

الله الرحمن الرحيم



دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد

فیزیک ذرات بنیادی

عنوان:

راندمان ماشین های گرمایی کوانتومی

ارائه دهنده:

مهدی قنواتی

استاد راهنما:

دکتر حسین موحدیان

پایان نامه کارشناسی ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

بهمن ۱۳۹۱

تقدیم بہ

پدر و مادر مہربانم

اللَّهُمَّ صَلِّ عَلَى مُحَمَّدٍ وَآلِهِ وَذُرِّيَّتِهِ، وَاخْصُصْ أَبَوَيَّ بِأَفْضَلِ مَا خَصَّصْتَ بِهِ آبَاءَ عِبَادِكَ

الْمُؤْمِنِينَ وَ أُمَّهَاتِهِمْ، يَا أَرْحَمَ الرَّاحِمِينَ

پروردگار! بر محمد و خاندانش و فرزندان او درود بفرست، و بہ پدر و مادرم بہترین چیز کی کہ بہ پدران و مادران بندگان با ایمان خود

اختصاص داده ای، عطا کن، ای مہربان ترین مہربانان.

حمد و ستایش مخصوص خدایی است که اول است، بی آن که اولی پیش از او باشد و آخر است، بی آن که آخری پس از او باشد خداوندی که آفرینش را با قدرت خود ابداع کرد و آنان به اراده و خواست خویش پدید آورد. و سلام و درود بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان و امدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، بالاتر از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی ثباته می او، بازبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم. اما از آنجایی که تحلیل از معلم، پاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تامین می کند و سلامت امانت بانی را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب "من لم یسکر المنعم من المخلوقین لم یسکر الله عزوجل"، از استاد با کمالات و ثباته، جناب آقای دکتر حسین موحیدیان که از هیچ گلی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این پایان نامه را بر عهده گرفتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم. از اساتید عزیز و کرامی جناب آقای دکتر Paul Skrzypczyk، از دانشگاه بریتول، و جناب آقای دکتر مسلم سوہانی، که با صبر و حوصله به تمامی سوالات بنده پاسخ دادند، کمال تشکر و قدردانی را دارم و هم چنین از تمام دوستانی که مراد به انجام رساندن این امر مهم یاری نموده اند، نهایت تشکر و قدردانی را دارم.

باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را پاس گوید.

چکیده:

ترمودینامیک کوانتومی توصیفی عمیق از پدیده‌ها، در فصل مشترک مکانیک کوانتومی و ترمودینامیک، ارائه می‌دهد. از جمله موضوعاتی که در ترمودینامیک کوانتومی بسیار مورد توجه قرار گرفته است، ماشین‌های گرمایی کوانتومی می‌باشد که شامل یخچال، پمپ گرمایی و موتور گرمایی می‌شود. از جمله ماشین‌های گرمایی که اخیراً بسیار مورد توجه قرار گرفته است، کوچک‌ترین ماشین‌های گرمایی خودسازگار ممکن می‌باشد. در این پایان‌نامه از بین سه نوع ماشین‌های گرمایی خودسازگار، به طور ویژه فقط بر روی کوچک‌ترین یخچال خودسازگار ممکن تمرکز می‌کنیم و آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چگونگی عملکرد آن را با وارد کردن ابزاری فیزیکی، به نام کیوبیت مجازی و دمای مجازی توضیح خواهیم داد. در بررسی معادله حاکم بر دینامیک یخچال، علاوه بر مدل پاشندگی‌ای که در مقالات [۷-۱۱] پیشنهاد شده است، مدل پاشندگی دیگری را نیز ارائه داده‌ایم و با توجه به آن معادله‌ی حاکم بر دینامیک یخچال را بدست آورده‌ایم. با توجه به هر دو مدل پاشندگی نشان داده‌ایم که یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار به بازدهی کارنو می‌رسد و بازدهی آن چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن جهانی خواهد بود. ما همچنین با توجه به مفهوم کیوبیت مجازی، فیلتر جدیدی را نیز برای یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار ارائه داده‌ایم و در مورد این فیلتر جدید نیز نشان داده‌ایم که یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار باز هم به بازدهی کارنو می‌رسد و با توجه به دو فیلتر ارائه شده کلی‌ترین ویژگی‌های یک یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار را ارائه داده‌ایم. در مقاله‌ی [۷] ادعایی به این صورت مطرح شده است، که ذاتاً تنها کوچک‌ترین ماشین‌ها می‌توانند به بازدهی کارنو برسند. ما جهت بررسی صحت این ادعا یک یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار را مطرح کرده و نشان داده‌ایم که یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار با توجه به مفهوم تک کیوبیت مجازی و تک دمای مجازی می‌تواند به بیشینه‌ی بازده‌ای یعنی بازدهی کارنو برسد ولی بازدهی آن، مانند یخچال

کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار، جهانی نخواهد بود. ما هم‌چنین حالت خاصی از یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار، یعنی یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار با دو منبع گرم هم‌دما را بررسی کرده‌ایم و نشان داده‌ایم بازدهی کارنوی آن، فرمی به شکل بازدهی کارنوی یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار دارد. به عبارتی دیگر این مدل خاص از دیدگاه بازدهی، معادل یک یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار می‌باشد. ما هم‌چنین نشان داده‌ایم بازدهی این مدل خاص چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن مستقل از جزئیات مدل سیستم می‌باشد ولی به مدل دماهای محیطی وابسته می‌باشد. ما با توجه به مدل یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار، نتایج خود را به یک یخچال‌های کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار تعمیم داده‌ایم و برای حالتی خاص نشان داده‌ایم که بازدهی آن‌ها معادل بازدهی یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار می‌باشد.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه:

[۱]. مهدی قنواتی، حسین موحدیان، الهام عابدینی‌نیا، "بیشینه راندمان یخچال کوانتومی

خودسازگار"، نوزدهمین کنفرانس بهاره‌ی فیزیک، IPM، ۱۳۵-۱۳۳، اردیبهشت ماه ۱۳۹۱.

فهرست

صفحه	عنوان
ذ	فهرست مطالب
س	فهرست اشکال
ش	فهرست جداول
ص	فهرست نمودارها
۱۱۶	منابع

فهرست مطالب

صفحه

عنوان

فصل اول: معادله‌ی حاکم

- ۱-۱- سیستم‌های کوانتومی بسته ۱
- ۲-۱- سیستم‌های کوانتومی باز ۳
- ۳-۱- تحول زمانی و نگاشت‌های دینامیکی ۴
- ۴-۱- معادله‌ی حاکم کوانتومی لیندبلاد ۷
- ۵-۱- عملگرهای کراوس ۹
- ۱-۵-۱- قضیه‌ی کراوس ۱۳

فصل دوم: ماشین‌های گرمایی کوانتومی دو کیوبیتی

- ۱-۲- مقدمه ۱۸
- ۲-۲- فرآیندهای اساسی ترمودینامیک کوانتومی ۱۹
- ۱-۲-۲- فرآیند هم‌دمای کوانتومی ۲۱
- ۲-۲-۲- فرآیند هم‌حجم کوانتومی ۲۱
- ۳-۲-۲- فرآیند بی‌درروی کوانتومی ۲۲
- ۳-۲- بازگشت‌پذیری ترمودینامیکی چرخه‌ی موتور کارنوی کوانتومی ۲۳

فصل سوم: کیوبیت‌های مجازی و دماهای مجازی

- ۱-۳- مقدمه ۲۸
- ۲-۳- کیوبیت مجازی ۲۹

۳-۳	ماشین‌های گرمایی	۳۲
۴-۳	چگونگی کار ماشین‌های گرمایی	۳۳
۵-۳	جفت‌شدگی با سیستم خارجی	۳۶
۶-۳	کار و وارونگی جمعیت	۳۹
فصل چهارم: بیشینه راندمان یخچال کوانتومی خودسازگار		
۱-۴	یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار	۴۴
۲-۴	فرآیند گرم کردن	۴۸
۳-۴	جریان گرمایی	۴۹
۴-۴	حالت پایا	۵۲
۱-۴-۴	یافتن معادله‌ی حاکم بر دینامیک یخچال	۵۲
۲-۴-۴	یافتن حالت پایا	۵۸
۴-۵	ماتریس‌های چگالی تقلیل یافته‌ی تک جزیی	۶۷
۶-۴	بیشینه‌ی بازده‌ای و بازگشت‌پذیری	۷۳
۷-۴	تحلیل جریان آنتروپی	۷۹
۸-۴	یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار با یک مدل پاشندگی جدید	۸۲
۱-۸-۴	مدل پاشندگی جدید	۸۳
۲-۸-۴	معادله‌ی حاکم و حالت پایا	۸۳
۳-۸-۴	جریان گرمایی	۸۷
۴-۸-۴	بازگشت‌پذیری و بیشینه‌ی بازده‌ای	۸۹

۹۲	 یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار با یک فیلتر جدید
۹۳	 ۱-۹-۴- دماهای مجازی و فیلترها
۹۷	 ۱۰-۴- یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار
۹۷	 ۱-۱۰-۴- معرفی مدل یخچال
۹۹	 ۲-۱۰-۴- حالت پایا و جریان‌های گرمایی
۱۰۴	 ۳-۱۰-۴- بیشینه‌ی بازده‌ای و جهانی بودن
۱۰۸	 ۴-۱۰-۴- یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار با دو منبع گرم هم‌دما
۱۱۰	 ۱۰-۴- یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار
۱۱۰	 ۱-۱۰-۴- یخچال کوانتومی خودسازگار با $(n-2)$ منبع گرم
۱۱۲	 ۲-۱۰-۴- یخچال کوانتومی خودسازگار با $(n-2)$ منبع سرد
۱۱۳	 ۳-۱۰-۴- یخچال کوانتومی خودسازگار با $(n-2)$ منبع دمای اتاق

فهرست اشکال

صفحه	عنوان
۴	۱-۱ سیستم کوانتومی باز
۵	۲-۱ نگاشت‌های دینامیکی
۱۹	۱-۲ ماده‌ی کار یک موتور کارنوی کوانتومی دوکیوبیتی
۳۰	۱-۳ کیوبیت مجازی
۳۵	۲-۳ کوچک‌ترین ماشین‌های گرمایی
۳۸	۳-۳ کوچک‌ترین ماشین با یک کیوبیت خارجی ایزوله شده
۳۹	۴-۳ کوچک‌ترین ماشین برهم‌کنش کننده با یک کیوبیت خارجی باز
۴۲	۵-۳ کوچک‌ترین موتور گرمایی
۴۶	۱-۴ ترازهای انرژی سیستم سه کیوبیتی
۶۸	۲-۴ نمایش شماتیک یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار
۷۴	۳-۴ گذارهای رفت و برگشت یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار
۸۰	۴-۴ ماشین‌های گرمایی ، جریان‌های گرمایی و آنتروپی
۱۰۴	۵-۴ نمایش شماتیک یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار
۱۰۹	۶-۴ یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار با دو منبع گرم هم‌دما

فهرست جداول

صفحه	عنوان
۲۳	۱-۲ فرآیندهای اساسی ترمودینامیکی
۲۷	۲-۲ مقایسه‌ی جزئیات موتور کارنوی کوانتومی و کلاسیکی
۴۷	۱-۴ حالت‌های تبهگن
۹۱	۲-۴ مقایسه‌ی نتایج دو مدل پاشندگی
۹۴	۳-۴ فیلترها و دماهای مجازی

فهرست نمودارها

صفحه	عنوان
۲۴	۱-۲ چرخه‌ی QCE و CCE
۲۴	۲-۲ دما-آنتروپی
۸۲	۱-۴ دمای مجازی بر حسب دمای منبع

فصل اول: معادله‌ی حاکم^۱

۱-۱- سیستم‌های کوانتومی بسته

یک سیستم را سیستم کوانتومی بسته می‌نامیم به این مفهوم، که آن سیستم هیچ انرژی‌ای یا ذره‌ای با سیستم دیگر مبادله نمی‌کند. و عبارت ایزوله را به سیستم‌های بسته‌ای اختصاص می‌دهیم که هامیلتونی آن‌ها مستقل از زمان باشد [۱-۲]. دقت کنید که ما در دستگاه آحادی کار می‌کنیم که در آن $\hbar = 1$ در نظر گرفته شده است.

تحول زمانی یک حالت خالص $|\psi(t)\rangle$ ، به وسیله‌ی معادله‌ی شرودینگر معین می‌شود:

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH(t)|\psi(t)\rangle \quad (1-1)$$

که $H(t)$ مولد عملگر تحول زمانی می‌باشد. تحول زمانی یک حالت آمیخته $\rho(t)$ ، بوسیله‌ی معادله‌ی لیوویل-وان نیومان معین می‌شود:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H(t), \rho(t)] \quad (2-1)$$

به سبب خطی بودن معادله‌ی شرودینگر، حل آن به وسیله‌ی یک گروه تحول $U(t, t_0)$ معین می‌شود چنان‌که

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(0)\rangle \quad (3-1)$$

^۱- master equation

عملگر تحول زمانی بوسیله‌ی هامیلتونی سیستم مورد نظر معین می‌شود که می‌توان به طور قراردادی آن را بدین صورت نوشت:

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} e^{-i \int_{t_0}^t H(\mathcal{T}) d\mathcal{T}} \quad (4-1)$$

که $\mathcal{T}$ در این جا عملگر ترتیب زمانی^۱ می‌باشد. $U(t, t_0)$ یک عملگر یکانی و $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$ می‌باشد. برای هامیلتونی‌های مستقل از زمان عملگر $U(t, t_0)$ بدین صورت می‌باشد:

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)} \quad (5-1)$$

با توجه به عملگر تحول زمانی، تحول ماتریس چگالی بوسیله‌ی رابطه‌ی زیر معین می‌شود:

$$\rho(t) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad (6-1)$$

که بدین صورت می‌توان آن را بازنویسی کرد:

$$\rho(t) = \mathcal{U}_{t, t_0} \rho(t_0) \quad (7-1)$$

که

$$\mathcal{U}_{t, t_0} [\cdot] = U(t, t_0) [\cdot] U^\dagger(t, t_0) \quad (8-1)$$

می‌باشد. با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی (۲-۱) به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\mathcal{U}_{t, t_0} [\cdot] = \mathcal{T} e^{\int_{t_0}^t \mathcal{L}_{\mathcal{T}} d\mathcal{T}} [\cdot] \quad (9-1)$$

^۱- time ordering operator

که $\mathcal{L}_T$ لیوویلین^۱ نامیده می شود

$$\mathcal{L}_t[\cdot] = -i[H(t), \cdot] \quad (10-1)$$

به عملگرهایی همچون $\mathcal{L}_T$ و $\mathcal{U}_{t,t_0}$ که بر عملگرهای دیگر اثر می کنند، ابرعملگر می گوییم.

۱-۲- سیستم های کوانتومی باز

سیستم کوانتومی S را یک سیستم کوانتومی باز^۲ می گوییم، اگر با سیستم کوانتومی B ، که محیط نامیده می شود، جفت شده باشد (از این به بعد برای سادگی، از سیستم کوانتومی باز به عنوان سیستم نامبرده می شود). ما فرض می کنیم که هر دو سیستم با هم یک سیستم بسته تشکیل می دهند که می تواند به وسیله دینامیک های یکانی توصیف شود. فضای هیلبرت ترکیب شده ی $\mathcal{H}$ بوسیله ی ضرب تانسوری فضا های هیلبرت مربوط به آن ها معین می شود ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_B$) و حالت آن ها به وسیله ی ماتریس چگالی ترکیب شده مشخص می شود. هامیلتونی حاکم بر تحول زمانی آن ها به صورت زیر انتخاب شده است:

$$H(t) = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B + H_I(t) \quad (11-1)$$

که H_α ($\alpha = S, B$) دینامیک های داخلی^۳ سیستم و محیط را به ترتیب توصیف می کند و $H_I(t)$ جفت شدگی میان دو قسمت را توصیف می کند. دینامیک های سیستم S به دلیل دینامیک های داخلی آن

۱- Liouvillian

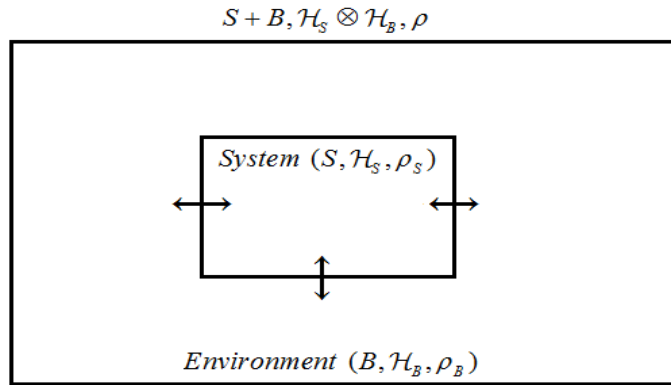
۲- Open quantum system

۳- internal dynamics

و برهم کنش با محیط می باشد که برهم کنش، در حالت کلی، در نتیجه ی همبستگی های^۱ محیط - سیستم می باشد.

حالت تقلیل یافته ی سیستم به وسیله ی رد جزئی بر محیط بدست می آید:

$$\rho_S(t) = Tr_B \rho(t) \quad (12-1)$$



شکل (۱-۱): سیستم کوانتومی باز . پیکان ها جفت شدگی های مختلف منبع - محیط را نشان می دهند.

۱-۳- تحول زمانی و نگاشت های دینامیکی

تحول زمانی سیستم تقلیل یافته، در حالت کلی، نمی تواند بوسیله ی تحول زمانی یکانی توصیف شود. می توانیم تحول زمانی آن را با بررسی تحول زمانی سیستم کل و ردگیری بر درجات آزادی محیط بدست آوریم

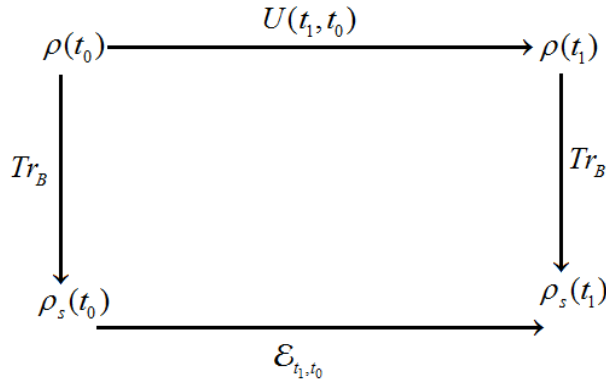
$$\rho_S(t_1) = Tr_B (U(t_1, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t_1, t_0)) \quad (13-1)$$

که $U(t_1, t_0)$ تحول یکانی بدست آمده، بوسیله ی هامیلتونی $H(t)$ سیستم کل، می باشد. چنان که در ادامه

^۱- correlations

خواهید دید، این معادله می‌تواند در عباراتی از یک نگاشت دینامیکی بازنویسی شود که این نگاشت دینامیکی تنها بر فضای هیلبرت سیستم تقلیل یافته اثر می‌کند:

$$\mathcal{E}_{t_1, t_0} : \rho_S(t_0) \mapsto \rho_S(t_1) \quad (14-1)$$



شکل (۲-۱): نگاشتهای دینامیکی و روابط مربوط به آنها برای تحول یکانی سیستم کل

این نگاشت در حالت کلی، وابسته به تحول یکانی کلی^۱، جزئیات محیط B و سیستم تقلیل یافته‌ی S خواهد بود. در حالت کلی می‌توان نشان داد که نگاشتهای دینامیکی جهانی‌ای^۲ ($UDMs$) وجود دارد، که مستقل از حالتی هستند که بر روی آن اثر می‌کنند.

قضیه ۱. یک نگاشت دینامیکی یک UDM می‌باشد اگر و تنها اگر آن نگاشت، از یک سیستم بسط داده شده با شرط اولیه‌ی $\rho(t_0) = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B(t_0)$ تحمیل شده باشد که $\rho_B(t_0)$ برای هر $\rho_S(t_0)$ معین می‌باشد. بنابراین، اگر ما قادر به انتخاب حالت سیستم و محیط، به نحوی که در زمان اولیه‌ی t_0

۱- global unitary evolution

۲- universal dynamical maps

غیر همبسته^۱ هستند، باشیم نگاشت دینامیکی توصیف کننده‌ی تحول سیستم، از زمان مورد نظر برای زمان بعدی t_1 ، مستقل از حالت اولیه‌ی سیستم تقلیل یافته می‌باشد. به هر حال، این موضوع فقط برای زمان اولیه‌ی t_0 درست می‌باشد. زیرا در زمان‌های $t > t_0$ همبستگی‌هایی مطرح می‌شود که دیگر اجازه نمی‌دهد حالت کلی دوباره عامل بندی شود. برای برهم کنش‌های ضعیف این امکان وجود دارد، که حالت کلی سیستم- محیط سیستم باز هم برای زمان‌های بعدی عامل بندی^۲ شود. این خصوصیت مارکوفیتی نامیده می‌شود.

با این ویژگی مارکوفین، ما اکنون می‌توانیم مفهوم ریاضیاتی معادله‌ی حاکم را معرفی کنیم.

تعریف ۱. یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی برای $\rho(t)$ یک معادله‌ی حاکم، با مولد $\mathcal{L}_t$ ، نامیده می‌شود که

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\rho(t+\epsilon) - \rho(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{E}_{t+\epsilon, t} - \mathbb{I}}{\epsilon} \rho(t) \equiv \mathcal{L}_t \rho(t) \quad (15-1)$$

باشد. که در این رابطه $\rho(t+\epsilon) = \mathcal{E}_{t+\epsilon, t} \rho(t)$ می‌باشد. اگر $UDMs$ تنها وابسته به تفاوت‌های زمانی باشند، یعنی $\mathcal{E}_{t_2, t_1} = \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ باشد که $\mathcal{T} = t_2 - t_1$ می‌باشد، تشکیل یک نیم گروه تک پارامتری^۳ می‌دهند [۱]. این نیم گروه‌ها از نقطه نظر فیزیکی یک ویژگی مهم دارند و آن وجود یک حالت پایا^۴ می‌باشد.

تعریف ۲. یک نیم گروه $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ آرام ساز^۵ است اگر یک حالت (پایای) منحصر به فرد ρ_{ss} وجود داشته

باشد چنان که، برای همه‌ی $\mathcal{T}$ ها $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}(\rho_{ss}) = \rho_{ss}$ باشد و برای هر حالت اولیه‌ی ρ

۱- uncorrelated

۲- factorize

۳- one-parameter semigroup

۴- steady state

۵- relaxing

$$\lim_{T \rightarrow \infty}(\rho) = \rho_{ss} \quad (16-1)$$

باشد. شناخت این خصوصیات می تواند این نکات را روشن کند، که نیم گروه ها آرام ساز هستند و مولد آن ها چه می باشد که پاسخ هر دو سوال مهم می باشد.

۴-۱- معادله ی حاکم کوانتومی لیندبلاد

در این بخش ما فرم لیندبلادی یک معادله ی حاکم را معرفی می کنیم. ما هم چنین دو قضیه ی مهم را بیان می کنیم، که اهمیت فرم لیندبلاد را در توصیف دینامیک های پاشنده^۱ مورد تاکید قرار می دهند. کلی ترین فرم لیندبلادی یک معادله ی حاکم، بوسیله ی رابطه ی (۱۷-۱) معین می شود که H یک هامیلتونی (هرمیتی) می باشد و $\{V_k\}_k$ به اصطلاح عملگرهای لیندبلاد نامیده می شود [۴] چنان که برای هر عملگر، مزدوج هرمیتی آن همچنان در مجموعه ی برچسب گذاری بوسیله ی k می باشد ثابت های $\gamma_k \geq 0$ ثابت های واپاشی^۲ نامیده می شوند

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho(t)] + \sum_k \gamma_k \left[V_k \rho(t) V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho(t)\} \right] \quad (17-1)$$

با معرفی کردن ابرعملگرها و با توجه به تحول یکانی سیستم های کوانتومی بسته، می توانیم معادله ی حاکم کوانتومی لیندبلاد را بدین صورت بنویسیم

$$\mathcal{L}_t \rho(t) \equiv -i[H, \rho(t)] + \mathcal{D}(\rho) \quad (18-1)$$

۱- dissipative dynamics

۲- decay constant

که $\mathcal{L}$ لیندبلادین^۱ نامیده می‌شود و $\mathcal{D}$ قسمت پاشنده‌ی معادله‌ی حاکم کوانتومی می‌باشد. اکنون دو قضیه‌ی مهم فرم لیندبلاد را بیان می‌کنیم:

قضیه ۲. یک معادله‌ی دیفرانسیل یک معادله‌ی حاکم مارکویینی می‌باشد، اگر و تنها اگر بتواند در فرم زیر نوشته شود:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i[H(t), \rho(t)] + \sum_k \gamma_k(t) \left[V_k(t) \rho(t) V_k^\dagger(t) - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger(t) V_k(t), \rho(t)\} \right] \quad (۱۹-۱)$$

که $H(t)$ و $V_k(t)$ عملگرهای وابسته به زمان می‌باشند، $H(t)$ خود الحاقی و برای هر k و t ، $\gamma_k \geq 0$ می‌باشد.

قضیه ۳. یک نیم‌گروه کاملاً مثبت، $\mathcal{E}_T = e^{\mathcal{L}T}$ ، با مولد

$$\mathcal{L}[\cdot] = -i[H(t), \cdot] + \sum_{k \in I} \gamma_k \left[V_k[\cdot] V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \cdot\} \right] \quad (۲۰-۱)$$

را برای تعدادی از نمایه‌های I در نظر بگیرید. اگر، یا تنها اگر مجموعه‌ی $\{V_k, k \in I\}$ خود الحاقی باشد (بدین معنی که الحاقی هر عضو مجموعه درون مجموعه می‌باشد) و تنها عملگرهای جابجا شونده با همه‌ی آن‌ها عملگر واحد باشد، نیم‌گروه $\mathcal{E}_T$ آرام ساز خواهد بود.

بطور خلاصه، معادله‌ی حاکم لیندبلادی خصوصیات مهم زیر را دارد:

۱. آرام ساز می‌باشد

۲. هرmites بودن و مثبت بودن تحت این معادله‌ی حاکم ثابت باقی می‌ماند یعنی:

^۱ - Lindbladian

$$\dot{\rho}^\dagger(t) = \dot{\rho}(t) \quad , \quad \langle \psi | \dot{\rho}(t) | \psi \rangle_s \geq 0 \quad (21-1)$$

۳. حفظ کننده‌ی رد ماتریس چگالی می‌باشد

$$Tr(\dot{\rho}) = Tr(-i[H, \rho(t)] + \sum_{k \in I} \gamma_k \left[V_k \rho(t) V_k^\dagger - \frac{1}{2} \{V_k^\dagger V_k, \rho(t)\} \right]) = 0 \quad (22-1)$$

۴. تحت تبدیلات یکانی U ناوردا^۱ می‌باشد که U_{ij} یک ماتریس یکانی می‌باشد [۱]

$$\sqrt{\gamma_k} V_k \rightarrow \sqrt{\gamma'_k} V'_k = \sum_{j=1}^{N^2-1} U_{kj} \sqrt{\gamma_j} V_j \quad (23-1)$$

۵. تحت تبدیلات ناهمگن^۲ ناوردا می‌باشد

$$\begin{aligned} V_k &\rightarrow V'_k = V_k + a_k \\ H &\rightarrow H' = H + \frac{1}{2i} \sum_k \gamma_k (a_k^* V_k - a_k V_k^\dagger) + b \end{aligned} \quad (24-1)$$

که $a_k \in \mathbb{C}$ و $b \in \mathbb{R}$ می‌باشد. بدلیل این ویژگی ما همیشه می‌توانیم عملگرهای لیندبلادی انتخاب کنیم که بدون رد^۳ باشند [۱].

۱-۵- عملگرهای کراوس^۴

در مکانیک کوانتومی معمولاً گفته می‌شود که حالت یک سیستم کوانتومی یعنی $|\psi\rangle$ مطابق با

معادله‌ی زیر در طول زمان تحول می‌یابد:

۱- invariant

۲- inhomogeneous transformation

۳- traceless

۴- Kraus operators

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle \quad (۲۵-۱)$$

که در آن $U(t)$ یک عملگر یکانی است که از روی هامیلتونی سیستم بدست می آید [۳-۵]. البته این رابطه تا موقعی برقرار است که سیستم کوانتومی با یک بردار حالت خالص توصیف شود در غیر این صورت، یعنی وقتی که حالت سیستم خالص نیست بلکه با یک ماتریس چگالی تعریف می شود، ماتریس چگالی مطابق با رابطه ی زیر متحول می شود:

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U^\dagger(t) \quad (۲۶-۱)$$

این رابطه تحول زمانی ماتریس چگالی سیستم را تنها در یک حالت خاص بیان می کند و آن هنگامی است که برهم کنش بین سیستم کوانتومی و محیط آن ضعیف باشد و اغلب در موارد دیگر صحیح نیست. برای آنکه این موضوع را به خوبی دریابید فرض کنید که در $t=0$ حالت سیستم کل، با توجه به این که حالت سیستم را با S و حالت محیط را با B نشان می دهیم، به صورت زیر باشد:

$$\rho_{SB}(0) = \rho_S \otimes \rho_B \quad (۲۷-۱)$$

حال اگر هامیلتونی سیستم و محیط به شکل زیر باشد

$$H_{SB} = H_S \otimes I_B + I_S \otimes H_B \quad (۲۸-۱)$$

در این صورت عملگر تحول سیستم و محیط به شکل ساده ی زیر در خواهد آمد:

$$U_{SB}(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_{SB}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}H_S t} \otimes e^{-\frac{i}{\hbar}H_B t} = U_S(t) \otimes U_B(t) \quad (۲۹-۱)$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\rho_{SB}(t) = U_{SB}(t)\rho_{SB}(0)U_{SB}^\dagger(t) = [U_S(t)\rho_S(0)U_S^\dagger(t)] \otimes [U_B(t)\rho_B(0)U_B^\dagger(t)] \quad (۳۰-۱)$$

در نتیجه ماتریس چگالی سیستم بعد از گذشت زمان t برابر می شود با

$$\rho_S(t) = Tr_B(\rho_{SB}(t)) = U_S(t)\rho_S(0)U_S^\dagger(t) \quad (31-1)$$

که همان معادله ی (۲۶-۱) می باشد. بنابراین ماتریس چگالی سیستم و محیط فقط موقعی به این صورت ساده تحول می یابد که برهم کنش بین سیستم و محیط برابر با صفر باشد و یا اینکه فوق العاده کوچک باشد. در این بخش می خواهیم دینامیک یک سیستم کوانتومی را برای وقتی که برهم کنش بین سیستم و محیط کوچک نیست بررسی کنیم. اهمیت این موضوع بدین سبب می باشد که در کامپیوترهای کوانتومی و به طور کلی در سیستم های کوانتومی ای که در سال ها و دهه های آینده با آن سروکار خواهیم داشت، یک سیستم کوانتومی می تواند تنها از یک یا چند یون تشکیل شده باشد و برای چنین سیستمی برهم کنش های درون سیستم به همان اندازه ی برهم کنش های بین سیستم و محیط مهم می باشد. برای آنکه دینامیک کلی یک سیستم را بررسی کنیم فرض می کنیم که در $t=0$ سیستم در یک حالت $\rho_S(0)$ و محیط در یک حالت خالص $|e\rangle$ قرار دارد. تحت این شرایط ماتریس چگالی سیستم و محیط در لحظه ی t برابر خواهد بود با

$$\rho_{SB}(t) = U(t)(\rho_S(0) \otimes |e\rangle\langle e|)U^\dagger(t) \quad (32-1)$$

که در آن $U(t)$ عملگر تحول سیستم و محیط می باشد. ماتریس چگالی سیستم با محاسبه ی رد جزیی روی محیط بدست می آید در نتیجه بدست می آوریم:

$$\rho_S(t) = Tr_B(\rho_{SB}(t)) = Tr_B(U_{SB}(t)(\rho_S(0) \otimes |e\rangle\langle e|)U_{SB}^\dagger(t)) \quad (33-1)$$

با کمی محاسبه می توان طرف راست را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\rho_A(t) = \sum_m M_m \rho_A(0) M_m^\dagger \quad (34-1)$$

که عملگرهای M_m بدین صورت معین می‌شوند:

$$M_m = \langle m | U(t) | e \rangle \quad (۳۵-۱)$$

و $\{ |m\rangle \}$ یک مجموعه پایه‌ی متعامد یکه برای محیط می‌باشد. دقت کنید که M_m ها عملگرهایی هستند که روی سیستم اثر می‌کنند به این ترتیب دینامیک عمومی سیستم کوانتومی بدست می‌آید. عملگرهای M_m ، عملگرهای کراوس خوانده می‌شوند. از تعریف این عملگرها یعنی رابطه‌ی (۳۵-۱) براحتی می‌توان نشان داد که این عملگرها رابطه‌ی زیر را برآورده می‌کنند:

$$\sum_m M_m^\dagger M_m = I \quad (۳۶-۱)$$

در این جا می‌توانیم هم تحول عمومی یک سیستم کوانتومی و هم اندازه‌گیری روی یک سیستم کوانتومی را در یک چارچوب بگنجانیم زیرا همان طور که می‌دانیم اندازه‌گیری روی یک سیستم کوانتومی نیز، ماتریس چگالی آن را به صورت $(\rho \rightarrow \sum_m E_m \rho E_m^\dagger)$ تبدیل می‌کند. بنابراین هر دوی اعمال اندازه‌گیری و تحول ماتریس چگالی ρ مطابق با رابطه‌ی زیر به ماتریس چگالی ρ' می‌نگارند:

$$\rho \rightarrow \rho' = \varepsilon(\rho) = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger \quad (۳۷-۱)$$

که در آن شرط $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$ برقرار می‌باشد. چنین نگاشتی چهار خاصیت عمده دارد:

۱. خطی است.

۲. ماتریس هرمیتی را به ماتریس هرمیتی می‌نگارد.

۳. ماتریس مثبت را به ماتریس مثبت می‌نگارد.

۴. رد ماتریس را حفظ می‌کند.

به چنین نگاشتی یک نگاشت مثبت و رد نگه‌دار^۱ می‌گوییم. طرف راست معادله‌ی (۳۷-۱) را می‌توانیم به صورت زیر نیز تعبیر کنیم:

با قرار دادن $P(m) = \text{Tr}(M_m \rho M_m^\dagger)$ و $\rho_m = \frac{M_m \rho M_m^\dagger}{P(m)}$ خواهیم داشت:

$$\varepsilon(\rho) = \sum_m P(m) \rho_m \quad (38-1)$$

حال می‌توانیم بگوییم که با احتمال $P(m)$ عملگر M_m روی حالت ρ اثر کرده است (یا از طریق اندازه‌گیری یا از طریق تحول زمانی) و حالت نهایی $\varepsilon(\rho)$ مخلوطی از تمام حالات مختلفی است که ممکن است در اثر فرآیندهای مختلف بوجود آمده باشند. توجه کنید که گاهی اوقات از نام کانال برای این تحولات زمانی یا نگاشتها استفاده می‌شود.

۱-۵-۱- قضیه‌ی کراوس

دیدیم که هم فرآیندهای اندازه‌گیری و هم دینامیک عمومی یک سیستم را می‌توان با نگاشتی به صورت زیر نشان داد

$$\rho \rightarrow \varepsilon(\rho) = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger \quad (39-1)$$

که در آن شرط $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$ برقرار است. این نگاشت دارای این خاصیت‌ها می‌باشد که خطی است، رد را نگاه می‌دارد و ماتریس هرمیتی مثبت را به ماتریس هرمیتی مثبت می‌نگارد. اکنون می‌توانیم این

^۱- Trace preserving positive map

سوال را وارونه بپرسیم به این معنا که اگر نگاشتی مثل

$$\rho \rightarrow \rho' = \varepsilon(\rho) \quad (40-1)$$

داشته باشیم که ماتریس چگالی را به ماتریس‌های چگالی می‌نگارد و دارای خواص بالا باشد آیا این نگاشت به صورت (۳۹-۱) هست یا خیر؟ پاسخ این سوال با یک شرط اضافه مثبت است و این محتوی قضیه‌ای موسوم به قضیه‌ی کراوس را تشکیل می‌دهد. اما قبل از بیان و اثبات این قضیه می‌بایست این شرط اضافه را تعریف کنیم این شرط اضافه، شرط کاملاً مثبت بودن نگاشت می‌باشد. فرض کنید که $\varepsilon: L(V) \rightarrow L(V)$ نگاشتی مثبت از فضای عملگرهای روی V به عملگرهای روی همان فضا باشد. در این‌جا منظور از $L(V)$ فضای عملگرهای V به V می‌باشد. در این صورت این نگاشت را کاملاً مثبت^۱ می‌گوییم اگر به ازای هر فضای W نگاشت زیر نیز مثبت باشد:

$$\varepsilon \otimes I: L(V \otimes W) \rightarrow L(V \otimes W) \quad (41-1)$$

نخست بهتر است مثالی از یک نگاشت مثبت ولی نه کاملاً مثبت ارائه دهیم تا معلوم شود که همه‌ی نگاشت‌های مثبت کاملاً مثبت نیستند این مثال چیزی نیست جز عملگری که یک ماتریس را به ترانهاده‌ی آن می‌نگارد. نگاشت ترانهاده به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\varepsilon: \rho \rightarrow \rho^T \quad (42-1)$$

حال گسترش این نگاشت به طریقی که در شرط (۴۱-۱) آمده است به صورت زیر خواهد بود که در آن، از این حقیقت استفاده کرده‌ایم که یک ماتریس دلخواه ρ را همواره می‌توان به صورت $\rho = \sum_i a_i \otimes b_i$

^۱- completely positive

تجزیه کرد:

$$(\varepsilon \otimes I)(\rho) = (\varepsilon \otimes I)(\sum_i a_i \otimes b_i) = \sum_i a_i^T \otimes b_i = \rho^{T_A} \quad (43-1)$$

این عملگر در واقع عناصر اول را در ضرب تانسوری، ترانهاده می کند و عناصر دوم را دست نخورده باقی می گذارد به همین دلیل آن را با نماد $\varepsilon: \rho \rightarrow \rho^{T_A}$ نمایش می دهیم. تعریف مشابهی برای $\rho \rightarrow \rho^{T_B}$ وجود دارد (در این جا فرض کرده ایم که فضای برداری V و W به ترتیب فضاهای برداری A و B می باشند) اثر ترانهادی جزیی به شکل صریح عبارت است از:

$$(\rho^{T_A})_{i\mu, j\nu} = (\rho)_{j\mu, i\nu} \quad , \quad (\rho^{T_B})_{i\mu, j\nu} = (\rho)_{i\nu, j\mu} \quad (44-1)$$

به عنوان مثال صریح تر اگر ρ به شکل ماتریس زیر باشد:

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix} \quad (45-1)$$

آنگاه ماتریس های ρ^{T_B} و ρ^{T_A} به ترتیب عبارتند از:

$$\rho^{T_A} = \begin{pmatrix} a & b & i & j \\ e & f & m & n \\ c & d & k & l \\ g & h & o & p \end{pmatrix} \quad (46-1)$$

$$\rho^{T_B} = \begin{pmatrix} a & e & c & g \\ b & f & d & h \\ i & m & k & o \\ j & n & l & p \end{pmatrix} \quad (47-1)$$

دقت کنید که نگاشت ترانهاده واقعا یک نگاشت خطی و مثبت است زیرا ویژه مقادیر یک ماتریس را تغییر نمی‌دهد اما توسعه‌ی این عملگر و ترانهاده‌ی جزیی یک عملگر مثبت نخواهد بود. برای مثال ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & x & y \\ & y & x \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (48-1)$$

ویژه مقادیر این ماتریس عبارتند از $x-y$ ، $x+y$ ، 1 و 1 که هر گاه $x > y > 0$ باشد همگی مثبت خواهند بود اما اگر ترانهاده‌ی جزیی این ماتریس را حساب کنیم بدست می‌آوریم:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & & y \\ & x & \\ & & x \\ y & & & 1 \end{pmatrix} \quad (49-1)$$

که ویژه مقادیرش عبارتند از $x, x, 1+y, 1-y$ که اگر $y > 1$ باشد می‌تواند مقدار منفی داشته باشد با این مثال نشان داده‌ایم که نگاشت ترانهاده یک نگاشت خطی مثبت است ولی کاملا مثبت نیست.

در این جا با یک سوال مهم مواجه می‌شویم و آن این است، که آیا نگاشتی که تحول یک ماتریس چگالی را بیان می‌کند تنها می‌بایست یک نگاشت خطی و مثبت باشد یا اینکه می‌بایست یک نگاشت خطی و کاملا مثبت باشد؟ پاسخ این سوال این است، که دینامیک یک ماتریس چگالی حتما می‌بایست توسط یک نگاشت کاملا مثبت بیان شود، زیرا سیستم A می‌تواند جزیی از یک سیستم بزرگتر AB باشد و آلیس می‌تواند فقط روی این سیستم عمل کند (اندازه‌گیری یا تحول) و این عمل هم‌چنان می‌بایست ماتریس چگالی سیستم بزرگتر ρ_{AB} را به یک ماتریس چگالی تبدیل کند بنابراین نگاشت $\varepsilon_A \otimes I_B$ می‌بایست

همچنان مثبت باشد.

قضیه‌ی کراوس : فرض کنید که $\varepsilon: L(V_A) \rightarrow L(V_A)$ یک ابرعملگر خطی و کاملاً مثبت و ردنگهدار باشد در این صورت حتماً این عملگر را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon(\rho) = \sum_m M_m \rho M_m^\dagger \quad (۵۰-۱)$$

که در آن $\sum_m M_m^\dagger M_m = I$ می‌باشد. بلعکس هر عملگری که مطابق با رابطه‌ی بالا تعریف شود حتماً یک عملگر خطی کاملاً مثبت و رد نگهدار می‌باشد [۳].

که با توجه به این قضیه می‌توان قضیه‌ی زیر را نیز بیان کرد.

قضیه ۴ : هر ابرعملگر کوانتومی روی یک سیستم d بعدی را می‌توان با تعداد کمتر یا مساوی d^2 عملگر کراوس بیان کرد [۳].

به عنوان مثال برای توصیف کلی‌ترین ابرعملگر کوانتومی برای یک سیستم تک کیوبیتی که دو بعدی می‌باشد و در یک محیط شامل تعداد نامتناهی از فوتون‌ها، که یک سیستم بی‌نهایت بعدی می‌باشد، قرار دارد تعداد عملگرهای کراوس لازم طبق این قضیه حداکثر چهار تا می‌باشد.

فصل دوم: ماشین‌های گرمایی کوانتومی دوکیوبیتی

۲-۱- مقدمه

موتورهای گرمایی کوانتومی^۱ (یک نوع از ماشین‌های گرمایی کوانتومی) کار را با استفاده از ماده‌ی کوانتومی به عنوان ماده‌ی کارشان^۲ ارائه می‌دهند. موتورهای گرمایی کوانتومی نمونه‌های خوبی جهت مطالعه‌ی رابطه‌ی میان ترمودینامیک و مکانیک کوانتومی می‌باشند. ضمناً آن‌ها می‌توانند تفاوت میان سیستم‌های ترمودینامیکی کلاسیکی و کوانتومی را مشخص کنند و از این رو، به ما کمک می‌کنند تفاوت میان فرآیندهای ترمودینامیکی کلاسیکی و کوانتومی را بهتر درک کنیم. موتور گرمایی کارنوی کلاسیکی ماشین مشهوری می‌باشد که کار را در چرخه‌های کلاسیکی انجام می‌دهد. جزئیات ترمودینامیکی چهار حرکت در چرخه ساده هستند و مکانیسم فیزیک عمومی موتورهای گرمایی را نشان می‌دهند در حال حاضر مطالعه درباره‌ی موتورهای گرمایی کوانتومی (QHEs) بیشتر بر روی مانسته‌ی کوانتومی موتور کارنوی کلاسیکی تمرکز دارد یعنی موتورهای کارنوی کوانتومی^۳ (QCEs). هر چرخه‌ی موتورهای گرمایی کوانتومی متشکل از چندین فرآیند ترمودینامیکی پایه‌ای، از قبیل فرآیندهای بی‌درروی کوانتومی^۴، فرآیندهای هم‌دمای کوانتومی^۵ و فرآیندهای هم‌حجم کوانتومی^۶ می‌باشد. در این فصل مفاهیم فرآیندهای هم‌دمای، هم‌حجم و بی‌دررو در توصیف‌های مکانیک کوانتومی آن‌ها توضیح داده می‌شود [۶-۷]. در این جا

۱- Quantum heat engines

۲- working substance

۳- Quantum Carnot engines

۴- quantum adiabatic processes(QA)

۵- quantum isothermal processes(QIT)

۶- quantum isochoric processes(QIC)

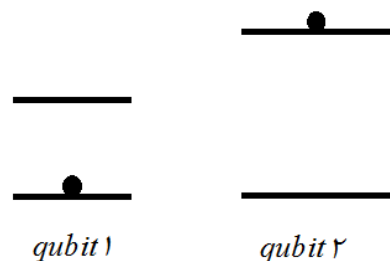
فرض می‌کنیم تمامی فرآیندهای چرخه‌های ترمودینامیکی ما بی‌نهایت آهسته یا تدریجی هستند، یعنی بازه‌ی زمانی هر فرآیند خیلی طولانی فرض شده است این موضوع لازمه‌ی فرآیندهای شبه‌ایستا می‌باشد.

۲-۲- فرآیندهای اساسی ترمودینامیک کوانتومی

برای تعریف فرآیندهای هم‌دما و هم‌حجم کوانتومی در ابتدا نیاز به بررسی ماده‌ی کار داریم. در این‌جا یک سیستم کوانتومی دلخواه با یک تعداد محدود از ترازهای انرژی به صورت ماده‌ی کار مورد استفاده قرار می‌گیرد البته این می‌تواند به سیستمی با تعداد نامتناهی از ترازهای انرژی تعمیم یابد. هامیلتونی آزاد ماده‌ی کار می‌تواند به این صورت نوشته شود:

$$H = \sum E_n |n\rangle\langle n| \quad (1-2)$$

که $|n\rangle$ ، n امین ویژه حالت سیستم و E_n ویژه انرژی متناظر با آن می‌باشد.



شکل (۱-۲): ماده‌ی کار یک موتور کارنوی کوانتومی دو کیوبیتی

بدون زیان کلی می‌توانیم ویژه انرژی حالت پایه $|0\rangle$ را به عنوان نقطه‌ی مرجع انتخاب می‌کنیم و بنابراین هامیلتونی (۱-۲) را می‌توان بدین صورت نوشت:

$$H = \sum_n (E_n - E_0) |n\rangle\langle n| \quad (2-2)$$

انرژی داخلی U ماده‌ی کار را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$U = \langle H \rangle = \sum_n P_n E_n \quad (3-2)$$

که P_n توزیع اشغالی^۱ در n امین ویژه حالت می باشد. برای تعریف روشنی از فرآیندهای هم‌دما و هم‌حجم کوانتومی، ما نیاز به تعیین کردن مشابه کوانتومی گرمای مبادله شده dQ و dW داریم. با توجه به معادله‌ی (۳-۲) رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$dU = \sum_n (E_n dP_n + P_n dE_n) \quad (4-2)$$

در ترمودینامیک کلاسیک اولین قانون ترمودینامیک بدین صورت بیان می‌شود:

$$dU = dQ + dW \quad (5-2)$$

که مانسته‌ی کوانتومی dQ و dW با توجه به رابطه‌ی $S = -k \sum_i P_i \ln P_i$ به صورت زیر می‌باشد:

$$dQ = \sum_n E_n dP_n \quad (6-2)$$

$$dW = \sum_n P_n dE_n \quad (7-2)$$

معادله‌ی (۷-۲) دلالت بر این دارد که کار انجام شده متناظر با تغییر در ویژه مقادیر انرژی سیستم می‌باشد. بنابراین نسخه کوانتومی قانون اول ترمودینامیک فقط از معادله‌ی (۴-۲) با تعاریف کوانتومی مربوطه پیروی می‌کند یعنی معادله‌ی (۶-۲) و (۷-۲).

^۱- occupation distribution

۲-۲-۱- فرآیند همدمای کوانتومی

در فرآیند همدمای کوانتومی، ماده‌ی کار همچون یک ذره‌ی محبوس شده در چاه انرژی پتانسیل^۱، در تماس با یک منبع گرمایی در یک دمای ثابت نگه داشته شده است و می‌تواند کار مثبت بر بیرون انجام دهد و در ضمن از منبع گرما جذب کند. هر دوی گاف انرژی و احتمال‌های اشغالی به صورت همزمان نیاز به تغییر دارند به طوری که سیستم در یک حالت تعادل با منبع گرمایی در هر لحظه باقی می‌ماند. در این فصل ما به طور ویژه سیستمی با دو تراز با حالت برانگیخته $|e\rangle$ ، حالت پایه‌ی $|g\rangle$ و یک جدایی انرژی Δ را بررسی می‌کنیم. در فرآیند همدمای کوانتومی شبه‌ایستا نسبت دو احتمال اشغالی P_e و P_g ، $r = \frac{P_e}{P_g}$ ، میبایستی توزیع بولتزمنی $r = \frac{P_e}{P_g} = \exp[-\beta\Delta(t)]$ و همچنین شرط بهنجارش $P_e + P_g = 1$ را برآورده کند. $\Delta(t)$ خیلی آهسته با زمان تغییر می‌کند و از این رو r می‌تواند به این صورت نوشته شود:

$$r \equiv r(t) = \frac{P_e}{P_g} = e^{-\beta\Delta(t)} \quad (۲-۸)$$

$\beta = \frac{1}{k_B T}$ است که k_B ثابت بولتزمن و T دما می‌باشد. در یک فرآیند به‌قدر کافی آهسته، در هر لحظه سیستم در تعادل ترمودینامیکی با منبع گرمایی باقی می‌ماند.

۲-۲-۲- فرآیند هم‌حجم کوانتومی

یک فرآیند هم‌حجم کوانتومی جزئیاتی شبیه فرآیند هم‌حجم کلاسیکی دارد در یک فرآیند هم‌حجم کوانتومی ماده‌ی کار در تماس با یک منبع گرمایی قرار دارد زمانی که میان ماده‌ی کار و منبع

^۱- potential energy well

گرمایی، گرما مبادله می‌شود هیچ کاری انجام نمی‌شود این همانند آن چیزی است که در یک فرآیند هم‌حجم کلاسیکی اتفاق می‌افتد. در یک فرآیند هم‌حجم کوانتومی احتمال‌های اشغالی P_n و هم‌چنین آنترופی S تا زمانی تغییر می‌کنند، که ماده‌ی کار سرانجام به تعادل گرمایی با منبع گرمایی نائل شود. به طور مشابه در یک فرآیند هم‌حجم کلاسیکی فشار P و دمای T تغییر می‌کند و ماده‌ی کار در انتهای این فرآیند به تعادل گرمایی با منبع گرم می‌رسد. برای مثال اگر ماده‌ی کار یک ذره‌ی محبوس در چاه پتانسیل مربعی باشد هیچ کاری در طی یک فرآیند هم‌حجم کوانتومی، زمانی گرما جذب یا منتشر می‌شود، انجام نمی‌شود و توزیع‌های اشغالی هر ویژه حالت توزیع بولتزمنی را در انتهای فرآیند هم‌حجم کوانتومی برآورده می‌کنند.

۲-۳- فرآیند بی‌درروی کوانتومی

یک فرآیند ترمودینامیکی بی‌درروی کلاسیک می‌تواند در جملاتی از یک فرآیند ترمودینامیکی بی‌درروی کوانتومی فرمول‌بندی شود زیرا فرآیندهای بی‌درروی کوانتومی به قدر کافی آهسته پیش می‌روند چنان که شرط عمومی بی‌درروی کوانتومی برآورده شود پس، توزیع‌های جمعیت بدون تغییر باقی می‌ماند، یعنی $dP_n = 0$. بر طبق معادله‌ی (۲-۶)، $dQ = 0$ ، هیچ تبادل گرمایی در فرآیند بی‌درروی کوانتومی وجود ندارد اما کار بر طبق معادله‌ی (۲-۷) هنوز می‌تواند غیرصفر باشد. در یک فرآیند بی‌درروی کلاسیکی ضرورتی وجود ندارد که احتمال‌های اشغالی ثابت نگه داشته شوند. برای مثال وقتی که فرآیند خیلی سریع پیش رود، شرط بی‌درروی کوانتومی برآورده نشده است و برانگیختگی داخلی احتمالی اتفاق خواهد افتاد اما با این وجود هیچ گرمایی میان ماده‌ی کار و منبع گرمایی مبادله نمی‌شود این فرآیند ترمودینامیکی، یک فرآیند بی‌درروی کلاسیک است اما بی‌درروی کوانتومی نیست.

جدول (۱-۲): فرآیندهای اساسی ترمودینامیکی. تغییر یک کمیت با VAR و ثابت بودن یک کمیت با INV نشان داده شده است.

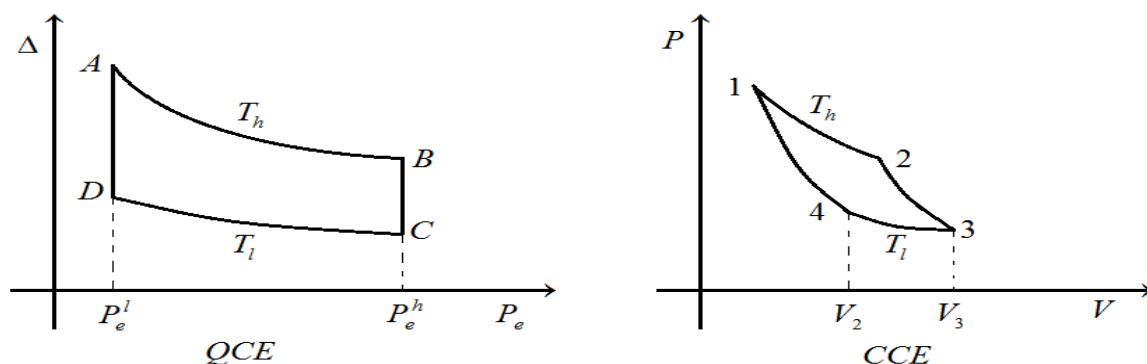
فرآیند	فرآیند هم‌دما	فرآیند هم‌حجم	فرآیند بی‌دررو
کلاسیکی	گرما جذب یا منتشر شده است کار انجام شده است $INV: U, T \quad VAR: P, V$	گرما جذب یا منتشر شده است کار انجام نشده است $INV: V \quad VAR: P, T$	در این فرآیند هیچ گرمایی مبادله نمی‌شود کار انجام شده است $VAR: P, V, T$
کوانتومی	گرما جذب یا منتشر شده است کار انجام شده است $INV: T \quad VAR: U, E_n, P_n$	گرما جذب یا منتشر شده است کار انجام نشده است $INV: E_n \quad VAR: P_n, T_{eff}$	در این فرآیند هیچ گرمایی مبادله نمی‌شود کار انجام شده است $INV: P_n \quad VAR: E_n, T_{eff}$

۲-۳- بازگشت‌پذیری ترمودینامیکی چرخه‌ی موتور کارنوی کوانتومی

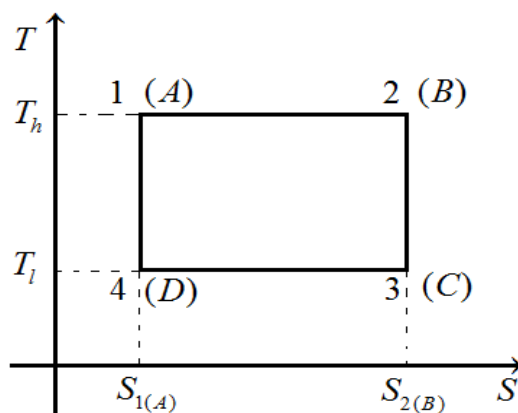
بر مبنای تعاریف فرآیندهای کوانتومی، چرخه‌ی QCE و جزئیات آن را بررسی می‌کنیم. چرخه‌ی QCE ، دقیقا مانند همتای کلاسیکی‌اش، متشکل از دو فرآیند هم‌دمای کوانتومی ($A \rightarrow B, C \rightarrow D$) و دو فرآیند بی‌درروی کوانتومی ($B \rightarrow C, D \rightarrow A$) می‌باشد.

این موضوع واضح می‌باشد که بازگشت‌پذیری^۱ در مکانیک کوانتومی، همبسته با تحول یکانی است. برخلاف بازگشت‌پذیری در مکانیک کوانتومی، بازگشت‌پذیری در ترمودینامیک کوانتومی توام با منبع گرمایی و دمای موثر ماده‌ی کار می‌باشد.

^۱- reversibility



نمودار (۱-۲): چرخه‌ی QCE و CCE . نشان‌دهنده‌ی نمودار چرخه‌ی موتور کارنوی کوانتومی برای یک سیستم دو ترازه می‌باشد که Δ جدایی تراز میان دو تراز انرژی می‌باشد و P_e احتمال اشغالی در حالت برانگیخته می‌باشد. CCE نشان‌دهنده‌ی نمودار فشار-حجم چرخه موتور کارنوی کلاسیکی می‌باشد که ماده‌ی کار آن گاز ایده‌آل می‌باشد



نمودار (۲-۲): نمودار دما-آنترופی برای موتور کارنوی کوانتومی مبتنی بر یک سیستم دوترازه و یک موتور کارنوی کلاسیکی با گاز ایده‌آل به عنوان ماده‌ی کار. نقطه اتصال موتور کارنوی کلاسیکی و کوانتومی نمودار دما-آنترופی می‌باشد.

برای این که تضمین کنیم که چرخه بازگشت‌پذیر می‌باشد اعمال دو شرط بر فرآیند بی‌درروی کوانتومی

مورد نیاز هست:

(۱) بعد از فرآیند بی‌درروی کوانتومی $B \rightarrow C$ ، ما می‌توانیم یک دمای موثر T_l برای توصیف کردن ماده‌ی کار بکار ببریم یعنی ماده‌ی کار در انتهای فرآیند توزیع بولتزمنی را برآورده می‌کند.

(۲) دمای موثر T_l ماده‌ی کار بعد از فرآیند بی‌درروی کوانتومی، برابر با دمای T_l منبع گرمایی در طی فرآیند هم‌دمای کوانتومی $C \rightarrow D$ می‌باشد.

وقتی که هر یک از این شرایط برآورده نشده باشد، یک فرآیند گرم کردن ماده‌ی کار ناگزیر قبل از فرآیند هم‌دمای کوانتومی $C \rightarrow D$ مورد نیاز است و چون در یک فرآیند گرم کردن، آنتروپی کل ماده‌ی کار و منبع غیر صفر می‌باشد پس این فرآیند گرم سازی غیر بازگشت‌پذیر می‌باشد. برای مثال اگر ماشین گرمایی کارنوی دو کیوبیتی را مورد بررسی قرار دهیم دو شرط بالا بدین صورت بیان خواهد شد:

(i) همه‌ی گاف‌های انرژی (همه‌ی فاصله‌ی سطوح انرژی) در فرآیندهای بی‌درروی کوانتومی با نسبت یکسان تغییر می‌کند

$$E_n(B) - E_m(B) = \lambda [E_n(C) - E_m(C)] \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9-2)$$

(ii) نسبت تغییر فاصله‌ی سطوح انرژی در فرآیند بی‌دررو (از B به C یا از A به D) باید برابر با نسبت دماهای منبع‌های گرمایی باشد، یعنی

$$\lambda = \frac{T_h}{T_l} \quad (10-2)$$

اکنون، فرض کنید که ماده‌ی کار در تعادل با یک منبع گرمایی در دمای T_h در نقطه‌ی B قبل از فرآیند بی‌درروی $B \rightarrow C$ می‌باشد در این مورد حالت کوانتومی به وسیله‌ی یک عملگر چگالی توصیف می‌شود:

$$\rho(B) = \frac{1}{Z} \sum_n e^{-\beta_h E_n(B)} |n(B)\rangle \langle n(B)| \quad (۱۱-۲)$$

در انتهای فرآیند بی‌دررو $B \rightarrow C$ در نقطه‌ی C ، ویژه انرژی‌های ماده‌ی کار $E_n(C)$ شده و ماده‌ی کار به یک دمای موثر T_l می‌رسد احتمال‌های اشغالی P_n ماده‌ی کار در طی فرآیند بی‌درروی $B \rightarrow C$ بدون تغییر باقی می‌ماند و آن‌ها توزیع بولتزمن را برآورده می‌کنند بنابراین، برای ویژه حالت‌های $|n\rangle$ و $|m\rangle$ ، احتمال‌های اشغالی P_m و P_n در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$\frac{P_n(B)}{P_m(B)} = \frac{P_n(C)}{P_m(C)} \rightarrow \frac{\exp[-\beta_h E_n(B)]}{\exp[-\beta_h E_m(B)]} = \frac{\exp[-\beta_l E_n(C)]}{\exp[-\beta_l E_m(C)]} \quad (۱۲-۲)$$

به عبارت دیگر برای هر m و n داریم:

$$E_n(C) - E_m(C) = \frac{T_l}{T_h} [E_n(B) - E_m(B)] \quad (۱۳-۲)$$

معادله‌ی (۱۳-۲) یک ترکیب از هر دو شرایط (i) و (ii) می‌باشد. بنابراین دو شرط (i)، همه‌ی گاف‌های انرژی در فرآیند بی‌درروی کوانتومی به نسبت یکسان تغییر می‌کنند، و (ii)، این نسبت برابر نسبت دماهای دو منبع گرمایی است، شرایط لازم و کافی برای بازگشت‌پذیری ترمودینامیکی چرخه‌ی موتور کارنوی کوانتومی می‌باشد.

بازدهی ماشین گرمایی کارنوی کوانتومی دو کیوییتی بدین صورت می‌باشد:

$$\eta_c = 1 - \frac{T_l}{T_h} \quad (۱۴-۲)$$

که می‌توانیم آن را در جملاتی از نسبت فاصله‌ی سطوح انرژی بیان کنیم:

$$\eta_c = 1 - \frac{E_n(C) - E_m(C)}{E_n(B) - E_m(B)} \quad (2-15)$$

که در این جا $E_n(B) - E_m(B)$ و $E_n(C) - E_m(C)$ گافهای سطوح انرژی در ابتدای (B) و در انتهای (C) فرآیند انبساط بی‌درروی کوانتومی $B \rightarrow C$ می‌باشد. برای اینکه کار مثبت از منبع استخراج شود معادله‌ی (۲-۱۴) یک محدودیت $T_h \rangle T_l$ بر روی دماهای دو منبع گرمایی اعمال می‌کند، این قید به عنوان شرط کار مثبت^۱ (PWC) بر روی دماهای دو منبع گرمایی اعمال می‌شود. این قید مانند همتای کلاسیکی‌اش می‌باشد. در جدول زیر جزئیات دو مدل موتور کارنوی کلاسیکی و کوانتومی لیست شده‌اند.

جدول (۲-۱): مقایسه جزئیات موتور کارنوی کوانتومی و کلاسیکی

PWC	بازدهی	الزامها بر روی CA و QA	مسیر چرخه	موتور کارنو
$T_h \rangle T_l$	$\eta = 1 - \frac{T_l}{T_h}$	$\frac{T_l}{T_h} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}$	$CIT - CA - CIT - CA$	کلاسیکی
$T_h \rangle T_l$	$\eta = 1 - \frac{T_l}{T_h}$	$\frac{T_l}{T_h} = \frac{E_n(C) - E_m(C)}{E_n(B) - E_m(B)}$ for $\forall m, n$	$QIT - QA - QIT - QA$	کوانتومی

^۱- positive-work condition

فصل سوم: کیوبیت‌های مجازی و دماهای مجازی

۳-۱- مقدمه

در این فصل ما بر روی این موضوع تاکید می‌کنیم، که ماشین‌های گرمایی می‌توانند از منظر کیوبیت‌های مجازی در دماهای مجازی فهمیده شوند [۷]. یک روش برای نشان دادن دو منبع گرمایی، که یک ماشین گرمایی را به جلو می‌برند، نشان دادن آن‌ها به صورت یک سیستم مرکب^۱ می‌باشد. کیوبیت‌های مجازی زیرسیستم‌های دو ترازه‌ای این ترکیب می‌باشند و دمای مجازی آن‌ها می‌تواند هر مقدار مثبت یا منفی بگیرد. ماشین‌های گرمایی بر روی یک سیستم خارجی بدین گونه اثر می‌کنند، که سیستم خارجی را در تماس گرمایی با یک بازه‌ی خوب انتخاب شده از کیوبیت‌ها و دماهای مجازی قرار می‌دهند. ما این موضوع را بوسیله‌ی بررسی کوچک‌ترین ماشین‌های گرمایی تحلیل می‌کنیم. ما قدرتمند بودن این دیدگاه را بوسیله‌ی تحلیل برخی مفاهیم و پدیده‌های ترمودینامیکی مانند بازدهی کارنو، جریان‌های آنتروپی و وارونگی جمعیت^۲ نشان خواهیم داد.

ترمودینامیک کوانتومی توصیفی عمیق از پدیده‌هایی که در فصل مشترک مکانیک کوانتومی و ترمودینامیک هستند، ارائه می‌دهد. آغاز این رشته از تحقیق، به سال ۱۹۵۰ برمی‌گردد زمانی که تحلیل ترمودینامیکی لیزرها مورد بررسی قرار گرفته بود. که علاقه‌ی قابل توجهی که در این شاخه وجود داشته است منجر به نتایج زیادی در مورد ماشین‌های گرمایی کوانتومی شده است. از جمله ماشین‌های گرمایی کوانتومی که اخیرا بسیار مورد توجه بوده است، کوچک‌ترین ماشین‌های گرمایی خودسازگار ممکن می‌باشد. خودسازگار بودن بدین معنی است که هیچ نوع چشمه یا کار خارجی یا کنترل دیگری مجاز

۱- composite system

۲- population inversion

نمی‌باشد و تنها بر هم‌کنش‌های ناهمدوس^۱ با منبع‌های گرمایی در دماهای مختلف وجود دارد. در این فصل، ما با استفاده از مفهوم کیوبیت‌های مجازی و دماهای مجازی، مکانیسم کوچک‌ترین ماشین‌های گرمایی- یخچال‌ها، پمپ‌های گرمایی و موتورهای گرمایی- را توضیح خواهیم داد با این مزیت، که کارکرد همه‌ی آن‌ها از طریق یک مکانیسم ساده قابل بیان می‌باشد. دقت کنید که این ماشین‌های گرمایی کوانتومی، همگی، یک سیستم خارجی را در تماس گرمایی با یک کیوبیت مجازی خوب انتخاب شده، در یک دمای مجازی خوب انتخاب شده قرار می‌دهند.

ما خواهیم دید، که چگونه کیوبیت مجازی یک روش طبیعی برای درک کار^۲، در عبارت‌هایی از وارونگی جمعیت و دماهای منفی را ارائه می‌دهد و هم‌چنین، با توجه به این مفاهیم در فصل بعد خواهیم دید که در حد کارنو کوچک‌ترین ماشین‌های گرمایی بازدهی دارند، که جهانی^۳ می‌باشد(به عبارتی مستقل از جزئیات مدل).

۳-۲- کیوبیت مجازی

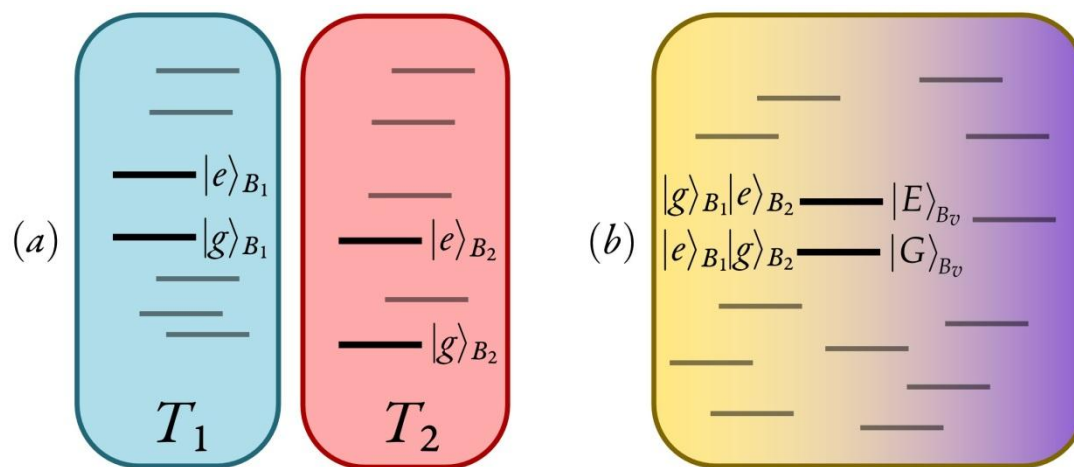
فرض کنید که دو منبع گرمایی غیر برهم‌کنش کننده در دماهای مختلف T_1 و T_2 داریم حالت هر منبع به تنهایی، بدیهی است که، یک توزیع بولتزمنی می‌باشد. به هر حال، ماشین‌های گرمایی به وسیله‌ی دست یافتن به هر دو منبع کار می‌کنند از این رو، دیدن یا درک هر دو منبع با هم‌دیگر، به صورت یک سیستم مرکب بسیار مناسب می‌باشد. ساختار این سیستم، که می‌تواند پیچیده‌تر از ساختار اجزای تشکیل

۱- incoherent interactions

۲- work

۳- universal

دهنده‌اش به نظر نرسد ، در واقع یک ساختار ارزشمند می‌باشد. یک کیوبیت مجازی^۱ بنیادی‌ترین زیر فضا در فضای هیلبرت منبع مرکب می‌باشد، یعنی یک زیر فضای دو بعدی. آنچه کیوبیت‌های مجازی را جالب توجه می‌کند این می‌باشد که کیوبیت مجازی به نحوی رفتار می‌کند که انگار دارای دمای مجازی^۲ T_v می‌باشد. که این دمای T_v ، می‌تواند خیلی متفاوت از دماهای T_1 و T_2 مربوط به منبع‌های گرمایی باشد. T_v می‌تواند کوچکتر یا بزرگتر از دماهای دو منبع یا حتی منفی باشد. برای بررسی دقیق‌تر ، دو ویژه حالت دلخواه انرژی در منبع ۱ با جدایی انرژی ε_1 ، که ما آن‌ها را با $|g\rangle_{B_1}$ و $|e\rangle_{B_1}$ مشخص می‌کنیم، و دو ویژه حالت دلخواه منبع ۲ با جدایی انرژی ε_2 را، که ما آن‌ها را با $|g\rangle_{B_2}$ و $|e\rangle_{B_2}$ مشخص می‌کنیم، در نظر بگیریم.



شکل (۳-۱): کیوبیت مجازی. (a) دو منبع یکی در دمای T_1 و دیگری در دمای T_2 . در هر منبع ما دو ویژه حالت انرژی دلخواه ، $|g\rangle_{B_i}$ و $|e\rangle_{B_i}$ ، با جدایی ε_i مشخص می‌کنیم . (b) این دو منبع می‌توانند به صورت یک تک منبع مرکب نشان داده شوند.

۱- virtual qubit

۲- virtual temperature

با توجه به این حالات چهار ویژه حالت انرژی سیستم مرکب به صورت $|g\rangle_{B_1}|g\rangle_{B_2}$ ، $|g\rangle_{B_1}|e\rangle_{B_2}$ ، $|e\rangle_{B_1}|g\rangle_{B_2}$ و $|e\rangle_{B_1}|e\rangle_{B_2}$ می‌باشند. به طور ویژه، کیوبیت‌های مجازی تشکیل شده از حالت‌های $|g\rangle_{B_1}|e\rangle_{B_2}$ و $|e\rangle_{B_1}|g\rangle_{B_2}$ را مورد توجه قرار می‌دهیم. بدون زیان کلی، می‌توانیم ε_2 را فرض کنیم. با این انتخاب این دو حالت یک کیوبیت مجازی با جدایی تراز $\varepsilon_v = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ تشکیل می‌دهند. به آسانی حالت پایه و برانگیخته‌ی کیوبیت مجازی به ترتیب، بدین صورت معین می‌شوند:

$$|E\rangle_{B_v} = |g\rangle_{B_1}|e\rangle_{B_2} \quad |G\rangle_{B_v} = |e\rangle_{B_1}|g\rangle_{B_2} \quad (۱-۳)$$

که در شکل (۱-۳) نشان داده شده است. دمای مجازی این کیوبیت می‌تواند بوسیله‌ی در نظر گرفتن نسبت اشغالی‌های P_v^G و P_v^E ، حالت برانگیخته و حالت پایه، بدست آید:

$$e^{-\frac{\varepsilon_v}{T_v}} = \frac{P_v^E}{P_v^G} \quad (۲-۳)$$

از این نظر که هر منبع به طور مجزا در توزیع بولتزمنی می‌باشد، بنابراین انبوهی‌های اشغالی ویژه حالت‌های هر منبع تک، روابط زیر را برآورده می‌کنند:

$$P_1^e = p_1^g e^{-\frac{\varepsilon_1}{T_1}} \quad P_2^e = p_2^g e^{-\frac{\varepsilon_2}{T_2}} \quad (۳-۳)$$

از این رو می‌بینیم که

$$P_v^E = P_1^g P_2^e = P_1^g P_2^g e^{-\frac{\varepsilon_2}{T_2}}$$

$$P_v^G = P_1^e P_2^g = P_1^g P_2^g e^{-\frac{\varepsilon_1}{T_1}} \quad (۴-۳)$$

و بنابراین بدست می‌آوریم:

$$e^{\frac{-\varepsilon_v}{T_v}} = \frac{e^{\frac{-\varepsilon_2}{T_2}}}{e^{\frac{-\varepsilon_1}{T_1}}} \quad (5-3)$$

که این رابطه دمای مجازی کیوبیت مجازی را بدین صورت به ما می‌دهد:

$$T_v = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\frac{\varepsilon_2}{T_2} - \frac{\varepsilon_1}{T_1}} \quad (6-3)$$

توجه کنید که در حالت کلی، دمای مجازی می‌تواند یک گستره از مقادیر را بگیرد. T_v می‌تواند مقادیری خارج از گستره‌ی T_1 و T_2 ، یا کوچکتر یا بزرگتر از هر دوی آن‌ها را بگیرد و می‌تواند حتی مقادیر منفی نیز بگیرد. برای مثال اگر ما کیوبیت‌های مجازی متشکل از $|e\rangle_{B_1}|e\rangle_{B_2}$ و $|g\rangle_{B_1}|g\rangle_{B_2}$ را بررسی کنیم آنگاه دمای مجازی محدود به گستره‌ی میان T_1 و T_2 خواهد بود. به این نکته توجه کنید که در یک جفت منبع ماکروسکوپی به طور ذاتی تعداد نامحدودی کیوبیت مجازی، که هر کدام در جدایی تراز معین ε_v و دمای مجازی T_v می‌باشند، وجود دارد.

۳-۳- ماشین‌های گرمایی

همه‌ی چیزی که یک ماشین گرمایی انجام می‌دهد قرار دادن یک سیستم خارجی در تماس گرمایی با یک مجموعه‌ی محصور از کیوبیت‌های مجازی در منبع مرکب می‌باشد که این کیوبیت‌ها دارای یک بازه‌ی محصور از دماهای مجازی می‌باشد. سیستم خارجی به سادگی تحت تاثیر کیوبیت‌های مجازی واقع می‌شود. سیستم خارجی به همان صورتی تحت تاثیر این کیوبیت‌های مجازی قرار می‌گیرد که به نظر می‌رسد در تماس گرمایی با کیوبیت‌های واقعی در همان دما می‌باشد. اگر دما به طور برجسته کوچکتر از منبع‌های منحصر به فرد باشد ماشین یک یخچال می‌باشد و اگر دما به طور برجسته بزرگتر باشد، آنگاه آن یک پمپ گرمایی می‌باشد و سرانجام، اگر دما منفی باشد ماشین یک موتور گرمایی می‌باشد.

ماشین‌های گرمایی به طور هم‌زمان مانند یک جفت کننده^۱ و یک فیلتر^۲ عمل می‌کنند. ماشین‌های گرمایی یک جفت‌شدگی میان سیستم و منبع‌های خارجی مقرر می‌کنند اما همچنان فیلتر تنها یک بازه‌ی محصور از دماهای مجازی را بیرون می‌کشد یا به عبارتی فیلتر می‌کند. سوال مهمی که در این‌جا مطرح می‌شود این است، که دقیقاً چطور یک ماشین گرمایی رسیدن به این هدف را انجام می‌دهد و به طور ویژه، چگونه یک ماشین گرمایی کیوبیت‌های مجازی مورد نظر را از منبع بیرون می‌کشد؟ در واقع، همان‌طور که خواهیم دید کوچک‌ترین ماشین‌های گرمایی با یک بازه از دماهای مجازی جفت نشده‌اند، بلکه تنها با یکی از آن‌ها جفت می‌شوند از این رو، آن‌ها به صورت فیلترهای کامل اثر می‌کنند و بنابراین ماشین‌های گرمایی بسیار مرتب^۳ می‌باشند. در ادامه خواهیم دید، که توانایی فیلترهای کامل به شدت مرتبط با توانایی رسیدن به بازدهی کارنو خواهد بود.

۳-۴- چگونگی کار ماشین‌های گرمایی

کوچکترین ماشین‌های گرمایی همه در قسمت مرکزی‌شان مکانیسم اساسی یکسانی دارند. هر ماشین از دو کیوبیت تشکیل شده است، کیوبیت ۱ در تماس گرمایی با منبع ۱ می‌باشد و کیوبیت ۲ در تماس گرمایی با منبع ۲ می‌باشد. این دو کیوبیت با یکدیگر و سیستم خارجی، از طریق هامیلتونی برهم‌کنش، برهم‌کنش خواهند کرد. بررسی حالت دو ذره قبل از این‌که برهم‌کنش برقرار شود آموزنده می‌باشد. فرض کنید که کیوبیت ۱ جدایی تراز E_1 و کیوبیت ۲ جدایی تراز E_2 را دارد (این انتخاب صریح بخشی از طراحی ماشین می‌باشد که به وسیله‌ی ما انتخاب شده است). در غیاب برهم‌کنش با سیستم خارجی، هر یک از کیوبیت‌ها تنها با منبع گرمایی خودش برهم‌کنش می‌کند. بدین صورت، هر

۱- coupler

۲- filter

۳- cleanest

یک به تعادل گرمایی^۱ با منبع متناظرش می‌رسد.

برای ساده‌سازی، ما تنها مواردی را بررسی می‌کنیم که برهم‌کنش میان ماشین و منبع ضعیف باشد. بنابراین، این به ما اجازه خواهد داد تنها بر روی برهم‌کنش‌های روزنانتی^۲ تمرکز کنیم. در این رژیم حالت گرمایی هر کیوبیت یک توزیع بولتزمنی خواهد بود. بنابراین حالت گرمایی هر کیوبیت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\tau_i = \frac{e^{\frac{H_i}{T_i}}}{Z_i} = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_i}{T_i}}} (|0\rangle_i \langle 0| + e^{\frac{E_i}{T_i}} |1\rangle_i \langle 1|) \quad (۳-۷)$$

که $H_i = E_i |1\rangle_i \langle 1|$ هامیلتونی آزاد^۳ هر کیوبیت می‌باشد.

دو کیوبیت چهار ویژه حالت انرژی $|0\rangle_1 |0\rangle_2$ ، $|0\rangle_1 |1\rangle_2$ ، $|1\rangle_1 |0\rangle_2$ و $|1\rangle_1 |1\rangle_2$ دارند. به طور ویژه دو حالت $|0\rangle_1 |1\rangle_2$ و $|1\rangle_1 |0\rangle_2$ مورد توجهی ما می‌باشند [۷]. در روشی مشابهی روش بخش قبل، فضای هیلبرت جاروب شده بوسیلهی این دو حالت را به عنوان یک کیوبیت مجازی تفسیر می‌کنیم، با حالت‌های پایه و برانگیخته‌ی

$$|0\rangle_v = |1\rangle_1 |0\rangle_2 \quad |1\rangle_v = |0\rangle_1 |1\rangle_2 \quad (۸-۳)$$

این ماشین کیوبیت مجازی^۴ ما خواهد بود. تفاوت انرژی این دو حالت $E_v = E_2 - E_1$ می‌باشد.

۱- thermal equilibrium

۲- resonant

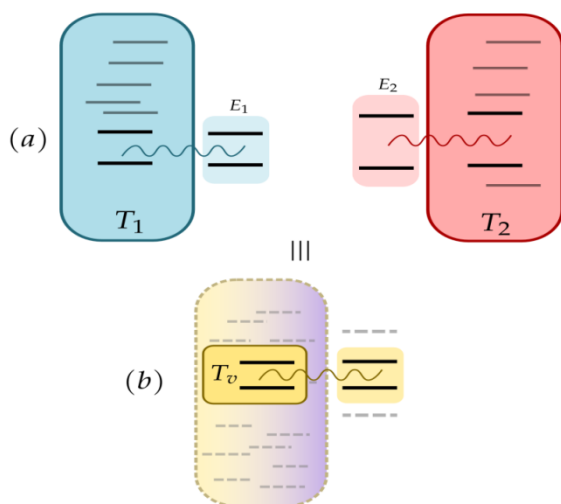
۳- free Hamiltonian

۴- machine virtual qubit

با تکرار یک تحلیل مشابه، که برای کیوبیت مجازی در منبع مرکب می‌شود ما می‌یابیم که این

ماشین کیوبیت مجازی به دمای T_v می‌رسد

$$T_v = \frac{\frac{E_2 - E_1}{E_2} - \frac{E_1}{E_1}}{\frac{T_2}{T_2} - \frac{T_1}{T_1}} \quad (9-3)$$



شکل (۳-۲): کوچکترین ماشین‌های گرمایی. (a) کوچکترین ماشین از دو کیوبیت تشکیل شده است، اولی با جدایی انرژی E_1 در تماس گرمایی با یک منبع در دمای T_1 و دیگری با جدایی انرژی E_2 در تماس گرمایی با یک منبع در دمای T_2 می‌باشد. (b) سرانجام، روش مناسب‌تر برای نشان دادن این سیستم، به صورت ماشین کیوبیت مجازی با جدایی انرژی $E_v = E_2 - E_1$ می‌باشد، که این ماشین کیوبیت مجازی در تماس گرمایی با کیوبیت‌های مجازی منبع مرکب که در دمای مجازی T_v هستند، می‌باشد. جدایی‌های انرژی موضعی E_1 و E_2 به ماشین کیوبیت مجازی برای فیلتر کردن یک تک دمای مجازی از منبع اجازه می‌دهد.

ما می‌توانیم این نتیجه را به این صورت بیان کنیم که: ماشین کیوبیت مجازی در تماس گرمایی با کیوبیت‌های مجازی منبع مرکب قرار داده شده است و با دمای آن‌ها گرم می‌شود. از این جهت فرآیند

گرم‌سازی شگفت انگیز به نظر می‌رسد. از آن‌جا که تعداد زیادی کیوبیت مجازی در منبع مرکب وجود دارد که دارای جدایی تراز انرژی‌ای برابر با جدایی تراز انرژی ماشین کیوبیت مجازی می‌باشند، یعنی $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = E_2 - E_1$ را برآورده می‌کند، از این‌رو این منطقی به نظر می‌رسد که تمام این کیوبیت‌های مجازی باید به صورت رزونانسی^۱ با ماشین کیوبیت مجازی جفت شوند. به‌هرحال، دمای کیوبیت‌های مجازی تنها وابسته به جدایی تراز $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ نیست، بلکه همچنین به مقادیر مجزای ε_2 و ε_1 وابسته می‌باشد. کلید فهم رفتار ماشین کیوبیت مجازی درک این موضوع می‌باشد که برهم‌کنش با منبع مرکب به صورت دلخواه نیست آن تنها از طریق جفت‌شدگی موضعی^۲ کیوبیت ۱ با منبع ۱ و کیوبیت ۲ با منبع ۲ رخ می‌دهد. هر کیوبیت ماشین تنها با یک کیوبیت متناظر در منبع به صورت رزونانسی برهم‌کنش خواهد کرد، بنابراین $\varepsilon_1 = E_1$ و $\varepsilon_2 = E_2$ می‌باشد. این به ماشین اجازه می‌دهد که ماشین از بین همه‌ی این کیوبیت‌های مجازی تنها با یک کیوبیت مجازی منبع جفت شود. بنابراین می‌بینیم که جفت‌شدگی‌های رزونانسی موضعی، امر فیلترگذاری را برای این ماشین‌ها تدارک می‌بینند. بنابراین می‌بینیم که تنها یک T_v تک، انتخاب شده است و بدین لحاظ این ماشین به صورت یک فیلتر کامل عمل می‌کند. سرانجام، یادآوری می‌کنیم که، مقدار ویژه‌ی فیلتر شده‌ی T_v به وسیله‌ی روشی که ما در طراحی ماشین به کار می‌بریم در دسترس ما قرار می‌گیرد، یعنی بوسیله‌ی انتخاب E_2 و E_1 .

۳-۵- جفت شدگی با سیستم خارجی

ما اکنون ابزار لازم برای فهم رفتار ماشین گرمایی را داریم تمام کاری که باید انجام دهیم قرار دادن سیستم خارجی در تماس گرمایی با ماشین کیوبیت مجازی می‌باشد. به عنوان مثال، اجازه دهید آسانترین

۱- resonantly

۲- local couplings

مورد را بررسی کنیم، سیستمی که ماشین بر روی آن اثر می کند کیوبیت دیگری از خود سیستم می باشد این کیوبیت باید کیوبیت ۳ نامیده شود و باید جدایی انرژی آن E_3 باشد. با این جدایی معین تضمین می کنیم که ماشین چنان طراحی شده است که $E_2 - E_1 = E_3$ می باشد. با این انتخاب می بینیم که ماشین کیوبیت مجازی و سیستم خارجی دارای جدایی تراز انرژی برابر می باشند. بنابراین این موضوع، امکان معرفی یک برهم کنش ضعیف دلخواه را می دهد، که این برهم کنش ضعیف اجازه می دهد کیوبیت مجازی و سیستم خارجی به صورت روزنانتی مبادله ای انرژی کنند. این برهم کنش می تواند از طریق هامیلتونی برهم کنش زیر انجام شود:

$$H_{int} = g (|0\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3 |1\rangle_2 \langle 0|_3 \langle 1|_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 |0\rangle_2 \langle 0|_3 \langle 0|_2) \quad (۱۰-۳)$$

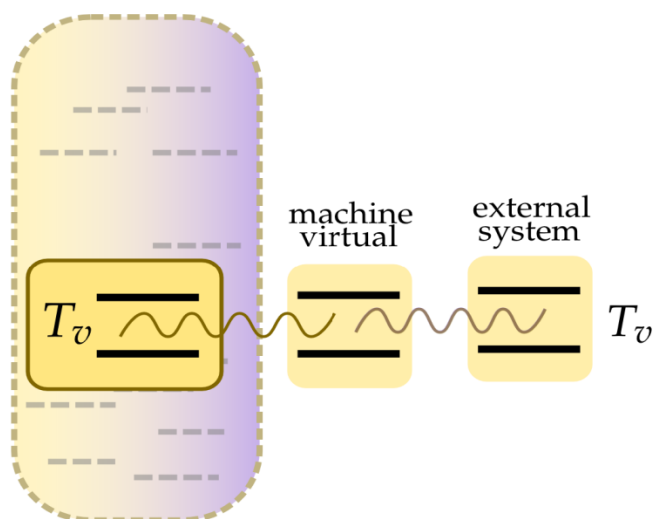
که گذارهای میان دو حالت تبهگن $|1\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 \leftrightarrow |0\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3$ را وارد کرده است. از طرف دیگر، روشی بسیار مناسب برای نوشتن این هامیلتونی، نوشتن آن در عباراتی از کیوبیت مجازی می باشد

$$H_{int} = g (|0\rangle_v |1\rangle_3 \langle 1|_3 \langle 0|_v + |1\rangle_v |0\rangle_3 \langle 0|_3 \langle 1|_v) \quad (۱۱-۳)$$

که گذارهای میان دو حالت تبهگن $|1\rangle_v |0\rangle_3 \leftrightarrow |0\rangle_v |1\rangle_3$ را وارد می کند. این نمادگذاری برای نشان دادن گذارها از این بیان بدست می آید، که هامیلتونی برهم کنش معاوضه ای یکانی^۱ میان سیستم خارجی و ماشین کیوبیت مجازی را تولید می کند. پس این برهم کنش دو کیوبیت را در تماس گرمایی قرار می دهد. بنابراین کاری که در تمام فرآیند اتفاق می افتد بدین صورت می باشد:

کیوبیت های مجازی انتخاب شده ی منبع مرکب، در یک دمای مجازی انتخاب شده، در تماس گرمایی با یک کیوبیت مجازی از ماشین قرار داده شده اند. پس همه ی چیزی که اتفاق می افتد یک فرآیند گرم سازی

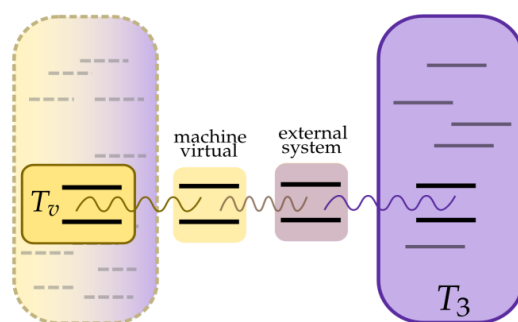
^۱- unitary SWAP



شکل (۳-۳): کوچک‌ترین ماشین با یک کیوبیت خارجی ایزوله شده. یک سیستم خارجی ایزوله شده - یک کیوبیت تک - در تماس گرمایی با ماشین کیوبیت مجازی قرار داده شده است که با هم تطابق جدایی تراز انرژی دارند. این برهم‌کنش بوسیله‌ی خط موج نشان داده شده است. سیستم خارجی در تماس گرمایی با کیوبیت‌های مجازی منبع مرکب که دارای دمای T_v می‌باشد، قرار داده شده است. ماشین کیوبیت مجازی میان سیستم خارجی و کیوبیت مجازی منبع قرار گرفته است.

معمولی سیستم خارجی با کیوبیت‌های مجازی منبع مرکب، بوسیله‌ی ماشین کیوبیت مجازی، می‌باشد. اگر سیستم خارجی از محیط‌های خارجی دیگر ایزوله شده باشد، آنگاه آن به دمای T_v می‌رسد. از طرف دیگر، اگر سیستم در تماس با یک محیط خارجی باشد آنگاه آن به حالتی (پایا) خواهد رسید، یعنی به حالتی مشابه با حالت هر سیستمی که در تماس با دو منبع گرمایی می‌باشد. این فرآیند در واقع یک مورد ویژه از فرآیند کلی‌ای می‌باشد که همه‌ی ماشین‌های گرمایی به کار می‌برند. به هر حال، یک ماشین گرمایی به طور کلی تعداد زیادی تراز انرژی مختلف دارد بنابراین تعداد زیادی ماشین‌های کیوبیت مجازی وجود دارد. یک یک آن‌ها با تعداد مختلفی کیوبیت مجازی در منبع مرکب جفت می‌شوند بنابراین، در عوض این‌که با یک تک دمای مجازی روبه رو باشیم، با یک بازه از دماهای مجازی روبرو

خواهیم بود که وضعیت بسیار پیچیده‌ای می‌باشد. این وضعیت با فرض قوی‌تر بودن برهم‌کنش پیچیده‌تر می‌شود زیرا زمانی که برهم‌کنش قوی‌تر می‌باشد ترازهای انرژی ماشین وسیع‌تر^۱ می‌شود، پس حتی یک کیوبیت مجازی تک در ماشین می‌تواند با تعداد زیادی دماهای مجازی در منبع مرکب جفت شود. با این وجود، اصول یکسان باقی می‌ماند: سیستم خارجی بوسیله‌ی ماشین‌های کیوبیت مجازی، در تماس گرمایی با کیوبیت‌های مجازی مختلف منبع مرکب قرار داده می‌شود.



شکل (۳-۴): کوچک‌ترین ماشین برهم‌کنش کننده با یک کیوبیت خارجی باز. اگر سیستم خارجی همچنین با محیطی در دمای T_3 برهم‌کنش کند آنگاه، آن به صورت هر سیستمی که در تماس با دو منبع گرمایی خارجی در دو دمای متفاوت می‌باشد، رفتار خواهد کرد.

۳-۶- کار و وارونگی جمعیت

کار یکی از مفاهیم بسیار مهم در فیزیک می‌باشد. در مقایسه با گستردگی کاربرد مفهوم کار، وارونگی جمعیت پدیده‌ای می‌باشد که تا کنون بیشتر در حوزه‌ی فیزیک لیزر با آن مواجه شده‌ایم. در این بخش نشان خواهیم داد، که وارونگی جمعیت موضوعی بسیار مهم می‌باشد و همچنین نشان خواهیم داد، که "تولید کار و وارونگی جمعیت دو چیز یکسان و مانند هم می‌باشند".

^۱- broadened

کار به طور کلی همبسته با نوع تغییر مکان می‌باشد بنابراین، اولین الزام برای این‌که توانایی صحبت درباره‌ی کار وجود داشته باشد داشتن یک سیستم با حالت‌های بسیار می‌باشد. در غیر این‌صورت ایده‌ی کلی تغییر مکان داشتن سیستم بدون در نظر گرفتن هیچ جهتی می‌باشد، یعنی رفتن از یک حالت به حالت دیگر در یک روش سیستماتیک. صحبت کردن در مورد کار زمانی که ما با سیستم‌هایی که دارای یک تعداد کوچک از حالت‌ها می‌باشند، هم‌چون زمانی که با دو کیوبیت تشکیل دهنده‌ی ماشین گرمایی سروکار داریم، می‌تواند غیر ممکن به نظر برسد. برای برطرف کردن این مشکل ما سراسرترین تعریف کار را در نظر می‌گیریم، به عبارتی ما همان تعریفی را از کار در نظر می‌گیریم که سعدی کارنو^۱ به کار برد[۷]:

نیروی محرک^۲ (کار) اثر مفیدی می‌باشد که موتور توانایی تولید آن را دارد.

این اثر همیشه می‌تواند شبیه به بالا بردن یک وزنه تا یک ارتفاع معین باشد. از این رو ما بالا بردن یک وزنه را کار تولید شده در نظر می‌گیریم و هر ماشینی که یک وزنه را بالا ببرد ماشینی می‌باشد که کار تولید کرده است. به پیرو این ایده استدلال می‌کنیم که کار چیزی به غیر از تولید وارونگی جمعیت نیست. در یک سطح بسیار مقدماتی، این تعریف به وضوح با همان تعریف معمول کار، سازگار می‌باشد. در واقع حالت کمترین انرژی وزنه یعنی حالتی که وزنه در کف قرار داده شده است، حالت پایه‌ی آن می‌باشد. بالا بردن وزنه، یا به عبارت دیگر انجام کار بر روی آن، هیچ چیزی بجز کم جمعیت کردن^۳ حالت پایه و پر جمعیت کردن^۴ حالت برانگیخته نمی‌باشد. حالت برانگیخته معادل با بالاترین ارتفاعی می‌باشد که وزنه

۱- Carnot Sadi

۲- motive power

۳- depopulating

۴- populating

می‌تواند در آن قرار بگیرد. در کل حالت نهایی وزنه یک حالت وارونه شده^۱ می‌باشد. با استفاده از این مفاهیم ما مدل کوچک‌ترین موتور گرمایی را معرفی می‌کنیم (برای بررسی یخچال نیز همین ملاحظات را خواهیم داشت). دو کیوبیت در نظر می‌گیریم، اولین کیوبیت با منبع T_1 و دیگری با منبع T_2 در تماس می‌باشد. فرض می‌کنیم که موتور کار را بوسیله‌ی بالا کشیدن یک وزنه تحویل می‌دهد. وزنه از هر دو منبع ایزوله شده است. برای ساده سازی وضعیت، فرض می‌کنیم که وزنه خیلی آهسته بالا کشیده می‌شود چنان که، می‌توانیم از تغییر انرژی جنبشی آن صرف‌نظر کرده و تنها انرژی پتانسیل را بررسی کنیم. به علاوه، فرض می‌کنیم که وزنه تنها در بعضی ارتفاع‌های مجزای هم‌فاصله می‌تواند قرار بگیرد چنان که تفاوت انرژی میان آن‌ها یکسان می‌باشد. از این‌رو، وزنه ویژه حالت‌های انرژی مجزای $|n\rangle_w$ با ویژه مقادیر انرژی متناظر $E_n = nE_w$ ، که $E_w > 0$ ، را دارد. هامیلتونی آزاد سیستم بدین گونه می‌باشد:

$$H_0 = E_1 |1\rangle_1 \langle 1| + E_2 |1\rangle_2 \langle 1| + \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} nE_w |n\rangle_w \langle n| \quad (۱۲-۳)$$

انرژی‌ها چنان در نظر گرفته شده‌اند که

$$E_2 - E_1 = E_w \quad (۱۴-۳)$$

با این قید معین، انرژی ترازهای $|0\rangle_1 |1\rangle_2 |n+1\rangle_w$ و $|1\rangle_1 |0\rangle_2 |n\rangle_w$ تبهگن می‌باشد. موتور بوسیله‌ی انجام گذارهایی میان این حالت‌های تبهگن کار می‌کند. کیوبیت‌ها و وزنه از طریق هامیلتونی زیر برهم‌کنش می‌کنند:

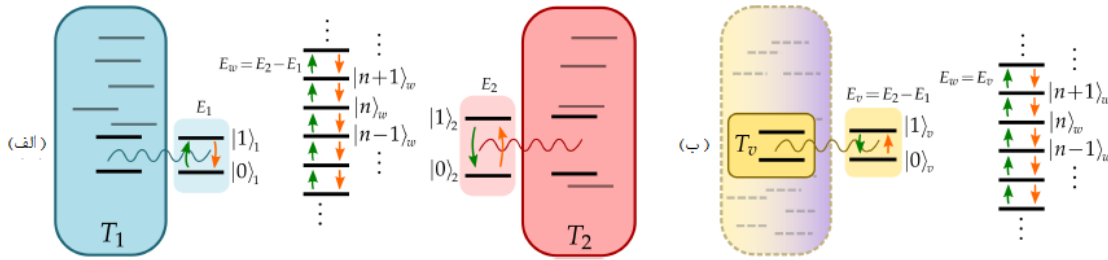
$$H_{int} = g(|0\rangle_1 |1\rangle_2 |n\rangle_w \langle 1|_1 \langle 0|_2 \langle n+1|_w + |1\rangle_1 |0\rangle_2 |n+1\rangle_w \langle 0|_1 \langle 1|_2 \langle n|_w) \quad (۱۵-۳)$$

^۱ - inverted state

ایده‌ی شهودی پشت طراحی این موتور بایاس کردن گذار زیر می‌باشد

$$|0\rangle_1 |1\rangle_2 |n\rangle_w \rightarrow |1\rangle_1 |0\rangle_2 |n+1\rangle_w \quad (۱۶-۳)$$

که در آن وزنه بالا برده می‌شود. این هدف بوسیله‌ی جفت‌شدگی دو کیوبیت با منبع‌های گرمایی در دماهای مختلف، $T_2 \rangle T_1$ ، صورت می‌پذیرد که چنان انتخاب شده‌اند که احتمال یافتن کیوبیت‌ها در حالت $|0\rangle_1 |1\rangle_2$ بزرگ‌تر از احتمال یافتن کیوبیت‌ها در حالت $|1\rangle_1 |0\rangle_2$ می‌باشد.



شکل (۳-۵): کوچک‌ترین موتور گرمایی. (الف) وزنه - یک سیستم هم‌فاصله - و نامتناهی از بالا و پایین می‌باشد، که با کیوبیت‌های ماشین از طریق برهم‌کنش‌های نشان داده شده به وسیله‌ی پیکان‌های پرتغالی و سبز برهم‌کنش می‌کند. این برهم‌کنش‌ها گذارهایی میان ویژه حالت‌های انرژی تبه‌گن $|1\rangle_1 |0\rangle_2 |n+1\rangle_w \leftrightarrow |0\rangle_1 |1\rangle_2 |n\rangle_w$ را وارد می‌کنند. انرژی‌های E_1 و E_2 به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که گذار رو به جلو، که وزنه بالا برده می‌شود، در مقابل گذار رو به عقب، که وزنه پایین آورده می‌شود، بایاس شود. (ب) از دیدگاه کیوبیت مجازی شرط بایاس می‌گوید که، کیوبیت مجازی باید یک وارونگی جمعیت داشته باشد یا به عبارت دیگر باید یک دمای منفی داشته باشد.

در عبارت‌هایی از کیوبیت مجازی ماشین، گذار بایاس را (در مقابل گذار وارون) به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$|1\rangle_v |n\rangle_w \rightarrow |0\rangle_v |n+1\rangle_w \quad (۱۷-۳)$$

با توجه به این بازنویسی، شرط این رخداد به سادگی این می‌باشد که احتمال یافتن در حالت $|1\rangle_v$ باید از

احتمال یافتن در حالت $|0\rangle_v$ بزرگ‌تر باشد. به عبارت دیگر، شرط لازم برای اینکه ماشین مانند موتور گرمایی عمل کند دقیقا این می‌باشد که ماشین کیوبیت مجازی یک وارونگی جمعیت داشته باشد و بنابراین در یک دمای منفی مجازی باشد.

فصل چهارم: بیشینه راندمان یخچال کوانتومی خودسازگار

۴-۱- یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار

از آن جا که ما علاقه مند به ماشین های کوانتومی کامل هستیم از این رو، کوچک ترین ماشین های گرمایی کوانتومی خودسازگار^۱ را مورد بررسی قرار می دهیم. هم چنان که قبلا اشاره شد، در این پایان نامه بیشتر بر روی کوچک ترین یخچال کوانتومی خودسازگار تمرکز خواهیم کرد و آن را مورد بررسی قرار می دهیم. منظور ما از کوچک بودن سیستم این می باشد که ما یک سیستم کوانتومی مرکب از تعداد خیلی کمی از حالات را بررسی می کنیم و منظور ما از خودسازگار بودن این مدل این است که سیستم هایی را بررسی می کنیم که تحول داخلی آن ها تابع یک هامیلتونی مستقل از زمان^۲ می باشد و منبع انرژی آزاد آن ها فقط از طریق تماس با منبع های گرمایی در دماهای مختلف ناشی می شود بنابراین هیچ منبع کار خارجی مورد بحث نیست.

مدلی از یخچالی که ما بررسی می کنیم متشکل از سه کیوبیت ۱، ۲ و ۳ می باشد که هر کدام در تماس با یک منبع گرمایی متفاوت $T_1 > T_2 > T_3$ می باشند [۲۹-۷]. کیوبیت ۱ در تماس با منبع گرم T_1 ، کیوبیت ۲ در تماس با منبع دمای اتاق T_2 و کیوبیت ۳ در تماس با منبع سرد T_3 می باشد. یخچال با گرفتن گرما از منبع سرد^۳ و دادن آن به منبع دمای اتاق^۴ کار می کند. انرژی آزاد برای به کار انداختن یخچال از

۱- self-contained

۲- time-independent Hamiltonian

۳- cold bath

۴- room temperature bath

منبع گرم^۱ در ارتباط با منبع دمای اتاق تامین می‌شود: انرژی از منبع گرم به درون منبع دمای اتاق شارش پیدا می‌کند.

هامیلتونی آزاد هر کیوبیت، هامیلتونی هر کیوبیت به تنهایی بدون در نظر گرفتن برهم‌کنش آن کیوبیت با کیوبیت‌های دیگر می‌باشد. اکنون، با توجه به ویژه مقدارهای انرژی حالت‌های پایه $|0\rangle_i$ و حالت‌های برانگیخته $|1\rangle_i$ کیوبیت i ام که به ترتیب E_{0i} و E_{1i} می‌باشد و همچنین تعریف اختلاف انرژی میان حالت پایه و حالت برانگیخته کیوبیت i ام که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_i = E_{1i} - E_{0i} \quad (۱-۴)$$

با انتخاب ویژه مقدار انرژی حالت پایه به عنوان نقطه مرجع انرژی، هامیلتونی آزاد کیوبیت i ام به صورت زیر معین می‌شود:

$$H_i = E_i \Pi_i \quad (۲-۴)$$

که $\Pi_i = |1\rangle_i \langle 1|_i$ اپراتور تصویر کننده بر روی حالت برانگیخته برای هر کیوبیت می‌باشد. هامیلتونی آزاد کل برای سه کیوبیت غیر برهم‌کنش کننده^۲ به صورت مجموع هامیلتونی آزاد هر سه کیوبیت می‌باشد

$$H_0 = \sum_{i=1}^3 E_i \Pi_i \quad (۳-۴)$$

اکنون دو مشخصه یخچالی را که مطرح کرده‌ایم، عنوان می‌کنیم:

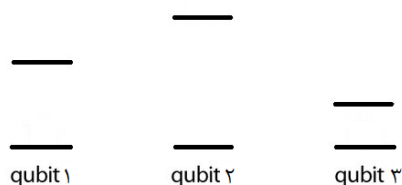
■ هامیلتونی آزاد هر کیوبیت به صورتی انتخاب شده است، که اختلاف انرژی E_i میان حالت برانگیخته

۱- hot bath

۲- non-interacting

$|1\rangle_i$ و حالت پایه $|0\rangle_i$ کیوبیت‌ها در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$E_1 + E_3 = E_2 \quad (4-4)$$



شکل (۴-۱): ترازهای انرژی سیستم سه کیوبیتی

بنابراین تنها حالت‌های $|010\rangle$ و $|101\rangle$ ، از میان هشت حالت این سیستم سه کیوبیتی، در انرژی تبهگن^۱ هستند. که این تبهگنی را با توجه به جدول (۴-۱) می‌توان متوجه شد.

■ دومین مشخصه یخچال ما این می‌باشد که هامیلتونی برهم‌کنش در برابر هامیلتونی آزاد نسبتاً ضعیف می‌باشد. با فرض این‌که هامیلتونی برهم‌کنش نسبت به هامیلتونی آزاد ضعیف است تمام آن کاری که می‌تواند انجام دهد تنها انجام گذارهایی میان دو تراز انرژی تبهگن $|010\rangle$ و $|101\rangle$ می‌باشد. حتی اگر هامیلتونی برهم‌کنش شامل جملاتی باشد که حالت‌های مختلف جفت شده باشند در یک رژیم جفت‌شدگی ضعیف همه گذارهای دیگر موقوف خواهند شد به عبارت دیگر دومین مشخصه را به این صورت نیز می‌توان بیان کرد، که ما تنها سناریویی را بررسی می‌کنیم که شدت برهم‌کنش g نسبت به اختلاف انرژی میان حالت برانگیخته و حالت پایه کیوبیت i ام خیلی خیلی کوچک باشد ($g \ll E_i$). در این رژیم هامیلتونی برهم‌کنش تغییر محسوسی در ویژه مقادیر یا ویژه توابع انرژی سیستم، که به وسیله هامیلتونی آزاد کل سیستم (H_0) برقرار می‌ماند، نمی‌تواند بدهد.

^۱- degenerate

جدول (۴-۱): حالت‌های تبهگن . اختلاف انرژی کلیه‌ی حالت‌های ۳ کیوبیتی نسبت به هم محاسبه شده است. انرژی هر حالت ۳ کیوبیتی برابر مجموع انرژی حالت‌های هر کیوبیت آن می‌باشد به عنوان مثال انرژی حالت $|010\rangle$ برابر با $E_{010} = E_{01} + E_{12} + E_{03}$ یا به عبارتی برابر با $E_{010} = E_2$ می‌باشد. در نمایش حالت‌ها از نماد گذاری ساده $|101\rangle = |1\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3$ استفاده کرده‌ایم.

شماره‌ی حالت‌ها در مبنای ۲	حالت‌های ۳ کیوبیتی	اختلاف انرژی نسبت به $ 000\rangle$	اختلاف انرژی نسبت به $ 001\rangle$	اختلاف انرژی نسبت به $ 010\rangle$	اختلاف انرژی نسبت به $ 011\rangle$	اختلاف انرژی نسبت به $ 100\rangle$	اختلاف انرژی نسبت به $ 101\rangle$	اختلاف انرژی نسبت به $ 110\rangle$	اختلاف انرژی نسبت به $ 111\rangle$
۷	$ 111\rangle$	$2E_2$	$2E_1 + E_3$	E_2	E_1	$-E_1 - 2E_3$	E_2	E_3	
۶	$ 110\rangle$	$2E_1 + E_3$	$2E_1$	E_1	$E_1 - E_3$	E_2	E_1		$-E_3$
۵	$ 101\rangle$	E_2	E_1	0	$-E_3$	E_3		$-E_1$	$-E_2$
۴	$ 100\rangle$	E_1	$E_1 - E_3$	$-E_3$	$-2E_3$		$-E_3$	$-E_2$	$-E_1 - 2E_3$
۳	$ 011\rangle$	$E_1 + 2E_3$	E_2	E_3		$2E_3$	E_3	$-E_1 + E_3$	$-E_1$
۲	$ 010\rangle$	E_2	$E_2 - E_3$		$-E_3$	E_3	0	$-E_1$	$-E_2$
۱	$ 001\rangle$	E_3		$-E_1$	$-E_2$	$-E_1 + E_3$	$-E_1$	$-2E_1$	$-2E_1 - E_3$
۰	$ 000\rangle$		$-E_3$	$-E_2$	$-E_1 - 2E_3$	$-E_1$	$-E_2$	$-2E_1 - E_3$	$-2E_2$

برای تغییر این سیستم به یک یخچال ما هامیلتونی برهم‌کنش را به صورت زیر مطرح می‌کنیم:

$$H_{int} = g (|010\rangle\langle 101| + |101\rangle\langle 010|) \quad (۴-۵)$$

که g شدت برهم‌کنش^۱ می‌باشد.

^۱- interaction strength

۴-۲- فرآیند گرم کردن^۱

برای مدل سازی فرآیند گرم کردن هر کیوبیت بوسیله‌ی منبع^۲، ما یک مدل بازنشانی^۳ ساده در نظر گرفته‌ایم. که به موجب آن با چگالی احتمال^۴ p_i در زمان δt هر کیوبیت ممکن است با یک حالت گرمایی^۴ استاندارد τ منبع‌اش جایگزین شود. τ_i حالت گرمایی استاندارد منبع i ام به این صورت می‌باشد:

$$\tau_i = \frac{e^{-\frac{H_i}{kT_i}}}{Z_i} \quad (۴-۶)$$

که k ثابت بولتزمن و $Z_i = \text{Tr}_i(e^{-\frac{H_i}{kT_i}})$ تابع پارش^۵ i امین کیوبیت می‌باشد.

با توجه به $\Pi_i = |1\rangle_i \langle 1|$ داریم:

$$\Pi_i |0\rangle_i = |0\rangle_i \langle 0| , \quad \Pi_i |1\rangle_i = |1\rangle_i \langle 1| \quad (۴-۷)$$

که ویژه مقدار صفر و یک را به ترتیب برای ویژه حالات $|0\rangle_i$ و $|1\rangle_i$ نشان می‌دهد. بنابراین روابط زیر را با در نظر گرفتن رابطه (۴-۷) بدست می‌آوریم:

$$e^{-\frac{H_i}{kT_i}} |0\rangle_i = |0\rangle_i \langle 0| , \quad e^{-\frac{H_i}{kT_i}} |1\rangle_i = e^{-\frac{E_i}{kT_i}} |1\rangle_i \langle 1| \quad (۴-۸)$$

۱- process of thermalization

۲- reset model

۳- probability density

۴- thermal state

۵- partition function

که با توجه به H_i و بسط تیلوری^۱ تابع $e^{\frac{H_i}{kT_i}}$ که به صورت زیر می‌باشد، بدست آمده است.

$$e^{\frac{H_i}{kT_i}} = I + \left(-\frac{1}{kT_i}\right)H_i + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{kT_i}\right)H_i^2 + \dots \quad (9-4)$$

اکنون با توجه به تعریف

$$Z_i = Tr_i(e^{\frac{H_i}{kT_i}}) = {}_i\langle 0 | e^{\frac{H_i}{kT_i}} | 0 \rangle_i + {}_i\langle 1 | e^{\frac{H_i}{kT_i}} | 1 \rangle_i \quad (10-4)$$

تابع پارش را بدین صورت بدست می‌آوریم:

$$Z_i = 1 + e^{\frac{E_i}{kT_i}} \quad (11-4)$$

بنابراین، حالت گرمایی کیوبیت i ام را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم که r_i و $\bar{r}_i$ به ترتیب احتمال یافتن i امین کیوبیت در حالت پایه و برانگیخته می‌باشند

$$\tau_i = r_i |0\rangle_i \langle 0| + \bar{r}_i |1\rangle_i \langle 1|$$

$$r_i = \frac{1}{1 + e^{\frac{E_i}{kT_i}}} \quad \bar{r}_i = \frac{e^{\frac{E_i}{kT_i}}}{1 + e^{\frac{E_i}{kT_i}}} \quad (12-4)$$

۴-۳- جریان گرمایی^۲

کیوبیت‌ها با محیط‌شان و همچنین با یکدیگر انرژی مبادله می‌کنند. چیزی که ما در اینجا به آن

۱- Taylor expansion

۲- Heat flow

علاقه‌مندیم، انرژی است که میان کیوبیت‌ها مبادله می‌شود. در حالت تعادل^۱ انرژی کل هر کیوبیت ثابت است به این علت انرژی که یک کیوبیت از محیط دریافت می‌کند برابر با انرژی‌ای است که به کیوبیت‌های دیگر می‌دهد. به دلیل این واقعیت، که تنها برهم‌کنشی که اتفاق می‌افتد گذار میان حالت‌های $|010\rangle$ و $|101\rangle$ می‌باشد، انرژی کیوبیت‌ها به سبب محدودیت افزایش و کاهش می‌یابد. هر زمان کیوبیت ۱ انرژی E_1 از آن کاسته شد، کیوبیت ۳ باید انرژی E_3 از آن کاسته شود و کیوبیت ۲ باید انرژی E_2 بدست آورد و به صورت عکس، زمانی که کیوبیت ۱ انرژی E_1 را بدست آورد، کیوبیت ۳ باید انرژی E_3 را بدست آورد و کیوبیت ۲ باید انرژی E_2 را از دست بدهد. برای برقرار کردن یخچال ما باید ابتدا یک عبارت برای مقدار گرمایی که ماشین کوانتومی ما قادر است با منبع گرمایی‌ای که با آن در تماس است، مبادله کند نتیجه بگیریم. برای انجام این کار تغییرات یکی از ذرات را که بوسیله‌ی منبع در زمان کوچک δt تحریک شده است را بررسی می‌کنیم. هم‌چنان که قبلاً نیز گفتیم، در مدل سازی فرآیند گرم کردن هر کیوبیت بوسیله‌ی منبع، یک مدل بازنشانی ساده در نظر گرفتیم که به موجب آن با چگالی احتمال p_i در زمان δt هر کیوبیت ممکن است با حالت گرمایی استاندارد منبع‌اش جایگزین شود. بنابراین، مدل پراکندگی^۲ ماتریس چگالی هر کیوبیت بدین صورت می‌باشد که، با احتمال p_i در زمان δt هر کیوبیت ممکن است با یک حالت گرمایی استاندارد منبع‌اش جایگزین شود بنابراین با احتمال $p_i \delta t$ ، ρ با $\tau_i \otimes \text{Tr}_i(\rho)$

جایگزین می‌شود و با احتمال $1 - \sum_{i=1}^3 p_i \delta t$ این تغییر صورت نمی‌گیرد به عبارتی دیگر

$$\begin{aligned}
 p_i \delta t \quad \rho &\mapsto \tau_i \otimes \text{Tr}_i(\rho) \\
 1 - \sum_{i=1}^3 p_i \delta t \quad \rho &\mapsto \rho
 \end{aligned}
 \tag{۱۳-۴}$$

۱- equilibrium

۲- model of dissipation

با ردگیری جزئی نسبت به پایه‌های دو ذره‌ی دیگر، روابط بالا به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\begin{aligned} p_i \delta t \quad \rho_i &\mapsto \tau_i \\ 1 - p_i \delta t \quad \rho_i &\mapsto \rho_i \end{aligned} \quad (۱۴-۴)$$

اکنون، با توجه به نگاشت بالا، $\rho_i(t + \delta t)$ به صورت زیر معین می‌شود:

$$\rho_i(t + \delta t) = p_i \delta t \tau_i + (1 - p_i \delta t) \rho_i(t) \quad (۱۵-۴)$$

بنابراین، تغییر جزئی حالت هر ذره به صورت زیر خواهد بود

$$\delta \rho_i(t) = \rho_i(t + \delta t) - \rho_i(t) \quad \rightarrow \quad \delta \rho_i(t) = p_i (\tau_i - \rho_i) \delta t \quad (۱۶-۴)$$

این تغییر حالت متناظر با یک تغییر در انرژی به صورت $\delta \varepsilon_i$ می‌باشد که به صورت زیر معین می‌شود:

$$\delta \varepsilon_i = \text{Tr}(H_i \delta \rho_i(t)) \quad (۱۷-۴)$$

که با توجه به رابطه‌ی (۱۶-۴) داریم:

$$\delta \varepsilon_i = p_i \delta t \text{Tr}(H_i (\tau_i - \rho_i(t))) \quad (۱۸-۴)$$

با فرض $\delta t \rightarrow 0$ ، آهنگ تغییر انرژی ذره به سبب برهم‌کنش با منبع بدین صورت بیان می‌شود:

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = p_i \text{Tr}(H_i (\tau_i - \rho_i(t))) \quad (۱۹-۴)$$

به عبارتی دیگر، $\frac{d\varepsilon_i}{dt}$ همان مقدار انرژی ذخیره شده به وسیله‌ی ذره از منبع می‌باشد. بنابراین آن آهنگ

شارش گرما می‌باشد که باید آن را با Q_i مشخص کنیم، بنابراین

$$Q_i = p_i \text{Tr}(H_i(\tau_i - \rho_i(t))) \quad (20-4)$$

برای یافتن جریان‌های گرمایی، Q_i ، باید $\rho_i(t)$ را بیابیم که بدین منظور باید معادله حاکم بر دینامیک یخچال را مورد بررسی قرار داد.

۴-۴-۴-۴-۴ حالت پایا

۴-۴-۴-۱-۴-۴ یافتن معادله‌ی حاکم بر دینامیک یخچال

همان طور که قبلاً گفته شد، تحول زمانی سیستم تقلیل یافته (یعنی یخچال) در حالت کلی نمی‌تواند بوسیله‌ی تحول زمانی یکانی توصیف شود. ما می‌توانیم تحول زمانی آن را با بررسی تحول زمانی سیستم کل (یخچال (S) و منبع‌های گرمایی (B)) و ردگیری بر درجات آزادی محیط بدست آوریم:

$$\rho_s(t_1) = \text{Tr}_B(U(t_1, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t_1, t_0)) \quad (21-4)$$

که $U(t_1, t_0)$ تحول یکانی تولید شده بوسیله‌ی هامیلتونی سیستم کل می‌باشد. دیدیم که این نگاشت می‌تواند در عباراتی از یک نگاشت دینامیکی تنها اثرکننده بر فضای هیلبرت سیستم تقلیل یافته، بازنویسی شود:

$$\varepsilon_{t_1, t_0} : \rho_s(t_0) \mapsto \rho_s(t_1) \quad (22-4)$$

فرض می‌کنیم این نگاشت، یک نگاشت دینامیکی جامع (UDM) باشد، یعنی این نگاشت از یک سیستم بسط داده شده با شرط اولیه‌ی $\rho(t_0) = \rho_s(t_0) \otimes \rho_B(t_0)$ تحمیل شده باشد، و هم‌چنین فرض می‌کنیم برهم‌کنش‌های سیستم- محیط ضعیف باشد که با این فرض حالت کلی باز هم، در زمان‌های بعدی، عامل‌بندی می‌شود (خصوصیت مارکوفینیتی).

اگر سیستم ما تحول مارکوفیتی^۱ را متحمل شود قانون ترکیب را برای $UDMs$ برآورده می‌کند [۱]:

$$\mathcal{E}_{t_2, t_0} = \mathcal{E}_{t_2, t_1} \mathcal{E}_{t_1, t_0} \quad (۲۳-۴)$$

هم‌چنان که قبلاً گفتیم، یک معادله‌ی دیفرانسیلی خطی برای $\rho_s(t)$ یک معادله‌ی حاکم با مولد $\mathcal{L}_t$ نامیده می‌شود که

$$\frac{d}{dt} \rho_s(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\rho_s(t+\epsilon) - \rho_s(t)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{E}_{t+\epsilon, t} - \mathbb{I}}{\epsilon} \rho_s(t) \equiv \mathcal{L}_t \rho_s(t) \quad (۲۴-۴)$$

می‌باشد. با فرض اینکه $UDMs$ تنها وابسته به تفاوت‌های زمانی باشد، $\mathcal{E}_{t_2, t_1} = \mathcal{E}_{\mathcal{T}}$ با $\mathcal{T} = t_2 - t_1$ ، آن‌ها تشکیل یک نیم گروه تک پارامتری می‌دهند این نیم گروه‌ها می‌تواند یک ویژگی مهم داشته باشند: وجود یک حالت پایا.

بنابراین با فرض مستقل از زمان بودن مولد $\mathcal{L}$ ، حل صریح برای (۲۴-۴) به صورت زیر خواهد بود:

$$\rho_s(t) = e^{\mathcal{L}t} \rho_s(t_0) \quad (۲۵-۴)$$

که برای محاسبه‌ی لیندبلادین ($\mathcal{L}$) ما نیاز به استناد صریح به تقریب مارکوفین داریم یعنی فرض می‌کنیم تحول مارکوفین باشد. ما از قبل می‌دانیم که یک چنین ابرعملگری یک نمایش کراوس دارد

$$\rho(t) = \sum_{\mu} M_{\mu}(t) \rho(0) M_{\mu}^{\dagger}(t) \quad (۲۶-۴)$$

که در آن $\sum_{\mu} M_{\mu}^{\dagger}(t) M_{\mu}(t) = I_s$ را برآورده می‌کند و که $M_{\mu}(t) = {}_B \langle \mu | U_{SB}(t) | 0 \rangle_B$ می‌باشد که حالت اولیه‌ی محیط را $|e\rangle_B = |0\rangle_B$ در نظر گرفته‌ایم (دقت کنید که $\rho_s(t)$ را با $\rho(t)$ نشان داده‌ایم).

^۱- Markovianity

بنابراین باتوجه به $M_\mu(t)$ و تحول یکانی کلی برای زمان $t + \delta t$ داریم:

$$M_\mu(t + \delta t) = {}_B \langle \mu | U_{SB}(t + \delta t) | 0 \rangle_B \quad (27-4)$$

که δt بازه‌ی زمانی بی‌نهایت کوچکی می‌باشد. با بسط $M_0(t + \delta t)$ و $U_{SB}(t + \delta t)$ حول t در بازه‌ی زمانی بی‌نهایت کوچک δt داریم:

$$M_0(t') = M_0(t) + \delta t \left. \frac{dM_0(t')}{dt'} \right|_{t'=t} \quad t' = t + \delta t$$

$$U_{SB}(t') = U_{SB}(t') \Big|_{t'=t} + (t' - t) \left. \frac{dU_{SB}(t')}{dt'} \right|_{t'=t} \quad (28-4)$$

با توجه به $U_{SB}(t + \delta t) = e^{-iH_{SB} \delta t}$ و صرف‌نظر کردن از مرتبه‌های بالاتر δt داریم:

$$M_0(t) = {}_B \langle 0 | I_{SB} - i\delta t H_{SB} | 0 \rangle_B - \delta t \left. \frac{dM_0(t')}{dt'} \right|_{t'=t} \quad (29-4)$$

که با توجه به ${}_B \langle 0 | I_{SB} | 0 \rangle_B = I_S$ و ${}_B \langle 0 | H_{SB} | 0 \rangle_B = H_S$ ، رابطه‌ی (29-4) را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$M_0(t) = I_S + (-iH_S - \left. \frac{dM_0(t')}{dt'} \right|_{t'=t}) \delta t \quad (30-4)$$

اکنون، با استفاده از شرط $\sum_\mu M_\mu^\dagger(t) M_\mu(t) = I_S$ و در نظر گرفتن $K := - \left. \frac{dM_0(t')}{dt'} \right|_{t'=t}$ و صرف‌نظر کردن

از مرتبه‌های بالاتر δt ، K را بدین صورت بدست می‌آوریم:

$$K = - \frac{1}{2\delta t} \sum_{\mu \neq 0} M_\mu^\dagger(t) M_\mu(t) \quad (31-4)$$

که K هرمیتی می‌باشد ($K = K^\dagger$). اکنون با توجه به (۴-۲۶) و $\rho(t)$ ، $M_0(t) = I_S + (-iH_S + K)\delta t$ را بدین صورت بدست می‌آوریم:

$$\rho(t) = \rho(0) - i[H_S, \rho(0)]\delta t + \{\rho(0), K\}\delta t + (-iH_S + K)\rho(0)(iH_S + K)(\delta t)^2 + \sum_{\mu \neq 0} M_\mu(t)\rho(0)M_\mu^\dagger(t) \quad (۴-۳۲)$$

با توجه به تعریف $\frac{d}{dt}\rho(t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\rho(t) - \rho(0)}{\delta t}$ بدست می‌آوریم:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H_S, \rho(0)] + \sum_{\mu \neq 0} \left[\frac{M_\mu(t)}{\sqrt{\delta t}} \rho(0) \frac{M_\mu^\dagger(t)}{\sqrt{\delta t}} - \frac{1}{2} \rho(0) \frac{M_\mu^\dagger(t)}{\sqrt{\delta t}} \frac{M_\mu(t)}{\sqrt{\delta t}} - \frac{1}{2} \frac{M_\mu^\dagger(t)}{\sqrt{\delta t}} \frac{M_\mu(t)}{\sqrt{\delta t}} \rho(0) \right] \quad (۴-۳۳)$$

که با فرض $M_\mu(t) = \sqrt{\delta t} L_\mu(t)$ برای $\mu \neq 0$ ، رابطه‌ی (۴-۳۳) را بدین صورت بدست خواهیم آورد:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H_S, \rho(0)] + \sum_{\mu \neq 0} [L_\mu(t)\rho(0)L_\mu^\dagger(t) - \frac{1}{2}\rho(0)L_\mu^\dagger(t)L_\mu(t) - \frac{1}{2}L_\mu^\dagger(t)L_\mu(t)\rho(0)] \quad (۴-۳۴)$$

که $H_S = H_0 + H_{\text{int}}$ می‌باشد که برای این سیستم سه کیوبیتی بدین صورت بیان می‌شود:

$$H_S = H_1 \otimes I_{23} + I_1 \otimes H_2 \otimes I_3 + I_{12} \otimes H_3 + H_{\text{int}} \quad (۴-۳۵)$$

بنابراین، (۴-۳۴) را به صورت زیر می‌نویسیم

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H_S, \rho(0)] + \sum_{\mu \neq 0} [L_\mu(t)\rho(0)L_\mu^\dagger(t) - \frac{1}{2}\rho(0)L_\mu^\dagger(t)L_\mu(t) - \frac{1}{2}L_\mu^\dagger(t)L_\mu(t)\rho(0)] \quad (۴-۳۶)$$

اما برای یافتن $L_\mu(t)$ و $M_0(t)$ باید مدل پاشندگی را مورد بررسی قرار داد. همان‌طور که قبلاً گفتیم، با احتمال $p_i \delta t$ ، ρ با $\tau_i \otimes \text{Tr}_i(\rho)$ جایگزین می‌شود که با توجه به این که سیستم ما متشکل از سه کیوبیت

می‌باشد بنابراین با احتمال $1 - \sum_{i=1}^3 p_i \delta t$ ، ρ تغییر نمی‌کند. بنابراین در بازه‌ی زمانی کوچک δt ، ρ به

صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\rho \mapsto \sum_{i=1}^3 p_i \delta t (\tau_i \otimes \text{Tr}_i \rho(t) - \rho(t)) + \rho(t) \quad (37-4)$$

که می‌توانیم آن را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\rho \mapsto \delta t \sum_{i=1}^3 \mathcal{D}_i(\rho) + \rho \quad (38-4)$$

که $\mathcal{D}_i(\rho) = p_i (\tau_i \otimes \text{Tr}_i(\rho) - \rho)$ دینامیک‌های پاشنده نامیده می‌شوند. با توجه به

$$\rho(t + \delta t) = \sum_{i=1}^3 p_i \delta t (\tau_i \otimes \text{Tr}_i \rho(t)) + (1 - \sum_{i=1}^3 p_i \delta t) \rho(t) \quad (39-4)$$

می‌توانیم $\rho(t + \delta t)$ را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned} \rho(t + \delta t) = & (\sqrt{p_{11}} \delta t P_{00,1} \otimes I_2 \otimes I_3) \rho(t) (\sqrt{p_{11}} \delta t P_{00,1} \otimes I_2 \otimes I_3)^\dagger + (\sqrt{p_{11}} \delta t P_{00,1} \otimes I_2 \otimes I_3) \rho(t) (\sqrt{p_{11}} \delta t P_{00,1} \otimes I_2 \otimes I_3)^\dagger + \\ & + (\sqrt{p_{11}} \delta t P_{10,1} \otimes I_2 \otimes I_3) \rho(t) (\sqrt{p_{11}} \delta t P_{10,1} \otimes I_2 \otimes I_3)^\dagger + (\sqrt{p_{11}} \delta t P_{11,1} \otimes I_2 \otimes I_3) \rho(t) (\sqrt{p_{11}} \delta t P_{11,1} \otimes I_2 \otimes I_3)^\dagger + \\ & + (\sqrt{p_{21}} \delta t I_1 \otimes P_{00,2} \otimes I_3) \rho(t) (\sqrt{p_{21}} \delta t I_1 \otimes P_{00,2} \otimes I_3)^\dagger + (\sqrt{p_{21}} \delta t I_1 \otimes P_{01,2} \otimes I_3) \rho(t) (\sqrt{p_{21}} \delta t I_1 \otimes P_{01,2} \otimes I_3)^\dagger + \\ & + (\sqrt{p_{21}} \delta t I_1 \otimes P_{10,2} \otimes I_3) \rho(t) (\sqrt{p_{21}} \delta t I_1 \otimes P_{10,2} \otimes I_3)^\dagger + (\sqrt{p_{21}} \delta t I_1 \otimes P_{11,2} \otimes I_3) \rho(t) (\sqrt{p_{21}} \delta t I_1 \otimes P_{11,2} \otimes I_3)^\dagger + \\ & + (\sqrt{p_{31}} \delta t I_1 \otimes I_2 \otimes P_{00,3}) \rho(t) (\sqrt{p_{31}} \delta t I_1 \otimes I_2 \otimes P_{00,3})^\dagger + (\sqrt{p_{31}} \delta t I_1 \otimes I_2 \otimes P_{01,3}) \rho(t) (\sqrt{p_{31}} \delta t I_1 \otimes I_2 \otimes P_{01,3})^\dagger + \\ & + (\sqrt{p_{31}} \delta t I_1 \otimes I_2 \otimes P_{10,3}) \rho(t) (\sqrt{p_{31}} \delta t I_1 \otimes I_2 \otimes P_{10,3})^\dagger + (\sqrt{p_{31}} \delta t I_1 \otimes I_2 \otimes P_{11,3}) \rho(t) (\sqrt{p_{31}} \delta t I_1 \otimes I_2 \otimes P_{11,3})^\dagger + \\ & + (\sqrt{1 - \sum_{i=1}^3 p_i \delta t} I) \rho(t) (\sqrt{1 - \sum_{i=1}^3 p_i \delta t} I)^\dagger \end{aligned} \quad (40-4)$$

که این بازنویسی با توجه به $|1\rangle_i \langle 1| + |\bar{r}_i\rangle_i \langle 0| + |0\rangle_i \langle 0| = I_i$ و عملگرهای تصویر $P_{00,i} = |0\rangle_i \langle 0|$ ،

$P_{11,i} = |1\rangle_i \langle 1|$ و همچنین تعریف $\text{Tr}_i(\rho) = {}_i \langle 0 | \rho | 0 \rangle_i + {}_i \langle 1 | \rho | 1 \rangle_i$ و تعریف عملگرهای گذار به صورت

$$P_{ij} = |i\rangle\langle j| \quad i, j = 0, 1 \quad i \neq j \quad P_{ij} = P_{ji}^\dagger \quad (41-4)$$

بدست آمده است. عملگرهای $M_\mu(t + \delta t)$ متناظر با (40-4) به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned} M_0(t + \delta t) &= \sqrt{1 - \sum_{i=1}^3 p_i \delta t} I \\ M_1(t + \delta t) &= \sqrt{p_1 r_1 \delta t} P_{00,1} \otimes I_2 \otimes I_3, \quad M_2(t + \delta t) = \sqrt{p_1 r_1 \delta t} P_{00,1} \otimes I_2 \otimes I_3 \\ M_3(t + \delta t) &= \sqrt{p_1 \bar{r}_1 \delta t} P_{10,1} \otimes I_2 \otimes I_3, \quad M_4(t + \delta t) = \sqrt{p_1 \bar{r}_1 \delta t} P_{11,1} \otimes I_2 \otimes I_3 \\ M_5(t + \delta t) &= \sqrt{p_2 r_2 \delta t} I_1 \otimes P_{00,2} \otimes I_3, \quad M_6(t + \delta t) = \sqrt{p_2 r_2 \delta t} I_1 \otimes P_{01,2} \otimes I_3 \\ M_7(t + \delta t) &= \sqrt{p_2 \bar{r}_2 \delta t} I_1 \otimes P_{10,2} \otimes I_3, \quad M_8(t + \delta t) = \sqrt{p_2 \bar{r}_2 \delta t} I_1 \otimes P_{11,2} \otimes I_3 \\ M_9(t + \delta t) &= \sqrt{p_3 r_3 \delta t} I_1 \otimes I_2 \otimes P_{00,3}, \quad M_{10}(t + \delta t) = \sqrt{p_3 r_3 \delta t} I_1 \otimes I_2 \otimes P_{01,3} \\ M_{11}(t + \delta t) &= \sqrt{p_3 \bar{r}_3 \delta t} I_1 \otimes I_2 \otimes P_{10,3}, \quad M_{12}(t + \delta t) = \sqrt{p_3 \bar{r}_3 \delta t} I_1 \otimes I_2 \otimes P_{11,3} \end{aligned} \quad (42-4)$$

اکنون ، اگر $\sum_\mu M_\mu^\dagger(t + \delta t) M_\mu(t + \delta t)$ را محاسبه کنیم با توجه به روابط $r_i + \bar{r}_i = 1$ و $I_i = P_{00,i} + P_{11,i}$

و $I = I_1 \otimes I_2 \otimes I_3$ به رابطه ی زیر خواهیم می رسید:

$$\sum_\mu M_\mu^\dagger(t + \delta t) M_\mu(t + \delta t) = I \quad (43-4)$$

که طبق قضیه کراوس نشان می دهد که این ابرعملگر (منظور (4-37)) یک ابرعملگر خطی، کاملاً مثبت

و ردنگهدار می باشد. اکنون با توجه به روابط (4-30) ، (4-31) و $M_\mu(t) = \sqrt{\delta t} L_\mu(t)$ برای $\mu > 0$

عملگرهای کراوس متناظر در زمان t ، به صورت زیر بدست می آیند:

$$M_0(t) = I_S + (-iH_S + \frac{\sum_{i=1}^3 p_i}{2}) \delta t, \quad \mu = 0$$

$$M_\mu(t + \delta t) = M_\mu(t), \quad \mu > 0 \quad (44-4)$$

که با توجه به $M_\mu(t) = \sqrt{\delta t} L_\mu(t)$ برای $\mu > 0$ ، و همچنین روابط (۴-۴۲) عملگرهای $L_\mu(t)$ را می‌توان یافت [۴]. بنابراین، با توجه به $L_\mu(t)$ ها عبارت دوم رابطه‌ی (۴-۳۶) را بدین صورت بدست می‌آوریم:

$$\sum_{\mu>0} [L_\mu(t)\rho(0)L_\mu^\dagger(t) - \frac{1}{2}\rho(0)L_\mu^\dagger(t)L_\mu(t) - \frac{1}{2}L_\mu^\dagger(t)L_\mu(t)\rho(0)] = \sum_{i=1}^3 p_i[\tau_i \otimes Tr_i(\rho(0)) - \rho(0)]$$

بنابراین، رابطه‌ی حاکم بر دینامیک یخچال را بدین صورت بدست خواهیم آورد:

$$\left. \frac{d\rho(t)}{dt} \right|_{t=0} = -i[H_0 + H_{\text{int}}, \rho(0)] + \sum_{i=1}^3 p_i[\tau_i \otimes Tr_i(\rho(0)) - \rho(0)] \quad (۴-۴۵)$$

که می‌توان به صورت کلی، آن را بدین صورت نوشت:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H_0 + H_{\text{int}}, \rho] + \sum_{i=1}^3 p_i[\tau_i \otimes Tr_i(\rho) - \rho] \quad (۴-۴۶)$$

با توجه به این رابطه می‌توانیم ببینیم که لیندبلادین به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{L}[\cdot] = -i[H_0 + H_{\text{int}}, \cdot] + \sum_{i=1}^3 p_i[\tau_i \otimes Tr_i(\cdot) - \cdot] \quad (۴-۴۷)$$

۴-۲-۴ یافتن حالت پایا

همان‌طور که قبلاً گفتیم، چنین نگاشتی وجود یک حالت (پایای) منحصر بفرد را تضمین می‌کند

چنان‌که برای همه‌ی $\mathcal{T}$ ها، $\mathcal{E}_{\mathcal{T}}(\rho_{ss}) = \rho_{ss}$ و برای هر حالت اولیه‌ی ρ ، $\lim_{\mathcal{T} \rightarrow \infty} (\rho) = \rho_{ss}$ می‌باشد. بنابراین،

با توجه به (۴-۲۴) برای حالت پایا رابطه‌ی زیر را داریم:

$$\frac{d\rho^s}{dt} = 0 \quad (۴-۴۸)$$

که با توجه به (۴-۴۸) و معادله‌ی حاکم بر دینامیک یخچال، رابطه‌ی زیر را برای حالت پایا بدست

می‌آوریم:

$$0 = -i[H_0 + H_{\text{int}}, \rho^s] + \sum_{i=1}^3 p_i(\tau_i \otimes \text{Tr}_i \rho^s - \rho^s) \quad (49-4)$$

برای یافتن ρ^s ، ابتدا کلی‌ترین ρ ای را که در معادله (46-4) صدق می‌کند پیدا خواهیم کرد و سپس ρ ای را که، رابطه‌ی (49-4) را برآورده کند می‌یابیم. در مرحله‌ی اول، برای یافتن کلی‌ترین ماتریس چگالی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

در غیاب برهم‌کنش، سیستم ما سه کیوبیت مستقل از هم می‌باشد که هیچ برهم‌کنشی با هم ندارند در این حالت ماتریس چگالی سیستم به سادگی ضرب تانسوری سه حالت گرمایی به صورت $\rho_0 = \tau_1 \tau_2 \tau_3$ می‌باشد. اکنون فرض می‌کنیم که، سیستم ابتدا در حالت $\rho_0 = \tau_1 \tau_2 \tau_3$ باشد. با این فرض، اکنون می‌توانیم پاسخ دهیم چه اتفاقی می‌افتد اگر هامیلتونی برهم‌کنش صفر نباشد. به عبارتی، این مسئله را بررسی می‌کنیم که در طی یک دوره‌ی زمانی کوتاه، این حالت چگونه تحول پیدا می‌کند. ρ_0 را در معادله (46-4) قرار داده و تحول آن را بررسی می‌کنیم

$$\frac{d(\tau_1 \tau_2 \tau_3)}{dt} = -i[H_0 + H_{\text{int}}, \tau_1 \tau_2 \tau_3] + \sum_{i=1}^3 p_i(\tau_i \otimes \text{Tr}_i(\tau_1 \tau_2 \tau_3) - \tau_1 \tau_2 \tau_3) \quad (50-4)$$

که با توجه به روابط زیر

$$Y_{123} = i|101\rangle\langle 010| - i|010\rangle\langle 101|$$

$$[H_0, \tau_1 \tau_2 \tau_3] = 0 \quad [H_{\text{int}}, \tau_1 \tau_2 \tau_3] = ig(\bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 - r_1 \bar{r}_2 r_3) Y_{123}$$

$$\text{Tr}_1(\tau_1 \tau_2 \tau_3) = \tau_2 \tau_3 \quad \text{Tr}_2(\tau_1 \tau_2 \tau_3) = \tau_1 \tau_3 \quad \text{Tr}_3(\tau_1 \tau_2 \tau_3) = \tau_1 \tau_2 \quad (51-4)$$

و هم‌چنین در نظر گرفتن $\rho_1 = \frac{d\rho_0}{dt}$ بدست خواهیم آورد:

$$\rho_1 = g(\bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 - r_1 \bar{r}_2 r_3) Y_{123} \quad (52-4)$$

دقت کنید، حالتی که از تحول $\tau_1 \tau_2 \tau_3$ بدست می‌آید به صورت $\rho_1 = \tau_1 \tau_2 \tau_3 + \delta t \frac{d(\tau_1 \tau_2 \tau_3)}{dt}$ می‌باشد که

ما از نوشتن قسمت اولیه‌ی، یعنی $\tau_1 \tau_2 \tau_3$ صرف‌نظر کرده‌ایم زیرا از تحول آن در مرحله‌ی بعدی همان

عملگرهای قبلی بدست می‌آید و ما به دنبال خلق عملگرهای جدید در تحول هستیم یا به عبارتی دیگر،

می‌خواهیم ببینیم چه عملگرهای جدید دیگری خلق می‌شوند. بنابراین، فقط قسمت تحول را برابر ρ_1 در

نظر گرفته‌ایم یعنی $\rho_1 = \frac{d\rho_0}{dt}$ (برای حالت‌های بعدی نیز به همین صورت عمل خواهیم کرد). همان طور

که می‌بینیم، از تحول $\tau_1 \tau_2 \tau_3$ عملگر Y_{123} خلق می‌شود. اکنون تحول ρ_1 را نیز بررسی می‌کنیم:

$$\frac{d\rho_1}{dt} = -i[H_0 + H_{\text{int}}, \rho_1] + \sum_{i=1}^3 p_i (\tau_i \otimes \text{Tr}_i \rho_1 - \rho_1) \quad (53-4)$$

با توجه به روابط زیر

$$[H_0, \rho_1] = ig(\bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 - r_1 \bar{r}_2 r_3)(E_1 + E_3 - E_2)(|010\rangle\langle 101| + |101\rangle\langle 010|) \xrightarrow{E_1 + E_3 = E_2} [H_0, \rho_1] = 0$$

$$[H_{\text{int}}, \rho_1] = 2ig^2(\bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 - r_1 \bar{r}_2 r_3)(|010\rangle\langle 010| - |101\rangle\langle 101|)$$

$$\text{Tr}_i(Y_{123}) = 0 \quad i=1,2,3 \quad \text{Tr}_i(\rho_1) = 0$$

$$Z_{123} = |010\rangle\langle 101| - |101\rangle\langle 101| \quad (54-4)$$

و هم‌چنین در نظر گرفتن $\rho_2 = \frac{d\rho_1}{dt}$ بدست خواهیم آورد

$$\rho_2 = g(\bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 - r_1 \bar{r}_2 r_3) \{2gZ_{123} - (p_1 + p_2 + p_3)Y_{123}\} \quad (55-4)$$

همان طور که می بینیم، از تحول Y_{123} ، عملگر Z_{123} خلق می شود. اکنون تحول ρ_2 را به همین صورت بررسی می کنیم که با توجه به روابط

$$[H_0, Y_{123}] = 0 \quad [H_0, Z_{123}] = 0 \quad [H_{\text{int}}, Z_{123}] = -2igY_{123} \quad [H_{\text{int}}, Y_{123}] = +2igZ_{123}$$

$$[H_0, \rho_2] = 0 \quad (56-4)$$

$$[H_{\text{int}}, \rho_2] = 2g^2(\bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 - r_1 \bar{r}_2 r_3) \{2g - i(p_1 + p_2 + p_3)\} (|010\rangle\langle 010| - |101\rangle\langle 101|)$$

و همچنین در نظر گرفتن این که $\rho_3 = \frac{\partial \rho_2}{\partial t}$ ، بدست خواهیم آورد:

$$\begin{aligned} \rho_3 = & 2g^2(\bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 - r_1 \bar{r}_2 r_3) \{(1 - p_1 - p_2 - p_3)Z_{123} + p_1 \tau_1 Z_{23} + p_2 \tau_2 Z_{13} + p_3 \tau_3 Z_{12}\} + \\ & + g(p_1 + p_2 + p_3)^2 (\bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 - r_1 \bar{r}_2 r_3) Y_{123} \end{aligned} \quad (57-4)$$

که عملگرهای Z_{23} و Z_{13} و Z_{12} به صورت زیر می باشند:

$$Tr_1(Z_{123}) = Z_{23} \quad Z_{23} = |10\rangle\langle 10| - |01\rangle\langle 01|$$

$$Tr_1(Z_{123}) = Z_{23} \quad Z_{13} = |00\rangle\langle 00| - |11\rangle\langle 11|$$

$$Tr_3(Z_{123}) = Z_{12} \quad Z_{12} = |01\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 10| \quad (58-4)$$

می بینیم که از تحول ρ_2 ، عملگرهای $\tau_1 Z_{23}$ و $\tau_2 Z_{13}$ و $\tau_3 Z_{12}$ خلق می شوند. اکنون به همین صورت تحول ρ_3 را بررسی می کنیم که با توجه به روابط زیر

$$[H_0, \tau_1 Z_{23}] = 0 \quad [H_0, \tau_2 Z_{13}] = 0 \quad [H_0, \tau_3 Z_{12}] = 0 \quad [H_0, \rho_3] = 0$$

$$[H_{\text{int}}, \tau_1 Z_{23}] = -igY_{123} \quad [H_{\text{int}}, \tau_2 Z_{13}] = -igY_{123} \quad [H_{\text{int}}, \tau_3 Z_{12}] = -igY_{123}$$

$$[H_{\text{int}}, \rho_3] = 2ig^2(\bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 - r_1 \bar{r}_2 r_3) \{g(p_1 + p_2 + p_3 - 2)Y_{123} + (p_1 + p_2 + p_3)^2 Z_{123}\}$$

$$Tr_1(\tau_1 Z_{23}) = Z_{23}, Tr_2(\tau_1 Z_{23}) = \tau_1 Z_3, Tr_3(\tau_1 Z_{23}) = \tau_1 Z_2$$

$$Tr_1(\tau_2 Z_{13}) = \tau_2 Z_3, Tr_2(\tau_2 Z_{13}) = Z_{13}, Tr_3(\tau_2 Z_{13}) = \tau_2 Z_1$$

$$Tr_1(\tau_3 Z_{12}) = \tau_3 Z_2, Tr_2(\tau_3 Z_{12}) = \tau_3 Z_1, Tr_3(\tau_3 Z_{12}) = Z_{12} \quad (59-4)$$

و همچنین در نظر گرفتن این که $\rho_4, \rho_4 = \frac{\partial \rho_3}{\partial t}$ به صورت زیر بدست خواهد آمد

$$\begin{aligned} \rho_4 = & 2g^2(\bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 - r_1 \bar{r}_2 r_3) \{ (1-p_1-2p_2-2p_3)p_1 \tau_1 Z_{23} + 2p_1 p_2 \tau_1 \tau_2 Z_3 + 2p_1 p_3 \tau_1 \tau_3 Z_2 + \\ & + (1-2p_1-2p_3-p_2)p_2 \tau_2 Z_{13} + 2p_2 p_3 \tau_2 \tau_3 Z_1 + (1-2p_1-2p_2-p_3)p_3 \tau_3 Z_{12} + \\ & + g(p_1 + p_2 + p_3)(1-(p_1 + p_2 + p_3)(\bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 - r_1 \bar{r}_2 r_3))Y_{123} + \\ & + (p_1 + p_2 + p_3)(2p_1 + 2p_2 + 2p_3 - 1)Z_{123} \} \end{aligned} \quad (4-60)$$

که عملگرهای Z_1 و Z_2 و Z_3 به صورت $Z_i = (-1)^i (|1\rangle_i \langle 1| - |0\rangle_i \langle 0|)$ می باشند.

می بینیم که از تحول ρ_3 ، عملگرهای $\tau_1 Z_2 \tau_3$ و $\tau_1 \tau_2 Z_3$ و $Z_1 \tau_2 \tau_3$ خلق می شوند. اکنون به همین صورت

تحول ρ_4 را بررسی می کنیم. که با توجه به روابط زیر

$$[H_0, \tau_1 Z_2 \tau_3] = 0 \quad [H_0, \tau_1 \tau_2 Z_3] = 0 \quad [H_0, Z_1 \tau_2 \tau_3] = 0$$

$$[H_{\text{int}}, Z_1 \tau_2 \tau_3] = -ig(\bar{r}_2 r_3 + r_2 \bar{r}_3)Y_{123}$$

$$[H_{\text{int}}, \tau_1 Z_2 \tau_3] = -ig(r_1 r_3 + \bar{r}_1 \bar{r}_3)Y_{123} \quad Tr_i(Z_i) = 0$$

$$[H_{\text{int}}, \tau_1 \tau_2 Z_3] = -ig(\bar{r}_1 r_2 + r_1 \bar{r}_2)Y_{123}$$

$$Tr_1(\tau_1\tau_2Z_3) = \tau_2Z_3, Tr_2(\tau_1\tau_2Z_3) = \tau_1Z_3, Tr_3(\tau_1\tau_2Z_3) = 0$$

$$Tr_1(\tau_1Z_2\tau_3) = Z_2\tau_3, Tr_2(\tau_1Z_2\tau_3) = 0, Tr_3(\tau_1Z_2\tau_3) = \tau_1Z_2$$

$$Tr_1(Z_1\tau_2\tau_3) = 0, Tr_2(Z_1\tau_2\tau_3) = Z_1\tau_3, Tr_3(Z_1\tau_2\tau_3) = Z_1\tau_2 \quad (۶۱-۴)$$

با در نظر گرفتن $\rho_5 = \frac{\partial \rho_4}{\partial t}$ ، به آسانی می‌توان به این موضوع پی برد که ρ_5 به صورت جمعی از عملگرهای $(Y_{123}, Z_{123}, \tau_1Z_{23}, \tau_2Z_{13}, Z_{12}\tau_3, \tau_1\tau_2Z_3, \tau_1Z_2\tau_3, Z_1\tau_2\tau_3)$ می‌باشد. همچنین می‌توان دید از تحول ρ_4 ، عملگرهای $Z_1\tau_2\tau_3$ و $\tau_1Z_2\tau_3$ و $\tau_1\tau_2Z_3$ خلق می‌شوند.

تمامی مراحل بالا، یا به عبارتی تحول همه‌ی عملگرها را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\tau_1\tau_2\tau_3 \mapsto (Y_{123}) \quad , \quad Y_{123} \mapsto (Y_{123}, Z_{123}) \quad , \quad Z_{123} \mapsto (\tau_1Z_{23}, \tau_2Z_{13}, Z_{12}\tau_3)$$

$$(\tau_1Z_{23}, \tau_2Z_{13}, Z_{12}\tau_3) \mapsto (\tau_1\tau_2Z_3, \tau_1Z_2\tau_3, Z_1\tau_2\tau_3) \quad (۶۲-۴)$$

بنابراین با توجه به روابط (۶۲-۴)، می‌توان به این موضوع پی برد که از تحول ρ_5 هیچ عملگر جدیدی خلق نخواهد شد. بنابراین کلی‌ترین ماتریس چگالی‌ای که می‌تواند در معادله حاکم بر دینامیک یخچال، یعنی رابطه‌ی (۴۶-۴)، قرار بگیرد و از تحول آن هیچ عملگر جدیدی خلق نشود به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho = \alpha_1\tau_1\tau_2\tau_3 + \alpha_2\tau_1\tau_2Z_3 + \alpha_3\tau_1Z_2\tau_3 + \alpha_4Z_1\tau_2\tau_3 + \alpha_5\tau_1Z_{23} + \alpha_6\tau_2Z_{13} + \alpha_7Z_{12}\tau_3 + \alpha_8Z_{123} + \alpha_9Y_{123}$$

$$(۶۳-۴)$$

که با توجه به رابطه‌ی $Tr(\rho) = 1$ و همچنین روابط زیر

$$Tr(\tau_1\tau_2\tau_3) = 1 \quad , \quad Tr(\tau_1\tau_2Z_3) = Tr(\tau_1Z_2\tau_3) = Tr(Z_1\tau_2\tau_3) = 0$$

$$Tr(\tau_1 Z_{23}) = Tr(\tau_2 Z_{13}) = Tr(Z_{12} \tau_3) = 0 \quad (۶۴-۴)$$

$\alpha_1 = 1$ بدست می آید. بنابراین، ρ به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\rho = \tau_1 \tau_2 \tau_3 + \alpha_2 \tau_1 \tau_2 Z_3 + \alpha_3 \tau_1 Z_2 \tau_3 + \alpha_4 Z_1 \tau_2 \tau_3 + \alpha_5 \tau_1 Z_{23} + \alpha_6 \tau_2 Z_{13} + \alpha_7 Z_{12} \tau_3 + \alpha_8 Z_{123} + \alpha_9 \Upsilon_{123} \quad (۶۵-۴)$$

همان طور که قبلا بیان شد، از آن جا که ما علاقه مند به رفتار ایستا یا دراز مدت سیستم هستیم شرط

$$\frac{d\rho^s}{dt} = 0 \text{ یا به عبارتی شرط } \frac{d\rho}{dt} = 0 \text{ را اعمال می کنیم}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tau_1 \tau_2 \tau_3) + \alpha_2 \frac{d}{dt}(\tau_1 \tau_2 Z_3) + \alpha_3 \frac{d}{dt}(\tau_1 Z_2 \tau_3) + \alpha_4 \frac{d}{dt}(Z_1 \tau_2 \tau_3) + \alpha_5 \frac{d}{dt}(\tau_1 Z_{23}) + \alpha_6 \frac{d}{dt}(\tau_2 Z_{13}) + \\ + \alpha_7 \frac{d}{dt}(Z_{12} \tau_3) + \alpha_8 \frac{d}{dt}(Z_{123}) + \alpha_9 \frac{d}{dt}(\Upsilon_{123}) = 0 \end{aligned} \quad (۶۶-۴)$$

که ضرایب α_i مستقل از زمان در نظر گرفته شده اند. اکنون، با توجه به روابط زیر

$$\frac{d}{dt}(\tau_1 \tau_2 \tau_3) = -g \Delta \Upsilon_{123}$$

$$\frac{d}{dt}(\tau_1 \tau_2 Z_3) = -g \Omega_{12} \Upsilon_{123} - p_3 \tau_1 \tau_2 Z_3$$

$$\frac{d}{dt}(\tau_1 Z_2 \tau_3) = -g \Omega_{13} \Upsilon_{123} - p_2 \tau_1 Z_2 \tau_3$$

$$\frac{d}{dt}(Z_1 \tau_2 \tau_3) = -g \Omega_{23} \Upsilon_{123} - p_1 Z_1 \tau_2 \tau_3$$

$$\frac{d}{dt}(\tau_1 Z_{23}) = -gY_{123} + p_2 \tau_1 \tau_2 Z_3 + p_3 \tau_1 Z_2 \tau_3 - (p_2 + p_3) \tau_1 Z_{23}$$

$$\frac{d}{dt}(\tau_2 Z_{13}) = -gY_{123} + p_1 \tau_1 \tau_2 Z_3 + p_3 Z_1 \tau_2 \tau_3 - (p_1 + p_3) \tau_2 Z_{13}$$

$$\frac{d}{dt}(Z_{12} \tau_3) = -gY_{123} + p_1 \tau_1 Z_2 \tau_3 + p_2 Z_1 \tau_2 \tau_3 - (p_1 + p_2) Z_{12} \tau_3$$

$$\frac{d}{dt}(Z_{123}) = -2gY_{123} + p_1 \tau_1 Z_{23} + p_2 \tau_2 Z_{13} + p_3 Z_{12} \tau_3 - (p_1 + p_2 + p_3) Z_{123}$$

$$\frac{d}{dt}(Y_{123}) = 2gZ_{123} - (p_1 + p_2 + p_3)Y_{123} \quad (۶۷-۴)$$

و جایگذاری آن‌ها در رابطه‌ی (۴-۶۶) به معادله زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & (-g\Delta - g\alpha_2\Omega_{12} - g\alpha_3\Omega_{13} - g\alpha_4\Omega_{23} - g\alpha_5 - g\alpha_6 - g\alpha_7 - 2g\alpha_8 - q\alpha_9)Y_{123} + \\ & + (-p_3\alpha_2 + p_2\alpha_5 + p_1\alpha_6)\tau_1\tau_2Z_3 + (-p_2\alpha_3 + p_3\alpha_5 + p_1\alpha_7)\tau_1Z_2\tau_3 + \\ & + (-p_1\alpha_4 + p_3\alpha_6 + p_2\alpha_7)Z_1\tau_2\tau_3 + (-(p_2 + p_3)\alpha_5 + p_1\alpha_8)\tau_1Z_{23} + \\ & + (-(p_1 + p_3)\alpha_6 + p_2\alpha_8)\tau_2Z_{13} + (-(p_1 + p_2)\alpha_7 + p_3\alpha_8)Z_{12}\tau_3 + (-q\alpha_8 + 2g\alpha_9)Z_{123} = 0 \end{aligned} \quad (۶۸-۴)$$

که پارامترهای $\Delta, \Omega_{23}, \Omega_{13}, \Omega_{12}$ و q به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \Omega_{12} &= r_1 \bar{r}_2 + \bar{r}_1 r_2 & \Omega_{13} &= r_1 r_3 + \bar{r}_1 \bar{r}_3 & \Omega_{23} &= r_2 \bar{r}_3 + \bar{r}_2 r_3 \\ \Delta &= r_1 \bar{r}_2 r_3 - \bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 & q &= p_1 + p_2 + p_3 \end{aligned} \quad (۶۹-۴)$$

برای حل این معادله و یافتن ضرایب α_i ، ضرایب عملگرها را برابر صفر می‌گیریم که بدین صورت به

معادلات زیر می‌رسیم که شامل هشت معادله و هشت مجهول می‌باشد:

$$\Delta + \alpha_2\Omega_{12} + \alpha_3\Omega_{13} + \alpha_4\Omega_{23} + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + 2\alpha_8 + \frac{q}{g}\alpha_9 = 0$$

$$-p_2\alpha_3 + p_3\alpha_5 + p_1\alpha_7 = 0 \quad -p_3\alpha_2 + p_2\alpha_5 + p_1\alpha_6 = 0$$

$$-p_1\alpha_4 + p_3\alpha_6 + p_2\alpha_7 = 0 \quad -(p_1 + p_2)\alpha_7 + p_3\alpha_8 = 0$$

$$-(p_1 + p_3)\alpha_6 + p_2\alpha_8 = 0 \quad -(p_2 + p_3)\alpha_5 + p_1\alpha_8 = 0$$

$$-q\alpha_8 + 2g\alpha_9 = 0 \quad (۷۰-۴)$$

که با حل معادلات، ضرایب α_i را می‌یابیم. اکنون با جایگذاری ضرایب در رابطه (۴-۶۵) به فرم ماتریس چگالی‌ای که، توصیف‌کننده رفتار ایستا یا دراز مدت سیستم می‌باشد خواهیم رسید. که به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho^s = \tau_1\tau_2\tau_3 + \gamma\{Q_1Z_1\tau_2\tau_3 + Q_2\tau_1Z_2\tau_3 + Q_3\tau_1\tau_2Z_3 + q_1\tau_1Z_{23} + q_2\tau_2Z_{13} + q_3Z_{12}\tau_3 + Z_{123} + \frac{q}{2g}Y_{123}\} \quad (۷۱-۴)$$

ضرایب $q_1, q_2, q_3, Q_1, Q_2, Q_3$ و γ به صورت زیر می‌باشند:

$$Q_1 = \frac{p_2p_3}{p_1} \left(\frac{1}{p_1 + p_2} + \frac{1}{p_1 + p_3} \right), Q_2 = \frac{p_1p_3}{p_2} \left(\frac{1}{p_1 + p_2} + \frac{1}{p_2 + p_3} \right), Q_3 = \frac{p_1p_2}{p_3} \left(\frac{1}{p_1 + p_3} + \frac{1}{p_2 + p_3} \right)$$

$$q_1 = \frac{p_1}{p_2 + p_3} \quad q_2 = \frac{p_2}{p_1 + p_3} \quad q_3 = \frac{p_3}{p_1 + p_2}$$

$$\gamma = \frac{-\Delta}{Q_3\Omega_{12} + Q_2\Omega_{13} + Q_1\Omega_{23} + q_1 + q_2 + q_3 + 2 + \frac{q^2}{2g^2}} \quad (۷۲-۴)$$

دقت کنید که عملگرهای Z_{123} و Y_{123} عملگرهای پاولی گونه می‌باشند. به عبارتی، در روابط جابجایی‌ای

شبه به روابط جابجایی عملگرهای پاولی صدق می‌کنند ($X_{123} = |101\rangle\langle 010| + |010\rangle\langle 101|$):

$$[\Upsilon_{123}, Z_{123}] = 2iX_{123} \quad , \quad [Z_{123}, X_{123}] = 2i\Upsilon_{123} \quad , \quad [X_{123}, \Upsilon_{123}] = 2iZ_{123} \quad (73-4)$$

۵-۴- ماتریس‌های چگالی تقلیل یافته تک جزیی^۱

از آن جا که، ما بدنبال یافتن جریان‌های گرمایی در حالت پایا می‌باشیم با توجه به رابطه‌ی (۷۱-۴) و این که ماتریس‌های چگالی تقلیل یافته تک جزیی به صورت زیر می‌باشند:

$$\rho_i^s = Tr_{jk}(\rho^s) \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad i \neq j \neq k \quad (74-4)$$

برای حالت $i=1$ محاسبات را انجام می‌دهیم. با توجه به روابط زیر

$$\begin{aligned} Tr_{23}(Q_1 Z_1 \tau_2 \tau_3) &= Q_1 Z_1 & Tr_{23}(Q_2 \tau_1 Z_2 \tau_3) &= 0 & Tr_{23}(Q_3 \tau_1 \tau_2 Z_3) &= 0 \\ Tr_{23}(q_1 \tau_1 Z_{23}) &= 0 & Tr_{23}(q_2 \tau_2 Z_{13}) &= q_2 Z_1 & Tr_{23}(q_3 Z_{12} \tau_3) &= q_3 Z_1 \\ Tr_{23}(\tau_1 \tau_2 \tau_3) &= \tau_1 & Tr_{23}(Z_{123}) &= Z_1 & Tr_{23}\left(\frac{q}{2g} \Upsilon_{123}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (75-4)$$

و رابطه‌ی $\rho_1^s = Tr_{23}(\rho^s)$ ، رابطه زیر را بدست خواهیم آورد:

$$\rho_1^s = \tau_1 + \frac{q\gamma}{p_1} Z_1 \quad (76-4)$$

بنابراین، به صورت کلی ماتریس چگالی تقلیل یافته‌ی تک جزیی به این صورت می‌باشد:

$$\rho_i^s = \tau_i + \frac{q\gamma}{p_i} Z_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (77-4)$$

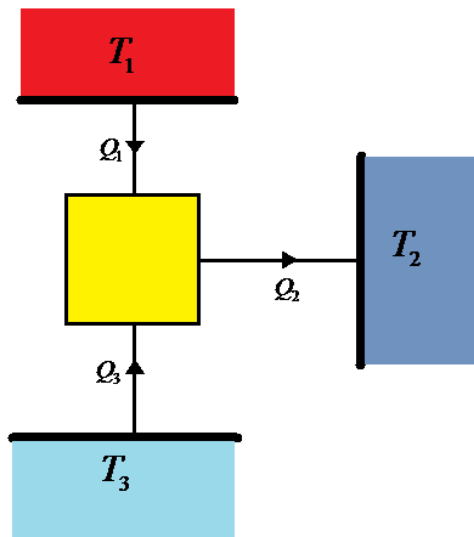
اکنون، با توجه به رابطه‌ی (۷۷-۴) و هم‌چنین روابط زیر

^۱- Single-party reduced density matrices

$$Q_i = p_i \text{Tr}(H_i(\tau_i - \rho_i(t))) \quad Z_i = (-1)^i (|1\rangle_i \langle 1| - |0\rangle_i \langle 0|)$$

جریان گرمایی Q_i (یا به عبارتی Q_i^s جریان گرمایی در حالت پایا) را به این صورت بدست خواهیم آورد:

$$Q_i = (-1)^{i+1} q \gamma E_i \quad i=1,2,3 \quad (78-4)$$



شکل (۴-۲): نمایش شماتیک یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار

که با توجه به محدودیت اعمال شده بر روی انرژی مبادله شده میان کیوبیت‌ها ($E_1 + E_3 = E_2$)، نسبت انرژی‌های مبادله شده با منبع مستقل از تمام جزئیات است و آن به سادگی مانند انرژی مبادله شده میان کیوبیت‌ها می‌باشد، که آن هم نسبت میان ترازهای انرژی است. به عبارتی دیگر

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 = E_1 : E_2 : E_3 \quad (79-4)$$

اکنون، از دیدگاه دیگری جریان‌های گرمایی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که بسیار جالب می‌باشد. با توجه به رابطه‌ی (۴-۷۷) رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\rho_i^s - \tau_i = \frac{q\gamma}{p_i} Z_i \quad (۸۰-۴)$$

اکنون با تاثیر $\Pi_i = |1\rangle_i \langle 1|_i$ بر رابطه‌ی (۸۰-۴)، رابطه‌ی زیر را بدست خواهیم آورد:

$$p_i \delta q_i = (-1)^{i+1} q\gamma \quad (۸۱-۴)$$

که δq_i ، تفاضل احتمال حالت برانگیخته‌ی ایستایی و احتمال حالت برانگیخته‌ی گرمایی می‌باشد:

$$\delta q_i = \bar{r}_i - \bar{r}_i^s \quad (۸۲-۴)$$

اکنون، با توجه به رابطه‌ی (۷۸-۴) و رابطه‌ی (۸۱-۴) جریان‌های گرمایی را بدین صورت می‌توان بازنویسی کرد:

$$Q_i = p_i E_i \delta q_i \quad (۸۳-۴)$$

بنابراین، انرژی گرمایی بدست آمده یا از دست داده توسط کیوبیت i ام را بدین صورت می‌توان بیان کرد:

چگالی احتمال p_i ضربدر انرژی بدست آورده یا از دست داده زمانی که یک جایگزینی انجام شود. که این

انرژی برابر با اختلاف انرژی میانگین متوسط انرژی‌های در حالت پایدار ρ_i^s و τ_i می‌باشد که برابر E_i ضربدر δq_i برای حالت برانگیخته می‌باشد.

که این رابطه‌ی (۸۳-۴) را در حالت کلی می‌توان بدین صورت نیز بیان کرد:

$$Q_i = p_i E_i^g \delta q_i^g + p_i E_i^e \delta q_i^e \quad (۸۴-۴)$$

که $\delta q_i^g = r_i - r_i^s$ و $\delta q_i^e = \bar{r}_i - \bar{r}_i^s$ می‌باشد. که با توجه به انتخاب انرژی حالت پایه به عنوان نقطه‌ی

مرجع، دوباره به رابطه‌ی (۸۳-۴) می‌رسیم.

با توجه به ماتریس چگالی تقلیل یافته تک جزیی ρ_i^s ، می توان دریافت که احتمال اشغالی^۱ حالت پایه برای هر کیوبیت از مقدارش در حالت تعادل اولیه با یک مقدار متناسب به پارامتر γ انتقال داده شده است. برای رفتار کردن مدل ما به صورت یک یخچال، نیاز داریم که دمای ایستایی^۲ کیوبیت ۳ سردتر از دمای منبع اش شود یعنی $T_3^s \langle T_3 \rangle$.

در فرآیند همدمای کوانتومی شبه ایستا^۳ نسبت $\frac{r_i}{\bar{r}_i}$ یک سیستم دو ترازه، با حالت برانگیخته $|1\rangle_i$ و حالت پایه $|0\rangle_i$ و جدایی تراز E_i ، می بایستی به ترتیب، توزیع بولتزمنی و هم چنین شرط بهنجاری که در زیر آمده است را برآورده کند:

$$\frac{r_i}{\bar{r}_i} = \exp\left(-\frac{E_i}{kT_i}\right)$$

$$r_i + \bar{r}_i = 1 \quad (۸۵-۴)$$

بنابراین، با توجه به حالت گرمایی اولیه کیوبیت i ام، که حالت اولیه سیستم را آن فرض کرده ایم

$$\tau_i = r_i |0\rangle_i \langle 0| + \bar{r}_i |1\rangle_i \langle 1|$$

دمای حالت گرمایی کیوبیت i ام، که برابر با دمای منبعی است که با آن در تماس می باشد، بدین صورت خواهد بود:

$$T_i = \frac{E_i}{k} \left[\ln\left(\frac{r_i}{\bar{r}_i}\right) \right]^{-1} \quad (۸۶-۴)$$

۱- occupation probability

۲- Stationary temperature

۳- quasistatic quantum isothermal process

با توجه به ماتریس چگالی کیوبیت i ام در حالت ایستایی، که به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho_i^s = r_i^s |0\rangle_i \langle 0| + \bar{r}_i^s |1\rangle_i \langle 1| \quad (۸۷-۴)$$

و با توجه به آن که می‌توانیم یک دمای موثر^۱ T_{eff} برای هر سیستم دو ترازه بر اساس نسبت احتمال‌های اشغالی و جدایی دو تراز تعریف کنیم:

$$T_{eff} = \frac{E_i}{k} \left[\ln\left(\frac{r_i}{\bar{r}_i}\right) \right]^{-1} \quad (۸۸-۴)$$

حتی در یک حالت غیر تعادلی می‌توانیم فرض کنیم که سیستم در یک حالت تعادل مجازی با دمای موثر T_{eff} می‌باشد [۶]. بنابراین، دمای ایستایی کیوبیت i ام بدین صورت خواهد بود:

$$T_i^s = \frac{E_i}{k} \left[\ln\left(\frac{r_i^s}{\bar{r}_i^s}\right) \right]^{-1} \quad (۸۹-۴)$$

که r_i^s و $\bar{r}_i^s$ به صورت زیر تعیین می‌شوند

$$\bar{r}_i^s = \bar{r}_i + \frac{q\gamma}{p_i} (-1)^i \quad r_i^s = r_i - \frac{q\gamma}{p_i} (-1)^i \quad (۹۰-۴)$$

همچنان که گفته شد، برای رفتار کردن مدل ما به صورت یک یخچال، نیاز داریم که دمای ایستایی کیوبیت ۳ سردتر از دمای منبع‌اش باشد، یعنی $T_3^s < T_3$. بنابراین با توجه به روابط (۴-۸۲) و (۴-۸۸) داریم:

$$T_3^s < T_3 \quad \rightarrow \quad r_3^s > r_3 \quad (۹۱-۴)$$

^۱- effective temperature

که این رابطه بیان می‌کند، احتمال حالت پایه ایستایی کیوبیت ۳ باید بیشتر از حالت پایه ی گرمایی باشد. با توجه به این رابطه به این نتیجه می‌رسیم که $\gamma > 0$ می‌باشد. چون مخرج کسر γ همواره مقداری مثبت است $0 < \Delta$ خواهد بود بنابراین، رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$- \Delta > 0 \rightarrow \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_3 > r_1 r_2 r_3 \quad (92-4)$$

بنا بر رابطه‌ی (۹۱-۴) و (۹۲-۴)، سرد کردن کیوبیت ۳ معادل با افزایش احتمال یافتن آن در حالت پایه می‌باشد. بنابراین، تمام کاری که سعی در انجام آن داریم افزایش احتمال گذار $|010\rangle \rightarrow |101\rangle$ (که در آن کیوبیت ۳ از حالت برانگیخته به حالت پایه خواهد رفت) در برابر احتمال گذار وارون $|101\rangle \rightarrow |010\rangle$ می‌باشد. این امر با ترتیب دادن این که، احتمال یافتن سیستم در حالت $|101\rangle$ در غیاب برهم‌کنش بیشتر از احتمال یافتن سیستم در حالت $|010\rangle$ باشد، تحقق می‌پذیرد. به عبارتی دیگر با برقرار بودن رابطه‌ی (۹۲-۴). اما به صورت ساختاری برای تحقق این هدف چه کاری باید انجام داد؟

با توجه به رابطه‌ی (۹۲-۴)، r_i و $\bar{r}_i$ به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_3}{T_3} < \frac{E_2}{T_2} \quad (93-4)$$

که این رابطه این نکته را بیان می‌کند، که با تنظیم سیستم به این صورت، با شروع برهم‌کنش سرد شدن کیوبیت ۳ را خواهیم داشت. بازنویسی رابطه‌ی (۹۳-۴) در عبارتی از دمای مجازی آموزنده می‌باشد. با توجه به رابطه (۹۳-۴) داریم:

$$\frac{E_2 - E_1}{T_2 - T_1} < T_3 \rightarrow T_v < T_3 \quad (94-4)$$

به عبارتی دیگر، برای اینکه سیستم ما مانند یک یخچال رفتار کند باید $T_v < T_3$ باشد.

۴-۶- بیشینه بازدهی و بازگشت پذیری^۱

سوال اساسی در این بخش بیشینه‌ی بازدهی یخچال می‌باشد. همان‌طور که در ماشین‌های گرمایی، بیشینه‌ی بازدهی در حالت بازگشت‌پذیری بدست آمد برای مورد یخچال‌های کوانتومی، باید تضمین کنیم که گذار رو به جلو^۲ که سرد شدن کیوبیت ۳ را نتیجه می‌دهد ($|010\rangle \rightarrow |101\rangle$) به صورت یک بی‌نهایت کوچک نزدیک به گذار برگشت^۳ که گرم شدن کیوبیت ۳ را نتیجه می‌دهد، باشد ($|101\rangle \rightarrow |010\rangle$). این نتیجه‌گیری از این نکته بدست می‌آید، که باید در انتهای فرآیند بی‌درروی کوانتومی ($D \rightarrow A$) دمای ایستایی کیوبیت ۳ برابر با دمای منبع‌اش باشد (منظور چرخه‌ی پادساعتگرد $ABCD$ در نمودار دما-آنترپی می‌باشد).

به عبارتی شرط بازگشت‌پذیری به این معنا می‌باشد که علامت $\langle$ در رابطه‌ی (۴-۶۷) با علامت مساوی جایگزین شود. بنابراین، تحت بازگشت‌پذیری رابطه‌ی زیر را داریم:

$$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_3}{T_3} = \frac{E_2}{T_2} \quad (۴-۹۵)$$

که در بیان دمای مجازی، بدین صورت بازنویسی می‌شود:

$$T_v = T_3 \quad (۴-۹۶)$$

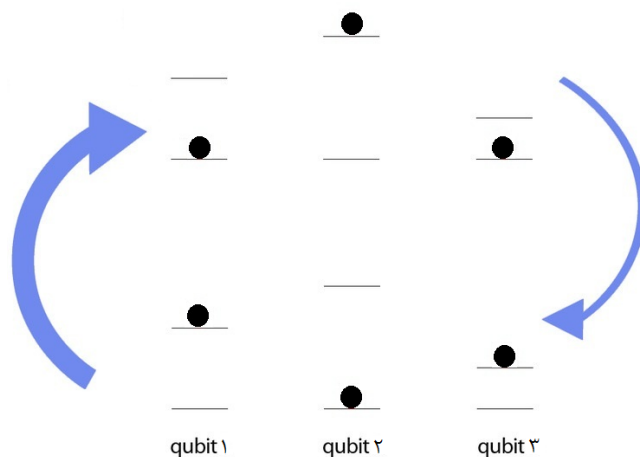
توجه کنید، که راه‌اندازی یخچال به صورت خیلی آهسته (یا به صورت تدریجی)، به وسیله‌ی یک ترکیب ساده از هامیلتونی برهم‌کنش بسیار ضعیف، کافی نیست. این کار بازگشت‌پذیری را تضمین نخواهد کرد

۱- reversibility

۲- forward transition

۳- backward transition

طرح واقعی از یخچال به صورت معادله (۴-۹۵) مطابقت خواهد یافت، یعنی رابطه‌ی ترازهای انرژی با دماهای کاری.



شکل (۴-۳): گذارهای رفت و برگشت یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار

اگر بخواهیم تمامی مباحثی که تا کنون در مورد یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار بیان شده است را به طور خلاصه بیان کنیم، تا آن جا که مسئله‌ی بازدهی در یک رژیم بازگشت پذیر مهم است، بیشتر جزئیات مربوط به یخچال‌ها بی ربط می باشند و تمامی مباحث را می توان به طور خلاصه در سه معادله‌ی زیر بیان کرد:

۱- معادله‌ی (۴-۴) که ساختار اساسی یخچال را توصیف می کند.

$$E_1 + E_3 = E_2$$

۲- معادله‌ی (۴-۷۹) که ارتباط میان جریان های گرمایی و ساختار اساسی یخچال را توصیف می کند.

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 = E_1 : E_2 : E_3$$

۳- معادله‌ی (۴-۹۵) که رژیم بازگشت پذیر را توصیف می کند.

$$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_3}{T_3} = \frac{E_2}{T_2}$$

اکنون، با استفاده از شرط بازگشت پذیری و دو معادله‌ی دیگر می‌توانیم رابطه‌ی زیر را بدست آوریم

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_3}{T_3} = \frac{Q_1 + Q_3}{T_2} \quad (97-4)$$

با توجه به تعریف بازدهی که به صورت نسبت گرمای گرفته شده از منبع سرد به گرمای گرفته شده از منبع گرم می‌باشد

$$\eta_{fr}^q = \frac{Q_3}{Q_1} \quad (98-4)$$

و همچنین رابطه (97-4) ، به عبارتی اعمال شرط بازگشت پذیری، به بیشینه‌ی بازدهی یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار می‌رسیم که بدین صورت می‌باشد:

$$\eta_{fr}^c = \frac{1 - \frac{T_2}{T_1}}{\frac{T_2}{T_3} - 1} \quad (99-4)$$

بنابراین تنها سه معادله‌ی (4-4) ، (79-4) و (95-4) برای بیان این موضوع که، یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار می‌تواند به بازدهی کارنو برسد کافی می‌باشد. دقت کنید که برای بازدهی یخچال کلاسیکی بازگشت پذیر که میان این دماها کار می‌کند نیز همین بیان ریاضی را بدست می‌آوریم. همان‌طور که می‌بینیم، بازدهی کارنوی یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار فقط به دمای منبع‌هایی که بین آن‌ها قرار گرفته است بستگی دارد. به عبارتی دیگر، بازدهی کارنوی یک یخچال کوانتومی سه

کیوییتی خودسازگار یک ویژگی جهانی^۱ می‌باشد به عبارتی، آن تنها وابسته به دمای منبع‌هایی می‌باشد که میان آن‌ها کار می‌کند، و مستقل از جزئیات ساختار ماشین یا برهم‌کنش‌های آن با منبع گرمایی می‌باشد. از طرف دیگر، بازدهی یک ماشین گرمایی (یخچال ، پمپ گرمایی و موتور گرمایی) زمانی که متفاوت از بازدهی کارنو عمل می‌کنند یک ویژگی غیرجهانی^۲ می‌باشد، که وابسته به تمام این جزئیات می‌شود. در این قسمت ما نشان خواهیم داد به هر حال،

" بازدهی کوچکترین ماشین‌های گرمایی جهانی می‌باشد چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن."

از میان کوچک‌ترین ماشین‌های گرمایی، ما در این جا بر روی کوچک‌ترین یخچال تمرکز می‌کنیم. اکنون، بار دیگر با توجه به رابطه‌ی (۷۹-۴) و (۹۸-۴) بازدهی را به این صورت می‌نویسیم:

$$\eta_{fr}^q = \frac{E_3}{E_1} \quad (۱۰۰-۴)$$

با استفاده از تعریف T_v ، می‌توانیم این نتیجه را، نه در عبارت‌هایی از انرژی E_1 و E_3 ، بلکه در عبارت‌هایی از دماهای منبع و دمای مجازی بیان کنیم. که به صورت زیر می‌باشد:

$$\eta_{fr}^q = \eta_{fr}^C \left(1 - \frac{\frac{1}{T_v} - \frac{1}{T_3}}{\frac{1}{T_v} - \frac{1}{T_2}} \right) \quad (۱۰۱-۴)$$

که η_{fr}^C بازدهی کارنوی استاندارد برای یک یخچال می‌باشد که بوسیله‌ی منبع‌های T_1 و T_2 جلو برده می‌شود و از یک منبع در دمای T_3 ، گرما استخراج می‌کند.

۱- universal property

۲- non-universal

در یک روش مشابه، می‌توانیم بازدهی کوچک‌ترین پمپ گرمایی η_{hp}^q و کوچک‌ترین موتور گرمایی η_{he}^q را به صورت زیر معین کنیم:

$$\eta_{hp}^q = \eta_{hp}^C \left(1 - \frac{\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_v}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_v}} \right) \quad \eta_{he}^q = \eta_{he}^C \left(1 - \frac{\frac{1}{T_v}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_v}} \right) \quad (۱۰۲-۴)$$

که

$$\eta_{hp}^C = \frac{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_3}} \quad \eta_{he}^C = 1 - \frac{T_1}{T_2} \quad (۱۰۳-۴)$$

بازدهی کارنو برای یک پمپ گرمایی و موتور گرمایی می‌باشند که به وسیله‌ی منبع‌های T_1 و T_2 جلو برده می‌شوند، و به ترتیب تحویل دهنده‌ی گرما به یک منبع در دمای T_3 ، یا تحویل دهنده‌ی کار می‌باشند. بنابراین ما می‌بینیم، که برای کوچک‌ترین ماشین‌ها بازده جهانی می‌باشد. بازدهی‌ها تنها وابسته به دماهای دو منبع خارجی و "تک دمای مجازی" دو منبع مرکب، که ماشین انتخاب می‌کند و با آن جفت می‌شود، می‌باشد و آن وابسته به جزئیات دیگری مانند ثابت‌های جفت شدگی میان ماشین و منبع، یا ماشین و سیستم خارجی نمی‌باشد. توجه کنید، که ویژگی جهانی بودن بازدهی کوچک‌ترین ماشین‌ها، در اثر توانایی فیلتر کردن تنها یک تک دمای مجازی می‌باشد، یعنی یک فیلتر کامل.

اکنون با توجه به تک دمای مجازی، بر معنی حد کارنو و روشی که بازگشت‌پذیری بدست می‌آید، تفسیر دیگری می‌نویسیم:

همان‌طور که می‌دانیم، زمانی که دو جسم در دو دمای متفاوت را در کنار هم قرار دهیم با فرآیندی

بازگشت ناپذیر روبه رو هستیم. تنها روشی که بازگشت پذیری تضمین شده می باشد، این است که همه ی سیستم هایی که در تماس گرمایی با هم هستند، دمای یکسان داشته باشند. این دقیقاً، همان چیزی است که در یک ماشین که در یک رژیم بازگشت پذیر کار می کند، اتفاق می افتد. با توجه به روابط (۴-۱۰۱) ، (۴-۱۰۲) و بکار بردن این مفاهیم می توان دید، برای یخچال و پمپ گرمایی عبارات تصحیح صفر می شوند و حد کارنو دقیقاً زمانی بدست می آید که جسم هایی که در تماس قرار گرفته اند (سیستم خارجی، ماشین کیوبیت مجازی و کیوبیت مجازی انتخاب شده از منبع مرکب) همه دمای یکسانی داشته باشند. به عبارتی دیگر، زمانی که این رابطه برقرار باشد:

$$T_3^s = T_v \quad (۴-۱۰۴)$$

که به رابطه ی $T_v = T_3$ منجر می شود. که این تساوی، باعث صفر شدن عبارات تصحیح در بازدهی یخچال و پمپ گرمایی می شود و حد کارنو بدست می آید. این تحلیل نشان می دهد، اگر ماشین دمایی متفاوت از همان دمای معین مورد نیاز را فیلتر کند آنگاه نمی تواند به حد کارنو برسد. این مشکل با در نظر گرفتن جفت تراز انرژی E_3 به عنوان سیستم خارجی، که ماشین بر روی آن اثر می کند، حل می شود. به عبارتی E_3 را به صورتی انتخاب کنیم که $E_3 = E_2 - E_1$ باشد. برخلاف ماشین های گرمایی بسیار کوچک، که تنها یک تک دمای مجازی را از منبع فیلتر می کنند، در حالت کلی یک ماشین گرمایی یک بازه از دماهای مجازی را فیلتر خواهد کرد. بنابراین، برای این که ماشین های گرمایی معمولی به بازدهی کارنو برسند باید برای جفت نشدن^۱ با دماهای مجازی خواسته نشده طراحی شوند. یعنی، ماشین باید یک بازه از دماهای مجازی که تک دماهای مطلوب برای نزدیک شدن به حد کارنو را می دهد فیلتر کند. تنها راه برای رسیدن به این هدف، همان روش جفت نشدگی برای کوچک ترین ماشین گرمایی می باشد:

^۱- decoupled

تنها یک انتخاب تک از جدایی‌های E_1 و E_2 که هر دو با E_3 جفت شده‌اند، وجود دارد (یعنی $E_3 = E_2 - E_1$) و همچنین ارائه‌ی یک ماشین کیوبیت مجازی که در دمای T_v می‌باشد.

برای مثال، اگر بخش‌های دیگری از ماشین به صورت E'_1 و E'_2 وجود داشته باشد که می‌تواند با E_3 جفت شود، (یعنی $E_3 = E'_2 - E'_1$) آنگاه آن، به دمای مجازی دیگری به صورت T_v منجر می‌شود که متفاوت با T_v مورد نیاز می‌باشد. جفت‌شدگی ماشین با دیگر دماهای مجازی بازدهی آن را کاهش می‌دهد. بنابراین نتیجه می‌گیریم، که هر ماشین گرمایی که یک تک دمای مجازی را فیلتر می‌کند باید بوسیله‌ی تنها یک تک جدایی با هر منبع جفت شود که در این صورت، آن کوچک‌ترین ماشین گرمایی یا یکی از ماشین‌های گرمایی بسیار کوچک می‌باشد.

۷-۴- تحلیل جریان آنتروپی

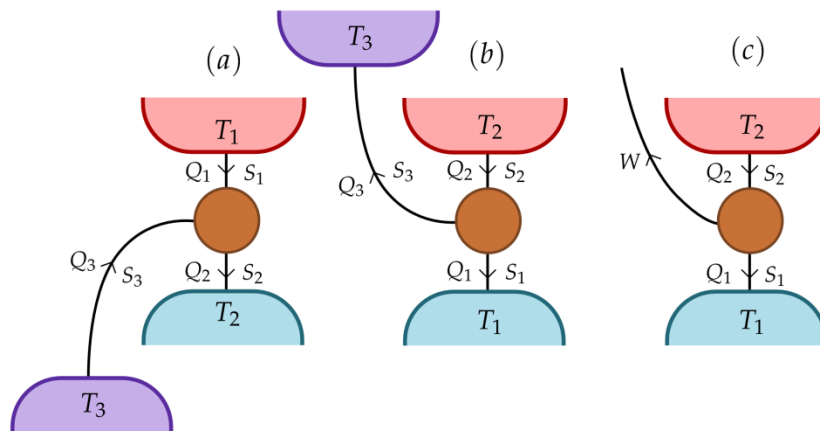
تحلیل جریان آنتروپی در ماشین‌های گرمایی یکی از مهم‌ترین جنبه‌های ترمودینامیکی ماشین گرمایی می‌باشد. ما در این بخش جریان‌های آنتروپی کوچک‌ترین ماشین‌های گرمایی را مورد بررسی و تحلیل قرار می‌دهیم [۷-۱۱]. ما در این تحلیل، به این مفهوم ویژه می‌رسیم، که کیوبیت مجازی مانند یک کیوبیت واقعی در دمای مجازی رفتار می‌کند. که این موضوع بر این استدلال ما تاکید دارد، که کیوبیت مجازی مانند یک کیوبیت واقعی در دمای مجازی رفتار می‌کند. در این جا ، ما بر روی کوچک‌ترین یخچال تمرکز می‌کنیم که در شکل (۴-۴) نشان داده شده است.

با توجه به، رابطه‌ی نسبت جریان‌های گرمایی و ترازهای انرژی (۴-۷۹) و تعریف T_v ، رابطه‌ی زیر را بدست می‌آوریم:

$$\frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_3}{T_v} \quad (۴-۱۰۵)$$

این رابطه به روشنی یک تساوی آنتروپی می‌باشد. شامل آنتروپی‌های $S_1 = \frac{Q_1}{T_1}$ ، شارش کننده به بیرون

منبع ۱ ، و $S_2 = \frac{Q_2}{T_2}$ ، شارش کننده به داخل منبع ۲ ، و کمیت آنتروپی $S_v = \frac{Q_3}{T_v}$.



شکل (۴-۴): ماشین‌های گرمایی، جریان‌های گرمایی و آنتروپی. (a) یخچال (b) پمپ گرمایی (c) موتور گرمایی

تغییر در آنتروپی کل دو منبع و سیستم خارجی، برای یخچال بوسیله‌ی رابطه‌ی زیر معین می‌شود:

$$\Delta S_{fr} = S_2 - S_1 - S_3 \quad (۱۰۶-۴)$$

که $S_3 = \frac{Q_3}{T_3}$ ، جریان آنتروپی به بیرون منبع ۳ می‌باشد. با استفاده از رابطه‌ی (۱۰۰-۴) این رابطه را

می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\Delta S_{fr} = \frac{Q_3}{T_v} - \frac{Q_3}{T_3} \quad (۱۰۷-۴)$$

به وسیله‌ی تحلیلی مشابه، برای پمپ گرمایی و موتور گرمایی روابط زیر بدست می‌آید:

$$\Delta S_{hp} = \frac{Q_3}{T_3} - \frac{Q_3}{T_v} \quad \Delta S_{he} = -\frac{Q_3}{T_v} \quad (108-4)$$

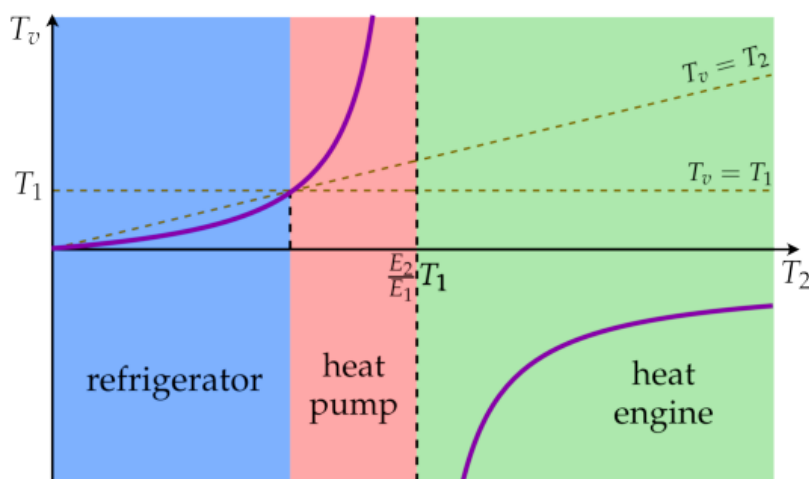
معنی این نتایج برای یخچال و پمپ گرمایی بدین صورت می‌باشد: ما دو جسم داریم که در تماس گرمایی می‌باشند، سیستم خارجی در دمای T_3 و کیوبیت مجازی در منبع مرکب در دمای T_v . جسم‌ها کمیت گرمایی Q_3 را مبادله می‌کنند. اکنون، می‌بینیم که معنی کمیت آنتروپی $\frac{Q_3}{T_v}$ آنتروپی کیوبیت مجازی می‌باشد و رابطه‌ی (4-107) جریان آنتروپی استاندارد^۱ برای دو جسم که در تماس گرمایی هستند، می‌باشد. این رابطه ضمناً نشان می‌دهد، حد کارنو زمانی بدست می‌آید که دو سیستمی که در تماس گرمایی هستند به دمای یکسان برسند. علاوه بر بررسی تغییرات آنتروپی، بررسی تغییر بازه‌ی دمای مجازی آموزنده می‌باشد. بدین منظور نمودار دمای مجازی را بر حسب دمای منبع ۲ رسم کرده‌ایم. دقت کنید که در دمای مجازی T_v ، در تمام نمودار $E_2 \rangle E_1$ فرض شده است. با توجه به این نمودار، بازه‌ی $T_v = \frac{E_2 - E_1}{\frac{E_2}{T_2} - \frac{E_1}{T_1}}$ نشان می‌دهد که سیستم ما به چه صورت عمل می‌کند. بنابراین، با توجه به روابط زیر را خواهیم داشت:

$$0 \leq T_2 \langle T_1 \quad \rightarrow \quad 0 \leq T_v \langle T_2 \quad \text{یخچال}$$

$$0 \leq T_1 \langle T_2 \langle \frac{E_2}{E_1} T_1 \quad \rightarrow \quad T_v \geq T_2 \quad \text{پمپ گرمایی}$$

$$0 \langle \frac{E_2}{E_1} T_1 \langle T_2 \quad \rightarrow \quad T_v \langle 0 \quad \text{موتور گرمایی} \quad (109-4)$$

^۱- standard entropy flow



نمودار (۴-۱): نمودار دمای مجازی بر دمای منبع T_2 . ما جدایی‌های موضعی ترازهای انرژی E_1 و E_2 ، و همچنین دمای منبع T_1 را ثابت نگه می‌داریم و اجازه می‌دهیم دمای منبع T_2 تغییر کند. زمانی که $T_2 < T_1$ باشد، دمای مجازی T_v کوچک‌تر از دمای محیطی آن‌ها خواهد شد و ماشین یک یخچال می‌باشد. برای $T_1 < T_2 < \frac{E_2}{E_1} T_1$ ، T_v بزرگتر از T_1 و T_2 می‌شود و از این رو ماشین یک پمپ گرمایی می‌باشد. نهایتاً، برای $T_2 > \frac{E_2}{E_1} T_1$ ، T_v منفی می‌شود و ماشین یک موتور گرمایی می‌باشد.

۴-۸- یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار با یک مدل پاشندگی جدید

سوال اساسی که در این بخش مطرح می‌باشد، این سوال است، که در مدل پاشندگی جدیدی که ارائه داده‌ایم آیا یخچال سه کیوبیتی خودسازگار باز هم به بیشینه‌ی بازدهی می‌رسد؟ و آیا بازدهی آن در حد کارنو و متفاوت از حد کارنو، جهانی خواهد بود؟ آیانسبت جریان‌های گرمایی و جدایی ترازهای انرژی به همان صورت قبل بدست خواهد آمد؟

توجه کنید که هامیلتونی برهم‌کنش و روابط میان جدایی ترازهای انرژی به همان صورت قبل خواهد بود

$$E_1 + E_3 = E_2 \quad , \quad H_{int} = g(|010\rangle\langle 101| + |101\rangle\langle 010|) \quad , \quad g \ll E_i$$

۴-۸-۱- مدل پاشندگی جدید

مدل پاشندگی جدیدی که برای سیستم در نظر گرفته‌ایم، بدین صورت می‌باشد:

با چگالی احتمال $(p_i + p_j)$ در زمان δt ، حالت سیستم با $\tau_i \tau_j \otimes Tr_{ij}(\rho)$ جایگزین می‌شود و بنابراین با

احتمال $1 - 2 \sum_{i=1}^3 p_i \delta t$ ، حالت سیستم تغییری نمی‌کند. به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} (p_i + p_j) \delta t & \quad \rho \mapsto \tau_i \tau_j \otimes Tr_{ij}(\rho) \\ 1 - 2 \sum_{i=1}^3 p_i \delta t & \quad \rho \mapsto \rho \end{aligned} \quad \begin{array}{l} i \neq j \\ i, j = 1, 2, 3 \end{array} \quad (۱۱۰-۴)$$

بنابراین، در زمان δt حالت سیستم بدین صورت تغییر می‌کند:

$$\rho \mapsto [\mathcal{D}_{12}(\rho) + \mathcal{D}_{13}(\rho) + \mathcal{D}_{23}(\rho)] \delta t + (1 - 2 \sum_{i=1}^3 p_i \delta t) \rho \quad (۱۱۱-۴)$$

که دینامیک‌های پاشنده‌ی $\mathcal{D}_{ij}(\rho)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{D}_{ij}(\rho) = (p_i + p_j) \tau_i \tau_j \otimes Tr_{ij}(\rho) \quad i \neq j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (۱۱۲-۴)$$

۴-۸-۲- معادله‌ی حاکم و حالت پایا

اکنون، با توجه به نگاشت دینامیکی

$$\mathcal{E}(\rho) = [\mathcal{D}_{12}(\rho) + \mathcal{D}_{13}(\rho) + \mathcal{D}_{23}(\rho)] \delta t + (1 - 2 \sum_{i=1}^3 p_i \delta t) \rho \quad (۱۱۳-۴)$$

و همچنین روابط زیر

$$\tau_i = r_i P_{00,i} + \bar{r}_i P_{11,i} \quad , \quad P_{ln,i} P_{mo,j} = |lm\rangle_{ij} \langle no|$$

$$Tr_{ij}(\rho) = {}_{ij}\langle 00|\rho|00\rangle_{ij} + {}_{ij}\langle 01|\rho|01\rangle_{ij} + {}_{ij}\langle 10|\rho|10\rangle_{ij} + {}_{ij}\langle 11|\rho|11\rangle_{ij}$$

$$P_{00,i}P_{00,j} + P_{01,i}P_{11,j} + P_{11,i}P_{00,j} + P_{11,i}P_{11,j} = I_i \otimes I_j = I_{ij} \quad (۱۱۴-۴)$$

نگاشت دینامیکی را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{\mu=0}^{48} M_{\mu}(t+\delta t)\rho(t)M_{\mu}^{\dagger}(t+\delta t) \quad (۱۱۵-۴)$$

که عملگرهای $M_{\mu}(t+\delta t)$ به صورت زیر می‌باشند:

$$M_0(t+\delta t) = \sqrt{1 - 2 \sum_{i=1}^3 p_i \delta t} I_{123}$$

$$\begin{aligned} M_1(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)r_1r_2\delta t} P_{00,1}P_{00,2} \otimes I_3, & M_2(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)r_1r_2\delta t} P_{00,1}P_{01,2} \otimes I_3 \\ M_3(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)r_1r_2\delta t} P_{01,1}P_{00,2} \otimes I_3, & M_4(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)r_1r_2\delta t} P_{01,1}P_{01,2} \otimes I_3 \\ M_5(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)r_1\bar{r}_2\delta t} P_{00,1}P_{10,2} \otimes I_3, & M_6(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)r_1\bar{r}_2\delta t} P_{00,1}P_{11,2} \otimes I_3 \\ M_7(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)r_1\bar{r}_2\delta t} P_{01,1}P_{10,2} \otimes I_3, & M_8(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)r_1\bar{r}_2\delta t} P_{01,1}P_{11,2} \otimes I_3 \\ M_9(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)\bar{r}_1r_2\delta t} P_{10,1}P_{00,2} \otimes I_3, & M_{10}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)\bar{r}_1r_2\delta t} P_{10,1}P_{01,2} \otimes I_3 \\ M_{11}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)\bar{r}_1r_2\delta t} P_{11,1}P_{00,2} \otimes I_3, & M_{12}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)\bar{r}_1r_2\delta t} P_{11,1}P_{01,2} \otimes I_3 \\ M_{13}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)\bar{r}_1\bar{r}_2\delta t} P_{10,1}P_{10,2} \otimes I_3, & M_{14}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)\bar{r}_1\bar{r}_2\delta t} P_{10,1}P_{11,2} \otimes I_3 \\ M_{15}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)\bar{r}_1\bar{r}_2\delta t} P_{11,1}P_{10,2} \otimes I_3, & M_{16}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_2)\bar{r}_1\bar{r}_2\delta t} P_{11,1}P_{11,2} \otimes I_3 \\ M_{17}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)r_1r_3\delta t} P_{00,1} \otimes I_2 \otimes P_{00,3}, & M_{18}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)r_1r_3\delta t} P_{00,1} \otimes I_2 \otimes P_{01,3} \\ M_{19}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)r_1r_3\delta t} P_{01,1} \otimes I_2 \otimes P_{00,3}, & M_{20}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)r_1r_3\delta t} P_{01,1} \otimes I_2 \otimes P_{01,3} \\ M_{21}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)r_1\bar{r}_3\delta t} P_{00,1} \otimes I_2 \otimes P_{10,3}, & M_{22}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)r_1\bar{r}_3\delta t} P_{00,1} \otimes I_2 \otimes P_{11,3} \\ M_{23}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)r_1\bar{r}_3\delta t} P_{01,1} \otimes I_2 \otimes P_{10,3}, & M_{24}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)r_1\bar{r}_3\delta t} P_{01,1} \otimes I_2 \otimes P_{11,3} \\ M_{25}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)\bar{r}_1r_3\delta t} P_{10,1} \otimes I_2 \otimes P_{00,3}, & M_{26}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)\bar{r}_1r_3\delta t} P_{10,1} \otimes I_2 \otimes P_{01,3} \\ M_{27}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)\bar{r}_1r_3\delta t} P_{11,1} \otimes I_2 \otimes P_{00,3}, & M_{28}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)\bar{r}_1r_3\delta t} P_{11,1} \otimes I_2 \otimes P_{01,3} \\ M_{29}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)\bar{r}_1\bar{r}_3\delta t} P_{10,1} \otimes I_2 \otimes P_{10,3}, & M_{30}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1 + p_3)\bar{r}_1\bar{r}_3\delta t} P_{10,1} \otimes I_2 \otimes P_{11,3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{31}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1+p_3)\bar{r}_1\bar{r}_3\delta t} P_{11,1} \otimes I_2 \otimes P_{10,3} , & M_{32}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1+p_3)\bar{r}_1\bar{r}_3\delta t} P_{11,1} \otimes I_2 \otimes P_{11,3} \\
M_{33}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)r_2r_3\delta t} I_1 \otimes P_{00,2} P_{00,3} , & M_{34}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)r_1r_2\delta t} I_1 \otimes P_{00,2} P_{01,3} \\
M_{35}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)r_1r_2\delta t} I_1 \otimes P_{01,2} P_{00,3} , & M_{36}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)r_1r_2\delta t} I_1 \otimes P_{01,2} P_{01,3} \\
M_{37}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)r_1\bar{r}_2\delta t} I_1 \otimes P_{00,2} P_{10,3} , & M_{38}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)r_1\bar{r}_2\delta t} I_1 \otimes P_{00,2} P_{11,3} \\
M_{39}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)r_1\bar{r}_2\delta t} I_1 \otimes P_{01,2} P_{10,3} , & M_{40}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)r_1\bar{r}_2\delta t} I_1 \otimes P_{01,2} P_{11,3} \\
M_{41}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)\bar{r}_1r_2\delta t} I_1 \otimes P_{10,2} P_{00,3} , & M_{42}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)\bar{r}_1r_2\delta t} I_1 \otimes P_{10,2} P_{01,3} \\
M_{43}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)\bar{r}_1r_2\delta t} I_1 \otimes P_{11,2} P_{00,3} , & M_{44}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_1+p_2)\bar{r}_1r_2\delta t} I_1 \otimes P_{11,2} P_{01,3} \\
M_{45}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)\bar{r}_1\bar{r}_2\delta t} I_1 \otimes P_{10,2} P_{10,3} , & M_{46}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)\bar{r}_1\bar{r}_2\delta t} I_1 \otimes P_{10,2} P_{11,3} \\
M_{47}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)\bar{r}_1\bar{r}_2\delta t} I_1 \otimes P_{11,2} P_{10,3} , & M_{48}(t+\delta t) &= \sqrt{(p_2+p_3)\bar{r}_1\bar{r}_2\delta t} I_1 \otimes P_{11,2} P_{11,3}
\end{aligned}$$

(۱۱۶-۴)

که این عملگرها رابطه‌ی $\sum_{\mu=0}^{48} M_{\mu}^{\dagger}(t+\delta t) M_{\mu}(t+\delta t) = I$ را برآورده می‌کنند. بنابراین طبق قضیه‌ی

کراوس این نگاشت یک نگاشت خطی ، کاملاً مثبت و ردنگهدار می‌باشد. اکنون، با توجه به عملگرهای کراوس در زمان $t+\delta t$ ، عملگرهای کراوس در زمان t را خواهیم یافت. که بدین صورت خواهند بود:

$$\begin{aligned}
M_0(t) &= I_S + (-iH_S + K)\delta t \\
M_{\mu}(t+\delta t) &= M_{\mu}(t) , \mu \rangle 0
\end{aligned}$$

(۱۱۷-۴)

که روابط (۱۱۷-۴) را، با توجه به روابط زیر

$$\begin{aligned}
M_{\mu}(t) &= \sqrt{\delta t} L_{\mu}(t) \\
K &= \frac{1}{2} \sum_{\mu \rangle 0} L_{\mu}^{\dagger}(t) L_{\mu}(t) = \sum_{i=1}^3 p_i I
\end{aligned}$$

(۱۱۸-۴)

می‌توانیم بدین صورت بازنویسی کنیم:

$$\begin{aligned}
M_0(t) &= I_S + (-iH_S + \sum_{i=1}^3 p_i I)\delta t \\
M_{\mu}(t) &= \sqrt{\delta t} L_{\mu}(t) \quad \mu \rangle 0
\end{aligned}$$

(۱۱۹-۴)

اکنون، با توجه به $\rho(t) = \sum_{m=0}^{48} M_m(t) \rho(0) M_m^\dagger(t)$ و بسط دادن عملگرهای کراوس، به همان صورت که

در بخش (۴-۴-۱) انجام دادیم، معادله‌ی حاکم بر دینامیک یخچال را بدین صورت بدست می‌آوریم:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H_0 + H_{\text{int}}, \rho] + \mathcal{D}_{12}(\rho) + \mathcal{D}_{13}(\rho) + \mathcal{D}_{23}(\rho) \quad (۴-۱۲۰)$$

از آن‌جا که ما علاقه مند به رفتار دراز مدت سیستم هستیم حالت پایای سیستم را مورد بررسی قرار

می‌دهیم که حالت پایای سیستم همان‌طور که دیدیم در رابطه‌ی $\frac{d\rho^s}{dt} = 0$ صدق می‌کند، یعنی

$$0 = -i[H_0 + H_{\text{int}}, \rho^s] + \mathcal{D}_{12}(\rho^s) + \mathcal{D}_{13}(\rho^s) + \mathcal{D}_{23}(\rho^s) \quad (۴-۱۲۱)$$

برای حل این معادله، حالت اولیه‌ی سیستم را حالت بدون برهم‌کنش در نظر می‌گیریم و با فرض اینکه

سیستم در حالت گرمایی می‌باشد، کار خود را شروع می‌کنیم. بنابراین $\rho_0 = \tau_1 \tau_2 \tau_3$ را در معادله‌ی

(۴-۱۲۰) قرار داده و تحول آن را بررسی می‌کنیم. از تحول ρ_0 ، ρ_1 بدست می‌آید ($\rho_1 = \frac{d\rho_0}{dt}$). پس از

آن تحول ρ_1 را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این روند را تا زمانی انجام خواهیم داد، که از تحول ρ_n

(n امین عملگر چگالی)، هیچ عملگر جدیدی خلق نشود به عبارتی معادله‌ی حاکم نسبت به آن مجموعه

از عملگرها بسته می‌باشد.

برای این معادله‌ی حاکم، تحول‌ها به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \tau_1 \tau_2 \tau_3 \\ \rho_1 &= -g \Delta Y_{123} \\ \rho_2 &= -2g^2 \Delta Z_{123} + 2qg \Delta Y_{123} \\ \rho_3 &= (4g^3 \Delta - 4gq^2 \Delta) Y_{123} + 8g^2 q \Delta Z_{123} - 2g \Delta [(p_1 + p_2) \tau_1 \tau_2 Z_3 + (p_1 + p_3) \tau_1 Z_2 \tau_3 + (p_2 + p_3) Z_1 \tau_2 \tau_3] \\ \rho_4 &= \omega_1 Y_{123} + \omega_2 Z_{123} + \omega_3 \tau_1 \tau_2 Z_3 + \omega_4 \tau_1 Z_2 \tau_3 + \omega_5 Z_1 \tau_2 \tau_3, \quad \omega_i = \omega_i(g, q, \Delta, p_i) \end{aligned} \quad (۴-۱۲۲)$$

همچنان که خواهیم دید ، از تحول ρ_4 هیچ عملگر جدیدی خلق نخواهد شد. تمامی مراحل بالا ، یا به عبارتی تحول عملگرها را می توان بدین صورت بیان کرد:

$$\tau_1\tau_2\tau_3 \mapsto (Y_{123}) \quad , \quad Y_{123} \mapsto (Y_{123}, Z_{123}) \quad , \quad Z_{123} \mapsto (\tau_1\tau_2Z_3, \tau_1Z_2\tau_3, Z_1\tau_2\tau_3) \quad (۱۲۳-۴)$$

بنابراین، کلی ترین حالتی که می تواند در معادله ی حاکم قرار داده شود و از تحول آن هیچ اپراتور جدیدی خلق نشود ماتریس چگالی زیر می باشد:

$$\rho_4 = \alpha_1\tau_1\tau_2\tau_3 + \alpha_2\tau_1\tau_2Z_3 + \alpha_3\tau_1Z_2\tau_3 + \alpha_4Z_1\tau_2\tau_3 + \alpha_5Z_{123} + \alpha_6Y_{123} \quad (۱۲۴-۴)$$

که با توجه به $Tr(\rho)=1$ و $\frac{d\rho^s}{dt}=0$ و حل معادلات مر بوط به ضرایب α_i ، حالت پایا را بدین صورت بدست می آوریم:

$$\rho^s = \tau_1\tau_2\tau_3 + \gamma\{Q_1Z_1\tau_2\tau_3 + Q_2\tau_1Z_2\tau_3 + Q_3\tau_1\tau_2Z_3 + Z_{123} + \frac{q}{g}Y_{123}\} \quad (۱۲۵-۴)$$

که ضرایب به صورت زیر می باشند:

$$Q_1 = \frac{p_2 + p_3}{2p_1 + p_2 + p_3} \quad , \quad Q_2 = \frac{p_1 + p_3}{p_1 + 2p_1 + p_3} \quad , \quad Q_3 = \frac{p_1 + p_2}{p_1 + p_2 + 2p_3}$$

$$\gamma = \frac{-\Delta}{Q_1\Omega_{23} + Q_2\Omega_{13} + Q_3\Omega_{12} + 2 + \frac{2q^2}{g}} \quad , \quad q = \sum_{i=1}^3 p_i \quad , \quad \Delta = r_1\bar{r}_2r_3 - \bar{r}_1r_2\bar{r}_3$$

$$\Omega_{12} = r_1\bar{r}_2 + \bar{r}_1r_2 \quad \Omega_{13} = r_1r_3 + \bar{r}_1\bar{r}_3 \quad \Omega_{23} = r_2\bar{r}_3 + \bar{r}_2r_3 \quad (۱۲۶-۴)$$

۴-۸-۳- جریان گرمایی

برای یافتن مقدار گرمایی که ماشین کوانتومی ما قادر است با منبع گرمایی ای که با آن در تماس است ، مبادله کند تغییر یکی از ذرات را در زمان کوچک δt بررسی می کنیم. با توجه به این مدل

پاشندگی، حالت کیوبیت i ام با چگالی احتمال $2p_i + p_j + p_k$ در زمان δt ممکن است با حالت گرمایی استاندارد منبع‌اش جایگزین شود، به عبارت دیگر

$$\begin{aligned} (2p_i + p_j + p_k)\delta t & \quad \rho_i \mapsto \tau_i \\ 1 - (2p_i + p_j + p_k)\delta t & \quad \rho_i \mapsto \rho_i \end{aligned} \quad (۱۲۷-۴)$$

بنابراین، تغییر جزئی حالت هر ذره به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta\rho_i = (2p_i + p_j + p_k)\delta t(\tau_i - \rho_i(t)) \quad (۱۲۸-۴)$$

این تغییر حالت متناظر با یک تغییر در انرژی ذره به صورت $\delta\varepsilon_i = \text{Tr}(H_i\delta\rho_i(t))$ می‌باشد. بنابراین، با توجه به تغییر جزئی حالت ذره داریم:

$$\frac{\delta\varepsilon_i}{\delta t} = (2p_i + p_j + p_k)\text{Tr}(H_i(\tau_i - \rho_i(t))) \quad (۱۲۹-۴)$$

با فرض $\delta t \rightarrow 0$ ، آهنگ تغییر انرژی ذره به سبب برهم‌کنش با منبع به صورت $\frac{d\varepsilon_i}{dt}$ بیان می‌شود که همان انرژی ذخیره شده به وسیله‌ی ذره از منبع می‌باشد. به بیان دیگر آن آهنگ شارش گرما می‌باشد که آن را با Q_i مشخص می‌کنیم. که با توجه به این‌که ما حالت پایا را بررسی می‌کنیم، Q_i (یا Q_i^s) بدین صورت بیان می‌شود:

$$Q_i = (2p_i + p_j + p_k)\text{Tr}(H_i(\tau_i - \rho_i^s(t))) \quad (۱۳۰-۴)$$

اکنون با توجه به حالت پایای سیستم و ردگیری جزئی نسبت به دوپایه‌ی دیگر، حالت پایای ذره i ام را بدین صورت بدست می‌آوریم:

$$\rho_i^s = \tau_i + \gamma(Q_i + 1)Z_i, \quad i=1,2,3 \quad (۱۳۱-۴)$$

اکنون با جایگذاری رابطه (۱۳۱-۴) در (۱۳۰-۴)، رابطه‌ی زیر را برای جریان‌های گرمایی بدست

می آوریم:

$$Q_i = (-1)^{i+1} 2q\gamma E_i \quad (۱۳۲-۴)$$

این رابطه این نکته را بیان می کند، که نسبت انرژی های مبادله شده با منبع مستقل از جزئیات می باشد و آن به سادگی مانند نسبت میان ترازهای انرژی می باشد. که این نکته را در قالب رابطه ی زیر نشان می دهیم:

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 = E_1 : E_2 : E_3 \quad (۱۳۳-۴)$$

توجه کنید که برای مدل پاشندگی قبلی نیز به همین رابطه نیز رسیدیم.

۴-۸-۴- بازگشت پذیری و بیشینه ی بازدهی

همان طور که قبلا گفتیم، برای این که ماشین گرمایی ما به صورت یک یخچال عمل کند ، باید دمای ایستایی کیوبیت ۳ از دمای منبع اش (یا دمای حالت گرمایی اش) کمتر شود، یعنی $T_3^S \langle T_3$. با توجه به حالت پایای ذره ی i ام که بدین صورت می باشد:

$$\rho_i^s = r_i^s |0\rangle_i \langle 0| + \bar{r}_i^s |1\rangle_i \langle 1| \quad (۱۳۴-۴)$$

و

$$r_i^s = r_i - \gamma(Q_i + 1)(-1)^i, \quad \bar{r}_i^s = r_i + \gamma(Q_i + 1)(-1)^i \quad (۱۳۵-۴)$$

قید $T_3^S \langle T_3$ به رابطه ی $r_3^s \rangle r_3$ منجر می شود که این رابطه بیان می کند، که باید احتمال حالت پایه ایستایی نسبت به حالت پایه ی گرمایی بیشتر باشد. این رابطه منجر به رابطه ی زیر می شود:

$$\bar{r}_1 r_2 \bar{r}_3 \rangle r_1 \bar{r}_2 r_3 \quad (۱۳۶-۴)$$

بنابراین با توجه به این رابطه، سرد کردن کیوبیت ۳ معادل با افزایش احتمال یافتن آن در حالت پایه

می‌باشد. بنابراین، تمام کاری که سعی در انجام آن داریم افزایش احتمال گذار $|010\rangle \rightarrow |101\rangle$ در برابر احتمال گذار وارون $|101\rangle \rightarrow |010\rangle$ می‌باشد. این امر با ترتیب دادن این‌که، احتمال یافتن سیستم در حالت $|101\rangle$ در غیاب برهم‌کنش بیشتر از احتمال یافتن سیستم در حالت $|010\rangle$ باشد، تحقق می‌پذیرد. به عبارتی دیگر با برقرار بودن رابطه‌ی (۴-۱۳۷).

$$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_3}{T_3} < \frac{E_2}{T_2} \quad (۴-۱۳۷)$$

با توجه به شرط بازگشت‌پذیری این نامساوی با یک مساوی جایگزین می‌شود. به عبارتی،

$$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_3}{T_3} = \frac{E_2}{T_2} \quad (۴-۱۳۸)$$

بنابراین، دوباره خواهیم دید که روابط (۴-۱۳۳)، (۴-۱۳۸) و رابطه‌ی اساسی ساختار یخچال، دوباره رسیدن به بیشینه بازدهی را برای یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار ترتیب می‌دهند

$$\eta_{fr}^C = \frac{1 - \frac{T_2}{T_1}}{\frac{T_2}{T_3} - 1} \quad (۴-۱۳۹)$$

و نیز می‌توان این نکته را دید، که بازدهی چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن مستقل از جزئیات مدل می‌باشد یعنی بازدهی جهانی می‌باشد.

$$\eta_{fr}^q = \eta_{fr}^C \left(1 - \frac{\frac{1}{T_v} - \frac{1}{T_3}}{\frac{1}{T_v} - \frac{1}{T_2}} \right) \quad (۴-۱۴۰)$$

که T_v دمای مجازی می‌باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که با این مدل پاشندگی جدید نیز،

(۱). یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار به بازدهی کارنو می‌رسد.

(۲). بازدهی چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن، جهانی می‌باشد.

(۳). نسبت جریان‌های گرمایی مانند نسبت ترازهای انرژی می‌باشد.

که دلیل این مطابقت به چند عامل مشترک ربط دارد:

طراحی ویژه ساختار یخچال، جفت‌شدگی موضعی هر کیوبیت با منبع، در تماس گرمایی بودن هر

کیوبیت فقط با یک منبع، و ویژگی مشترک مدل‌های پاشندگی، یعنی

$$\mathcal{D}_i(\tau_i \otimes \sigma_{jk}) = 0 \quad \text{مدل مطرح شده در مقالات [۷-۱۱]} \quad (۱۴۱-۴)$$

$$\mathcal{D}_{ij}(\tau_i \tau_j \otimes \sigma_k) = 0 \quad \text{مدل جدید} \quad (۱۴۲-۴)$$

جدول (۴-۲): مقایسه‌ی نتایج دو مدل پاشندگی

	مدل ارائه شده در مقالات [۷-۱۱]	مدل پاشندگی جدید
روابط دمایی	$T_1 \rangle T_2 \rangle T_3$	$T_1 \rangle T_2 \rangle T_3$
ساختار اساسی یخچال	$E_1 + E_3 = E_2$	$E_1 + E_3 = E_2$
هامیلتونی برهم‌کنش	$H_{int} = g(010\rangle\langle 101 + 101\rangle\langle 010)$, $g \ll E_i$	$H_{int} = g(010\rangle\langle 101 + 101\rangle\langle 010)$, $g \ll E_i$
حالت گرمایی	$\tau_i = \frac{e^{-\frac{H_i}{kT_i}}}{Tr_i(e^{-\frac{H_i}{kT_i}})}$	$\tau_i = \frac{e^{-\frac{H_i}{kT_i}}}{Tr_i(e^{-\frac{H_i}{kT_i}})}$
مدل پاشندگی حالت سیستم	$p_i \delta t \quad \rho \mapsto \tau_i \otimes Tr_i(\rho)$ $1 - \sum_{i=1}^3 p_i \delta t \quad \rho \mapsto \rho$	$(p_i + p_j) \delta t \quad \rho \mapsto \tau_i \tau_j \otimes Tr_{ij}(\rho)$ $1 - 2 \sum_{i=1}^3 p_i \delta t \quad \rho \mapsto \rho \quad i \neq j$
مدل پاشندگی هر کیوبیت	$p_i \delta t \quad \rho_i \mapsto \tau_i$ $1 - p_i \delta t \quad \rho_i \mapsto \rho_i$	$(2p_i + p_j + p_k) \delta t \quad \rho_i \mapsto \tau_i$ $1 - (2p_i + p_j + p_k) \delta t \quad \rho_i \mapsto \rho_i$
نگاشت دینامیکی	$\rho \mapsto \delta t \sum_{i=1}^3 \mathcal{D}_i(\rho) + \rho$	$\rho \mapsto [\mathcal{D}_{12}(\rho) + \mathcal{D}_{13}(\rho) + \mathcal{D}_{23}(\rho)] \delta t + (1 - 2 \sum_{i=1}^3 p_i \delta t) \rho$

معادله‌ی حاکم بر دینامیک یخچال	$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H_0 + H_{\text{int}}, \rho] + \sum_{i=1}^3 \mathcal{D}_i(\rho)$	$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H_0 + H_{\text{int}}, \rho] + \mathcal{D}_{12}(\rho) + \mathcal{D}_{13}(\rho) + \mathcal{D}_{23}(\rho)$
دینامیک پاشنده	$\mathcal{D}_i(\rho) = p_i[\tau_i \otimes Tr_i(\rho) - \rho]$	$\mathcal{D}_{ij}(\rho) = (p_i + p_j)\tau_i\tau_j \otimes Tr_{ij}(\rho) \quad i \neq j$
حالت پایا	$\rho^s = \tau_1\tau_2\tau_3 + \gamma\{Q_1Z_1\tau_2\tau_3 + Q_2\tau_1Z_2\tau_3 + Q_3\tau_1\tau_2Z_3 + \\ + q_1\tau_1Z_{23} + q_2\tau_2Z_{13} + q_3Z_{12}\tau_3 + Z_{123} + \frac{q}{2g}\Upsilon_{123}\}$	$\rho^s = \tau_1\tau_2\tau_3 + \gamma\{Q_1Z_1\tau_2\tau_3 + Q_2\tau_1Z_2\tau_3 + \\ + Q_3\tau_1\tau_2Z_3 + Z_{123} + \frac{q}{g}\Upsilon_{123}\}$
ضرایب حالت پایا	$Q_1 = \frac{p_2p_3}{p_1}(\frac{1}{p_1+p_2} + \frac{1}{p_1+p_3}), Q_2 = \frac{p_1p_3}{p_2}(\frac{1}{p_1+p_2} + \frac{1}{p_2+p_3}) \\ Q_3 = \frac{p_1p_2}{p_3}(\frac{1}{p_1+p_3} + \frac{1}{p_2+p_3}) q_1 = \frac{p_1}{p_2+p_3} \quad q_2 = \frac{p_2}{p_1+p_3} \\ q_3 = \frac{p_3}{p_1+p_2} \quad \gamma = \frac{-\Delta}{Q_3\Omega_{12} + Q_2\Omega_{13} + Q_1\Omega_{23} + q_1 + q_2 + q_3 + 2 + \frac{q^2}{2g^2}}$	$Q_1 = \frac{p_2+p_3}{2p_1+p_2+p_3}, \quad Q_2 = \frac{p_1+p_3}{p_1+2p_1+p_3}, \quad Q_3 = \frac{p_1+p_2}{p_1+p_2+2p_3} \\ \gamma = \frac{-\Delta}{Q_1\Omega_{23} + Q_2\Omega_{13} + Q_3\Omega_{12} + 2 + \frac{2q^2}{g}}$
حالت پایای ذره‌ی ام i	$\rho_i^s = \tau_i + \frac{q\gamma}{p_i}Z_i$	$\rho_i^s = \tau_i + \gamma(Q_i + 1)Z_i$
جریان‌های گرمایی	$Q_i = (-1)^{i+1}q\gamma E_i$	$Q_i = (-1)^{i+1}2q\gamma E_i$
نسبت جریان‌های گرمایی و ترازهای انرژی	$Q_1 : Q_2 : Q_3 = E_1 : E_2 : E_3$	$Q_1 : Q_2 : Q_3 = E_1 : E_2 : E_3$
شرط سردسازی	$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_3}{T_3} < \frac{E_2}{T_2}$	$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_3}{T_3} < \frac{E_2}{T_2}$
شرط بازگشت‌پذیری	$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_3}{T_3} = \frac{E_2}{T_2}$	$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_3}{T_3} = \frac{E_2}{T_2}$
بازدهی یخچال	$\eta_{fr}^q = \eta_{fr}^c (1 - \frac{\frac{1}{T_v} - \frac{1}{T_3}}{\frac{1}{T_v} - \frac{1}{T_2}})$	$\eta_{fr}^q = \eta_{fr}^c (1 - \frac{\frac{1}{T_v} - \frac{1}{T_3}}{\frac{1}{T_v} - \frac{1}{T_2}})$
بیشینه‌ی بازدهی یخچال	$\eta_{fr}^c = \frac{1 - \frac{T_2}{T_1}}{\frac{T_2}{T_3} - 1}$	$\eta_{fr}^c = \frac{1 - \frac{T_2}{T_1}}{\frac{T_2}{T_3} - 1}$

۴-۹- یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار با یک فیلتر جدید

در مقاله‌ی [۷] در تعریف کیوبیت مجازی و دمای مجازی این نکته بیان شده است که برای این که

سیستم ما به صورت یک یخچال (یا پمپ گرمایی) عمل کند از بین چهار حالت دو کیوبیت ۱ و ۲ فقط حالت‌های $|01\rangle_{12}$ و $|10\rangle_{12}$ را انتخاب می‌کنیم. به عبارتی دیگر تنها این کیوبیت مجازی و تک دمای مجازی را فیلتر می‌کنیم. سوالی اساسی در این بخش این می‌باشد که آیا با فیلترهای دیگر سیستم ما به صورت یک یخچال عمل نخواهد کرد؟ در این بخش ما به بررسی تمامی جفت حالات دو کیوبیت ۱ و ۲ خواهیم پرداخت و کیوبیت‌های مجازی و دماهای مجازی مربوط به همه‌ی آن‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم و یک فیلتر جدید را ارائه خواهیم داد که با این فیلتر نیز یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار باز هم به بازدهی کارنو می‌رسد و نشان می‌دهیم بازدهی آن چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن، جهانی خواهد بود. سرانجام با مقایسه دو فیلتر نشان خواهیم داد، که ویژگی‌های مشترکی در هر دو نوع فیلتر بر یخچال کوانتومی خودسازگار سه کیوبیتی حاکم می‌باشد.

۴-۹-۱- دماهای مجازی و فیلترها

دو کیوبیت چهار ویژه حالت انرژی $|00\rangle_{12}$ ، $|01\rangle_{12}$ ، $|10\rangle_{12}$ و $|11\rangle_{12}$ را دراند. در جدول (۴-۳) به مشابهی دو ویژه حالت دلخواه ۱ و ۲ در منبع، تفسیری مشابه برای دو کیوبیت ۱ و ۲ خواهیم داشت. برای چهار ویژه حالت انرژی، شش جفت حالت داریم که همه‌ی آن‌ها را مورد بررسی قرار داده‌ایم. از بین شش جفت حالت، حالت‌های ۲، ۳، ۵ و ۶ نمی‌توانند یک یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار را تشکیل دهند زیرا از بین سه منبع، دو منبع گرمایی هم‌دما می‌باشند که در این حالت بازدهی صفر یا منفی یک را می‌دهد. حالت ۱ نیز قبلاً بررسی شده است [۷-۱۱]. اکنون، اگر بخواهیم کیوبیت مجازی و تک دمای مجازی حالت ۴ را فیلتر کنیم مشخصات اصلی یخچال ما بدین صورت خواهد بود:

(۱). ساختار اساسی یخچال را بدین صورت انتخاب می‌کنیم:

$$E_3 = E_1 + E_2 \quad (۴-۱۴۳)$$

که رابطه‌ی دمایی نیز به صورت $T_2 \rangle T_3 \rangle T_1$ می‌باشد.

۲). هامیلتونی برهم‌کنش در برابر هامیلتونی آزاد نسبتاً ضعیف می‌باشد. با فرض این‌که هامیلتونی برهم‌کنش نسبت به هامیلتونی آزاد ضعیف می‌باشد تنها کار که می‌تواند انجام دهد تنها انجام گذارهایی میان دو تراز انرژی تبهگن $|001\rangle$ و $|110\rangle$ می‌باشد:

$$H_{\text{int}} = g(|001\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 001|) \quad , \quad g \ll E_i \quad (۴-۱۴۴)$$

جدول (۴-۳): فیلترها و دماهای مجازی. T_v دمای مجازی و ε_v اختلاف تراز انرژی کیوبیت مجازی می‌باشد

شماره‌ی جفت حالات	جفت حالات	T_v	ε_v
۱	$\{ 01\rangle_{12}, 10\rangle_{12} \}$	$T_v = \frac{E_2 - E_1}{\frac{E_2}{T_2} - \frac{E_1}{T_1}}$	$\varepsilon_v = E_2 - E_1$
۲	$\{ 01\rangle_{12}, 11\rangle_{12} \}$	$T_v = T_1$	$\varepsilon_v = E_1$
۳	$\{ 01\rangle_{12}, 00\rangle_{12} \}$	$T_v = T_2$	$\varepsilon_v = E_2$
۴	$\{ 00\rangle_{12}, 11\rangle_{12} \}$	$T_v = \frac{E_2 + E_1}{\frac{E_2}{T_2} + \frac{E_1}{T_1}}$	$\varepsilon_v = E_2 + E_1$
۵	$\{ 00\rangle_{12}, 10\rangle_{12} \}$	$T_v = T_1$	$\varepsilon_v = -E_1$
۶	$\{ 00\rangle_{12}, 01\rangle_{12} \}$	$T_v = T_2$	$\varepsilon_v = E_2$

با توجه به دمای مجازی جفت حالت $|00\rangle_{12}$ و $|11\rangle_{12}$ و شرط بازگشت‌پذیری $T_v = T_3$ ، رابطه‌ی بازگشت‌پذیری را بدین صورت بدست می‌آوریم:

$$\frac{E_3}{T_3} = \frac{E_1}{T_1} + \frac{E_2}{T_2} \quad (۱۴۵-۴)$$

رابطه‌ی جریان‌های گرمایی و ترازهای انرژی نیز بدین صورت بدست خواهد آمد:

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 = E_1 : E_2 : E_3 \quad (۱۴۶-۴)$$

که با توجه به تعریف بازدهی یخچال

$$\eta_{fr}^q = \frac{Q_1}{Q_2} \quad (۱۴۷-۴)$$

و روابط (۱۴۵-۴) و (۱۴۶-۴) می‌بینیم که در مورد این فیلتر نیز یخچال به بازدهی کارنو می‌رسد و بازدهی آن چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن، جهانی می‌باشد

$$\eta_{fr}^C = \frac{\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_2}}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_3}} \quad (۱۴۸-۴)$$

بنابراین اگر کیوبیت مجازی با حالت پایه و برانگیخته‌ی $|0\rangle_v = |00\rangle_{12}$ و $|1\rangle_v = |11\rangle_{12}$ ، را که دارای دمای

مجازی $T_v = \frac{E_2 + E_1}{\frac{E_2}{T_2} + \frac{E_1}{T_1}}$ و جدایی تراز انرژی $\varepsilon_v = E_2 + E_1$ می‌باشد، را فیلتر کنیم باید یخچال کوانتومی

سه کیوبیتی خودسازگارمان را به صورت زیر طراحی کنیم:

(۱). روابط دمایی به صورت زیر باشد:

$$T_2 > T_3 > T_1 \quad (۱۴۹-۴)$$

(۲). هامیلتونی برهم‌کنش بدین صورت باشد:

$$H_{\text{int}} = g(|001\rangle\langle 110| + |110\rangle\langle 001|) \quad , \quad g \ll E_i$$

۳. رابطه‌ی میان جریان‌های گرمای و ترازهای انرژی به صورت زیر باشد:

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 = E_1 : E_2 : E_3$$

۴. رابطه‌ی بازگشت‌پذیری نیز بدین صورت می‌باشد:

$$\frac{E_3}{T_3} = \frac{E_1}{T_1} + \frac{E_2}{T_2}$$

اکنون، با توجه به این روابط و روابط مربوط به فیلتر مطرح شده در مقالات [۷-۱۱] نتیجه‌ی کلی زیر را برای یک یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار مطرح می‌کنیم:

در هر دو نوع فیلتر $\{ |0\rangle_v = |10\rangle_{12} , |1\rangle_v = |01\rangle_{12} \}$ و $\{ |0\rangle_v = |00\rangle_{12} , |1\rangle_v = |11\rangle_{12} \}$ با این فرض که ماشین گرمایی به صورت یک یخچال عمل می‌کند، روابط زیر را خواهیم داشت:

$$T_{\text{hot}} > T_{\text{room}} > T_{\text{cold}} \quad (۱۵۰-۴)$$

$$\mathcal{E}_v = E_{\text{cold}} \quad (۱۵۱-۴)$$

$$H_{\text{int}} = g(|0\rangle_{\text{hot}} |1\rangle_{\text{room}} |0\rangle_{\text{cold}} |0\rangle_{\text{hot}} \langle 1|_{\text{room}} \langle 0|_{\text{cold}} + |1\rangle_{\text{hot}} |0\rangle_{\text{room}} |1\rangle_{\text{cold}} |0\rangle_{\text{hot}} \langle 0|_{\text{room}} \langle 1|_{\text{cold}}) \quad (۱۵۲-۴)$$

$$Q_{\text{hot}} : Q_{\text{room}} : Q_{\text{cold}} = E_{\text{hot}} : E_{\text{room}} : E_{\text{cold}} \quad (۱۵۳-۴)$$

$$\frac{E_{\text{cold}}}{T_{\text{cold}}} + \frac{E_{\text{hot}}}{T_{\text{hot}}} = \frac{E_{\text{room}}}{T_{\text{room}}} \quad (۱۵۴-۴)$$

و بنابراین در هر مورد هر دو فیلتر بازدهی کارنو به صورت زیر خواهد بود:

$$\eta_{fr}^C = \frac{\frac{1}{T_{room}} - \frac{1}{T_{hot}}}{\frac{1}{T_{cold}} - \frac{1}{T_{room}}} \quad (۱۵۵-۴)$$

۴-۱۰- یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار

در مقاله‌ی [۷] ادعایی بدین صورت مطرح شده است، که " ذاتا تنها کوچک‌ترین ماشین‌های گرمایی می‌توانند به بازدهی کارنو برسند". ما در این بخش صحت این ادعا را با بررسی یک یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار امتحان می‌کنیم. به عبارت دیگر این سوال را مطرح می‌کنیم، که آیا یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار می‌تواند به بازدهی کارنو برسد؟ آیا بازدهی یک یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار در حد کارنو جهانی می‌باشد؟ آیا مانند یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار، بازدهی آن در حد کارنو و متفاوت از آن، جهانی می‌باشد؟

۴-۱۰-۱- معرفی مدل یخچال

یخچالی که ما در این جا مطرح و بررسی می‌کنیم متشکل از چهار کیوبیت ۱، ۲، ۳ و ۴ می‌باشد که هر کدام در تماس با یک منبع گرمایی متفاوت $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$ می‌باشند. کیوبیت‌های ۱ و ۲ به ترتیب در تماس با منبع‌های گرم T_1 و T_2 ، کیوبیت ۳ در تماس با منبع دمای اتاق T_3 و کیوبیت ۴ در تماس با منبع سرد T_4 می‌باشد. یخچال با گرفتن گرما از منبع سرد و دادن آن به منبع دمای اتاق کار می‌کند انرژی آزاد برای به کار انداختن یخچال از منبع‌های گرم در ارتباط با منبع دمای اتاق تامین می‌شود: انرژی از منبع‌های گرم به درون منبع دمای اتاق شارش پیدا می‌کند.

هامیلتونی آزاد کل برای چهار کیوبیت غیر برهم‌کنش کننده، به صورت مجموع هامیلتونی‌های هر چهار

کیوبیت می باشد:

$$H_0 = \sum_{i=1}^4 E_i \Pi_i \quad (۱۵۶-۴)$$

که $\Pi_i = |1\rangle_i \langle 1|_i$ ، اپراتور تصویر کننده بر روی حالت برانگیخته برای هر کیوبیت می باشد. هامیلتونی آزاد هر کیوبیت به صورتی انتخاب شده است که اختلاف انرژی E_i ، میان حالت برانگیخته $|1\rangle_i$ و حالت پایه $|0\rangle_i$ ، کیوبیت ها در رابطه زیر صدق می کند:

$$E_1 + E_2 + E_4 = E_3 \quad (۱۵۷-۴)$$

بنابراین، از میان ۱۶ حالت این سیستم چهار کیوبیتی، تنها حالت های $|1101\rangle$ و $|0010\rangle$ در انرژی تبهگن می باشند. هامیلتونی برهم کنش در برابر هامیلتونی آزاد بسیار ضعیف می باشد. بنابراین تمام کاری که می تواند بکند، انجام گذارهایی میان ترازهای انرژی تبهگن $|1101\rangle$ و $|0010\rangle$ می باشد. مانند مورد یخچال سه کیوبیتی، در این جا نیز، ما تنها سناریویی را بررسی می کنیم که شدت برهم کنش g نسبت به اختلاف انرژی حالت برانگیخته و حالت پایه ی کیوبیت i ام خیلی خیلی کوچک باشد، یعنی $g \ll E_i$. برای تغییر این سیستم به یک یخچال، هامیلتونی برهم کنش را به صورت زیر انتخاب می کنیم:

$$H_{\text{int}} = g (|0010\rangle \langle 1101| + |1101\rangle \langle 0010|) \quad (۱۵۸-۴)$$

برای مدل سازی فرآیند گرم کردن هر کیوبیت بوسیله ی منبع ما همان مدل بازنشانی ساده را در نظر می گیریم [۷-۱۱]. که به موجب آن با چگالی احتمال p_i در زمان δt ، هر کیوبیت ممکن است با یک حالت استاندارد گرمایی τ_i منبع اش جایگزین شود. به عبارتی در زمان کوچک δt ، ماتریس چگالی به صورت زیر نگاشت می شود:

$$\rho \mapsto \delta t \sum_{i=1}^4 \mathcal{D}_i(\rho) + \rho \quad (۱۵۹-۴)$$

که دینامیک‌های پاشنده به صورت زیر می‌باشند:

$$\mathcal{D}_i(\rho) = p_i[\tau_i \otimes Tr_i(\rho) - \rho] \quad (۱۶۰-۴)$$

بنابراین، معادله‌ی حاکم بر دینامیک این یخچال بدین صورت بدست می‌آید:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = -i[H_0 + H_{\text{int}}, \rho] + \sum_{i=1}^4 \mathcal{D}_i(\rho) \quad (۱۶۱-۴)$$

۴-۱۰-۲- حالت پایا و جریان‌های گرمایی

برای یافتن حالت پایا، مانند حالت‌های قبلی، ابتدا کلی‌ترین حالتی را که در این معادله حاکم قرار گیرد و از تحول آن هیچ عملگر جدیدی خلق نشود را می‌یابیم، سپس حالت پایای سیستم را با توجه به این حالت بدست می‌آوریم. برای بدست آوردن کلی‌ترین حالت بدین صورت عمل می‌کنیم:

حالت اولیه سیستم را حالت گرمایی در نظر می‌گیریم، یعنی $\rho_0 = \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4$. اکنون ρ_0 را در معادله‌ی (۱۶۱-۴) قرار داده و تحول آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم. که با توجه به روابط زیر

$$[H_0, \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4] = 0 \quad , \quad [H_{\text{int}}, \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4] = -ig\Delta Y_{1234} \quad , \quad \mathcal{D}_i(\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4) = 0$$

$$Y_{1234} = i|1101\rangle\langle 0010| - i|0010\rangle\langle 1101| \quad (۱۶۲-۴)$$

ρ_1 را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\rho_1 = -g\Delta Y_{1234} \quad (۱۶۳-۴)$$

اکنون، به همین صورت از تحول ρ_1 (به عبارتی از تحول عملگر Y_{1234}) با توجه به روابط زیر

$$[H_0, Y_{1234}] = 0 \quad , \quad [H_{\text{int}}, Y_{1234}] = 2igZ_{1234} \quad , \quad Tr_i(Y_{1234}) = 0$$

$$Z_{1234} = |0010\rangle\langle 0010| - |1101\rangle\langle 1101| \quad (۱۶۴-۴)$$

ρ_2 را به صورت مجموعی از عملگرهای Y_{1234} و Z_{1234} بدست می‌آوریم. اکنون، از تحول ρ_2 با توجه به

روابط زیر

$$\begin{aligned} [H_0, Z_{1234}] &= 0, \quad [H_{\text{int}}, Z_{1234}] = -2igY_{1234} \\ Tr_1(Z_{1234}) &= Z_{234}, \quad Tr_2(Z_{1234}) = Z_{134}, \quad Tr_3(Z_{1234}) = Z_{124}, \quad Tr_4(Z_{1234}) = Z_{123} \\ Z_{234} &= |010\rangle\langle 010| - |101\rangle\langle 101|, \quad Z_{134} = |010\rangle\langle 010| - |101\rangle\langle 101| \\ Z_{124} &= |000\rangle\langle 000| - |111\rangle\langle 111|, \quad Z_{123} = |001\rangle\langle 001| - |110\rangle\langle 110| \end{aligned} \quad (۱۶۵-۴)$$

ρ_3 را به صورت مجموعی از عملگرهای $(Y_{1234}, Z_{1234}, \tau_1 Z_{234}, \tau_2 Z_{134}, \tau_3 Z_{124}, Z_{123} \tau_4)$

بدست می‌آوریم. اکنون، از تحول ρ_3 با توجه به روابط زیر

$$[H_0, \tau_1 Z_{234}] = [H_0, \tau_2 Z_{134}] = [H_0, \tau_3 Z_{124}] = [H_0, Z_{123} \tau_4] = 0$$

$$[H_{\text{int}}, \tau_1 Z_{234}] = [H_{\text{int}}, \tau_2 Z_{134}] = [H_{\text{int}}, \tau_3 Z_{124}] = [H_{\text{int}}, Z_{123} \tau_4] = -igY_{1234}$$

$$\begin{aligned} Tr_1(Z_{134}) &= Z_{34} & Tr_3(Z_{134}) &= Z_{14} & Tr_4(Z_{134}) &= Z_{13} \\ Tr_1(Z_{123}) &= Z_{23} & Tr_3(Z_{234}) &= Z_{24} & Tr_3(Z_{123}) &= Z_{12} \\ Z_{34} &= |10\rangle\langle 10| - |01\rangle\langle 01| & Z_{14} &= |00\rangle\langle 00| - |11\rangle\langle 11| \\ Z_{24} &= |00\rangle\langle 00| - |11\rangle\langle 11| & Z_{23} &= |01\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 10| \\ Z_{13} &= |01\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 10| & Z_{12} &= |00\rangle\langle 00| - |11\rangle\langle 11| \end{aligned} \quad (۱۶۶-۴)$$

ρ_4 را به صورت مجموعی از عملگرهای $(Y_{1234}, Z_{1234}, \tau_1 Z_{234}, \tau_2 Z_{134}, \tau_3 Z_{124}, Z_{123} \tau_4, \tau_1 \tau_2 Z_{34})$

بدست می‌آوریم. از تحول ρ_4 ، با توجه به روابط زیر

$$\begin{aligned}
[H_0, \tau_1 \tau_2 Z_{34}] &= [H_0, \tau_1 \tau_3 Z_{24}] = [H_0, \tau_1 Z_{23} \tau_4] = [H_0, \tau_2 \tau_3 Z_{14}] = [H_0, \tau_2 Z_{13} \tau_4] = [H_0, Z_{12} \tau_3 \tau_4] = 0 \\
[H_{\text{int}}, \tau_1 \tau_2 Z_{34}] &= -ig\Omega_{12} Y_{1234} \quad , \quad [H_{\text{int}}, \tau_1 \tau_3 Z_{24}] = -ig\Omega_{13} Y_{1234} \quad , \quad [H_{\text{int}}, \tau_1 Z_{23} \tau_4] = -ig\Omega_{14} Y_{1234} \\
[H_{\text{int}}, \tau_2 \tau_3 Z_{14}] &= -ig\Omega_{23} Y_{1234} \quad , \quad [H_{\text{int}}, \tau_2 Z_{13} \tau_4] = -ig\Omega_{24} Y_{1234} \quad , \quad [H_{\text{int}}, Z_{12} \tau_3 \tau_4] = -ig\Omega_{34} Y_{1234} \\
Tr_1(Z_{13}) &= Z_1 \quad , \quad Tr_3(Z_{13}) = Z_3 \quad , \quad Tr_2(Z_{24}) = Z_4 \quad , \quad Tr_4(Z_{24}) = Z_2 \\
Z_i &= (-1)^{\delta_{i3}} (|0\rangle_{i\ i} \langle 0| - |1\rangle_{i\ i} \langle 1|) \quad i=1,2,3,4 \\
\Omega_{12} &= r_1 r_2 + \bar{r}_1 \bar{r}_2 \quad , \quad \Omega_{24} = r_2 r_4 + \bar{r}_2 \bar{r}_4 \quad , \quad \Omega_{14} = r_1 r_4 + \bar{r}_1 \bar{r}_4 \\
\Omega_{23} &= r_2 \bar{r}_3 + \bar{r}_2 r_3 \quad , \quad \Omega_{34} = r_3 \bar{r}_4 + \bar{r}_3 r_4 \quad , \quad \Omega_{13} = r_1 \bar{r}_3 + \bar{r}_1 r_3
\end{aligned}
\tag{۱۶۷-۴}$$

ρ_5 را به صورت مجموعی از عملگرهای $(Y_{1234}, Z_{1234}, \tau_1 Z_{234}, \tau_2 Z_{134}, \tau_3 Z_{124}, Z_{123} \tau_4, \tau_1 \tau_2 Z_{34})$

$(\tau_1 \tau_3 Z_{24}, \tau_1 Z_{23} \tau_4, \tau_2 \tau_3 Z_{14}, \tau_2 Z_{13} \tau_4, Z_{12} \tau_3 \tau_4, Z_{12} \tau_3 \tau_4, \tau_1 Z_{23} \tau_4, \tau_1 \tau_2 Z_{34}, \tau_1 \tau_2 \tau_3 Z_{4})$

بدست می آوریم. با توجه به روابط زیر

$$\begin{aligned}
[H_0, \tau_1 \tau_2 \tau_3 Z_4] &= [H_0, \tau_1 \tau_2 Z_3 \tau_4] = [H_0, \tau_1 Z_2 \tau_3 \tau_4] = [H_0, Z_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4] = 0 \\
[H_{\text{int}}, \tau_1 \tau_2 \tau_3 Z_4] &= -ig\Omega_{123} Y_{1234} \quad [H_{\text{int}}, \tau_1 \tau_2 Z_3 \tau_4] = -ig\Omega_{124} Y_{1234} \\
[H_{\text{int}}, \tau_1 Z_2 \tau_3 \tau_4] &= -ig\Omega_{134} Y_{1234} \quad [H_{\text{int}}, Z_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4] = -ig\Omega_{234} Y_{1234} \\
\Omega_{123} &= r_1 r_2 \bar{r}_3 + \bar{r}_1 \bar{r}_2 r_3 \quad , \quad \Omega_{124} = r_1 r_2 r_4 + \bar{r}_1 \bar{r}_2 \bar{r}_4 \\
\Omega_{234} &= r_2 \bar{r}_3 r_4 + \bar{r}_2 r_3 \bar{r}_4 \quad , \quad \Omega_{134} = r_1 \bar{r}_3 r_4 + \bar{r}_1 r_3 \bar{r}_4 \\
Tr_i(Z_i) &= 0
\end{aligned}
\tag{۱۶۸-۴}$$

می بینیم که از تحول ρ_5 هیچ عملگر جدیدی بدست نمی آید. تمامی مراحل بالا، یا به عبارتی تحول عملگرها، را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\begin{aligned}
\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 &\mapsto Y_{1234} \quad Y_{1234} \mapsto (Y_{1234}, Z_{1234}) \quad Z_{1234} \mapsto (\tau_1 Z_{234}, \tau_2 Z_{134}, \tau_3 Z_{124}, Z_{123} \tau_4) \\
(\tau_1 Z_{234}, \tau_2 Z_{134}, \tau_3 Z_{124}, Z_{123} \tau_4) &\mapsto (\tau_1 \tau_2 Z_{34}, \tau_1 \tau_3 Z_{24}, \tau_1 Z_{23} \tau_4, \tau_2 \tau_3 Z_{14}, \tau_2 Z_{13} \tau_4, Z_{12} \tau_3 \tau_4) \\
(\tau_1 \tau_2 Z_{34}, \tau_1 \tau_3 Z_{24}, \tau_1 Z_{23} \tau_4, \tau_2 \tau_3 Z_{14}, \tau_2 Z_{13} \tau_4, Z_{12} \tau_3 \tau_4) &\mapsto (Z_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4, \tau_1 Z_2 \tau_3 \tau_4, \tau_1 \tau_2 Z_3 \tau_4, \tau_1 \tau_2 \tau_3 Z_4)
\end{aligned}
\tag{۱۶۹-۴}$$

بنابراین کلی ترین حالتی که می تواند در معادله ی (۴-۱۶۱) قرار گیرد و از تحول آن هیچ عملگر جدیدی

تولید نشود به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}\rho = & \alpha_1 \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 + \alpha_2 Y_{1234} + \alpha_3 Z_{1234} + \alpha_4 \tau_1 Z_{234} + \alpha_5 \tau_2 Z_{134} + \alpha_6 \tau_3 Z_{124} + \alpha_7 Z_{123} \tau_4 + \alpha_8 \tau_1 \tau_2 Z_{34} + \\ & + \alpha_9 \tau_1 \tau_3 Z_{24} + \alpha_{10} \tau_1 Z_{23} \tau_4 + \alpha_{11} \tau_2 \tau_3 Z_{14} + \alpha_{12} \tau_2 Z_{13} \tau_4 + \alpha_{13} Z_{12} \tau_3 \tau_4 + \alpha_{14} \tau_1 \tau_2 \tau_3 Z_4 + \alpha_{15} \tau_1 \tau_2 Z_3 \tau_4 + \\ & + \alpha_{16} \tau_1 Z_2 \tau_3 \tau_4 + \alpha_{17} Z_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4\end{aligned}\quad (۱۷۰-۴)$$

که با توجه به $Tr(\rho)=1$ و $\frac{d\rho^s}{dt}=0$ ، حالت پایا را به صورت زیر بدست می آوریم:

$$\begin{aligned}\rho = & \tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 + \gamma \{ q_1 \tau_1 Z_{234} + q_2 \tau_2 Z_{134} + q_3 \tau_3 Z_{124} + q_4 Z_{123} \tau_4 + Q_1 \tau_1 \tau_2 Z_{34} + Q_2 \tau_1 \tau_3 Z_{24} + \\ & + Q_3 \tau_1 Z_{23} \tau_4 + Q_4 \tau_2 \tau_3 Z_{14} + Q_5 \tau_2 Z_{13} \tau_4 + Q_6 Z_{12} \tau_3 \tau_4 + K_1 Z_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 + K_2 \tau_1 Z_2 \tau_3 \tau_4 + \\ & + K_3 \tau_1 \tau_2 Z_3 \tau_4 + K_4 \tau_1 \tau_2 \tau_3 Z_4 + Z_{1234} + \frac{q}{2g} Y_{1234} \}\end{aligned}\quad (۱۷۱-۴)$$

که ضرایب به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{p_1}{q-p_1} & q_2 &= \frac{p_2}{q-p_2} & q_3 &= \frac{p_3}{q-p_3} & q_4 &= \frac{p_4}{q-p_4} \\ Q_1 &= \frac{p_1 p_2}{p_3 + p_4} \left(\frac{1}{q-p_1} + \frac{1}{q-p_2} \right) & Q_2 &= \frac{p_1 p_3}{p_2 + p_4} \left(\frac{1}{q-p_1} + \frac{1}{q-p_3} \right) \\ Q_3 &= \frac{p_1 p_4}{p_2 + p_3} \left(\frac{1}{q-p_1} + \frac{1}{q-p_4} \right) & Q_4 &= \frac{p_2 p_3}{p_1 + p_4} \left(\frac{1}{q-p_2} + \frac{1}{q-p_3} \right) \\ Q_5 &= \frac{p_2 p_4}{p_1 + p_3} \left(\frac{1}{q-p_2} + \frac{1}{q-p_4} \right) & Q_6 &= \frac{p_3 p_4}{p_1 + p_2} \left(\frac{1}{q-p_3} + \frac{1}{q-p_4} \right) \\ K_1 &= \frac{p_4 Q_4 + p_3 Q_5 + p_2 Q_6}{p_1} & K_2 &= \frac{p_4 Q_2 + p_3 Q_3 + p_1 Q_6}{p_2} \\ K_3 &= \frac{p_2 Q_3 + p_1 Q_5 + p_1 Q_6}{p_3} & K_4 &= \frac{p_1 Q_3 + p_2 Q_2 + p_1 Q_4}{p_4}\end{aligned}\quad (۱۷۲-۴)$$

$$\gamma = \frac{-\Delta}{(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + Q_1\Omega_{12} + Q_2\Omega_{13} + Q_3\Omega_{14} + Q_4\Omega_{23} + Q_5\Omega_{24} + Q_6\Omega_{34} + K_1\Omega_{234} + K_2\Omega_{134} + K_3\Omega_{124} + K_4\Omega_{123} + 2 + \frac{q^2}{2g})} \quad , \quad \Delta = r_1 r_2 \bar{r}_3 r_4 - \bar{r}_1 \bar{r}_2 r_3 \bar{r}_4$$

و عملگرهای Y_{1234} و Z_{1234} ، عملگرهای پاولی گونه می‌باشند که در روابط جابجایی زیر صدق می‌کنند:

$$[Y_{1234}, Z_{1234}] = 2iX_{1234} \quad , \quad [X_{1234}, Y_{1234}] = 2iZ_{1234} \quad , \quad [Z_{1234}, X_{1234}] = 2iY_{1234} \quad (۱۷۳-۴)$$

که X_{1234} ، به بدین صورت می‌باشد:

$$X_{1234} = |1101\rangle\langle 0010| + |0010\rangle\langle 1101| \quad (۱۷۴-۴)$$

دقت کنید که با توجه به X_{1234} می‌توان هامیلتونی برهم‌کنش را به صورت $H_{\text{int}} = gX_{1234}$ نوشت. اکنون، با توجه به حالت پایای کلی و ردگیری جزئی بر روی پایه‌های سه ذره‌ی دیگر ، حالت پایای ذره‌ی i ام را بدست می‌آوریم. بنابراین ، با توجه به ردگیری جزئی ، حالت پایای ذره‌ی i ام به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$\rho_i^s = \tau_i + \frac{q\gamma}{p_i} Z_i \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (۱۷۵-۴)$$

و با توجه به مدل پاشندگی یک ذره و محاسبه تغییر حالت یک ذره، جریان‌های گرمایی را به صورت زیر خواهیم یافت:

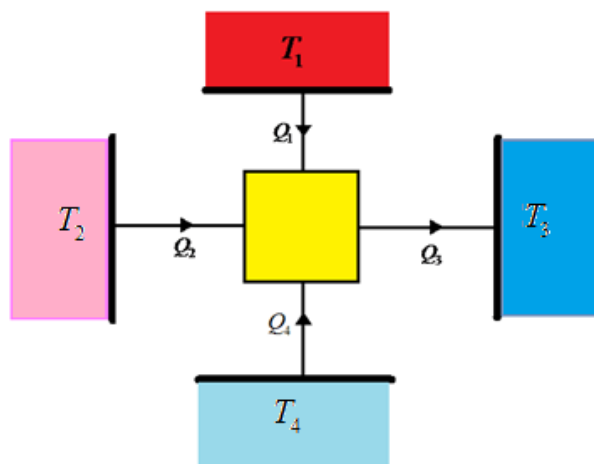
$$Q_i = p_i \text{Tr}(H_i(\tau_i - \rho_i(t))) \quad (۱۷۶-۴)$$

از آن‌جا که رفتار سیستم یک رفتار پایا می‌باشد، با توجه به رابطه‌ی (۱۷۵-۴) ، جریان‌های گرمایی بدین صورت معین می‌شود:

$$Q_i = (-1)^{\delta_{i3}} q \gamma E_i \quad (۱۷۷-۴)$$

که این رابطه این نکته را بیان می‌کند، که نسبت انرژی مبادله شده با منبع مستقل از جزئیات می‌باشد و آن به سادگی برابر نسبت ترازهای انرژی می‌باشد. این نکته را در عبارت زیر می‌توان خلاصه کرد:

$$Q_1 : Q_2 : Q_3 : Q_4 = E_1 : E_2 : E_3 : E_4 \quad (۱۷۸-۴)$$



شکل (۴-۵): نمایش شماتیک یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار

۴-۱۰-۳- پیشینه‌ی بازده‌ای و جهانی بودن

برای اینکه ماشین گرمایی چهار کیوبیتی ما به صورت یک یخچال اثر کند باید دمای ایستایی کیوبیت ۴ از دمای منبع‌اش سردتر باشد. این قید منجر به نامساوی زیر می‌شود:

$$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_2}{T_2} + \frac{E_4}{T_4} < \frac{E_3}{T_3} \quad (۱۷۹-۴)$$

با توجه به شرط بازگشت پذیری ($T_3^s = T_3$) این نامساوی به تساوی تبدیل می‌شود، یعنی

$$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_2}{T_2} + \frac{E_4}{T_4} = \frac{E_3}{T_3} \quad (۱۸۰-۴)$$

به عبارتی شرط بازگشت پذیری با اعمال این معادله برقرار می شود. با توجه به روابط (۱۷۸-۴) و (۱۸۰-۴) و ساختار اساسی یخچال یعنی رابطه ی (۱۵۷-۴) به رابطه ی زیر می رسیم

$$Q_4\left(\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T_3}\right) = Q_1\left(\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_1}\right) + Q_2\left(\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_2}\right) \quad (۱۸۱-۴)$$

اکنون، با توجه به رابطه ی (۱۷۸-۴) و همچنین اعمال این قید که $E_1 = nE_2$ می باشد، رابطه ی زیر را خواهیم داشت:

$$Q_1 = nQ_2 \quad (۱۸۲-۴)$$

بنابراین رابطه (۱۸۱-۴) را می توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{Q_4}{Q_2} = \frac{(n+1)\frac{1}{T_3} - \frac{n}{T_1} - \frac{1}{T_2}}{\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T_3}} \quad (۱۸۳-۴)$$

که نسبت $\frac{Q_4}{Q_2}$ را در حالت بازگشت پذیری می دهد. اکنون، با توجه به تعریف بازدهی یخچال که به صورت،

نسبت گرمای گرفته شده از منبع سرد به گرمای گرفته شده از منابع گرم می باشد

$$\eta_{fr}^q = \frac{Q_4}{Q_1 + Q_2} \quad (۱۸۴-۴)$$

و در نظر گرفتن روابط (۱۸۳-۴) و (۱۸۲-۴)، بیشینه ی بازدهی یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار را بدین صورت بدست می آوریم:

$$\eta_{fr}^c = \frac{(n+1)\frac{1}{T_3} - \frac{n}{T_1} - \frac{1}{T_2}}{(n+1)\left(\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T_3}\right)} \quad (۱۸۵-۴)$$

همان طور که می بینیم بازدهی کارنوی یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار، که میان چهار منبع گرمایی $T_1 \rangle T_2 \rangle T_3 \rangle T_4$ قرار دارد، جهانی نمی باشد و به جزییات مدل وابسته است. یعنی، علاوه بر دماهای منبع های گرمایی به جزییات ساختار یخچال (نسبت ترازهای انرژی) وابسته می باشد.

اکنون، بیشینه ی بازدهی یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار را از دیدگاه کیوبیت مجازی و دمای مجازی مورد بررسی قرار خواهیم داد جدایی های انرژی موضعی E_1 ، E_2 و E_3 با هم، یک کیوبیت مجازی با جدایی انرژی $E_v = E_3 - E_2 - E_1$ را تشکیل می دهند. حالت های پایه و برانگیخته ی کیوبیت مجازی بدین صورت معین می شوند:

$$\begin{aligned} |G\rangle_v &= |g\rangle_{v_{13}} |e\rangle_2 \\ |E\rangle_v &= |e\rangle_{v_{13}} |g\rangle_2 \end{aligned} \quad (۱۸۶-۴)$$

که دمای مجازی این کیوبیت بوسیله ی در نظر گرفتن نسبت اشغالی های P_v^E و P_v^G ، حالت برانگیخته و حالت پایه، بدست می آید:

$$e^{\frac{-\epsilon_v}{T_v}} = \frac{P_v^E}{P_v^G} \quad (۱۸۷-۴)$$

حالت های پایه و برانگیخته ی کیوبیت مجازی ۱ و ۳ به صورت $|g\rangle_{v_{13}} = |1\rangle_1 |0\rangle_3$ و $|e\rangle_{v_{13}} = |0\rangle_1 |1\rangle_3$ می باشند. بنابراین، حالت های پایه و برانگیخته ی کیوبیت مجازی کل را می توان بدین صورت بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} |G\rangle_v &= |1\rangle_1 |1\rangle_2 |0\rangle_3 \\ |E\rangle_v &= |0\rangle_1 |0\rangle_2 |1\rangle_3 \end{aligned} \quad (۱۸۸-۴)$$

با در نظر گرفتن اینکه هر منبع به طور مجزا در توزیع بولترزمنی می باشد، انبوهی های اشغالی حالت های پایه و برانگیخته ی کیوبیت مجازی به صورت زیر بدست می آیند:

$$P_v^G = P_1^e P_2^e P_3^g \rightarrow P_v^G = P_1^g P_2^g P_3^g e^{-\left(\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_2}{T_2}\right)} \quad (۱۸۹-۴)$$

$$P_v^E = P_1^g P_2^g P_3^e \rightarrow P_v^E = P_1^g P_2^g P_3^g e^{\frac{E_3}{T_3}}$$

اکنون، با توجه به روابط (۱۸۷-۴) و (۱۸۹-۴)، دمای مجازی را به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$T_v = \frac{E_v}{\frac{E_3}{T_3} - \frac{E_2}{T_2} - \frac{E_1}{T_1}} \quad (۱۹۰-۴)$$

که با در نظر گرفتن $E_1 = nE_2$ و دمای مجازی، می‌توان بازدهی یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار را بدین صورت بازنویسی کرد:

$$\eta_{fr}^q = \eta_{fr}^C \left(\frac{1 - \frac{T_v}{T_4}}{1 - \frac{T_v}{T_3}} \right) \quad (۱۹۱-۴)$$

که بازدهی یخچال به صورت بازدهی کارنو و یک عبارت تصحیحی نوشته شده است. همان طور که می‌دانیم شرط بازگشت‌پذیری تنها در صورتی تضمین شده است که تمام جسم‌هایی که در تماس با یکدیگر هستند دارای دمای یکسان باشند. یعنی زمانی که سیستم خارجی (کیوبیت ۴)، ماشین کیوبیت مجازی و تک کیوبیت مجازی انتخاب شده از منبع مرکب همه دارای دمای یکسان باشند. به عبارتی دیگر زمانی که $T_v = T_4$ باشد که در این صورت، عبارت تصحیح صفر می‌شود و یخچال به بیشینه‌ی بازدهی‌اش می‌رسد که برابر بازدهی کارنو می‌باشد. این تحلیل نشان می‌دهد، اگر ماشین دمایی متفاوت از دمای معین مورد نیاز را فیلتر کند آنگاه نمی‌تواند به بازدهی کارنو برسد. این مشکل با در نظر گرفتن جفت تراز انرژی E_4 به عنوان سیستم خارجی، که ماشین بر روی آن اثر می‌کند، حل می‌شود. به عبارتی E_4 را به صورتی انتخاب کنیم که $E_4 = E_3 - E_1 - E_2$ باشد. همان طور که می‌بینیم، بازدهی یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن جهانی نمی‌باشد و به جزئیات مدل وابسته

است. ولی به علت توانایی کامل بودن فیلتر، یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار می‌تواند به بازدهی کارنو برسد که این برخلاف ادعایی می‌باشد که در مقاله‌ی [۷] مطرح شده است.

۴-۱۰-۴- یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار با دو منبع گرم هم‌دما

حالتی بسیار جالب در مورد یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار زمانی اتفاق می‌افتد که دمای دو منبع گرم را برابر بگیریم، یعنی $T_1 = T_2$ باشد. در این حالت بازدهی یخچال بدین صورت می‌باشد:

$$\eta_{fr}^q = \eta_{fr}^C \left(1 - \frac{1 - \frac{T_v}{T_4}}{1 - \frac{T_v}{T_3}} \right) \quad (۱۹۲-۴)$$

که η_{fr}^C بازدهی کارنوی آن می‌باشد که در این مورد بدین صورت خواهد بود:

$$\eta_{fr}^C = \frac{\frac{1}{T_3} - \frac{1}{T_1}}{\frac{1}{T_4} - \frac{1}{T_3}} \quad (۱۹۳-۴)$$

بازدهی کارنوی یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار در این حالت خاص، فرمی مانند بازدهی کارنوی یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار دارد. در این حالت دمای مجازی بدین صورت خواهد بود:

$$T_v = \frac{E_v}{\frac{E_3}{T_3} - \frac{(E_2 + E_1)}{T_1}} \quad (۱۹۴-۴)$$

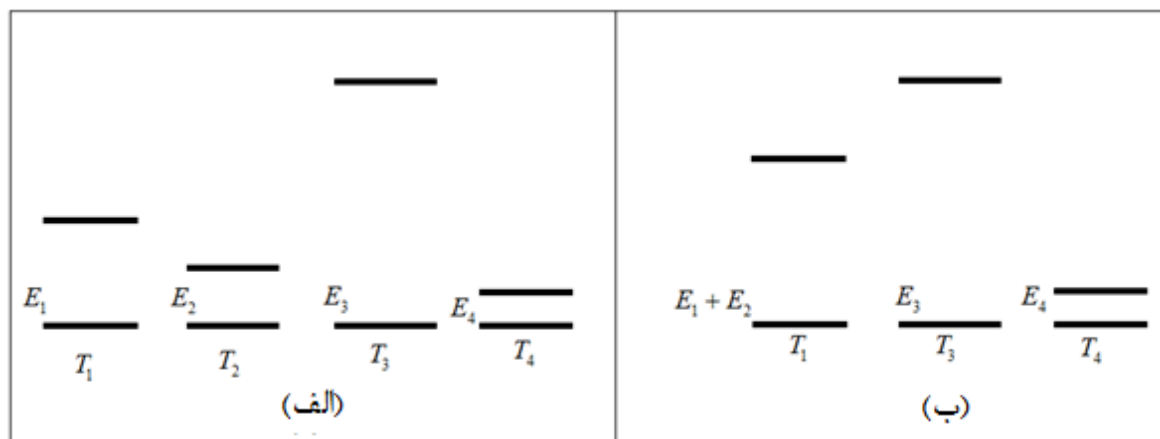
که جدایی تراز انرژی کیوبیت مجازی برابر با $E_v = E_3 - (E_2 + E_1)$ می‌باشد. از دیدگاه بازدهی می‌توان

گفت، که دو یخچال کوانتومی زیر معادل هم هستند:

(۱). کیوبیت ۱ با جدایی تراز انرژی E_1 در تماس گرمایی با منبع گرم T_1 ، کیوبیت ۲ با جدایی تراز انرژی E_2 در تماس گرمایی با منبع گرم $T_2 = T_1$ ، کیوبیت ۳ با جدایی تراز انرژی E_3 در تماس گرمایی با منبع گرم T_3 و کیوبیت ۴ با جدایی تراز انرژی E_4 در تماس گرمایی با منبع گرم T_4 می‌باشد که $T_1 = T_2 > T_3 > T_4$ می‌باشد و ساختار یخچال به صورت $E_1 + E_2 + E_4 = E_3$ می‌باشد.

(۲). کیوبیت ۱ با جدایی تراز انرژی $E_1 + E_2$ در تماس گرمایی با منبع گرم T_1 ، کیوبیت ۳ با جدایی تراز انرژی E_3 در تماس گرمایی با منبع گرم T_3 و کیوبیت ۴ با جدایی تراز انرژی E_4 در تماس گرمایی با منبع گرم T_4 می‌باشد که $T_1 > T_3 > T_4$ می‌باشد و ساختار یخچال به صورت $E_1 + (E_2 + E_4) = E_3$ می‌باشد. حالت دوم یک یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار را توصیف می‌کند که بازدهی آن چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن جهانی می‌باشد. پس نتایجی که در مورد بیشینه‌ی بازدهی این مورد خاص بدست آوردیم (منظور روابط (۴-۱۹۲) و (۴-۱۹۳) می‌باشد) منطقی می‌باشد.

بنابراین می‌توانیم بگوییم که دو یخچال نشان داده شده در شکل (۴-۶) از لحاظ بازدهی معادل هستند.



شکل (۴-۶): (الف) یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار با دو منبع گرم هم‌دما (ب) یخچال کوانتومی سه کیوبیتی خودسازگار

اکنون، نتایج بررسی یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار بدین صورت خلاصه می‌کنیم:

(۱). یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار می‌تواند به بازدهی کارنو برسد که این توانایی به شدت

وابسته به توانایی فیلتر کامل کردن تنها تک دمای مجازی T_v می‌باشد.

(۲). بازدهی یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار، با این قید $T_1 = T_2 > T_3 > T_4$ چه در حد کارنو و چه

متفاوت از آن جهانی می‌باشد.

(۳). بازدهی یخچال کوانتومی چهار کیوبیتی خودسازگار با این قید $T_1 > T_2 > T_3 > T_4$ ، چه در حد کارنو و چه

متفاوت از آن غیرجهانی می‌باشد.

۴-۱۱- یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار

نتیجه‌ای که در بخش قبل بدست آمد می‌تواند برای یک یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار

نیز تعمیم داده شود. که ما در این جا سه حالت را مورد بررسی قرار داده‌ایم.

۴-۱۱-۱- یخچال کوانتومی خودسازگار با $(n-2)$ منبع گرم

یخچال با گرفتن گرما از منبع T_n (منبع سرد) و دادن آن به منبع T_{n-1} (منبع دمای اتاق) کار می‌کند

و انرژی آزاد برای به کار انداختن یخچال از منبع‌های $(T_1, T_2, \dots, T_{n-2})$ (منبع‌های گرم) در ارتباط با

منبع T_{n-1} تامین می‌شود. که ساختار یخچال به صورت $E_1 + E_2 + \dots + E_{n-1} = E_n$ می‌باشد. همچنین

هامیلتونی برهم‌کنش به صورت $H_{\text{int}} = gX_{123, \dots, n}$ می‌باشد که شدت برهم‌کنش در برابر جدایی ترازهای

انرژی خیلی خیلی کوچک می‌باشد ($g \ll E_i$).

که عملگر پاولی گونه‌ی $X_{123, \dots, n}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$X_{123,\dots,n} = \left| 00\dots 01 \begin{smallmatrix} 0 \\ (n-1) \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle 11\dots 10 \begin{smallmatrix} 1 \\ (n-1) \end{smallmatrix} \right| + \left| 11\dots 10 \begin{smallmatrix} 1 \\ (n-1) \end{smallmatrix} \right\rangle \left\langle 00\dots 01 \begin{smallmatrix} 0 \\ (n-1) \end{smallmatrix} \right| \quad (۱۹۵-۴)$$

رابطه‌ی میان جریان‌های گرمایی و جدایی ترازهای انرژی بدین صورت می‌باشد:

$$Q_1 : Q_2 : \dots : Q_n = E_1 : E_2 : \dots : E_n \quad (۱۹۶-۴)$$

شرط بازگشت‌پذیری بدین صورت می‌باشد:

$$\frac{E_1 + E_2 + \dots + E_{n-2}}{T_1} + \frac{E_n}{T_n} = \frac{E_{n-1}}{T_{n-1}} \quad (۱۹۷-۴)$$

و دمای مجازی کیوبیت بدین صورت معین می‌شود:

$$T_v = \frac{E_n}{\frac{E_{n-1}}{T_{n-1}} - \frac{E_1 + E_2 + \dots + E_{n-2}}{T_1}} \quad (۱۹۸-۴)$$

با توجه به این روابط در مورد یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار با $(n-۲)$ منبع گرم، نتایج زیر را بیان می‌کنیم:

۱). یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار با $(n-۲)$ منبع گرم، می‌تواند به بازدهی کارنو برسد که این توانایی به شدت وابسته به توانایی فیلتر کامل کردن تنها تک دمای مجازی T_v می‌باشد.

۲). بازدهی یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار، با این قید $T_1 = T_2 = \dots = T_{n-2} \rangle T_{n-1} \rangle T_n$ ، چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن جهانی می‌باشد. که بیشینه‌ی بازدهی یا بازدهی کارنوی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\eta_{fr}^c = \frac{\frac{1}{T_{n-1}} - \frac{1}{T_1}}{\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{n-1}}} \quad (۱۹۹-۴)$$

۳). بازدهی یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار با $(n-2)$ منبع گرم، با این قید $T_1 \rangle T_2 \rangle \dots \rangle T_{n-2} \rangle T_{n-1} \rangle T_n$ ، چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن غیرجهانی می‌باشد.

۴-۱۱-۲- یخچال کوانتومی خودسازگار با $(n-2)$ منبع سرد

یخچال با گرفتن گرما از منبع‌های T_n (منبع‌های سرد) و دادن آن به منبع T_{n-1} (منبع دمای اتاق) کار می‌کند و انرژی آزاد برای به کار انداختن یخچال از منبع T_1 (منبع گرم) در ارتباط با منبع T_{n-1} تامین می‌شود. که ساختار یخچال به صورت $E_1 + E_2 + \dots + E_{n-1} = E_n$ می‌باشد. همچنین هامیلتونی برهم‌کنش به صورت $H_{\text{int}} = gX_{123, \dots, n}$ می‌باشد که شدت برهم‌کنش در برابر جدایی ترازهای انرژی خیلی خیلی کوچک می‌باشد $(g \ll E_i)$.

ما این مسئله را برای سیستمی با ساختار دمایی $T_1 \rangle T_{n-1} \rangle T_2 = T_3 = \dots = T_{n-2} = T_n$ نیز بررسی می‌کنیم که دارای همان ساختار ترازهای انرژی $E_1 + E_2 + \dots + E_{n-1} = E_n$ می‌باشند. رابطه‌ی میان جریان‌های گرمایی و جدایی ترازهای انرژی بدین صورت می‌باشد:

$$Q_1 : Q_2 : \dots : Q_n = E_1 : E_2 : \dots : E_n$$

شرط بازگشت‌پذیری در این مورد به این صورت بیان می‌شود:

$$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_2 + \dots + E_{n-2} + E_n}{T_n} = \frac{E_{n-1}}{T_{n-1}} \quad (۲۰۰-۴)$$

و دمای مجازی کیوبیت بدین صورت معین می‌شود:

$$T_v = \frac{E_2 + \dots + E_{n-2} + E_n}{\frac{E_{n-1}}{T_{n-1}} - \frac{E_1}{T_1}} \quad (۲۰۱-۴)$$

با توجه به این روابط در مورد یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار با $(n-2)$ منبع سرد ، نتایج زیر را بیان می کنیم:

(۱). یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار با $(n-2)$ منبع سرد ، می تواند به بازدهی کارنو برسد که این توانایی به شدت وابسته به توانایی فیلتر کامل کردن تنها تک دمای مجازی T_v می باشد.

(۲). بازدهی یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار ، با این قید $T_1 \rangle T_{n-1} \rangle T_2 = T_3 = \dots = T_{n-2} = T_n$ ، چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن جهانی می باشد. که بیشینه ی بازدهی یا بازدهی کارنوی آن به صورت زیر می باشد:

$$\eta_{fr}^C = \frac{\frac{1}{T_{n-1}} - \frac{1}{T_1}}{\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{n-1}}} \quad (202-4)$$

(۳). بازدهی یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار با $(n-2)$ منبع سرد، با این قید $T_1 \rangle T_2 \rangle \dots \rangle T_{n-2} \rangle T_{n-1} \rangle T_n$ ، چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن غیر جهانی می باشد.

۴-۱۱-۳- یخچال کوانتومی خودسازگار با $(n-2)$ منبع دمای اتاق

یخچال با گرفتن گرما از منبع T_n (منبع سرد) و دادن آن به منبع های T_{n-1} (منبع های دمای اتاق) کار می کند و انرژی آزاد برای به کار انداختن یخچال از منبع T_1 (منبع گرم) در ارتباط با منبع های T_{n-1} تامین می شود. که ساختار یخچال به صورت $E_1 + E_n = E_2 + E_3 + \dots + E_{n-1}$ می باشد. هم چنین هامیلتونی برهم کنش به صورت $H_{int} = s\Lambda_{123,\dots,n}$ می باشد که شدت برهم کنش (s) در برابر جدایی ترازهای انرژی خیلی خیلی کوچک می باشد ($s \ll E_i$). اپراتور پاولی گونه ی $\Lambda_{123,\dots,n}$ به صورت زیر می باشد:

$$\Lambda_{123,\dots,n} = \left| 011\dots 1_{(n-1)} 0 \right\rangle \left\langle 100\dots 0_{(n-1)} 1 \right| + \left| 100\dots 0_{(n-1)} 1 \right\rangle \left\langle 011\dots 1_{(n-1)} 0 \right| \quad (203-4)$$

ما این مسئله را برای سیستمی با ساختار دمایی $T_1 \rangle T_2 = T_3 = \dots = T_{n-2} = T_{n-1} \rangle T_n$ بررسی می‌کنیم که دارای ساختار ترازهای انرژی $E_1 + E_n = E_2 + E_3 + \dots + E_{n-2} + E_{n-1}$ می‌باشد. رابطه‌ی میان جریان‌های گرمایی و جدایی ترازهای انرژی بدین صورت می‌باشد:

$$Q_1 : Q_2 : \dots : Q_n = E_1 : E_2 : \dots : E_n$$

شرط بازگشت‌پذیری در این مورد به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{E_1}{T_1} + \frac{E_n}{T_n} = \frac{E_2 + \dots + E_{n-2} + E_{n-1}}{T_{n-1}} \quad (204-4)$$

و دمای مجازی کیوبیت بدین صورت معین می‌شود:

$$T_v = \frac{E_n}{\frac{E_2 + \dots + E_{n-2} + E_{n-1}}{T_{n-1}} - \frac{E_1}{T_1}} \quad (205-4)$$

با توجه به این روابط در مورد یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار با $(n-2)$ منبع اتاق، نتایج زیر را بیان می‌کنیم:

۱). یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار با $(n-2)$ منبع دمای اتاق، می‌تواند به بازدهی کارنو برسد که این توانایی به شدت وابسته به توانایی فیلتر کامل کردن تنها تک دمای مجازی T_v می‌باشد.

۲). بازدهی یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار، با این قید $T_1 \rangle T_2 = T_3 = \dots = T_{n-2} = T_{n-1} \rangle T_n$ ، چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن جهانی می‌باشد. که بیشینه‌ی بازدهی یا بازدهی کارنوی آن به صورت زیر می‌باشد:

$$\eta_{fr}^C = \frac{\frac{1}{T_{n-1}} - \frac{1}{T_1}}{\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{n-1}}} \quad (۲۰۶-۴)$$

۳. بازدهی یخچال کوانتومی n کیوبیتی خودسازگار با $(n-۲)$ منبع اتاق، با این قید

$T_1 \rangle T_2 \rangle \dots \rangle T_{n-2} \rangle T_{n-1} \rangle T_n$ ، چه در حد کارنو و چه متفاوت از آن غیرجهانی می‌باشد.

منابع:

- [1] Matthias B (July 2011), “**Lindblad driving for nonequilibrium steady-state transport for noninteracting quantum impurity models**”, UNIVERSITY OF MUNICH, Munich.
- [2] Michael A.N, Isaac L.C(2001),“**Quantum Computation and Quantum Information**” , UNIVERSITY OF CAMBRIDGE , UK , PP.353.
- [۳] کریمی پور وحید، درسنامه‌ی محاسبات کوانتومی، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف
- [4] John Preskill. (2009), “**Quantum Information and Quantum Computation**” , Chapter 3.
- [5] David McMahon. (2008), “**Quantum Computing Explained** ” , John Wiley & Sons, New Jersey, PP.251.
- [6] H. T. Quan, Yu-xi Liu, C. P. Sun, Franco Nori. “Quantum thermodynamic cycles and quantum heat engine”**Phys. Rev. E** **76**, 031105(2007).
- [7] N. Brunner, N. Linden, S. Popescu, P. Skrzypczyk. “Virtual qubits, virtual temperatures, and the foundations of thermodynamics” **Phys. Rev. E** **85**, 05111 (2012).
- [8] N. Linden, S. Popescu, P. Skrzypczyk. “The smallest possible heat engines” **arXiv:1010.6029**(2010)
- [9] P. Skrzypczyk, N. Brunner, N. Linden, S. Popescu. “The smallest refrigerators can reach maximal efficiency” **J. Phys. A: Math. Theor.** **44**, 492002 (2011).
- [10] N. Linden, S. Popescu, P. Skrzypczyk. “How small can thermal machines be? The smallest possible refrigerator ” **Phys. Rev. Lett.** **105**, 130401 (2010).
- [11] S. Popescu.“Maximally efficient quantum thermal machines: The basic principles” **arXiv:1009.2536**(2010)
- [12]R. Landauer, IBM, **J. Res. Develop.** **5**, 183 (1961).

- [13] C. H. Bennett, **Int. J. Theor. Phys.** **21**, 905 (1982)
- [14] G. Gemma, M. Michel and G. Mahler, **Quantum Thermodynamics**, Springer (2004).
- [15] E. P. Gyftopoulos and G. P. Beretta, **Thermodynamics: Foundations and Applications**, Dover (2005).
- [16] F. Tonner and G. Mahler, **Phys. Rev. E** **72**, 066118 (2005).
- [17] M. J. Henrich, M. Michel and G. Mahler, **Europhys. Lett.** **76**, 1057 (2006).
- [18] F. Rempp, M. Michel and G. Mahler, **Phys. Rev. A** **76**, 032325 (2007).
- [19] E. Geva and R. Kosloff, **J. Chem. Phys.** **96**, 3054 (1992).
- [20] E. Geva and R. Kosloff, **J. Chem. Phys.** **104**, 7681 (1996).
- [21] T. Feldmann and R. Kosloff, **Phys. Rev. E** **61**, 4774 (2000).
- [22] J. P. Palao, R. Kosloff and J. M. Gordon, **Phys. Rev. E** **64**, 056130 (2001).
- [23] D. Segal and A. Nitzan, **Phys. Rev. E** **73**, 026109 (2006).
- [24] T. Feldmann and R. Kosloff, **Phys. Rev. E** **68**, 016101 (2003).
- [25] H. T. Quan *et. al.*, **Phys. Rev. E** **76**, 031105 (2007).
- [26] K. Maruyama, F. Nori and V. Vedral, **Rev. Mod. Phys.** **81**, 1 (2009).
- [27] P. Talkner, **Annals of Phys.**, **167**, 390 (1986).
- [28] T. Feldmann, E. Geva and P. Salamon, **Am. J. Phys.** **64**, 485 (1996).
- [29] A. E. Allahverdyan, R. Ballian and Th. M. Nieuwenhuizen, **J. Mod. Opt.** **51**, 2703 (2004).

Abstract:

Among the topics that are highly regarded in the quantum thermodynamics, is quantum thermal machine that include refrigerators, heat pump and engines. Such as the recently much attention has been thermal machines is the smallest possible self-contained quantum thermal machines. In the this thesis, from three kinds of self-contained thermal machines, we specifically focus only on the smallest self-contained refrigerator, it will be reviewed. We will explain function of how by entering the physical tool that called virtual qubit and virtual temperature. In the master equation of refrigerator, we furthermore have been proposed model of dissipation in papers [7-11], we have provided other dissipation model and according to it we have obtained the master equation governing the dynamic of refrigerator. We have demonstrated according to both dissipation models that self-contained three-qubit quantum refrigerator (three-qubit QR) can reach the Carnot efficiency, and the efficiency of the self-contained QR is always universal at the Carnot limit and away from it. We have also according to concepts of virtual qubit proposed a new filter for self-contained three-qubit QR. We demonstrated for this new filter that the self-contained three-qubit QR reaches again Carnot efficiency And, according to two filters presented, we shown the most general characteristics of self-contained three-qubit QR. In the paper [7] he has been claim, that essentially only the smallest machines can approach Carnot efficiency. We verify this claim by raised self-contained four-qubit QR, and we have shown that according to concepts of virtual qubit, can reach maximum efficiency or means Carnot efficiency. But it's efficiency, such as self-contained three-qubit QR is not universal. We also investigated a special case of self-contained four-qubit QR, in other words self-contained four-qubit QR with two hot baths in same temperature. We demonstrated it's efficiency has the form as efficiency of self-contained three-qubit QR. In other words this particular model from the perspective of efficiency, equivalent to self-contained three-qubit QR. We also demonstrate the efficiency of this particular model in the Carnot limit and different from is independent from details of system model, but it is dependent on the environmental temperatures. We according to the model of self-contained four-qubit QR, generalize the our results to self-contained n -qubit QR. We demonstrate for specific case, the it's efficiency is equivalent with efficiency self-contained three-qubit QR.



Shahrood University of Thechnology

Faculty of Physics

Master of Science Thesis

**The efficiency of
Quantum thermal machines**

Supervisor:

Dr.Hossein Movahhedian

By:

Mehdi Ghanavati

Feb 2013