

بسم الله الرحمن الرحيم



دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته‌ای

برهم کنش مناسب نوکلئون - نوکلئون برای محاسبه‌ی انرژی بستگی ایزوتوپهای
هلیوم ۳ و ۴

دانشجو:

زهرا ثابت دیزاوندی

استاد راهنما:

دکتر محمد رضا شجاعی

پروفسور علی اکبر رجبی

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۱

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: فیزیک

گروه: فیزیک هسته ای

پایان نامه کارشناسی ارشد زهرا ثابت دیزاوندی

تحت عنوان:

برهم کنش مناسب نوکلئون - نوکلئون برای محاسبه انرژی بستگی ایزوتوپ های هلیوم ۳ و ۴

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک کارشناسی

ارشد مورد ارزیابی و با درجه مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:
			نام و نام خانوادگی:

تقدیم به

خانواده‌ی عزیز ، همسر مهربانم و پسرانم امیرحسین و امیرعلی

که در مراحل انجام کارم مدیون حمایت‌هایشان هستم.

تشکر و قدردانی

- سپاس مخصوص خدایی است که خود را به ما شناساند و شکر خود را به ما الهام کرد ، و درهای پروردگارش را به روی ما گشود ؛ و ما را به سوی توحید خالص خود راهنمایی کرد ، و از شک و کج روی در کنار خدای خود دور کرد.
- سپاسی که تا زنده ایم جزو سپاسگزاران او باشیم و هنگامی که عمر به پایان رسید به سوی خشنودی و گذشت او بشتابیم .

صحیفه سجاده

- از استاد گرانقدرم سپاسگزارم که در به انجام رساندن این کار بسیار کمک کردند.
- از پدر و مادرم که همیشه دعای خیر آنها بدرقه راهم بود.
- از همسر عزیزم و دو پسر گلم بسیار متشکرم که بدون همکاری آنها این کار اصلا امکان پذیر نبود.
- از خواهران و برادرانم که از راهنمایی آنها بهره فراوان بردم.
- و همچنین از دوستان عزیزم سپاسگزارم که خیلی به من کمک کردند.

تعهد نامه

اینجانب زهرا ثابت دیزاوندی دانشجوی دوره کارشناسی ارشد، رشته فیزیک هسته ای دانشکده فیزیک دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده ی پایان نامه ی برهم کنش مناسب نوکلئون - نوکلئون برای محاسبه انرژی بستگی ایزوتوپهای هلیوم ۳ و ۴

تحت راهنمایی دکتر محمدرضا شجاعی و پروفسور علی اکبر رجبی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است.
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام «دانشگاه صنعتی شاهرود» و یا «Shahrood University of Technology» به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امضای دانشجو

تاریخ

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

چکیده

یکی از مفاهیم اساسی در فیزیک هسته‌ای مطالعه‌ی برهم کنش بین نوکلئون‌ها می‌باشد، تا بر اساس آن بتوان به ویژگی‌های اصلی نیروهای هسته‌ای پی برد. انتخاب پتانسیل مناسب برای برهم کنش نوکلئون‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است. پتانسیل‌های مختلفی برای این برهم کنش‌ها پیشنهاد گردیده است از جمله: پتانسیل یوکاوا، پتانسیل وودساکسون و پتانسیل هاماداجانسون. این پتانسیل‌ها را برای هسته‌ی سبک دوترون بکار برده‌اند و به طور تقریبی یا عددی به حل معادله‌ی شرودینگر پرداخته و بعضی از ویژگی‌های استاتیکی دوترون را محاسبه نموده‌اند. در این پایان نامه ما با استفاده از پتانسیل‌های مذکور به بررسی و مطالعه ایزوتوپ‌های طبیعی هلیوم و تریتون پرداخته‌ایم و با استفاده از روش‌های تحلیلی ابرتقارن و جواب پیشنهادی معادله شرودینگر را با تقریب مناسب حل نموده و انرژی بستگی این سه هسته را محاسبه نموده‌ایم. در جریان محاسبه‌ی انرژی بستگی، ضرایب این پتانسیل‌ها را نیز بدست آورده و با توجه به بهترین مقدار این ضرایب، انرژی حالات برانگیخته نیز محاسبه شده است.

کلمات کلیدی: ایزوتوپ‌های هلیوم - انرژی بستگی - پتانسیل هاماداجانسون - ضرایب پتانسیل

فهرست شکل‌ها

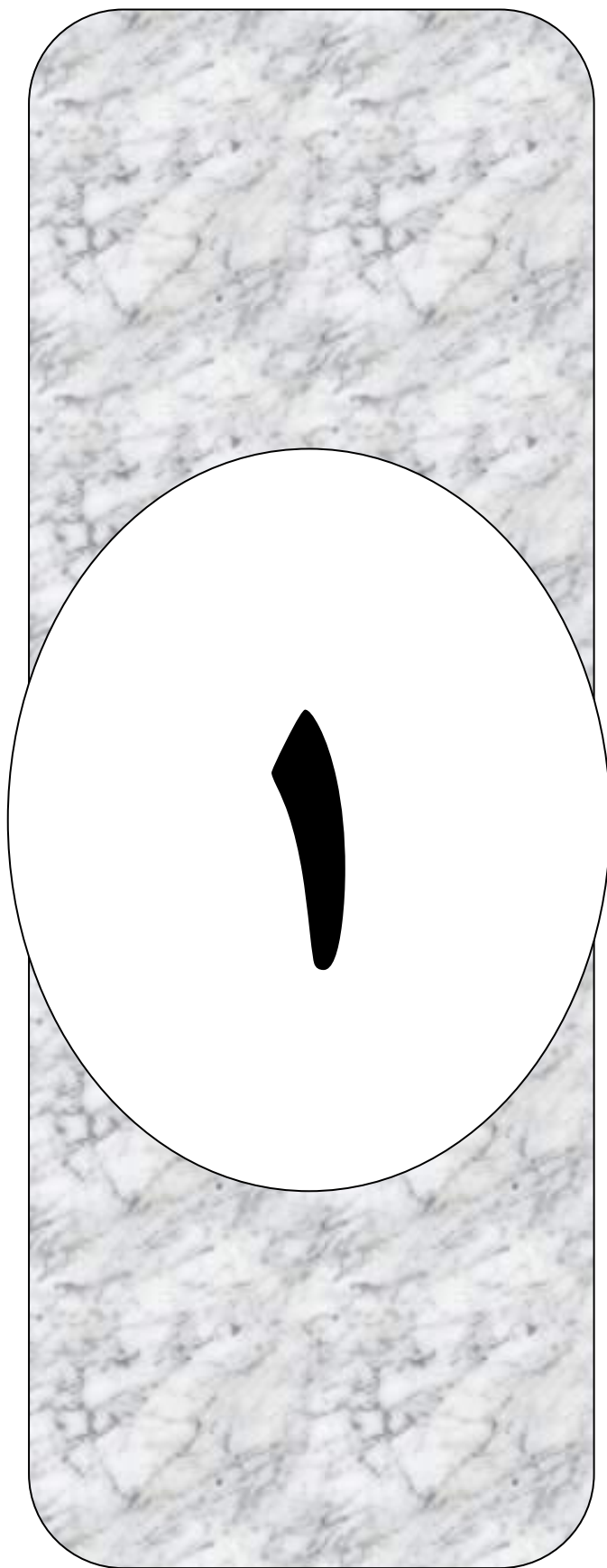
- شکل ۱-۱ مؤلفه‌های پتانسیل هامادا جانسون..... ۱۷
- شکل ۲-۱ مقایسه پتانسیلهای با مغزی سخت و مغزی نرم رايد با پتانسیل هامادا - جانسون برای حالت‌های مختلف برهمکنش..... ۱۸
- شکل ۱-۲ رشته فرایندهای زنجیره‌ای پروتون-پروتون در واکنش‌های همجوشی..... ۲۵
- شکل ۲-۲ چرخه کربن در واکنش‌های همجوشی..... ۲۹
- شکل ۳-۲ هدف و پرتو متحرک..... ۳۲

فهرست جدول‌ها

جدول ۱-۱	مشخصات فیزیکی نیروهای موجود در طبیعت	۲
جدول ۲-۱	نمایش نوکلئون‌ها در فضای ایزواسین	۵
جدول ۱-۲	نسبت عددی ده اتم فراوان‌تر از کربن در بدو تولد منظومه شمسی	۲۳
جدول ۱-۴	مشخصات فیزیکی هسته هلیوم ۳	۵۰
جدول ۲-۴	ضرایب پتانسیل وودساکسون همراه با انرژی بستگی هلیوم ۳	۵۶
جدول ۳-۴	انرژی حالت پایه و حالات برانگیخته برای هلیوم ۳ با پتانسیل وودساکسون	56
جدول ۴-۴	انرژی حالت پایه برای هلیوم ۳ با پتانسیل وودساکسون به اضافه جمله تصحیحی	61
جدول ۵-۴	انرژی حالت پایه و حالات برانگیخته برای هلیوم ۳ با پتانسیل وودساکسون به اضافه جمله تصحیحی	62
جدول ۶-۴	ضرایب پتانسیل یوکاوا همراه با انرژی بستگی هلیوم ۳	65
جدول ۷-۴	ضرایب پتانسیل هاماداجانسون همراه با انرژی بستگی هلیوم ۳	69
جدول ۸-۴	انرژی بستگی هلیوم ۳ در کارهای متفاوت	69
جدول ۹-۴	مشخصات فیزیکی هسته تریتون	70
جدول ۱۰-۴	ضرایب پتانسیل وودساکسون همراه با انرژی بستگی تریتون	71
جدول ۱۱-۴	انرژی حالت پایه و حالات برانگیخته برای تریتون با پتانسیل	72
جدول ۱۲-۴	ضرایب پتانسیل یوکاوا همراه با انرژی بستگی تریتون	73
جدول ۱۳-۴	ضرایب پتانسیل هاماداجانسون همراه با انرژی بستگی تریتون	74
جدول ۱۴-۴	انرژی بستگی تریتون در کارهای متفاوت	75
جدول ۱۵-۴	مشخصات فیزیکی هسته هلیوم ۴	75
جدول ۱۶-۴	ضرایب پتانسیل وودساکسون همراه با انرژی بستگی هلیوم ۴	78
جدول ۱۷-۴	انرژی حالت پایه و حالات برانگیخته برای هلیوم ۴ با پتانسیل وودساکسون	79
جدول ۱۸-۴	انرژی حالت پایه برای هلیوم ۴ با پتانسیل وودساکسون به اضافه جمله تصحیحی	81
جدول ۱۹-۴	انرژی حالت پایه و حالات برانگیخته برای هلیوم ۴ با پتانسیل وودساکسون به اضافه جمله تصحیحی	82
جدول ۲۰-۴	ضرایب پتانسیل یوکاوا همراه با انرژی بستگی هلیوم ۴	83
جدول ۲۱-۴	ضرایب پتانسیل هاماداجانسون همراه با انرژی بستگی هلیوم ۴	86
جدول ۲۲-۴	انرژی بستگی هلیوم ۴ در کارهای متفاوت	86

فهرست اختصارات

H.J	Hamada-Johnston
W.S	Wood-Saxon
2_4He	Helium 4
2_3He	Helium 3
1_3H	Triton
H-C	Hard-Core-Potentials
S-C	Soft-Core-Potentials
ESC	Extended-Soft-Core model
PWA	Nijmegen partial-Wave-Analysis
HQ	High-Quality Potential
OPEP	One-Pion-Exchange Potential
TPEP	Two-Pion-Exchange potential
YGP	Yale Group Potential
R-K	Runge- kutta
SUSY	Supersymmetric
P-N	Proton-notron
N-N	Nocleon-Nocleon
P-P	Proton- Proton
D-D	Deutrium - Deutrium
D-T	Deutrium – Tritium



فصل

نیروها و پتانسیل‌های

هسته‌ای

۱-۱ خواص عمومی نیروهای هسته‌ای

از آنجا که نوکلئون‌ها ذرات مرکبی هستند انتظار می‌رود که برهم‌کنش آنها با یکدیگر ساده نباشد. در واقع این برهم‌کنش‌ها تا حدی پیچیده نیز هستند. از مشخصات مشاهده شده هسته‌ها می‌توان نتایجی را درباره نیروی هسته‌ای بدست آورد. خواص نیروهای بین نوکلئون‌ها را می‌توان به دو شکل استخراج کرد.

الف) روش مستقیم: با مطالعه فرایندهای پراکندگی (برخوردهای میان دو نوکلئون) به خواص این نیروها پی می‌بریم.

ب) روش غیر مستقیم: با مطالعه سیستم‌های مقید مثل دوترون (هسته‌ها) به بررسی ویژگی‌های این نیرو می‌پردازیم.

اکنون در موقعیتی هستیم که می‌توانیم اطلاعات بدست‌آمده را جمع بندی کنیم. در این بخش ویژگی‌های نیروی بین نوکلئون‌ها را بطور خلاصه بیان می‌کنیم. در ادامه انتظاراتی که از پتانسیل نیروی هسته‌ای براساس قوانین ناوردای فیزیک می‌رود را ذکر کرده و نمایش خاصی از این نیرو را که متضمن بسیاری از خصوصیات یاد شده است مورد بحث قرار می‌دهیم. در مجموع خواص زیر را می‌توان برای نیروهای بین هسته‌ها ذکر کرد [۱-۲-۳].

۱-۲-الف) بر هم کنش بین دو نوکلئون از پایین‌ترین مرتبه پتانسیل مرکزی جاذبه حاصل می‌شود. این نیرو غالباً جاذبه است، در غیراین صورت دافعه‌ی کولنی بین نوکلئون‌ها موجب فروپاشی هسته می‌گردید و هسته‌های پایدار نمی‌توانستند وجود داشته باشند و همچنین این نیرو در برابر سایر نیروها بسیار قویتر است.

ساده‌ترین هسته‌ها دوترون شامل یک پروتون و یک نوترون می‌باشد به همین جهت برای کارهای نظری از آن استفاده فراوان می‌برند. از نتایج کارهای آزمایشگاهی انجام شده بر روی این هسته برای توجیه ویژگی‌های نیروی هسته‌ای استفاده می‌شود، همچنین معمولاً با پتانسیل‌های معرفی شده برای این هسته، معادله‌ی شرودینگر حل شده و اغلب اطلاعات موجود برای ارجاع با توجه به این هسته نوشته می‌شود. یکی از ایرادات وارد بر این هسته ترکیب نوکلئون‌های آن می‌باشد که شامل فقط یک پروتون و یک نوترون است، که نمی‌توان به آن برای تأثیر نوع نوکلئون‌هایی هسته استناد کرد. در جدول زیر به مقایسه‌ی نیروهای موجود در طبیعت می‌پردازیم.

جدول (۱-۱) مشخصات فیزیکی نیروهای موجود در طبیعت

نوع نیرو	ذره مبادله شده	قدرت نیرو	منشأ تولید نیرو	برد نیرو
قوی هسته‌ای	مزون	۱	پروتونها و نوترونها	10^{-13}
الکترومغناطیسی	فوتون	10^{-2}	پیوندهای اتمی و ملکولی	∞
ضعیف هسته‌ای	بوزون	10^{-14}	تلاشی بتا	$0/001$
گرانشی	گراویتون	10^{-38}	اجرام آسمانی	∞

برای حل مسأله‌ی مربوط به دوترون در ساده‌ترین حالت، پتانسیل چاه مربعی در نظر گرفته شد که این فرض باعث سادگی محاسبات میشود و نتایج نسبتاً خوبی با توجه به فرض در نظر گرفته شده بدست آمد.

به مرور پتانسیل‌های مناسب‌تری پیشنهاد شد که از آن جمله پتانسیل‌های یوکاوا^۱ - گوسی^۲ - $W.S$ - $H.J$ ^۴ و ... که در ادامه به بحث کامل‌تری در مورد آنها می‌پردازیم.

(۱-۲-ب) برهم کنش بین نوکلئون- نوکلئون در فواصل خیلی کوتاه دافعه می‌شود. نیروی هسته‌ای در فواصلی که در حدود ابعاد اتمی است به حدی ضعیف می‌شود که میتوان از آن صرف‌نظر کرد. بر هم کنش هسته‌های موجود در یک ملکول فقط بر اساس نیروی کولنی قابل درک است.

(۱-۳-پ) نیروهای هادرونی اشباع پذیرند، اگر هر نوکلئون، تک تک نوکلئون‌های دیگر را جذب می‌کرد تعداد $\frac{A(A-1)}{2}$ زوج بر هم کنش متمایز وجود می‌داشت. در آن صورت انتظار می‌رفت که انرژی بستگی با $A(A-1) \approx A^2$ متناسب باشد و تمام هسته‌ها قطری برابر با برد نیروی هسته‌ای داشته باشند. هر دو پیش بینی یعنی: انرژی بستگی متناسب با A^2 و حجم هسته‌ی ثابت برای هسته‌های $A > 4$ شدیداً با تجربه مخالفت می‌کند. حجم و انرژی بستگی برای اغلب هسته‌ها با عدد جرمی A متناسبند. پس هر ذره فقط تعداد محدودی از سایر ذرات اطراف خود را جذب می‌کند و نوکلئون‌های دیگر یا تحت تأثیر قرار نمی‌گیرند یا دفع می‌شوند. رفتاری مشابه با این در پیوندهای شیمیایی و یا نیروی واندروالس رخ می‌دهد. این رفتارها به دو روش قابل توجیه هستند: از طریق نیروهای تبدالی یا از طریق نیروهایی که در فواصل بسیار کوتاه به شدت دافعه هستند (مغز سخت^۵) در پیوندهای شیمیایی نیروهای تبدالی منجر به پدیده اشباع می‌گردند و نیروهای سخت مغز مسئول این پدیده در مایعات کلاسیکی هستند. در مورد نیروهای هسته‌ای هر دو عامل یاد شده دارای سهم هستند. در نیروی بین نوکلئون‌ها یک جمله از جنس دافعه وجود دارد که نوکلئون‌ها را در فاصله‌ی متوسط و معینی از یکدیگر نگه می‌دارند [۲].

^۱ Yukawa Potential
^۲ Gaussian Potential
^۳ Woods-Saxon Potential
^۴ Hamada-Johnstone Potential
^۵ Hard Core

(۱-۲-ت) نیروی بین نوکلئون‌ها تقریباً مستقل از بار الکتریکی است: وقتی نوترون در سال ۱۹۳۲ کشف شد ماهیت نیروهایی که هسته‌ها را کنار هم نگه می‌داشت هنوز مرموز بود. اگر چه در آن سال‌ها آزمایشات پراکندگی در انرژی‌های پایین انجام می‌شد ولی نتیجه‌ی این آزمایشات باز هم شگفت آور بود زیرا بعد از کم کردن اثر نیروی کولنی در پراکندگی p-p، ملاحظه شد که قدرت نیروی n-n، n-p، p-p تقریباً یکی است، امروز معلوم شده است که نه تنها نیروی بین نوکلئون‌ها بلکه تمام نیروهای هادرونی مستقل از بار هستند یکی از مهمترین شواهد این مسأله اختلاف انرژی بستگی بر هر نوکلئون در هسته‌های آینه‌ای است که به طرز شگفت آوری در هسته‌های مختلف ثابت می‌ماند. پس از کشف نوترون توسط چادویک، هایزنبرگ^۶ متوجه شد که دستگاه ریاضی ماتریس اسپین پائولی^۷ می‌تواند برای برچسب زدن به دو حالت باری نوکلئون، نوترون و پروتون استفاده شود. نقطه‌ی شروع، مشاهده جرم نوترون و پروتونی است که بسیار به هم شبیه هستند.

$$m_p c^2 = 938.2720 \text{ Mev} \quad m_n c^2 = 939.5653 \text{ Mev} \quad (1-1)$$

و هر دو دارای اسپین $\frac{1}{2}$ هستند. علاوه بر این تجربه نشان می‌دهد که اگر سهم برهم‌کنش الکترومغناطیسی نادیده در نظر گرفته شود، نیروی بین ذرات (دو نوترون یا دو پروتون) یکی است. استقلال نیروهای هسته‌ای از بار منجر به معرفی عدد کوانتومی جدید و پایسته‌ای به نام ایزواسپین^۸ می‌شود. این نشان دهنده‌ی وجود یک تقارن در برهم‌کنش قوی است و ایزو اسپین، فرمالیسم مناسبی را برای جستجو و کاوش نتایج آن تقارن در هسته فراهم می‌کند. تأکید می‌کنیم برابری اسپین و جرم نوکلئون‌ها برای اعتبار تقارن ایزواسپین کافی نیست و استقلال از بار نیروی هسته‌ای نیز به همان اندازه

^۶ Heisenberg
^۷ Pauli spin
^۸ Isospin

مهم است [۳-۲-۱]. تعریف ایزواسپین برای هسته‌های پیچیده به صورتی که ما امروز می‌شناسیم اولین بار توسط ویگنر بیان شد و او کسی بود که نام ایزواسپین ایزوتوپی را ابداع کرد.

جدول (۲-۱) نمایش نوکلئون‌ها در فضای ایزواسپین

سمت گیری ذره‌ای با اسپین $\frac{1}{2}$ در فضای معمولی	نوکلئون در فضای ایزواسپین
پروتون $\uparrow$	$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
نوترون $\downarrow$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

۱-۲-۱ (ث) بر هم کنش نوکلئون - نوکلئون قویاً وابسته به اسپین است. این نتیجه گیری از عدم موفقیت مشاهده‌ی حالت مقید تک تابه دوترون و همچنین از اندازه‌گیری اختلاف سطح مقطع‌های حال تک تابه و سه‌تابه حاصل می‌شود. نیروی هسته‌ای باید متضمن بعضی از تقارن‌ها باشد که این امر منجر به محدودیت شکل پتانسیل می‌شود.

۱-۲-۱ (ج) پتانسیل بین نوکلئونی شامل یک جمله غیر مرکزی به نام پتانسیل تانسوری است [۳-۲-۱]. عمده‌ترین دلیل وجود نیروی تانسوری از مشاهده گشتاور چار قطبی در حالت پایه دوترون حاصل می‌شود. تابع موج حالت s ($l=0$) تقارن کروی دارد، یعنی گشتاور چارقطبی الکتریکی آن صفر است. این نیروی تانسوری باید به جای $V(r)$ به صورت $V(\vec{r})$ باشد. بخش تانسوری پتانسیل بین نوکلئونی را به صورت $S_{12}V_T(r)$ در نظر می‌گیریم تا در آن بستگی شعاعی نیرو و S_{12} عبارت متضمن ویژگی تانسوری نیرو است و متوسط آن در تمام زوایا برابر صفر می‌شود [۳-۲-۱].

$$S_{12} = \frac{3(\vec{S}_1 \cdot \vec{r})(\vec{S}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \quad (2-1)$$

۱-۲-چ) نیروی نوکلئون- نوکلئون نسبت به بار تقارن دارد. این بدان معنا است که پس از تصحیح نیروی کولنی در سیستم پروتون- نوترون، فرقی میان بر هم کنش p-p و بر هم کنش n-n نیست. دلیل این امر آن است که طول‌های پراکندگی و همچنین بردهای موثر در بر هم کنش p-p و n-n با هم مساوی است. بنابراین استقلال بار شرطی قویتر از تقارن بار است.

۱-۲-ح) بر هم کنش نوکلئون- نوکلئون می‌تواند به تکانه یا سرعت نسبی نوکلئون‌ها هم بستگی داشته باشد. یکی از صورت‌های قابل قبول که شامل توان‌های درجه اول p میشود و نسبت به پاریته و برگشت زمان هر دو ناورد است به صورت زیر است:

$$V(r)(\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{s} = V_{so}(r) \vec{L} \cdot \vec{S} \quad (3-1)$$

که در آن، $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ به خاطر مشابهت با فیزیک اتمی جمله‌ی اسپین مدار نامیده میشود. فرض بر هم کنش اسپین- مدار، با این مشاهده تجربی تقویت می‌شود که اسپین نوکلئون‌های پراکنده ممکن است سمت‌گیری خاصی در فضا داشته باشد که در این حالت اسپین نوکلئون‌ها را قطبیده می‌گویند. قطبیدگی نوکلئون‌های موجود در یک باریکه به صورت زیر تعریف می‌شود [۳].

$$P = \frac{N(\uparrow) - N(\downarrow)}{N(\uparrow) + N(\downarrow)} \quad (4-1)$$

$N(\uparrow)$ تعداد نوکلئون‌هایی که سمت گیری اسپین آن‌ها به طرف بالا است.

$N(\downarrow)$ تعداد نوکلئون‌هایی که سمت گیری اسپین آن‌ها به طرف پایین است.

۱-۲-خ) بعضی از ذرات تحت تأثیر نیروی هسته‌ای قرار نمی‌گیرند. مثلاً هیچ دلیلی از ساختار اتمی وجود ندارد که نشان دهنده‌ی تأثیر نیروی هسته‌ای روی الکترون‌ها باشد [۲-۴].

۱-۲-د) بر هم کنش بین نوکلئون- نوکلئون در فواصل خیلی کوتاه دافعه می‌شود. این نتیجه از بررسی کیفی چگالی هسته‌ای حاصل می‌شود. رشد هسته در اثر افزایش نوکلئون‌ها به صورتی است که چگالی مرکزی ثابت می‌ماند، از این رو باید عاملی وجود داشته باشد که از تجمع و نزدیک شدن بیش از حد نوکلئون‌ها جلوگیری کند. اختلاف فاز موج تک تابه S در پراکندگی نوکلئون- نوکلئون در انرژی 300MeV منفی می‌شود که حاکی از تغییر نیرو از صورت جاذبه به دافعه است. برای آن که مغز دافعه را به حساب آوریم باید پتانسیل‌های مورد استفاده را اصلاح کنیم.

۱-۲ شکل عمومی پتانسیل‌های هسته‌ای برای سیستم‌های دو نوکلئونی

برای تعیین پتانسیل نوکلئون- نوکلئون در حالت کلی بایستی از نتایج بدست آمده در مسأله ی دوترون (به عنوان یک سیستم دوجسمی)، داده‌های پراکندگی در انرژی‌های بالا و پایین، نظریه مزونی یوکاوا^۹ (که در آن وابستگی نیروهای هسته‌ای به اسپین، ایزواسپین و نیروهای تبادلی است) استفاده کنیم. پتانسیلی که برای بر هم کنش بین نوکلئون- نوکلئون در نظر می‌گیریم بایستی اسکالر و متضمن برخی از تقارن‌ها باشد. این امر باعث محدود شدن شکل پتانسیل خواهد شد. برای دو نوکلئون که دارای اسپین هستند^۴ بردار به صورت $\vec{\sigma}_1, \vec{\sigma}_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2$ در نظر می‌گیریم. کمیت‌های موجود در سیستم دو نوکلئونی که نیرو به آن‌ها وابسته است عبارتند از:

برای قسمت وابسته به شعاع ، پتانسیل به خاطر بقای اندازه حرکت خطی به صورت $r_1 - r_2$ می‌باشد.

^۹ Yukawa s Meson Theory

برای قسمت وابسته به اسپین ، جملاتی مانند $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ یا $S_1^2 \cdot S_2^2$ که نسبت به برگشت زمان ناوردا هستند، در نظر می‌گیریم. $\vec{r}_{12}$ برداری که مکان ذره (۱) را به (۲) ارتباط می‌دهد.

$$\vec{p}_{12} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \quad \text{تکانه نسبی ذرات و } \vec{S} \text{ اسپین کل می‌باشد.}$$

$$\vec{L} = \vec{r}_{12} \times \vec{p}_{12} \quad \text{تکانه زاویه‌ای مداری (اگر چه الزامی ندارد خود این کمیت به } \vec{r}_{12} \text{ و } \vec{p}_{12} \text{ وابسته باشد)}$$

بنابراین پتانسیل بر هم کنش بین نوکلئون - نوکلئون که اسکالر نیز هست را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$V = V_w(r) + V_B(r) \frac{1}{2} (1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + V_T(r) \sum T_{ij} \cdot r_i r_j \quad (5-1)$$

$$V = V_w(r) + V_B(r) P^\sigma + V_T(r) S_{12} \quad (6-1)$$

$$S_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}) - \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \quad \text{و} \quad P^\sigma = \frac{1}{2} (1 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad (7-1)$$

که $V_w(r)$ پتانسیل ویگنر^{۱۰} و $V_B(r)$ پتانسیل برتلت^{۱۱} و $V_T(r)$ پتانسیل تانسوری^{۱۲} است.

شرایطی که پتانسیل هسته‌ای باید آن‌ها را دارا باشد:

۱-۳-الف) پتانسیل باید یک کمیت نرده‌ای باشد.

۱-۳-ب) از آنجا که دو نوترون یا دو پروتون غیر قابل تشخیص هستند، هرگاه جای دو ذره را با هم عوض

می‌کنیم نباید پتانسیل تغییر کند. مبادله‌ی ذرات، علامت $\vec{r}_{12}$ و $\vec{p}_{12}$ را تغییر می‌دهد ولی علامت $\vec{L}, \vec{S}$ تغییر نمی‌کنند. پس جملاتی شبیه $\vec{S} \cdot \vec{r}_{12}$ یا $\vec{S} \cdot \vec{p}_{12}$ نمی‌توانیم داشته باشیم.

^{۱۰} Wigner potential
^{۱۱} Bartlett potential
^{۱۲} Tensor potential

۱-۳-پ) طبق اصل ناوردایی وارونی زمانی که در تمام قوانین شناخته شده فیزیک معتبر است اگر جهت حرکت زمان معکوس شود، پتانسیل نباید تغییر کند. در اثر وارونی زمان $\vec{P}_{12}, \vec{S}$ تغییر علامت می‌دهند ولی علامت $\vec{r}_{12}$ تغییر نمی‌کند. پس طبق تعریف $\vec{L}$ علامت این کمیت نیز معکوس خواهد شد. بنابراین نمی‌توان جملاتی شبیه $\vec{r}_{12} \cdot \vec{L}$ و $\vec{r}_{12} \cdot \vec{p}$ و $\vec{r}_{12}, \vec{S}$ را در پتانسیل داشته باشیم و جمله‌ای از مرتبه اول تکرار نمی‌توانیم داشته باشیم [۱-۲-۳].

۱-۳-ت) ابتدا نیروهایی را که مستقل از سرعت هستند در نظر می‌گیریم، به این نیروها، نیروهای استاتیکی می‌گویند. اگر پتانسیل استاتیکی باشد نمی‌تواند به $\vec{P}, \vec{L}$ بستگی داشته باشد. زیرا این‌ها به سرعت وابسته هستند. بنابراین پتانسیل استاتیکی تنها شامل $\vec{r}, \vec{s}$ است. با این کمیات، تنها کمیات نرده‌ای که می‌توان تشکیل داد عبارتند از: $\vec{r} \cdot \vec{s}, \vec{r} \cdot \vec{r}, \vec{s} \cdot \vec{s}$ یا حاصل ضرب آن‌ها. تمام جملات ممکن دیگر نظیر $(\vec{r} \times \vec{s}) \cdot (\vec{r} \times \vec{s})$ به ترکیب‌های خطی از این جملات تقلیل می‌یابند. بنابراین جمله‌ای که وابستگی پتانسیل استاتیکی به اسپین را نشان می‌دهد به صورت: $(\vec{s} \cdot \vec{r})^2$ را می‌توان به عنوان جمله‌ای که مولفه تانسوری را شامل می‌شود نشان دهیم.

۱-۳-ث) علاوه بر این بردارها، ویژگی دیگری که نیروی استاتیکی نوکلئون- نوکلئون می‌تواند به آن وابسته باشد، پارите تابع موجی است که سیستم را توصیف میکند. از آن جا که پارите به فرد یا زوج بودن l بستگی دارد، نیروی هسته‌ای برای l زوج و l فرد متفاوت است. فهرست کاملی از نیروهای استاتیکی که شامل شش عضو میباشند به قرار زیر است [۱-۲-۳]:

(A) مرکزی l فرد $S=0$

(B) مرکزی l زوج $S=1$

(C) مرکزی l فرد $S=1$ (۸-۱)

(D) مرکزی l زوج $S=1$

(E) تانسوری l زوج $S=1$

(F) تانسوری l فرد $S=1$

عمومی ترین پتانسیل استاتیکی مجموع این شش جمله است که هر کدام تابعی از r هستند.

$$V = V_A(r) + V_B(r) + V_C(r) + V_D(r) + V_E(r) + V_F(r) \quad (9-1)$$

با این شرط همه ی جمله ها صفر هستند مگر اینکه l و S مطابق رابطه (۵-۱) باشند. مثلاً در حالت پایه ی دوترون همه جملات به جز V_D و V_F صفر هستند. نیروهای هسته ای فقط از نوع نیروهای استاتیکی نمی باشند. بنابراین بهتر است ساده ترین نیروهای وابسته به سرعت را در نظر بگیریم. اگر چه این گفته به طور کلی بکار می رود، آنچه مورد بحث قرار خواهیم داد، پتانسیل های وابسته به تکانه هستند. ساده ترین جملات از پایین ترین مرتبه P عبارتند از حاصل ضرب نردهای $\vec{L}, \vec{P}$ با $\vec{S}, \vec{r}$.

از چهار ترکیب ممکن تنها ترکیبی که بنابر قواعد یاد شده حذف نمی شود حاصل ضرب $\vec{L}, \vec{S}$ است. این پتانسیل به پتانسیل اسپین-مدار^{۱۳} مشهور است. بزرگی آن آشکارا به زاویه ی میان اسپین و حرکت مداری و همچنین به بزرگی $\vec{L}$ بستگی دارد. حاصل ضرب های نردهای بسیار پیچیده تر از درجه ی اول $\vec{P}$ از چهار بردار یاد شده می توان تشکیل داد، ولی تمام آن ها با قواعد یاد شده یا ممنوع اند و یا با جمله ی اسپین-مدار معادل می شوند. از طرفی علیرغم تلاش های فراوان که صورت گرفته است برازش داده های موجود در سیستم های نوکلئونی تنها با جمله $\vec{L}, \vec{S}$ امکان پذیر نیست. بنابراین چنین نتیجه شده است که

^{۱۳} Spin-Orbit Potential

جملات وابسته به سرعت از درجات بالاتر مورد نیازند. اقدام بدیهی بعدی وارد کردن جملات درجه‌ی اول $\vec{P}$ است و این بدان معنی است که آن‌ها شامل توان دوم از $\vec{P}$ یا $\vec{L}$ و یا توان اول از هر کدام باشند. اگر توان دوم از $\vec{P}$ یا $\vec{L}$ داشته باشیم، مانند $\vec{P} \cdot \vec{P}$ ، $\vec{L} \cdot \vec{L}$ یا $(\vec{L} \cdot \vec{S})$

اگر توان اول از $\vec{P}$ و $\vec{L}$ داشته باشیم طبق قواعد یاد شده لازم است تا توان فردی از $\vec{r}$ داشته باشیم که ساده‌ترین حالت آن $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{l}$ خواهد بود. در هر حال تعداد جملات درجه‌ی دوم منوط به سرعت آنقدر زیاد است که هنوز نتوانستند اهمیت همه‌ی آن‌ها را مشخص کنند. در روش معمول تنها بعضی از جملات ساده‌تر را برگزیده‌اند و با آن‌ها برازش‌های قابل قبول و منطقی که با داده‌های تجربی سیستم دو نوکلئونی وفق می‌دهد، بدست آورده‌اند. در نهایت با در نظر گرفتن اطلاعات بدست آمده پتانسیل‌های پدیده شناختی را می‌توان به شکل زیر در نظر گرفت [۳]:

$$V = V_C + V_{CS} \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + V_T S_{12} + V_{LS} \vec{L} \cdot \vec{\sigma} \quad (10-1)$$

V_C انرژی پتانسیل مرکزی معمولی را توصیف می‌کند.

V_{CS} جمله مرکزی وابسته به اسپین است.

V_T معرف نیروی تانسوری است. S_{12} عملگر تانسوری است.

V_{LS} نیروی اسپین - مداری را مشخص می‌کند.

یک پتانسیل کلی توسط مارشاک و اکوبو معرفی شد که این پتانسیل تحت انتقال، دوران، برگشت زمان و پاریته ناوردا باقی می‌ماند و هم چنین محدودیت‌های دیگری همچون وابسته نبودن به بار، تقارن و جایگشت نیز بر روی آن اعمال شد:

$$V = V_0 + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + S_{12}V_2 + (\vec{L} \cdot \vec{S})V_3 + \frac{1}{2}[(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L}) + (\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{L})(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{L})]V_4 + (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{P})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{P})V_5 + h.c \quad (11-1)$$

$$v_i = v_i^0(r, P, L) + V_i^T(r, P, L)(\tau_1, \tau_2) \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (12-1)$$

برای پراکندگی کشسان نوکلئون- نوکلئون که هیچ تولید مزونی وجود ندارد ، به خاطر اینکه وارد محدوده‌ی نیروی هسته‌ای نشده‌ایم می‌توان V_5 را از معادله پتانسیل حذف نمود. این بدان معناست که تا انرژی حدودا ۳۰۰ مگاالکترون ولت یا بیشتر وابستگی به تکانه وجود ندارد. حتی جمله V_4 نیز در حالت کلی برای تحلیل داده‌ها تا انرژی ۳۰۰ مگاالکترون نیاز نیست. پس:

$$V_{Td}(r)S_{12}V = V_d(r) + V_\sigma(r)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) + V_\tau(r)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + V_{\sigma\tau}(r)(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) + V_{\tau T}(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2)S_{12} + V_{LS}(r)(\vec{L} \cdot \vec{S}) + V_{LS,\tau}(r)(\vec{L} \cdot \vec{S})(\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) \quad (13-1)$$

با استفاده از همه‌ی این اطلاعات تجربی می‌توان مجموعه‌ای از پتانسیل‌های پدیده شناختی پیشنهاد کرد که سازگاری قابل قبولی با اطلاعات موجود نوکلئون- نوکلئون داشته باشد. آنگاه این پتانسیل‌ها را می‌توان در محاسبات هسته‌های پیچیده‌تر مورد استفاده قرار داد. یک پتانسیل آزمایشی را در معادله‌ی شرودینگر قرار داده سپس آن را به روش‌های عددی و به کمک کامپیوتر حل می‌کنند. آنگاه با استفاده از این حل، سطح مقطع نظری را محاسبه می‌کنند. ضرایب پتانسیل آزمایش را آنقدر تغییر می‌دهند تا بین مقادیر محاسبه شده و مشاهده شده توافق حاصل شود.

۱-۳ نظریه مزونی یوکاوا

مفهوم نیروهای تبدالی اولین بار توسط یوکاوا در نظریه مزونی‌اش بیان شد. طبق این نظریه اگر ما رفتار نیروهای هسته‌ای را در چارچوب مکانیک کوانتومی نسبیتی مورد بررسی قرار دهیم، یک رفتار طبیعی را مبنی بر این که برد نیروهای هسته‌ای کوتاه برد است مشاهده خواهیم کرد[۴].

برد نیروهای هسته‌ای از مرتبه $\frac{\hbar}{m_{\pi}c}$ می‌باشد که در آن m_{π} جرم مزون π یاپیون است. این نظریه توسط

داده‌های تجربی نیز ثابت شده است. $m_{\pi} = 266m_e$. طبق این نظریه عامل برهم کنش بین

نوکلئون‌ها مزون π است.

معادله ی کلاین گوردن^{۱۴}:

اساس نظریه مزونی یوکاوا معادله نسبیتی شرودینگر است که به آن معادله کلاین-گوردن می‌گوییم [۴].

همان طور که می‌دانیم انرژی نسبیتی برای یک ذره آزاد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E^2 = p^2 c^2 + m_{\pi}^2 c^4 \quad \text{و} \quad E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{و} \quad P \rightarrow \quad (۱۴-۱)$$

$-i\hbar \text{grad}$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \Phi + \quad (۱۵-۱)$$

$m_{\pi}^2 c^4 \Phi$

با در نظر گرفتن چهار بردار x_1, x_2, x_3 و $x_4 = ict$ قسمت فضایی و قسمت وابسته به زمان رابطه‌ی

بالا به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\left[-\hbar^2 c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} \right) + m_{\pi}^2 c^4 \right] \Phi = 0 \quad (۱۶-۱)$$

که معادله ی کلاین گوردن را در دو حالت وابسته به زمان و مستقل از زمان به صورت‌های زیر می‌توانیم

بنویسیم.

وابسته به زمان:

$$\left(\square^2 + \mu^2 \right) \Phi = 0 \quad \square^2 = -\sum_{i=1}^4 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (۱۷-۱)$$

^{۱۴} Klein-Gordon Equation

مستقل از زمان:

$$(\nabla^2 + \mu^2)\Phi = 0 \quad \nabla^2 = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad , \quad \mu = \frac{m_\pi c}{\hbar} \quad (18-1)$$

معادله‌ی کلاین گوردن:

$$(\square^2 + \mu^2)\Phi = 0 \quad (17-1)$$

که برای حالت پایا معادله‌ی کلاین گوردن به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \rightarrow \square^2 = \nabla^2 \rightarrow (\nabla^2 + \mu^2)\Phi = 0 \quad (18-1)$$

با حل معادله‌ی اخیر برای Φ به جواب $\Phi = \frac{e^{-\mu r}}{r}$ می‌رسیم. که برد نیروی هسته‌ای از مرتبه $\frac{1}{\mu}$ یا $\frac{\hbar}{m_\pi c}$ می‌شود. اگر برد نیروی هسته‌ای را با $\frac{\hbar}{m_\pi c}$ مساوی قرار دهیم (برد نیروی هسته‌ای 10^{-13} cm) به نتیجه‌ی $m_\pi = 200 m_e$ می‌رسیم که با جواب بدست آمده از آزمایشات $m_\pi = 266 m_e$ قابل مقایسه است. پس معادله‌ی کلاین گوردن مزون π را توجیه می‌کند [۴].

ذرات تبدالی حامل نیروی هسته‌ای را مزون می‌نامند. سبک‌ترین مزون‌ها را که مزون π یا پیون نامیده می‌شود، عامل اصلی آن قسمت از پتانسیل نوکلئون - نوکلئون که برد بلندتر از ۱ تا ۱/۵ فرمی دارد می‌دانیم. شاید بتوان عامل پیوند هسته‌ای را تبادل دو پیونی دانست. در صورتی که دو نوکلئون به اندازه کافی به هم نزدیک شوند ممکن است که دو مزون به طور همزمان مبادله شوند. متأسفانه، تبادل چند مزونی فرایند پیچیده‌ای است که نمی‌توان آن را به روشنی با نظریه‌های فعلی میدان محاسبه کرد. بنابراین، اثر آن را در نیروی هسته‌ای نمی‌توان با اطمینان حساب کرد. به صورت تجربی می‌دانیم ۳ نوع مزون π وجود دارد:

۱- مزون π^0 که به عنوان کوانتای برهم کنش $p-p, n-n, n-p$ می‌باشد.

۲- مزون π^+ که فقط در برهم کنش‌های $p-p, n-p$ وجود دارد.

۳- مزون π^- که فقط در برهم کنش $n - p$ وجود دارد.

۳-۱ انواع پتانسیل‌های هسته‌ای برای سیستم‌های دو نوکلئونی

در دهه‌های گذشته پتانسیل‌های فراوانی معرفی شده اند که با اطلاعات بدست آمده از آزمایشات پراکندگی مقایسه می‌شوند و با مقیاس high quality سنجیده می‌شوند. اما چون این مقیاس نواقصی دارد تنها معیار برای سنجش کیفیت پتانسیل‌ها نبوده و لازم است با دیگر روش‌ها نیز مقایسه شوند.

برای آنکه پتانسیل‌های معرفی شده با یکدیگر قابل مقایسه باشند باید به یک شکل نوشته شوند. سه جمله اساسی در تمام پتانسیل‌ها: جمله مرکزی، تانسوری و اسپین مدار است. در ادامه مروری بر انواع پتانسیل‌های معرفی شده در چند دهه‌ی گذشته خواهیم داشت.

پتانسیل‌ها بر حسب برد برهم کنش‌ها به ۳ قسمت تقسیم می‌شوند (فاصله‌ها بر حسب فرمی می‌باشد) :

$$\text{کوتاه برد } r \leq 1 \quad \text{برد متوسط } 1 \leq r \leq 2 \quad \text{بلند برد } r \geq 2$$

برای قسمت بلند برد معمولاً جمله OPE (one- pion-enchance) در نظر گرفته می‌شود.

و برای قسمت میان برد معمولاً جمله TPE (two- pion-enchance) در نظر گرفته می‌شود [۵].

حالت کوتاه برد اغلب به صورت پدیده شناختی مورد بحث قرار می‌گیرند.

۱-۴-۱ پتانسیل هامادا جانسون Hamada-Johnston (HJ) potential

در تعیین رفتار تفصیلی در شعاع‌های کوچک به روش پراکندگی به محدودیت بنیادی پراش

برخورد می‌شود. طول موج نوکلئون‌ها با انرژی 350 MeV در حدود $1/4$ فرمی است، بنابراین راجع به جزییات ساختار پتانسیل در شعاع‌های کوچک اطلاعات زیادی بدست نمی‌آید به همین خاطر نیروی

نوکلئون - نوکلئون را شامل یک مغزی دافعه در نظر می‌گیرند به این معنی که این نیرو در فاصله‌های کمتر از ۰/۵ فرمی این مغزی بشدت دافعه است. از آنجایی که ساختار دقیق این نیروی دافعه بدلیل محدودیت پراش شناخته شده نیست، اغلب مغزی را به صورت سخت در نظر می‌گیرند، یعنی پتانسیل به ازای یک مقدار r به $+\infty$ می‌رود. این بدان معنا است که دو نوکلئون نمی‌توانند تحت هیچ شرایطی از این فاصله به هم نزدیکتر شوند [۳]. یکی از پتانسیل‌هایی که کاربرد گسترده‌ای دارد پتانسیل هاماداجانسون است^{۱۵}. این پتانسیل علاوه بر شش پتانسیل استاتیکی شامل پتانسیل اسپین - مدار برای ℓ زوج و فرد که به $L - S$ موسوم است و پتانسیل وابسته به سرعت درجه دو به صورت $[\vec{L} \cdot \vec{L} - (\vec{L} \cdot \vec{S})^2]$ که برای ℓ زوج و ℓ فرد و برای $S = 0$ و $S = 1$ متفاوت است نیز می‌شود.

$$V = V_C + V_T S_{12} + V_{ls} \vec{L} \cdot \vec{S} + V_{ll} L_{12} \quad (19-1)$$

$$S_{12} = 3(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\sigma}_2 \cdot \vec{r}) - (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \quad \text{و} \quad L_{12} = (S_{lj} + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)l^2 - (\vec{L} \cdot \vec{S})^2 \quad (20-1)$$

$$v_C = 0.08 \left(\frac{1}{2} \mu \right) (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) Y(x) [1 + a_c Y(x) + b_c Y^2(x)] \quad (21-1)$$

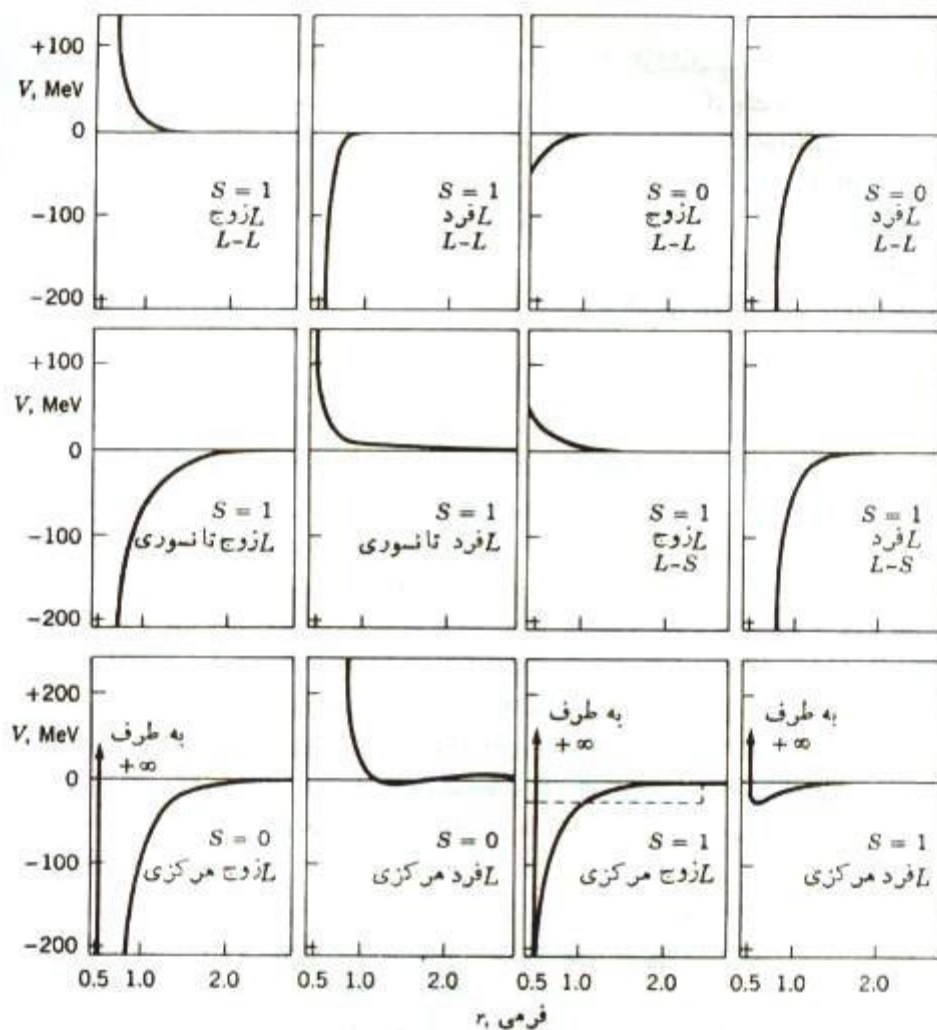
$$v_T = 0.08 \left(\frac{1}{2} \mu \right) (\vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2) z(x) [1 + a_T Y(x) + b_T Y^2(x)] \quad (22-1)$$

$$v_{ls} = \mu G_{ls} Y^2(x) [1 + b_{ls} Y(x)] \quad (23-1)$$

$$V_{ll} = \mu G_{ll} x^{-2} z(x) [1 + a_{ll} Y(x) + b_{ll} Y^2(x)] \quad (24-1)$$

$$Y(x) = \frac{e^{-x}}{x} \quad \text{و} \quad Z(x) = \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2} \right) Y(x) \quad (25-1)$$

تمام پتانسیل‌های مرکزی چنان در نظر گرفته شده‌اند که دارای یک مغز سخت به شعاع $r \cong 0.50 \text{ fm}$ باشند. مؤلفه‌های پتانسیل هاماداجانسون در شکل (۳-۱) نشان داده شده است [۳].

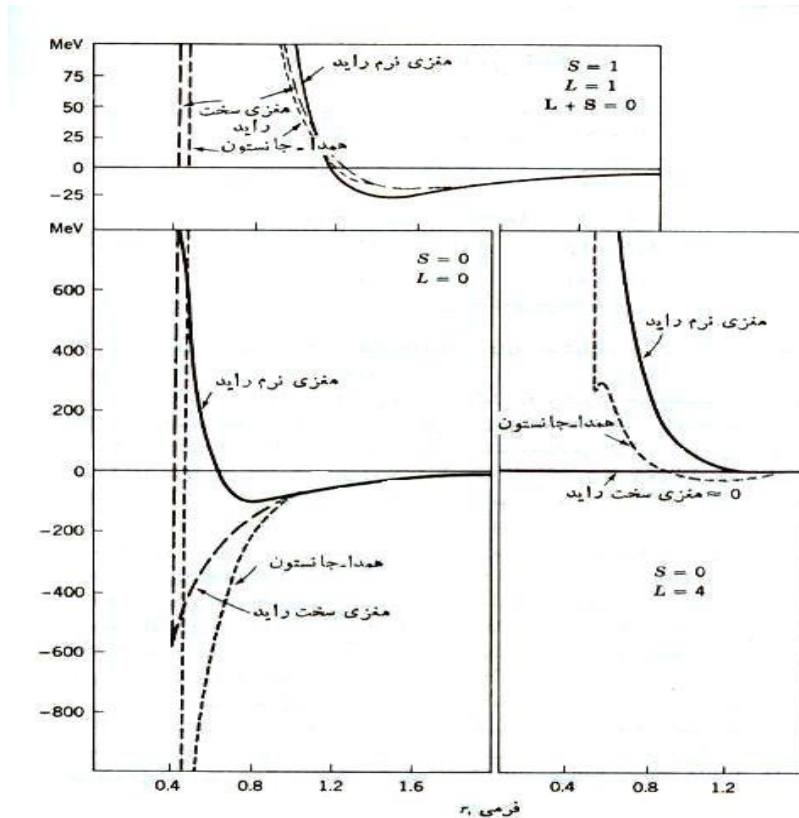


شکل ۱ - ۱ مؤلفه‌های پتانسیل هامادا - جانسون

علاوه بر پتانسیل هاماداجانسون چندین پتانسیل دیگر عرضه شده‌اند که به همه داده‌های سیستمهای نوکلئون - نوکلئون برازش داده می‌شوند. مشهورترین آنها پتانسیل‌هایی هستند که به وسیله برای^{۱۶} و همکارانش در دانشگاه ییل و راید^{۱۷} در دانشگاه کورنل پیشنهاد شده‌اند. پتانسیل برایت کاملاً شبیه پتانسیل هاماداجانسون است، ولی پتانسیل راید وابستگی سرعت را با بکار بردن پتانسیل‌های مختلف برای هر مقدار l به کار می‌گیرد. علاوه بر یکی از پتانسیل‌های راید، مغزی سخت به کار نرفته است؛ بلکه در فواصل کوتاه از یک پتانسیل دافعه با بستگی r به صورت رابطه (۱-۳۷) و $\mu = 4.9 \text{ fm}^{-1}$ استفاده شده است. از آنجایی که این پتانسیل ناگهان به بینهایت نمی‌رود از آن به عنوان پتانسیل با مغزی

^{۱۶} Bright
^{۱۷} Ride

نرم^{۱۸} یاد می‌شود. پتانسیل‌های با مغزی سخت و نرم رایید و هاماداجانسون برای چند حالت برهمکنش در شکل (۳ - ۲) مقایسه شده‌اند [۳].



شکل ۲-۱ مقایسه پتانسیل‌های با مغزی سخت و مغزی نرم رایید با پتانسیل هاماداجانسون برای حالت‌های مختلف برهمکنش
ضرایب $b_t, b_c, a_t, a_c, \dots$ از فیت کردن مقادیر حاصل از آزمایشات پراکندگی بدست می‌آید [۶].

Yale Group potential

۲-۴-۱ پتانسیل گروه یال

فرم عمومی آن خیلی شبیه به پتانسیل هامادا جانسون است [۷].

$$V = V_{opep} + V_c + V_T S_{12} + V_{LS} \vec{L} \cdot \vec{S} + V_L [Q_{12} + (\vec{L} \cdot \vec{S})^2] \quad (۲۶-۱)$$

$$-\left[Q_{12} + (\vec{L} \cdot \vec{S})^2\right] = -(\vec{L} \cdot \vec{S})^2 - \vec{L} \cdot \vec{S} + \vec{L}^2 \quad (27-1)$$

$$V_{\text{opep}} = \left(\frac{g^2}{12}\right) \mu \left(\frac{\mu}{M}\right)^2 \vec{\tau}_1 \cdot \vec{\tau}_2 \left[\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + S_{12} \left(1 + \frac{3}{x} + \frac{3}{x^2}\right)\right] \frac{e^{-x}}{x} \quad (28-1)$$

g^2 ثابت جفت شدگی می باشد.

دیگر پتانسیل ها به شرح زیر می باشد: پتانسیل های دیگر فقط در حد ذکر نام آنهاست.

3-Reid68 and Reid- Day potentials

4- Super-Soft-Core Potentials

5-Funabashi Potentials

6-Nijmegen Group Potentials

در این پتانسیل بر هم کنش های باریون- باریون و باریون-آنتی باریون در نظر گرفته شده است. این گروه

در حالات متفاوت، پتانسیل هایی را به شرح زیر معرفی کرده اند:

6-1 hard-core-potentials (H-C)

6-2 soft-core-potentials (S-C)

6-3 extended-soft-core model (ESC)

6-4 nijmegen partial-wave-analysis (PWA)

6-5 high-quality potential (HQ)

۵-۶ تقسیم بندی پتانسیل های high quality

6-5-1 one-poin-exchange potential (OPEP)

6-5-2 nijm 93 ,nijmI and nijm II potentials

6-5-3 regularized reid potential

6-6 optical potentials

7 paris group potential

8 urbana potential

9 argonne group potentials

9-1 argonne V14 potential

argonne V18 potential

10 bonn group potentials

11 hamburg group potentials

در این فصل در باره نتایج تجربی و تحلیل‌های نظری ارائه شده در خصوص نیروها و پتانسیل‌های هسته‌ای بحث شد.

فصل

کاربردهای هلیوم ۳ و ۴

۲

۲-۱ مقدمه

در سال ۱۸۷۱ دیمیتري ایوانوویچ مندلیف ۶۳ عنصر موجود در زمان خود را بر اساس وزن اتمی منظم کرد. و جای عناصری را که در آن زمان کشف نشده بودند، خالی گذاشت. در سال ۱۹۰۹ موزلی عدد اتمی را کشف کرد. با کشف عدد اتمی، به زودی مشخص شد این عدد مبنای دقیقی برای طبقه بندی عناصر می باشد و به جای وزن اتمی به کار گرفته شد. به مرور زمان و با منظم کردن عناصر بر اساس عدد اتمی، جدول تناوبی شکل فعلی خود را گرفت. در پی کارهای آزمایشی دقیق، لرد رالی و ویلیام رامسی موفق به کشف گازهای نادر شدند و آن‌ها را در گروه جدیدی جای دادند رالی به خاطر کشف آرگون در سال ۱۹۰۴ موفق به دریافت جایزه نوبل فیزیک شد. و رامسی نیز به خاطر کشف بقیه گازهای نادر در همان سال جایزه نوبل شیمی را کسب کرد. رامسی در سال ۱۹۰۳ نشان داد که هلیوم در طی متلاشی شدن عناصر رادیواکتیو تولید می‌شود.

نظریه‌ی پذیرفته شده درباره‌ی گیتی، نظریه‌ی جهان در حال انبساط است که با مهبانگی چگال و داغ بین 10^{10} تا 2×10^{10} سال پیش آغاز شده است. چند هزار سال پس از آن موادی که در حال انبساط بودند آنقدر سرد شدند که به گازی متشکل از اتم‌های هیدروژن و هلیوم و فوتون‌ها و نوترینوهای همراه آن‌ها چگالیده و تبدیل شدند. ستاره‌ای را در نظر بگیرید که از ترکیب هیدروژن و هلیوم، چگالیده و شکل گرفته و سوختن هیدروژن در قلب آن آغاز شده باشد. با مصرف مدام هیدروژن در قلب ستاره، سرانجام وضعیتی پیش می‌آید که آهنگ واکنش برای ثابت نگه داشتن دما و در نتیجه فشار لازم به منظور جلوگیری از افزایش بیشتر انقباض گرانشی کافی نخواهد بود. بنابراین ماده بیشتری به قلب ستاره فرو می‌ریزد. اگر ستاره به قدر کافی بزرگ باشد، انرژی گرانشی آزاد شده، دمای هسته مرکزی آن را آنقدر بالا می‌برد که هلیوم با آهنگ چشمگیری شروع به سوختن می‌کند. همین که هلیوم مصرف گشت، مراحل

بعدی سوختن هسته‌ای آغاز می‌شوند. این مراحل تا جایی پیش می‌روند که مفیدترین عناصر، یعنی آهن و نیکل تشکیل شوند. در هر مرحله دمای بالاتری برای فائق آمدن بر سد کولنی بلندتر، مورد نیاز است که انرژی لازم برای این عمل را انقباض گرانشی فراهم می‌آورد.

۲-۲ گداخت هسته‌ای در خورشید

هسته‌ی هلیوم یکی از عناصر مهم در واکنش‌های موجود در خورشید است. که به واسطه‌ی این واکنش‌ها، انرژی زیادی تولید شده و در نتیجه زندگی بر روی زمین امکان پذیر می‌شود، تابندگی خورشید از همجوشی سبک‌ترین عناصر، یعنی هیدروژن و تبدیل آن‌ها به هلیوم سرچشمه می‌گیرد. در ستاره انواع فرایندهای هسته‌ای رخ می‌دهد به طوری که در طی آن‌ها عناصر سنگین‌تر سنتز می‌شوند و همچنین همه‌ی برهم کنش‌های گرانشی، ضعیف، الکترومغناطیسی و قوی فعال است. عقیده بر آن است که کل عالم از موادی که بیشتر آن اتم‌های هیدروژن و هلیوم بوده بوجود آمده است [۹]. در جدول زیر نسبت عددی ده اتم فراوان‌تر از کربن در بدو تولد منظومه شمسی را مشاهده می‌کنید.

جدول ۱-۲ نسبت عددی ده اتم فراوان‌تر از کربن در بدو تولد منظومه شمسی [۱۰]

H	He	C	N	O	Ne	Mg	Si	S	F
۲۴۰۰	۱۶۲	۱/۰	۰/۲۱	۱/۶۶	۰/۲۳	۰/۱۰	۰/۰۹	۰/۰۵	۰/۰۸

به سبب سرشت جاذبه‌ای و بلند برد بودن نیروی گرانش، در دمای به اندازه کافی پایین، جرم همگن ناپایدار می‌باشد و در نتیجه در اثر انقباض می‌توانند به اجسامی همچون ستارگان تبدیل گردد. در خلال انقباض جرم گازی، انرژی پتانسیل گرانشی به انرژی تابشی تبدیل می‌شود، و دمای گاز بالا می‌رود.

هنگامی که افزایش پی در پی فشار در محیط درونی داغ و چگال ستاره بتواند با فشار حاصل از انقباض گرانشی به توازن برسد، آهنگ رمبش متوقف می‌گردد. در ستاره‌ای مانند خورشید از آنجا که دما و چگالی افزایش می‌یابند، هنگامی که محیط درونی آنقدر داغ گردد تا واکنش سوختن هیدروژن را سبب شود، آهنگ انقباض متوقف می‌گردد. در این مرحله از تحول خورشید، قدرت هسته‌ای تولید شده، محیط درونی را آنقدر گرم می‌دارد تا بتواند فشار بی‌وقفه‌ی حاصل از گرانش را متوازن سازد، و شرط شبه پایداری را، که هم اکنون وجود دارد، برآورده سازد. این شرط، تعادل ترمودینامیکی نیست، چرا که محیط درون خورشید داغتر از بیرون است و انرژی هسته‌ای آزاد شده در مرکز خورشید از طریق تابش، رسانش و همرفت به سطح خورشید منتقل شده و از آن جا به فضا می‌تابد تا ما از آن استفاده کنیم و بدین ترتیب به خورشید درخشندگی می‌بخشد [۹]. واکنش‌های اصلی تأمین کننده‌ی انرژی در خورشید، با تبدیل هیدروژن به دوتریوم آغاز می‌گردند. در دمایی حدود $10^7 k$ واکنش‌های هسته‌ای زنجیره‌ای رخ می‌دهد که نتیجه آن تبدیل هیدروژن به هلیوم است. هیدروژن فراوان‌ترین ماده‌ی موجود در جهان است. بیش از ۹۰ درصد اتم‌های جهان را هیدروژن تشکیل می‌دهد و کمتر از ۱ درصد باقیمانده نیز اتم‌های هلیوم‌اند. تمام واکنش‌های مربوط به هر چرخه‌ی همجوشی را باید واکنش دو جسمی تلقی کرد، زیرا برخورد همزمان سه ذره واقع‌ای غیر محتمل است [۹-۱]. مرحله اول در فرایند همجوشی باید ترکیب دو پروتون باشد که تنها سیستم دو نوکلئونی پایدار را خواهد ساخت:



این واکنش در زمره‌ی برهمکنش‌های ضعیف است (که باعث می‌شود پروتون به نوترون تغییر کند)، و بنابراین این واکنش بسیار به ندرت رخ می‌دهد. این برهم کنش ضعیف در مقیاس زمانی طولانی حالت شبه ایستای خورشید را سبب می‌شود. پوزیترون تولید شده در این واکنش به همراه یک الکترون به

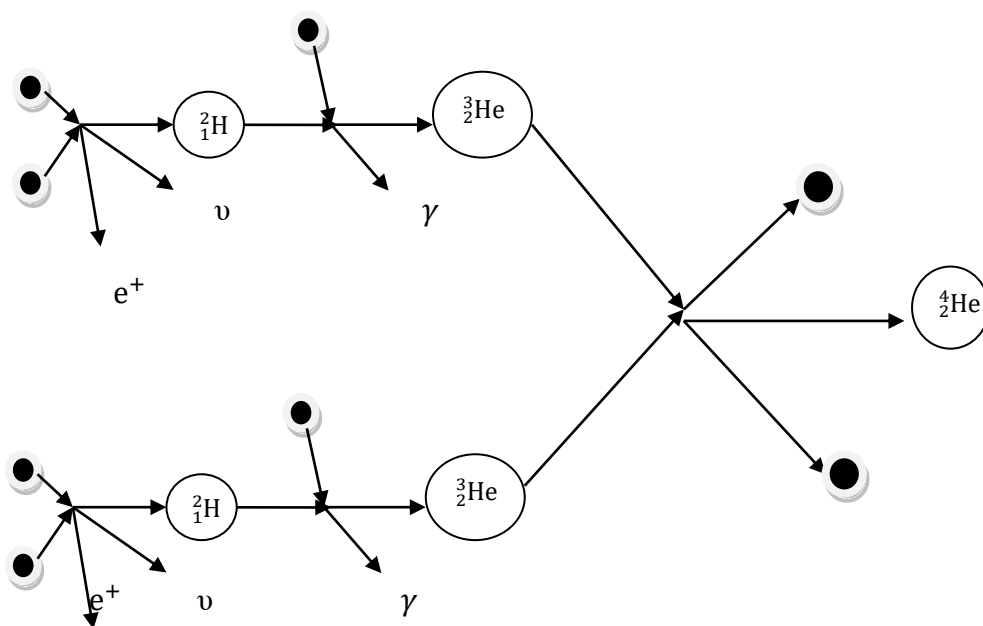
سرعت نابود می‌شود و $1/0.2$ مگا الکترون ولت انرژی آزاد می‌سازد. دوتریوم به هلیوم^۳ تبدیل می‌شود و سپس به هلیوم^۴ گداخته می‌شود:



واکنش خالص تبدیل چهار پروتون به یک هسته ی هلیوم است.



فرایند کامل به طور طرح‌واره در شکل (۱-۲) نشان داده شده است:



شکل (۱-۲) رشته فرایندهای زنجیره ی پروتون-پروتون در واکنش‌های هم‌جوشی

تبدیل هیدروژن به هلیوم به همراه آزادسازی $26/73$ مگا الکترون ولت انرژی به ازای هر هسته ی هلیوم می‌باشد. نوترینوهای گسیل شده در واکنش‌های پروتون - پروتون هر کدام به طور متوسط 0.26 مگا الکترون ولت انرژی با خود می‌برند. این انرژی در فضای لایتناهی گم می‌شود و در درختدگی

مشاهده شده خورشید سهمی ندارد. بنابراین در این فرایند، به ازای نابودی و مصرف هر اتم هیدروژن ۶/۵۵ مگاالکترون ولت انرژی الکترومغناطیسی از خورشید گسیل می‌شود. درخشندگی خورشید بیانگر آن است که در هر ثانیه مقدار $3/7 \times 10^{38}$ اتم هیدروژن به هلیوم تبدیل می‌گردد با این آهنگ تبدیل، در کل تعداد $5/4 \times 10^{55}$ تبدیل در طی عمر خورشید رخ خواهد داد. از روی جرم و ترکیب‌های خورشید در می‌یابیم که خورشید در آغاز با $8/9 \times 10^{56}$ اتم هیدروژن شکل گرفته است [۹]. پس تا کنون از ۱۰ درصد هیدروژن خورشید مصرف شده و این تأییدی بر دراز بودن زمان این مرحله از تحول ستاره‌ای است [۹] جالب توجه آن که ۵۰ درصد جرم خورشید در محدوده‌ی فاصله $\frac{R}{4}$ از مرکز خورشید و ۹۵ درصد درخشندگی در ناحیه مرکزی تا فاصله $\frac{R}{5}$ از مرکز آن تولید می‌گردد، جایی که دما به اندازه‌ای است که $K_B T \geq 1keV$ می‌باشد. (K_B ثابت بولتزمن است و اگر $T = 1/16 \times 10^7 K$ باشد، $K_B T = 1keV$ می‌شود.) انرژی گرانشی آزاد شده در انقباض خورشید، پیش از آغاز دوره شبه ایستا، برای تولید چنین دماهایی کافی بوده است.

$$\begin{aligned} G &= 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2} \\ M &= 1.99 \times 10^{30} \text{ kg} \\ R &= 6.96 \times 10^8 \text{ m} \end{aligned} \quad \text{و} \quad \frac{GM}{R} \approx 3.8 \times 10^{41} \quad \text{انرژی گرانش} \quad (۴-۲)$$

این انرژی به طور متوسط به هر ذره، هسته‌ها و الکترون‌ها، در حدود یک کیلو الکترون ولت انرژی جنبشی می‌دهد. در چنین دماهایی اتم‌های هیدروژن و هلیوم یونیده می‌باشند و ماده در این شرایط، پلاسما نامیده می‌شود [۹]. روش‌های دیگری هم برای مصرف هلیوم ۳ تولید شده در واکنش (۲-۲) وجود دارد. حضور هلیوم ۴ در ستاره منجر به تشکیل ${}^7_4\text{Be}$ می‌گردد [۹]. سرنوشت دیگر هسته‌ی هلیوم ۳ این است که با یک ذره‌ی آلفا روبرو می‌شود:



${}^7_4\text{Be}$ نسبت به واپاشی گیراندازی الکترون آزاد از پلاسما برای ${}^7_3\text{Li}$ ناپایدار است. که با یکی از واکنش‌های زیر دنبال می‌شود:



یا با احتمال ۱۰/۳ درصد، حالت برانگیخته ${}^7_3\text{Li}^*$ را به وجود آورد:



که به صورت زیر وا می‌پاشد:



${}^7_3\text{Li}$ با یک پروتون به سرعت به دو هسته هلیوم می‌شکند:



این واکنش‌ها ((زنجیره PPII)) را تشکیل می‌دهند. متناوباً ${}^7_4\text{Be}$ می‌تواند با یک پروتون برهمکنش کند و ${}^8_5\text{B}$ را تشکیل دهد:



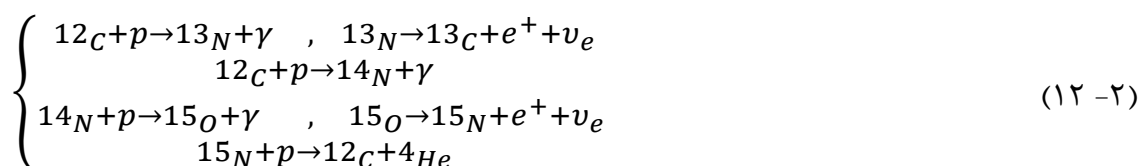
${}^8_5\text{B}$ نسبت به واپاشی بتا ناپایدار است [۹].



و ${}^8_4\text{Be}^*$ به دو هسته‌ی هلیوم می‌شکند:



این واکنش‌ها ((زنجیره PPIII)) را به وجود می‌آورند. پوزیترون این واکنش با یک الکترون نابود می‌گردد و $1/02MeV$ دیگر انرژی آزاد می‌سازد. اهمیت نسبی زنجیره‌های PPII و PPIII، را نسبت به زنجیره‌ی PPI، می‌توان با مجموعه‌ی مناسبی از معادلات آهنگ محاسبه کرد. زنجیره‌ی PPI فرایند اصلی مدل استاندارد خورشیدی است. مجموعه‌ی جالب دیگری از واکنش‌ها که منجر به سوختن هیدروژن و تبدیل آن به هلیوم می‌گردد، چرخه‌ی CNO است (هرگاه علاوه بر هیدروژن و هلیوم عناصر سنگین‌تری در داخل یک ستاره موجود باشند، رشته‌ی متفاوتی از واکنش‌های همجوشی ممکن است در آن به وقوع بپیوندد). حضور هر یک از هسته‌های $^{12}_6C$ ، $^{13}_6C$ ، $^{14}_7N$ یا $^{15}_7N$ با مجموعه واکنش‌های زیر، فرایند سوختن را تسریع می‌کند [۹-۱].



در این حالت، $^{12}_6C$ نه تولید می‌شود و نه از بین می‌رود، بلکه به صورت یک عامل فعل و انفعال وارد عمل می‌شود تا به فرایند همجوشی کمک کند. فرایند خالص عبارت است از:



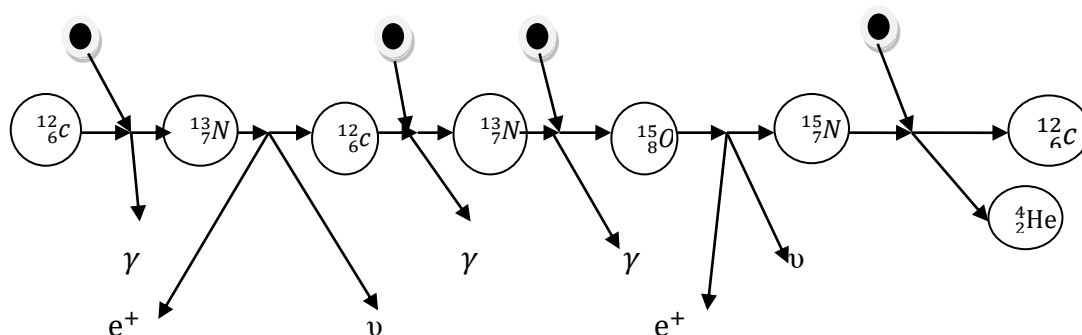
که دقیقاً همان چرخه‌ی پروتون-پروتون می‌باشد و مقدار انرژی آن نیز با مقدار قبلی برابر است [۱]. لزومی ندارد که برهم کنش‌های ضعیف این چرخه، مانند واکنش پروتون-پروتون در زمان زودگذر $10^{-22}s$ روی دهند، بلکه می‌توانند در فرصت مناسب خودشان و در زمان‌های معمولی واپاشی بتا را روی دهند. معلوم شده که هسته‌های کربن و نیتروژن در خورشید وجود دارند. اما در دماهای خورشیدی، سد کولنی به

مقدار زیادی آهنگ واکنش‌های آنها را فرو می‌نشاند و چرخه ی CNO تنها با احتمال ۳ درصد فرایند سوختن هیدروژن ستاره‌ای را تشکیل می‌دهد. در ستارگان داغ‌تر ممکن است چرخه ی CNO برتر از چرخه‌های PP شود، چرا که آهنگ واکنش‌های چرخه ی CNO با دما بسیار سریعتر افزایش می‌یابند. واکنش‌های خورشیدی توصیف شده منجر به شار قابل توجهی از نوترینوها به سوی زمین می‌گردد. میانگین تابش خورشید در سطح زمین در حدود $1/4 \times 10^3 \frac{W}{m^2}$ است که بدان معناست که توان کل خروجی خورشید در حدود $4 \times 10^{26} W$ می‌شود. هر واکنش همجوشی حدود ۲۵ مگاالکترون ولت انرژی تولید می‌کند و بنابراین در حدود 10^{38} واکنش همجوشی در ثانیه در خورشید روی می‌دهد، و در نتیجه $4 \times 10^{38} W$ پروتون در ثانیه مصرف می‌شود. با این آهنگ، انتظار می‌رود که خورشید برای 10^{10} سال دیگر به صرف سوخت هیدروژن ادامه دهد [۱].

هنگامی که سوخت هیدروژن در یک ستاره تمام می‌شود، واکنش‌های همجوشی هلیوم طی فرایند:



در دمای بالاتری که برای نفوذ در سد کولنی لازم است، ممکن است در آن ادامه یابد. با تحقق واکنش‌های دیگری که شامل همجوشی هسته‌های سبک و گیراندازی ذره‌ی آلفا هستند نیز ممکن است آزادسازی انرژی ادامه یابد. این قاعده ی نسبتاً ساده نه تنها کمک می‌کند که طرز کار گروه‌های متعدد ستاره‌های مشاهده شده را تا حدی توضیح دهیم، بلکه وسیله ای است که ما را قادر می‌سازد تا فراوانی نسبی انواع اتم‌های متفاوت را درک کنیم. اتم‌های سبک با Z زوج که از طریق گیراندازی متوالی آلفا در ${}^{12}_6\text{C}$ ساخته می‌شوند، خیلی فراوان‌تر از اتم‌های مجاورشان با Z فرد هستند، تقریباً فراوانی هر چیزی که بالاتر از Fe باشد کمتر از هر چیز دیگری است که زیر Fe باشد.



شکل (۲-۲) چرخه کربن در واکنش‌های همجوشی

۲-۳-۱ همجوشی هسته‌ای

طبق نمودار B بر حسب A می‌توان دو روش برای تولید انرژی مشخص کرد:

۱- شکافت هسته‌ای: شکافتن هسته‌های سنگین و تولید هسته‌های سبک همراه با تولید انرژی زیاد.

۲- همجوشی هسته‌ای: ترکیب هسته‌های خیلی سبک و تولید هسته‌های سنگین‌تر. (با عدد جرمی کمتر

از ۵۶)

فرایند همجوشی هسته‌ای نسبت به شکافت هسته‌ای از نقطه نظر تولید انرژی چند مزیت دارد:

۱- محصولات نهایی همجوشی معمولاً هسته‌های سبک و پایداری است نه هسته‌های سنگین پرتوزا.

۲- هسته‌های سبک فراوان‌اند و به آسانی قابل حصول‌اند.

یک اشکال عمده فرایند همجوشی نسبت به شکافت: هسته‌های سبک قبل از ترکیبشان باید بر دافعه

کولنی غلبه کنند. به خاطر محدودیت‌های مهم ناشی از سد کولنی، همجوشی هرگز به صورت یک فرایند

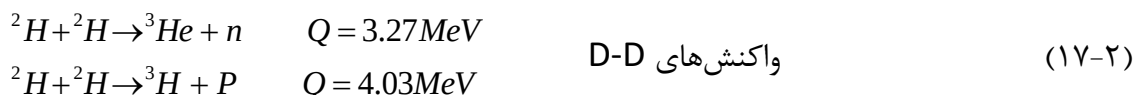
طبیعی روی کره زمین رخ نمی‌دهد. با غلبه کردن بر سد کولنی، همجوشی خیلی محتمل می‌شود زیرا دو هسته‌ی روی هم افتاده به سرعت به یک حالت کمینه‌ی انرژی می‌رسند. بنیادی‌ترین واکنش همجوشی واکنش زیر می‌باشد [۱]:



این واکنش به خاطر ناپایدار بودن ${}^2\text{He}$ امکان پذیر نیست. واکنش بنیادی دیگر عبارت است از:



حضور γ در واکنش بالا به خاطر برابری انرژی ضروری است. زیرا ${}^4_2\text{He}$ فاقد حالت‌های برانگیخته است. انرژی آزاد شده مساوی $23/8$ مگاالکترون ولت است که از انرژی‌های جدایی نوترون و پروتون از ${}^4_2\text{He}$ بیشتر است. به منظور تولید انرژی گداخت هسته‌ای بر روی زمین، استفاده از واکنش بسیار آهسته‌ی پروتون-پروتون سودی ندارد. اما سدهای کولنی دوترون درست به همان اندازه‌ی سدهای پروتون است. بنابراین محتمل‌ترین واکنش‌ها عبارتند از:



واکنش‌های بالا مؤید این امر است که دوتریم، سوخت مناسبی برای نیروگاه‌های هسته‌ای می‌باشد. فراوانی طبیعی دوتریم، زیاد و برابر $0/015$ درصد همه هیدروژن است. انبارهای دوتریم مثلاً در آب دریا تقریباً پایان ناپذیر است. نسبت جرمی 2 به 1 این دو ایزوتوپ جدایی آنها را نسبتاً آسان می‌سازد. البته هر چه محصول نهایی پایدارتر باشد انرژی آزاد شده بیشتر است. واکنشی که هلیوم 4 را تشکیل می‌دهد، باید به آزادسازی انرژی فوق العاده زیادی منجر شود [۹-۱]. در پژوهش‌های کنونی بیشتر توجه به آمیزه‌ی دوتریم-تریتوم برای سوخت، با استفاده از واکنش زیر جلب شده است:



این واکنش نسبت به واکنش‌های (۱۷-۲) دو برتری دارد: ۱- گرمای واکنش بیشتر است. ۲- سطح مقطع به مقدار قابل توجهی بزرگتر می‌باشد. (این امر به دلیل وجود حالت برانگیخته ی هلیوم ۵ است که در سطح مقطع ایجاد شده یک قله‌ی تشدید ی ایجاد می‌کند). اشکال اصلی در آنجاست که تریتیوم باید مصنوعی ساخته شود، چون هیچ منبع طبیعی برای آن وجود ندارد زیرا دستخوش واپاشی بتا با نیمه عمر ۱۲/۷ سال می‌گردد.

۲-۳-۲ شرایط لازم برای تولید انرژی از پلاسما^{۱۹} با واکنش‌های گداخت

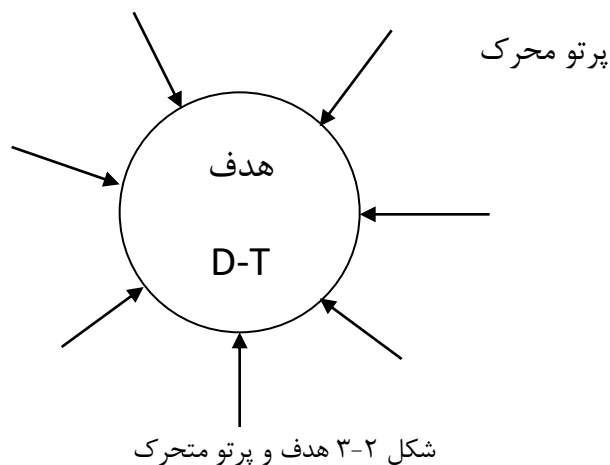
پلاسما باید دما و چگالی بالای خود را برای مدتی حفظ کند، افزایش دمای پلاسما تا ۱۰keV به عنوان اولین هدف عملی است و دومین هدف این است که پلاسما با دمای بالا در فضای محدودی محصور شود. البته چنین محفظه‌ای وجود ندارد. با این وجود دو روش محصورسازی مغناطیسی و محصور سازی لختی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

هیچ محفظه‌ای وجود ندارد (حتی از فلزات مقاوم) که بتواند پلاسما با دمایی در حدود ۱۰۰ میلیون درجه را محصور سازد. ستارگانی نظیر خورشید، کره‌ی عظیم پلاسمای خود را از طریق جاذبه حفظ می‌کنند. البته مسلم است که باید روش‌های جدیدی جهت محصور سازی پلاسما به غیر از جاذبه ایجاد شود.

پلاسما از ذرات باردار تشکیل شده است. این ذرات نمی‌توانند خطوط میدان مغناطیسی را قطع کنند، اما حول این خطوط می‌چرخند. این نکته خلاصه‌ای از مبنای فکری طرح محصور سازی پلاسما توسط خطوط میدان مغناطیسی را تشکیل داده است.

^{۱۹} Plasma

در روش محصور سازی لختی، سوخت D-T را تا دمای 10^8K توسط یک منبع انرژی خارجی در فاصله زمانی که لختی خود سوخت اثر می‌کند، گرم کرده و شرایطی را ایجاد می‌کنیم که در آن واکنش‌های گداخت شروع شود. سوخت D-T در ظرف کوچکی که از شیشه نازک یا پوسته فلزی ساخته شده است محصور می‌شود. پرتو محرک انرژی را روی لایه سطحی هدف متمرکز می‌کند. این لایه داغ شده، فشار بالایی ایجاد می‌نماید و آنگاه با شتاب به خارج پرتاب خواهد شد، در نتیجه‌ی این عمل، لایه سوخت، متراکم و گرم می‌شود. بخش عمده‌ای از انرژی پرتو E_{inp} که توسط هدف جذب می‌شود به صورت انرژی جنبشی و گرمایی پلاسمای خارج شده از سطح هدف در می‌آید. با این وجود قسمتی از این انرژی صرف گرم و متراکم کردن سوخت D-T خواهد شد.



فصل

روش‌های

حل معادله شرودینگر

۳

۳-۱ مقدمه

تعداد کمی پتانسیل $V(r)$ وجود دارد که برای آن‌ها معادله‌ی شرودینگر دقیقاً قابل حل است. از جمله:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x \geq 0 \end{cases} \quad (۱-۳) \text{ پله پتانسیل:}$$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ -V_0 & -a < x < a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (۲-۳) \text{ چاه پتانسیل:}$$

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ V_0 & -a < x < a \\ 0 & x > a \end{cases} \quad (۳-۳) \text{ سد پتانسیل:}$$

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (۴-۳) \text{ نوسانگر ساده:}$$

و

بنابراین باید برای بدست آوردن ویژه مقادیر و ویژه توابع برای پتانسیل‌هایی که به معادلاتی دقیقاً قابل حل نمی‌انجامند به تکنیک‌های دیگری متوسل شویم. از جمله روش‌هایی که برای حل معادله‌ی شرودینگر پیشنهاد شده و حتی با توجه به آن‌ها معادله‌ی شرودینگر را حل کرده اند روش‌های NU ، جواب پیشنهادی، ابر تقارن، روش‌های عددی و حتی می‌توان تکنیک‌های تقریب را برای حل معادله‌ی شرودینگر گسترش داد [۱۵].

اغلب روش‌های حل معادله‌ی شرودینگر بر اساس سیستم‌های دو جسمی می‌باشد، پس نیاز به دستگاه مختصات جدیدی داریم تا برای سیستم‌های چند جسمی نیز بتوانیم از این روش‌ها استفاده کنیم. همچنین تمام هسته‌ها به صورت چند نوکلئونی می‌باشند یعنی برای بدست آوردن ویژگی‌های استاتیکی و دینامیکی هسته‌ها در نظر گرفتن تأثیر تمام اجزا هسته مورد نیاز است که امکان پذیر نیست، مگر

تعریف دستگاه مختصات جدید که با توجه به تعداد ذرات هسته قابل انعطاف باشد. دستگاه مختصات "ژاکوبی" این نیاز ما را به خوبی رفع می کند.

۲-۳ دستگاه مختصات ژاکوبی^{۲۰}

برای یک سیستم N ذره ای معادله ی شرودینگر مستقل از زمان به صورت $H\Psi = E\Psi$ نوشته می شود که در آن هامیلتونی به صورت زیر معرفی می شود [۱۱-۱۲]:

$$H = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1 \\ i \neq j \\ i < j}}^N \left(\frac{p_i^2}{2m_i} + V(r_i) + V(r_i, r_j) \right) \quad (۵-۳)$$

$i \neq j$ به این معنا که: هیچ ذره ای با خودش بر هم کنش ندارد.

$i < j$ از نوشتن جملات تکراری صرف نظر می شود.

$V(r_i)$ پتانسیل محبوس کننده که اثرات محیطی را شامل می شود، مثلاً وقتی ذره ای تحت تأثیر میدان الکتریکی یا مغناطیسی باشد تأثیر این میدان های خارجی بر روی ذره را در $V(r_i)$ مشاهده می کنیم. $V(r_i, r_j)$ این جمله شامل بر هم کنش هر دو ذره با یکدیگر است. برای حل تمام معادلات چه ریاضی و چه فیزیک نیاز به دستگاه مختصات مناسب برای آن مسأله داریم. یکی از این دستگاه های مختصات که برای مجموعه ای N ذره ای مورد استفاده قرار می گیرد، مختصات ژاکوبی می باشد. مؤلفه عمودی این دستگاه مختصات به شکل زیر معرفی می شود:

$$\vec{\xi}_i = \sqrt{\frac{i}{i+1}} \left(\frac{1}{i} \sum_{j=1}^i \vec{r}_j - \vec{r}_{i+1} \right) \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \quad (۶-۳)$$

^{۲۰} Jacobi coordinates

$\vec{\xi}_i$ بردار مکان هر نقطه نسبت به مرکز نقاط قبلی است. آخرین مختصه ژاکوبی به صورت زیر معرفی می‌شود که در آن $\vec{R}$ بردار مرکز جرم کل ذرات است [۱۲-۱۱].

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \dots + \vec{r}_N}{N} \quad (۷-۳)$$

المان حجم در این مختصات به صورت زیر است:

$$\prod_{i=1}^N d\vec{r}_i = N^{\frac{3}{2}} dR \prod_{j=1}^{N-1} d\vec{\xi}_j = dx \quad (۸-۳)$$

برای توصیف مکان ذره A می‌توان از مختصات ژاکوبی استفاده نمود [۱۲-۱۱]. که در این حالت با توجه به اینکه هر ذره دارای ۳ درجه آزادی است، ما نیازمند ۳A مختصه ژاکوبی هستیم. در این صورت ابر شعاع به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x = [\sum_{i=1}^{N-1} \xi_i^2]^{\frac{1}{2}} = [\sum_{i=1}^{N-1} (r_i - R)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (۹-۳)$$

اگر پتانسیل بین ذرات تنها وابسته به توان‌هایی از فاصله نسبی آنها باشند می‌توان آنها را بر حسب ابر شعاع نوشت. در این صورت به این پتانسیل‌ها، پتانسیل‌های فوق مرکزی می‌گویند.

۳-۳-۱ روش NU^{21}

در سالهای اخیر به حل سیستمهای کوانتوم مکانیکی در چارچوب روش NU تمایل زیادی نشان داده شده است. این تکنیک جبری برای حل معادلات دیفرانسیل خطی مرتبه دوم پایه‌ریزی شده است که با موفقیت برای حل معادلات موج شرودینگر، کلاین گردون، در حضور پتانسیل‌های مرکزی و غیرمرکزی بکار برده شده است. برای مطالعه و بررسی بیشتر موفقیت این روش، مراجع [۱۳-۱۴] را ببینید.

بکارگیری این روش در حل معادله‌ی شرودینگر، دستورالعمل روشنی برای بدست آوردن جواب‌های دقیق حالت‌های مقید، ویژه مقادیر انرژی و ویژه توابع وابسته آنها، بر حسب چند جمله‌ای‌های متعامد ارائه می‌دهد که در عین سادگی بسیار موثر است. از آنجایی که یافتن جواب‌های دقیق معادله‌ی شرودینگر جز در مواردی خاص همچون سیستمی با پتانسیل کولنی و یا نوسانگر هماهنگ به روش‌های معمول و سنتی غیر ممکن است لذا بکار بستن این روش می‌تواند ما را در حل این مشکل یاری رساند و گامی به جلو محسوب می‌شود. از جمله مواردی که ناگزیر به کنار گذاشتن روش‌های معمول و جستجوی روش‌های جدید هستیم، حل معادله‌ی شرودینگر با پتانسیل‌های غیر مرکزی است. اینگونه پتانسیل‌ها در شیمی کوانتومی بسیار مورد توجه اند و اخیراً مطالعات فراوانی در این زمینه انجام شده و در حال انجام است. روش‌های مختلفی برای حل معادله‌ی شرودینگر با پتانسیل‌های غیر مرکزی استفاده شده است، از جمله روش ابرتقارنی، SUSY، ایده SIP [۱۹-۱۸]، انتگرال مسیر [۲۱-۲۰]، و روش فاکتورگیری [۲۲]. البته باید توجه داشت که روش NU هم همچون روش‌های قبلی در حل معادله‌ی شرودینگر با هر نوع پتانسیل دلخواه، ناکارآمد است و تنها با نوع خاصی از پتانسیل‌ها که الزامات روش را برآورده می‌کنند می‌توان از این روش به نتیجه مطلوب رسید.

۳-۳-۲ توضیحات روش حل NU

این روش براساس تقلیل یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم است. در اینجا معادله‌ی شرودینگر، به یک معادله از نوع فوق هندسی پایه ریزی شده است [۱۷]. پس از انتخاب یک تغییر متغیر مناسب، $S = S(r)$ معادله‌ی تبدیل یافته را به صورت زیر داریم:

$$\Psi_n''(s) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{\sigma(s)} \Psi_n'(s) + \frac{\tilde{\sigma}(s)}{\sigma^2(s)} \Psi_n(s) = 0. \quad (3-10)$$

که σ و $\tilde{\sigma}$ چند جمله ای‌هایی حداکثر از درجه ی دوم و $\tilde{\tau}$ یک چند جمله ای حداکثر از درجه ی اول است. با در نظر گرفتن تابع موج $\Psi_n(s)$ به صورت :

$$\Psi_n(s) = \phi_n(s) y_n(s) \quad (11-3)$$

معادله ی (۱۰-۳) به صورت یک معادله از نوع فوق هندسی تقلیل داده می‌شود؛ [۱۷]

$$\sigma(s) y_n''(s) + \tau(s) y_n'(s) + \lambda y_n(s) = 0 \quad (12-3)$$

$$\tau(s) = \tilde{\tau}(s) + 2\pi(s), \quad \tau' < 0 \quad (13-3)$$

چندجمله ای $\tau(s)$ با علامت پریم نشان می دهد که باید مشتق مرتبه ی اولش منفی باشد.

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau'(s) - \frac{n(n-1)}{2} \sigma''(s) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (14-3)$$

λ پارامتری است که به صورت زیر تعریف می شود [۱۷].

باید به این نکته توجه کرد که λ و λ_n از یک جواب خاص، شکل $y(s) = y_n(s)$ که چندجمله ای درجه n است بدست می‌آیند، بعلاوه این که جمله $y_n(s)$ تابع موج معادله (۱۱-۳)، یک تابع از نوع فوق هندسی که از رابطه ردیگز ذیل بدست می‌آید [۱۷].

$$y_n(s) = \frac{B_n}{\rho_n} \frac{d^n}{ds^n} (\sigma^n(s) \rho(s)) \quad (15-3)$$

که در آن B_n ثابت نرمالیزاسیون است و $\rho(s)$ تابع وزنی است که باید شرط زیر را برآورده کند [۱۷].

$$\frac{d}{ds} \omega(s) = \frac{\tau(s)}{\sigma(s)} \omega(s) \quad \omega(s) = \sigma(s) \rho(s) \quad (16-3)$$

تابع $\pi(s)$ و پارامتر λ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۷].

$$\pi(s) = \frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma'(s) - \tilde{\tau}(s)}{2}\right)^2 - \tilde{\sigma}(s) + K\sigma(s)} \quad (17-3)$$

$$\lambda = K + \pi'(s) \quad (18-3)$$

از آنجایی که باید $\pi(s)$ حداکثر یک چند جمله‌ای درجه یک باشد، جملات زیر رادیکال در معادله

(17-3) باید به صورت یک چند جمله‌ای درجه اول مرتب شوند که این در صورتی ممکن است که مشخص کننده ی آن، $\Delta = b^2 - 4ac$ ، صفر باشد. در این حالت یک معادله برای K بدست می آید که پس از حل معادله، مقادیر بدست آمده برای K را در معادله (17-3) جایگذاری می کنیم و با مقایسه با معادلات (14-3) و (18-3) ویژه مقادیر انرژی را بدست می آوریم. قبل از استفاده از این روش، جهت حل معادله شرودینگر باید توجه داشت که این روش برای حل معادله یفرانسیلی درجه ی دوم پایه ریزی شده است، بنابراین باید در مرحله ی اول معادله شرودینگر را که یک معادله دیفرانسیلی مرتبه ی دوم با سه متغیر است، به سه معادله دیفرانسیلی مرتبه ی دوم تک متغیره تبدیل نمود. ما در دستگاه مختصات کروی کار می کنیم.

بنابراین برای رسیدن به این هدف باید پتانسیل استفاده شده به شکل زیر باشد [16].

$$V(r, \theta, \phi) = V(r) + \frac{V(\theta)}{r^2} + \frac{V(\phi)}{r^2 \sin^2(\theta)} \quad (19-3)$$

معادله مستقل از زمان شرودینگر را به صورت زیر می توانیم بنویسیم [15].

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(\vec{r})] \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (20-3)$$

تابع موج $\Psi_n(\vec{r})$ حالت‌های مقید و سطوح انرژی وابسته به آنها، E_n ، برای ذره در یک میدان پتانسیل را تشریح می‌کند. ابتدا معادله (۳-۲۰) را با جایگذاری پتانسیل (۳-۱۹) در دستگاه مختصات کروی می‌نویسیم. (برای سادگی $2m = \hbar^2 = 1$ در نظر می‌گیریم.) [۱۶].

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi(\vec{r})}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi(\vec{r})}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi(\vec{r})}{\partial \phi^2} \right] + [E - V(r, \theta, \phi)] \Psi(\vec{r}) = 0 \quad (۳-۲۱)$$

با در نظر گرفتن تابع موج کل به صورت $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)P(\theta)\Phi(\phi)$ و جایگذاری در معادله فوق داریم [۱۶].

$$\frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} + \left[E - V(r) - \frac{\gamma}{r^2} \right] R(r) = 0 \quad (۳-۲۲)$$

$$\frac{d^2 P(\theta)}{d\theta^2} + \cot \theta \frac{dP(\theta)}{d\theta} + \left[\gamma - V(\theta) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P(\theta) = 0 \quad (۳-۲۳)$$

$$\frac{d^2 \Phi(\phi)}{d\phi^2} + (m^2 - V(\phi)) \Phi(\phi) = 0 \quad (۳-۲۴)$$

که در آن‌ها m^2 و $\gamma = \ell(\ell+1)$ ثابت‌های جداسازی هستند. معادلات (۳-۲۲)، (۳-۲۳) و (۳-۲۴) به ترتیب معادله شعاعی، معادله زاویه ای و معادله سمتی هستند.

برای هر یک از معادلات فوق، پتانسیل‌های قابل حلی وجود دارد به طوری که الزامات روش NU را برآورده می‌کنند و معادله مربوطه به این روش قابل حل می‌باشد. برای آشنایی با انواع پتانسیل‌های قابل حل با این روش مراجع [۱۸-۱۳] را ببینید.

۳-۴-۱ حل معادلات دیفرانسیل به روش Runge-Kutta

در بسیاری از مسائل علوم و مهندسی وقتی به صورت ریاضی مدل سازی می‌شوند، به سادگی در قالب یک معادله دیفرانسیل معمولی با مقدار اولیه یا شرایط مرزی بیان می‌گردند. شاید نتوان فرم کلی جواب‌ها را برای هر مسئله مدل سازی شده بدست آورد ولی با استفاده از کامپیوتر و روش‌هایی عددی می‌توان آنها را حل کرد. از نظر محاسباتی، اغلب روش‌های کارآمد از نظر دقت، توسط دو ریاضی دان مشهور رونگ و کوتا^{۲۲} توسعه یافته‌اند. این روش‌ها به رونگ کوتا R-K مشهورند. این روش‌ها با توجه به مرتبه ی شان تمیز داده می‌شوند، یعنی مطابقت آن‌ها با جواب‌های سری تیلور تا جمله h^r که r مرتبه روش است. روش R-K4 برای حل عددی معادلات خطی و غیر خطی بطور گسترده استفاده می‌شود که بسط آن از نظر جبری پیچیده است. ایده ی اصلی این روش‌ها را با روش R-K2 بررسی می‌کنیم [۲۳]. ایده اصلی این روش، (میانگین شیب‌ها) است. یعنی:

$$y_{n+1} = y_n + hx \quad (۲۵-۳)$$

مسأله مقدار اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad , \quad y(t_n) = y_n \quad (۲۶-۳)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad , \quad k_2 = hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \quad (۲۷-۳)$$

میانگین وزنی k_1 و k_2 را انتخاب و برای تعیین y_{n+1} به y_n اضافه می‌کنیم.

$$y_{n+1} = y_n + w_1 k_1 + w_2 k_2 \quad (۲۸-۳)$$

α, w_2, w_1 و β مقادیر ثابتی هستند که باید تعیین شوند.

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hy'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(t_n) + \frac{h^3}{6} y'''(t_n) + \dots \quad (۲۹-۳)$$

^{۲۲} runge-kutta

رابطه (۲۹-۳) با استفاده از روابط (۲۷-۳) و (۲۵-۳) به صورت زیر در می آید:

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + hf(t_n, y_n) + \frac{h^2}{2}(f_t + ff_y) + \frac{h^3}{6}[f_{tt} + 2ff_{ty} + f^2f_{yy} + f_y(f_t + ff_y)] + O(h^4) \quad (۳۰-۳)$$

در این جا همه مشتقات در نقطه (t_n, y_n) محاسبه شده اند [۲۳].

با قراردادن معادلات (۲۷-۳) معادله (۳۰-۳) به صورت زیر در می آید:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 hf(t_n, y_n) + w_2 hf(t_n + \alpha h, y_n + \beta k_1) \quad (۳۱-۳)$$

حال با استفاده از بسط سری تیلور دو متغیره، داریم:

$$y_{n+1} = y_n + w_1 hf(t_n, y_n) + w_2 h \left[f(t_n, y_n) + (\alpha hf_t + \beta k_1 f_y) + \left(\frac{\alpha^2 h^2}{2} f_{tt} + \alpha h \beta k_1 f_{ty} + \frac{\beta^2 k_1^2}{2} f_{yy} \right) \right] + O(h^3) \quad (۳۲-۳)$$

از قرار دادن عبارت K_1 در معادله بالا و سپس مرتب کردن بر حسب توان های صعودی h داریم:

$$y_{n+1} = y_n + (w_1 + w_2)hf + w_2 h^2(\alpha f_t + \beta f f_y) + w_2 h^3 \left(\frac{\alpha^2}{2} f_{tt} + \alpha \beta f f_{ty} + \frac{\beta^2 f^2}{2} f_{yy} \right) + O(h^4) \quad (۳۳-۳)$$

با مساوی قراردادن ضرایب در معادلات (۳۳-۳) و (۳۰-۳) داریم:

$$w_1 + w_2 = 1 \quad w_2(\alpha f_t + \beta f f_y) = \frac{f_t f f_y}{2} \quad (۳۴-۳)$$

که نتیجه می شود:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 = 1 \\ w_2 \alpha = w_2 \beta = \frac{1}{2} \end{cases} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} \begin{cases} w_1 = 1 - w_2 \\ \alpha = \frac{1}{2w_2} \\ \beta = \frac{1}{2w_2} \end{cases} \quad (35-3)$$

w_2 دلخواه است و مقادیر گوناگونی را می‌توان به آن اختصاص داد [۲۳]:

حالت اول:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{3} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} \alpha = \beta = \frac{3}{2} \quad (36-3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{3}(2k_1 + k_2) \quad (37-3)$$

$$k_1 = hf(t, y) \quad (38-3)$$

$$k_2 = hf\left(t + \frac{3}{2}h, y + \frac{3}{2}k_1\right) \quad (39-3)$$

حالت دوم:

$$w_1 = w_2 = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{در نتیجه}} \alpha = \beta = 1 \quad (40-3)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1 + k_2}{2} \quad (41-3)$$

$$k_1 = hf(t, y) \quad (42-3)$$

$$k_2 = hf(t + h, y + k_1) \quad (43-3)$$

به روشی مشابه، فرمول R-K از هر مرتبه را می‌توان به دست آورد. هرچند که مشتقات آنها بسیار طولانی

و پیچیده می‌شود. از بین آنها R-K4 متداول‌تر و مرسوم‌تر است [۲۳].

۳-۴-۲ مراحل روش R-K4 :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (۴۴-۳)$$

$$k_1 = hf(t_n, y_n) \quad (۴۵-۳)$$

$$k_2 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (۴۶-۳)$$

$$k_3 = hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (۴۷-۳)$$

$$k_4 = hf(t_n + h, y_n + k_3) \quad (۴۸-۳)$$

۳-۵-۱ روش ابرتقارن^{۲۳}

در طول بیست سال گذشته چارچوب مفهومی جدیدی برای درک مسائلی که در مکانیک کوانتومی به صورت بالقوه تحلیل پذیر هستند، با استفاده از ایده‌های گرفته شده از نظریه‌ی میدان کوانتومی توسعه داده شده است. این چارچوب جدید ابرتقارن نام دارد [۲۴]. به صورت خلاصه ابرتقارن، تقارنی است که فرمیون‌ها و بوزون‌ها را به هم مرتبط می‌سازد. بر طبق این نظریه، بوزون‌ها به فرمیون‌ها توسط یک ابرتقارن به یکدیگر وابسته اند. جبر درگیر در آن جبر "لای مدرج" است که تحت ترکیبی از روابط بسته جابجایی و پاد جابجایی است [۲۵]. در اینجا لازم به ذکر است که تا کنون هیچ شواهدی تجربی از ابرتقارن بودن در طبیعت مشاهده نشده است. با استفاده از مکانیک کوانتومی ابرتقارنی، بسیاری از مسائل و پتانسیلهایی که به طور تحلیلی قابل حل نیستند و یا تحت شرایط خاصی قابل حل می‌باشند، به آسانی حل می‌شوند. با استفاده از اصول ناوردایی شکل به راحتی پتانسیلهایی مانند پاش - تله، اکارت، ویگنر -

^{۲۳} Supersymmetric

اکارت و وزن - مورش حل شده اند. همچنین می‌توان اختلاف انرژی ترازهای مختلف را با استفاده از ابرتقارن در روش‌هایی تقریبی مانند روش وردشی^{۲۴} به دست آورد. علاوه بر این می‌توان معادلات پائولی و دیراک را با استفاده از آن حل کرد [۲۶]. برای معرفی ابرتقارن نیازمند معرفی متغیرهای گراسمن^{۲۵} هستیم. متغیرهای گراسمن در واقع متغیرهایی پاد جابجا پذیر هستند. برای متغیرهای گراسمن عملیات ریاضی مشتق و انتگرال تعاریف مختص به خود را دارند. روش حل در ابرتقارن به این شکل است که: با استفاده از پتانسیلهای ساده پتانسیلهای مشکل را ساخته و ویژه توابع و ویژه مقادیر مربوط به پتانسیلهای حل شده را با روش عملگری به ویژه توابع و ویژه مقادیر پتانسیلهای حل نشده تبدیل می‌کنیم.

۳-۵-۲ مراحل روش ابرتقارن:

هامیلتونی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad (۴۹-۳)$$

که ویژه توابع را با $\psi_n^{(1)}(x)$ و ویژه مقادیر آن را با E_n نمایش می‌دهیم. برای حالت پایه داریم:

$$H\psi_0(x) = E_0\psi_0(x) \quad (۵۰-۳)$$

که در آن E_0 انرژی حالت پایه است [۲۷]. حال $V_1(x)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_1(x) = V(x) - E_0 \quad (۵۱-۳)$$

در این صورت هامیلتونی متناظر با پتانسیل $V_1(x)$ عبارت است از:

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (۵۲-۳)$$

واضح است که مقدار انرژی حالت پایه‌ی این هامیلتونی صفر است و انرژی ترازهای دیگر نسبت به انرژی H به اندازه E_0 کاهش یافته است و چون $V(x)$ و $V_1(x)$ به جز در یک مقدار ثابت با یکدیگر یکسانند، بنابراین دارای ویژه توابع یکسانی هستند. اگر ویژه مقدار انرژی متناظر با پتانسیل $V_1(x)$ ،

Variational Approach^{۲۴}
Grassmann^{۲۵}

$E_n^{(1)}$ و ویژه تابع آن $\psi_n^{(1)}$ باشد داریم:

$$E_n^{(1)} = E_n - E_0 \quad (53-3)$$

$$\psi_n^{(1)} = \psi_n \quad (54-3)$$

هامیلتونی H_1 را به صورت حاصلضرب دو عملگر می‌نویسیم:

$$H_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{d}{dx} + W(x)\right) \left(\frac{d}{dx} + W(x)\right) \quad (55-3)$$

که در آن $W(x)$ ابر پتانسیل^{۲۶} است. اگر دو عملگر A^+ و A را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (56-3)$$

$$A = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x) \quad (57-3)$$

هامیلتونی H_1 به صورت زیر بدست می‌آید:

$$H_1 = A^+ A = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1(x) \quad (58-3)$$

پس هامیلتونی H به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H = \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x)\right) \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x)\right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (59-3)$$

$$V_1(x) = W^2(x) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (60-3)$$

چون انرژی حالت پایه صفر است داریم [۲۷]:

$$A\psi_0^{(1)}(x) = \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x)\right) \psi_0^{(1)}(x) = 0 \quad (61-3)$$

از رابطه‌ی اخیر می‌توان به نتیجه زیر رسید:

$$W(x) = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \left(\frac{d \ln \psi_0^{(0)}(x)}{dx}\right) \quad (62-3)$$

^{۲۶} Superpotential

$$\psi_0^{(1)}(x) = N_0 \exp\left(-\frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \int^x W(x') dx'\right) \quad (۶۳-۳)$$

هامیلتونی دیگری را به صورت زیر می‌سازیم:

$$H_2 = AA^+ = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_2(x) \quad (۶۴-۳)$$

پس:

$$V_2(x) = W^2(x) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} W'(x) \quad (۶۵-۳)$$

پتانسیلهای $V_1(x)$ و $V_2(x)$ را پتانسیلهای همتا^{۲۷} و H_1 و H_2 را هامیلتونی‌های همتا می‌نامند [۲۷]. تا کنون اصول مربوط به ساختن هامیلتونی، ابرپتانسیل و پتانسیل‌های همراه را با استفاده از قوانین مکانیک کوانتومی ابرتقارنی بیان کردیم حال به چگونگی استفاده از این قوانین برای بدست آوردن ویژه انرژی‌های معادله شرودینگر در حضور پتانسیل‌های مختلف می‌پردازیم. برای این کار لازم است ابتدا اصول ناوردایی شکل را که اولین بار توسط گلدشتاین^{۲۸} بیان شد معرفی نماییم. اصول ناورایی شکل در سال ۱۹۳۰ توسط گلدشتاین به این صورت بیان شد که اگر بتوان پتانسیل‌های همراه را توسط نگاشت متغیرهای آن به صورتی تبدیل کرد که اختلاف آنها تنها در یک مقدار ثابت باشد، آنگاه ویژه انرژی‌های مراتب بالاتر به سادگی توسط رابطه ی زیر بدست می‌آیند [۲۷]:

$$R(a_1) = V_2(a_2, x) - V_1(a_1, x) \quad (۶۶-۳)$$

$$E_0^{(k)} = \sum_{i=0}^k R(a_i) \quad (۶۷-۳)$$

$$E_{nl} = E_{nl}^{(-)} + E_0 \quad (۶۸-۳)$$

فصل

محاسبه انرژی

(بستگی و حالات

برانگیخته)

و ضرایب پتانسیل برای

هلیوم ۳ و ۴ و تریتون

۴

۴-۱ مقدمه

یکی از دغدغه‌های اصلی برای کسانی که کار نظری انجام می‌دهند تعیین ضرایب پتانسیل است که برای محاسبه ویژگی‌های استاتیکی با استفاده از پتانسیل‌های پرکاربرد در فیزیک هسته‌ای به آنها نیاز مبرم دارند. اغلب در تمام پتانسیل‌های معرفی شده با توجه به اطلاعاتی که در مورد هسته در دست می‌باشد جملاتی را در نظر می‌گیرند تا بتوانند در حد امکان، مقادیر نزدیک به واقعیت در مورد هسته‌ها به دست آورند. در تمام این جملات، ضرایب ثابتی در نظر می‌گیرند که با توجه به هسته، این ضرایب متفاوت می‌باشد. با داشتن این ضرایب می‌توان به راحتی در تحقیقات تئوری به محاسبه‌ی ویژگی‌های استاتیکی و یا حتی دینامیکی هسته پرداخت. البته با پشتوانه‌ی کارهای آزمایشگاهی به تحقیق در مورد صحت مقادیر بدست آمده می‌پردازیم. اغلب کارهای آزمایشگاهی در مورد هسته‌ها، هزینه‌های فراوانی دارد که از عهده خیلی از کشورهای جهان بر نمی‌آید پس با تأیید ضرایب بدست آمده در آزمایشات ساده‌تر، با اطمینان بیشتر به محاسبه‌ی کمیات وابسته به هسته می‌پردازیم. در ادامه ضرایب چند پتانسیل مشهور در کارهای فیزیک هسته‌ای برای ایزوتوپ‌های طبیعی هلیوم و تریتون ارائه می‌شود. در تمام کارهای انجام شده با حل معادله‌ی شرودینگر به دو روش ابرتقارن [۱۱] و جواب پیشنهادی و با داشتن انرژی بستگی این هسته‌ها ضرایب پتانسیل‌های وودساکسون، یوکاوا و هاماداجانسون را بدست آورده‌ایم. اساس کار برای تعیین ضرایب پتانسیل بر روی ایزوتوپ‌های هلیوم بوده است. (به واسطه کاربردهای فراوانی که این دو هسته دارد) اما برای تریتون نیز به عنوان یک هسته سبک و پرکاربرد ضرایب پتانسیل را بدست آورده‌ایم.

$$\text{پتانسیل (۱)} \quad W.S + \frac{k}{x} \quad \text{یوکاوا (۳)} \quad H.J \quad \text{(۴)}$$

پتانسیل W.S به علت موفقیت آن در مدل هسته‌ای لایه ای بسیار مورد نظر فیزیکدانان نظری هسته‌ای می‌باشد. پتانسیل یوکاوا نیز به علت موفقیت آن در نظریه مزونی مورد توجه بسیاری واقع شده است. و پتانسیل H.J نیز به علت کامل بودن آن در توجیه تمام ویژگی‌های هسته‌ای مورد نظر بسیاری از فیزیکدانان می‌باشد.

۴-۲ هلیوم ۳

هلیوم از هسته‌های سبک در فیزیک هسته‌ای می‌باشد. این هسته شامل ۸ ایزوتوپ می‌باشد که از بین این ایزوتوپ‌ها هلیوم ۳ و ۴ از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشد. هلیوم ۳ و ۴ در همجوشی هسته‌ای و واکنش‌های خورشیدی بسیار مورد توجه می‌باشند و همچنین دارای کاربردهای فراوانی می‌باشند. مطالعات انجام شده در زمینه‌ی این ایزوتوپ‌ها منحصراً کارهای تجربی بوده است. و داده‌های بدست آمده از نتایج تجربی مربوط به انرژی بستگی این ایزوتوپ‌ها می‌باشد. در مدل‌های ارائه شده معمولاً به مطالعه‌ی دوترون و تریتون پرداخته شده است، اما در این کار ما به بررسی هلیوم ۳ و ۴ با استفاده از مدل لایه‌ای و انتخاب پتانسیل مناسب بین نوکلئون‌ها پرداخته‌ایم، از آنجایی که این هسته دارای بیش از دو نوکلئون می‌باشد از دستگاه مختصات ژاکوبی استفاده نموده‌ایم. [۱۱-۱۲] مختصات ژاکوبی بر اساس فاصله‌ی بین نوکلئون‌ها می‌باشد. پتانسیل‌های مرکزی مهم در فیزیک هسته‌ای پتانسیل وودساکسون، یوکاوا، گوسی و می‌باشد. این پتانسیل‌ها غالباً برای هسته‌ی سبک دوترون استفاده شده است. [۱] به طور تحلیلی معادله‌ی شرودینگر را حل کرده‌ایم. چون سیستم مورد مطالعه چند نوکلئونی است ضرایب پتانسیل را به طور عددی با استفاده از روش پدیده شناختی محاسبه نموده‌ایم. هلیوم ۳ یکی از بهترین هسته‌ها بعد از دوترون برای کارهای تئوری می‌باشد. معمولاً برای کارهای نظری از هسته‌های سبک استفاده می‌شود، چون در حل معادلات حجم کار انجام شده بسیار سبک بوده و در توجیه بسیاری از نظریات، این گونه هسته‌ها بسیار مفید می‌باشند. این هسته به عنوان یک سیستم ۳ جسمی شامل ۲ پروتون و ۱ نوترون است (تریوم و

هلیوم ۳ هسته‌های آینه‌ای می‌باشند) و اسپین و پاریته آن $1/2^+$ است. یکی از ۸ ایزوتوپ هلیوم است که طبیعی می‌باشد و جرم آن $3/016029 \text{ u}$ است [۱]. دیگر ویژگی‌های این هسته را در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

جدول (۴-۱) مشخصات فیزیکی هسته هلیوم ۳

نیمه عمر	جرم	اسپین و پاریته	تعداد نوترون	تعداد پروتون
پایدار	$3/016029 \text{ u}$	$1/2^+$	۱	۲

در ادامه به محاسبه‌ی انرژی بستگی هسته‌ی هلیوم ۳ و تعیین ضرایب پتانسیل معرفی شده می‌پردازیم.

۴-۲-۱ تعیین انرژی با پتانسیل وودساکسون برای هلیوم ۳

ما در این جا از پتانسیل وودساکسون استفاده نموده‌ایم و انرژی حالت پایه و برانگیخته را برای این سیستم سه جسمی محاسبه نموده‌ایم. از آن جا که حل معادله‌ی شرودینگر با پتانسیل وودساکسون مشکل می‌باشد از تقریب مناسبی استفاده کرده و به طور تحلیلی با روش ابرتقارن معادله‌ی شرودینگر را حل کرده‌ایم [۲۴-۲۷]. سپس برای بدست آوردن نتایج بهتر، جملات تصحیحی به پتانسیل وودساکسون اضافه نموده‌ایم. چون سیستم مورد مطالعه چند ذره‌ای است از دستگاه مختصات فوق کروی استفاده شده است [۱۱-۱۲]. (مختصات ژاکوبی بر اساس فاصله بین ذرات می‌باشد). سپس ضرایب پتانسیل را به طور عددی با استفاده از روش پدیده شناختی محاسبه نموده‌ایم، همین کار برای تریتون انجام داده شد که نتایج خوبی بدست آمد.

پتانسیل وودساکسون

برهم کنش بین ذرات را در پایین‌ترین سطح پتانسیل مرکزی در نظر می‌گیریم. پتانسیل‌های وودساکسون، یوکاوا و گوسی از جمله پتانسیل‌های مرکزی می‌باشند. اگر فرض کنیم $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ و $\vec{r}_3$ موقعیت ذرات را مشخص می‌کند، مختصات ژاکوبی و مرکز جرم را در ادامه تعریف می‌کنیم:

$$\vec{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (1-4)$$

$$\vec{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2 - 2\vec{r}_3) \quad (2-4)$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3} \quad (3-4)$$

در این صورت می‌توانیم فوق شعاع (که در آن x' ابر شعاع می‌باشد) را به صورت زیر معرفی کنیم:

$$x' = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + R^2} \quad (4-4)$$

در این صورت پتانسیل وودساکسون بر حسب فوق شعاع به شکل زیر می‌شود [۲۸-۲۹]:

$$V(x') = \frac{-V_0}{1 + e^{\left(\frac{x' - R_0}{a}\right)}} \quad (5-4)$$

R_0 ضخامت هسته و برابر فاصله‌ای است که چگالی هسته به ۹۰ درصد مقدار ماکزیمم خود می‌رسد، a ضخامت پوسته است و به فاصله‌ای گفته می‌شود که چگالی هسته از ۹۰ درصد به ۱۰ درصد مقدار مرکزی خود می‌رسد و V_0 عمق چاه پتانسیل جاذبه‌ای است. برای حل این معادله از روش ابرتقارن استفاده می‌نماییم این روش مبتنی بر استفاده از ابرپتانسیل بوده و بر این اساس می‌توانیم تابع موج حالت پایه را حساب نموده سپس با استفاده از عملگرهای بالا برنده، دیگر حالات سیستم را حساب کنیم. هم چنین با استفاده از روش ابر تقارن رابطه‌ای برای ویژه مقادیر انرژی محاسبه نموده‌ایم. پتانسیل W.S دارای سه ضریب ثابت V_0 و R_0 و a است. تلاش ما بعد از محاسبه‌ی انرژی بستگی تعیین این ضرایب است. پتانسیل معرفی شده را در قسمت شعاعی معادله‌ی شرودینگر برای سیستم‌های سه جسمی قرار می‌دهیم.

$$\left(\frac{d^2}{dx'^2} + \frac{2}{x'} \frac{d}{dx'} - \frac{L^2}{x'^2}\right) R_{nl}(x') + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + \frac{V_0}{1+e^{\left(\frac{x'-R_0}{a}\right)}}\right) R_{nl}(x') = 0 \quad (۴-)$$

۶)

برای ادامه کار نیاز به تغییر متغیر داریم:

$$U_{nl}(x') = x'^{5/2} R_{nl}(x') \quad (۴-۷)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x')}{dx'^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + \frac{V_0}{1+e^{\left(\frac{x'-R_0}{a}\right)}} - \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x'^2}\right) U_{nl}(x') = 0 \quad (۴-)$$

۸)

$$V_{eff}(x') = V_{WS}(x') + V_l(x') = \frac{-V_0}{1+e^{\left(\frac{x'-R_0}{a}\right)}} + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x'^2} \quad (۴-)$$

۹)

دو جمله‌ی بالا به عنوان پتانسیل مؤثر در معادله‌ی شرودینگر شناخته شده است. تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم.

$$x' = R_0(x+1) \quad , \quad \alpha = \frac{R_0}{a} \quad (۴-۱۰)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} - V_{eff}) U_{nl}(x) = 0 \quad (۴-۱۱)$$

از بسط تیلور حول نقطه‌ی $x=0$ ($r=R_0$) استفاده می‌کنیم:

$$V_l(x) = \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x'^2} = \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu R_0^2} \frac{1}{(1+x)^2} = \Omega(1-2x+3x^2-4x^3+\dots) \quad , \quad l \neq 0 \quad (۴-)$$

۱۲)

$$\Omega = \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu R_0^2} \quad (۴-۱۳)$$

$$V_l(x) = \Omega \left(d_0 + \frac{d_1}{1+e^{\alpha x}} + \frac{d_2}{(1+e^{\alpha x})^2} \right) \quad (۴-۱۴)$$

از تقریب پکرینس استفاده می‌کنیم [۳۰-۳۱].

$$V_1(x) = \Omega \left[\left(d_0 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} \right) - \frac{\alpha}{4} (d_1 + d_2)x + \frac{\alpha^2}{16} d_2 x^2 + \frac{\alpha^3}{48} (d_1 + d_2)x^3 - \dots \right] \quad (۴-۱۵)$$

(۱۵)

معادلات (۴-۱۲) و (۴-۱۵) را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم، پس:

$$d_0 = 1 - \frac{4}{\alpha} + \frac{12}{\alpha^2}, \quad d_1 = \frac{8}{\alpha} - \frac{48}{\alpha^2}, \quad d_2 = \frac{48}{\alpha^2} \quad (۴-۱۶)$$

بعد از اعمال تقریب پکرینس فرم پتانسیل مؤثر به صورت زیر در می‌آید:

$$V_{\text{eff}}(x) = \Omega d_0 - \frac{V_0 - \Omega d_1}{1 + e^{\alpha x}} + \frac{\Omega d_2}{(1 + e^{\alpha x})^2} \quad (۴-۱۷)$$

$$\frac{d^2 U_{\text{nl}}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{\text{nl}} - \Omega d_0 + \frac{V_0 - \Omega d_1}{1 + e^{\alpha x}} - \frac{\Omega d_2}{(1 + e^{\alpha x})^2} \right) U_{\text{nl}}(x) = 0 \quad (۴-۱۸)$$

تغییر متغیرهای (۴-۱۹) را انجام می‌دهیم:

$$\frac{2\mu(E_{\text{nl}} - \Omega d_0)}{\hbar^2} = \varepsilon, \quad \frac{2\mu(V_0 - \Omega d_1)}{\hbar^2} = \beta, \quad \frac{2\mu\Omega d_2}{\hbar^2} = \gamma \quad (۴-۱۹)$$

معادله‌ی شرودینگر به صورت معادله‌ی (۴-۲۰) در می‌آید:

$$\frac{d^2 U_{\text{nl}}(x)}{dx^2} + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{1 + e^{\alpha x}} - \frac{\gamma}{(1 + e^{\alpha x})^2} \right) U_{\text{nl}}(x) = 0 \quad (۴-۲۰)$$

از این جا به بعد برای حل معادله‌ی شرودینگر از روش ابرتقارن بهره می‌بریم که تابع موج آن با استفاده از

یک پتانسیل پشتیبان به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$U_0(x) = N \exp \left(-\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int W_1(x) dx \right) \quad (۴-۲۱)$$

فرم پتانسیل پشتیبان برای این معادله به صورت معادله‌ی (۴-۲۲) است:

$$W_1(x) = \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(\frac{B}{1 + e^{\alpha x}} + A \right) \quad (۴-۲۲)$$

۲۳-۴) می‌رسیم: (۱۸-۴) به معادله‌ی (با قرار دادن پتانسیل پشتیبان در معادله‌ی

$$A^2 + \frac{B^2}{(1+e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB}{1+e^{\alpha x}} + \frac{-\alpha B e^{\alpha x}}{(1+e^{\alpha x})^2} = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_1(x) - E_0^{(1)}) = -\varepsilon - \frac{\beta}{1+e^{\alpha x}} + \frac{\gamma}{(1+e^{\alpha x})^2} \quad (۲۳-۴)$$

با مرتب کردن معادله‌ی بالا ضرایب ثابت پتانسیل پشتیبان و انرژی حالت پایه را بدست می‌آوریم.

$$A^2 = -\varepsilon, \quad 2AB - \alpha B = -\beta, \quad B^2 + \alpha B = \gamma \quad (۲۴-۴)$$

از حل این معادلات و قرار دادن ضرایب ثابت به رابطه‌ی انرژی حالت پایه می‌رسیم [۳۲]:

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \Omega d_0 \quad (۲۵-۴ \text{ الف})$$

$$A = \frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2}, \quad B = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}}{2} \quad (۲۵-۴ \text{ ب})$$

شکل تابع موج اولیه به صورت (۲۶-۴) است:

$$U_0(x) = \frac{N}{(x+1)^{R_0}} \exp \left(\left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right) x \right) (e^{-\alpha x} + 1)^{\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}}{-2\alpha}} \quad (۲۶-۴)$$

با استفاده از رابطه‌ی $V_{\pm}(x) = W^2 \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW}{dx}$ می‌توان روابط زیر را بدست آورد:

$$V_+(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(A^2 + \frac{B^2 - \alpha B}{(1+e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB + \alpha B}{1+e^{\alpha x}} \right) \quad (۲۷-۴)$$

$$V_-(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(A^2 + \frac{B^2 + \alpha B}{(1+e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB - \alpha B}{1+e^{\alpha x}} \right) \quad (۲۸-۴)$$

با وجود $V_+(x)$ و $V_-(x)$ می‌توان انرژی حالات برانگیخته را با استفاده از رابطه‌ی (۳۱-۴) بدست آورد:

$$V_+(a_0, x) = V_-(a_1, x) + R(a_1) \quad (۲۹-۴)$$

$$E_0^{(k)} = \sum_{i=0}^k R(a_i) \quad (۳۰-۴)$$

$$E_{nl} = E_{nl}^{(-)} + E_0 \quad (31-4)$$

نباشد به رابطه انرژی حالات x تابع متغیر $V_-(x)$, $V_+(x)$ با انتخاب یک نگاشت مناسب طوری که تفاضل برانگیخته خواهیم رسید.

$$B \rightarrow B' = B - \alpha \quad (32-4)$$

$$B_1 = B_0 - \alpha \quad , \quad B_n = B_0 - n\alpha \quad (33-4)$$

$$R(a_1) = V_+(B, x) - V_-(B - \alpha, x) = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - \alpha)} - \frac{B - \alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - \beta}{2B} - \frac{B}{2} \right)^2 \right] \quad (34-4)$$

$$R(a_i) = V_+(B - (i - 1)\alpha, x) - V_-(B - i\alpha, x) = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - i\alpha)} - \frac{B - i\alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - (i - 1)\alpha)} - \frac{B - (i - 1)\alpha}{2} \right)^2 \right] \quad (35-4)$$

$$H^{(k)}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x, a_k) + \sum_{i=0}^k R(a_i) \quad (36-4)$$

رابطه‌ی (۳۷-۴) انرژی تمام حالات مربوط به یک سیستم سه جسمی را نشان می‌دهد (البته با توجه به پتانسیل معرفی شده). از این رابطه برای محاسبه‌ی انرژی تمام حالات برانگیخته‌ی سیستم‌های سه جسمی می‌توان استفاده کرد [۳۲]. مثل هلیوم ۳ و تریتون.

$$E_{nl} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - n\alpha)} - \frac{B - n\alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - \beta}{2B} - \frac{B}{2} \right)^2 + \left(\frac{-\beta}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] + \Omega d_0 \quad (37-4)$$

با توجه به رابطه‌ی (۳۷-۴) انرژی بستگی و ضرایب پتانسیل وودساکسون را برای هلیوم ۳ بدست آورده که در جدول (۲-۴) آنها را می‌بینید.

برای بدست آوردن ضرایب پتانسیل نیاز به داشتن انرژی بستگی هسته‌ی مورد نظر هستیم تا بتوانیم با مقایسه‌ی آنها با رابطه‌ی بدست آمده هم میزان انرژی را بدست آورده و هم مقادیر ضرایب پتانسیل را بدست آوریم. البته پس از تعیین مقادیر انرژی، نیاز به مقایسه‌ی مقادیر بدست آمده و مقادیر تجربی داریم، تا جدول تنظیم شده قابلیت استفاده برای کارهای نظری را داشته باشد. برای تعیین ضرایب از یک برنامه‌ی کامپیوتری استفاده شده است که در آن اساس انتخاب بر انرژی بستگی هسته‌ی مورد نظر می‌باشد. با توجه به انرژی بستگی، مقادیری برای ضرایب پیدا می‌کنیم که بهترین سازگاری را با مقدار تجربی انرژی داشته باشد.

جدول (۲-۴) ضرایب پتانسیل وودساکسون همراه با انرژی بستگی هلیوم ۳

$V_0(\text{MeV})$	$R_0(\text{fm})$	$a(\text{fm})$	$E(\text{MeV})$
23	0/9	0/03	-8/072764
25	0/9	0/03	-7/483786
33	0/8	0/01	-7/537929
36	0/9	0/02	-7/355711
40	0/8	0/01	-7/762954

با توجه به جدول (۲-۴) می‌توان نتیجه گرفت: $40 < V_0 (\text{MeV}) \leq 20$ و $0/9 < R_0 (\text{fm}) \leq 0/8$ و $0/09 < a (\text{fm}) \leq 0/08$ و بهترین این متغیرها با توجه به انرژی بستگی هلیوم ۳ در آزمایشات به صورت: $a = 0/01 (\text{fm})$ ، $R_0 = 0/8 (\text{fm})$ ، $V_0 = 40 (\text{MeV})$ می‌باشد. پس پتانسیل وودساکسون برای هلیوم ۳ به صورت رابطه‌ی (۳۸-۴) در می‌آید:

$$V(x) = \frac{-40}{1 + e^{\left(\frac{x' - 0/8}{0/01}\right)}} \quad (38-4)$$

با ثابت گرفتن مقادیر R_0 و V_0 در بهترین شرایط مربوط به انرژی حالت پایه، برای بقیه ترازهای ^3He (حالات برانگیخته) انرژی را بدست می‌آوریم که در جدول (۳-۴) نتیجه را می‌بینید. فقط برای یک تراز مقدار قابل قبولی بدست آمد و برای دیگر ترازها مقادیر قابل قبولی بدست نیامد.

جدول (۳-۴) انرژی حالت پایه و برانگیخته برای هلیوم ۳ با پتانسیل وودساکسون

n	l	E (MeV)
0	0	-7/762954
1	0	-4/670079

۲-۲-۴ اثرات جمله $\frac{1}{x}$ در جابجایی انرژی هلیوم ۳

می‌خواهیم تأثیر جمله تصحیحی را بر انرژی بستگی هلیوم ۳ بدانیم. علاوه بر پتانسیل وودساکسون جمله جدیدی نیز در نظر گرفته می‌شود که مد نظر ما تعیین ضریب ثابت مربوط به آن می‌باشد. هلیوم ۳ دارای ۲ پروتون و ۱ نوترون است پس می‌توان جمله $\frac{k}{x}$ را به عنوان یک جمله تصحیحی برای آن در نظر گرفت و تأثیر این جمله را بر انرژی حالت پایه مشاهده کرد. مطمئناً مقدار انرژی حالت پایه با در نظر گرفتن این جمله بهبود خواهد یافت و به مقدار آزمایشگاهی آن نزدیک‌تر می‌شود. البته این جمله به عنوان جمله اختلالی در محاسبه انرژی وارد می‌شود، این جمله جدید فقط باعث کمی تغییرات در شکل ضرایب می‌شود، به همین جهت از توضیحات اضافی اجتناب می‌کنیم.

$$V(x') = \frac{-V_0}{1+e^{\frac{(x'-R_0)}{a}}} + \frac{k}{x'} \quad (-4)$$

(۳۹)

با قرار دادن جمله جدید در معادله‌ی شرودینگر اقدام به حل آن می‌نماییم.

$$\left(\frac{d^2}{dx'^2} + \frac{2}{x'} \frac{d}{dx'} - \frac{L^2}{x'^2}\right) R_{nl}(x') + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + \frac{V_0}{1+e^{\left(\frac{x'-R_0}{a}\right)}}\right) R_{nl}(x') = 0 \quad (40-4)$$

نیاز به تغییر متغیر روبرو داریم:

$$\frac{d^2 U_{nl}(x')}{dx'^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + \frac{V_0}{1+e^{\left(\frac{x'-R_0}{a}\right)}} - \frac{k}{x'} - \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x'^2}\right) U_{nl}(x') = 0 \quad (-4)$$

۴۱)

در جمله‌ی پتانسیل مؤثر جمله‌ی جدیدی داریم که تأثیر آن را در محاسبه‌ی انرژی مشاهده خواهیم کرد.

$$V_{\text{eff}}(x') = V(x') + \frac{k}{x'} + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x'^2} \quad l \neq 0 \quad (-4)$$

۴۲)

$$V_{\text{eff}}(x') = V_{WS}(x') + V_l(x') = \frac{-V_0}{1+e^{\left(\frac{x'-R_0}{a}\right)}} + \frac{k}{x'} + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x'^2} \quad (43-4)$$

سه جمله‌ی موجود در رابطه‌ی (۴۴-۴) به عنوان پتانسیل مؤثر در معادله‌ی شرودینگر شناخته شده و برای آن تغییر متغیرهای (۴۴-۴) را انجام می‌دهیم:

$$x' = R_0(x+1) , \quad \alpha = \frac{R_0}{a} \quad (44-4)$$

بعد از تغییر متغیرهای مناسب جمله‌ی پتانسیل مؤثر به صورت رابطه‌ی (۴۵-۴) در می‌آید:

$$V_{\text{eff}}(x') = V_{WS}(x') + V_l(x') = \frac{-V_0}{1+e^{(\alpha x)}} + \frac{k}{R_0(1+x)} + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu R_0^2(1+x)^2} \quad (-4)$$

۴۵)

$$k' = \frac{k}{R_0} , \quad \Omega = \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu R_0^2} \quad (46-4)$$

$$V_{\text{eff}}(x') = V_{WS}(x') + V_l(x') = \frac{-V_0}{1+e^{(\alpha x)}} + k'(1+x)^{-1} + \Omega(1+x)^{-2} \quad (47-4)$$

از بسط تیلور حول نقطه $x = 0$ ($r = R_0$) استفاده می‌کنیم.

$$V_l(x) = \Omega(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots) + k'(1 - x + x^2 - \dots) \quad (48-4)$$

فقط سه جمله‌ی اول بسط را نگه می‌داریم.

$$V_l(x) = (\Omega + k') - (k' + 2\Omega)x + (k' + 3\Omega)x^2 - \dots \quad (49-4)$$

از تقریب پکرینس استفاده می‌کنیم.

$$(\Delta 0-4) V_{eff}(x) = \frac{-V_0}{1+e(ax)} + d_0 + \frac{d_1}{1+e^{\alpha x}} + \frac{d_2}{(1+e^{\alpha x})^2}$$

$$V_{eff}(x) = \frac{-V_0}{1+e(ax)} + \left[\left(d_0 + \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{4} \right) - \frac{\alpha}{4} (d_1 + d_2)x + \frac{\alpha^2}{16} d_2 x^2 + \dots \right] \quad (51-4)$$

می‌توان سه ضریب ثابت در نظر گرفته شده را بدست آورد.

$$\begin{cases} d_0 = -\Omega - k' + \frac{2}{\alpha} (k' + 2\Omega) - \frac{4}{\alpha^2} (k' + 3\Omega) \\ d_1 = \frac{-4}{\alpha} (k' + 2\Omega) + \frac{16}{\alpha^2} (k' + 3\Omega) \\ d_2 = \frac{-16}{\alpha^2} (k' + 3\Omega) \end{cases} \quad (52-4)$$

جمله‌ی پتانسیل مؤثر را به صورت جدیدی خواهیم داشت.

$$V_{eff}(x) = d_0 + \frac{V_0+d_1}{1+e^{\alpha x}} + \frac{d_2}{(1+e^{\alpha x})^2} \quad (53-4)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + d_0 + \frac{V_0+d_1}{1+e^{\alpha x}} + \frac{d_2}{(1+e^{\alpha x})^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (54-4)$$

$$\begin{cases} \frac{2\mu(E_{nl}+d_0)}{\hbar^2} = \varepsilon \\ \frac{2\mu(V_0+d_1)}{\hbar^2} = \beta \\ \frac{2\mu d_2}{\hbar^2} = \gamma \end{cases} \quad (55-4)$$

با جاگذاری این ضرایب ثابت در معادله‌ی شرودینگر به رابطه‌ی (56-4) می‌رسیم:

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \left(\varepsilon + \frac{\beta}{1+e^{\alpha x}} - \frac{\gamma}{(1+e^{\alpha x})^2} \right) U_{nl}(r) = 0 \quad (56-4)$$

برای بدست آوردن تابع موج اولیه، باید تابع پتانسیل پشتیبان را حدس زده، که در رابطه (۵۷-۴) صدق کند.

$$U_0(x) = N \exp\left(-\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int W_1(x) dx\right) \quad (۵۷-۴)$$

بهترین شکل آن شامل جمله‌ی نمایی و ضریب ثابت می‌باشد.

$$W_1(x) = \frac{-\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(\frac{B}{1+e^{\alpha x}} + A \right) \quad (۵۸-۴)$$

با قرار دادن پتانسیل پشتیبان در معادله‌ی (۵۷-۴) به معادله‌ی (۵۹-۴) می‌رسیم:

$$A^2 + \frac{B^2}{(1+e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB}{1+e^{\alpha x}} + \frac{-\alpha B e^{\alpha x}}{(1+e^{\alpha x})^2} = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_1(x) - E_0^{(1)}) = -\varepsilon - \frac{\beta}{1+e^{\alpha x}} + \frac{\gamma}{(1+e^{\alpha x})^2} \quad (-۴)$$

۵۹)

با مساوی قرار دادن دو طرف معادله‌ی (۵۹-۴) می‌توان ضرایب ثابت را بدست آورد.

$$A^2 = -\varepsilon, \quad 2AB - \alpha B = -\beta, \quad B^2 + \alpha B = \gamma \quad (۶۰-۴)$$

با حل معادلات (۶۰-۴) انرژی حالت پایه را می‌توان بدست آورد.

$$\begin{cases} E_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \Omega d_0 \\ A = \frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \\ B = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}}{2} \end{cases} \quad (۶۱-۴)$$

بعد از تعیین ضرایب ثابت در پتانسیل پشتیبان با توجه به رابطه (۶۰-۴) تابع موج اولیه را می‌توان نوشت:

$$U_0(x) = \frac{N}{(x+1)R_0} \exp\left(\left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2}\right)x\right) (e^{-\alpha x} + 1)^{\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}}{-2\alpha}} \quad (۶۲-۴)$$

برای ادامه‌ی کار، یعنی تعیین انرژی حالات برانگیخته: ابتدا V_+ و V_- را بدست می‌آوریم.

$$V_+(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(A^2 + \frac{B^2 - \alpha B}{(1+e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB + \alpha B}{1+e^{\alpha x}} \right) \quad (۶۳-۴)$$

$$V_-(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(A^2 + \frac{B^2 + \alpha B}{(1+e^{\alpha x})^2} + \frac{2AB - \alpha B}{1+e^{\alpha x}} \right) \quad (۶۴-۴)$$

$$V_+(a_0, x) = V_-(a_1, x) + R(a_1) \quad (۶۵-۴)$$

$$E_0^{(k)} = \sum_{i=0}^k R(a_i) \quad (۶۶-۴)$$

$$E_{nl} = E_{nl}^{(-)} + E_0 \quad (۶۷-۴)$$

دنبال نگاشت مناسبی هستیم تا معادله‌ی مورد نظر به متغیر x وابسته نباشد.

$$B \rightarrow B' = B - \alpha \quad (۶۸-۴)$$

$$B_1 = B_0 - \alpha, \quad B_n = B_0 - n\alpha \quad (-۴$$

۶۹)

$$R(a_1) = V_+(B, x) - V_-(B - \alpha, x) = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - \alpha)} - \frac{B - \alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - \beta}{2B} - \frac{B}{2} \right)^2 \right] \quad (۷۰-۴)$$

$$R(a_i) = V_+(B - (i - 1)\alpha, x) - V_-(B - i\alpha, x) = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - i\alpha)} - \frac{B - i\alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - (i - 1)\alpha)} - \frac{B - (i - 1)\alpha}{2} \right)^2 \right] \quad (۷۱-۴)$$

$$H^{(k)}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_-(x, a_k) + \sum_{i=0}^k R(a_i) \quad (۷۲-۴)$$

رابطه‌ی انرژی را برای هلیوم ۳ با در نظر گرفتن جمله‌ی تصحیحی به صورت (۷۳-۴) خواهیم داشت:

$$E_{nl} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - n\alpha)} - \frac{B - n\alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - \beta}{2B} - \frac{B}{2} \right)^2 + \left(\frac{-\beta}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] + \Omega d_0 \quad (۷۳-۴)$$

البته تأثیر ضریب k در محاسبه‌ی انرژی مستتر است. بعد از معادله (۴-۵۲) روال کار شبیه حل معادله‌ی شرودینگر با پتانسیل وودساکسون می‌باشد. در این حالت چون جمله‌ی $\frac{k}{x}$ به عنوان یک جمله‌ی اختلالی در محاسبه‌ی انرژی بستگی وارد می‌شود پس با ثابت گرفتن مقادیر R_0 , V_0 و a در بهترین شرایط به محاسبه‌ی مقدار ضریب K می‌پردازیم. به ازای $K=1/165 \text{ (MeV.fm)}$ مقدار بهتری برای انرژی بستگی ${}^3\text{He}$ بدست آمد. (در مقایسه با حالتی که فقط پتانسیل W.S داشتیم) و این نتیجه‌ی وارد کردن جمله‌ی تصحیحی $\frac{k}{x}$ می‌باشد. مقدار K برای ${}^3\text{He}$ بین $0/4 \text{ (MeV.fm)}$ تا $1/2 \text{ (MeV.fm)}$ متغیر می‌باشد. پس پتانسیل تصحیحی به صورت رابطه‌ی (۴-۷۴) خواهد شد:

$$V(x') = \frac{-40}{1+e^{\left(\frac{x'-0/8}{0/01}\right)}} + \frac{1/165}{x'}$$

(۴-۷۴)

جدول (۴-۴) انرژی حالت پایه برای هلیوم ۳ با پتانسیل وودساکسون و جمله تصحیحی

$K(\text{MeV.fm})$	$E(\text{MeV})$
0/435	-8/033653
0/445	-7/537209
0/45	-7/295710
1/165	-7/906816

با ثابت گرفتن مقادیر کمیات K و R_0 و V_0 و a به محاسبه‌ی انرژی حالات برانگیخته ${}^3\text{He}$ می‌پردازیم که در مقایسه با حالت قبل (پتانسیل W.S به تنهایی) مقادیر انرژی را برای دو پتانسیل به صورت همزمان در جدول (۴-۵) مشاهده می‌کنید و می‌توان به مقایسه‌ی تأثیر جمله‌ی تصحیحی بر روی انرژی هلیوم ۳ پرداخت.

جدول (۴-۵) انرژی حالت پایه و برانگیخته برای هلیوم ۳ با پتانسیل وودساکسون و وودساکسون به اضافه جمله تصحیحی

n	l	$E \text{ (MeV)}$	$E \text{ (MeV)}$
-----	-----	-------------------	-------------------

		$W.S + \frac{k}{x}$	W.S
0	0	-7/720165	-7/762954
1	0	-4/678974	-4/470079

۳-۲-۳ تعیین انرژی با پتانسیل یوکاوا برای هلیوم ۳

برای محاسبه‌ی انرژی بستگی هلیوم ۳ از پتانسیل مشهور دیگری استفاده کردیم تا بتوان مقایسه‌ی مناسبی برای بدست آوردن ویژگی‌های استاتیکی داشته باشیم. در پتانسیل W.S نتایج نسبتاً خوبی بدست آوردیم، به همین جهت انتخاب بعدی ما نیز پتانسیلی می‌باشد که شامل جمله مرکزی است. برای حل معادله‌ی شرودینگر با این پتانسیل به روش ابرتقارن متوسل می‌شویم، با این روش انرژی بستگی و انرژی حالات برانگیخته‌ی هلیوم ۳ را حساب می‌کنیم [1].

$$V_{yukawa}(x) = \frac{V_0}{x} e^{-\alpha x} \quad (۷۵-۴)$$

این پتانسیل را در معادله‌ی شرودینگر جاگذاری کرده و به حل آن می‌پردازیم.

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} - \frac{L^2}{x^2}\right) R_{nl}(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} - \frac{V_0}{x} e^{-\alpha x}\right) R_{nl}(x) = 0 \quad (۷۶-۴)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} - \frac{V_0}{x} e^{-\alpha x} - \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x^2}\right) U_{nl}(x) = 0 \quad (۷۷-۴)$$

$$V_{eff}(x) = V_{yukawa}(x) + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x^2} \quad (۷۸-۴)$$

در این جا تأثیر همزمان دو جمله را برای پتانسیل می‌بینیم. به ازای: $l \neq 0$

$$V_{eff}(x) = V_{yukawa}(x) + V_l(x) = \frac{V_0}{x} e^{-\alpha x} + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x^2} \quad (۷۹-۴)$$

جمله‌ی نمایی را بسط داده و فقط دو جمله‌ی اول بسط را نگه می‌داریم.

$$V_{eff}(x) = V_{yukawa}(x) + V_l(x) = \frac{V_0}{x} (1 - \alpha x) + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x^2} \quad (۸۰-۴)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} - \frac{V_0}{x} (1 - \alpha x) - \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (-۴)$$

۸۱)

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} + V_0 \alpha) - \frac{2\mu V_0}{\hbar^2 x} - \frac{(2l+3)(2l+5)}{4x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (-۴)$$

۸۲)

برای آنکه شکل رابطه ساده تر شود تغییر متغیرهای لازم را انجام می دهیم.

$$\gamma = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} + V_0 \alpha) , \quad \theta = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2} , \quad \sigma = \frac{(2l+3)(2l+5)}{4} \quad (-۴)$$

۸۳)

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \left(\gamma - \frac{\theta}{x} - \frac{\sigma}{x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (۸۴-۴)$$

با استفاده از روش ابرتقارن به حل معادله ی شرودینگر می پردازیم [32].

$$U_0(x) = N \exp \left(-\frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int W_1(x) dx \right) \quad (۸۵-۴)$$

نیاز به یک پتانسیل پشتیبان داریم که به صورت (۸۶-۴) تعریف می شود:

$$W_1(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \left(\frac{B}{x} + A \right) \quad (۸۶-۴)$$

با توجه به پتانسیل پشتیبان معرفی شده و معادله (۸۰-۴) به رابطه ی (۸۷-۴) می رسیم:

$$\frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(A + \frac{B}{x} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-B}{x^2} \right) = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\gamma - \frac{\theta}{x} - \frac{\sigma}{x^2} \right) \quad (۸۷-۴)$$

$$A^2 + \frac{B^2+B}{x^2} + \frac{2AB}{x} = -\gamma + \frac{\sigma}{x^2} + \frac{\theta}{x} \quad (۸۸-۴)$$

$$A^2 = -\gamma , \quad B^2 + B = \sigma , \quad 2AB = \theta \quad (۸۹-۴)$$

با حل معادلات (۴-۸۹)، رابطه‌ی انرژی حالت پایه و شکل تابع موج اولیه را به دست می‌آوریم.

$$A = \frac{\theta}{-1 \pm \sqrt{1+4\sigma}} \quad , \quad B = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\sigma}}{2} \quad -۴$$

(۹۰الف)

$$E_0 = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\theta}{-1 \pm \sqrt{1+4\sigma}} \right)^2 - V_0 \alpha \quad -۴$$

(۹۰ب)

$$U_0(x) = N e^{-Ax} x^{-B} \quad (۴-۹۱)$$

متأسفانه نگاشت مناسبی برای تعیین رابطه‌ی انرژی حالات دیگر مربوط به هلیوم ۳ با پتانسیل یوکاوا بدست نیامد. فقط چون انرژی حالت پایه برحسب l نوشته شده است پس به ازای l های دیگر می‌توان انرژی را بدست آورد.

$$-۴) V_-(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(A^2 + \frac{B^2 - B}{x^2} + \frac{2AB}{x} \right) \quad (۹۲)$$

$$V_-(x) = \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(A^2 + \frac{B^2 + B}{x^2} + \frac{2AB}{x} \right) \quad (۴-۹۳)$$

با توجه به مقدار انرژی بستگی بدست آمده از طریق آزمایشات به محاسبه‌ی ضرایب پتانسیل یوکاوا پرداختیم. برای $20 \leq V_0 (\text{MeV} \cdot \text{fm}) \leq 40$ و $40 \leq \alpha \left(\frac{1}{\text{fm}} \right) \leq 80$ که در این حالت بهترین مقدار انرژی که همخوانی بهتری را با تجربه دارد $E = -7/754 \text{ MeV}$ می‌باشد. و بهترین مقدار ضرایب ثابت:

$V_0 = 32 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$, $\alpha = 50 \frac{1}{\text{fm}}$ می‌باشد، پس شکل پتانسیل یوکاوا به صورت (۴-۹۴) خواهد شد:

$$V_{yukawa}(x) = \frac{32}{x} e^{-50x} \quad (۴-۹۴)$$

نتیجه‌ی تأثیر پتانسیل یوکاوا را بر روی انرژی بستگی هلیوم ۳ در جدول (۴-۶) به طور کامل مشاهده خواهید کرد.

جدول (۴-۶) ضرایب پتانسیل یوکاوا همراه با انرژی بستگی هلیوم ۳

$V_0(\text{MeV} \cdot fm)$	$\alpha\left(\frac{1}{fm}\right)$	E (MeV)
۲۰	۸۰	-۷/۷۵۳۸۶۷
۲۶	۶۰	-۷/۵۶۰۰۳۶
۵/۳۰	۵۰	-۷/۳۹۰۴۳۵
۳۲	۵۰	-۷/۷۵۳۹۰۱
۵/۳۹	۴۰	-۷/۶۵۷۰۰۸

به ازای بهترین مقادیر α و V_0 که با استفاده از آن انرژی حالت پایه را بدست آوردیم به محاسبه انرژی حالات برانگیخته‌ی هلیوم ۳ پرداختیم اما نتایجی که از این محاسبات گرفته می‌شود: انرژی برای ترازهای بالاتر در حد یک الکترون ولت با حالت پایه متفاوت است که این مقادیر قابل قبول نیست.

۴-۲-۴ تعیین انرژی با پتانسیل هاماداجانسون برای هلیوم ۳

یکی دیگر از پتانسیل‌هایی که برای محاسبه انرژی بستگی هلیوم ۳ از آن استفاده کردیم هاماداجانسون می‌باشد که فقط از جمله مرکزی آن استفاده شده است و می‌توان از بقیه‌ی جملات به صورت اختلالی برای محاسبه انرژی بستگی استفاده نمود [۳]. برای حل معادله‌ی شرودینگر با این پتانسیل از روش جواب پیشنهادی استفاده شده است که انرژی حالت پایه و بقیه‌ی ترازهای آن بدست آورده شده است.

$$V_{H,j}(x) = V_c = k_c \frac{e^{-x}}{x} \left(1 + a_c \frac{e^{-x}}{x} + b_c \frac{e^{-2x}}{x^2} \right), b_c = 0 \quad (۴-)$$

۹۵)

$$V_{H,j}(x) = k_c \frac{e^{-x}}{x} + k_c \cdot a_c \frac{e^{-2x}}{x^2} \quad (۹۶-۴)$$

با بسط تابع نمایی، پتانسیل هاماداجانسون به صورت رابطه (۹۷-۴) میشود:

$$V_{H,j}(x) = k_c \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \frac{1}{x} + k_c \cdot a_c \left(1 - 2x + \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{6}\right) \frac{1}{x^2} \quad (-۴)$$

۹۷)

$$V_{H,j}(x) = (2k_c \cdot a_c - a_c) + \left(\frac{1}{2}k_c - \frac{4}{3}k_c \cdot a_c\right)x - \frac{1}{6}k_c x^2 + (k_c - 2k_c \cdot a_c) \frac{1}{x} + \frac{k_c \cdot a_c}{x^2} \quad (۹۸-۴)$$

تغییر متغیرهای لازم را انجام می دهیم.

$$a = 2k_c \cdot a_c - a_c, \quad b = \frac{1}{2}k_c - \frac{4}{3}k_c \cdot a_c, \quad c = \frac{1}{6}k_c, \quad d = k_c \cdot a_c \quad (۹۹-۴)$$

$$V_{H,j}(x) = a + bx - cx^2 - \frac{a}{x} + \frac{d}{x^2} \quad (۱۰۰-۴)$$

پتانسیل هاماداجانسون را در معادله‌ی شرودینگر برای سیستم سه جسمی جاگذاری می کنیم.

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx} - \frac{L^2}{x^2}\right) R_{nl}(x) + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} - V_{H,j}(x)) R_{nl}(x) = 0 \quad (-۴)$$

۱۰۱)

$$U_{nl}(x) = x^{5/2} R_{nl}(x) \quad (۱۰۲-۴)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} - V_{H,j}(x) - \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x^2}\right) U_{nl}(x) = 0 \quad \text{و } l \neq 0 \quad (۱۰۳-۴)$$

پس پتانسیل مؤثر شامل دو جمله‌ی وابسته‌ی به l و پتانسیل هاماداجانسون می باشد.

$$V_{eff}(x) = V_{H,j}(x) + V_l(x) = a + bx - cx^2 - \frac{a}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x^2} \quad (-۴)$$

۱۰۵)

پتانسیل مؤثر را در معادله‌ی شرودینگر قرار می‌دهیم.

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} - a - bx + cx^2 + \frac{a}{x} - \frac{d}{x^2} - \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (۱۰۶-۴)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left((E_{nl} - a) - bx + cx^2 + \frac{a}{x} - \frac{d + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu}}{x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (107-$$

4)

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} - a) - \frac{2\mu b}{\hbar^2} x + \frac{2\mu c}{\hbar^2} x^2 + \frac{2\mu a}{\hbar^2} \frac{1}{x} - \frac{2\mu \left(d + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu} \right)}{\hbar^2 x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (-۴$$

۱۰۸)

برای آنکه فرم معادله ساده‌تر شود، از تغییر متغیرهای مناسب (۱۰۹-۴) استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} \beta = \frac{2\mu b}{\hbar^2}, \alpha = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} - a), \gamma = \frac{2\mu c}{\hbar^2} \\ \sigma = \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(d + \frac{\hbar^2(2l+3)(2l+5)}{8\mu} \right), \theta = \frac{2\mu a}{\hbar^2} \end{cases} \quad (-۴$$

۱۰۹)

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \left(\alpha - \beta x + \gamma x^2 + \frac{\theta}{x} - \frac{\sigma}{x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (-۴$$

۱۱۰)

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} = \left(-\alpha + \beta x - \gamma x^2 - \frac{\theta}{x} + \frac{\sigma}{x^2} \right) U_{nl}(x) \quad (۱۱۱-۴)$$

برای حل این معادله از روش جواب پیشنهادی بهره می‌بریم. تابع موج به صورت حاصل ضرب دو تابع

تعریف می‌شود.

$$U(x) = h(x) \exp(y(x)) \quad (۱۱۲-۴)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} = (y'' + y'^2 + \frac{h'' + 2h'y'}{h}) U_{nl}(x) \quad (۱۱۳-۴)$$

$$y'' + y'^2 + \frac{h'' + 2h'y'}{h} = -\alpha + \beta x - \gamma x^2 - \frac{\theta}{x} + \frac{\sigma}{x^2} \quad (114-4)$$

با مقایسه دو رابطه‌ی (111-4) و (113-4) دو تابع $h(x)$ و $y(x)$ را تعریف می‌کنیم.

$$h(x) = 1 \quad (115-4)$$

$$y(x) = -\frac{1}{2}\lambda x^2 + \xi x + \delta \ln x, \quad y'(x) = -\lambda x + \xi + \frac{\delta}{x}, \quad y''(x) = -\lambda - \frac{\delta}{x^2} \quad (116-4)$$

روابط (115-4) و (116-4) را در (114-4) جاگذاری می‌کنیم.

$$-\lambda - \frac{\delta}{x^2} + \left(-\lambda x + \xi + \frac{\delta}{x}\right)^2 = -\alpha + \beta x - \gamma x^2 - \frac{\theta}{x} + \frac{\sigma}{x^2} \quad (117-4)$$

$$(-\lambda - 2\lambda\delta + \xi^2) - 2\xi\lambda x + \lambda^2 x^2 + \frac{2\xi\delta}{x} + \frac{\delta^2 - \delta}{x^2} = -\alpha + \beta x - \gamma x^2 - \frac{\theta}{x} + \frac{\sigma}{x^2} \quad (-4$$

118)

با مقایسه‌ی دو طرف معادله‌ی (118-4) به معادلات (119-4) می‌رسیم.

$$\begin{cases} -\lambda - 2\lambda\delta + \xi^2 = -\alpha \\ -2\xi\lambda = \beta \\ \lambda^2 = -\gamma \\ 2\delta\xi = -\theta \\ \delta^2 - \delta = \sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \sqrt{-\gamma} \\ \xi = \frac{-\theta}{2\delta} = \frac{-\theta}{1 \pm \sqrt{1+4\sigma}} \\ \delta^2 - \delta - \sigma = 0 \Rightarrow \delta = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\sigma}}{2} \end{cases} \quad (119-4)$$

با در نظر گرفتن دو تا از معادلات بالا به دنبال مجهولات می‌گردیم.

$$-2\xi\lambda = \beta \Rightarrow \lambda = \frac{\beta}{-2\xi} = \beta \left(\frac{1 \pm \sqrt{1+4\sigma}}{2\theta} \right) \quad (120-4)$$

می‌رسیم. $k_c < 0$ به نتیجه $\lambda = \sqrt{-\gamma}$ از شرط

$$-\lambda(1 + 2\sigma) + \xi^2 = -\alpha \Rightarrow -\beta \left(\frac{1 \pm \sqrt{1+4\sigma}}{2\theta} \right) (1 + 1 \pm \sqrt{1+4\sigma}) + \left(\frac{\theta}{1 \pm \sqrt{1+4\sigma}} \right)^2 - \frac{2\mu}{h^2} (E - a) \quad (121-4)$$

از رابطه (121-4) به انرژی می‌رسیم.

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{-\beta(1+\sqrt{1+4\sigma})}{2\theta} (2 + \sqrt{1+4\sigma}) + \left(\frac{\theta}{1+\sqrt{1+4\sigma}} \right)^2 \right\} + a = E \quad (122-4)$$

پس: $\sigma_1 = \sqrt{1+4\sigma}$

$$E = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{-\beta(1+\sigma_1)}{2\theta} (2 + \sigma_1) + \left(\frac{\theta}{1+\sigma_1} \right)^2 \right\} + a \quad (123-4)$$

با استفاده از رابطه‌ی بالا و با توجه به مقدار انرژی بستگی بدست آمده از طریق آزمایشات به محاسبه‌ی ضرایب پتانسیل هاماداجانسون پرداختیم. $3/4 < a_c(fm) < 6/8$ و $-0/4 < K_c(MeV.fm) < -0/9$ که در این حالت بهترین مقدار انرژی که نزدیکتر به تجربه است: $E = -7/790 MeV$ می‌باشد. و بهترین مقدار ضرایب ثابت: $k_c = -0/5 MeV.fm$ $a_c = 5/6 fm$ می‌باشد، پس شکل پتانسیل هاماداجانسون به صورت (124-4) است [3]:

$$V_{H,j}(x) = -0/5 \frac{e^{-x}}{x} - \quad (124-4)$$

$$2/8 \frac{e^{-2x}}{x^2}$$

جدول (4-7) ضرایب پتانسیل هاماداجانسون همراه با انرژی بستگی هلیوم ۳

$k_c (MeV.fm)$	$a_c (fm)$	$E (MeV)$
-۴/۰	۸/۶	-۶۶۷۸۶۱/۷
-۵/۰	۶/۵	۷۹۰۰۴۶/۷
-۶/۰	۸/۴	-۹۱۲۹۴۲/۷
-۸/۰	۶/۳	-۵۰۳۶۷۴/۷
-۹/۰	۴/۳	-۰۳۵۵۵۷/۸

به ازای بهترین مقادیر a_c و k_c که با استفاده از آن انرژی حالت پایه را بدست آوردیم، به محاسبه‌ی انرژی حالات برانگیخته هلیوم ۳ پرداختیم. اما مقادیر انرژی برای ترازهای بالاتر برای هلیوم ۳ با

پتانسیل‌های هامادا جانسون و یوکاوا قابل استناد نمی‌باشد. در آخر مقایسه ای بین مقادیر انرژی حالت پایه در پتانسیل‌های معرفی شده و کارهای دیگران انجام دادیم که در جدول (۴-۸) آنها را مشاهده می‌کنید. (همه مقادیر انرژی منفی هستند).

جدول (۴-۸) انرژی بستگی هلیوم ۳ در کارهای متفاوت [۳۳]

	AV18	N3LO-Idaho	AV18+URIX	N3LO-Idaho+N2LOL	EXP	W.S	$W.S + \frac{k}{x}$	Yukawa	H.J
E (MeV)	۹۲۵/۶	۹۱۷/۶	۷۵۰/۷	۷۴۲/۷	۷۱۸/۷	۷۶۲/۷	۷۲۰/۷	۷۵۳/۷	۷۹۰/۷

۴-۳ تریتون

اساس کار پایان نامه بر روی ایزوتوپ‌های طبیعی هلیوم می‌باشد ولیکن تریتون به عنوان سیستمی سه جسمی می‌تواند محک خوبی برای درستی کارهای انجام شده باشد. تریتون یکی از بهترین هسته‌ها بعد از دوترون برای کارهای تئوری می‌باشد. این هسته به عنوان یک سیستم ۳ جسمی شامل ۱ پروتون و ۲ نوترون است و اسپین و پاریته آن $1/2^+$ است. یکی از ۳ ایزوتوپ هیدروژن است که طبیعی می‌باشد و جرم آن $3/0.16049 \text{ u}$ است.

جدول (۴-۹) مشخصات فیزیکی هسته تریتون

نوع واپاشی	نیمه عمر	جرم	اسپین و پاریته	تعداد نوترون	تعداد پروتون
بتازا	۱۲/۳ سال	$3/0.16049 \text{ u}$	$1/2^+$	۲	۱

در ادامه به محاسبه‌ی انرژی بستگی هسته‌ی تریتون و تعیین ضرایب چند پتانسیل معرفی شده می‌پردازیم. که در تمام قسمت‌ها از روابط بدست آمده برای هلیوم ۳ استفاده می‌کنیم [۱].

۴-۳-۱ تعیین انرژی با پتانسیل وودساکسون برای تریتون

این پتانسیل دارای سه ضریب ثابت V_0 و R_0 و a است که در محاسبه‌ی انرژی بسیار مؤثرند. ضرایب پتانسیل برای هلیوم ۳ و تریتون خیلی شبیه به هم هستند و تفاوتی که در اندازه‌ی ضرایب وجود دارد به خاطر ساختمان آنها است، یکی از ۲ پروتون، ۱ نوترون و دیگری از ۱ پروتون، ۲ نوترون تشکیل شده است. تریتون و هلیوم ۳ را هسته‌های آینه‌ای می‌نامند. (تعداد پروتون‌های یکی برابر تعداد نوترون‌های دیگری است و همچنین تعداد نوترون‌های یکی برابر تعداد پروتون‌های دیگری است) [۲۸].

$$V(x') = \frac{-V_0}{1 + e^{\left(\frac{x' - R_0}{a}\right)}} \quad (-۴)$$

۵)

رابطه (۴-۳۷) انرژی تمام حالات مربوط به یک سیستم سه جسمی را نشان می‌دهد (البته با توجه به

پتانسیل معرفی شده) که برای هلیوم ۳ از آن استفاده شده است و این جا برای تریتون استفاده می‌کنیم.

$$E_{nl} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma - \beta}{2(B - n\alpha)} - \frac{B - n\alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma - \beta}{2B} - \frac{B}{2} \right)^2 + \left(\frac{-\beta}{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] + \Omega d_0 \quad (۴-۳۷)$$

جدول (۴-۱۰) ضرایب پتانسیل وودساکسون همراه با انرژی بستگی تریتون

$V_0(\text{MeV})$	$R_0(\text{fm})$	$a(\text{fm})$	$E(\text{MeV})$
21	0/9	0/03	-8/684034
21/5	0/9	0/03	-8/529127
22/5	0/9	0/03	-8/223493
23/5	0/9	0/03	-7/923430

35	0/9	0/02	-8/561224
-----------	------------	-------------	------------------

با توجه به جدول می توان نتیجه گرفت: V_0 بین مقادیر ۲۰ تا ۳۵ مگا الکترون ولت متغیر است و R_0 تک مقداری است یعنی ۰/۹ فرمی و a نیز بین مقادیر ۰/۰۲ و ۰/۰۳ فرمی متغیر است، و بهترین مقدار این متغیرها با توجه به مقایسه با انرژی بستگی تریتون به صورت: $a = 0/03 \text{ (fm)}$, $R_0 = 0/9 \text{ (fm)}$ ،

$V_0 = 21/5 \text{ (MeV)}$ می باشد. پس پتانسیل وودساکسون برای تریتون به صورت (۴-۱۲۵) می شود.

$$V(x') = \frac{-21/5}{1 + e^{\left(\frac{x' - 0/9}{0/03}\right)}} \quad (4-125)$$

با ثابت گرفتن مقادیر R_0 ، V_0 و a در بهترین شرایط مربوط به انرژی حالت پایه، برای بقیه ی ترازهای تریتون (حالات برانگیخته) انرژی را بدست آوردیم. که در جدول (۴-۱۳) آنها را مشاهده کنید.

جدول (۴-۱۱) انرژی حالت پایه و حالات برانگیخته برای تریتون با پتانسیل وودساکسون

n	L	E (MeV)
0	0	-8/529127
1	0	-0/6502576
2	0	-2/623518
2	1	-2/612210
3	0	-5/912526
3	1	-5/900735
3	2	-5/884233

۴-۳-۲ تعیین انرژی با پتانسیل یوکاوا برای تریتون

برای محاسبه‌ی انرژی بستگی تریتون از پتانسیل مشهور دیگری استفاده کردیم تا بتوان مقایسه‌ی مناسبی برای بدست آوردن ویژگی‌های استاتیکی داشته باشیم. معادله‌ی شرودینگر را با این پتانسیل با روش ابرتقارن برای هلیوم ۳ حل کرده و از نتیجه آن برای تریتون نیز استفاده می‌کنیم. به این شکل انرژی بستگی و ضرایب پتانسیل یوکاوا را برای تریتون حساب می‌کنیم [۳].

$$V_{yukawa}(x) = \frac{V_0}{x} e^{-\alpha x} \quad (۴-۷۵)$$

$$E_0 = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\theta}{-1 \pm \sqrt{1+4\sigma}} \right)^2 - V_0 \alpha \quad (۴-ب)$$

۹۰)

با توجه به مقدار انرژی بستگی بدست آمده از طریق آزمایشات، به محاسبه‌ی ضرایب پتانسیل یوکاوا پرداختیم. برای $V_0 (MeV \cdot fm) \leq 37$ و $20 \leq \alpha \left(\frac{1}{fm} \right) \leq 50$ که در این حالت بهترین مقدار انرژی که نزدیکترین مقدار را با تجربه دارد $E = -8/480 MeV$ می‌باشد. و پتانسیل یوکاوا به صورت (۴-۱۲۶) خواهد شد.

$$V_{yukawa}(x) = \frac{35}{x} e^{-50x} \quad (۴-۱۲۶)$$

جدول (۴-۱۲) ضرایب پتانسیل یوکاوا همراه با انرژی بستگی تریتون

$V_0 (MeV \cdot fm)$	$\alpha \left(\frac{1}{fm} \right)$	$E (MeV)$
۲۰	۹۰	-۷۲۳۰۹۸/۸
۵/۲۴	۷۰	-۳۱۱۱۸۶/۸
۵/۲۷	۶۰	-۷/۹۹۶۱۹۴
۵/۳۰	۶۰	-۸۶۸۵۱۱/۸

۳۵	۵۰	$-48.836/8$
$5/36$	۵۰	$-8443.3/8$

به ازای بهترین مقادیر: $\alpha = 50 \left(\frac{1}{fm}\right)$ و $V_0 = 35(MeV)$ که با استفاده از آن انرژی حالت پایه را بدست آوردیم، به محاسبه انرژی حالات برانگیخته تریتون پرداختیم. مقدار انرژی برای ترازهای بالاتر، قابل استناد نمی باشد.

۳-۳-۴ تعیین انرژی با پتانسیل هاماداجانسون برای تریتون

یکی دیگر از پتانسیل هایی که برای محاسبه انرژی بستگی تریتون از آن استفاده می کنیم هاماداجانسون می باشد که فقط از جمله ی مرکزی آن استفاده شده است و می توان از بقیه ی جملات به صورت اختلالی برای محاسبه انرژی بستگی استفاده نمود. برای حل معادله ی شرودینگر با این پتانسیل از روش جواب پیشنهادی استفاده شده است که انرژی آن برای یک سیستم سه جسمی به صورت (۹۶-۴) می باشد.

$$V_{H,j}(x) = k_c \frac{e^{-x}}{x} + k_c \cdot a_c \frac{e^{-2x}}{x^2} \quad (96-4)$$

$$E = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{-\beta(1+\sigma_1)}{2\theta} (2 + \sigma_1) + \left(\frac{\theta}{1+\sigma_1} \right)^2 \right\} + a \quad (123-4)$$

در اینجا از نتیجه ی رابطه برای تریتون استفاده می کنیم، که در ذیل نتایج کار را مشاهده می کنید. با توجه به جدول می توان نتیجه گرفت که: $2 \leq a_c(fm) \leq 5/5$ و $-1/8 \leq k_c(MeV \cdot fm) \leq -0/5$ که در بهترین حالت: $a_c = 3/25 fm$ و $k_c = -1 MeV \cdot fm$ پس شکل پتانسیل هاماداجانسون به صورت (۱۲۷-۴) در خواهد آمد:

$$V_{H,j}(x) = -\frac{e^{-x}}{x} - 3/25 \frac{e^{-2x}}{x^2} \quad (127-4)$$

جدول (۴-۱۳) ضرایب پتانسیل هاماداجانسون همراه با انرژی بستگی تریتون

$k_c \text{ (MeV} \cdot \text{fm)}$	$a_c \text{ (fm)}$	$E \text{ (MeV)}$
-۵۵/۰	۲۵/۵	-۰۴۷۶۶۳/۸
-۷/۰	۲۵/۴	-۰۹۸۸۶۴/۸
-۸۵/۰	۷۵/۳	-۶۷۷۷۷۵/۸
-۱	۳/۲۵	-۶۲۳۶۲۱/۸
-۳/۱	۵/۲	-۹۹۲۱۵۵/۷
-۷۵/۱	۲	-۰۹۳۶۰۵/۸

برای تریتون نیز انرژی حالت پایه را با پتانسیل‌های وودساکسون و یوکاوا و هاماداجانسون بدست آوردیم و حال زمان مقایسه این مقادیر با کارهای دیگران می‌باشد، به همین جهت جدولی تنظیم شده است تا بتوان در آن به مقایسه‌ی دقیقی پرداخت. در جدول (۴-۱۴) نتایج کارهای انجام شده و کارهایی که ما برای تریتون انجام داده‌ایم را می‌بینید. با توجه به جدول (۴-۱۴) می‌توان نتیجه گرفت که مقادیر بدست آمد در کارهای ما همخوانی بسیار خوبی با تجربه دارد.

جدول (۴-۱۴) انرژی بستگی تریتون در کارهای متفاوت [۳۳]

	AV18	N3LO-Idaho	AV18+URIX	N3LO-Idaho+N2LOL	Exp	w.s	Yukawa	H.J
$E \text{ (MeV)}$	-۶۲۴/۷	-۶۱۸/۷	-۴۷۹/۸	-۴۷۴/۸	-۴۸۲/۸	-۵۲۹/۸	-۴۸۰/۸	-۶۲۳/۸

۴-۴ هلیوم ۴

هلیوم ۴ یکی دیگر از ایزوتوپ‌های هسته هلیوم می‌باشد. این هسته به عنوان یک سیستم ۴ جرمی ۲ پروتون و ۲ نوترون دارد و اسپین و پاریته آن 0^+ است. و یکی از ۸ ایزوتوپ هلیوم است که طبیعی می‌باشد و جرم آن 4.002603 u است. این هسته یکی از پایدارترین هسته‌های موجود در طبیعت می‌باشد، که اهمیت فوق العاده‌ای دارد و در بین دو ایزوتوپ طبیعی هلیوم فراوان‌ترین $10^4 \times 1/38 \%$ می‌باشد [۱].

جدول (۴-۱۵) مشخصات فیزیکی هسته هلیوم ۴

نیمه عمر	جرم	اسپین و پاریته	تعداد نوترون	تعداد پروتون
پایدار	4.002603 u	0^+	۲	۲

در ادامه به محاسبه‌ی انرژی بستگی هسته‌ی هلیوم ۴ و تعیین ضرایب چند پتانسیل معرفی شده می‌پردازیم.

۴-۴-۱ تعیین انرژی با پتانسیل وودساکسون برای هلیوم ۴

برهم کنش بین نوکلئون‌ها را در پایین‌ترین سطح، پتانسیل مرکزی در نظر می‌گیریم از طرفی چون سیستم شامل ۴ نوکلئون می‌باشد برهم کنش بین نوکلئون‌ها را با استفاده از مختصات فوق کروی در نظر می‌گیریم در این صورت اگر فرض کنیم بردارهای $\vec{r}_1$ و $\vec{r}_2$ و $\vec{r}_3$ و $\vec{r}_4$ موقعیت ذرات را مشخص می‌نماید مختصات ژاکوبی و مرکز جرم را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۱]:

$$\vec{\xi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{r}_1 - \quad (4-128)$$

$$\vec{r}_2)$$

$$\vec{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\vec{r}_3 - \vec{r}_1 - \quad (4-129)$$

$$\vec{r}_2)$$

$$\vec{\xi}_3 = \frac{1}{\sqrt{12}} (3\vec{r}_4 - \vec{r}_1 - \vec{r}_2 - \quad (۱۳۰-۴)$$

$$\vec{r}_3)$$

$$\vec{R} = \quad (۱۳۱-۴)$$

$$\frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 + \vec{r}_4}{4}$$

در این صورت می‌توانیم فوق شعاع (که در آن x' ابر شعاع می‌باشد.) را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

$$x' = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2} \quad (۱۳۲-۴)$$

در این صورت پتانسیل وودساکسون بر حسب فوق شعاع به شکل زیر می‌باشد [۲۸]:

$$V(x') = \frac{-V_0}{1 + e^{\left(\frac{x' - R_0}{a}\right)}} \quad (۵-۴)$$

این پتانسیل به عنوان پتانسیل برهم کنش بین نوکلئون‌ها در نظر گرفته شده و با قرار دادن در معادله‌ی

شرودینگر برای یک سیستم چهار جسمی بر حسب ابر شعاع به صورت زیر در می‌آید.

$$\left(\frac{d^2}{dx'^2} + \frac{8}{x'} \frac{d}{dx'} - \frac{l(l+7)}{x'^2}\right) R(x') + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{n,l} - V(x')) R(x') = 0 \quad (۱۳۳-۴)$$

با تغییر متغیر آن را به فرم قابل حل در می‌آوریم.

$$U(x') = R(x')x'^4 \rightarrow R(x') = U(x')x'^{-4} \quad (۱۳۴-۴)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x')}{dx'^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} - V(x') - \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu x'^2} \right) U_{nl}(x') = 0 \quad (۱۳۵-۴)$$

پتانسیل معرفی شده را در قسمت شعاعی معادله‌ی شرودینگر برای سیستم‌های چهار جسمی قرار

می‌دهیم. برای حل این معادله از روش ابرتقارن استفاده می‌نماییم. این روش مبتنی بر استفاده از

ابرتانسیل بوده و بر این اساس می‌توانیم تابع موج حالت پایه را حساب نموده سپس با استفاده از

عملگرهای بالا برنده، دیگر حالات سیستم را حساب می‌کنیم. هم چنین با استفاده از روش ابر تقارن می‌توانیم رابطه‌ای برای ویژه مقادیر انرژی بدست آوریم.

$$\frac{d^2 U_{nl}(x')}{dx'^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + \frac{V_0}{1+e^{\left(\frac{x'-R_0}{a}\right)}} - \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu x'^2} \right) U_{nl}(x') = 0 \quad (136-4)$$

پتانسیل مؤثر شامل پتانسیل وودساکسون نیز می‌باشد.

$$V_{eff}(x') = V_{W.S}(x') + V_l(x') = \frac{-V_0}{1+e^{\left(\frac{x'-R_0}{a}\right)}} + \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu x'^2} \quad (137-4)$$

رابطه‌ی (137-4) به عنوان پتانسیل مؤثر در معادله‌ی شرودینگر شناخته شده است، پس تغییر متغیرهای (138-4) را انجام می‌دهیم.

$$x' = R_0(x+1) \quad , \quad \alpha = \frac{R_0}{a} \quad , \quad \Omega = \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu R_0^2} \quad \text{و} \quad l \neq 0 \quad (-4)$$

(138)

از بسط تیلور حول نقطه $x=0$ ($r=R_0$) استفاده می‌کنیم.

$$V_l(x) = \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu x'^2} = \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu R_0^2} \frac{1}{(1+x)^2} = \Omega(1-2x+3x^2-4x^3+\dots) \quad (-4)$$

(139)

$$V_l(x) = \Omega \left(d_0 + \frac{d_1}{1+e^{\alpha x}} + \frac{d_2}{(1+e^{\alpha x})^2} \right) \quad (140-4)$$

از این جا به بعد حل معادله‌ی شبیه حل معادله برای هلیوم ۳ می‌باشد و تکراری است، پس فقط نتایج حل معادلات را می‌نویسم:

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \Omega d_0 \quad (-4)$$

(۶۱)

$$E_{nl} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma-\beta}{2(B-n\alpha)} - \frac{B-n\alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma-\beta}{2B} - \frac{B}{2} \right)^2 + \left(\frac{-\beta}{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] + \Omega d_0 \quad (-4)$$

۷۳)

جدول (۴-۱۶) ضرایب پتانسیل وودساکسون همراه با انرژی بستگی هلیوم ۴

$V_0(\text{MeV})$	$R_0(\text{fm})$	$a(\text{fm})$	$E(\text{MeV})$
23	1/7	0/03	-28/611230
24	2/1	0/03	-28/023660
25	1/6	0/03	-28/616370
27	1/2	0/03	-28/072150
28	1/5	0/03	-28/373250
30	1/3	0/03	-28/624390

نتایج بدست آمده در مورد انرژی حالت پایه ی هلیوم ۴ با مقادیر تجربی همخوانی خوبی دارد. با توجه به

جدول می توان نتیجه گرفت: $23 \leq V_0(\text{MeV}) \leq 33$ ، $1/2 \leq R_0(\text{fm}) \leq 4/2$ ، $0.2 \leq a(\text{fm}) \leq 0.4$

در بهترین شرایط: $a = 0.3 \text{ fm}$ ، $R_0 = 1/5 \text{ fm}$ ، $V_0 = 28 \text{ MeV}$ می باشند. پس می توان پتانسیل وودساکسون

را به صورت (۴-۱۴۱) بازنویسی کرد:

$$V(x') = \frac{-28}{1 + e^{\left(\frac{x'-1/5}{0/03}\right)}} \quad (4-141)$$

با ثابت گرفتن مقادیر R_0 ، V_0 و a در بهترین شرایط مربوط به انرژی حالت پایه، برای تراز بعدی ${}^4\text{He}$

انرژی را بدست می آوریم.

جدول (۴-۱۷) انرژی حالت پایه و برانگیخته برای هلیوم ۴ با پتانسیل وودساکسون

n	l	$E(\text{MeV})$
۰	۰	-28/373250

۴-۴-۲ اثرات جمله $\frac{1}{x}$ در جابجایی انرژی هلیوم ۴

هلیوم ۴ دارای ۲ پروتون و ۲ نوترون است، پس می‌توان جمله $\frac{k}{x}$ را به عنوان یک جمله‌ی تصحیحی برای آن در نظر گرفت و تأثیر این جمله را بر انرژی حالت پایه مشاهده کرد. مطمئناً مقدار انرژی حالت پایه با در نظر گرفتن این جمله بهبود خواهد یافت و به مقدار آزمایشگاهی آن نزدیک‌تر می‌شود. البته این جمله به عنوان جمله‌ی اختلالی در محاسبه‌ی انرژی وارد می‌شود. می‌خواهیم تأثیر جمله‌ی تصحیحی را بر انرژی بستگی هلیوم ۴ بدانیم. علاوه بر پتانسیل وودساکسون جمله‌ی جدیدی نیز در نظر گرفته می‌شود که مد نظر ما تعیین ضریب ثابت مربوط به آن می‌باشد. این جمله جدید فقط باعث کمی تغییرات در شکل ضرایب می‌شود. به همین جهت از توضیحات اضافی اجتناب می‌کنیم. (چون نوکلئون‌ها می‌توانند برهم کنش‌های شعاعی دیگری را داشته باشند می‌توانیم به پتانسیل وودساکسون جمله‌ی شعاعی دیگری مانند پتانسیل $\frac{k}{x}$ اضافه می‌کنیم تا بتوانیم مقادیر بهتری برای انرژی بدست آوریم.)

$$V(x) = \frac{-V_0}{1+e^{\frac{(x'-R_0)}{a}}} + \frac{k}{x'} \quad (۳۹-۴)$$

این پتانسیل را مشابه با مورد قبل به طور تحلیلی با استفاده از روش ابرتقارن حل نموده و انرژی حالت پایه را برای هلیوم ۴ به صورت تابعی از ضریب پتانسیل K بدست می‌آوریم. در ادامه ما به طور عددی با استفاده از روش پدیده شناختی انرژی حالت پایه‌ی هلیوم ۴ را محاسبه نموده و این مقادیر بدست آمده را با مقدار تجربی انرژی مقایسه نموده و بهترین ضرایب را بدست می‌آوریم.

$$\frac{d^2 U_{nl}(x')}{dx'^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} + \frac{V_0}{1+e^{\left(\frac{x'-R_0}{a}\right)}} - \frac{k}{x'} - \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu x'^2} \right) U_{nl}(x') = 0 \quad \text{و } l \neq 0 \quad (-4)$$

۱۴۲)

$$V_{eff}(x') = V_{WS}(x') + V_l(x') = \frac{-V_0}{1+e^{\left(\frac{x'-R_0}{a}\right)}} + \frac{k}{x'} + \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu x'^2} \quad (-4)$$

۱۴۳)

معادله‌ی (۴-۱۴۳) به عنوان پتانسیل مؤثر در معادله‌ی شرودینگر شناخته شده، تغییر متغیرهای زیر را انجام می‌دهیم.

$$x' = R_0(x+1), \quad \alpha = \frac{R_0}{a}, \quad k' = \frac{k}{R_0}, \quad \Omega = \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu R_0^2} \quad (4-144)$$

پتانسیل مؤثر به صورت (۴-۱۴۵) در می‌آید.

$$V_{eff} = \frac{-V_0}{1+e^{(\alpha x)}} + \frac{k}{R_0(1+x)} + \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu R_0^2(1+x)^2} = \frac{-V_0}{1+e^{(\alpha x)}} + k'(1+x)^{-1} + \Omega(1+x)^{-2} \quad (4-145)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} - V_{eff}) U_{nl}(x) = 0 \quad (-4)$$

۱۴۶)

از این جا به بعد حل معادله شبیه حل معادله برای هلیوم ۳ می‌باشد و تکراری است، البته از همان ضرایب مربوط به هلیوم ۳ استفاده شده ولیکن فرم این ضرایب با هلیوم ۳ متفاوت است. که از تکرار کارهای انجام شده صرفنظر کرده و فقط نتایج را در این جا یادآور می‌شویم. وابستگی ضرایب ثابت در دو هسته با هم متفاوت است و همین امر باعث تفاوت در مقادیر بدست آمده می‌شود.

$$E_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{-\beta}{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 + \Omega d_0 \quad (-4)$$

۶۱)

$$E_{nl} = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left[\left(\frac{\gamma-\beta}{2(B-n\alpha)} - \frac{B-n\alpha}{2} \right)^2 - \left(\frac{\gamma-\beta}{2B} - \frac{B}{2} \right)^2 + \left(\frac{-\beta}{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\gamma}} + \frac{\alpha}{2} \right)^2 \right] + \Omega d_0 \quad (-4)$$

۷۳)

در این حالت چون جمله‌ی جدید به عنوان یک جمله اختلالی در محاسبه انرژی بستگی وارد می‌شود پس با ثابت گرفتن مقادیر R_0 ، V_0 و a در بهترین شرایط به محاسبه‌ی مقدار ضریب K می‌پردازیم. به ازای $K = 2/20 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ در مقایسه با حالتی که فقط پتانسیل W.S داشتیم، مقدار بهتری برای انرژی بستگی ${}^4\text{He}$ بدست آوردیم، و این نتیجه‌ی وارد کردن جمله تصحیحی $\frac{k}{x}$ می‌باشد. مقدار K برای ${}^4\text{He}$ بین $2/15 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ تا $2/25 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$ متغیر می‌باشد. پس می‌توان فرم کلی پتانسیل را به صورت رابطه‌ی (۴-۱۴۷) نوشت:

$$V(x') = \frac{-28}{1+e^{\left(\frac{x'-1/5}{0/03}\right)}} + \quad (4-147)$$

$$\frac{2/20}{x'}$$

جدول (۴-۱۸) انرژی حالت پایه برای هلیوم ۴ با پتانسیل وودساکسون و جمله تصحیحی

$K (\text{MeV} \cdot \text{fm})$	$E (\text{MeV})$
2/15	-27/820920
2/17	-28/021310
2/19	-28/221550
2/20	-28/321630
2/22	-28/521670
2/24	-28/721560

با در نظر گرفتن بهترین مقدار ضریب K به محاسبه‌ی انرژی حالات برانگیخته پرداختیم که در جدول (۴-۲۳) آنها را می‌بینید. با ثابت گرفتن مقادیر کمیات V_0 ، K ، a ، R_0 به محاسبه‌ی انرژی حالات

برانگیخته ${}^4\text{He}$ می‌پردازیم که در مقایسه با حالت قبل (پتانسیل W.S به تنهایی) مقادیر انرژی حالات برانگیخته تغییرات چشمگیری داشته است. و این تغییرات همه به صورت کاهشی می‌باشد. که نتیجه‌ی این مقایسات را در جدول (۴-۱۹) مشاهده می‌کنید.

جدول (۴-۱۹) انرژی حالت پایه و برانگیخته برای هلیوم ۴ با پتانسیلهای وودساکسون و وودساکسون با جمله تصحیحی

n	l	E (MeV) $W.S + \frac{K}{X}$	E (MeV) W.S
0	0	-28/321630	-28/373250
1	0	-1/849452	-4/650115
2	0	-7/331930	-18/684550
2	1	-7/359453	-18/665060

در اینجا ما به محاسبه‌ی انرژی حالت پایه و برانگیخته‌ی هلیوم ۴ پرداخته و با استفاده از پتانسیل مناسب نتایج بدست آمده در این کار را می‌توان برای هسته‌های مشابه دیگر به کار برد. همچنین در برهم‌کنش بین نوکلئونها می‌توانیم از جملات دیگری همانند جملات اسپینی و ایزواسپینی نیز استفاده نمود.

۴-۴-۳ تعیین انرژی با پتانسیل یوکاوا برای هلیوم ۴

برای تعیین انرژی هلیوم ۴ از پتانسیل مشهور دیگری استفاده کردیم تا بتوان مقایسه مناسبی برای بدست آوردن ویژگی‌های استاتیکی داشته باشیم [۳]. برای این منظور از پتانسیل یوکاوا که از انواع پتانسیل‌های مرکزی می‌باشد استفاده می‌کنیم. پتانسیل یوکاوا را در معادله‌ی شرودینگر مربوط به یک سیستم چهار جسمی قرار داده، برای حل معادله‌ی شرودینگر با این پتانسیل به روش ابرتقارن متوسل می‌شویم.

$$V_{yukawa}(x) = \frac{V_0}{x} e^{-ax} \quad (۴-۷۵)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} - \frac{V_0}{x} e^{-\alpha x} - \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad \text{و } l \neq 0 \quad (-4)$$

(۱۴۸)

$$V_{eff}(x) = V_{yukawa}(x) + V_l(x) = \frac{V_0}{x} e^{-\alpha x} + \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu x^2} \quad (149-4)$$

در عبارت پتانسیل مؤثر، جمله‌ی نمایی را بسط داده و فقط دو جمله‌ی اول بسط را نگه می‌داریم.

$$V_{eff}(x) = \frac{V_0}{x} (1 - \alpha x) + \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu x^2} \quad (150-4)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} + V_0 \alpha) - \frac{2\mu V_0}{\hbar^2 x} - \frac{(l+3)(l+4)}{x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (151-4)$$

تغییر متغیرهای (۱۵۲-۴) را انجام می‌دهیم.

$$\gamma = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} + V_0 \alpha), \quad \theta = \frac{2\mu V_0}{\hbar^2}, \quad \sigma = (l+3)(l+4) \quad (152-4)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \left(\gamma - \frac{\theta}{x} - \frac{\sigma}{x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (153-4)$$

$$E_0 = \frac{-\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\theta}{-1 \pm \sqrt{1+4\sigma}} \right)^2 - \quad (154-4)$$

$V_0 \alpha$

با این روش انرژی بستگی هلیوم ۴ را حساب می‌کنیم. با توجه به مقدار انرژی بستگی بدست آمده از طریق

آزمایشات به محاسبه‌ی ضرایب پتانسیل یوکاوا پرداختیم. برای: $25 \leq V_0(\text{MeV} \cdot \text{fm}) \leq 40$ و

$$E = 100 \leq \alpha \left(\frac{1}{\text{fm}} \right) \leq 200 \quad \text{که در این حالت بهترین مقدار انرژی که نزدیکترین مقدار را با تجربه دارد}$$

$-28/301 \text{ MeV}$ می‌باشد. پس فرم پتانسیل یوکاوا برای هلیوم ۴ به صورت (۱۵۲-۴) خواهد شد:

$$V_{yukawa}(x) = \quad (155-4)$$

$$\frac{36/5}{x} e^{-160x}$$

جدول (۲۰-۴) ضرایب پتانسیل یوکاوا همراه با انرژی بستگی هلیوم ۴

$V_0(MeV.fm)$	$\alpha\left(\frac{1}{fm}\right)$	$E(MeV)$
۲۹	۲۰۰	-۱۰۷۶۹۰/۲۸
۵/۳۲	۱۸۰	-۳۵۰۰۰۰/۲۸
۵/۳۶	۱۶۰	-۳۰۱۵۴۰/۲۸
۳۹	۱۵۰	-۳۵۰۰۱۰/۲۸

به ازای بهترین مقادیر $V_0 = 36/5(MeV.fm)$, $\alpha = 160\left(\frac{1}{fm}\right)$ که با استفاده از آن انرژی حالت پایه را بدست آوردیم به محاسبه‌ی انرژی حالات برانگیخته هلیوم ۴ پرداختیم. این مقادیر را در رابطه‌ی انرژی جاگذاری کرده و با توجه به نتیجه‌ی خوبی که از قسمت انرژی حالت پایه بدست آورده‌ایم به ادامه کار می‌پردازیم، اما برای حالات برانگیخته نتیجه‌ی خوبی حاصل نشد.

۴-۴-۴ تعیین انرژی با پتانسیل هاماداجانسون برای هلیوم ۴

در قسمت نهایی کار برای هلیوم ۴ پتانسیل هاماداجانسون را در نظر می‌گیریم و به محاسبه‌ی انرژی بستگی و همچنین تعیین ضرایب پتانسیل می‌پردازیم، تا جای مقایسه‌ی بیشتری برای کارهای انجام شده وجود داشته باشد. در کل در مورد هر هسته با سه پتانسیل متفاوت کار شده و در مورد هر کدام ضرایب متفاوتی را تجربه کرده‌ایم.

پتانسیل هاماداجانسون را در معادله‌ی شرودینگر جاگذاری می‌کنیم:

$$V_{H,j}(x) = a + bx - cx^2 - \frac{a}{x} + \quad (۱۰۰-۴)$$

$$\frac{d}{dx^2}$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E_{nl} - V_{H,j}(x) - \frac{\hbar^2(1+3)(1+4)}{2\mu x^2} \right) U_{nl}(x) = \quad (۱۵۳-۴)$$

0

$$V_{\text{eff}}(x) = V_{H,j}(x) + V_l(x) = a + bx - cx^2 - \frac{a}{x} + \frac{d}{x^2} + \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu x^2} \quad (۱۵۴-۴)$$

پتانسیل مؤثر را در معادله‌ی شرودینگر قرار می‌دهیم.

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left((E_{nl} - a) - bx + cx^2 + \frac{a}{x} - \frac{d + \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu}}{x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (۱۵۵-۴)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} + \left(\frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} - a) - \frac{2\mu b}{\hbar^2} x + \frac{2\mu c}{\hbar^2} x^2 + \frac{2\mu a}{\hbar^2} \frac{1}{x} - \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(d + \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu} \right) \frac{1}{x^2} \right) U_{nl}(x) = 0 \quad (۱۵۶-۴)$$

برای آنکه فرم معادله ساده‌تر شود، از تغییر متغیرهای (۱۵۷-۴) استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2\mu}{\hbar^2} (E_{nl} - a) \\ \beta = \frac{2\mu b}{\hbar^2} \\ \gamma = \frac{2\mu c}{\hbar^2} \\ \theta = \frac{2\mu a}{\hbar^2} \\ \sigma = \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(d + \frac{\hbar^2(l+3)(l+4)}{2\mu} \right) \end{cases} \quad (۱۵۷-۴)$$

$$\frac{d^2 U_{nl}(x)}{dx^2} = \left(-\alpha + \beta x - \gamma x^2 - \frac{\theta}{x} + \frac{\sigma}{x^2} \right) U_{nl}(x) \quad (۱۱۱-۴)$$

برای حل این معادله از روش جواب پیشنهادی بهره می‌بریم. تابع موج به صورت حاصل ضرب دو تابع تعریف می‌شود. با انتخاب متغیرهای جدید معادله‌ی شرودینگر هلیوم ۴ شبیه معادله‌ی شرودینگر برای هلیوم ۳ می‌شود. البته نتیجه‌ی آن فقط به خاطر ضرایب ثابت آن متفاوت می‌باشد.

$$E = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left\{ \frac{-\beta(1+\sigma_1)}{2\theta} (2 + \sigma_1) + \left(\frac{\theta}{1+\sigma_1} \right)^2 \right\} + a \quad (۱۲۳-۴)$$

با توجه به مقدار انرژی بستگی بدست آمده از طریق آزمایشات به محاسبه‌ی ضرایب پتانسیل هاماداجانسون پرداختیم. ضرایب پتانسیل مقادیر متغیری را اختیار می‌کنند، البته این مقادیر با توجه به انرژی بستگی قابلیت انتخاب در یک محدوده‌ی مشخصی دارند، که طبق جدول تغییرات آن به صورت:

$$-0/7 \leq k_c(\text{MeV} \cdot \text{fm}) \leq -1, 5 \leq a_c(\text{fm}) \leq 7/5$$

می‌باشد. در این حالت بهترین مقدار انرژی که نزدیکترین مقدار را با تجربه دارد $E = -28/297 (\text{MeV})$ می‌باشد. فرم پتانسیل برای هلیوم ۴ با توجه به بهترین مقادیر به صورت رابطه‌ی (۴-۹۶) در می‌آید.

$$V_{H,j}(x) = -0/8 \frac{e^{-x}}{x} + 0/5 \frac{e^{-2x}}{x^2} \quad (۴-۹۶)$$

جدول (۴-۲۱) ضرایب پتانسیل هاماداجانسون همراه با انرژی بستگی هلیوم ۴

$k_c(\text{MeV} \cdot \text{fm})$	$a_c(\text{fm})$	$E(\text{MeV})$
-۷/۰	۱۵/۷	-۰۴۷۳۳۰/۲۸
-۷/۰	۲۰/۷	-۳۹۹۹۶۰/۲۸
-۸/۰	۳۰/۶	-۸۹۶۲۳۰/۲۷
-۸/۰	۳۵/۶	-۲۹۷۹۶۰/۲۸
-۹/۰	۷۵/۵	-۷۵۲۴۰۰/۲۸
-۱	۲۰/۵	-۴۹۸۲۷۰/۲۸

به ازای بهترین مقادیر: $a_c = 6/35(\text{fm})$, $k_c = -0/8(\text{MeV} \cdot \text{fm})$ ، که با استفاده از آن انرژی حالت پایه را بدست آورده‌ایم، به محاسبه‌ی انرژی حالات برانگیخته‌ی هلیوم ۴ پرداختیم اما پتانسیل

هاماداجانسون برای ترازهای بالاتر نتایج قابل قبولی را نمی‌دهد. در نهایت در جدول (۴-۲۲) به مقایسه‌ی مقادیر انرژی در کارهای متفاوت و پتانسیل‌های در نظر گرفته شده برای هلیوم ۴ می‌پردازیم.

جدول (۴-۲۲) انرژی بستگی هلیوم ۴ [۳۴]

	Cd Bonn	Cd Bonn+ Δ	Cd Bonn+ Δ'	Exp	ws	WS+K/x	yukawa	Hj
انرژی بستگی	-۲۶/۱۸	-۲۷/۱۰	-۲۵/۸۹	-۲۸/۳۰	-۲۸/۳۷	-۲۸/۳۲	-۲۸/۳۰	-۲۸/۲۹

با توجه به جدول (۴-۲۲) می‌توان نتیجه گرفت که نتایج کار ما همخوانی بسیار خوبی با کارهای آزمایشگاهی دارد. و جای کار فراوانی برای هسته‌های دیگر وجود دارد. با توجه به کل جداول در پایان نامه می‌توان نتیجه گرفت که پتانسیل یوکاوا و هاماداجانسون برای ترازهای بالاتر نتایج قابل قبولی نمی‌دهد. اما پتانسیل یوکاوا بهتر از دیگر پتانسیل‌ها برای حالت پایه می‌باشد.

نتیجه گیری :

در این کار با استفاده از پتانسیل‌های پرکاربردی همچون وودساکسون، یوکاوا و هاماداجانسون، انرژی بستگی ایزوتوپ‌های طبیعی هلیوم را محاسبه کردیم و سپس با مقایسه‌ی این مقادیر انرژی با انرژی بستگی این هسته‌ها در کارهای تجربی، ضرایب پتانسیل‌ها را بدست آورده‌ایم. با در نظر گرفتن بهترین ضرایب، انرژی حالات برانگیخته‌ی این هسته‌ها را نیز تعیین کردیم. البته این کار قابل تعمیم به دیگر هسته‌ها و دیگر سیستم‌های چند نوکلئونی می‌باشد. سپس با استفاده از ضرایب این پتانسیل‌ها دیگر ویژگی‌های دینامیکی و استاتیکی هسته‌ها را می‌توانیم تعیین کنیم. البته کار به یک سیستم سه جسمی دیگر (تریتون) تعمیم داده شد. لازم به ذکر است نتایج کار قابل استفاده برای کارهای تجربی و تئوری می‌باشد. روش‌هایی که برای بهبود کار پیش‌بینی میشود این است که جملات تصحیحی مناسبی برای پتانسیل‌ها در نظر گرفته شود. و یا معادله شرودینگر را با جملات برهم کنشی مناسب برای هسته‌ها حل

کنیم تا بتوان با قطعیت در مورد نتیجه کار بحث کرد. پتانسیل یوکاوا برای حالات برانگیخته مناسب نمی- باشد، همچنین با توجه به جداول تنظیم شده نتایج کار ما همخوانی بسیار خوبی با کارهای آزمایشگاهی دارد.

مراجع:

1. K.S. Krane, **Introductory Nuclear Physics**, Vol. I & II, John Willey & sons (1988).
2. سعید علمدار میلانی، محمود قرآن نویس، **آشنایی با فیزیک هسته ای**، انتشارات دانشگاه آزاد اسلامی تهران، ص ۱۸۵.
3. B.L. Cohen, **Concepts of Nuclear Physics**, McGraw Hill, New York, (1971).
4. H.S. Hans, **Nuclear Physics Experimental and Theoretical**, (2001).
5. M. Taketani, S. Machida, S. Ohanuma, Prog.Theor.Phys. 7 (1952) 45.
6. T. Hamada, I.D. Johnstone, Nucl. Phys. 34 (1962) 382.
7. K.E. Lassila, M.H. Hull, H.M. Ruppel, F.A. McDonald, G. Breit, Phys. Rev. 126 (1962) 881.
8. H. Frauenfelder, E. M. Henley, **Subatomic Physics**, prentice Hall , (1977).
9. Cottingham.W, **An Introduction to Nuclear Physics**, vol. I, (1934).

10. C.A. Branes, D.D. Claton, D.N. Schramm, *In Essays in Nuclear Astrophysics*, Cambridge University Press, (1992).
11. A.A. Rajabi, Few Body System 37 (2005) 267.
12. M. Aiello, M. Ferraries, M. MGiannini, M. Pizzo, E. Santopinto, Phys. Lett. B 387 (1996) 215.
13. H. Egrifes, D. Demirhan, F. Büyükkılıc, Phys. Lett. A 275 (2000) 229-237.
14. O. Ye, S. Silta, Phys. Scr. 75(2007) 41.
15. J.J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, S. F. Tuan, Wesley publishing Company, Inc (1994).
16. G.B. Arfken, *Mathmatical Methods for physicistics*, (3nd, ed), Academic Press, (1985).
17. A.F. Nikiforov, V.B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics*, (Basle: Birkhauser), (1988).
18. G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum and Statistic Physics*, Heidelberg, Springer, (1996).
19. R. Dutt, A. Khare, U.P. Sukhatme, Am. J. Phys. 56 (1988) 163-168.
20. C. Erko, R. Sever, Phys. Rev. D 30 (1984) 2117.
21. S. Sakoda, Mod. Phys. Lett. A 23 (2008) 3057-3076.
22. F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, Phys. Rep. 251 (1995) 267.
23. W.H. Press, *Numerical Recipes in Fortran*, 2th edition, Cambridge press, (1992).
24. F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Supersymmetry in Quantum Mechanics*, Word Scientific Publishing, (2001).
25. F. IachelloLie, *Algebras and Application*, vol. II,3,4, (1997).

26. M. R. Pahlavani, J. Sadeghi, M. Ghezelbash, App. Sci. 11 (2009) 106.
27. .F. Cooper,B.Freedman, Ann. Phys. 146 (1983) 262.
28. R.D. Woods and D.S. Saxon, Phys. Rev. 95 (1954) 577.
29. V.H. Badalov, H.I. Ahmadov, A.I. Ahmadov, Int. Mod. Phys. E 18 (2009).
30. C.L Pekeris, Phys. Rev. 45 (1934) 98.
31. S. M. Ikhdair, R. Sever, Cent. Eur. J. Phys. 8(4) (2010) 652.
32. H. Feizi, A.A. Rajabi, M.R. Shojaei, Acta Physica Polonica B, 42 (2011).
33. A. Kievsky, Few Body System 35 (2003) 11.
34. D. Gazit, N. Barnea, S. Bacca, W. Leidemann, G. Orlandini, Phys. Rev. C 74 (2006)

06100

Abstract

Studying the Interaction between nucleons is one of the essential Concepts of Nuclear physics. On this concept, we can find out the main properties of nuclear forces. It is very important to choose appropriate potentials for nucleon potential. There are different potentials offered for these interactions like Wood-Saxon potential, Yukawa potential and Hamada-Johnston potential. These potentials are used for deuteron light nucleus and to solve Schrodinger equation, In numerical our approximate way and calculate some of static properties of deuteron. In this final, using the mentioned potentials, we can study and consider helium natural isotopes and we used analytic methods Supersymmetric and ansatz, to solve Schrodinger equation on a suitable approximation and calculate binding energy of these nuclei during this calculation, we could get the coefficients of these potentials and also calculate excited energy, according to the best amount.

Keywords: Helium isotopes- Potential coefficients- Wood-Saxon potential- Hamada-Johnston potential



Faculty of physics

**Nucleon - Nucleon interaction suitable for
calculation of binding energy of Helium
isotopes ${}^3\text{He}, {}^4\text{He}$**

Zahra sabet dizavandy

Supervisors:

Dr. Mohammad Reza Shojaei

Prof. Ali Akbar Rajabi

Feb.2013