

١١.١) [١١.١=١١.١] ١١.١) [١١.١=١١.١]



دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز ریاضی

عنوان

مشخصه‌های بهترین تقریب تحمیلی

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

استاد مشاور

پژوهشگر

زینب شایینی

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

ساحت مقدس امام زمان (عج الله) و پدر مهربان و مادر دلسوزم.

تقدیر و تشکر

خداوند را شاکرم که توفیق علم آموزی نصیبم کرد و بر خود لازم میدانم از راهنمایی‌های ارزشمند استاد ارجمندم جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش کمال تشکر را داشته باشم.

زینب شاهینی

شهریور ۹۱

قانون زندگی، قانون باور است

(ژوزف مورفی)



چکیده

در این رساله ابتدا به معرفی خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی می‌پردازیم. بعد از معرفی خواص انحرافی و به عبارتی بهترین تقریب تحمیلی، به مشخص کردن بهترین تقریب تحمیلی هر عنصر یک فضای هیلبرت X نسبت به مجموعه‌ی $K = C \cap \{x \in X : -g(x) \in S\}$ که با انحراف $x - l$ از x نسبت به مجموعه C بدست می‌آید، به‌طوریکه در مجموعه‌ی مذکور C یک زیرمجموعه محدب بسته از X و S یک مخروط محدب بسته است، که درونش لزوماً ناتهی نیست. در ادامه، به رابطه‌ی خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی، با خواص انحرافی می‌پردازیم. سپس مفهوم دوگان حدی را تعریف نموده و نشان می‌دهیم که مشخصه‌ی دوگان، بهترین تقریب مجموعه‌ی $K = C \cap \{x \in X : -g(x) \in S\}$ در غیاب خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی بدست می‌آورد.

کلیدواژه‌ها:

خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی، بهترین تقریب تحمیلی، ϵ -زیرشیب‌ها، دوگان حدی

پیشگفتار

امروزه پیشرفت علوم کامپیوتر و به تبع آن پیشرفت‌های ریاضیات کاربردی موجب گردید، گرایش به مباحث علمی تقریب، از قبیل نظریه تقریب و محاسبات تقریبی به دلیل کاربردهای فراوان آنها در رشته های علوم پایه و مهندسی گسترش یابد. ریاضیدانانی همچون سینگر، پایینی، فرانچی و فوری در این زمینه فعالیت داشتند. بحث جدیدی از بهترین تقریب، بهترین تقریب تحمیلی است که در سال 2004 توسط محبی و جی کومار گسترش یافته است. در این پایان‌نامه به بررسی مفهوم تقریب تحمیلی و مشخصه‌های آن می‌پردازیم.

فهرست مطالب

ح	فهرست مطالب
۱	پیشینه و تعاریف مقدماتی
۱	۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۱۱	۲.۱ مخروط‌ها و مفاهیم مرتبط
۱۳	۲ معرفی مخروط‌هایی در فضای X^*
۱۳	۱.۲ مفاهیم
۳۷	۳ پوسته مخروطی قوی
۳۷	۱.۳ خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی
	۲.۳ خواص انحرافی در بهترین تقریب و رابطه‌ی آن با خواص اشتراکی پوسته مخروطی
۳۸	قوی
۵۰	۴ دوگان حدی
۵۰	۱.۴ شرایط دوگان حدی برای بهترین تقریب
۵۶	۵ بهترین تقریب تحمیل شده خطی
۵۶	۱.۵ مفاهیم
۶۴	مراجع

۶۵ واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

۶۷ واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

پیشینه و تعاریف مقدماتی

در این فصل پیش‌نیازهای لازم جهت درک راحت‌تر فصول بعدی در دو بخش ارائه می‌گردد. در بخش اول یادآوری‌هایی از مفاهیم بهترین تقریب و برخی از تعاریف را بیان می‌کنیم و در بخش دوم با مخروط‌ها و مفاهیم مرتبط با آن آشنا می‌شویم.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. زوج مرتب (X, d) که $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی می‌باشد را یک فضای متریک گویند، هرگاه:

$$\text{الف: } d(x, y) \geq 0$$

$$\text{ب: } d(x, y) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = y$$

$$\text{ج: } d(x, y) = d(y, x)$$

$$\text{د: } d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

تعریف ۲.۱.۱. فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرم‌دار نامیم، اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که :

$$\text{الف: به ازای هر } x \text{ و } y \text{ در } X, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$\text{ب: اگر } x \in X \text{ و } \alpha \text{ اسکالر باشد آن‌گاه } \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\text{پ: } \|x\| = 0 \text{ تساوی } x = 0 \text{ را ایجاب می‌کند.}$$

تعریف ۳.۱.۱. هر فضای باناخ یک فضای خطی نرم‌دار است که با متر تعریف شده به وسیله نرمش تام باشد. به عبارت دیگر هر دنباله‌ی کوشی در این فضای نرم‌دار همگرا باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فضای خطی حقیقی X یک فضای ضرب داخلی نامیده می‌شود، اگر برای هر جفت از عناصر $x, y \in X$ یک اسکالر حقیقی تعریف‌شده‌ی $\langle x, y \rangle$ داشته باشیم، که شرایط زیر برای هر $x, y, z \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ برقرار باشد.

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ الف}$$

$$\langle x, x \rangle = 0 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0 \text{ ب:}$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \text{ ج:}$$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle \text{ د:}$$

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \text{ ه:}$$

تعریف ۵.۱.۱. فضای هیلبرت یک فضای ضرب داخلی کامل است. یعنی هر دنباله‌ی کوشی در این فضای ضرب داخلی همگراست.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی باشد. برای هر زیرمجموعه غیرتهی K از X و هر $x \in X$ فاصله x از مجموعه‌ی K را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$d(x, K) = \inf_{y \in K} \|x - y\|$$

در این حالت عنصر $y_0 \in K$ یک بهترین تقریب برای $x \in X$ نامیده می‌شود، هرگاه داشته باشیم:

$$\|x - y_0\| = d(x, K)$$

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی و K زیرمجموعه‌ای ناتهی از X باشد. برای هر $x \in X$ ، مجموعه‌ی همه‌ی بهترین تقریب‌های x از K به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_K(x) := \{y \in K : \|x - y\| = d(x, K)\}$$

تعریف ۸.۱.۱. اگر $P_K(x)$ شامل حداقل یک عنصر باشد، آنگاه زیرمجموعه‌ی K از X یک مجموعه‌ی پروکسیمینال نامیده می‌شود. به عبارت دیگر اگر داشته باشیم $P_K(x) \neq \emptyset$ در این صورت K یک مجموعه‌ی پروکسیمینال است.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی و K یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از X باشد. اگر هر عنصر $x \in X$ یک بهترین تقریب منحصر به فرد در K داشته باشد، آنگاه K یک زیرمجموعه‌ی چبیشف از X نامیده می‌شود. به عبارت دیگر K یک مجموعه‌ی چبیشف است اگر و فقط اگر $P_K(x)$ تک‌عضوی باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای خطی نرم دار روی میدان‌های $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. $X^* = B(X, \mathbb{R})$ فضای دوگان X نامیده می‌شود. $X^{**} = B(X^*, \mathbb{R})$ فضای دوگان دوم X نامیده می‌شود.

تعریف ۱۱.۱.۱. مجموعه‌ی دلخواه $X \neq \emptyset$ به همراه گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X مانند τ را یک فضای توپولوژیکی گویند، هرگاه:

الف: اجتماع هر گردایه از مجموعه‌های عضو τ در τ قرار داشته باشد.

ب: اشتراک هر تعداد متناهی مجموعه عضو τ در آن قرار داشته باشد، یعنی اشتراک هر گردایه متناهی از مجموعه‌های عضو τ در آن قرار داشته باشد.

پ: مجموعه‌های تهی و X عضو τ باشند.

گردایه τ توپولوژی تعریف شده روی X نام دارد. همچنین اعضای توپولوژی τ مجموعه‌های باز در X و متمم آنها مجموعه‌های بسته در X هستند.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای نرم‌دار و X^* دوگان آن باشد، در این صورت کوچکترین توپولوژی روی X که تحت آن هر $f \in X^*$ پیوسته باشد را توپولوژی ضعیف بر X می‌نامیم. همچنین توپولوژی ضعیف بر X^* را توپولوژی ضعیف ستاره می‌نامیم، یعنی کوچکترین توپولوژی روی X^* که تحت آن هر عنصر از X^{**} پیوسته باشد.

تذکر ۱۳.۱.۱. بستر مجموعه‌ی A را در فضای توپولوژی ضعیف ستاره، با $w^* - cl(A)$ و حد دنباله‌ی $\{a_n\}$ در فضای توپولوژی ضعیف ستاره،

با $w^* - \lim(a_n)$ نشان داده و آنها را به ترتیب، بستر مجموعه‌ی A به طور ضعیف ستاره و حد دنباله‌ی $\{a_n\}$ به طور ضعیف ستاره می‌نامیم.

قضیه ۱۴.۱.۱. (نمایش ریس): فرض کنیم X یک فضای هیلبرت باشد، در این صورت $X^* = X$. یعنی برای هر $x^* \in X^*$ یک عنصر یکتای $x \in X$ موجود است، به طوریکه برای هر $y \in X$ داریم:

$$\|x^*\| = \|x\|, x^*(y) = \langle y, x \rangle$$

□

برهان. به مرجع [8] صفحه‌ی 94 رجوع شود.

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم که X یک فضای باناخ و $A \subset X$ باشد. تابع شاخص A را به این صورت بیان می‌کنیم:

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ +\infty & x \notin A \end{cases} \quad (۱.۱)$$

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. $A \subset X$ و $u \in X^*$ تابع کمکی A را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\sigma_A(u) = \sup_{x \in A} u(x) \quad (۲.۱)$$

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. اپی گراف تابع $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ به این صورت تعریف می‌شود:

$$Epi f := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : x \in dom f, f(x) \leq r\} \quad (۳.۱)$$

همچنین دامنه f به این صورت بیان می‌شود:

$$dom f = \{x \in X : f(x) \leq +\infty\}$$

به عبارت دیگر دامنه‌ی f عبارتست از مجموعه‌ی تمام $x \in X$ که f در آن تعریف شده باشد.

تعریف ۱۸.۱.۱. یک مجموعه‌ی D را محدب گوییم، هرگاه برای هر $x, y \in D$ داشته باشیم:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in D$$

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای توپولوژیکی باشد.

$f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ در نقطه‌ی $x_0 \in X$ نیم‌پیوسته‌ی پایینی است اگر:

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) : f(x_0) - \varepsilon < f(x) \quad (\forall x \in N(x_0, \delta))$$

به عبارت دیگر

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \quad (۴.۱)$$

در واقع اگر f در نقطه‌ی x_0 ناپیوسته باشد، آنگاه $f(x_0)$ روی پایین‌ترین شاخه قرار داشته باشد.

اگر در رابطه‌ی ۴.۱ نامساوی اکید باشد تابع f را نیم‌پیوسته‌ی پایینی سره گوئیم.

تعریف ۲۰.۱.۱. تابع $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ را که در آن $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ باشد محدب گوئیم هرگاه به

ازای هر $x_1, x_2 \in (a, b)$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک تابع محدب، نیم‌پیوسته

پایینی سره باشد. مزدوج f به این صورت تعریف می‌شود:

$$f^* : X^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

که در آن

$$f^*(u) = \sup_{x \in \text{dom} f} \{u(x) - f(x)\} \quad (۵.۱)$$

تذکر ۲۲.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و $D \subset X$ محدب باشد. در این صورت همواره داریم:

$$\delta_D^* = \sigma_D$$

برهان. طبق تعریف داریم:

$$\sigma_D = \sup_{x \in D} \{u(x)\}$$

همچنین

$$\delta_D^* = \sup_{x \in \text{dom} \delta_D} \{u(x) - \delta_D(x)\}$$

$$\delta_D(x) = \begin{cases} 0 & x \in D \\ +\infty & x \notin D \end{cases} \quad \text{و چون}$$

بنابراین در تعریف δ_D^* اگر $x \in D$ داریم:

$$\delta_D^* = \sup_{x \in D} \{u(x)\}$$

□

تعریف ۲۳.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک تابع محدب، نیم پیوسته پایینی

سره و $a \in \text{dom} f$ باشد. به ازای هر $\varepsilon \geq 0$ زیر تفاضلی f در نقطه‌ی a به این صورت تعریف می‌شود:

$$\partial_\varepsilon f(a) = \{v \in X^* \mid f(x) - f(a) \geq v(x - a) - \varepsilon \quad \forall x \in \text{dom} f\} \quad (۶.۱)$$

عناصر مجموعه‌ی $\partial_\varepsilon f(a)$ را ε -زیر شیب f در نقطه‌ی a می‌نامیم.

همچنین در نقطه‌ی دلخواه $a \in \text{dom} f$ ، $\partial f(a)$ را مجموعه‌ی زیر تفاضلی f در نقطه‌ی a می‌نامیم

و به صورت:

$$\partial f(a) = \bigcap_{\varepsilon \geq 0} \partial_\varepsilon f(a)$$

تعریف می‌کنیم.

لم ۲۴.۱.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک تابع محدب، نیم پیوسته پایینی

سره و $a \in \text{dom} f$ باشد. مجموعه‌ی زیر تفاضلی $\partial f(a)$ محدب است.

برهان. فرض کنیم $x, y \in \partial f(a) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \partial_\varepsilon f(a)$ دلخواه باشد. بنابراین به ازای هر $\varepsilon > 0$ ،

$\partial_\varepsilon f(a)$ در نتیجه به ازای هر $x_1 \in \text{dom} f$ با توجه به تعریف $\partial_\varepsilon f(a)$ خواهیم داشت:

$$f(x_1) - f(a) \geq x(x_1 - a) - \varepsilon \quad (۷.۱)$$

و

$$f(x_1) - f(a) \geq y(x_1 - a) - \varepsilon \quad (۸.۱)$$

با ضرب λ در ۷.۱ و $(1 - \lambda)$ در ۸.۱ داریم:

$$\lambda(f(x_1) - f(a)) \geq \lambda x(x_1 - a) - \lambda \varepsilon \quad (۹.۱)$$

و

$$(1 - \lambda)(f(x_1) - f(a)) \geq (1 - \lambda)y(x_1 - a) - (1 - \lambda)\varepsilon \quad (۱۰.۱)$$

با جمع نمودن روابط ۹.۱ و ۱۰.۱ داریم:

$$(f(x_1) - f(a)) \geq (\lambda x + (1 - \lambda)y)(x_1 - a) - \varepsilon$$

با توجه به رابطه‌ی ۶.۱ به ازای هر $\varepsilon \geq 0$ خواهیم داشت:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \partial_\varepsilon f(a)$$

بنابراین به ازای هر $x, y \in \partial f(a)$ و به ازای هر $0 \leq \lambda \leq 1$ داریم:

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in \partial f(a) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \partial_\varepsilon f(a)$$

□

گزاره ۲۵.۱.۱. فرض کنیم $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک تابع نیم پیوسته‌ی پایینی و $a \in \text{dom } f$ باشد.

در این صورت:

$$\text{Epi } f^* = \bigcup_{\varepsilon \geq 0} \{(v, \varepsilon + v(a) - f(a)) : v \in \partial_\varepsilon f(a)\}$$

برهان. عبارت سمت راست حکم را برابر مجموعه‌ی K در نظر می‌گیریم.

فرض کنیم $(u, r) \in \text{Epi } f^*$ با توجه به رابطه‌ی ۳.۱ داریم:

$$f^*(u) \leq r$$

از طرفی با توجه به تعریف ۲۱.۱.۱ به ازای هر $x \in \text{dom} f$ نتیجه می‌شود:

$$u(x) - f(x) \leq f^*(u)$$

بنابراین به ازای هر $x \in \text{dom} f$

$$u(x) - f(x) \leq r \quad (۱۱.۱)$$

حال فرض کنیم که $\varepsilon_0 = r + f(a) - u(a) \geq 0$ در نتیجه:

$$r = \varepsilon_0 - f(a) + u(a) \quad (۱۲.۱)$$

با توجه به روابط ۱۱.۱ و ۱۲.۱ داریم:

$$f(x) - f(a) \geq u(x) - r - f(a) = u(x) - \varepsilon_0 + f(a) - u(a) - f(a) = u(x - a) - \varepsilon_0$$

یعنی با توجه به رابطه‌ی ۶.۱ خواهیم داشت:

$$u \in \partial_{\varepsilon_0} f(a)$$

در نتیجه:

$$\text{Epi} f^* \subset K := \bigcup_{\varepsilon \geq 0} \{(v, \varepsilon + v(a) - f(a)) : v \in \partial_{\varepsilon} f(a)\}$$

برعکس، فرض کنیم $(u, r) \in K$ باشد. بنابراین طبق تعریف مجموعه‌ی K ، $\varepsilon_0 \geq 0$ موجود است

به‌طوری‌که $u \in \partial_{\varepsilon_0} f(a)$ و $r = -f(a) + u(a) + \varepsilon_0$. با توجه به $u \in \partial_{\varepsilon_0} f(a)$ و اینکه:

$$\partial_{\varepsilon_0} f(a) = \{v \in X^* \mid f(x) - f(a) \geq v(x - a) - \varepsilon_0 \quad \forall x \in \text{dom} f\}$$

و چون $u \in X^*$ ، یعنی u خطی است، داریم:

$$f(x) - f(a) \geq u(x) - u(a) - \varepsilon_0$$

در نتیجه:

$$f(a) - f(x) + u(x) - u(a) \leq \varepsilon_0$$

یعنی:

$$u(x) - f(x) + f(a) - u(a) \leq \varepsilon_0$$

لذا طبق تعریف ۲۱.۱.۱ داریم:

$$f^*(u) + f(a) - u(a) \leq \varepsilon_0$$

بنابراین،

$$f^*(u) \leq \varepsilon_0 + u(a) - f(a)$$

و با توجه به اینکه $r = \varepsilon_0 + u(a) - f(a)$ داریم:

$$f^*(u) \leq r$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی ۳.۱ خواهیم داشت:

$$(u, r) \in \text{Epi } f^*$$

□

قضیه ۲۶.۱.۱. در یک فضای هیلبرت هر مجموعه‌ی محدب بسته، چبیشف است.

□

برهان. به مرجع [8] صفحه‌ی 35 رجوع شود.

قضیه ۲۷.۱.۱. (قضیه‌ی هان - باناخ) : فرض کنیم X یک فضای ضرب داخلی و M یک زیرفضا از

X باشد، آن‌گاه برای هر $f \in M^*$ یک $F \in X^*$ موجود است به‌طوری‌که:

$$\|F\| = \|f\|, F|_M = f$$

□

برهان. به مرجع [8] صفحه‌ی 94 رجوع شود.

قضیه ۲۸.۱.۱. (قضیه جداسازی هان-باناخ) : فرض کنیم X یک فضای برداری توپولوژیکی مختلط،

A و B زیرمجموعه‌های ناتهی محدب از X باشند و $A \cap B = \emptyset$. اگر A باز باشد یک تابعک خطی

پیوسته $\Gamma \in X^*$ و یک $\gamma \in \mathbb{R}$ موجود است، به‌طوری‌که به‌ازای هر $a \in A$ و هر $b \in B$ داشته باشیم:

$$\text{Re} \Gamma(a) < \gamma \leq \text{Re} \Gamma(b)$$

□

برهان. به مرجع [5] رجوع شود.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم $C_1, C_2, \dots, C_m$ زیرمجموعه‌های محدب بسته از فضای باناخ X باشند. مجموعه‌ی $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ را منظم خطی کراندار گویند هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی کراندار S از فضای باناخ X ، $k_S > 0$ موجود باشد به طوریکه به ازای هر $x \in S$ داریم:

$$d(x, \bigcap_{i=1}^m C_i) \leq k_S \max\{d(x, C_i), i = 1, 2, \dots, m\}$$

تذکر ۳۰.۱.۱. مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی مثبت یا مساوی صفر را با $\mathbb{R}_+$ و مجموعه‌ی تمام بردارهای $-m$ -تایی مثبت یا مساوی صفر در اعداد حقیقی را با $\mathbb{R}_+^m$ نمایش می‌دهیم.

تذکر ۳۱.۱.۱. فرض کنیم C و D دو زیرمجموعه‌ی محدب بسته از فضای باناخ X باشند. در این صورت داریم:

$$\{0\} \times \mathbb{R}_+ \subset cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$$

برهان. فرض کنیم $(0, r) \in \{0\} \times \mathbb{R}_+$ دلخواه باشد. در این صورت می‌توان نوشت:

$$(0, r) = (0 + 0, 0 + r)$$

که در آن $r \geq 0$

با توجه به رابطه‌ی ۲.۱ داریم:

$$\sigma_C(0) = \sup_{x \in C} x(0) = 0 \leq 0$$

$$\sigma_D(0) = \sup_{x \in D} x(0) = 0 \leq r$$

با توجه به رابطه‌ی ۳.۱ نتیجه می‌شود:

$$(0, 0) \in Epi\sigma_C \quad (۱۳.۱)$$

$$(0, r) \in Epi\sigma_D \quad (۱۴.۱)$$

با جمع کردن روابط ۱۳.۱ و ۱۴.۱ نتیجه می‌گیریم:

$$(0, r) \in (Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$$

بنابراین در بستارش نیز می‌باشد. یعنی:

$$(0, r) \in cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$$

□

۲.۱ مخروط‌ها و مفاهیم مرتبط

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم K یک زیرمجموعه از فضای برداری X باشد. در این صورت K را یک مخروط

می‌نامیم، اگر برای هر $x \in K$ و هر $\lambda > 0$ داشته باشیم: $\lambda x \in K$

تعریف ۲.۲.۱. زیر مجموعه‌ی C از فضای ضرب داخلی X را مخروط محدب گوییم، اگر به ازای هر

$x, y \in C$ و $\alpha, \beta \geq 0$ داشته باشیم:

$$\alpha x + \beta y \in C$$

تعریف ۳.۲.۱. زیر مجموعه‌ی ناتهی M از فضای ضرب داخلی X را یک زیرفضا نامیم، هرگاه برای هر

$x, y \in M$ و $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$\alpha x + \beta y \in M$$

تذکر ۴.۲.۱. واضح است که هر زیرفضا یک مخروط محدب است، اما عکس آن برقرار نیست.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ و $D \subset X$ باشد. مخروط نرمال D به ازای هر $x \in D$

به این صورت تعریف می‌شود:

$$N_D(x) := \{v \in X^* : \sigma_D(v) = v(x)\} = \{v \in X^* : v(y - x) \leq 0, \forall y \in D\} \quad (۱۵.۱)$$

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم S یک زیر مجموعه‌ی ناتهی از فضای ضرب داخلی X باشد. اشتراک تمام

مخروط‌های محدب شامل S را پوسته‌ی مخروطی S می‌نامیم.

پوسته‌ی مخروطی S در واقع همان مخروط تولید شده توسط S است که به صورت:

$$\text{con}(S) = \left\{ \sum_{i=0}^n \rho_i x_i \mid x_i \in S, \rho_i \geq 0 \right\}$$

تعریف می‌شود.

همچنین پوسته‌ی محدب شامل مجموعه S را نیز به فرم زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{co}(S) = \left\{ \sum_{i=0}^n \rho_i x_i \mid x_i \in S, \rho_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \rho_i = 1 \right\}$$

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم S یک زیر مجموعه ناتهی از فضای ضرب داخلی X باشد، مخروط دوگان S عبارت است از:

$$S^\circ := \{x \in X \mid \langle x, y \rangle \leq 0, \forall y \in S\} \quad (۱۶.۱)$$

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد و S یک مخروط محدب بسته باشد که لزوماً درونش ناتهی نیست. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$S^+ := \{\lambda \in X^* \mid \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\} \quad (۱۷.۱)$$

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم X یک فضای هیلبرت باشد، برای زیرمجموعه‌ی W از X ، مخروط قطبی W را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$W^\circ := \{v \in X^* : v(w) \leq 0, \forall w \in W\}$$

تذکر ۱۰.۲.۱. با توجه به تعریف مخروط نرمال و تعریف مخروط قطبی W° در واقع همان مخروط نرمال W در صفر است.

تعریف ۱۱.۲.۱. فرض کنیم X و Y فضای باناخ باشند و S یک مخروط محدب بسته در Y باشد. یک تابع $g : X \rightarrow Y$ را S -محدب می‌گوییم اگر داشته باشیم:

$$\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \in S \quad (x, y \in X; 0 \leq \lambda \leq 1)$$

فصل ۲

معرفی مخروط‌هایی در فضای X^*

در این فصل به معرفی مخروط‌هایی در فضای X^* و روابط بین آن‌ها می‌پردازیم. یکی از این مخروط‌ها، مخروط $\tilde{M}(x)$ است که در فصل سوم با انحراف $x \in X$ به $x - l$ که l یک فضای باناخ و $l \in \tilde{M}(x)$ به بررسی بهترین تقریب تحمیلی می‌پردازیم.

۱.۲ مفاهیم

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S \subset Y$ مخروط محدب بسته‌ای باشد که لزوماً درونش ناتهی نیست و $g : X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته باشد.

$$S^+ := \{\lambda \in Y^* : \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\}$$
 همچنین

در این صورت برای هر $x \in X$ تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{M}(x) := \{u \in X^* \mid (u, u(x)) \in w^* - cl(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*)\}$$

گزاره ۲.۱.۲. اگر $\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*$ یک مخروط محدب باشد آنگاه $\tilde{M}(x)$ یک مخروط محدب بسته در X^* است.

برهان. فرض کنیم u و u' عناصری دلخواه از $\tilde{M}(x)$ باشند. با توجه به تعریف ۱.۱.۲،

$$z, y \in w^* - cl(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*) \text{ به طوریکه } z = (u, u(x)) \text{ و } y = (u', u'(x)) \text{ حال اگر}$$

$\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*$ محدب باشد، بستارش به طور ضعیف ستاره نیز محدب است. یعنی $w^* - cl(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*)$

محدب می‌باشد. بنابراین به ازای هر $\alpha, \beta \geq 0$ داریم :

$$\alpha z + \beta y \in w^* - cl(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*)$$

پس

$$\alpha(u, u(x)) + \beta(u', u'(x)) \in w^* - cl(\cup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*)$$

یعنی داریم :

$$(\alpha u + \beta u', \alpha u(x) + \beta u'(x)) \in w^* - cl(\cup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*)$$

چون $u, u' \in X^*$ در نتیجه خطی هستند، بنابراین

$$(\alpha u + \beta u', (\alpha u + \beta u')(x)) \in w^* - cl(\cup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*)$$

در نتیجه با توجه به تعریف ۱.۱.۲، به ازای هر $\alpha, \beta \geq 0$ و $u, u' \in \tilde{M}(x)$ داریم:

$$\alpha u + \beta u' \in \tilde{M}(x)$$

□

یعنی $\tilde{M}(x)$ محدب است.

لم ۳.۱.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ و C و D زیرمجموعه‌های محدب بسته‌ای از X باشند. در این صورت داریم:

$$(0, -1) \notin cl(Epi\delta_C^* + Epi\delta_D^*)$$

اگر و تنها اگر

$$C \cap D \neq \emptyset$$

برهان. فرض کنیم $(u, \alpha) \in (Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$ باشد. با توجه به تذکر ۲۲.۱.۱ داریم:

$$(u, \alpha) \in Epi\delta_C^* + Epi\delta_D^*$$

در این صورت $v, w \in X^*$ و $\beta, \delta \in \mathbb{R}$ موجودند به‌طوری‌که:

$$\alpha = \beta + \delta, u = v + w \text{ و } (w, \delta) \in Epi\delta_C^* = Epi\sigma_C, (v, \beta) \in Epi\delta_D^* = Epi\sigma_D$$

با توجه به رابطه‌ی ۳.۱ برای هر $x \in D$ و $v(x) \leq \beta$ و برای هر $x \in C$ و $w(x) \leq \delta$ در نتیجه اگر

$$x \in K := C \cap D \text{ دلخواه باشد داریم:}$$

$$u(x) = (v + w)(x) \leq \beta + \delta = \alpha$$

بنابراین $\sup_{x \in K} u(x) \leq \alpha$ در نتیجه با توجه به روابط ۲.۱ و ۳.۱ داریم:

$$(u, \alpha) \in \text{Epi} \sigma_K$$

لذا،

$$\text{Epi} \delta_D^* + \text{Epi} \delta_C^* \subset \text{Epi} \sigma_K$$

از طرفی واضح است $\text{Epi} \sigma_K$ به طور ضعیف ستاره، بسته است. در نتیجه:

$$\text{cl}(\text{Epi} \delta_D^* + \text{Epi} \delta_C^*) \subset \text{Epi} \sigma_K \quad (۱.۲)$$

حال اگر $C \cap D \neq \emptyset$ در این صورت داریم:

$$\sigma_K(0) = \sup_{x \in K} x(0) = 0 \not\leq -1$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی ۳.۱ نتیجه می‌شود:

$$(0, -1) \notin \text{Epi} \sigma_K \quad (۲.۲)$$

لذا با توجه به روابط ۱.۲ و ۲.۲ داریم:

$$(0, -1) \notin \text{cl}(\text{Epi} \delta_D^* + \text{Epi} \delta_C^*)$$

برعکس، فرض کنیم $(0, -1) \notin \text{cl}(\text{Epi} \sigma_C + \text{Epi} \sigma_D) = \text{cl}(\text{Epi} \delta_D^* + \text{Epi} \delta_C^*)$ در این صورت با استفاده

از قضیه‌ی جداسازی هان-باناخ $(0, 0) \neq (x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}$ موجود است به‌طوری‌که $-\alpha < 0$ و به ازای

هر $(u, \alpha) \in \text{cl}(\text{Epi} \delta_D^* + \text{Epi} \delta_C^*)$ داریم:

$$u(x) + \gamma \alpha \geq 0 \quad (۳.۲)$$

با قرار دادن $x = \bar{x} \alpha$ در رابطه‌ی ۳.۲ به‌ازای هر $(u, \gamma) \in \text{cl}(\text{Epi} \delta_D^* + \text{Epi} \delta_C^*)$ نتیجه می‌شود:

$$u(-\bar{x}) - \gamma \leq 0 \quad (۴.۲)$$

برای هر $v \in \text{dom} \delta_D^*$ و $w \in \text{dom} \delta_C^*$ داریم: $\delta_C^*(w) \leq \delta_C^*(w)$, $\delta_D^*(v) \leq \delta_D^*(v)$ که با توجه به رابطه ۳.۱ نتیجه می‌شود:

$$(w, \delta_C^*(w)) \in \text{Epi} \delta_C^* \quad (۵.۲)$$

و

$$(v, \delta_D^*(v)) \in \text{Epi} \delta_D^* \quad (۶.۲)$$

با جمع نمودن روابط ۵.۲ و ۶.۲ داریم:

$$(v + w, \delta_D^*(v) + \delta_C^*(w)) \in (\text{Epi} \delta_D^* + \text{Epi} \delta_C^*)$$

بنابراین، در بستارش نیز قرار می‌گیرد. یعنی:

$$(v + w, \delta_D^*(v) + \delta_C^*(w)) \in \text{cl}(\text{Epi} \delta_D^* + \text{Epi} \delta_C^*) \quad (۷.۲)$$

با توجه به روابط ۴.۲ و ۷.۲ نتیجه می‌گیریم:

$$(v + w)(-\bar{x}) - \delta_D^*(v) - \delta_C^*(w) \leq 0 \quad (۸.۲)$$

با قرار دادن $w = 0$ در رابطه ۸.۲ برای هر $v \in \text{dom} \delta_D^*$ داریم:

$$v(-\bar{x} - \delta_D^*(v)) \leq 0$$

از طرفی چون δ_D تابع نیم پیوسته پایینی است. بنابراین،

$$\delta_D(-\bar{x}) = \delta_D^{**}(-\bar{x}) = \sup_{v \in \text{dom} \delta_D^*} [v(-\bar{x}) - \delta_D^*(v)] \leq 0$$

با توجه به رابطه ۱.۱ $-\bar{x} \in D$. به طور مشابه با قرار دادن $v = 0$ داریم: $-\bar{x} \in C$ ، بنابراین

□

$-\bar{x} \in C \cap D$ لذا $K \neq \emptyset$.

لم ۴.۱.۲. فرض کنیم C و D دو زیرمجموعه‌ی محدب بسته از فضای باناخ X باشند. اگر $C \cap D \neq \emptyset$

آن‌گاه:

$$Epi\sigma_{C \cap D} = cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$$

برهان. فرض کنیم $K = C \cap D \neq \emptyset$ و $(u, \alpha) \in (Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$ باشد.

در این صورت $v, w \in X^*$ و $\beta, \delta \in \mathbb{R}$ موجودند به‌طوری‌که:

$$\alpha = \beta + \delta, u = v + w \text{ و } (w, \delta) \in Epi\sigma_C, (v, \beta) \in Epi\sigma_D$$

برای هر $x \in D$ ، $v(x) \leq \beta$ و برای هر $x \in C$ ، $w(x) \leq \delta$

در نتیجه اگر $x \in K := C \cap D$ دلخواه باشد، داریم:

$$u(x) = (v + w)(x) \leq \beta + \delta = \alpha$$

$$\sup_{x \in K} u(x) \leq \alpha \text{ بنابراین}$$

در نتیجه با توجه به روابط ۲.۱ و ۳.۱ داریم:

$$(u, \alpha) \in Epi\sigma_K$$

بنابراین،

$$Epi\sigma_C + Epi\sigma_D \subset Epi\sigma_K$$

از طرفی واضح است $Epi\sigma_K$ به طور ضعیف ستاره بسته است، در نتیجه:

$$cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D) \subset Epi\sigma_K \quad (۹.۲)$$

برعکس، فرض کنیم

$$(u, \alpha) \notin cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D) \quad (۱۰.۲)$$

چون طبق فرض $K \neq \emptyset$ بنابر لم ۳.۱.۲ داریم:

$$(0, -1) \notin cl(Epi\delta_C^* + Epi\delta_D^*)$$

لذا با توجه به تذکر ۲۲.۱.۱:

$$(0, -1) \notin cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$$

بنابراین اگر قرار دهیم:

$$B = \{\delta(u, \alpha) + (1 - \delta)(0, -1) \in X^* \times \mathbb{R} \mid \delta \in [0, 1]\}$$

داریم:

$$B^\circ \cap cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D) = \emptyset$$

در غیراینصورت اگر $\delta_0 \in (0, 1)$ موجود باشد به طوریکه:

$$\delta_0(u, \alpha) + (1 - \delta_0)(0, -1) \in cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$$

یعنی :

$$(\delta_0 u, \delta_0 \alpha - (1 - \delta_0)) \in cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D) \quad (۱۱.۲)$$

همچنین با توجه به تذکر ۳۱.۱.۱ می‌دانیم:

$$\{0\} \times \mathbb{R}_+ \subset cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D) \quad (۱۲.۲)$$

بنابراین با توجه به روابط ۱۱.۲ و ۱۲.۲ داریم:

$$(\delta_0 u, \delta_0 \alpha) = (\delta_0 u, \delta_0 \alpha - (1 - \delta_0)) + (0, 1 - \delta_0) \in cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$(u, \alpha) = \frac{1}{\delta_0}(\delta_0 u, \delta_0 \alpha) \in cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$$

که این با رابطه‌ی ۱۰.۲ در تناقض است، بنابراین

$$B^\circ \cap (cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)) = \emptyset$$

حال با استفاده از قضیه‌ی جداسازی هان-باناخ $(x, \beta) \in X \times \mathbb{R}$

که $(x, \beta) \neq (0, 0)$ موجود است به طوریکه به ازای هر $\delta \in [0, 1]$ داریم:

$$[\delta(u, \alpha) + (1 - \delta)(0, -1)](x, \beta) < 0 \quad (۱۳.۲)$$

و به ازای هر $(v, \gamma) \in cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$

$$v(x) + \gamma\beta \geq 0 \quad (۱۴.۲)$$

با قرار دادن $\delta = 0$ در رابطه‌ی ۱۳.۲ داریم: $\beta > 0$.

همچنین با قرار دادن $\delta = 1$ در رابطه‌ی ۱۳.۲ خواهیم داشت:

$$u(x) + \alpha\beta < 0$$

یعنی:

$$u\left(\frac{-x}{\beta}\right) > \alpha \quad (۱۵.۲)$$

با استدلال مشابه لم ۳.۱.۲ و با استفاده از رابطه‌ی ۱۴.۲ داریم:

$$\frac{-x}{\beta} \in C \cap D = K$$

در نتیجه با توجه به روابط ۳.۱ و ۱۵.۲ داریم:

$$(u, \alpha) \notin Epi\sigma_K \quad (۱۶.۲)$$

از روابط ۱۰.۲ و ۱۶.۲ نتیجه می‌گیریم:

$$Epi\sigma_K \subset cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$$

بنابراین،

$$Epi\sigma_K = cl(Epi\sigma_C + Epi\sigma_D)$$

□

قضیه ۵.۱.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ و C و D دو زیرمجموعه‌ی محدب بسته از X باشند

به‌طوری‌که $C \cap D \neq \emptyset$. اگر به‌ازای هر $x \in C \cap D$

$$N_{C \cap D}(x) \subset \{v \in dom\sigma_{C \cap D} : (v, r) \in Epi\sigma_{C \cap D}\}$$

آن‌گاه $N_{C \cap D}(x)$ به طور ضعیف ستاره، بسته است.

برهان. فرض کنیم $x \in C \cap D$ دلخواه باشد. طبق لم ۴.۱.۲ $Epi\sigma_{C \cap D}$ به طور ضعیف ستاره، بسته

است. در نتیجه $A = \{v \in \text{dom}\sigma_{C \cap D} : (v, r) \in Epi\sigma_{C \cap D}\}$ نیز به طور ضعیف ستاره، بسته است.

برای نشان دادن بسته بودن $N_{C \cap D}(x)$ به طور ضعیف ستاره، کفایت نشان دهیم:

اگر $v_n \in N_{C \cap D}(x)$ دلخواه باشد و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v$ آنگاه $v \in N_{C \cap D}(x)$ یا به عبارت دیگر طبق

تعریف:

$$N_{C \cap D}(x) = \{v \in X^* : \sigma_{C \cap D}(v) = v(x)\}$$

نشان دهیم که $\sigma_{C \cap D}(v) = v(x)$

از طرفی چون $\sigma_{C \cap D}(v_n) \leq \sigma_{C \cap D}(v_n)$ با توجه به رابطه‌ی ۳.۱ داریم: $(v_n, \sigma_{C \cap D}(v_n)) \in$

$Epi\sigma_{C \cap D}$. در نتیجه $v_n \in A$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v$ بسته است در نتیجه $v \in A$ بنابراین،

$$v \in \text{dom}\sigma_{C \cap D}$$

یعنی می‌توان $\sigma_{C \cap D}(v)$ تعریف کرد. از طرف دیگر $v_n \in N_{C \cap D}(x)$ است در نتیجه $\sigma_{C \cap D}(v_n) =$

$v_n(x)$. از طرفی $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v$ و $\sigma_{C \cap D}(v)$ نیز یک تابع پیوسته است بنابراین، $\sigma_{C \cap D}(v) = v(x)$

یعنی $v \in N_{C \cap D}$ به عبارت دیگر $N_{C \cap D}(x)$ به طور ضعیف ستاره، بسته است. $\square$

نتیجه ۶.۱.۲. فرض کنیم X یک فضای باناخ و C و D دو زیرمجموعه‌ی محدب بسته از X باشند و

$$0 \in C \cap D \text{ اگر به ازای هر } x \in C \cap D$$

$$N_{C \cap D}(x) \subset \{v \in \text{dom}\sigma_{C \cap D} : (v, r) \in Epi\sigma_{C \cap D}\}$$

آنگاه $-(C \cap D)^+$ بسته است.

برهان. بنا به قضیه‌ی ۵.۱.۲ به ازای هر $x \in C \cap D$ ، $N_{C \cap D}(x)$ به طور ضعیف ستاره، بسته است. با

توجه به فرض $0 \in C \cap D$ در نتیجه $N_{C \cap D}(0)$ نیز به طور ضعیف ستاره، بسته است.

بنابراین با روابط ۱۵.۱ و ۱۷.۱ داریم:

$$N_{C \cap D}(0) = \{u \in X^* : u(y) \leq 0, \forall y \in C \cap D\} = -(C \cap D)^+$$

□

لذا $-(C \cap D)^+$ به طور ضعیف ستاره، بسته است.گزاره ۷.۱.۲. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند، $S = \mathbb{R}_+^m \subset Y$ ، $g : X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته، C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب بسته از X و $D := \{x \in X : -g(x) \in S\}$ یک زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب بسته از X باشد.اگر $K := C \cap D \neq \emptyset$ باشد، داریم:

$$Epi\sigma_D = w^* - cl\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*\right) \quad (۱۷.۲)$$

بعلاوه

$$Epi\sigma_K = w^* - cl\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^* + Epi\sigma_C\right) \quad (۱۸.۲)$$

که در آن

$$S^+ := \{\lambda \in Y^* : \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\}$$

برهان. فرض کنیم

$$(u, r) \in \bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^* \quad (۱۹.۲)$$

دلخواه باشد. در این صورت $\lambda \in S^+$ موجود است به‌طوری‌که:

$$(u, r) \in Epi(\lambda g)^*$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی ۳.۱، $(\lambda g)^*(u) \leq r$.

لذا با استفاده از رابطه‌ی ۵.۱ داریم:

$$(\lambda g)^*(u) = \sup_{x \in \text{dom}(\lambda g)} \{u(x) - (\lambda g)(x)\} \leq r$$

بنابراین به ازای هر $x \in X$ خواهیم داشت :

$$u(x) - (\lambda g)(x) \leq r \quad (۲۰.۲)$$

حال اگر $x \in D = \{x \in X : -g(x) \in S\}$ باشد. آن گاه $-g(x) \in S = \mathbb{R}_m^+$. و چون طبق فرض

$$\lambda \in S^+ = \{\lambda \in Y^* : \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\}$$
 داریم:

$$\lambda(-g(x)) \geq 0$$

در نتیجه:

$$(\lambda g)(x) \leq 0 \quad (۲۱.۲)$$

با توجه به روابط ۲۰.۲ و ۲۱.۲، به ازای هر $x \in D$ خواهیم داشت:

$$u(x) \leq r$$

یعنی با توجه به رابطه‌ی ۳.۱، $(u, r) \in \text{Epi}\sigma_D$.

در نتیجه داریم:

$$\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^* \subset \text{Epi}\sigma_D$$

از طرفی چون $\text{Epi}\sigma_D$ مجموعه‌ی به طور ضعیف ستاره بسته در $X^* \times \mathbb{R}$ است،

نتیجه می‌گیریم که :

$$w^* - cl\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*\right) \subset \text{Epi}\sigma_D \quad (۲۲.۲)$$

برعکس، فرض کنیم که $(u, r) \notin w^* - cl\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*\right)$.

از طرفی $\sigma_D(0) = \sup_{x \in D} x(0) = 0 \not\leq -1$ که با توجه به رابطه‌ی ۳.۱ نتیجه می‌گیریم: $(0, -1) \notin$

$\text{Epi}\sigma_D$

لذا با توجه به رابطه‌ی ۲۲.۲ نتیجه می‌گیریم:

$$(0, -1) \notin w^* - cl\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*\right)$$

اگر قرار دهیم:

$$B = \{\alpha(u, r) + (1 - \alpha)(0, -1) \in X^* \times \mathbb{R} : 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

مانند اثبات لم ۴.۱.۲ نتیجه می‌گیریم:

$$B^\circ \cap w^* - cl\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*\right) = \emptyset$$

حال با استفاده از قضیه‌ی جداسازی هان-باناخ $(0, 0) \neq (x, s) \in X \times \mathbb{R}$ موجود است به طوریکه به ازای هر $\alpha \in [0, 1]$ داریم:

$$[\alpha(u, r) + (1 - \alpha)(0, -1)](x, s) < 0 \quad (۲۳.۲)$$

و به ازای هر $(v, t) \in w^* - cl\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*\right)$ داریم:

$$v(x) + ts \geq 0 \quad (۲۴.۲)$$

با قرار دادن $\alpha = 0$ در رابطه‌ی ۲۳.۲ داریم: $(0, -1)(x, s) < 0$.

در نتیجه $-s < 0$ یعنی: $s > 0$

و همین‌طور با قرار دادن $\alpha = 1$ در رابطه‌ی ۲۳.۲ داریم: $(u, r)(x, s) < 0$.
بنابراین،

$$u(x) + rs < 0 \quad (۲۵.۲)$$

با قرار دادن $x = sx_0$ در رابطه‌ی ۲۵.۲ داریم:

$$u(sx_0) + rs < 0$$

با ضرب طرفین در (-1) داریم:

$$(u(-x_0) - r)s > 0$$

و چون $s > 0$ بدست آوردیم، نتیجه می‌گیریم:

$$u(-x_0) > r \quad (۲۶.۲)$$

با جای‌گذاری $x = sx_0$ در رابطه‌ی ۲۴.۲ داریم:

$$(v(x_0) + t)s \geq 0$$

با ضرب طرفین در (-1) نتیجه می‌گیریم:

$$(v(-x_0) - t)s \leq 0$$

از طرفی $s > 0$ بدست آوردیم، بنابراین به ازای هر $(v, t) \in w^* - cl(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(g)^*)$ خواهیم داشت:

$$v(-x_0) - t \leq 0 \quad (27.2)$$

همچنین برای هر $\lambda \in S^+$ و هر $v \in dom(\lambda g)^*$ داریم:

$$(\lambda g)^*(v) \leq (\lambda g)^*(v)$$

در نتیجه با استفاده از رابطه‌ی ۳.۱ داریم:

$$(v, (\lambda g)^*(v)) \in w^* - cl(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*)$$

لذا با توجه به رابطه‌ی ۲۷.۲ به ازای هر $v \in dom(\lambda g)^*$ و هر $\lambda \in S^+$ داریم:

$$v(-x_0) - (\lambda g)^*(v) \leq 0$$

چون (λg) یک تابع پیوسته است،

$$(\lambda g)(-x_0) = (\lambda g)^{**}(-x_0)$$

با توجه به رابطه‌ی ۵.۱ به ازای هر $\lambda \in S^+$ داریم:

$$(\lambda g)(-x_0) = (\lambda g)^{**}(-x_0) = \sup_{v \in dom(\lambda g)^*} [v(-x_0) - (\lambda g)^*(v)] \leq 0$$

در نتیجه:

$$(\lambda g)(-x_0) \leq 0$$

بنابراین با توجه به مجموعه‌ی $S = \mathbb{R}_+^m$ خواهیم داشت:

$$-g(-x_0) \in S$$

که با توجه به تعریف $D = \{x \in X : -g(x) \in S\}$ نتیجه می‌گیریم:

$$-x_0 \in D$$

همچنین با توجه به رابطه‌ی ۲۶.۲ داریم: $u(-x_0) > r$

در نتیجه با استفاده از رابطه‌ی ۳.۱ خواهیم داشت:

$$(u, r) \notin \text{Epi}\sigma_D$$

بنابراین،

$$\text{Epi}\sigma_D \subset w^* - \text{cl}\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*\right)$$

در نتیجه اگر D ناتهی باشد، داریم:

$$\text{Epi}\sigma_D = w^* - \text{cl}\left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*\right)$$

اثبات عبارت ۱۸.۲ با توجه به لم ۴.۱.۲، تذکر ۲۲.۱.۱ و رابطه‌ی ۱۷.۲ بدیهی است. $\square$

گزاره ۸.۱.۲. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S \subset Y$ یک مخروط محدب بسته باشد که لزوماً درونش ناتهی نیست،

$$S^+ := \{\lambda \in Y^* : \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\}$$

و $g : X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته باشد. برای هر $x \in X$ داریم:

$$(D - x)^\circ = \tilde{M}(x)$$

که D مجموعه‌ی محدب بسته‌ای است، که به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$D := \{x \in X : -g(x) \in S\} \quad (28.2)$$

برهان. فرض کنیم $u \in (D - x)^\circ$ دلخواه باشد. در این صورت با توجه به تعریف:

$$(D - x)^\circ = \{v \in X^* : v(y - x) \leq 0, \forall y - x \in (D - x)\}$$

به ازای هر $aw \in (D - x)$

$$u(w) \leq 0$$

به عبارت دیگر به ازای هر $d \in D$ خواهیم داشت:

$$u(d - x) \leq 0$$

چون $u \in X^*$ در نتیجه u خطی است. بنابراین به ازای هر $d \in D$,

$$u(d) \leq u(x)$$

در نتیجه:

$$\sup_{d \in D} u(d) \leq u(x)$$

لذا با توجه به رابطه‌ی ۲.۱، $\sigma_D(u) \leq u(x)$

روابط بالا برگشت‌پذیر هستند. بنابراین،

$$\sigma_D(u) \leq u(x) \text{ اگر و تنها اگر } u \in (D - x)^\circ$$

$\sigma_D(u) \leq u(x)$ با توجه به رابطه‌ی ۳.۱ معادل است با $(u, u(x)) \in \text{Epi} \sigma_D$.

از طرفی طبق گزاره ۷.۱.۲ اگر $D \neq \emptyset$ داریم:

$$\text{Epi} \sigma_D = w^* - \text{cl} \left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^* \right)$$

در نتیجه:

$$(u, u(x)) \in w^* - \text{cl} \left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^* \right) \text{ اگر و تنها اگر } u \in (D - x)^\circ$$

با توجه به تعریف $\tilde{M}(x)$ نتیجه می‌گیریم $u \in (D - x)^\circ$ اگر و تنها اگر $u \in \tilde{M}(x)$. بنابراین،

$$(D - x)^\circ = \tilde{M}(x)$$

□

گزاره ۹.۱.۲. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S = \mathbb{R}_+ \subset Y$ ، اگر

$$S^+ := \{\lambda \in Y^* : \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\},$$

$g : X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته، C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب بسته از X باشد و

D مجموعه‌ی محدب بسته‌ای به صورت:

$$D := \{x \in X : -g(x) \in S\},$$

به ازای $x \in D$ داریم:

$$\tilde{M}(x) = \{u \in X^* : u = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n\},$$

که در آن: $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n g)(x) = 0$ ، $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset S^+$ ، $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ ، $u_n \in \partial_{\varepsilon_n}(\lambda_n g)(x)$.

برهان. عبارت سمت راست حکم را برابر مجموعه‌ی A در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $u \in \tilde{M}(x)$

باشد. چون

$$\tilde{M}(x) = \{u \in X^* \mid (u, u(x)) \in w^* - cl(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*)\}$$

داریم:

$$(u, u(x)) \in w^* - cl(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*) \quad (29.2)$$

از طرفی با توجه به گزاره ۲۵.۱.۱ داریم:

$$Epi(\lambda g)^* = \bigcup_{\varepsilon \geq 0} \{(v, v(x) + \varepsilon - (\lambda g)(x)) : v \in \partial_{\varepsilon}(\lambda g)(x)\} \quad (30.2)$$

بنابراین با جای‌گذاری ۳۰.۲ در عبارت ۲۹.۲ داریم:

$$(u, u(x)) \in w^* - cl(\bigcup_{\lambda \in S^+} \bigcup_{\varepsilon \geq 0} \{(v, \varepsilon + v(x) - (\lambda g)(x)) : v \in \partial_{\varepsilon}(\lambda g)(x)\})$$

حال می‌توان دنباله‌های $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset S^+$ ، $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ ، $\{r_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$

و $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset X^*$ را با خاصیت

$$u_n \in \partial_{\varepsilon_n}(\lambda_n g)(x) (n = 1, 2, \dots)$$

یافت به طوریکه:

$$(u, u(x)) = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, \varepsilon_n + u_n(x) - (\lambda_n g)(x))$$

یعنی:

$$u = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (31.2)$$

و

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\varepsilon_n + u_n(x) - (\lambda_n g)(x)]$$

در نتیجه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\varepsilon_n + u_n(x) - (\lambda_n g)(x)]$$

بنابراین،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [\varepsilon_n - (\lambda_n g)(x)] = 0 \quad (32.2)$$

چون $x \in D$ فرض کردیم با توجه به تعریف $D := \{x \in X : -g(x) \in S\}$ نتیجه می‌گیریم

$-g(x) \in S$. بنابراین برای هر $n \geq 1$ داریم:

$$-(\lambda_n g)(x) \geq 0$$

از رابطه‌ی ۳۲.۲ و از اینکه داشتیم $-(\lambda_n g)(x) \geq 0$ ، برای هر $n \geq 1$ و $\varepsilon_n \geq 0$ نتیجه می‌شود:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n g)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0 \quad (33.2)$$

با توجه به روابط ۳۱.۲ و ۳۳.۲ نتیجه می‌گیریم $u \in A$. بنابراین،

$$\tilde{M}(X) \subseteq A$$

برعکس، فرض کنیم $u \in A$ باشد.

یعنی دنباله‌های $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ ، $\{r_n\}_{n \geq 1} \subset S^+$ و $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset X^*$ و $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset X^*$ با خاصیت:

$$u = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \text{ موجود باشد به طوریکه } u_n \in \partial_{\varepsilon_n}(\lambda_n g)(x)$$

$$\text{و } \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n g)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

چون $u_n \in \partial_{\varepsilon_n}(\lambda_n g)(x) (n = 1, 2, \dots)$ طبق تعریف:

$$\partial_\varepsilon f(a) = \{v \in X^* \mid f(x) - f(a) \geq v(x - a) - \varepsilon, \forall x \in \text{dom} f\}$$

به ازای هر $n \geq 1$ و $y \in D$ خواهیم داشت:

$$(\lambda_n g)(y) - (\lambda_n g)(x) \geq u_n(y - x) - \varepsilon_n \quad (۳۴.۲)$$

چون $y \in D$ با توجه به $D := \{x \in X : -g(x) \in S\}$ داریم:

$$-g(y) \in S$$

طبق فرض $S = \mathbb{R}_+$ در نتیجه $-g(y) \geq 0$ بنابراین برای هر $n \geq 1$ و $\lambda_n \in S^+$ داریم: $(\lambda_n g)(y) \leq 0$.

در نتیجه با توجه به اینکه $(\lambda_n g)(y) \leq 0$.

از رابطه‌ی ۳۴.۲ نتیجه می‌شود:

$$(\lambda_n g)(x) \leq u_n(x - y) + \varepsilon_n \quad (۳۵.۲)$$

از طرفی فرض کردیم که به ازای هر $y \in X$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(y) = u(y)$ همچنین داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n g)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$$

در نتیجه با توجه به رابطه‌ی ۳۵.۲ به ازای هر $y \in D$ داریم:

$$u(y - x) \leq 0$$

لذا طبق تعریف:

$$(D - x)^\circ = \{u \in X^*; u(y - x) \leq 0, \forall y - x \in (D - x)\}$$

نتیجه می‌شود:

$$u \in (D - x)^\circ$$

□

طبق گزاره‌ی ۸.۱.۲، $u \in \tilde{M}(x)$ در نتیجه $A \subset \tilde{M}(x)$ پس حکم برقرار است.

تعریف ۱۰.۱.۲. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S = \mathbb{R}_+ \subset Y$ ، $g : X \rightarrow Y$ یک تابع

S -محدب پیوسته باشد و

$$S^+ := \{\lambda \in Y^* : \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\}$$

برای هر $x \in X$ و $\lambda \in S^+$ تعریف می‌کنیم:

$$C_\lambda(x) := \text{Cone}\{\partial(\lambda g)(x) : (\lambda g)(x) = 0\} \quad (۳۶.۲)$$

۹

$$M(x) := \bigcup_{\lambda \in S^+} C_\lambda(x) \quad (۳۷.۲)$$

تذکر ۱۱.۱.۲. در تعریف ۱۰.۱.۲، بوضوح می‌بینیم $M(x)$ یک مخروط محدب در X^* با خاصیت $M(x) \subset \tilde{M}(x)$ می‌باشد.

برهان. برای اثبات محدب بودن مخروط $M(x)$ نشان می‌دهیم به ازای هر

$$\alpha, \beta \geq 0 \text{ و به ازای هر } y, z \in M(x)$$

$$\alpha y + \beta z \in M(x)$$

چون $y, z \in M(x)$ بنابراین طبق تعریف

$$M(x) = \bigcup_{\lambda \in S^+} C_\lambda(x) = \bigcup_{\lambda \in S^+} \text{cone}\{\partial(\lambda g)(x) : (\lambda g)(x) = 0\}$$

وجود دارد $\lambda_1, \lambda_2 \in S^+$ به طوریکه:

$$y \in C_{\lambda_1}(x) = \text{cone}\{\partial(\lambda_1 g)(x) : (\lambda_1 g)(x) = 0\}$$

$$z \in C_{\lambda_2}(x) = \text{cone}\{\partial(\lambda_2 g)(x) : (\lambda_2 g)(x) = 0\}$$

یعنی:

$$y = \sum_{i=1}^n \rho_i \partial(\lambda_1 g)(x_i); \quad (\lambda_1 g)(x_i) = 0$$

$$z = \sum_{i=1}^n \gamma_i \partial(\lambda_2 g)(x_i); \quad (\lambda_2 g)(x_i) = 0$$

چون به ازای هر $(\lambda_1 g)(x_i) = 0$ و $(\lambda_2 g)(x_i) = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) بنابراین به ازای هر $\alpha, \beta \geq 0$ و داریم: ($i = 1, 2, \dots, n$)

$$\alpha(\lambda_1 g)(x_i) = 0$$

$$\beta(\lambda_2 g)(x_i) = 0$$

در نتیجه داریم:

$$\sum_{i=1}^n \alpha(\lambda_1 g)(x_i) + \sum_{i=1}^n \beta(\lambda_2 g)(x_i) = 0$$

همچنین داریم:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i \alpha(\lambda_1 g)(x_i) + \sum_{i=1}^n \gamma_i \beta(\lambda_2 g)(x_i) = 0$$

به عبارت دیگر داریم:

$$\alpha \sum_{i=1}^n \rho_i (\lambda_1 g)(x_i) + \beta \sum_{i=1}^n \gamma_i (\lambda_2 g)(x_i) = 0$$

لذا،

$$(\alpha \sum_{i=1}^n \rho_i \lambda_1 + \beta \sum_{i=1}^n \gamma_i \lambda_2) g(x_i) = 0$$

با توجه به روابط ۳۶.۲ و ۳۷.۲ نتیجه می‌شود:

$$\partial(\alpha \sum_{i=1}^n \rho_i (\lambda_1 g)(x_i) + \beta \sum_{i=1}^n \gamma_i (\lambda_2 g)(x_i)) \in M(x)$$

چون ∂ خطی است داریم:

$$\alpha \sum_{i=1}^n \rho_i \partial(\lambda_1 g)(x_i) + \beta \sum_{i=1}^n \gamma_i \partial(\lambda_2 g)(x_i) \in M(x)$$

یعنی به ازای هر $y, z \in M(x)$ و به ازای هر $\alpha, \beta \geq 0$ داریم:

$$\alpha y + \beta z \in M(x)$$

در نتیجه $M(x)$ یک مخروط محدب است.

طبق گزاره ۸.۱.۲، $\tilde{M}(x) = (D - x)^\circ$ که D مجموعه‌ی محدب بسته‌ای است که به این صورت

تعریف می‌شود $D := \{x \in X : -g(x) \in S = \mathbb{R}_+\}$ و همچنین برای هر $x \in X$ و $\lambda \in S^+$

$$M(x) = \bigcup_{\lambda \in S^+} C_\lambda(x)$$

$$C_\lambda(x) := \text{Cone}\{\partial(\lambda g)(x) : (\lambda g)(x) = 0\}$$

با توجه به این توضیحات برای اثبات $M(x) \subset \tilde{M}(x)$ کافیست نشان دهیم که به ازای هر $\lambda \in S^+$

$$\partial(\lambda g)(x) \subset (D - x)^\circ \text{ زمانی که } (\lambda g)(x) = 0.$$

فرض کنیم $\lambda \in S^+$ دلخواه باشد و $(\lambda g)(x) = 0$. با توجه به تعریف داریم:

$$\partial(\lambda g)(x) := \{l \in X^* : (\lambda g)(y) \geq (\lambda g)(x) + l(y - x), (\forall y \in X)\}$$

$$= \{l \in X^* : (\lambda g)(y) \geq l(y - x), (\forall y \in X)\} \quad (38.2)$$

حال فرض کنیم که $y \in D \subset X$ دلخواه باشد، بنابراین با توجه به تعریف

$$D = \{x \in X : -g(x) \in S = \mathbb{R}_+\}$$

داریم:

$$-g(y) \in S = \mathbb{R}_+$$

بنابراین $-g(y) \geq 0$ و چون $\lambda \in S^+$ لذا داریم: $\lambda(-g(y)) \geq 0$ ، یعنی:

$$(\lambda g)(y) \leq 0 \quad (39.2)$$

در نتیجه طبق روابط ۳۸.۲ و ۳۹.۲ داریم:

$$\partial(\lambda g)(x) \subset \{l \in X^* : l(y - x) \leq 0, \forall y \in D\}$$

و با توجه به تعریف $(D - x)^\circ = \{l \in X^* : l(y - x) \leq 0, \forall y \in D\}$ نتیجه می‌گیریم: $\partial(\lambda g)(x) \subset (D - x)^\circ$

$$(D - x)^\circ$$

چون به ازای هر $\lambda \in S^+$ $\partial(\lambda g)(x) \subset (D - x)^\circ$ زمانی که $(\lambda g)(x) = 0$ باشد بنابراین،

$$M(x) = \bigcup_{\lambda \in S^+} C_\lambda(x) = \bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Cone}\{\partial(\lambda g)(x) : (\lambda g)(x) = 0\} \subset (D - x)^\circ$$

□

حال با توجه به گزاره ۸.۱.۲ داریم: $M(x) \subset \tilde{M}(x)$

حال با یک مثال نشان می‌دهیم که در حالت کلی $\tilde{M}(x) = M(x)$ برقرار نیست.

مثال ۱۲.۱.۲. فرض کنیم $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ به‌طوریکه:

$$g(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - y$$

$x = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ و $S = \mathbb{R}_+$ در اینصورت:

$$g(x) = g(0, 0) = 0$$

بنابراین به ازای هر $\lambda \in S^+ = \{\lambda \in Y^* : \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\}$ داریم:

$$\lambda g(x) = 0, \partial(\lambda g)(x) = \{(0, 0)\}$$

با توجه به تعریف داریم:

$$\partial(\lambda g)(x) = \{l \in X^* : (\lambda g)(w) \geq (\lambda g)(x) + l(w - x), (\forall w \in \mathbb{R}^2)\}$$

و چون به ازای هر $\lambda \in S^+$ ، $(\lambda g)(x) = 0$ لذا داریم:

$$\partial(\lambda g)(x) = \{l \in X^* : (\lambda g)(w) \geq l(w - x), (\forall w \in \mathbb{R}^2)\}$$

با توجه به تعریف $g(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - y$ به ازای هر $w \in \mathbb{R}^2$ ، $\lambda \in S^+$ داریم:

$$(\lambda g)(w) \geq 0$$

در نتیجه $\partial(\lambda g)(x) = \{(0, 0)\}$

بنابراین با توجه به تعریف:

$$C_\lambda(x) = \text{cone}\{\partial(\lambda g)(x) : (\lambda g)(x) = 0\}$$

به ازای هر $\lambda \in S^+$ داریم: $C_\lambda(x) = \{(0, 0)\}$

در نتیجه:

$$M(x) = \bigcup_{\lambda \in S^+} C_\lambda(x) = \{(0, 0)\}$$

با توجه به تعریف مجموعه‌ی $D = \{(x, y) \in X : -g(x, y) \in S\}$ این مجموعه عبارتست از زوج مرتب‌های به صورت (x, y) به طوریکه:

$$-g(x, y) = y - (x^2 + y^2)\frac{1}{2} \in S = \mathbb{R}_+$$

لذا خواهیم داشت:

$$D = \{(0, y) : y \geq 0\}$$

از طرفی طبق تعریف داریم:

$$(D - x)^\circ = \{u \in X^* : u(w - x) \leq 0, \forall w - x \in (D - x)\}$$

حال با توجه به تعریف مجموعه‌ی D ، $w = (0, y)$ که در آن $y \geq 0$

بنابراین داریم:

$$(D - x)^\circ = \{u \in X^* : u((0, y) - (0, 0)) \leq 0, \forall y \geq 0\} = -(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$$

با توجه به گزاره ۸.۱.۲ نتیجه می‌شود:

$$\tilde{M}(x) = (D - x)^\circ = -(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$$

بنابراین،

$$M(x) \neq \tilde{M}(x)$$

گزاره ۱۳.۱.۲. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ و $S = \mathbb{R}_+ \subset Y$ باشد. اگر

$$S^+ := \{\lambda \in Y^* : \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\},$$

$g : X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته و $\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*$ در $X^* \times \mathbb{R}$ به طور ضعیف ستاره بسته

باشد. در این صورت برای هر

$$x \in D := \{x \in X : -g(x) \in S\}$$

داریم:

$$M(x) = \tilde{M}(x) = (D - x)^\circ$$

برهان. فرض کنیم $x \in D$ دلخواه باشد. با توجه گزاره ۸.۱.۲ داریم:

$$\tilde{M}(x) = (D - x)^\circ$$

همچنین با توجه به تذکر ۱۱.۱.۲ $M(x) \subset \tilde{M}(x)$ پس کفایت ثابت کنیم $\tilde{M}(x) \subset M(x)$.

فرض کنیم که $u \in \tilde{M}(x)$ باشد، طبق تعریف $\tilde{M}(x)$:

$$\tilde{M}(x) = \{u \in X^* \mid (u, u(x)) \in w^* - cl(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*)\}$$

$$(u, u(x)) \in w^* - cl(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*) \quad \text{داریم:}$$

از طرفی طبق فرض داریم $\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*$ به طورضعیف ستاره بسته است، در نتیجه داریم:

$$w^* - cl(\bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*) = \bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*$$

بنابراین،

$$(u, u(x)) \in \bigcup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*$$

لذا $\lambda \in S^+$ وجود دارد به طوریکه: $(u, u(x)) \in Epi(\lambda g)^*$

با استفاده از رابطه‌ی ۳.۱ نتیجه می‌گیریم:

$$(\lambda g)^*(u) \leq u(x)$$

از طرفی با توجه به رابطه‌ی ۵.۱ به ازای هر $y \in D$ خواهیم داشت:

$$\sup\{u(y) - (\lambda g)(y)\} \leq u(x)$$

لذا

$$u(y) - (\lambda g)(y) \leq u(x)$$

بنابراین برای $x \in D$ نیز داریم:

$$u(x) - (\lambda g)(x) \leq u(x)$$

در نتیجه:

$$-(\lambda g)(x) \leq 0$$

همچنین با توجه به تعریف $D := \{x \in X : -g(x) \in S = \mathbb{R}_+\}$ ، $-(\lambda g)(x) \leq 0$ پس $(\lambda g)(x) = 0$ در نتیجه برای هر $y \in D$ داریم :

$$u(y) - u(x) \leq (\lambda g)(y) - (\lambda g)(x)$$

با توجه به رابطه‌ی ۶.۱،

$$u \in \partial(\lambda g)(x)$$

در نتیجه :

□

$$u \in M(x) = \bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Cone}\{\partial(\lambda g)(x) : (\lambda g)(x) = 0\}$$

پس حکم برقرار است.

فصل ۳

پوسته مخروطی قوی

در این فصل ابتدا به معرفی خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی می‌پردازیم. بعد از معرفی خواص انحرافی و به عبارتی بهترین تقریب تحمیلی، به رابطه‌ی خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی با خواص انحرافی می‌پردازیم.

۱.۳ خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم C_1 و C_2 دو مجموعه‌ی محدب بسته در فضای باناخ X بوده و $x \in C_1 \cap C_2$. آنگاه می‌گوییم $\{C_1, C_2\}$ در نقطه‌ی $x \in C_1 \cap C_2$ خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی دارد اگر:

$$(C_1 \cap C_2 - x)^\circ = (C_1 - x)^\circ + (C_2 - x)^\circ \quad (۱.۳)$$

تذکر ۲.۱.۳. گوییم جفت $\{C_1, C_2\}$ خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی دارد، اگر در هر نقطه‌ی $x \in C_1 \cap C_2$ دارای خاصیت ۱.۱.۳ باشد.

تذکر ۳.۱.۳. فرض کنیم X یک فضای باناخ و C_1 و C_2 دو زیرمجموعه‌ی محدب بسته از X باشند، اگر $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ آن‌گاه برای هر $x \in X$ داریم:

$$(C_1 - x)^\circ + (C_2 - x)^\circ \subset (C_1 \cap C_2 - x)^\circ$$

برهان. فرض کنیم $y_1 + y_2 \in (C_1 - x)^\circ + (C_2 - x)^\circ$ به طوریکه $y_1 \in (C_1 - x)^\circ$ و $y_2 \in (C_2 - x)^\circ$. در نتیجه با توجه به رابطه‌ی ۱۶.۱ برای هر $c_1 \in C_1$ و $c_2 \in C_2$ داریم:

$$\langle y_1, c_1 - x \rangle \leq 0 \quad (۲.۳)$$

و

$$\langle y_2, c_2 - x \rangle \leq 0 \quad (۳.۳)$$

حال فرض کنیم که $c' \in C_1 \cap C_2$ عنصری دلخواه باشد، در اینصورت چون $c' \in C_1$ و $c' \in C_2$ بنابراین c' در روابط ۲.۳ و ۳.۳ صدق می‌کند، یعنی:

$$\langle y_1, c' - x \rangle \leq 0 \quad (۴.۳)$$

و

$$\langle y_2, c' - x \rangle \leq 0 \quad (۵.۳)$$

با جمع نمودن روابط ۴.۳ و ۵.۳ داریم:

$$\langle y_1 + y_2, c' - x \rangle \leq 0$$

چون $c' \in C_1 \cap C_2$ عنصری دلخواه بود، بنابراین با توجه به رابطه‌ی ۱۶.۱ خواهیم داشت:

$$y_1 + y_2 \in (C_1 \cap C_2 - x)^\circ$$

یعنی برای هر $x \in X$ داریم:

$$(C_1 - x)^\circ + (C_2 - x)^\circ \subset (C_1 \cap C_2 - x)^\circ$$

□

در ادامه نشان می‌دهیم که خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی، مشخص‌کننده خواص انحرافی از بهترین تقریب می‌باشد.

۲.۳ خواص انحرافی در بهترین تقریب و رابطه‌ی آن با خواص اشتراکی پوسته مخروطی قوی

لم ۱.۲.۳. فرض کنیم X یک فضای هیلبرت، W یک زیرمجموعه‌ی محدب بسته از X ، $w_0 \in W$ و

$x \in X$ باشد. در این صورت $w_0 = P_W(x)$ اگر و تنها اگر $x - w_0 \in (W - w_0)^\circ$

□

برهان. به مرجع [8] صفحه‌ی 44 رجوع شود.

گزاره ۲.۲.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S \subset Y$ مخروط محدب بسته‌ای باشد که لزوماً درونش ناتهی نیست، $g : X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته، C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب بسته از X باشد و D یک مجموعه‌ی محدب بسته‌ای به صورت:

$$D := \{x \in X : -g(x) \in S\},$$

همچنین $x \in X$ و $x_0 \in K = C \cap D$ اگر به ازای یک $l \in \tilde{M}(x_0)$ داشته باشیم $x_0 = P_C(x - l)$ آن‌گاه $x_0 = P_K(x)$

برهان. فرض کنیم به ازای یک $l \in \tilde{M}(x_0)$ $x_0 = P_C(x - l)$ طبق لم ۱.۲.۳ داریم:

$$x - l - x_0 \in (C - x_0)^0$$

با توجه به گزاره ۸.۱.۲ و تذکر ۳.۱.۳ نتیجه می‌شود:

$$x - x_0 \in (C - x_0)^\circ + l \subset (C - x_0)^\circ + \tilde{M}(x_0) = (C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ \subset (K - x_0)^\circ$$

بنابراین،

$$x - x_0 \in (K - x_0)^\circ$$

□

لذا طبق لم ۱.۲.۳ داریم: $x_0 = P_K(x)$ در نتیجه حکم برقرار است.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S \subset Y$ مخروط محدب بسته‌ای باشد که لزوماً درونش ناتهی نیست، $g : X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته، C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب بسته از X باشد و D یک مجموعه‌ی محدب بسته‌ای به صورت:

$$D := \{x \in X : -g(x) \in S\},$$

اگر $x \in X$ و $x_0 \in K$ باشد. در اینصورت عبارات زیر معادلند:

الف: $\{C, D\}$ در نقطه x_0 دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی است.

ب: برای هر $x \in X$ اگر $x_0 = P_K(x)$ اگر و تنها اگر به ازای یک $l \in \tilde{M}(x_0)$ $x_0 = P_C(x - l)$

برهان. فرض کنیم $\{C, D\}$ در x_0 دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی باشد. بنابر گزاره

$$x_0 = P_K(x) \text{ آنگاه } x_0 = P_C(x - l), l \in \tilde{M}(x_0) \quad ۲.۲.۳$$

حال فرض کنیم که $x_0 = P_K(x)$ باشد، بنا بر لم ۱.۲.۳، $x - x_0 \in (K - x_0)^\circ$ از طرفی $\{C, D\}$

در x_0 دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی است،

پس با توجه به رابطه‌ی ۱.۳ می‌توانیم l_1 را در $(C - x_0)^\circ$ طوری پیدا کنیم که:

$$x - x_0 - l_1 \in (D - x_0)^\circ \quad (۶.۳)$$

با توجه به گزاره ۸.۱.۲ و رابطه‌ی ۶.۳ نتیجه می‌گیریم:

$$l := x - x_0 - l_1 \in \tilde{M}(x_0)$$

از طرفی $l_1 \in (C - x_0)^\circ$ لذا داریم:

$$x - l - x_0 = l_1 \in (C - x_0)^\circ$$

بنابر لم ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود:

$$x_0 = P_C(x - l)$$

یعنی (ب) برقرار است.

برعکس، فرض کنیم (ب) برقرار باشد و $z \in (K - x_0)^\circ$ دلخواه باشد و $x = z + x_0 \in X$ در نتیجه:

$$x - x_0 = z \in (K - x_0)^\circ$$

با استفاده از لم ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود:

$$x_0 = P_K(x)$$

از طرفی با توجه به فرض، $x_0 = P_C(x - l)$ لذا با استفاده از لم ۱.۲.۳ داریم:

$$x - l - x_0 \in (C - x_0)^\circ$$

در نتیجه بنابر گزاره ۸.۱.۲ خواهیم داشت:

$$z = x - x_0 = x - l - x_0 + l \in (C - x_0)^\circ + \tilde{M}(x_0) = (C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ$$

بنابراین،

$$(K - x_0)^\circ \subset (C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ \quad (۷.۳)$$

همچنین بنابر تذکر ۳.۱.۳ داریم:

$$(C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ \subset (K - x_0)^\circ \quad (۸.۳)$$

با استفاده از روابط ۷.۳ و ۸.۳ نتیجه می‌شود:

$$(K - x_0)^\circ = (C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ$$

بنابراین $\{C, D\}$ در نقطه‌ی x_0 دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی می‌باشد. $\square$

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S \subset Y$ مخروط محدب بسته‌ای باشد که لزوماً درونش ناتهی نیست، $g : X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته، C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب بسته از X باشد و D یک مجموعه‌ی محدب بسته‌ای به صورت:

$$D := \{x \in X : -g(x) \in S\},$$

اگر $\{C, D\}$ دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی باشد. در اینصورت برای هر $x \in X$

$$x_0 \in K := C \cap D \text{ موجود است به طوریکه به ازای یک } l \in \tilde{M}(x_0), x_0 = P_C(x - l).$$

برهان. فرض کنیم $x \in X$ دلخواه باشد. چون K یک مجموعه‌ی محدب بسته است، بنا به قضیه‌ی ۲۶.۱.۱ نتیجه می‌گیریم که K مجموعه‌ی چبیشف در X است. پس بهترین تقریب در K موجود و منحصر به فرد می‌باشد، بنابراین $x_0 \in K$ موجود است به طوریکه $x_0 = P_K(x)$ و چون طبق فرض $\{C, D\}$ دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی می‌باشد، پس در x_0 نیز دارای همین خواص بوده، در نتیجه بنا به قضیه ۳.۲.۳، به ازای یک $l \in \tilde{M}(x_0)$ ، $x_0 = P_C(x - l)$. $\square$

تعریف ۵.۲.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S \subset Y$ مخروط محدب بسته‌ای باشد که لزوماً درونش ناتهی نیست، $g : X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته، C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب بسته از X باشد و D مجموعه‌ی محدب بسته‌ای به صورت:

$$D := \{x \in X : -g(x) \in S\},$$

اگر $x \in X$ و $x_0 \in K := C \cap D$ باشد. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\partial\|x - x_0\| = \{v \in X^* : \|v\| = 1, v(x - x_0) = \|x - x_0\|\}$$

لم ۶.۲.۳. فرض کنیم X یک فضای باناخ، W یک زیرمجموعه‌ی محدب بسته از X ، $x \in X$ و $w_0 \in W$ باشد.

در این صورت $w_0 \in P_W(x)$ اگر و تنها اگر $f \in (W - w_0)^\circ$ موجود باشد به طوری که $\|f\| = 1$ و

$$f(w - w_0) = \|w - w_0\|$$

□

برهان. به مرجع [18, 19] رجوع شود.

قضیه ۷.۲.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S \subset Y$ مخروط محدب بسته‌ای باشد که لزوماً درونش ناتهی نیست، $g : X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته، C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب بسته از X باشد و D مجموعه‌ی محدب بسته‌ای به صورت:

$$D := \{x \in X : -g(x) \in S\},$$

اگر $x \in X$ و $x_0 \in K := C \cap D$ باشد و $\{C, D\}$ دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی باشد. در این صورت عبارات زیر معادلند:

$$\text{الف: } x_0 = P_K(x)$$

$$\text{ب: } 0 \in \partial\|x - x_0\| + (C - x_0)^\circ + \tilde{M}(x_0)$$

$$\text{پ: به ازای یک } l \in \tilde{M}(x_0), x_0 = P_C(x - l)$$

برهان. فرض کنیم $x_0 = P_K(x)$ باشد. در این صورت طبق لم ۶.۲.۳، $v \in X^*$ موجود است به طوری که:

$$v \in (K - x_0)^\circ, \|v\| = 1 \text{ و } v(x - x_0) = \|x - x_0\| \text{ که این ایجاب میکند } v \in X^* \text{ موجود است}$$

به طوری که $-v \in \partial\|x - x_0\|$ و $v \in (K - x_0)^\circ$. با توجه به اینکه $\{C, D\}$ در نقطه x_0 دارای

خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی است، $(K - x_0)^\circ = (C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ$. در نتیجه به ازای

$$\text{هر } v \in (K - x_0)^\circ, v = v_1 + v_2 \text{ وجود دارد به طوری که } v_1 \in (C - x_0)^\circ \text{ و } v_2 \in (D - x_0)^\circ$$

از طرفی با استفاده از گزاره ۸.۱.۲ داریم:

$$(D - x_0)^\circ = \tilde{M}(x_0)$$

در نتیجه $v_2 \in \tilde{M}(x_0)$ بنابراین خواهیم داشت:

$$v \in (C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ = (C - x_0)^\circ + \tilde{M}(x_0)$$

از طرفی داشتیم $-v \in \partial\|x - x_0\|$ بنابراین داریم:

$$0 = -v + v \in \partial\|x - x_0\| + (C - x_0)^\circ + \tilde{M}(x_0)$$

حال فرض کنیم که (ب) برقرار باشد، یعنی:

$$0 \in \partial\|x - x_0\| + (C - x_0)^\circ + \tilde{M}(x_0)$$

بنابراین $v_1 \in \partial\|x - x_0\|$ و $v_2 \in (C - x_0)^\circ + \tilde{M}(x_0)$ وجود دارد به طوریکه $v_1 + v_2 = 0$ از اینکه

$$\tilde{M}(x_0) = (D - x_0)^\circ \text{ و } v_2 \in (C - x_0)^\circ + \tilde{M}(x_0) \text{ داریم:}$$

$$v_2 \in (C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ = (K - x_0)^\circ \quad (۹.۳)$$

از آنجا که $\{C, D\}$ دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی می‌باشد، تساوی آخر برقرار است.

در نتیجه با توجه به ۹.۳، $v_2 \in (K - x_0)^\circ$

اکنون فرض کنیم که $K := C \cap D$ $y \in K$ دلخواه باشد. طبق تعریف داشتیم:

$$(K - x_0)^\circ = \{v_2 \in X^* \mid v_2(y - x_0) \leq 0, \forall y \in K\} \quad (۱۰.۳)$$

با استفاده از ۹.۳ و ۱۰.۳ برای هر $y \in K$ نتیجه می‌شود:

$$v_2(y - x_0) \leq 0 \quad (۱۱.۳)$$

از طرفی چون $v_1 \in \partial\|x - x_0\|$ و $v_1 = -v_2$ با توجه به رابطه‌ی ۱۱.۳ و تعریف ۵.۲.۳ داریم:

$$\|x_0 - y\| = v_1(x_0 - y) = 0 \quad (۱۲.۳)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی ۱۲.۳ خواهیم داشت:

$$\|x_0 - x\| = \|x_0 - x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|x_0 - y\| \leq \|x - y\|$$

در نتیجه برای هر $y \in K$ داریم:

$$\|x_0 - x\| \leq \|x - y\|$$

بنابراین،

$$\|x_0 - x\| \leq \inf_{y \in K} \|x - y\| = d(x, K) \leq \|x_0 - x\|$$

لذا

$$\|x - x_0\| = d(x, K)$$

حال بنا به تعریف بهترین تقریب $x_0 = P_K(x)$

اکنون فرض کنیم (پ) برقرار باشد، بنا به گزاره ۸.۱.۲ (الف) بدیهی است.

فرض کنیم (الف) برقرار باشد، یعنی $x_0 = P_K(x)$ از فرض قضیه $\{C, D\}$ در نقطه‌ی x_0 دارای

خواص اشتراکی پوسته مخروطی قوی است

$$x_0 = P_K(x) \text{ و در نتیجه بنا بر قضیه ۳.۲.۳ داریم: } x_0 = P_C(x - l)$$

قضیه ۸.۲.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S \subset Y$ مخروط محدب بسته‌ای باشد که

لزوما درونش ناتهی نیست، $g : X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته، C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی

محدب بسته از X باشد و D مجموعه‌ی محدب بسته‌ای به صورت:

$$D := \{x \in X : -g(x) \in S\},$$

اگر $x_0 \in K := C \cap D$ باشد عبارات زیر معادلند:

$$\text{الف: } (K - x_0)^\circ = (C - x_0)^\circ + M(x_0)$$

ب: به ازای هر $x \in X$ ، $x_0 = P_K(x)$ اگر و تنها اگر به ازای یک $l \in M(x_0)$ ، $x_0 = P_C(x - l)$

برهان. فرض کنیم به ازای یک $l \in M(x_0)$ ، $x_0 = P_C(x - l)$ بنا به لم ۱.۲.۳

داریم:

$$x - l - x_0 \in (C - x_0)^\circ$$

در نتیجه

$$x - x_0 \in (C - x_0)^\circ + l$$

از طرفی چون $l \in M(x_0)$ و با استفاده از فرض (الف) داریم:

$$x - x_0 \in (C - x_0)^\circ + l \subset (C - x_0)^\circ + M(x_0) = (K - x_0)^\circ$$

با استفاده دوباره از لم ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود:

$$x_0 = P_K(x)$$

حال فرض کنیم $x \in X$ و $x_0 = P_K(x)$ بنابر لم ۱.۲.۳ داریم:

$$x - x_0 \in (K - x_0)^\circ \quad (۱۳.۳)$$

با توجه به فرض (الف) و رابطه‌ی ۱۳.۳، $l \in M(x_0)$ وجود دارد به طوریکه $x - l - x_0 \in (C - x_0)^\circ$ و با استفاده از لم ۱.۲.۳ خواهیم داشت:

$$x_0 = P_C(x - l)$$

در نتیجه (ب) برقرار است.

برعکس، فرض کنیم که (ب) برقرار باشد و

$$z \in (K - x_0)^\circ \quad (۱۴.۳)$$

دلخواه باشد و $x = z + x_0 \in X$ در نتیجه $x - x_0 = z \in (K - x_0)^\circ$

بنابر لم ۱.۲.۳ داریم $x_0 = P_K(x)$ در نتیجه طبق (ب) یک $l \in M(x_0)$ وجود دارد به طوریکه

$$x_0 = P_C(x - l) \text{ دوباره بنابر لم ۱.۲.۳، } x - l - x_0 \in (C - x_0)^\circ \text{ در نتیجه داریم:}$$

$$z = x - x_0 = x - x_0 - l + l = x - l - x_0 + l \in (C - x_0)^\circ + M(x_0) \quad (۱۵.۳)$$

بنابراین از روابط ۱۴.۳ و ۱۵.۳ نتیجه می‌گیریم:

$$(K - x_0)^\circ \subset (C - x_0)^\circ + M(x_0)$$

از طرفی بنا به گزاره ۸.۱.۲ داریم:

$$M(x_0) \subset (D - x_0)^\circ$$

بنابراین،

$$(K - x_0)^\circ \subset (C - x_0)^\circ + M(x_0) \subset (C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ$$

اکنون با توجه به تذکر ۳.۱.۳ خواهیم داشت:

$$(K - x_0)^\circ \subset (C - x_0)^\circ + M(x_0) \subset (C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ \subset (K - x_0)^\circ$$

در نتیجه:

$$(K - x_0)^\circ = (C - x_0)^\circ + M(x_0)$$

□

نتیجه ۹.۲.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S \subset Y$ مخروط محدب بسته‌ای باشد که

لزوما درونش ناتهی نیست، $g: X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته،

$S^+ = \{\lambda \in Y^* : \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\}$ ، C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب بسته از X باشد و D

مجموعه‌ی محدب بسته‌ای به صورت:

$$D := \{x \in X : -g(x) \in S\}$$

اگر $x_0 \in K = C \cap D$ ، $\{C, D\}$ در نقطه‌ی x_0 دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی

مخروطی قوی و $\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*$ در $X^* \times \mathbb{R}$ به طور ضعیف ستاره بسته باشد. آن گاه گزاره‌های زیر

هم ارزند:

الف: $x_0 = P_K(x)$

ب: $0 \in \partial\|x - x_0\| + \partial(\lambda g)(x_0) + (C - x_0)^\circ, (\lambda g)(x_0) = 0$

پ: $0 \in \partial\|x - x_0\| + (C - x_0)^\circ + M(x_0)$

ت: به ازای یک $l \in M(x_0)$ $x_0 = P_C(x - l)$

برهان. چون $\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*$ در $X^* \times \mathbb{R}$ به طور ضعیف ستاره بسته است با توجه به گزاره ۱۳.۱.۲،
 $M(x_0) = \tilde{M}(x_0)$ در نتیجه بنابر قضیه ۷.۲.۳ (الف) به (ب) و (ت) به (الف) بدیهی است.

فرض کنیم (ب) برقرار باشد، بنابر تعریف:

$$M(x) = \bigcup_{\lambda \in S^+} \text{con}\{\partial(\lambda g)(x_0) : (\lambda g)(x_0) = 0\}$$

(پ) به طور بدیهی برقرار است.

حال فرض کنیم (پ) برقرار باشد، بنابر قضیه ۷.۲.۳ و با توجه به اینکه $M(x_0) = \tilde{M}(x_0)$ حکم

(ت) بدیهی است. $\square$

قضیه ۱۰.۲.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S \subset Y$ مخروط محدب بسته‌ای باشد که

لزوما درونش ناتهی نیست، $g : X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته،

$S^+ = \{\lambda \in Y^* : \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\}$ ، C یک زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب بسته از X باشد و D

مجموعه‌ی محدب بسته‌ای به صورت:

$$D := \{x \in X : -g(x) \in S\},$$

اگر $x_0 \in K = C \cap D$ ، $x_0 \in C \cap D$ در نقطه‌ی $\{C, D\}$ دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی

مخروطی قوی و $\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*$ در $X^* \times \mathbb{R}$ به طور ضعیف ستاره بسته باشد.

در این صورت به ازای یک $l \in M(x_0)$ $x_0 = P_C(x - l)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $y \in K$

$$\langle x - x_0, y - x_0 \rangle \leq 0$$

برهان. طبق فرض $\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*$ در $X^* \times \mathbb{R}$ به طور ضعیف ستاره بسته است در نتیجه با توجه

به گزاره ۱۳.۱.۲، $M(x_0) = \tilde{M}(x_0)$ بنابراین با توجه به نتیجه ۹.۲.۳ به ازای یک $l \in M(x_0)$

$x_0 = P_C(x - l)$ اگر و تنها اگر $x_0 = P_K(x)$ و با توجه به لم ۱.۲.۳، $x_0 = P_K(x)$ اگر و تنها اگر

$x - x_0 \in (K - x_0)^\circ$ لذا $x_0 = P_C(x - l)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $y \in K$ $\langle x - x_0, y - x_0 \rangle \leq 0$

$\square$

۰.

نتیجه ۱۱.۲.۳. فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S \subset Y$ مخروط محدب بسته‌ای باشد که لزوماً درونش ناتهی نیست، $g: X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته،

$$D := \{x \in X : -g(x) \in S\},$$

مجموعه‌ی محدب بسته‌ای به صورت:

اگر $x_0 \in K := C \cap D \subset X$ به طور ضعیف ستاره، بسته و $\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*$ در نقطه‌ی x_0 دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی باشد.

همچنین $\{x_1 - l, x_2 - l, \dots, x_n - l\}$ یک پایه برای زیرفضای n -بعدی C از X باشد، آن‌گاه C یک زیرفضای چبیشف است که برای هر $x \in X$ یک $l \in M(x_0)$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$P_K(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - l)$$

که اسکالره‌ای α_i جواب یکتا از معادلات نرمال است و به ازای $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ داریم:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i - l, x_j - l \rangle = \langle x - l, x_j - l \rangle$$

در حالت خاص اگر $\{x_1 - l, x_2 - l, \dots, x_n - l\}$ یک پایه قائم برای C باشد، آن‌گاه به ازای هر $x \in X$ و یک $l \in M(x_0)$ داریم:

$$P_K(x) = \sum_{i=1}^n \langle x - l, x_i - l \rangle (x_i - l)$$

برهان. فرض کنیم $x \in X$ و $y_0 \in C$ باشد. در اینصورت به ازای اسکالره‌ای α_i ، $y_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - l)$ با استفاده از قضیه‌ی ۱۰.۲.۳ اگر $y_0 = P_C(x - l)$ اگر و تنها اگر $\langle x - l - y_0, y \rangle = 0$ به ازای هر $y \in C$

که این معادل است با $\langle x - l - y_0, x_j - l \rangle = 0$ به ازای هر $(i, j = 1, 2, 3, \dots, n)$. یعنی:

$$\langle x - l - \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - l), x_j - l \rangle = 0$$

$$\langle x - l, x_j - l \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i (x_i - l), x_j - l \rangle$$

بنابراین،

$$\langle x - l, x_j - l \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle (x_i - l), x_j - l \rangle \quad (۱۶.۳)$$

در حالت خاص اگر $\{x_1 - l, x_2 - l, \dots, x_n - l\}$ یک پایه قائم برای C باشد آن گاه

$$\langle x_i - l, x_j - l \rangle = \delta_{ij} \quad (۱۷.۳)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱۶.۳ و ۱۷.۳ به ازای هر $(i = 1, 2, \dots, n)$ داریم:

$$\alpha_i = \langle x - l, x_i - l \rangle$$

در نتیجه:

$$P_C(x - l) = \sum_{i=1}^n \langle x - l, x_i - l \rangle (x_i - l)$$

بنابراین طبق نتیجه ۹.۲.۳ به ازای یک $l \in M(x_0)$ داریم:

$$P_K(x) = \sum_{i=1}^n \langle x - l, x_i - l \rangle (x_i - l)$$

□

فصل ۴

دوگان حدی

۱.۴ شرایط دوگان حدی برای بهترین تقریب

در سراسر این فصل فرض کنیم X و Y دو فضای باناخ باشند و $S \subset Y$ مخروط محدب بسته باشد که لزوماً درونش ناتهی نیست، $g: X \rightarrow Y$ یک تابع S -محدب پیوسته، $S^+ = \{\lambda \in Y^* : \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\}$ یک زیرمجموعه‌ی ناتهی محدب بسته از X باشد و D مجموعه‌ی محدب بسته‌ای به صورت:

$$D := \{x \in X : -g(x) \in S\},$$

در این فصل $(K - x)^\circ = \{u \in X^* : u(y - x) \leq 0, \forall (y - x) \in (K - x)\}$ را به صورت جملاتی از دنباله‌های ε -زیرتفاضلی‌ها بیان می‌کنیم.

همچنین شرایط دوگان حدی که با استفاده از ε -زیرشیب‌ها شرح داده شده‌است را مشاهده خواهیم کرد. در واقع شرایط دوگان حدی بهترین تقریب از $K := C \cap D$ بدون شرایط تحمیلی بیان شده در فصل سوم مشخص می‌کند.

در ادامه نشان می‌دهیم شرایط دوگان حدی، بهترین تقریب در شرایط ε -زیرشیب‌ها بدون خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی مشخص می‌کند.

لم ۱.۱.۴. فرض کنیم که $x \in K$ دلخواه باشد. در این صورت داریم:

$$(K - x)^\circ = \{u \in X^* \mid u = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n)\}$$

که در آن:

$\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset S^+$ و $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}, \{r_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ ، $v_n \in \partial_{r_n} \delta_C(x)$ ، $u_n \in \partial_{\varepsilon_n}(\lambda_n g)(x)$ به طوریکه:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n g)(x) = 0$$

برهان. عبارت سمت راست را برابر مجموعه‌ی A در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $u \in (K - x)^\circ$ باشد. در اینصورت طبق تعریف:

$$(K - x)^\circ = \{u \in X^* : u(y - x) \leq 0, \forall y - x \in K - x\}$$

به ازای هر $k \in K$ ، $u(k - x) \leq 0$ از طرفی چون $u \in X^*$ ، لذا u خطی است. بنابراین به ازای هر $k \in K$ ، $u(k) \leq u(x)$ در نتیجه:

$$\sup_{k \in K} u(k) \leq u(x)$$

لذا با توجه به رابطه‌ی ۲.۱ خواهیم داشت:

$$\sigma_K(u) \leq u(x)$$

طبق رابطه‌ی ۳.۱ نتیجه می‌گیریم:

$$(u, u(x)) \in \text{Epi} \sigma_K \quad (۱.۴)$$

از طرفی طبق تذکر ۷.۱.۲ داشتیم:

$$\text{Epi} \sigma_K = w^* - cl \left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^* + \text{Epi} \sigma_C \right) \quad (۲.۴)$$

با توجه به روابط ۱.۴ و ۲.۴ نتیجه می‌گیریم:

$$(u, u(x)) \in w^* - cl \left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^* + \text{Epi} \sigma_C \right) \quad (۳.۴)$$

از طرفی با توجه به گزاره ۲۵.۱.۱ و تذکر ۲۲.۱.۱ روابط زیر را داریم:

$$\text{Epi}(\lambda g)^* = \bigcup_{\varepsilon \geq 0} \{(v, \varepsilon + v(x) - (\lambda g)(x)) : v \in \partial_\varepsilon(\lambda g)(x)\} \quad (۴.۴)$$

و

$$\delta_C^* = \sigma_C \quad (۵.۴)$$

با توجه به ۴.۴ و ۵.۴ نتیجه می‌شود:

$$Epi\sigma_C = Epi\delta_C^* = \bigcup_{r \geq 0} \{(w, r + w(x) - \delta_C(x)) : w \in \partial_r \delta_C(x)\} \quad (۶.۴)$$

با جایگذاری روابط ۴.۴ و ۵.۴ در رابطه‌ی ۶.۴ بدست می‌آوریم:

$$(u, u(x)) \in w^* - cl \left(\bigcup_{\lambda \in S^+} \bigcup_{r \geq 0} \bigcup_{\varepsilon \geq 0} \{(v + w, \varepsilon + v(x) - (\lambda g)(x) + r + w(x) - \delta_C(x))\} : v \in \partial_\varepsilon (\lambda g)(x), w \in \partial_r \delta_C(x) \right) \quad (۷.۴)$$

با توجه به رابطه‌ی ۷.۴، $(u, u(x))$ متعلق به بستار مجموعه‌ی:

$$\bigcup_{\lambda \in S^+} \bigcup_{r \geq 0} \bigcup_{\varepsilon \geq 0} \{(v + w, \varepsilon + v(x) - (\lambda g)(x) + r + w(x) - \delta_C(x))\} : v \in \partial_\varepsilon (\lambda g)(x), w \in \partial_r \delta_C(x)$$

است.

لذا دنباله‌های $\{u_n\}_{n \geq 1} \subset S^+$ ، $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$ ، $\{r_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$

و $\{v_n\}_{n \geq 1} \subset X^*$ که به ازای $u_n \in \partial_{\varepsilon_n} (\lambda_n g)(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)

و $v_n \in \partial_{r_n} \delta_C(x)$ وجود دارد به طوریکه:

$$(u, u(x)) = w^* - \lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n + v_n, \varepsilon_n + r_n + u_n(x) + v_n(x) - (\lambda_n g)(x) - \delta_C(x)]$$

یعنی:

$$u = w^* - \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) \quad (۸.۴)$$

و

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\varepsilon_n + r_n + u_n(x) + v_n(x) - (\lambda_n g)(x) - \delta_C(x)] \quad (۹.۴)$$

با توجه به روابط ۸.۴، ۹.۴ به ازای $x \in K \subset C$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n(x) + v_n(x)] = u(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\varepsilon_n + r_n + u_n(x) + v_n(x) - (\lambda_n g)(x) - \delta_C(x)]$$

و چون $x \in C$ با توجه به رابطه‌ی ۱.۱، $\delta_C(x) = 0$ در نتیجه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [\varepsilon_n + r_n - (\lambda_n g)(x)] = 0 \quad (۱۰.۴)$$

از طرفی چون $x \in K \subset D = \{x \in X : -g(x) \in S\}$ بنابراین $-g(x) \in S = \mathbb{R}_+^m$ در نتیجه به ازای

$$\text{هر } n \geq 1, -(\lambda_n g)(x) \geq 0$$

با توجه به رابطه‌ی ۱۰.۴ و همینطور چون به ازای هر $n \geq 1$ ، $\varepsilon_n \geq 0$ و $r_n \geq 0$ و $-(\lambda_n g)(x) \geq 0$

داریم:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n g)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0 \quad (۱۱.۴)$$

بنا به روابط ۸.۴ و ۱۱.۴ نتیجه می‌شود: $u \in A$

برعکس، فرض کنیم $u \in A$ باشد. بنابراین $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset S^+$ ، $\{r_n\}_{n \geq 1}, \{\varepsilon_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$ و

$\{v_n\}_{n \geq 1}, \{u_n\}_{n \geq 1} \subset X^*$ وجود دارد که به ازای $(n = 1, 2, 3, \dots)$ $u_n \in \partial_{\varepsilon_n}(\lambda_n g)(x)$ و $v_n \in \partial_{r_n} \delta_C(x)$

و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n g)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$ و $u = w^* - \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)$ به طوریکه:

چون به ازای $(n = 1, 2, 3, \dots)$ $u_n \in \partial_{\varepsilon_n}(\lambda_n g)(x)$ و $v_n \in \partial_{r_n} \delta_C(x)$ در نتیجه با توجه به رابطه‌ی

۶.۱ به ازای هر $y \in X$ و هر $n \geq 1$ داریم:

$$(\lambda_n g)(y) - (\lambda_n g)(x) \geq u_n(y - x) - \varepsilon_n \quad (۱۲.۴)$$

و

$$\delta_C(y) - \delta_C(x) \geq v_n(y - x) - r_n \quad (۱۳.۴)$$

از طرفی $x \in K \subset C$ بنابراین با توجه به رابطه‌ی ۱.۱، $\delta_C(x) = 0$ یعنی به ازای هر $y \in X$ و هر

$n \geq 1$ با توجه به رابطه‌ی ۱۳.۴ داریم:

$$\delta_C(y) \geq v_n(y - x) - r_n \quad (۱۴.۴)$$

حال اگر $y \in K \subset D = \{x \in X : -g(x) \in S\}$ آن گاه $-g(y) \in S = \mathbb{R}_+^m$. بنابراین به ازای هر $n \geq 1$ داریم $(\lambda_n g)(y) \leq 0$. در نتیجه با توجه به ۱۲.۴ داریم:

$$(\lambda_n g)(x) \leq (u_n + v_n)(x - y) + \varepsilon_n + r_n \quad (۱۵.۴)$$

از طرفی $y \in K \subset C$ در نتیجه با توجه به رابطه‌ی ۱.۱ داریم: $\delta_C(y) = 0$ با قرار نمودن $\delta_C(y) = 0$ در رابطه‌ی ۱۴.۴ داریم:

$$v_n(y - x) \leq r_n \quad (۱۶.۴)$$

با جمع نمودن روابط ۱۵.۴ و ۱۶.۴ داریم:

$$(\lambda_n g)(x) \leq (u_n + v_n)(x - y) + \varepsilon_n + r_n \quad (۱۷.۴)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱۷.۴ و چون به ازای هر $y \in X$

$$u(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n)(y)$$

و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n g)(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 0$ نتیجه می‌گیریم به ازای هر $y \in K$ ، $u(y - x) \leq 0$ لذا طبق تعریف:

$$(K - x)^\circ = \{u \in X^* : u(y - x) \leq 0, \quad \forall y - x \in K\}$$

نتیجه می‌شود:

$$u \in (K - x)^\circ$$

بنابراین،

$$A \subset (K - x)^\circ$$

□

قضیه ۲.۱.۴. فرض کنیم $x \in X$ و $x_0 \in K = C \cap \{x \in X : -g(x) \in S\}$ در اینصورت عبارات زیر معادلند:

الف: $x_0 = P_K(x)$

ب: برای دنباله‌های $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset S^+$, $\{\varepsilon_n\}_{n \geq 1}$, $\{r_n\}_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}_+$

و $\{v_n\}_{n \geq 1}, \{u_n\}_{n \geq 1} \subset X^*$ که $u_n \in \partial_{\varepsilon_n}(\lambda_n g)(x_0)$ و $v_n \in \partial_{r_n} \delta_C(x_0)$ ($n = 1, 2, \dots$) داریم:

$$x - x_0 = w^* - \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n g)(x) = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$$

برهان. فرض کنیم (الف) برقرار باشد، بنا بر لم ۱.۲.۳ $x_0 = P_K(x)$ اگر و تنها اگر $x - x_0 \in (K - x_0)^\circ$

در نتیجه (الف) با توجه به لم ۱.۱.۴ هم ارز (ب) است.

□

فصل ۵

بهترین تقریب تحمیل شده خطی

۱.۵ مفاهیم

در این فصل خواص انحرافی مرتبط با خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی که در فصل سوم بیان کردیم را در مواردی که D توسط محدودیت‌های به صورت نامساوی‌هایی که متناهی البعد در نظر گرفته شده است، بررسی خواهیم کرد.

در سراسر این فصل فرض کنیم X یک فضای باناخ و C یک زیرمجموعه‌ی محدب بسته از X .

$$D := \bigcap_{j=1}^n H_j, H_j = \{x \in X : \langle h_j, x \rangle \leq b_j\}, b_j \in \mathbb{R}, h_j \in X \setminus \{0\}$$

$$S^+ = \{\lambda \in Y^* : \lambda(s) \geq 0, \forall s \in S\}$$

و $K := C \cap (\bigcap_{j=1}^n H_j) \neq \emptyset$ باشد. با توجه به قضیه نمایش ریس برای هر $f_j \in X^*, h_j \in X \setminus \{0\}$ موجود است به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$ داریم:

$$f_j(x) = \langle x, h_j \rangle \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (1.5)$$

علاوه بر این

$$\|h_j\| = \|f_j\| = \sup\{|\langle f_j, x \rangle| : x \in X, \|x\| = 1\} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

در تمام این فصل $b = (b_1, b_2, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m, Y = \mathbb{R}^m$

$$S = \mathbb{R}_+^m := \{z = (z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{R}^m : z_i \geq 0 \ (\forall i = 1, 2, \dots, m)\}$$

در نظر می‌گیریم و نگاشت خطی $A : X \rightarrow \mathbb{R}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$Ax := (\langle h_1, x \rangle, \dots, \langle h_m, x \rangle) \quad (x \in X)$$

همچنین تابع $g : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ به ازای هر $x \in X$ به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$g(x) := (f_1(x) - b_1, \dots, f_m(x) - b_m)$$

اگر $x, y \in X$ دلخواه باشد، در این صورت داریم:

$$g(x) := (f_1(x) - b_1, \dots, f_m(x) - b_m)$$

$$g(y) := (f_1(y) - b_1, \dots, f_m(y) - b_m)$$

به ازای $0 \leq \lambda \leq 1$ خواهیم داشت:

$$\lambda g(x) = \lambda(f_1(x) - b_1, \dots, f_m(x) - b_m)$$

$$(1 - \lambda)g(y) = (1 - \lambda)(f_1(y) - b_1, \dots, f_m(y) - b_m)$$

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) = (f_1(\lambda x + (1 - \lambda)y) - b_1, \dots, f_m(\lambda x + (1 - \lambda)y) - b_m)$$

چون $f_j \in X^*$ ، در نتیجه خطی است. بنابراین با جمع سه عبارت بالا داریم:

$$\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) - g(\lambda x + (1 - \lambda)y) = (0, 0, \dots, 0) \in S = \mathbb{R}_+^m$$

لذا g یک تابع S -محدب پیوسته است که مولفه‌های آن به صورت :

$$g_i(x) := f_i(x) - b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m : x \in X) \quad (۲.۵)$$

و

$$I(x) := \{i \in \{1, 2, \dots, m\} : g_i(x) = 0\} \quad (\forall x \in K)$$

می‌باشد.

تذکر ۱.۱.۵. فرض کنیم $\lambda \in S^+$ ، $x_0 \in K$ و $(\lambda g)(x_0) = 0$ باشد. در این صورت:

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m,$$

$$(i = 1, 2, \dots, m) \text{ و } \lambda_i \geq 0 \text{ به ازای هر}$$

$$i \notin I(x_0) := \{i \in \{1, 2, \dots, m\} : g_i(x_0) = 0\} \quad (\forall x \in K)$$

گزاره ۲.۱.۵. فرض کنیم $x_0 \in K$ ، $\lambda \in S^+$ و $(\lambda g)(x_0) = 0$ باشد. آن گاه

$$\partial(\lambda g)(x_0) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \right\}$$

جایی که $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ که در آن $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, m$) و $\lambda_i = 0$ به ازای هر $i \notin I(x_0)$

برهان. فرض کنیم $\lambda \in S^+$ و $(\lambda g)(x_0) = 0$ باشد. با توجه به تذکر ۱.۱.۵، $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ که

در آن $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) و $\lambda_i = 0$ برای هر $i \notin I(x_0)$

با توجه به روابط ۱.۵، ۲.۵ و $(\lambda g)(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$ ($\forall x \in X$) داریم:

$$\begin{aligned} (\lambda g)(y - x_0) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(y - x_0) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(y - x_0) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle y - x_0, h_i \rangle \\ &= \langle y - x_0, \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \rangle \\ &= \langle \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i, y - x_0 \rangle \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$(\lambda g)(y - x_0) = \langle \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i, y - x_0 \rangle \quad (۳.۵)$$

حال با توجه به روابط ۱.۶ و ۳.۵ داریم:

$$\partial(\lambda g)(x_0) = \{l \in X : (\lambda g)(y) \geq (\lambda g)(x_0) + \langle l, y - x_0 \rangle \quad \forall y \in X\}$$

$$= \{l \in X : (\lambda g)(y - x_0) \geq \langle l, y - x_0 \rangle \quad \forall y \in X\}$$

$$= \{l \in X : \langle \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i, y - x_0 \rangle \geq \langle l, y - x_0 \rangle \quad \forall y \in X\}$$

$$\begin{aligned}
&= \{l \in X : \langle \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i, y \rangle \geq \langle l, y \rangle \quad \forall y \in X\} \\
&= \{l \in X : \langle \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i, y \rangle = \langle l, y \rangle \quad \forall y \in X\} \\
&= \{\sum_{i=1}^m \lambda_i h_i\}
\end{aligned}$$

□

لم ۳.۱.۵. $\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*$ به طور ضعیف ستاره، بسته است.

برهان. فرض کنیم $(u, r) \in \text{cl}(\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*)$.

بنابراین $\{(u_n, r_n)\}_{n \geq 1} \subset \bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*$ موجود است، به طوریکه

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n, r_n) = (u, r)$$

بنابراین

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = r \quad (۴.۵)$$

و برای هر $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u_n, x \rangle = \langle u, x \rangle \quad (۵.۵)$$

از طرفی چون $(u_n, r_n) \in \bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*$ در نتیجه برای هر

$(u_n, r_n) \in \text{Epi}(\lambda_n g)^*$ $\lambda_n \in S^+$ ، $(n = 1, 2, \dots)$ موجود است به طوریکه

در نتیجه با توجه به رابطه ی ۳.۱ داریم:

$$(\lambda_n g)^*(u_n) \leq r_n$$

حال بنا به رابطه ی ۵.۱ نتیجه می شود:

$$(\lambda_n g)^*(u_n) = \sup_{x \in \text{dom}(\lambda_n g)} \{u_n(x) - (\lambda_n g)(x)\} \leq r_n$$

بنابراین،

$$u_n(x) - (\lambda_n g)(x) \leq r_n$$

لذا

$$\langle u_n, x \rangle - \langle \lambda_n, g(x) \rangle \leq r_n \quad (\forall x \in X), \quad (\forall n \geq 1) \quad (۶.۵)$$

حال فرض کنیم $\lambda_n := (\lambda_{1,n}, \dots, \lambda_{m,n})$ ($n = 1, 2, \dots$) باشد، چون به ازای هر $n \geq 1$ $\lambda_n \in S^+$

لذا به ازای هر $(i = 1, \dots, m)$ $\lambda_{i,n} \geq 0$.

ادعا می‌کنیم دنباله‌های $\{\lambda_{j,n}\}_{n \geq 1}$ به ازای هر $(i = 1, \dots, m)$ کراندار است.

در غیر این صورت فرض کنیم $j \in \{1, \dots, m\}$ موجود باشد به‌طوری‌که $\{\lambda_{j,n}\}_{n \geq 1}$ کراندار نباشد،

بنابراین به ازای هر $n \geq 1$ $|\lambda_{j,n}| \geq n$. حال فرض کنیم $x_0 \in D = \{x \in X : -g(x) \in S\}$

باشد، در نتیجه $-g(x_0) \in S = \mathbb{R}_+^m$ و چون طبق تعریف تابع g ، $g(x_0) = (g_1(x_0), \dots, g_m(x_0))$

نتیجه به‌ازای $(i = 1, \dots, m)$ $-g_i(x) \geq 0$ و $\langle \lambda_{i,n}, g_i(x_0) \rangle \geq 0$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} -\langle \lambda_n, g(x_0) \rangle &= \sum_{i=1}^m -g_i(x_0) \lambda_{i,n} = \sum_{i=1, i \neq j}^m -g_i(x_0) \lambda_{i,n} + [-g_j(x_0)] \lambda_{j,n} \geq \\ &\sum_{i=1, i \neq j}^m -g_i(x_0) \lambda_{i,n} + [-g_j(x_0)] n \geq [-g_j(x_0)] n \quad (\forall n \geq 1) \end{aligned}$$

که این ایجاب می‌کند زمانیکه $n \rightarrow +\infty$ $-\langle \lambda_n, g(x_0) \rangle \rightarrow +\infty$. لذا با توجه به رابطه‌ی ۶.۵،

$r_n = +\infty$ که این با $r_n \rightarrow r$ در تناقض است. در نتیجه $\{\lambda_{j,n}\}_{n \geq 1}$ کراندار است. بنابراین طبق

قضیه‌ی بولتزانو وایرستراس، $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$ دارای زیردنباله‌ای همگراست.

بدون از دست رفتن کلیت مساله فرض کنیم $\lambda_n \rightarrow \lambda$ به‌ازای $\lambda \in \mathbb{R}^m$ چون $\lambda_n \in S^+$ در نتیجه

$\lambda \in S^+$ بنابراین با توجه به روابط ۴.۵، ۵.۵ و ۶.۵ داریم:

$$\langle u, x \rangle - \langle \lambda, g(x) \rangle \leq r \quad (\forall x \in X)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی ۳.۱ داریم:

$$(u, r) \in Epi(\lambda g)^* \subset \cup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*$$

یعنی $\cup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*$ بسته است.

□

قضیه ۴.۱.۵. فرض کنیم $x_0 \in K$ عبارات زیر معادلند:

الف: $\{C, D\}$ در نقطه‌ی x_0 دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی است.

ب: به ازای هر $x \in X$ ، $x_0 = P_K(x)$ اگر و تنها اگر $x_0 = P_C(x - \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i)$ که در آن $\lambda_i \geq 0$

و $(i = 1, 2, \dots, m)$ $\lambda_i = 0$ به ازای هر $i \notin I(x_0)$

برهان. فرض کنیم $x \in X$ دلخواه و $x_0 = P_K(x)$ باشد. بنا به لم ۳.۱.۵ $\cup_{\lambda \in S^+} Epi(\lambda g)^*$ در $X^* \times \mathbb{R}$

به طور ضعیف ستاره بسته است. لذا طبق گزاره ۱۳.۱.۲ نتیجه می‌شود: $M(x_0) = \tilde{M}(x_0)$

از طرفی با توجه به فرض $\{C, D\}$ در نقطه‌ی x_0 دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی

است در نتیجه با توجه به قضیه‌ی ۳.۲.۳ به ازای یک $l \in M(x_0)$ داریم: $x_0 = P_C(x - l)$

لذا با توجه به تعریف $M(x_0) = \bigcup_{\lambda \in S^+} C_\lambda(x_0)$ ، $\lambda \in S^+$ موجود است به‌طوری‌که

$$l \in C_\lambda(x_0) := \text{cone}\{\partial(\lambda g)(x_0) : (\lambda g)(x_0) = 0\}$$

در نتیجه با توجه به گزاره ۲.۱.۵، $l = \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i$ که در آن:

$\lambda_i \geq 0$ و $(i = 1, 2, \dots, m)$ $\lambda_i = 0$ به ازای هر $i \notin I(x_0)$

بنابراین $x_0 = P_C(x - \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i)$ که در آن $\lambda_i \geq 0$ و $(i = 1, 2, \dots, m)$ $\lambda_i = 0$ به ازای هر

$i \notin I(x_0)$

برعکس، فرض کنیم $x_0 = P_C(x - \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i)$ که در آن:

$\lambda_i \geq 0$ و $(i = 1, 2, \dots, m)$ $\lambda_i = 0$ به ازای هر $i \notin I(x_0)$

$\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ و $\lambda \in S^+$ چون $\lambda_i = 0$ برای هر $i \notin I(x_0)$ و $g_i(x_0) = 0$ برای هر

$i \in I(x_0)$ در نتیجه داریم:

$$(\lambda g)(x_0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_0) = \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i g_i(x_0) + \sum_{i \notin I(x_0)} \lambda_i g_i(x_0) = 0$$

لذا $(\lambda g)(x_0) = 0$ در نتیجه با توجه به گزاره ۲.۱.۵ داریم:

$$\partial(\lambda g)(x_0) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \right\}$$

بنابراین:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \in M(x_0) = \bigcup_{\lambda \in S^+} \text{cone}\{\partial(\lambda g)(x_0) : (\lambda g)(x_0) = 0\}$$

یعنی یک $l \in M(x_0)$ وجود دارد به طوریکه $x_0 = P_C(x-l)$ و چون طبق قضیه ۳.۱.۴، $\bigcup_{\lambda \in S^+} \text{Epi}(\lambda g)^*$ به طور ضعیف ستاره، بسته است لذا طبق گزاره ۱۳.۱.۲ داریم:

$$M(x_0) = \tilde{M}(x_0)$$

در نتیجه یک $l \in M(x_0)$ وجود دارد به طوریکه $x_0 = P_C(x-l)$ در نتیجه با توجه به قضیه ۳.۲.۳ داریم:

$$x_0 = P_K(x)$$

حال فرض کنیم (ب) برقرار باشد و $z \in (K - x_0)^\circ$ دلخواه باشد.

و $x = z + x_0 \in X$ آن گاه $x - x_0 = z \in (K - x_0)^\circ$ بنابر لم ۱.۲.۳

داریم: $x_0 = P_K(x)$ در نتیجه $x_0 = P_C(x - \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i)$ که در آن $\lambda_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, m$) و

$\lambda_i = 0$ برای هر $i \notin I(x_0)$ حال بنابر لم ۱.۲.۳ داریم:

$$x - \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i - x_0 \in (C - x_0)^\circ \quad (۷.۵)$$

که در آن $\lambda_i \geq 0$ و $\lambda_i = 0$ برای هر $i \notin I(x_0)$ حال فرض کنیم $\lambda := (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$

آن گاه $\lambda \in S^+$ چون $\lambda_i = 0$ به ازای هر $i \notin I(x_0)$ و $g_i(x_0) = 0$ به ازای هر $i \in I(x_0)$ در نتیجه:

$$(\lambda g)(x_0) = \sum_{i \notin I(x_0)} \lambda_i g_i(x_0) + \sum_{i \in I(x_0)} \lambda_i g_i(x_0) = 0 \quad (۸.۵)$$

لذا با توجه به گزاره ۲.۱.۵،

$$\partial(\lambda g)(x_0) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \right\} \quad (۹.۵)$$

در نتیجه با توجه به روابط ۸.۵ و ۹.۵ داریم:

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \in M(x_0) = \bigcup_{\lambda \in S^+} \text{cone}\{\partial(\lambda g)(x_0) : (\lambda g)(x_0) = 0\}$$

با توجه به گزاره ۸.۱.۲ و رابطه‌ی ۷.۵ داریم:

$$z = x - x_0 = x - \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i - x_0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i \in (C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ$$

در نتیجه:

$$(K - x_0)^\circ \subset (C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ$$

از طرفی با توجه به تذکر ۳.۱.۳ داریم:

$$(C - x_0)^\circ + (D - x_0)^\circ \subset (K - x_0)^\circ$$

بنابراین $\{C, D\}$ دارای خواص اشتراکی پوسته‌ی مخروطی قوی است.



مراجع

- [1] H.H. Bauschke, J.M. Borwein, W. Li, Strong conical hull intersection property, bounded linear regularity, Jameson property(G) and error bounds in convex optimization, *Math. Progr.* 86 (1999) 135-160.
- [2] R.S. Burachik, V. Jeyakumar, A simple closure condition for the normal cone intersection formula, *Proc. Amer. Math. Soc.* 133 (6) (2004) 1741-1748.
- [3] R.S. Burachik, V. Jeyakumar, A dual condition for the convex subdifferential sum formula with application formula with applications, *J. convex Anal.* 12 (2) (2005) 000.
- [4] R.S. Burachik, V. Jeyakumar, A new geometric condition for Fenchel duality in infinite dimensions, *Math. Progr, Ser. B*, 2005, to appear.
- [5] B. J. Conway .”A course in functional analysis .”, Springer-Verlag,(1985).
- [6] F. Deutsch. Some applications of functional analysis to approximation theory, doctoral dissertation, Brown University, Providence, RI, 1965.
- [7] F. Deutsch. The role of the strong conical hull intersection property in convex optimization and approximation. in: C.K. Chui, L.L. Schumaker (Eds), *Approximation Theory IX*, Vanderbilt University Press, Nashville, TN, 1998.
- [8] F. Deutsch, *Best approximation in inner Product Spaces*, Springer, New York, 2001.
- [9] F. Deutsch, W. Li, J. Swetits, Fenchel duality and the strong conical hull intersection property, *J. Optim. Theory Appl.* 102 (1999) 681-695.
- [10] F. Deutsch, W. Li, J.Ward. A dual approach to constrained interpolation from a convex subset of Hilbert space, *J. Approx. Theory* 90 (1997) 385-444.
- [11] F. Deutsch, W. Li, J.D. Ward. Best approximation from the intersection of a closed convex set and a polyhedron in Hilbert space, weak Slater conditions, and the strong conical hull intersection property, *SIAM J. Optim.* 10 (1999) 252-268.
- [12] J.B. Hiriart-Urruty, R.R. Phelps, Subdifferential calculus using ε -subdifferentials, *J. Funct. Anal.* 18 (1993) 154-166.
- [13] V.Jeyakumar, Characterizing set containments involving infinite convex constraints and reverse-convex constraints, *SIAM J. Optim.* 13 (2003) 947-959.
- [14] V.Jeyakumar, G.M. Lee, N. Dinh, New sequential Lagrange multiplier conditions characterizing optimality without constraint qualification for convex programs, *SIAM J. Optim.* 14 (2) (2003) 534-547.
- [15] V.Jeyakumar. H. Mohebi, A global approach to nonlinearly constrained best approximation, *Numer. Anal and Optim.* 26 (2) (2005), to appear.
- [16] V.Jeyakumar, A.M. Rubinov, B.M. Glover, Y. Ishizuka, Inequality system and global optimization, *J. Math. Anal. Appl.* 202 (1996) 900-919.
- [17] S. Kumaresan. Nested Interval theorem and its application, (1959).
- [18] I. Singer, *Best approximation in normal linear spaces by elements of linear subspaces*, Springer- Verlag. New York,(1970).
- [19] C. Zalinescu, *Convex analysis in general vector spaces*, World Scientific, London, (2002).

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

<i>Intersection</i>	اشتراک
<i>Perturbation</i>	انحراف
<i>Closed</i>	بسته
<i>Best approximation</i>	بهترین تقریب
<i>Lower</i>	پایینی
<i>Convex hull</i>	پوسته‌ی محدب
<i>Conical hull</i>	پوسته‌ی مخروطی
<i>Continuous</i>	پیوسته
<i>Functional</i>	تابع
<i>Constrained</i>	تحمیل شده
<i>Linear</i>	خطی
<i>Interior</i>	درونی
<i>Convergent sequence</i>	دنباله‌ی همگرا
<i>Subdifferential</i>	زیرتفاضلی
<i>Subgradient</i>	زیرشیب
<i>Proper</i>	سره
<i>Compact</i>	فشرده
<i>Euclidean space</i>	فضای اقلیدسی
<i>Dual space</i>	فضای دوگان
<i>Inner product space</i>	فضای ضرب داخلی
<i>Hilbert Space</i>	فضای هیلبرت
<i>Bounded</i>	کراندار
<i>Convex</i>	محدب
<i>Cone</i>	مخروط
<i>Polar cone</i>	مخروط قطبی
<i>Conjugate</i>	مزدوج

<i>Regularity</i>	منظم
<i>Bounded linear regularity</i>	منظم خطی کراندار
<i>Normal</i>	نرمال
<i>Semi- cotinuous</i>	نیم پیوسته
<i>Core</i>	هسته

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

<i>Best approximation</i>	بهترین تقریب
<i>Bounded</i>	کراندار
<i>Bounded linear regularity</i>	کراندار
<i>Closed</i>	بسته
<i>Compact</i>	فشرده
<i>Cone</i>	مخروط
<i>Conical hull</i>	پوسته‌ی مخروطی
<i>Convex hull</i>	پوسته‌ی محدب
<i>Constrained</i>	تحمیل شده
<i>Continuous</i>	پیوسته
<i>Convergent sequence</i>	دنباله همگرا
<i>Convex</i>	محدب
<i>Dual space</i>	فضای دوگان
<i>Euclidean space</i>	فضای اقلیدسی
<i>Functional</i>	تابع
<i>Hilbert Space</i>	فضای هیلبرت
<i>Inner product space</i>	فضای ضرب داخلی
<i>Interior</i>	درونی
<i>Intersection</i>	اشتراک
<i>Linear</i>	خطی
<i>Lower</i>	پایینی
<i>Normal</i>	نرمال
<i>Perturbation</i>	انحرافی
<i>Polar cone</i>	مخروط قطبی
<i>Proper</i>	سره
<i>Regularity</i>	منظم

<i>Semi-continuous</i>	نیم پیوسته
<i>Subdifferential</i>	زیرتفاضلی
<i>Subgradient</i>	زیرشیب

“ “ “ “ “ “ “ “ “



Abstract

In this thesis we study the strong conical hull intersection property completely characterizes the best approximation to x in a hilbert space X from the set

$$K := C \cap \{x \in X : -g(x) \in S\}$$

by a perturbation $x - l$ of x from the set C for some l in a convex cone of X . where C is a closed convex subset of X . S is closed convex cone which does not necessarily have non-empty interior. Y is a banach space and $g : X \rightarrow Y$ is a continuous S -convex function.

Keywords:

Strong conical hull intersection property, constrained best approximation, ε -subgradients, sequential dual conditions.



Shahrood University of Technology

*DISSERTATION SUBMITTED IN PARTIAL
FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR THE
DEGREE OF
MASTER OF SCIENCE IN PURE MATHEMATICS*

Characterizations of constrained best approximation

supervisor

Dr. Mahdi Iranmanesh

Advisor

by

Zeinab Shahini

Sep 2012