= -\frac{3V_1^2}{4(m+V_0)^2(z_2-z_1)^2} - \frac{3V_2^2}{(m+V_0)^2(z_1-z_2)^2(z_2+1)^2} + \frac{3V_1V_2}{(m+V_0)^2(z_1-z_2)^2(z_2+1)}. \quad (12-7-5)
\end{aligned}$$

اکنون جوابی به فرم

$$\phi_{n,J}(z) = f_n(z) \exp(g_J(z)), \quad (20)$$

$$f_n(z) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \prod_{i=1}^n (z-\alpha_i^n) & n>0, \end{cases} \quad (21-a)$$

$$g_J(z) = \gamma \ln(z) + \beta \ln(z-1) + \frac{\eta}{z-1} + \xi \ln(z+z_1) + \delta \ln(z+z_2). \quad (13-7-5)$$

را پیشنهاد می دهیم. با جلی گذاری داریم

$$\begin{aligned}
\phi_{0,J}''(z) &= \left[(-2\beta\gamma - 2\gamma\eta + \frac{2\gamma\xi}{z_1} + \frac{2\gamma\delta}{z_2}) \frac{1}{z} + (\gamma^2 - \gamma) \frac{1}{z^2} \right. \\
&\quad + (2\beta\gamma + 2\gamma\eta + \frac{2\beta\xi}{1+z_1} + \frac{2\beta\delta}{1+z_2} + \frac{2\eta\xi}{(1+z_1)^2} + \frac{2\eta\delta}{(1+z_2)^2}) \frac{1}{z-1} \\
&\quad + (\beta^2 - \beta - 2\gamma\eta - \frac{2\eta\xi}{1+z_1} - \frac{2\eta\delta}{1+z_2}) \frac{1}{(z-1)^2} \\
&\quad + (2\eta - 2\beta\eta) \frac{1}{(z-1)^3} + \eta^2 \frac{1}{(z-1)^4} + (-\frac{2\gamma\xi}{z_1} - \frac{2\beta\xi}{1+z_1} - \frac{2\eta\xi}{(1+z_1)^2} + \frac{2\xi\delta}{z_2-z_1}) \frac{1}{z+z_1} \\
&\quad + (\xi^2 - \xi) \frac{1}{(z+z_1)^2} + (-\frac{2\delta\gamma}{z_2} - \frac{2\beta\delta}{1+z_2} - \frac{2\eta\delta}{(1+z_2)^2} - \frac{2\xi\delta}{z_2-z_1}) \frac{1}{z+z_2} \\
&\quad \left. + (\delta^2 - \delta) \frac{1}{(z+z_2)^2} \right] \phi_{0,J}(z) \quad (14-7-5)
\end{aligned}$$

در نتیجه، برای حالت بدون گره داریم

$$-2\beta\gamma - 2\gamma\eta + \frac{2\gamma\xi}{z_1} + \frac{2\gamma\delta}{z_2} = -\lambda$$

$$\gamma^2 - \gamma = -\omega$$

$$2\beta\gamma + 2\gamma\eta + \frac{2\beta\xi}{1+z_1} + \frac{2\beta\delta}{1+z_2} + \frac{2\eta\xi}{(1+z_1)^2} + \frac{2\eta\delta}{(1+z_2)^2} = -S$$

$$\beta^2 - \beta - 2\gamma\eta - \frac{2\eta\xi}{1+z_1} - \frac{2\eta\delta}{1+z_2} = -q$$

$$2\eta - 2\beta\eta = -p$$

$$\eta^2 = -N$$

$$-\frac{2\gamma\xi}{z_1} - \frac{2\beta\xi}{1+z_1} - \frac{2\eta\xi}{(1+z_1)^2} + \frac{2\xi\delta}{z_2 - z_1} = -g$$

$$\xi^2 - \xi = -h$$

$$-\frac{2\delta\gamma}{z_2} - \frac{2\beta\delta}{1+z_2} - \frac{2\eta\delta}{(1+z_2)^2} - \frac{2\xi\delta}{z_2 - z_1} = -\chi$$

$$\delta^2 - \delta = -\kappa$$

(15-7-5)

که انرژی سیستم را تعیین می کند.

فصل شش

بررسی مزون‌های B و D

۶-۱ بررسی مزون های B و D . تحت کرنل

تابع

$$\zeta(y) = 1 - \rho^2(y-1) + c(y-1)^2 \quad (1.6)$$

$$\zeta(y) = \int_0^\infty 4\pi r^2 |\Psi(r)|^2 \cos(pr) dr \quad (2.6)$$

که در آن

$$p^2 = 2\mu^2(y-1), \quad (3.6)$$

$$\rho^2 = 4\pi\mu^2 \int_0^\infty r^4 |\Psi(r)|^2 dr, \quad (4.6)$$

$$c = \frac{2}{3} \pi\mu^4 \int_0^\infty r^6 |\Psi(r)|^2 dr, \quad (5.6)$$

یکی از بهترین معیارها برای بررسی مزونهاست. در این فصل نتایج پتانسیل کرنل را برای مزون های و اعمال کرده ایم. همان طور که می بینیم، نتایج همخوانی خوبی دارند.

جدول ۱،۶. مشخصات مزون B به ازای $\mu = 0.318$.

r_0	N_3 (ours)	ρ^2 (ours)	ρ^2 [9]	ρ^2 [22]	ρ^2 [55]	c (ours)	c [9]	c [33]
3.5	8.2365	0.1746	-	0.83	1.04	0.0151	-	1.36
4.0	8.1626	0.2306	0.6699			0.0268	0.0268	
4.5	8.1092	0.3004	0.7030			0.0460	0.1118	
5.0	8.0655	0.3930	1.1758			0.0794	0.3451	
5.5	8.0112	0.5270	2.0523			0.1415	0.8722	
6.0	7.9118	0.7360	2.7854			0.2629	1.4441	
6.5	7.7132	1.0735	-			0.5028	-	
7.0	7.3458	1.6058	-			0.9562	-	
7.5	6.7498	2.3785	-			1.7376	-	
8.0	5.9215	3.3656	-			2.9221	-	

جدول ۲،۶. مشخصات مزون D به ازای $\mu = 0.2761$.

r_0	N_3 (ours)	ρ^2 (ours)	ρ^2 [9]	ρ^2 [40,41]	ρ^2 [42]	c (ours)	c [9]
-------	--------------	-----------------	--------------	------------------	---------------	------------	---------

3.5	8.1466	0.1300	-	1.67	1.35	0.0082	-
4.0	8.1130	0.1694	-			0.0141	-
4.5	8.1186	0.2170	-			0.0236	-
5.0	8.1499	0.2811	0.6821			0.0402	0.1138
5.5	8.1730	0.3827	1.2249			0.0747	0.3571
6.0	8.11430	0.5677	1.9099			0.1543	0.7342
6.5	7.8407	0.9139	2.463			0.3374	1.1247
7.0	7.1873	1.4976	-			0.7097	-
7.5	6.0965	2.2928	-			1.3224	-
8.0	4.7511	3.1433	-			2.1281	-

جدول ۳,۶. مشخصات مزون D_s به ازای $\mu = 0.368$.

r_0	N_3 (ours)	ρ^2 (ours)	ρ^2 [9]	c (ours)	c [9]
3.5	8.2974	0.2517	-	0.0322	-
4.0	8.1860	0.3401	-	0.0592	-
4.5	8.0783	0.4545	-	0.1057	-
5.0	7.9638	0.6080	2.1054	0.1867	0.9665
5.5	7.8275	0.8221	1.0707	0.3296	0.2882
6.0	7.6489	1.1286	3.8782	0.5823	2.6875
6.5	7.4025	1.5697	-	1.0226	-
7.0	7.0614	2.1923	-	1.7628	-
7.5	6.6050	3.0327	-	2.9409	-
8.0	6.0307	4.0964	-	4.6894	-

جدول ۴,۶. مشخصات مزون B_s به ازای $\mu = 0.4401$.

r_0	N_3	ρ^2 (ours)	ρ^2 [9]	c (ours)	c [9]
3.5	8.2427	0.4424	0.9809	0.0971	0.2101
4.0	8.0616	0.6236	1.0924	0.1886	0.2805
4.5	7.8637	0.8666	2.2312	0.3504	1.1423
5.0	7.6400	1.1935	3.6471	0.6291	2.5282
5.5	7.3810	1.6322	-	1.0951	-
6.0	7.0778	2.2142	-	1.8497	-
6.5	6.7241	2.9697	-	3.0267	-
7.0	6.3176	3.9223	-	4.7874	-
7.5	5.8625	5.0814	-	7.3063	-
8.0	5.3694	6.4388	-	10.7511	-

فصل هفت

نتیجه گیری و پیشنهادات

همان‌طور که دیدیم معادلات سالی‌تر بدون اسپین و دی-کی-پی هر دو به صورت معادلات شبه-شروdingی‌نگر تبدیلی شدند. با استفاده از روش‌های تحلیلی توانایی مانند مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، روش نیکی‌فروو-یووارو، و روش آنساز توانستیم این معادلات را تحت برهم‌کنش‌های مهم فی‌زیکی حل کنیم و توابع موج و ویژه‌مقادیر انرژی حالت‌های پایه و برانگیخته را محاسبه کنیم. همان‌طور که انتظار داشتیم پتانسیل کرنل به دلیلی داشتن جمله محبوس‌کننده نتایج قابل قبولی داشت. به عنوان یک پیشنهاد، می‌توان پتانسیل کرنل را با پتانسیل‌های نمایی و یایوکاوا ترکیب کرد و نتایج را بررسی نمود. نتایج حاصل را می‌توان برای محاسبه انرژی بستگی، خواص گذار، شعاع باری، انتقال بار، فرم فکتورها و ... به کار بست.

منابع :

- [1] A. W. Thomas, A. Weise, (2001), "Structure of the Nucleon, Wiley-VCH".
- [2] B. Thaller, (1992), "The Dirac Equation, Springer-Verlag".
- [3] J. N. Ginocchio, (2005), "Relativistic symmetries in nuclei", Phys. Rep. 414 165.
- [4] Salpeter, E.E., Bethe, H.A, (1951), " relativistic equation for bound-state problems.", A Phys. Rev. 84, 1232–1242
- [5] Wick, G.C. (1954)," Properties of Bethe–Salpeter wave function.", Phys. Rev. 96, 1124–1134
- [6] Pieter, M., Roberts, C.D, (2003), " Dyson Schwinger equations." Int. J. Mod. Phys. E 12, 297–365
- [7] Chang, L., Roberts, C.D, (2009)," Sketching the Bethe–Salpeter kernel.", Phys. Rev. Lett. 103, 081601
- [8] Pieter, M., Roberts, C.D., (1997)," π - and K-meson Bethe–Salpeter amplitudes.", Phys. Rev. C 56, 3369–3383.
- [9] Nakanishi, N., (1969), " A general survey of the theory of the Bethe–Salpeter equation.", Prog. Theor. Phys. Suppl. 43, 1–81.

- [10] Li, Z.F. et al., (2008), " Stability in the instantaneous Bethe–Salpeter formalism: a reduced exact-propagator bound-state equation with harmonic interaction." J. Phys. G: Nucl. Part. Phys 35, 115002.
- [11] Lucha, W., Schoberl, F.F, (1999), " Semirelativistic treatment of bound states.", Int. J. Mod. Phys. A 14, 2309–2334.
- [12] Lucha, W., Schoberl, F.F., (2002), " Instantaneous Bethe–Salpeter equation: improved analytical solution.", Int. J. Mod. Phys. A 17, 2233
- [13] Hall, R., Lucha, W., (2005), " Schrödinger upper bounds to semirelativistic eigenvalues.", J. Phys. A: Math. Gen 38, 7997
- [14] Hall, R., Lucha, W., (2010), " Klein–Gordon lower bound to the semirelativistic ground-state energy.", Phys. Lett. A 374, 1980–1984
- [15] Lucha, W., Schoberl, F.F., (1996)," Relativistic Coulomb problem: analytic upper bounds on energy levels. ", Phys. Rev. A 54, 3790–3794
- [16] Lucha, W., Schöberl, F.F., (2000)," Accuracy of approximate eigenstates.", Int. J. Mod. Phys. A 15, 3221–3236
- [17] Hall, R., Lucha, W., Schöberl, F.F., (2003), " Discrete spectra of semirelativistic hamiltonians.", Int. J. Mod. Phys. A 18, 2657–2680
- [18] Hall, R., Lucha, W., Schöberl, F.F., (2001),"Energy bounds for the spinless Salpeter equation: harmonic oscillator.", J. Phys. A 34, 5059–5064
- [19] Hall, R., Lucha, W., Schöberl, F.F., (2002), "Discrete spectra of semirelativistic Hamiltonians from envelope theory.", Int. J. Mod. Phys. A 17, 1931–1952
- [20] Hall, R., Lucha, W., (2008), " Semirelativistic stability of N-boson systems bound by $1/r_{ij}$ pair potentials.", J. Phys. A: Math. Theor. 41, 355202
- [21] Lucha, W., Schoberl, F.F., (1994), " Variational approach to the spinless relativistic Coulomb problem.", Phys. Rev. D 50, 5443–5445
- [22] Hall, R., Lucha, W., Schoberl, F.F., (2001), " bounds for the spinless Salpeter equation: harmonic oscillator.", Energy J. Phys. A:Math. Gen. 34, 5059
- [23] Hall, R., Lucha, W., (2007)," Schrödinger secant lower bounds to semirelativistic eigenvalues.", Int. J. Mod. Phys. A 22, 1899–1904
- [24] Lucha, W., Schöberl, F.F., Gromes, D., (1991), " Bound states of quarks.", Phys. Rep. 200, 127–240

- [25] Ikhdair, S.M., Sever, R., (2008), " Bound-states of the spinless Salpeter equation for the pt-symmetric generalized Hulthen potential by the Nikiforov–Uvarov Method. ", Int. J. Mod. Phys. E 17, 1107
- [26] Jaczko, G., Durand, L., (1998), " Understanding the success of nonrelativistic potential models for relativistic quark–antiquark bound state.", Phys. Rev. D 58, 114017
- [27] Ikhdair, S.M., Sever, R., (1992), " Heavy-quark bound states in potentials with the Bethe–Salpeter equation.", Z. Phys. C 56, 155
- [28] Ikhdair, S.M., Sever, R., (1993), " Bethe–Salpeter equation for non-self conjugate mesons in a power-law potential.", Z. Phys. C58, 153
- [29] Ikhdair, S.M., Sever, R., (2005), " Mass spectra of heavy quarkonia and Bc decay constant for static scalar-vector interactions with relativistic kinematics.", Int. J. Mod. Phys. A 20(28), 6509
- [30] Arafah, M.R. et al., (1992), " Power law potential and quarkonium.", Ann. Phys. 220, 55
- [31] Olson, C. et al., (1992), " QCD, relativistic flux tubes, and potential models.", Phys. Rev. D 45, 4307
- [32] Durand, B., Durand, L., (1982), " Relativistic duality, and relativistic and radiative corrections for heavy-quark systems.", Phys. Rev. D 25, 2312.
- [33] Durand, B., Durand, L., (1984), " Connection of relativistic and nonrelativistic wave functions in the calculation of leptonic widths.", Phys. Rev. D 30, 1904
- [34] Nickisch, J., Durand, L., Durand, B., (1984), " Salpeter equation in position space: numerical solution for arbitrary confining potentials.", Phys. Rev. D 30, 660
- [35] Li, B.Q., Chao, K.T., (2009), " Higher charmonia and X, Y, Z states with screened potential. Phys.", Rev. D 79, 094004
- [36] Jaczko, G., Durand, L., (1998), " Understanding the success of nonrelativistic potential models for relativistic quark–antiquark bound states.", Phys. Rev. D 58, 114017
- [37] N. Kemmer, (1938), " Quantum Theory of Einstein-Bose Particles and Nuclear Interaction," Proc. R. Soc. A 166, 127.
- [38] R. J. Duffin, (1938), " On The Characteristic Matrices of Covariant Systems ,", Phys. Rev. 54, 1114
- [39] N. Kemmer, (1939), " The Particle Aspect of Meson Theory ", Proc. R. Soc. A, 173, 91

- [40] G. Petiau, (1936), University of Paris thesis published in Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect.vol. 16, N 2, 1
- [41] R. Cardoso, L. B. Castro and A. S. de Castro, (2010)," T Effects Due to a Scalar Coupling on the Particle-Antiparticle Production in the Duffin-Kemmer-Petiau Theory.", Int. J. Theor. Phys. 49 10-17.
- [42] T. R. Cardoso, L. B. Castro and A. S. de Castro. (2008), "Inconsistencies of a purported probability current in the Duffin Kemmer Petiau theory", Phys. Lett. A 372, 5964.
- [43] L. Chetouani, M. Merad, T. Boudjedaa and A. Lecheheb, (2004)," Bound-states of the (1+1)-dimensional DKP equation with a pseudoscalar linear plus Coulomb-like", Int. J. Theor. Phys. 43, 1147.
- [44] T. R. Cardoso, L. B. Castro and A. S. de Castro, (2010), " On the nonminimal vector coupling in the Duffin-Kemmer-Petiau theory and the confinement of massive bosons by a linear potential", J. Phys. A: Math. Theor. 43 055306.
- [45] A. S. de Castro, (2011), " Bound states of the Duffin-Kemmer-Petiau equation with a mixed minimal-nonminimal vector cusp potential.", J. Phys. A: Math. Theor. 44 035201.
- [45] R.E. Kozack, et al., (1988), " Relativistic deuteron-nucleus scattering in the Kemmer-Duffin-Petiau formalism," , Phys. Rev. C 37 2898.
- [46] R.E. Kozack, (1989), " Spin-one Kemmer-Duffin-Petiau equations and intermediate-energy deuteron-nucleus scattering", Phys. Rev. C 40 2181.
- [47] V.K. Mishra, et al., (1991), " Implications of various spin-one relativistic wave equations for intermediate-energy deuteron-nucleus scattering.", Phys. Rev. C 43 (1991) 801.
- [48] B.C. Clark, et al., (1998)," Pion-nucleus scattering at medium energies with densities from chiral effective field theories." , Phys. Lett. B 427 (1998) 231
- [49] V. Gribov, (1999), " QCD at large and short distances", Eur. Phys. J. C 10 71.
- [50] J.T. Lunardi, B.M. Pimentel, R.G. Teixeiri, J.S. Valverde, (2000), " Remarks on Duffin-Kemmer-Petiau theory and gauge invariance", Phys. Lett. A 268 165.
- [51] J.T. Lunardi, L.A. Manzoni, B.M. Pimentel, J.S. Valverde, (2002), " Duffin-Kemmer-Petiau Theory in the Causal Approach", Int. J. Mod. Phys. A 17 205.
- [52] M. Nawakowski, (1998), " The electromagnetic coupling in Kemmer-Duffin-Petiau theory", Phys. Lett. A 244 329.

- [53] T. R. Cardoso, L. B. Castro and A. S. deCastro, (2010), " Effects Due to a Scalar Coupling on the Particle-Antiparticle Production in the Duffin-Kemmer-Petiau Theory", Int J. Theor. Phys. 49 10.
- [54] M. de Montigny, F.C. Khanna, A.E. Santana, E.S. Santos, (2000), " Galilean covariance and the Duffin-Kemmer-Petiau equation", J. Phys. A 33 L273.
- [55] Y. Nedjadi and R. C. Barrett, (1993), " On the properties of Duffin-Kemmer-Petiau equation.", J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 19 87-98.
- [56] R.F. Furnstahl, J.J. Rusnak, B.D. Serot, (1998), " The nuclear spin-orbit force in chiral effective field theories", Nucl. Phys. A 632 607.
- [57] K. Sogut and A. Havare, (2010), " Scattering of vector bosons by an asymmetric Hulthen potential", J. Phys. A: Math. Theor., 43 225204.
- [58] A. Okninski, (2011)," Supersymmetric content of the Dirac and Duffin-Kemmer-Petiau equations", Int. J. Theor. Phys. 50 729-736.
- [59] Junker, G., (1996), " Supersymmetric Methods in Quantum and Statistical Physics.", Springer, Berlin
- [60] Bagchi, B., (2000), " Supersymmetry in Quantum and Classical Mechanics", Chapman and Hall/CRC, Boca Raton
- [61] Cooper, F. et al., (1995), " Supersymmetry and quantum mechanics.", Phys. Rep. 251, 267–385
- [62] Lahiri, A., Roy, P.K., Bagchi, B., (1987), " Supersymmetry in atomic physics and the radial problem.", J. Phys. A 20, 3825.
- [63] Kosteletsky, V.A., Nieto, M.M., (1985)," Evidence form alkali-metal-atom transition probabilities for a phenomenological supersymmetry.", Phys. Rev. A 32, 1293
- [64] Kosteletsky, V.A., Nieto, M.M., (1984), " Evidence for a phenomenological supersymmetry in atomic physics." Phys. Rev. Lett. 53, 2285
- [65] Kosteletsky, V.A., Nieto, M.M., (1985), " Supersymmetry and the relationship between the Coulomb and oscillator problems in arbitrary dimensions.", Phys. Rev. D 32, 3243.
- [66] Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A, and Hassanabadi, H., (2011) , " Dirac Equation for a Coulomb Scalar, Vector and Tensor Interaction", Int. J. Mod. Phys. A 26 1011.
- [67] Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A., and Hassanabadi, H., (2010) ,"Dirac equation for the harmonic scalar and vector potentials and linear plus coulomb-like tensor potential"; the SUSY approach, Ann. Phys. (New York) 325 1720.

- [68] Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A., and Hassanabadi, H., (2010), "Dirac equation in the presence of coulomb and linear terms in $(1 + 1)$ dimensions", the supersymmetric approach, *Ann. Phys. (New York)* 325 2522.
- [69] Nikiforov, A. F. and Uvarov, V. B., (1988), " Special Functions of Mathematical Physics." Birkhaauser: Basel.
- [70] Dong, S. H., (2000)," A new approach to the relativistic Schrödinger equation with central potential: ansatz method", *Int. J. Theor. Phys.* 39, 1119.
- [71] Tezcan, C., Sever, R., (2009), " A general approach to solution of Schrödinger equation", *Int. J. Theor. Phys.* 48, 337.
- [72] Dong, S. H., (2011), " Wave Equations in Higher Dimensions", Springer.
- [73] Zarrinkamar, S., Hassanabadi, H., Rajabi, A. A. and Ghalandari, P., (2012), "A note on Poschl-Teller equation", *Eur. Phys. J. Plus* 127 56.
- [74] Agboola, D. and Zhang, Y. Z., (2012), " Quasi-exactly solvable relativistic soft-core Coulomb models", *Ann. Phys.* 327 2275-2287.
- [75] Zarrinkamar, S., Hassanabadi, H. and Rajabi, A. A., (2013) , " What is the most simple solution of Wheeler-DeWitt equation?", *Astr. Spac. Sci.* 343 391.
- [76] Zarrinkamar, S., Hassanabadi, H. and Rajabi, A. A., (2013), " On the non-canonical noncommutative Wheeler-Dewitt equation for Schwarzschild and Kantowski-Sachs black holes", *Astr. Spac. Sci.* DOI: 10.1007/s10509-012-1329-6.
- [77] Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A., and Hassanabadi, H., (2012), "The Schrodinger Equation under a q-deformed Morse plus Coulomb interaction", 15th Physical Chemistry Conference, Tehran University, Tehran.
- [78] Hassanabadi, H., Zarrinkamar, S., and Rajabi, A. A., (2013), "A simple efficient methodology for Dirac equation in minimal length quantum mechanics", *Phys. Lett. B* 718 1111.
- [79] Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A., Hassanabadi, H., and Rahimov, H., (2011), "Analytical treatment of the two-body spinless Salpeter equation with the Hulthén potential", *Phys. Scr.* 84 065008.
- [80] Hassanabadi, S., Rajabi, A. A., and Zarrinkamar, S., (2012), "Cornell and Kratzer Potentials Within the Semi-relativistic Treatment", *Mod. Phys. Lett. A* 27 1250057.
- [81] Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A., and Hassanabadi, H., (2012), "Solutions of the Two-Body Salpeter Equation Under an Exponential Potential for Any l-State", *Few-Body Sys.* 52 165.

- [82] Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A., Yazarloo, B. H., and Hassanabadi, H., (2013), "the Soft-core Coulomb potential in the semi-relativistic two-body basis", Few-Body Sys. 10.1007/s00601-012-0527-7.
- [83] Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A., and Hassanabadi, H., (2012), "The exponential potential within a semi-relativistic two-body formulation via Nikiforov-Uvarov technique, 15th physical Chemistry conference", Tehran university, Tehran, Iran.
- [84] Yazarloo, B. H., Hassanabadi, H., Zarrinkamar, S., and Rajabi, A. A., (2011), "Duffin-Kemmer-Petiau equation under a scalar Coulomb interaction", Phys. Rev. C. 84 064003.
- [85] Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A., Hassanabadi, H., and Rahimov, H., (2011), "DKP Equation Under a Vector HULTHÉN-TYPE Potential: AN Approximate Solution", Mod. Phys. Lett. A 26 1621.
- [86] Hassanabadi, S., Rajabi, A. A., Yazarloo, B. H., Zarrinkamar, S., and Hassanabadi, H., (2012), "Quasi-Analytical Solutions of DKP Equation under the Deng-Fan Interaction", AHEP 804652 doi:10.1155/2012/804652.
- [87] Hassanabadi, S., Rajabi, A. A., Zarrinkamar, S., and Hassanabadi, H., (2013), "DKP equation under vector and scalar Cornell interactions", Phys. Elem. Part. Nucl. Lett. Theor. 10 28.
- [88] Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A., Yazarloo, B. H., and Hassanabadi, H., (2013), "An approximate solution of the DKP equation under the Hulthén vector potential", Chin. Phys. C.
- [89] Hassanabadi, h., Yazarloo, B. H., Zarrinkamar, S., Rajabi, A. A., (2013), "DKP equation under scalar and vector Cornell Interactions", accepted in Phys. Elem. Part. Nucl. Lett..
- [90] زرین کمر، صابر، رجیبی، علی اکبر، حسن ابادی، حسن : معادله دی کی پس تحت یک پتانسیل برداری نمایی، دومین کنفرانس سالیانه ذرات بنیادی و میدان ها ، دانشگاه سمنان، سمنان ۱۳۹۰.
- [91] Roy, S., Hazarika, B. J., and Choudhury, D. K., (2012), "Isgur–Wise function for heavy–light mesons in the D-dimensional potential model", Phys. Scr. 86 045101.
- [92] Jugeau, F., et al., (2005), "Decays $\bar{B} \rightarrow D^{**}\pi$ and the Isgur-Wise functions $\tau_{1/2}(w)$, $\tau_{3/2}(w)$ ", Phys. Rev. D 72 094010.
- [93] CLEO Collab., Bartel, J., et al., (1999), "Measurement of the $B \rightarrow D^{**}\ell\nu$ Branching Fractions and Form Factor", Phys. Rev. Lett. 82 3746.
- [94] CLEO Collab., Alexander, J. B., et al., Determination of $|V_{cb}|$ using the semileptonic decay $\bar{B}^0 \rightarrow D^{*+} e^- \bar{\nu}_e$

, hep-ex/0111060.

[95] BELLE collab, Abe, K., et al., (2002), "Measurement of $\mathcal{B}(\overline{B}^0 \rightarrow D^+ \ell^- \overline{\nu})$ and determination of $|V_{cb}|$ ", Phys Lett B 526 258.

[96] Ebert , D., et al., (2007), "New analysis of semileptonic B decays in the relativistic quark model", Phys.Rev.D75 074008.

Abstract

The potential model is still one of the most challenging models in theoretical nuclear and particle physics. The most important, and probably the most difficult part ingredient of model, is to obtain the solutions of the equation under a successful potential. Till now, many works have been done on the famous equations of nonrelativistic and relativistic quantum mechanics, namely the Schrödinger, Dirac and Klein-Gordon equations. Within this thesis, we will consider the DKP and spinless Salpeter equations which have not sufficiently discussed despite their interesting structures. The former is capable of investigating both spin-zero (which is our topics) and spin-one particles. The second equation, which is derived from the Bethe-Salpeter equation after some approximations, has a semi-relativistic nature and will be introduced in a two-body basis. We first solve these equations by pure-analytical techniques under successful phenomenological potentials including exponential, coulomb, Hulthen, Woods-Saxon, Yukawa and Cornell, and thereby investigate some spin-zero bosons.

Keywords: DKP equation, spinless Salpeter equation, two-body system, potential model.