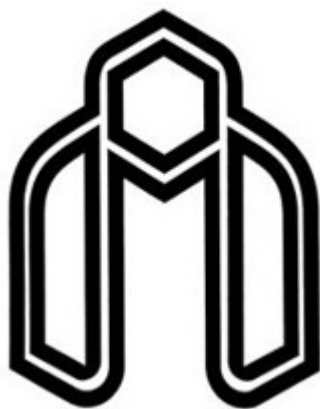




دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

متریک های راندرز ناوردای دوطرفه روی
گروه های لی

نگارش

مجتبی پرهیزکار کهنه اوغاز

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی
دکتر حمیدرضا سلیمی مقدم

استاد مشاور

آقای سیدرضا موسوی
دکتر سیدرضا حجازی

تیر ۱۳۹۱

قدردانی

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است و به شکر اندرش مزید نعمت. قبل از هر چیز خداوند را شاکرم که این موهبت را نصیب من نمود تا در وادی علم و معرفت، قدمی هرچند ناچیز بردارم. در این جا بر خود واجب می دانم زحمات فراوان مادر عزیزم که مرا در تمامی مراحل زندگی یاری می رساند ارج نهم. همچنین از اساتید عزیز و گران قدرم جناب آقای دکتر سلیمی مقدم و آقای دکتر هاشمی به خاطر کمک های بی دریغشان صمیمانه تشکر می کنم. بی شک نگارش این مهم جز با راهنمایی های ایشان میسر نبود. افزون بر این مراتب تشکر و قدردانی خود را از اساتید مشاورم آقای دکتر سیدرضا حجازی و آقای سیدرضا موسوی ابراز می دارم. از خداوند منان آرزوی سلامتی و توفیق روز افزون برای این اساتید خواهانم.

چکیده

در این پایان نامه ما به مطالعه هندسی متریک های راندرز ناوردای دو طرفه روی گروه های لی می پردازیم. ابتدا شرایط لازم و کافی برای این که متریک راندرز ناوردای دوطرفه از نوع بروالد باشد را بیان می کنیم و سپس نشان خواهیم داد متریک های راندرز ناوردای دوطرفه از نوع بروالد می باشد و در نهایت شرایط لازم و کافی برای اینکه متریک راندرز ناوردای چپ روی گروه های لی، ناوردای دوطرفه باشد را بیان می کنیم. مطالب ذکر شده در فصل اول از مراجع [۲] و [۷] گرفته شده و مطالب ذکر شده در فصل دوم از مراجع [۱۰] و [۸] می باشد. همچنین مطالب فصل سوم از مرجع [۳] و [۴] گرفته شده است.

واژه های کلیدی: متریک ناوردا، متریک راندرز، متریک ناوردای دو طرفه، گروه لی، فضای همگن

پیشگفتار

هندسه فینسلر اولین بار توسط پل فینسلر^۱ در سال ۱۹۱۸ در پایان نامه اش معرفی شد. این هندسه از انتگرال ساده شروع شده و بسیار نزدیک به حساب تغییرات می باشد. هندسه فینسلری تعمیمی از هندسه ریمانی نیست بلکه توضیح بهتری از هندسه ریمانی بدون محدودیت درجه دوم می باشد داده های هندسی در هندسه فینسلری شامل خانواده های هموار از نرم های مینکوفسکی، بجای خانواده ای از ضرب های داخلی می باشد. این خانواده از نرم های مینکوفسکی ساختار فینسلر را معرفی می کند. متریک های راندرز به عنوان حالت خاصی از متریک های فینسلری توسط ج.راندرز^۲ در سال ۱۹۴۱ معرفی شد سپس این متریک ها در نظریه میکروسکوپ های الکترونی توسط ر.س. اینگاردن^۳ به کار گرفته و متریک های راندرز نامیده شدند. متریک های راندرز راه حل هایی برای مسئله هدایت زرمelo^۴ ارائه می دهند اگر در مسئله زرمelo بااد مستقل از زمان باشد مسیری که کمترین زمان را خواستار است ژئودزیک های متریک راندرز می باشند. مطالعه ساختار های ناوردا روی گروه های لی و فضاها همگن یکی از مسائل مهم در هندسه دیفرانسیل می باشد. در منابع [۱، ۵] متریک های فینسلری ناوردا روی گروه های لی پوچ توان از مرتبه ۲ و منیفلدهای همگن مورد مطالعه قرار گرفته شده است. لذا بررسی متریک های فینسلری ناوردا از اهمیت خاصی برخوردار است. از میان متریک های ناوردا متریک های ناوردا دو طرفه ساده ترین نوع می باشند و ویژگی های هندسی ساده و خوبی دارند. در [۱۲] س.دنگ^۵ و ز.هو^۶ یک توصیف جبری از متریک های ناوردا دو طرفه ارائه داده اند.

فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی می پردازیم که در فصل های بعد مورد نیاز می باشند و در فصل دوم نظریه گروه های لی و همچنین متریک های ریمانی ناوردا روی فضای همگن را بررسی می کنیم

^۱Paul Finsler

^۲G.Randes

^۳R.S.Ingarden

^۴Zermelo

^۵S.Deng

^۶Z.Hou

و در فصل سوم به بیان شرایطی می پردازیم که تحت آن متریک های راندرز می توانند از نوع بروالد باشند. همچنین به بررسی ژئودزیک متریک راندرز می پردازیم.

فهرست مقالات مستخرج

- 1- مقاله " (β, α) -متریک پایا روی منیفلد های همگن" در چهل و سومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه تبریز.
- 2- مقاله "متریک های کروپینای دوسو پایا روی گروه های لی" در چهل و سومین کنفرانس ریاضی ایران، دانشگاه تبریز.

فهرست مطالب

۱	۱	متریک ریمانی و فینسلری
۲	۱.۱	مقدمه
۳	۲.۱	متریک های ریمانی
۱۲	۳.۱	متریک فینسلری
۲۵	۲	گروه های لی
۲۶	۱.۲	مقدمه
۲۶	۲.۲	نظریه گروه های لی
۳۸	۳.۲	متریک های ریمانی ناوردا روی فضای همگن
۴۵	۳	متریک های راندرز ناوردای دو طرفه روی گروه های لی
۴۶	۱.۳	مقدمه
۴۶	۲.۳	شرایط بروالد بودن متریک های راندرز ناوردا
۵۹	۳.۳	ژئودزیک
۶۷		مراجع
۶۹		فهرست الفبایی
۷۰		واژه نامه فارسی به انگلیسی

فصل ۱

متریک ریمانی و فینسلری

۱.۱ مقدمه

هندسه ای که جی اف بی ریمان^۱ آن را برای اولین بار در سال ۱۸۵۴ مطرح کرد بنام هندسه ریمانی مشهور است. در حقیقت تعمیم مطالبی بنام هندسه دیفرانسیل رویه‌هاست که توسط گاوس^۲ مورد مطالعه قرار گرفته بود. در هندسه دیفرانسیل رویه‌ها یک ضرب داخلی روی خانواده بردارهای مماس بر رویه تعریف می‌گردد که توسط این ضرب می‌توان طول بردارهای مماس بر رویه را بدست آورد. در حقیقت اولین کار ریمان تعمیم این ضرب بود که بعد ها منجر به تعریف انتگرال ریمان و متریک ریمان گردیده و موجبات تعریف هندسه ریمانی را پس از هندسه اقلیدسی فراهم نمود. اما نظر به اینکه این تابع در تعبیر پدیده‌های فیزیکی نقش موثری داشت، بعدها توسط دیگران مورد مطالعه قرار گرفت.

علاوه بر روش‌های اقلیدسی و ریمانی برای محاسبه طول یک بردار روش‌های دیگری نیز موجود است که نظر به کاربرد بسیار زیاد آن‌ها در علوم فنی مهندسی و فیزیک، در این جا به یکی از آن‌ها به نام متریک فینسلری اشاره می‌کنیم. مطالعه متریک فینسلری ابتدا توسط ریمان در سال ۱۸۵۴ آغاز گردید، ولی از آنجایی که او عقیده داشت مفهوم متریکی که بعدها به نام ریمان معروف شد برای مطالعه مفاهیم هندسی و ادامه کارهای گاوس مناسب تر است به مطالعه خود ادامه نداد. اما نظر به اینکه این تابع در تعبیر پدیده‌های فیزیکی نقش موثری داشت بعدها توسط دیگران مورد مطالعه قرار گرفت. از جمله ی این افراد پل فینسلر^۳ بود که در سال ۱۹۱۸ با استفاده از نتایج بدست آمده توسط استاد خودش کنستانتین کاراتئودوری^۴ و قضیه اویلر توانست تعریف مدونی از این متریک ارائه نماید. او در حقیقت شرایطی برای یک تابع مانند $F(x, y)$ روی کلاف مماس TM ارائه نمود که

^۱Georg Friedrich Bernhard Riemann

^۲Carl Friedrich Gauss

^۳Paul Finsler

^۴Constantin Caratheodory

در عین حالی که از تابع ریمان جامع تر بود خواص اصلی آن را نیز داشت. بنابراین می توان گفت که دوران شکوفایی هندسه بیست و دو قرن پس از افلاطون و اقلیدوس در اسکندریه توسط دانشمندان آلمانی، گاوس، ریمان و... صورت پذیرفت.

۲.۱ متریک های ریمانی

ابتدا به بیان قرار دادهایی می پردازیم که در سراسر این پایان نامه بکار برده شده است:

- ۱- جمع بندی اینشتین، یعنی اگر اندیسی یک بار در بالا و یک بار در پایین تکرار شود، آنرا جمع بندی شده می نامیم و از نوشتن علامت $\sum$ خودداری می نماییم.
- ۲- منیفلد ها هموار و متناهی البعد می باشند.

تعریف ۱.۲.۱. منظور از یک میدان برداری روی منیفلد M نگاشتی هموار مانند $X : M \rightarrow TM$ است به طوری که

$$\pi \circ X = id_M,$$

که در آن $\pi : TM \rightarrow M$ نگاشت تصویر می باشد.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد. در این صورت مجموعه ی همه میدان های برداری روی M را با $\chi(M)$ نمایش می دهیم.

خط راست چیست؟ قبلاً می دانستیم بارزترین خاصیت خط راست مسیری بین دو نقطه است که دارای کوتاه ترین طول است همچنین می دانیم خطی راست است که مسیر حرکت متحرکی باشد که شتاب آن صفر است. آیا مشتق گیری معمولی روی منیفلد کارساز است؟ مشتق به صورت عام قبلی تغییرات مقادیر را نشان می دهد در صورتی که برای یک میدان برداری علاوه بر طول، جهت نیز اهمیت دارد پس باید نوعی مشتق تعریف کرد که این نوع تغییرات را نشان دهد یا به عبارت دیگر

بتوان تغییرات یک میدان برداری را در امتداد یک بردار (میدان برداری دیگر) بدست آورد. لذا برای اینکه بتوانیم مفهوم شتاب یک منحنی روی یک منیفلد را تعمیم دهیم لازم است راهی پیدا کنیم که بتوان بدون توجه به مختصات از بردارها (یا میدانهای برداری) در طول یک منحنی مشتق گیری نماییم. به بیان ساده تر باید بتوانیم مقادیر دو بردار از دو فضای برداری مجاور و متفاوت را با یکدیگر مقایسه نماییم یا به عبارت دیگر دو فضای برداری مجاور را توسط یک مشتق گیری به یکدیگر "الصاق"^۵ نماییم. این موضوع اولین بار توسط لوی چویتا دانشمند ایتالیایی در سال ۱۹۱۷ مورد مطالعه قرار گرفت.

تعریف ۳.۲.۱. الصاق آفین یا الصاق خطی روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M نگاشتی مانند

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \mapsto \chi(M),$$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X Y.$$

می باشد که در شرایط زیر صدق می کند:

$$i) \nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z, \quad (\forall f, g \in C^\infty(M)).$$

$$ii) \nabla_X (aY + bZ) = a \nabla_X Y + b \nabla_X Z, \quad (\forall a, b \in R).$$

$$iii) \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y, \quad (\forall f \in C^\infty(M)).$$

لم ۴.۲.۱. فرض کنیم $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ یک کنج موضعی برای TM روی زیر مجموعه $U \subseteq M$ همراه با الصاق خطی ∇ باشد در این صورت

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E^k.$$

که هر Γ_{ij}^k یک تابع حقیقی روی M است که آن را علایم (ضرایب) کریستوفل^۶ ∇ نسبت به این کنج موضعی می نامیم.

^۵connection

^۶Christoffel Symbols

اثبات. اگر $X = X^i E_i, Y = Y^j E_j$ آنگاه با استفاده از تعریف الصاق داریم:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j E_j) \\ &= (XY^j) E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j \\ &= (XY^j) E_j + X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j,\end{aligned}$$

حال می توان فرض کرد که $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$ ، که Γ_{ij}^k یک تابع حقیقی روی M می باشد بنابراین:

$$\begin{aligned}\nabla_X Y &= XY^j E_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k \\ &= (XY^j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k.\end{aligned}$$

■

گزاره ۵.۲.۱. هر منیفلد دیفرانسیل پذیر یک الصاق خطی می پذیرد.

■

اثبات. به مرجع [۷] گزاره ۴.۵ رجوع شود.

مشتق گیری از یک میدان برداری در جهت یک میدان برداری دیگر را معرفی کردیم حال این سوال پیش می آید چطور می توان از یک میدان برداری در جهت یک منحنی مشتق گرفت.

قرارداد: فرض کنیم $\gamma : I \rightarrow M$ یک منحنی مشتق پذیر روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M باشد، فضای همه میدان های برداری در طول منحنی γ را با $\chi(\gamma)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه با الصاق خطی ∇ باشد و $\gamma : I \rightarrow$

M یک منحنی مشتق پذیر روی M باشد و عملگر

$$D_t : \chi(\gamma) \rightarrow \chi(\gamma),$$

در شرایط زیر صدق کند:

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tW, \quad (\forall a, b \in \mathbb{R}). \quad (a)$$

$$D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV, \quad (\forall f \in C^\infty). \quad (b)$$

$$D_tV(t) = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\tilde{V}, \quad \text{برای هر توسیع } \tilde{V} \text{ از } V \quad (c)$$

در این صورت برای هر $V \in \chi(\gamma)$ ، D_tV را مشتق کواریانت^۶ V در طول γ می نامیم.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه با الصاق خطی ∇ باشد میدان

برداری V را در طول منحنی $\gamma: I \rightarrow M$ نسبت به الصاق ∇ موازی گوییم هرگاه $D_tV = 0$.

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه با الصاق خطی ∇ باشد منحنی γ

روی M را ژئودزیک می نامیم هرگاه $D_t\dot{\gamma} = 0$ ، یعنی شتاب صفر باشد.

تعریف ۹.۲.۱. متریک ریمانی: فرض کنیم M یک منیفلد n -بعدی باشد. متریک ریمانی روی

منیفلد دیفرانسیل پذیر M عبارت است از یک میدان تانسوری g از نوع $(\mathfrak{2})$ بطوریکه در هر نقطه p

در M یک ضرب داخلی روی T_pM می باشد و این ضرب داخلی را با $g_p(X, Y)$ یا $\langle X, Y \rangle_p$ نمایش

می دهیم که g_p متقارن (یعنی $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$) و معین مثبت (یعنی

$\forall X \neq 0 \in T_pM, g_p(X, X) > 0$) باشد.

اگر $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ یک کنج موضعی برای TM و $\{\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n\}$ دوگان هم کنج آن باشد آنگاه

یک متریک ریمانی می تواند به فرم موضعی به صورت

$$g = g_{ij}\varphi^i \otimes \varphi^j,$$

نوشته شود که g_{ij} درایه های ماتریس ضرایب تعریف شده به صورت $g_{ij} = \langle E_i, E_j \rangle$ می باشند

بخصوص در یک کنج مختصاتی، g به صورت زیر نوشته می شود:

^۶Covariant Derivative

$$g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j.$$

چون g متقارن است در نتیجه $g_{ij} = g_{ji}$ لذا رابطه فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$g = g_{ij} dx^i dx^j.$$

تعریف ۱۰.۲.۱. منیفلد دیفرانسیل پذیر M همراه با متر ریمانی g را یک منیفلد ریمانی می نامیم و با علامت (M, g) نمایش می دهیم.

گزاره ۱۱.۲.۱. روی هر منیفلد دیفرانسیل پذیر (هاسدورف با پایه شمارا) می توان یک متریک ریمانی تعریف نمود.

اثبات . به مرجع [۷] فصل ۳ رجوع شود. ■

مثال . فضای $\mathbb{R}^n$ با مختصات اقلیدسی و پایه متعامد $\{\partial_i\}$ را برای فضای مماس در نظر می گیریم که

$$g_{ij}(p) = \langle \partial_i|_p, \partial_j|_p \rangle = \delta_{ij}, \quad (\forall p \in \mathbb{R}^n).$$

پس متریک ریمانی به صورت:

$$g = \delta_{ij} dx^i dx^j = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2.$$

می باشد و آن را متریک طبیعی^۸ یا متریک کانونی فضای اقلیدسی^۹ یا متریک اقلیدسی می نامیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد n -بعدی باشد. متریک شبه ریمانی روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M ، یک میدان تانسوری متقارن g از نوع $(2,0)$ است بطوریکه در هر نقطه p در M یک ضرب داخلی روی $T_p M$ می باشد و این ضرب داخلی را با $g_p(X, Y)$ یا $\langle X, Y \rangle_p$ نمایش می دهیم که در

^۸Natural metric

^۹Cononical metric

هر نقطه p در M ناتباهیده^{۱۰} باشد یعنی برای هر $Y \in T_p M$ ، $g_p(X, Y) = 0$ اگر و تنها اگر $X = 0$. هر متریک ریمانی، شبه ریمانی می باشد اما عکس آن برقرار نیست.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی (شبه ریمانی) همراه بالصاق خطی ∇ باشد. در این صورت الصاق خطی ∇ را نسبت به متر g سازگار می نامیم اگر برای هر سه میدان برداری Z, Y, X داشته باشیم:

$$X\langle Y, Z \rangle := \nabla_X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه بالصاق خطی ∇ باشد. میدان تانسوری τ از نوع $(2, 0)$ که به صورت

$$\begin{aligned} \tau : \chi(M) \times \chi(M) &\longmapsto \chi(M), \\ (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]. \end{aligned}$$

تعریف می شود را تاب الصاق ∇ می نامیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. الصاق خطی ∇ روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M متقارن نامیده می شود هر گاه تاب الصاق ∇ صفر شود. یعنی $\tau = 0$ یا به عبارت دیگر:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

نتیجه ۱۶.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه بالصاق خطی متقارن ∇ باشد و $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ یک کنج موضعی کلاف مماس TM روی زیر مجموعه $U \subseteq M$ باشد در این صورت :

$$\nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i = [E_i, E_j] = 0,$$

^{۱۰}Nondegeneracy

و این معادل با این است که $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی (شبه ریمانی) باشد. الصاق خطی ∇ روی M را الصاق ریمانی یا الصاق لوی چویتا^{۱۱} می نامیم هر گاه در شرایط زیر صدق کند:
الف) ∇ متقارن باشد.

ب) ∇ سازگار با متر ریمانی باشد.

قضیه ۱۸.۲.۱. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی (یا شبه ریمانی) باشد. در این صورت یک و تنها یک الصاق لوی چویتا وجود دارد.

اثبات. ابتدا نشان می دهیم چنین الصاقی در صورت وجود منحصر به فرد است. فرض کنیم ∇ یک الصاق لوی چویتا روی M باشد و $X, Y, Z \in \chi(M)$. با توجه به شرط g -سازگاری داریم:

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle = X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

$$\nabla_Y \langle Z, X \rangle = Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle,$$

$$\nabla_Z \langle X, Y \rangle = Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle,$$

حال با جایگذاری روابط حاصل از متقارن بودن ∇ در هر یک از روابط قبلی داریم:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle,$$

$$Y \langle Z, X \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle,$$

$$Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle,$$

حال با جمع کردن دو رابطه اول و کم کردن رابطه سوم از حاصل آن ها داریم:

^{۱۱} *Levi – Civita*

$$X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle = \nabla_X \langle Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

بنابراین:

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{\nabla} (X\langle Y, Z \rangle + Y\langle Z, X \rangle - Z\langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle) \quad (۱.۱)$$

حال فرض کنیم ∇^1, ∇^2 دو الصاق خطی متقارن و سازگار با متر g باشند پس هر دو باید در رابطه (۱.۱) صدق کنند. در نتیجه داریم:

$$\langle \nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z \rangle = 0, \quad (\forall X, Y, Z \in \chi(M)).$$

چون تساوی فوق برای هر Z برقرار است لذا با توجه به شرط ناتبه‌ی g بودن داریم:

$$\nabla_X^1 Y = \nabla_X^2 Y, \implies \nabla^1 = \nabla^2.$$

حال نشان می‌دهیم چنین الصاقی وجود دارد. برای این منظور از مختصات موضعی استفاده می‌کنیم. حال رابطه (۱.۱) را برای $X = \partial_i$ ، $Y = \partial_j$ و $Z = \partial_k$ محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle &= \frac{1}{\nabla} [\partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle + \partial_j \langle \partial_k, \partial_i \rangle - \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle \\ &\quad - \langle \partial_j, [\partial_i, \partial_k] \rangle - \langle \partial_k, [\partial_j, \partial_i] \rangle + \langle \partial_i, [\partial_k, \partial_j] \rangle], \\ \implies \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_k \rangle &= \frac{1}{\nabla} [\partial_i \langle \partial_j, \partial_k \rangle + \partial_j \langle \partial_k, \partial_i \rangle - \partial_k \langle \partial_i, \partial_j \rangle], \\ \implies \Gamma_{ij}^l g_{lk} &= \frac{1}{\nabla} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_l g_{ij}), \\ \implies \Gamma_{ij}^l &= \frac{1}{\nabla} g^{lk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_l g_{ij}). \end{aligned} \quad (۲.۱)$$

به وسیله این ضرایب روی هر چارت می‌توان یک الصاق خطی تعریف کرد. همچنین باتوجه به

رابطه (۲.۱) داریم :

$$\Gamma_{ij}^l = \Gamma_{ji}^l.$$

یعنی چنین الصاقی متقارن است. اکنون کافی است نشان دهیم: $\nabla g = 0$.

می دانیم ضرایب ∇g به صورت

$$g_{ij;k} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{il}.$$

می باشند. با استفاده از رابطه (۲.۱) داریم:

$$\Gamma_{ki}^l g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il} = \frac{1}{2}(\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{2}(\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) = \partial_k g_{ji}.$$

■

که نشان می دهد $g_{ij;k} = 0$ بنابراین $\nabla g = 0$.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی باشد. در این صورت برای هر $X, Y \in \chi(M)$

تانسور انحنای ریمانی M به صورت

$$R(X, Y) : \chi(M) \mapsto \chi(M)$$

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z + \nabla_{[X, Y]} Z.$$

می باشد که در آن ∇ الصاق ریمانی M می باشد و R نسبت به هر سه مولفه Z, Y, X ، C^∞ -خطی می باشد.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی n -بعدی، $p \in M$ ، $X, Y \in T_p M$ و

$\Pi = \text{span}\{X, Y\}$ یک زیر فضای دو بعدی از $T_p M$ باشد. در این صورت:

$$K(\Pi) = K(X, Y) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2}$$

را انحنای برشی^{۱۲} در نقطه p می نامیم.

^{۱۲}Sectional curvature

تعریف ۲۱.۲.۱. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی n -بعدی باشد و $p \in M$ انحنای ریچی عبارت است از انحنای برشی M که یک فرم دوخطی متقارن می باشد. اگر $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ یک پایه یکا متعامد $T_p M$ باشد آنگاه:

$$Ric(V, W) = tr(X \rightarrow R(X, V)W) = \sum_{i=1}^n g(R(e_i, V)W, e_i) \quad (\forall V, W \in T_p M).$$

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنیم (M, g) یک منیفلد ریمانی n -بعدی باشد و $p \in M$ اثر انحنای ریچی را انحنای اسکالر می نامیم که تنها به p وابسته است. پس انحنای اسکالر یک تابع بصورت $Scal : M \rightarrow R$ می باشد. حال اگر $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ یک پایه یکا متعامد $T_p M$ باشد آنگاه:

$$Scal = tr(Ric) = \sum_{i=1}^n g(Ric(e_i), e_i) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n g(R(e_i, e_j)e_j, e_i)$$

۳.۱ متریک فینسلری

در این بخش به تعریف متریک های فینسلری می پردازیم. متریک های فینسلری طبیعی ترین تعمیم متریک های ریمانی هستند که استفاده زیادی در مسائل کاربردی داشته و اخیرا مورد توجه بسیاری از ریاضیدانان کاربردی و محض قرار گرفته اند.

در منیفلد ریمانی (M, g) طول یک بردار مماس X با ارائه یک ضرب داخلی روی فضای مماس $T_p M$ محاسبه می گردد. این ضرب داخلی برگرفته از متریک ریمانی g را با علامت $g(X, Y) = g_{ij}X^iY^j$ نمایش دادیم که در آن $g_{ij}(x)$ ها توابعی حقیقی روی M هستند، که بستگی به نقطه $x \in M$ دارند یعنی $g_{ij} : M \rightarrow R$. حال می خواهیم یک ضرب داخلی تعریف کنیم که در آن طول یک بردار علاوه بر نقطه $x \in M$ به جهت آن نیز بستگی دارد. متریک برگرفته از این ضرب داخلی را متریک فینسلری می نامیم و با $g(X, Y) = g_{ij}X^iY^j$ نمایش می دهیم. در اینجا هر $g_{ij}(x, y)$ یک تابع حقیقی روی TM است، که علاوه بر نقطه $x \in M$ به جهت آن یعنی $y \in T_x M$ نیز بستگی دارد.

اگر $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ یک منحنی روی منیفلد M باشد آنگاه مولفه های آن در چارت (x, U) توسط

رابطه $x^i(t) = (x \circ \gamma)^i(t)$ تعریف می شوند در نتیجه بردار مماس نیز به صورت $\frac{dx^i}{dt}$ ارائه می شود. لذا طول قوس منحنی γ در هندسه ریمانی به صورت:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt,$$

می باشد، که g_{ij} ها مولفه های تانسور متریک ریمانی توابعی حقیقی روی M هستند. همچنین طول قوس منحنی γ در هندسه فینسلری به صورت:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(x, y) \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt.$$

می باشد، که $g_{ij}(x, y)$ ها مولفه های تانسور متریک فینسلری توابعی حقیقی روی TM هستند. فرض کنید M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر و $T_x M$ فضای مماس در نقطه $x \in M$ باشد کلاف مماس بر M را با $TM := \cup_{x \in M} T_x M$ نمایش می دهیم. فضای دوگان $T_x M$ با علامت $T_x^* M$ نمایش داده می شود و فضای کتانژانت در نقطه $x \in M$ نامیده می شود. کلاف $T^* M = \cup_x T_x^* M$ کلاف کتانژانت نام دارد.

تعریف ۱.۳.۱. تابع $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ را همگن مثبت^{۱۳} از درجه r نسبت به y گوییم اگر به ازای هر عدد مثبت λ داشته باشیم:

$$H(\lambda y) = \lambda^r H(y), \quad (\forall \lambda > 0).$$

و آنرا همگن مطلق^{۱۴} از درجه r گوییم اگر به ازای هر عدد حقیقی λ داشته باشیم:

$$H(\lambda y) = |\lambda|^r H(y), \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}).$$

^{۱۳} Positively homogenous

^{۱۴} Absolutely homogenous

تعریف ۲.۳.۱. یک متریک فینسلری روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M عبارت است از یک تابع پیوسته مانند $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ که روی $TM \setminus \{0\}$ دیفرانسیل پذیر بوده و در شرایط زیر صدق کند:

الف) $F(y) = 0$ اگر و تنها اگر $y = 0$.

ب) برای هر $y \in T_x M$ و هر $\lambda > 0$ ، $F(\lambda y) = \lambda F(y)$.

پ) برای هر $y \in T_x M$ فرم دو خطی متقارن

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_y : T_x M \times T_x M &\longrightarrow R \\ \mathbf{g}_y(u, v) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r \partial s} F^\vee(y + ru + sv) \Big|_{s=r=0}. \end{aligned}$$

معین مثبت باشد $\mathbf{g}_y$ را تانسور اساسی می نامیم.

تعریف ۳.۳.۱. تحدید متریک فینسلری به صفحه مماس $T_x M$ را نرم مینکوفسکی می نامیم.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم F یک متریک فینسلری روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M باشد. برای هر

$y \in T_x M$ تانسور

$$\begin{aligned} C_y : T_x M \times T_x M \times T_x M &\longrightarrow R \\ C_y(u, v, w) &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3}{\partial s \partial t \partial r} [F^\vee(y + su + tv + rw)]. \end{aligned}$$

را تانسور تاب کارتان^{۱۵} می نامیم. تانسور تاب کارتان انحراف متریک فینسلری را از متریک ریمانی مشخص می کند. به عبارت دیگر اگر $C = 0$ ، آنگاه $\mathbf{g}_y(u, v)$ به y بستگی نداشته در نتیجه یک متریک ریمانی است.

مثال. فضای ریمانی : ساده ترین مثال از متریک فینسلری، متریک ریمانی است که تابع اساسی

فینسلری به صورت:

^{۱۵}Cartan torsion tensor

$$F(y, x) = \sqrt{g_x(y, y)}.$$

می باشد.

مثال. فضای راندرز^{۱۶}: فرض کنیم (M, g) یک متریک ریمانی و $b = b_i(x)dx^i$ یک ۱-فرمی روی M باشد. در این صورت:

$$F(x, y) = \sqrt{g_x(y, y)} + b_i(x)y^i.$$

با شرط $\|\beta\|_\alpha = \sqrt{g^{ij}b_i b_j} < 1$ را متریک راندرز می نامیم.

قضیه ۵.۳.۱. قضیه اویلر^{۱۷}: فرض کنیم تابع حقیقی H در تمام نقاط $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ دیفرانسیل پذیر باشد در این صورت H همگن مثبت از درجه r است اگر و تنها اگر

$$y^i H_{y^i}(y) = rH(y). \quad (3.1)$$

اثبات. فرض کنیم H همگن مثبت از درجه r باشد بنابر تعریف به ازای هر $\lambda > 0$ داریم:

$$H(\lambda y) = \lambda^r H(y).$$

بفرض ثابت بودن y از این رابطه نسبت به λ مشتق می گیریم:

$$y^i H_{\lambda y^i}(\lambda y) = r\lambda^{r-1} H(y),$$

با قرار دادن $\lambda = 1$ نتیجه حاصل می شود. برعکس، فرض کنیم $y^i H_{y^i}(y) = rH(y)$ با ثابت در نظر گرفتن y و $\lambda > 0$ از قاعده زنجیره ای داریم:

^{۱۶}Randers space

^{۱۷}Eulers Theorem

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\lambda} H(\lambda y) &= \frac{dH(\lambda y)}{d(\lambda y)} \frac{d(\lambda y)}{d\lambda} \\
 &= H_{\lambda y}(\lambda y) y \\
 &= \frac{1}{\lambda} r H(\lambda y).
 \end{aligned}$$

لذا معادله دیفرانسیل زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{d}{d(\lambda)} H(\lambda y) - \frac{r}{\lambda} H(\lambda y) = 0, \quad \implies \quad \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{H(\lambda y)}{\lambda^r} \right) = 0.$$

که جواب آن به صورت $H(\lambda y) = c\lambda^r$ است که در آن c یک مقدار ثابت است. اگر $\lambda = 1$ آنگاه $c = H(y)$ در نتیجه:

$$H(\lambda y) = \lambda^r H(y).$$

■

نتیجه ۶.۳.۱. اگر $H : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ همگن از درجه r باشد آنگاه مشتق آن نسبت به y همگن از درجه $r - 1$ است.

نتیجه ۷.۳.۱. اگر تابع F همگن از درجه ۱ باشد آنگاه:

$$y^i F_{y^i}(y) = F(y), \quad (۱)$$

$$\frac{y^i}{F} F_{y^i} = 1, \quad (۲)$$

$$y^i F_{y^i y^j} = 0. \quad (۳)$$

نتیجه ۸.۳.۱. تانسور اساسی (فینسلری) F در رابطه زیر صدق می کند:

$$F^\vee(x, y) = \mathbf{g}_{ij}(x, y) y^i y^j.$$

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنیم (E, π, N) یک کلاف برداری و $f : M \mapsto N$ نگاشت دیفرانسیل پذیر باشد. کلاف پول بک E توسط f را با نماد f^*E نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$f^*E = \{(x, v) \in M \times E \mid f(x) = \pi(v)\}.$$

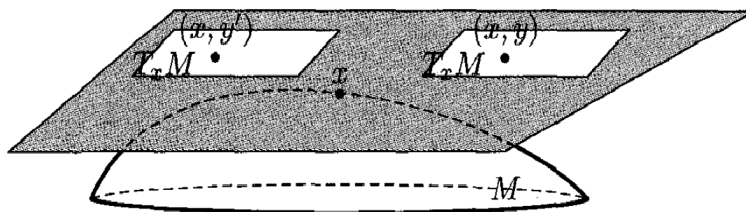
تارهای کلاف پول بک f^*E یک کپی از تارهای E می باشند. با نگاشت تصویر مولفه اول $\pi_1 : f^*E \rightarrow M$ که به صورت $(x, v) \in M \times E \mapsto x \in M$ تعریف می شود یک کلاف برداری روی M است. اگر $\pi_2 : f^*E \rightarrow E$ نمایانگر نگاشت تصویر مولفه دوم باشد که با ضابطه $(x, v) \mapsto v$ تعریف می شود، آنگاه نگاشت بین کلاف ها در نمودار زیر جابجایی است.

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{\pi_2} & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

حال اگر نگاشت تصویر $\pi : TM \rightarrow M$ را در نظر بگیریم با توجه به تعریف ۹.۳.۱ کلاف پول بک π^*TM قابل تعریف بوده و تارهای آن در هر نقطه $(x, y) \in TM \setminus \{0\}$ به صورت زیر می باشند:

$$\pi^*TM|_{(x,y)} = \{(x, y, v) \mid v \in T_x M\} \cong T_x M.$$

به عبارت دیگر تار $\pi^*TM|_{(x,y)}$ کپی از $T_x M$ می باشد. کلاف مماس پول بک می نامیم.



در هندسه فینسلری، یک الصاق نمی تواند هم متقارن و هم سازگار با متریک فینسلری باشد. الصاق های زیادی در هندسه فینسلری وجود دارند که می توان به الصاق بروالد^{۱۸}، الصاق کارتان^{۱۹} و الصاق چرن^{۲۰} می باشند. اولین بار مفهوم الصاق در هندسه فینسلری توسط ل.بروولد^{۲۱} معرفی شد. حال ما به معرفی الصاق چرن که متقارن می باشد اما سازگار با متریک فینسلری نیست می پردازیم.

قضیه ۱۰.۳.۱. (چرن) فرض کنیم (M, F) یک منیفلد فینسلری n -بعدی باشد و e_i یک کنج موضعی دلخواه π^*TM و $\{w^i\}$ هم کنج دوگان آن برای π^*T^*M باشد. در این صورت یک فرمی های $\{w_j^i\}$ روی $TM \setminus \{0\}$ چنان موجودند که:

$$dw^i = w^j \wedge w_j^i, \quad (4.1)$$

$$dg_{ij} = g_{kj}w_i^k + g_{ik}w_j^k + 2C_{ijk}w^{n+k}, \quad (5.1)$$

جایی که

$$w^{n+i} := dy^i + y^j w_j^i, \quad (6.1)$$

که در آن $y = y^i e_i$ ، $g_{ij} := \mathbf{g}(e_i, e_j)$ و $C_{ijk} := C(e_i, e_j, e_k)$.

اثبات. این قضیه را برای سیستم مختصاتی موضعی استاندارد (x^i, y^i) برای $TM \setminus \{0\}$ اثبات می کنیم. فرض کنیم $e_i = \partial_i$ و $w^i = dx^i$. یک فرمی های w_j^i می توانند به صورت:

$$w_j^i := \Gamma_{jk}^i dx^k + \Pi_{jk}^i dy^k,$$

باشند لذا رابطه (۴.۱) به صورت:

^{۱۸} Berwald Connection

^{۱۹} Cartan Connection

^{۲۰} Chern Connection

^{۲۱} L. Berwald

$$\star = d^\flat x^i = dx^j \wedge (\Gamma_{jk}^i dx^k + \Pi_{jk}^i dy^k),$$

می باشد. یعنی $\star = \Pi_{jk}^i$ و $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$. در نتیجه $w_j^i = \Gamma_{jk}^i dx^k$. فرض کنیم:

$$N_j^i := y^m \Gamma_{mj}^i.$$

لذا معادله (۶.۱) به:

$$dg_{ij} = g_{im} \Gamma_{jl}^m dx^l + g_{mj} \Gamma_{il}^m dx^l + \flat C_{ijm} (dy^m + N_l^m dx^l). \quad (۷.۱)$$

تبدیل می شود. چون

$$C_{ijk} = \frac{1}{\flat} [f^\flat]_{y^i y^j y^k} = \frac{1}{\flat} \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k},$$

رابطه (۷.۱) به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = g_{im} \Gamma_{jl}^m + g_{mj} \Gamma_{il}^m + \flat C_{ijm} N_l^m. \quad (۸.۱)$$

از رابطه (۸.۱) داریم:

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} = g_{jm} \Gamma_{il}^m + g_{ml} \Gamma_{ij}^m + \flat C_{jml} N_i^m. \quad (۹.۱)$$

$$\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} = g_{ml} \Gamma_{ij}^m + g_{im} \Gamma_{jl}^m + \flat C_{iml} N_j^m. \quad (۱۰.۱)$$

با جمع نمودن روابط (۹.۱) و (۱۰.۱) و کم کردن رابطه (۸.۱) داریم:

$$\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} = \flat g_{ml} \Gamma_{ij}^m + \flat C_{jml} N_i^m + \flat C_{iml} N_j^m - \flat C_{ijm} N_l^m,$$

در نتیجه

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{\flat} g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\} - g^{kl} \{ C_{jml} N_i^m + C_{iml} N_j^m - C_{ijm} N_l^m \}. \quad (۱۱.۱)$$

لذا N_j^i به صورت:

$$N_j^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right\} y^i - \frac{1}{2} g^{kl} C_{jml} G^m. \quad (۱۲.۱)$$

می باشد که در آن:

$$G^i = \frac{1}{2} N_j^i y^j = \frac{1}{2} \Gamma_{jk}^i y^j y^k,$$

از رابطه (۱۲.۱) داریم:

$$G^i = \frac{1}{4} g^{il} \left\{ \frac{\partial g_{jl}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l} \right\} y^j y^k. \quad (۱۳.۱)$$

با توجه به رابطه (۱۲.۱) و (۱۳.۱) یک فرمول برای N_j^i بر حسب g_{ij} بدست می آید. با قرار دادن آن

در رابطه (۱۱.۱)، یک فرمول برای Γ_{jk}^i بر حسب g_{ij} بدست می آید. ■

با در نظر گرفتن فرم های الصاق چرن یعنی $\{w_j^i\}$ نسبت به کنج موضعی $\{e_i\}$ برای π^*TM می توان الصاق خطی ∇ روی π^*TM را به صورت زیر تعریف نمود:

$$\nabla X = \{dX^i + X^j w_j^i\} \otimes e_{ij}$$

که در آن: $X = X^i(x, y)e_i \in C^\infty(\pi^*TM)$ و

$$\nabla_{\hat{X}} \rho(\hat{X}) - \nabla_{\hat{Y}} \rho(\hat{X}) = \rho[\hat{X}, \hat{Y}], \quad (\hat{X}, \hat{Y} \in C^\infty(T(TM \setminus \{0\}))).$$

که در آن $\rho : T(TM \setminus \{0\}) \rightarrow \pi^*TM$ نگاشت کلاف برداری است که به صورت زیر می باشد.

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_{(x,y)} \right) = \partial_i \Big|_x, \quad \rho \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_{(x,y)} \right) = 0.$$

∇ را الصاق چرن می نامیم.

تعریف ۱۱.۳.۱. فرض کنیم M یک منیفلد n -بعدی دیفرانسیل پذیر باشد یک اسپری روی M عبارت است از یک میدان برداری هموار روی $TM \setminus \{0\}$ مانند

$$G : TM \setminus \{0\} \longrightarrow T(TM \setminus \{0\})$$

که در مختصات موضعی استاندارد (x^i, y^i) در TM به صورت زیر باشد:

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \mathfrak{Y}^{G^i}(y) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

جایی که هر $G^i(y)$ یک تابع موضعی روی TM می باشد و

$$G^i(\lambda y) = \lambda^{\mathfrak{Y}^{G^i}(y)} G^i(y), \quad (\lambda > 0).$$

یک منیفلد همراه با اسپری را فضای اسپری و G^i ها را ضرایب اسپری G می نامیم. اگر $\hat{c}(t)$ منحنی انتگرال G باشد یعنی $\frac{d\hat{c}}{dt} = G_{\hat{c}}$ آنگاه تصویر $c = \pi \circ \hat{c}$ در رابطه زیر صدق می کند:

$$\ddot{c}^i + \mathfrak{Y}^{G^i}(\dot{c}) = 0. \quad (14.1)$$

همچنین اگر منحنی c در رابطه ۱۴.۱ صدق کند آنگاه $\hat{c} = \dot{c}$ منحنی انتگرال G است.

تعریف ۱۲.۳.۱. منحنی منظم c در منیفلد دیفرانسیل پذیر M را ژئودزیک اسپری G می نامیم هرگاه تصویر آن منحنی انتگرال G باشد.

تعریف ۱۳.۳.۱. فرض کنیم M یک منیفلد n -بعدی باشد. اگر (x^i, y^i) مختصات موضعی استاندارد باشد آنگاه $\nu TM = \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial y^1}, \frac{\partial}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n} \right\}$ یک زیر کلاف خوش تعریف $T(TM \setminus \{0\})$ می باشد که آن را کلاف تانژانت عمودی روی $TM \setminus \{0\}$ می نامیم. میدان برداری کانونی (استاندارد) روی $TM \setminus \{0\}$ به صورت $Y = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ می باشد و آن را میدان شعایی عمودی می نامیم که برشی از کلاف νTM می باشد. اسپری روی M عبارت است از:

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{1}{2} G^i(y) \frac{\partial}{\partial y^i}.$$

فرض کنیم:

$$N_j^i(y) = \frac{\partial G^i}{\partial y^j}(y),$$

هر $N_j^i(y)$ را یک ضریب الصاق می نامیم و

$$N_j^i(\lambda y) = \lambda N_j^i(y),$$

و

$$G^i(y) = \frac{1}{2} N_j^i(y) y^j, \quad (۱۵.۱)$$

فرض کنیم $HTM = \text{span} \left\{ \frac{\delta}{\delta x^1}, \dots, \frac{\delta}{\delta x^n} \right\}$ جایی که

$$\frac{\delta}{\delta x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - N_i^j(y) \frac{\partial}{\partial y^j},$$

HTM یک زیر کلاف خوش تعریف $T(TM \setminus \{0\})$ می باشد که آن را کلاف مماس افقی می نامیم.

با توجه به رابطه (۱۵.۱) داریم:

$$G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

که میدان برداری افقی G یک برش از کلاف برداری HTM می باشد. لذا یک تجزیه از کلاف تانژانت

$TM \setminus \{0\}$ به صورت:

$$T(TM \setminus \{0\}) = \nu TM \oplus HTM.$$

می باشد.

تعریف ۱۴.۳.۱. یک متریک فینسلری F روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M را متریک بروالد می نامیم اگر در مختصات موضعی استاندارد (x^i, y^i) برای $TM \setminus \{0\}$ ، علائم کریستوفل $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(x)$ توابعی بر حسب $x \in M$ باشند. در این حالت، $G^i = \frac{1}{4} \Gamma_{jk}^i(x) y^j y^k$ نسبت به $y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} |_x$ از درجه دو است.

تعریف ۱۵.۳.۱. فرض کنیم $G = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} - 2G^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ یک اسپری روی منیفلد M باشد. به ازای هر $y \in TM \setminus \{0\}$ فرم سه خطی

$$B_y : T_x M \times T_x M \times T_x M \mapsto T_x M$$

$$B_y(u, v, w) = B_{jkl}^i(y) u^j v^k w^l \frac{\partial}{\partial x^i} |_x,$$

که

$$B_{jkl}^i(y) = \frac{\partial^3 G^i}{\partial y^j \partial y^k \partial y^l}(y).$$

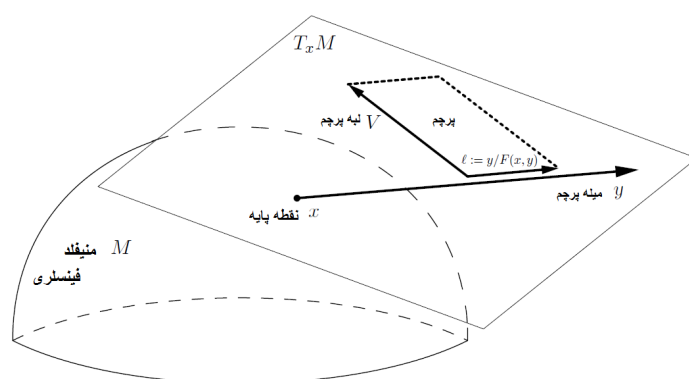
را انحنای بروالد می نامیم.

تعریف ۱۶.۳.۱. فرض کنیم (M, F) یک متریک فینسلری باشد و $P \subset T_x M$ یک صفحه باشد به

طوری که $y \in P$ **انحنای پرچمی** $K(P, y)$ به صورت زیر می باشد:

$$K(P, y) = \frac{\mathbf{g}_y(R(u, y)y, y)}{\mathbf{g}_y(y, y)\mathbf{g}_y(u, u) - \mathbf{g}_y^2(y, u)}.$$

که در آن $u \in P$ بطوریکه $P = \text{span}\{u, y\}$



شکل ۱.۱: نقطه پایه x روی منیفلد M . y میلۀ پرچم و $l \Lambda u$ پاچه پرچم. کل پرچم روی فضای تانژانت $T_x M$ واقع است.

فصل ۲

گروه های لی

۱.۲ مقدمه

نظریه گروه های لی در اواخر قرن نوزدهم میلادی بوجود آمد. ریشه های آن در مطالعه تقارن های برخی از دستگاه های معادلات دیفرانسیل و روش پیدا کردن حلی برای آنها است. مفهوم گروه های لی اولین بار توسط سوفوس لی^۱ در سال ۱۸۷۴ مطرح شد و در آن زمان آنها را "گروه های پیوسته" نامیدند و هدف اصلی وی توسعه نظریه گالوا در مورد معادلات دیفرانسیل بود. این معادلات دیفرانسیل امروزه معادلات از نوع لی نامیده می شوند و یک نمونه مشهور آن معادلات ریکاتی است. در ابتدا نظریه گروه های لی مفهومی موضعی داشت و کار های لی، کیلینگ و کارتان در این مورد تا اوایل قرن بیستم ۱۹۲۰ به همین شکل موضعی ادامه داشت. اصطلاح "گروه لی" برای این گروه ها از کارتان^۲ است. سپس کار های ویل و کارتان این نظریه را به سمت سراسری شدن سوق داد و کتاب "نظریه گروه های لی" تالیف شوالی در سال ۱۹۴۶ اولین اثر مدون در زمینه نظریه گروه های لی بطور سراسری است.

۲.۲ نظریه گروه های لی

تعریف ۱.۲.۲. منظور از یک گروه لی G ، یک گروه همراه با ساختار منیفلد دیفرانسیل پذیر که تابع ضرب گروه

$$\theta : G \times G \longrightarrow G$$

تعریف شده به صورت $(g_1, g_2) \rightarrow g_1 g_2$ دیفرانسیل پذیر باشد.

مثال. $\mathbb{R}^n$ همراه با عمل جمع یک گروه لی n -بعدی است.

مثال. $GL(n, \mathbb{R})$ همراه با ضرب ماتریسی یک گروه لی n^2 -بعدی است.

^۱ S.Lie

^۲ E.Cartan

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه لی باشد و $g \in G$. در اینصورت نگاشت های L_g و R_g که بصورت

$$L_g : G \longrightarrow G, \quad R_g : G \longrightarrow G,$$

$$h \longrightarrow L_g(h) = gh. \quad h \longrightarrow R_g(h) = hg.$$

تعریف می شوند به ترتیب انتقال چپ و انتقال راست توسط $g \in G$ نامیده می شوند. از آن جا که عمل ضرب گروه لی G دیفرانسیل پذیر است می توان مشاهده کرد که نگاشت های انتقال چپ و انتقال راست دیفرانسیل پذیر هستند.

تعریف ۳.۲.۲. متریک ریمانی g روی گروه لی G را ناوردای چپ گوئیم هرگاه:

$$g_y(u, v) = g_{L_x(y)}((L_x)_{*y}u, (L_x)_{*y}v), \quad (\forall x, y \in G, \forall u, v \in T_y G).$$

و متریک فینسلری F روی گروه لی G را ناوردای چپ گوئیم هرگاه:

$$F(h, X) = F(L_g(h), (L_g)_{*h}X), \quad (\forall Y \in T_h G, \forall g, h \in G).$$

در حالت ناوردای راست بجای L (انتقال چپ) از R (انتقال راست) استفاده کنیم. همچنین اگر متریک فینسلری یا ریمانی هم ناوردای چپ و هم ناوردای راست باشد، آن را ناوردای دو طرفه می نامیم.

تعریف ۴.۲.۲. یک جبر لی روی میدان F عبارت است از یک فضای برداری V همراه با نگاشت $[,] : V \times V \longrightarrow V$ که دارای خواص زیر باشد:

(۱) دوخطی باشد: یعنی برای هر $X, Y, Z \in V$ ، $a, b \in F$ داشته باشیم:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$

$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z].$$

(۲) اتحاد ژاکوبی:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0, \quad (\forall X, Y, Z \in V).$$

لم ۵.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه لی و $\mathfrak{g}$ مجموعه ی تمام میدان های برداری ناوردای چپ روی G باشد در این صورت $\mathfrak{g}$ یک زیر جبر لی $\chi(G)$ می باشد که آن را با $Lie(G)$ نمایش می دهیم.

اثبات. به مرجع [۸] لم ۴.۱۸ رجوع شود. ■

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه لی باشد و $\mathfrak{g} = Lie(G)$. آنگاه در این صورت نگاشت

$$\mathfrak{g} \mapsto T_e G,$$

$$X \mapsto X_e.$$

یک یکرختی می باشد لذا $\mathfrak{g} \cong T_e G$.

اثبات. به مرجع [۸] قضیه ۴.۲۰ رجوع شود. ■

فرض کنیم G گروه لی همبند با جبر لی $\mathfrak{g} = T_e G$ باشد. می توانیم کلاف تانژانت TG را با $G \times \mathfrak{g}$ یکسان در نظر بگیریم یعنی یک دیفیئومورفیسم به صورت زیر موجود است:

$$G \times \mathfrak{g} \longleftrightarrow TG,$$

$$(g, X) \longleftrightarrow (L_g)_* X \in T_g G.$$

تعریف ۷.۲.۲. متریک فینسلری $\mathbb{R}_+$ را $F : TG \mapsto \mathbb{R}_+$ را G -ناوردا می نامیم اگر F روی تمام مدارهای

G در $TG = G \times \mathfrak{g}$ ثابت باشد. یعنی:

$$F(g, X) = F(e, X), \quad (\forall g \in G, \forall X \in \mathfrak{g}).$$

اگر $F : TG \rightarrow \mathbb{R}_+$ یک متریک فینسلری G -ناوردا باشد آنگاه $\tilde{F} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}_+$ با ضابطه $\tilde{F}(X) = F(e, X)$ یک نرم مینکوفسکی روی $\mathfrak{g}$ می باشد. همچنین اگر $\tilde{F} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}_+$ یک نرم مینکوفسکی باشد آنگاه $\tilde{F}$ از یک تابع فینسلری G -ناوردا $F : TG \rightarrow \mathbb{R}_+$ با ضابطه $F(g, X) = \tilde{F}(X)$ بدست می آید. در نتیجه متریک های فینسلری G -ناوردا روی TG با نرم های مینکوفسکی روی $\mathfrak{g}$ یکسان می باشند.

تعریف ۸.۲.۲. فرض کنیم M منیفلد دیفرانسیل پذیر باشد. زیر مجموعه $\varepsilon \subset TM$ را به صورت

$$\varepsilon = \{\gamma_V \in TM : \text{تعریف شود } [0, 1] \text{ بازه } \gamma_V\},$$

در نظر می گیریم. نگاشت نمایی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\exp : \varepsilon \rightarrow M,$$

$$V \mapsto \exp(V) = \gamma_V(1).$$

یعنی هر میدان برداری مماس را به منحنی انتگرال آن در زمان $t = 1$ تصویر می کند.

تعریف ۹.۲.۲. مجموعه ی تمام همریختی های گروه لی G که به صورت $F : \mathbb{R} \rightarrow G$ می باشد را زیر گروه یک پارامتری می نامیم.

تعریف ۱۰.۲.۲. فرض کنیم M و N منیفلدهای دیفرانسیل باشند و $f : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد همچنین $X \in \chi(M)$ و $Y \in \chi(N)$ باشد. اگر برای هر $p \in M$ داشته باشیم $F_*X_p = Y_{F(p)}$ آنگاه X و Y را F -مرتبط می نامیم.

حال نشان خواهیم داد که منحنی انتگرال یک میدان برداری ناوردای چپ در نقطه همانی دقیقاً همان زیر گروه یک پارامتری می باشد.

لم ۱۱.۲.۲. فرض کنیم M و N منیفلدهای دیفرانسیل پذیر باشند و $f : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد و $X \in \chi(M)$ و $Y \in \chi(N)$. اگر θ منحنی انتگرال X و η منحنی انتگرال Y باشد آنگاه X و Y -مرتبط است اگر و تنها اگر برای هر $t \in \mathbb{R}$ داشته باشیم:

$$\eta_t \circ F = f \circ \theta_t,$$

اثبات. کافی است نشان دهیم برای هر (t, p) متعلق به دامنه θ ,

$$\eta_t \circ F(p) = F \circ \theta_t(p),$$

فرض کنیم $\mathcal{D}^{(p)} \subset \mathbb{R}$ دامنه $\theta^{(p)}$ باشد در نتیجه

$$\eta^{F(p)}(t) = F \circ \theta^{(p)}(t), \quad (\forall t \in \mathcal{D}^{(p)}). \quad (1.2)$$

فرض کنیم X و Y -مرتبط باشد. نگاشت $\gamma : \mathcal{D} \rightarrow N$ را با ضابطه $\gamma = F \circ \theta^{(p)}$ تعریف می کنیم. در نتیجه:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= (F \circ \theta^{(p)})^*(t) \\ &= F_*(\theta^{(p)'}(t)) \\ &= F_*X_{\theta^{(p)}(t)} \\ &= Y_{F \circ \theta^{(p)}(t)} \\ &= Y_{\gamma(t)}, \end{aligned}$$

یعنی γ منحنی انتگرال Y با نقطه آغازین $F \circ \theta^{(p)}(\cdot) = F(p)$ می باشد. باتوجه به منحصر به فرد بودن منحنی انتگرال و ماکسیمال بودن منحنی انتگرال $\eta^{(F(p))}$ روی دامنه $\mathcal{D}^{(p)}$ داریم:

$$\gamma(t) = \eta^{(F(p))}(t).$$

برعکس، فرض کنیم رابطه (۱.۲) برقرار باشد. در نتیجه برای هر $p \in M$ داریم:

$$F_* X_p = F_*(\theta^{(p)}(\cdot)) = (F \circ \theta^{(p)})'(\cdot) = \eta^{(F(p))'}(\cdot) = Y_{F(p)}.$$

■

لم ۱۲.۲.۲. هر میدان برداری ناوردای چپ روی گروه لی کامل است.

اثبات. فرض کنیم G یک گروه لی باشد و $X \in Lie(G)$. فرض کنیم $\theta^{(g)}$ منحنی انتگرال ماکسیمال روی بازه (a, b) با نقطه آغازین g باشد که در آن $b < \infty$. حال با استفاده از خاصیت ناوردای چپ بودن X منحنی انتگرال آن را روی بازه بزرگتر تعریف می کنیم. بنا به ناوردای چپ بودن X ، X با خودش L_g -مرتبط می باشد. بنا به لم ۱۱.۲.۲ روی دامنه $\theta^{(g)}$ داریم:

$$L_g \circ \theta_t = \theta_t \circ L_g, \quad (۲.۲)$$

بنابراین منحنی انتگرال $\theta^{(e)}$ با نقطه آغازین همانی روی بازه $(-\epsilon, \epsilon)$ برای $\epsilon > 0$ تعریف می شود فرض کنیم: $c \in (b - \epsilon, b)$. منحنی γ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\gamma : (a, c + \epsilon) \mapsto G$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \theta^{(g)}(t) & t \in (a, b) \\ L_{\theta^{(g)}(c)}(\theta^{(e)}(t - c)) & t \in (c - \epsilon, c + \epsilon) \end{cases}$$

فرض کنیم $t \in (a, b) \cap (c - \epsilon, c + \epsilon)$. باتوجه به رابطه (۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned} L_{\theta^{(g)}(c)}(\theta^{(e)}(t - c)) &= L_{\theta^{(g)}(c)}(\theta_{t-c}(e)) \\ &= \theta_{t-c}(L_{\theta^{(g)}(c)}(e)) \\ &= \theta_{t-c}(\theta_c(g)) \\ &= \theta_t^{(g)} = \theta^{(g)}(t). \end{aligned}$$

حال نشان می دهیم γ روی بازه $(c - \epsilon, c + \epsilon)$ نیز منحنی انتگرال X می باشد با استفاده از ناوردای چپ بودن X داریم:

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=t} L_{\theta^{(g)}(c)} (\theta^{(e)}(t - c)) \\ &= (L_{\theta^{(g)}(c)})_* \frac{d}{dt} \Big|_{t=t} \theta^{(e)}(t - c) \\ &= (L_{\theta^{(g)}(c)})_* X_{\theta^{(e)}(t - c)} \\ &= X_{\gamma(t)}, \quad (\forall t \in (c - \epsilon, c + \epsilon)).\end{aligned}$$

در نتیجه γ منحنی انتگرال X روی بازه $(a, c + \epsilon)$ می باشد که $c + \epsilon > b$ بنابراین بازه (a, b) می تواند ماکسیمال شود. ■

قضیه ۱۳.۲.۲. یک تناظر یک به یک بین زیرگروه های یک پارامتری روی گروه لی G و منحنی انتگرال میدان های برداری ناوردای چپ روی گروه لی G وجود دارد. یعنی

$$\{G \text{ پارامتری}\} \longleftrightarrow \text{Lie}(G) \longleftrightarrow T_e G.$$

اثبات. فرض کنیم $X \in \text{Lie}(G)$. بنا به لم ۱۲.۲.۲ منحنی انتگرال X در نقطه همانی به صورت $\theta^{(e)} : \mathbb{R} \rightarrow G$ می باشد. حال نشان می دهیم $\theta^{(e)}$ همریختی است:

$$\begin{aligned}\theta^{(e)}(s)\theta^{(e)}(t) &= L_{\theta^{(e)}(s)}\theta_t(e) = \theta_t(L_{\theta^{(e)}(s)}(e)) = \theta_t(\theta^{(e)}(s)) = \\ &= \theta_t(\theta_{(s)}(e)) = \theta_{t+s}(e) = \theta^{(e)}(t + s), \quad (\forall t, s \in \mathbb{R}).\end{aligned}$$

حال نشان می دهیم هر زیرگروه یک پارامتری G منحنی انتگرال یک میدان برداری ناوردای چپ روی G می باشد. فرض کنیم $F : \mathbb{R} \rightarrow G$ یک زیرگروه یک پارامتری روی G باشد. تعریف می کنیم:

$$X = F_*\left(\frac{d}{dt}\right) \in \text{Lie}(G),$$

که $\frac{d}{dt}$ میدان برداری ناوردای چپ روی $\mathbb{R}$ می باشد. همچنین

$$F'(t.) = F_* \frac{d}{dt} |_{t=t.} = X_{F(t.)}.$$

■

تعریف ۱۴.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه لی باشد و برای هر $g \in G$ تعریف می کنیم:

$$C_g : G \mapsto G,$$

$$h \mapsto ghg^{-1}.$$

نمایش الحاقی گروه لی G عبارت است از

$$Ad : G \mapsto GL(\mathfrak{g}),$$

$$g \mapsto Ad(g).$$

که در آن:

$$(C_g)_{*e} = Ad(g) : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{g}.$$

مشتق (پوش فروارد) $Ad(g)$ را با ad نمایش می دهیم که به صورت زیر می باشد:

$$(Ad(g))_* = ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}),$$

$$ad_X Y = [X, Y].$$

با استفاده از خاصیت ژاکوبی داریم:

$$ad_{[X,Y]} = ad_X ad_Y - ad_Y ad_X = [ad_X, ad_Y],$$

در نتیجه $ad : \mathfrak{g} \mapsto End(\mathfrak{g}) \simeq \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ یک همومورفیسم جبر لی می باشد.

تعریف ۱۵.۲.۲. فرض کنیم $\langle , \rangle$ یک ضرب داخلی روی فضای برداری $\mathfrak{g}$ باشد. به ازای $X \in \mathfrak{g}$ ، $ad(X)$ را نسبت به ضرب داخلی $\langle , \rangle$ الحاقی کج^۳ می نامیم اگر:

$$\langle ad_X Y, Z \rangle + \langle Y, ad_X Z \rangle = 0, \quad (\forall Y, Z \in \mathfrak{g}).$$

تعریف ۱۶.۲.۲. اگر X یک مجموعه ی معلوم و G یک گروه باشد آنگاه عمل چپ G روی مجموعه X نگاشتی هموار مانند $O : G \times X \rightarrow X$ که در شرایط زیر صدق می کند:

$$O(g, O(h, x)) = O(gh, x) \quad (\forall g, h \in G, x \in X) \quad (i)$$

$$O(e, x) = x \quad (\forall x \in X) \quad (e \text{ عضو همانی } G) \quad (ii)$$

تعریف ۱۷.۲.۲. عمل چپ G روی مجموعه X را متعدی (انتقالی) می گوئیم هرگاه برای هر $x, y \in X$ عنصر $g \in G$ وجود داشته باشد که

$$O(g, x) = y.$$

تعریف ۱۸.۲.۲. منیفلد دیفرانسیل پذیر M همراه با یک عمل متعدی را منیفلد همگن یا فضای همگن می نامیم.

تعریف ۱۹.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه لی و H زیر گروه لی G باشد. برای هر $g \in G$ منظور از هم دسته چپ H در g که آن را با gH نمایش می دهیم عبارت است از:

$$gH = \{gh : h \in G\}.$$

همچنین مجموعه تمام هم دسته های چپ H را با G/H نمایش می دهیم .

^۳Skew – Adjoint

قضیه ۲۰.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه لی و H یک زیر گروه لی بسته آن باشد. در این صورت G/H یک ساختار منیفلد دیفرانسیل پذیر منحصر به فرد می پذیرد به طوریکه نگاشت $\pi : G \rightarrow G/H$ یک سابمرشن دیفرانسیل پذیر است.

اثبات. به مرجع [۸] قضیه ۹.۱۸ رجوع شود. ■

نتیجه ۲۱.۲.۲. اگر G یک گروه لی و H یک زیر گروه لی بسته آن باشد آنگاه G/H با عمل چپ G یک منیفلد همگن می باشد.

نتیجه ۲۲.۲.۲. هر گروه لی G یک منیفلد همگن می باشد.

تعریف ۲۳.۲.۲. فضای همگن G/H را تحویلی می نامیم اگر جبر لی $\mathfrak{g}$ از G به جمع مستقیم فضای برداری از جبر لی $\mathfrak{h}$ از H و زیر فضای $ad(H)$ -ناوردای $\mathfrak{m}$ تجزیه شود، یعنی:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h} = \{0\},$$

بطوریکه:

$$ad(H)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m} \implies [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}.$$

تعریف ۲۴.۲.۲. فرض کنیم $\mathfrak{g}$ جبر لی حقیقی و $\tilde{F}$ نرم مینکوفسکی روی $\mathfrak{g}$ باشد. $\{\mathfrak{g}, \tilde{F}\}$ را جبر لی مینکوفسکی می نامیم اگر

$$\mathbf{g}_y([x, u], v) + \mathbf{g}_y(u, [x, v]) + 2C_y([x, y], u, v) = 0$$

جایی که $x, u, v \in \mathfrak{g}$ ، $y \in \mathfrak{g} - \{0\}$.

قضیه ۲۵.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه لی همبند باشد. در این صورت یک متریک فینسلری ناوردای دو طرفه روی G وجود دارد اگر و تنها اگر یک نرم مینکوفسکی روی $\mathfrak{g}$ که $\{\mathfrak{g}, F\}$ یک جبر لی مینکوفسکی باشد وجود داشته باشد.

اثبات. فرض کنیم F متریک فینسلری ناوردای دو طرفه روی G باشد. در نتیجه:

$$F(Ad(g)u) = F(u) \quad (\forall g \in G, \forall u \in \mathfrak{g}).$$

با استفاده از تعریف $F(y) = \sqrt{\mathfrak{g}_y(y, y)}$ داریم:

$$\mathfrak{g}_y(u, v) = \mathfrak{g}_{Ad(g)y}(Ad(g)u, Ad(g)v), \quad (\forall y, u, v \in \mathfrak{g} \quad \forall g \in G). \quad (۳.۲)$$

برای هر $x \in \mathfrak{g}$ ، با استفاده از زیر گروه های یک پارامتری $\exp(tx)$ ، رابطه (۳.۲) به صورت زیر می باشد.

$$\mathfrak{g}_y(u, v) = \mathfrak{g}_{Ad(\exp(tz))y}(Ad(\exp(tz))u, Ad(\exp(tz))v), \quad (\forall t \in R). \quad (۴.۲)$$

حال با مشتق گیری از رابطه ۴.۲ نسبت به t داریم:

$$\mathfrak{g}_y(ad(x)u, v) + \mathfrak{g}_y(u, ad(x)v) + \mathfrak{Y}C_y(ad(x)y, u, v) = 0, \quad (\forall x, u, v, y \in \mathfrak{g}). \quad (۵.۲)$$

$$\implies \mathfrak{g}_y([x, u], v) + \mathfrak{g}_y(u, [x, v]) + \mathfrak{Y}C_y([x, y], u, v) = 0, \quad (\forall z, u, v, y \in \mathfrak{g}). \quad (۶.۲)$$

در نتیجه $\{\mathfrak{g}, F\}$ یک جبر لی مینکوفسکی است.

بر عکس، فرض کنیم F نرم مینکوفسکی روی $\mathfrak{g}$ و $\{\mathfrak{g}, F\}$ جبر لی مینکوفسکی باشد تابع زیر را در نظر می گیریم.

$$\psi(t) = \mathfrak{g}_{Ad(\exp(tx))y}(Ad(\exp(tx))u, Ad(\exp(tx))v), \quad (\forall x, u, v, y \in \mathfrak{g}, y \neq 0).$$

برای هر $t \in R$ ، مشتق این تابع به صورت:

$$\psi(t)' = \mathfrak{g}_{Ad(\exp(tx))y}(ad(tx)(Ad(\exp(tx))(u)), Ad(\exp(tx))(v)) +$$

$$\mathfrak{g}_{Ad(\exp(tx))y}(Ad(\exp(tx))(u), ad(x)(Ad(\exp(tx))(v))) +$$

$$\mathfrak{Y}C_{Ad(\exp(tx))y}(ad(x)(Ad(\exp(tx))(y)), u, v) = 0. \quad (۷.۲)$$

می باشد. پس ψ تابع ثابت است و لذا:

$$\mathbf{g}_y(u, v) = \mathbf{g}_{Ad(\exp(tz))y}(Ad(\exp(tz))u, Ad(\exp(tz))v).$$

طبق فرض G همبند است در نتیجه:

$$\mathbf{g}_y(u, v) = \mathbf{g}_{Ad(g)y}(Ad(g)u, Ad(g)v), \quad (۸.۲)$$

$$\implies F(Ad(g)y) = F(y), \quad (\forall g \in G). \quad (۹.۲)$$

■

نتیجه ۲۶.۲.۲. فرض کنیم G یک گروه لی همبند باشد. اگر F متریک فینسلری ناوردای دو طرفه باشد آنگاه:

$$\mathbf{g}_y([x, y], y) = 0, \quad (\forall y, x \in \mathfrak{g}).$$

که در آن $\mathbf{g}$ تانسور اساسی متریک فینسلری F می باشد.

اثبات. فرض کنیم F متریک فینسلری ناوردای دو طرفه روی گروه لی G باشد. با توجه به قضیه

۲۵.۲.۲، $\{\mathfrak{g}, F\}$ جبر لی مینکوفسکی می باشد. در نتیجه:

$$\mathbf{g}_y([x, u], v) + \mathbf{g}_y(u, [x, v]) + 2C_y([x, y], u, v) = 0, \quad (\forall x, u, v, y \in \mathfrak{g}).$$

حال اگر $y = u = v$ آنگاه داریم:

$$\mathbf{g}_y([x, y], y) = 0, \quad (\forall y, x \in \mathfrak{g}).$$

■

۳.۲ متریک های ریمانی ناوردا روی فضای همگن

در این بخش ابتدا نحوه ساخت الصاق ریمانی ناوردا روی فضای همگن را بیان و سپس برخی از ویژگی های پایه ای متریک ریمانی ناوردا روی فضای همگن K/H بیان می کنیم. ابتدا گزاره زیر را که به رابطه بین متریک های ریمانی با فرم های دو خطی در فضای همگن را بیان می کند را ارائه می دهیم.

گزاره ۱.۳.۲. یک تناظر دوسویی بین تمام متریک های ریمانی K -ناوردا g روی $M = K/H$ و فرم های دوخطی متقارن ناتباهیده $ad(H)$ ناوردا B روی $\mathfrak{t}/\mathfrak{h}$ وجود دارد که این تناظر به صورت زیر می باشد

$$B(\bar{X}, \bar{Y}) = g_*(X, Y), \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{t}).$$

که $\bar{X}$ و $\bar{Y}$ بترتیب نماینده X و Y در $\mathfrak{t}/\mathfrak{h}$ می باشند. یک فرمی B معین مثبت است اگر و تنها اگر متریک ریمانی متناظر g معین مثبت باشد.

اثبات. هر نقطه M را به صورت $f(\cdot)$ نمایش می دهیم که $f \in K$ و هر بردار در نقطه $f(\cdot) \in M$ به صورت $f(X, \cdot)$ است که در آن $X \in \mathfrak{t}$. حال با محاسبه ساده ای می توان نشان داد معادله زیر یک متریک K ناوردا g روی M تعریف می کند:

$$g(f(x, \cdot), f(y, \cdot)) = B(\bar{X}, \bar{Y}), \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{t}).$$

■

نتیجه ۲.۳.۲. اگر $M = K/H$ یک فضای همگن تحویلی با تجزیه مستقیم $ad(H)$ -ناوردا $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ باشد آنگاه یک تناظر دو سویی بین متریک های ریمانی K -ناوردا g روی M و فرم های دو خطی متقارن ناتباهیده B روی $\mathfrak{m}$ وجود دارد که به صورت زیر می باشد:

$$B(X, Y) = g(X, Y), \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{m}).$$

از $ad(H)$ ناوردا بودن B نتیجه می شود که

$$B([Z, X], Y) + B(X, [Z, Y]) = 0, \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{m}, Z \in \mathfrak{h}).$$

همچنین عکس آن برقرار است اگر H همبند باشد.

قضیه ۳.۳.۲. فرض کنیم P یک G ساختار K - ناوردا روی فضای همگن تحویلی $M = K/H$ باتجزیه $\mathfrak{t} = \mathfrak{m} + \mathfrak{h}$ باشد. در این صورت یک تناظر دو سویی بین مجموعه ی همه الصاق های K - ناوردا در P و مجموعه تمام نگاشت های خطی $\Lambda_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{g}$ وجود دارد که:

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}(adh(X)) = ad(\lambda(h))(\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)), \quad (\forall X \in \mathfrak{m}, h \in H).$$

که در آن λ یک ایزوتروپی خطی از H به توی G می باشد.

اثبات. به مرجع [۱۰] قضیه ۲.۱ رجوع شود. ■

گزاره ۱.۳.۲ حالت خاصی از تناظر طبیعی بین میدان های تانسوری K ناوردا L از نوع (r, s) روی $M = K/H$ و تانسورهای $ad(H)$ ناوردا از نوع (r, s) روی $\mathfrak{t}/\mathfrak{h}$ می باشد.

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنیم $M = K/H$ فضای همگن تحویلی با تجزیه مستقیم $ad(H)$ ناوردا ی $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ باشد و B یک فرم دو خطی متقارن ناتباهیده $ad(H)$ ناوردا روی $\mathfrak{m}$ باشد. فرض می کنیم g متریک ریمانی K ناوردا متناظر با B باشد در این صورت:

الف) الصاق ریمانی به صورت

$$\Lambda_{\mathfrak{m}}(X)Y = \frac{1}{2}[X, Y]_{\mathfrak{m}} + U(X, Y),$$

که در آن $U(X, Y)$ نگاشت دو خطی متقارن از $m \times m$ به توی m می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\forall B(U(X, Y), Z) = B(X, [Z, Y]_m) + B([Z, X]_m, Y), \quad (\forall X, Y, Z \in m).$$

ب) الصاق ریمانی برای g متقارن است اگر و تنها اگر B در شرط زیر صدق کند:

$$B(X, [Z, Y]_m) + B([Z, X]_m, Y) = 0, \quad (\forall X, Y, Z \in m).$$

اثبات . با یکسان در نظر گرفتن m و $T.M$ داریم: $\Lambda_m(X) = -(A_X)$. چون A_X نسبت به g پاد متقارن می باشد لذا $\Lambda_m(X)$ نسبت به B پاد متقارن است. بنابراین:

$$B(\Lambda_m(X)Y, Z) + B(Y, \Lambda_m(X)Z) = 0, \quad (\forall Y, Z \in m).$$

همچنین می دانیم که:

$$\Lambda_m(X)Y - \Lambda_m(Y)X = [X, Y]_m,$$

حال اگر

$$U(X, Y) = \Lambda_m(X)Y - \frac{1}{\gamma}[X, Y]_m,$$

آنگاه $U(X, Y)$ نسبت به X و Y متقارن می باشد و در رابطه زیر صدق می کند:

$$B(U(X, Y), Z) + B(Y, U(X, Z)) = \frac{1}{\gamma} \{B([Z, Y]_m, Z) + B(Y, [Z, X]_m)\}.$$

با استفاده از خاصیت تقارنی U داریم:

$$\forall B(U(X, Y), Z) = B(X, [Z, Y]_m) + B([Z, X]_m, Y), \quad (\forall X, Y, Z \in m).$$



برای حالت خاص می توانیم گروه لی K را در نظر بگیریم که فضای همگن آن به صورت $K/\{e\}$ می باشد و فرم دو خطی متقارن معین مثبت $ad(K)$ - ناوردای B روی جبر لی همان متریک ریمانی ناوردای چپ g روی گروه لی K می باشد. حال اگر ناوردای راست نیز باشد یعنی ناوردای دوطرفه باشد به نتایج بهتری می رسیم.

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنیم G یک گروه لی باشد و $a = a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ متریک ریمانی ناوردای دوطرفه باشد. اگر Y میدان برداری ناوردای چپ دلخواه روی G باشد آنگاه $\nabla_Y Y = 0$ ، که در آن ∇ الصاق لوی چویتا a می باشد. یعنی منحنی انتگرال هر میدان برداری ناوردای چپ در نقطه همانی ژئودزیک a می باشد که همان زیر گروه یک پارامتری G است.

اثبات . فرض کنیم Y میدان برداری ناوردای چپ دلخواه روی G باشد. با توجه به فرمول الصاق ریمانی برای فضای همگن

$$\nabla a(\nabla_Y Y, Z) = a(Y, [Z, Y]) + a(Y, [Z, Y]) - a(Z, [Y, Y]),$$

$$\implies \nabla a(\nabla_Y Y, Z) = 2a(Y, [Z, Y]), \quad (\forall Z \in \mathfrak{g}).$$

چون متریک ریمانی ناوردای دوطرفه است با توجه به نتیجه ۲۶.۲.۲ داریم:

$$a(\nabla_Y Y, Z) = a(Y, [Z, Y]) = 0, \quad (\forall Z \in \mathfrak{g}).$$

بنا به خاصیت ناتباهدگی متریک ریمانی

$$\nabla_Y Y = 0, \quad (\forall Z \in \mathfrak{g}).$$

در نتیجه منحنی انتگرال میدان برداری ناوردای چپ Y که همان زیر گروه یک پارامتری G است ژئودزیک (G, a) در نقطه همانی می باشد. ■

لم ۶.۳.۲. فرض کنیم G یک گروه لی باشد اگر a متریک ریمانی ناوردای دوطرفه باشد آنگاه برای هر $Y, Z \in \mathfrak{g}$ ، $\nabla_Y Z = \frac{1}{2}[Y, Z]$ که در آن ∇ الصاق ریمانی (G, a) می باشد.

اثبات. با توجه به خواص خطی الصاق داریم:

$$\nabla_{X+Y}(X+Y) = \nabla_X X + \nabla_X Y + \nabla_Y X + \nabla_Y Y, \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{g}).$$

بنا به قضیه ۵.۳.۲:

$$\nabla_X Y + \nabla_Y X = 0,$$

با استفاده از متقارن بودن الصاق ریمانی داریم:

$$\nabla_X Y + \nabla_Y X = 2\nabla_X Y - [X, Y] = 0,$$

$$\implies \nabla_Y Z = \frac{1}{2}[Y, Z], \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{g}).$$

■

حال ما در این قسمت می خواهیم با استفاده از لم ۶.۳.۲ یک فرمول صریح برای تانسور انحنا ریمانی ناوردای دو طرفه روی سه میدان برداری ناوردای چپ ارائه دهیم.

فرض کنید G یک گروه لی باشد. با استفاده از تعریف، فرمول تانسور انحنا ریمانی به صورت

$$R(X, Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z, \quad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}).$$

می باشد. فرض کنید ∇ الصاق لوی چویتا یک متریک ریمانی ناوردای دوطرفه باشد، با استفاده از لم ۶.۳.۲ داریم:

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{2}\nabla_Y[X, Z] - \frac{1}{2}\nabla_X[Y, Z] + \frac{1}{2}[[X, Y], Z],$$

اگر دوباره لم ۶.۳.۲ را اعمال کنیم آنگاه:

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4} [Y, [X, Z]] - \frac{1}{4} [X, [Y, Z]] + \frac{1}{2} [[X, Y], Z],$$

با استفاده از ویژگی ژاکوبی که به صورت

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

$$\Rightarrow [[X, Y], Z] = [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]], \quad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}).$$

می باشد داریم:

$$R(X, Y)Z = -\frac{1}{4} [[X, Y], Z] + \frac{1}{4} [[X, Y], Z], \quad (10.2)$$

$$\Rightarrow R(X, Y)Z = \frac{1}{4} [[X, Y], Z], \quad (\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}). \quad (11.2)$$

حال می توانیم یک فرمول صریح برای برای انحنای برشی برای متریک ریمانی ناوردای دوطرفه بدست آورد.

لم ۷.۳.۲. فرض کنید G یک گروه لی و $a = a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ متریک ریمانی ناوردای دوطرفه باشد و

$u, v \in T_g M$ دو میدان برداری یکا متعامد باشند که $\Pi = \text{span}\{u, v\}$. در این صورت انحنای برشی

a به صورت

$$K(\Pi) = K(u, v) = \frac{1}{4} \|[u, v]\|.$$

می باشد.

اثبات. با استفاده از تعریف، فرمول انحنای برشی به صورت

$$K(u, v) = a(R(u, v)v, u),$$

می باشد با توجه به رابطه (۱۱.۲) داریم:

$$K(\pi) = K(u, v) = \frac{1}{4}a([u, v], u, v). \quad (12.2)$$

چون متریک ریمانی a ناوردای دوطرفه است $ad(x)$ به ازای هر $x \in \mathfrak{g}$ ، الحاقی کج است. در نتیجه

رابطه (۱۲.۲) به صورت

$$K(\pi) = \frac{1}{4}a([u, v], [u, v]) = \frac{1}{4}\| [u, v] \|^2.$$

می باشد.



فصل ۳

متریک های راندرز ناوردای دو طرفه روی گروه های لی

۱.۳ مقدمه

یک نوع خاص از متر های فینسلر، (α, β) -متریک ها هستند که کاربردهای فراوانی در مهندسی و فیزیک دارند. یکی از پر اهمیت ترین (α, β) -متریک ها، متر راندرز می باشد که ما قصد داریم در این پایان نامه آن را بررسی می کنیم.

ما در این بخش می خواهیم ویژگی های هندسی متریک های راندرز ناوردای دوطرفه را روی گروه های لی بررسی کنیم و شرایط لازم و کافی برای این که متریک راندرز ناوردای چپ از نوع بروالد باشند را بیان می کنیم. همچنین نشان می دهیم متریک راندرز ناوردای دو طرفه از نوع بروالد می باشند و شرایطی را که متریک های راندرز ناوردای چپ روی گروه های لی، ناوردای دوطرفه باشد را بیان می کنیم و در نهایت به بررسی ژئودزیک های آن می پردازیم.

۲.۳ شرایط بروالد بودن متریک های راندرز ناوردا

متریک راندرز در سال ۱۹۴۱ توسط راندرز در زمینه نسبیت عام معرفی شده است. متریک راندرز ساخته شده به وسیله متریک ریمانی $a = a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ و یک ۱-فرمی $b = b_i dx^i$ روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M به فرم $F = \alpha + \beta$ می باشد جایی که

$$\alpha(x, y) = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}, \quad \beta(x, y) = b_i(x)y^i.$$

موقعی که $b_i \neq 0$ متریک های راندرز در شرط $F(x, -y) = F(x, y)$ صدق نمی کنند در حقیقت تابع فینسلری از فضای راندرز، همگن مطلق است اگر و تنها اگر ریمانی باشد. چون $\beta(x, y)$ نسبت به y خطی است بنابراین همواره نمی تواند مثبت باشد برای این که متریک راندرز F روی $TM \setminus \{0\}$ مثبت باشد باید اندازه مولفه های b_i مناسب باشد. حال شرایط لازم و کافی برای اینکه متریک راندرز F روی $TM \setminus \{0\}$ مثبت باشد را بررسی می کنیم.

لم ۱.۲.۳. متریک راندرز تعریف شده بوسیله متریک ریمانی $a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ و یک فرمی b مثبت می باشد اگر و تنها اگر $\|b\|_\alpha < 1$.

اثبات. فرض کنیم متریک راندرز $F(x, y) = \alpha + \beta$ روی $TM \setminus \{0\}$ مثبت باشد یعنی

$$F = \alpha + \beta > 0, \quad \implies \quad \alpha > -\beta,$$

$$\implies \quad \sqrt{a_{ij}y^i y^j} > -b_i y^i, \quad (\forall y \neq 0 \in TM). \quad (1.3)$$

اگر $b \neq 0$ ، آنگاه با جایگذاری $y^i = -b^i = -a^{ij}b_j$ در رابطه (۱.۳) که در آن (a^{ij}) ماتریس معکوس (a_{ij}) می باشد داریم:

$$\sqrt{a_{ij}(-a^{ij}b_j)(-b^i)} > -b_i(-b^i), \quad \implies \quad \sqrt{b_i b^i} > b_i b^i, \quad \implies \quad \frac{b_i b^i}{\sqrt{b_i b^i}} < 1, \implies \|b\| < 1.$$

بر عکس، فرض کنیم $\|b\|_\alpha < 1$. بنا به نامساوی کوشی شوارتز، اگر $y \neq 0$ آنگاه داریم:

$$|b_i y^i| < \sqrt{a_{ij}y^i y^j}.$$

■

متریک ریمانی $a = a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ یک ضرب داخلی روی فضای تانژانت (کتانژانت) القا می کند که یک تناظر دو سوی بین یک فرمی ها و میدان های برداری روی منیفلد دیفرانسیل پذیر M پدید می آورد که به صورت

$$\flat : T_x M \longmapsto T_x^* M, \quad \sharp : T_x^* M \longmapsto T_x M.$$

می باشد میدان برداری متناظر با یک فرمی θ را با $\theta^\sharp$ و یک فرمی متناظر با میدان برداری y را با $y^\flat$ نمایش می دهیم که در مختصات موضعی به صورت زیر می باشد:

$$y^b = (y^b)_i dx^i, \quad (y^b)_i = a_{ij} y^j, \quad (\forall y \in T_x M).$$

$$\theta^\# = (\theta^\#)^i \partial_i, \quad (\theta^\#)^i \partial_i = a^{ij} \theta_j, \quad (\forall \theta \in T_x^* M).$$

واضح است که:

$$\|b\| = \|b^\#\|, \quad \beta(x, y) = (b^\#)^b(y) = a_x(b^\#, y).$$

در نتیجه متریک راندرز ساخته شده با متریک ریمانی $a = a_{ij} dx^i \otimes dx^j$ و یک فرمی b را می توان به صورت

$$F(x, y) = \sqrt{a_x(y, y)} + a_x(b^\#, y), \quad (x \in M, y \in T_x M).$$

نشان داد که برای هر $x \in M$, $a_x(b^\#, b^\#) < 1$.

فرض کنید G یک گروه لی همبند با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد و F متریک راندرز ناوردای چپ ساخته شده با متریک ریمانی $a_{ij} dx^i \otimes dx^j$ و میدان برداری X روی G باشد. به آسانی می توان نشان داد که متریک ریمانی $a_{ij} dx^i \otimes dx^j$ و میدان برداری X نیز ناوردای چپ می باشند.

لم ۲.۲.۳. متریک راندرز تعریف شده بوسیله متریک ریمانی $a_{ij} dx^i \otimes dx^j$ و یک فرمی b از نوع بروالد می باشد اگر و تنها اگر یک فرمی b نسبت به الصاق لوی چویتا ∇ القا شده از متریک ریمانی $a_{ij} dx^i \otimes dx^j$ موازی باشد.

■

اثبات. به مرجع [۲] رجوع شود.

لم ۳.۲.۳. میدان برداری X نسبت به الصاق لوی چویتا ∇ القا شده از متریک ریمانی $a = a_{ij} dx^i \otimes dx^j$ موازی است اگر و تنها اگر یک فرمی متناظر با آن نیز موازی باشد.

اثبات. فرض کنیم $X = X^i \partial_i$ یک میدان برداری موازی نسبت به الصاق لوی چویتا ∇ القا شده از متریک ریمانی $a_{ij} dx^i \otimes dx^j$ در مختصات موضعی باشد در نتیجه داریم:

$$\nabla X = 0, \quad \Rightarrow \quad X^i_{;j} = \partial_j X^i + X^k \Gamma^i_{jk} = 0, \quad \Rightarrow \quad \partial_j X^i = -\Gamma^i_{jk} X^k. \quad (2.3)$$

حال نشان می دهیم یک فرمی متناظر با میدان برداری X که به صورت

$$X^b = W = W_j dx^j = a_{ij} X^i dx^j$$

موازی است پس داریم:

$$\begin{aligned} \nabla W = \nabla(W_j dx^j), \quad \Rightarrow \quad W_{i;j} &= \partial_j W_i - W_k \Gamma^k_{ij} \\ &= \partial_j (a_{ik} X^k) - (a_{ik} X^l) \Gamma^k_{ij} \\ &= (\partial_j a_{ij}) X^k + a_{ik} \partial_j X^k - a_{kl} X^l \Gamma^k_{ij}. \end{aligned}$$

با توجه به خاصیت الصاق لوی چویتا و جایگذاری رابطه ۲.۳ داریم:

$$\begin{aligned} W_{i;j} &= (\Gamma^t_{ji} a_{tk} + \Gamma^t_{jk} a_{it}) X^k - a_{ik} X^t \Gamma^k_{jt} - a_{kl} X^l \Gamma^k_{ij} = 0, \\ \Rightarrow \quad \nabla X^b &= \nabla W = 0. \end{aligned}$$

برعکس، فرض کنیم یک فرمی $b = b_i dx^i$ نسبت به الصاق لوی چویتا القایی از متریک ریمانی

$$a_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

در نتیجه :

$$b_{i;j} = \partial_j b_i - b_k \Gamma^k_{ij} = 0, \quad \Leftrightarrow \quad \partial_j b_i = b_k \Gamma^k_{ij}.$$

حال نشان می دهیم میدان برداری متناظر با آن که بصورت $b^\# = b^\# i \partial_i = a^{ij} b_j \partial_i$ می باشد نسبت به

الصاق لوی چویتا موازی است. داریم:

$$\begin{aligned} b^\#_{i;j} &= \partial_j (a^{ik} b_k) + (a^{kj} b_j) \Gamma^i_{jk} \\ &= (\partial_j a^{ik}) b_k + a^{ik} \partial_j b_k + a^{kj} b_j \Gamma^i_{jk} \\ &= (-a^{tk} \Gamma^i_{kt} - a^{it} \Gamma^k_{kt}) b_k + a^{ik} \partial_j b_k + a^{kj} b_j \Gamma^i_{jk} = 0 \end{aligned}$$

■

نتیجه ۴.۲.۳. متریک راندرز تعریف شده بوسیله متریک ریمانی $a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ و میدان برداری X از نوع بروالد می باشد اگر و تنها اگر میدان برداری X نسبت به الصاق لوی چویتا ∇ القا شده از متریک ریمانی $a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ موازی باشد.

گزاره ۵.۲.۳. تناظر یک به یکی بین مجموعه ی همه میدان های برداری ناوردا روی G/H و زیر فضای

$$V = \{X \in \mathfrak{m} | Ad(h)X = X, \forall h \in H\},$$

وجود دارد.

اثبات. فرض کنیم $\pi : G \rightarrow \frac{G}{H}$ نگاشت تصویر طبیعی و R_g, L_g به ترتیب انتقال های چپ و راست G باشند. مشتق π ، $\mathfrak{g}$ را به روی فضای مماس $\frac{G}{H}$ در $H = 0$ می نگارد. هسته $d\pi$ ، $\mathfrak{h}$ می باشد. انتقال $\tau(g) : xH \rightarrow gxH$ در رابطه

$$\pi \circ L_g = \tau(g) \circ \pi,$$

صدق می کند. و چون برای هر $h \in H$ داریم:

$$\pi \circ R_h = \pi, \quad Ad(g)X = dR_{g^{-1}} \circ dL_g(X),$$

لذا با مشتق گیری داریم:

$$d\pi \circ Ad(h)X = d\tau(h) \cdot d\pi(X), \quad (\forall X \in \mathfrak{g}).$$

تحت یکرختی $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \cong T(\frac{G}{H})$ ، تبدیل خطی $Ad(h)$ از $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}}$ متناظر با تبدیل خطی $d\tau(h)$ از $T(\frac{G}{H})$ می باشد اکنون ترکیب خطی $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ یک یکرختی طبیعی به صورت $\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{h}} \cong \mathfrak{m}$ ارائه می دهد که

تحت این یکرختی، تبدیل خطی $d\tau(h)$ از $T.(G/H)$ متناظر با تبدیل خطی $Ad(h)$ از $\mathfrak{m}$ می باشد. فرض کنیم $X \in V$ و $\tilde{X}$ تصویر آن تحت یکرختی $T.(G/H)$ باشد. بردار مماس در gH را به صورت:

$$\tilde{X}gH = d(\tau(g)).\tilde{X}.,$$

تعریف می کنیم. اگر $g_1H = gH$ ، آنگاه $g_1^{-1}g_1 \in H$. چون برای هر $h \in H$ داریم $Ad(h)X = X$ لذا با توجه به روشی که در بالا توضیح داده شد، داریم:

$$d\tau(g_1^{-1}g_1).\tilde{X}. = \tilde{X}..$$

در نتیجه $d\tau(g).\tilde{X}. = d\tau(g_1).\tilde{X}.$

بنابراین $\tilde{X}$ میدان برداری خوشتعریف روی G/H می باشد که تحت عمل G ناوردا است. بنابراین تناظر $X \longleftrightarrow \tilde{X}$ دو سویی است. ■

فرض کنیم G/H فضای همگن تحویلی باشد، $\mathfrak{g} = Lie(G)$ و $\mathfrak{h} = Lie(H)$. با توجه به قضیه قبل یک متریک ریمانی روی G/H وجود دارد اگر و تنها اگر یک ضرب داخلی $\langle, \rangle$ روی $\mathfrak{g}$ چنان موجود باشد که

$$\langle ad(h)X, Ad(h)Y \rangle = \langle X, Y \rangle, \quad (\forall X, Y \in \mathfrak{g}, \forall h \in H)$$

حال ما در قضیه زیر یک تناظر یک به یک برای متریک های راندرز ناوردا روی فضای همگن تحویلی ارائه می دهیم.

قضیه ۶.۲.۳. فرض کنیم α متریک ریمانی ناوردا روی G/H باشد و $\mathfrak{m}$ مولفه متعامد $\mathfrak{h}$ در $\mathfrak{g}$ نسبت به ضرب داخلی $\langle, \rangle$ القا شده از متریک ریمانی α روی $\mathfrak{g}$ باشد. در این صورت یک تناظر یک به یک بین مجموعه ی همه متریک های راندرز ناوردا روی G/H تحت متریک ریمانی α و مجموعه

$$V_1 = \{X \in \mathfrak{m} | Ad(h)X = X, \langle X, X \rangle < 1, \forall h \in H\},$$

وجود دارد. همچنین برای هر $X \in V_1$ متریک راندرز متناظر از نوع بروالد می باشد اگر و تنها اگر X در شرایط

$$\langle [Y, X]_{\mathfrak{m}}, Z \rangle + \langle Y, [Z, X] \rangle = 0, \quad \langle [Z, Y]_{\mathfrak{m}}, X \rangle = 0, \quad (\forall Y, Z \in \mathfrak{m}). \quad (3.3)$$

صدق کند، که در آن $Y_{\mathfrak{m}}$ تصویر متعامد Y روی $\mathfrak{m}$ می باشد.

اثبات. فرض کنیم $X \in V_1$. بنا به گزاره ۵.۲.۳ X با یک میدان برداری ناوردا $\tilde{X}$ روی G/H متناظر می باشد. چون a تحت عمل G ناوردا می باشد لذا داریم:

$$a_{gH}(\tilde{X}, \tilde{X}) = a_H(\tilde{X}, \tilde{X}) = \langle X, X \rangle < 1, \quad (\forall g \in G).$$

پس متریک راندرز F_X روی G/H به صورت

$$F_X(gH, y) = \sqrt{a_{gH}(y, y)} + a_{gH}(\tilde{X}, y), \quad (\forall y \in T_{gH}(G/H)).$$

می باشد. واضح است که F_X تحت عمل G ناوردا است.

فرض کنیم $X \in V_1$ و F_X متریک راندرز تعریف شده بوسیله متریک ریمانی α و میدان برداری $\tilde{X}$ باشد. با توجه به لم ۵.۲.۳ متریک راندرز F_X از نوع بروالد می باشد اگر و تنها اگر $\tilde{X}$ نسبت به متریک ریمانی α موازی باشد یعنی:

$$\nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X} = 0, \quad \implies \quad \alpha(\nabla_{\tilde{Y}} \tilde{X}, \tilde{Z}) = 0, \quad (\forall \tilde{Y}, \tilde{Z} \in T(G/H)).$$

چون G -ناوردا است لذا داریم:

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle = 0, \quad (\forall Y, Z \in \mathfrak{m}).$$

با توجه به فرمول الصاق لوی چویتا برای متریک ریمانی ناورد روی فضای همگن، متریک راندرز از نوع بروالد می باشد اگر و تنها اگر X در رابطه

$$2\langle Y, \nabla_Z X \rangle = \langle [Y, X]_m, Z \rangle + \langle Y, [Z, X]_m \rangle + \langle [Z, Y]_m, X \rangle = 0, \quad (\forall Y, Z \in m). \quad (4.3)$$

صدق کند، حال اگر شرایط (۳.۳) برقرار باشد آنگاه X نسبت به الصاق لوی چویتا a موازی است. برعکس، فرض کنیم X نسبت به الصاق لوی چویتا a موازی باشد. حال اگر در رابطه (۴.۳) برای حالت خاص فرض کنیم $Y = Z$ داریم:

$$\langle [Z, X]_m, Z \rangle = 0,$$

فرض کنیم $Z = Z + Y$. در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \langle [Y + Z, X]_m, Y + Z \rangle = 0, &\implies \langle [Y, X]_m, Y \rangle + \langle [Y, X]_m, Z \rangle + \langle [Z, X]_m, Y \rangle + \langle [Z, X]_m, Z \rangle = 0, \\ &\implies \langle [Y, X]_m, Z \rangle + \langle [Z, X]_m, Y \rangle = 0. \end{aligned}$$

■ بنابراین با توجه به رابطه (۴.۳) برای هر $a(X, [Y, Z]_m) = 0, Y, Z \in \mathfrak{g}$

اگر در حالت خاص فرض کنیم $H = \{e\}$ ، آنگاه $\mathfrak{g} = \mathfrak{m}$. لذا نتایجی که تا کنون برای فضای همگن بیان کردیم برای گروه لی نیز برقرار است. بنابراین نتیجه زیر را خواهیم داشت:

نتیجه ۷.۲.۳. فرض کنیم G یک گروه لی همبند با جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد و α متریک ریمانی ناوردای چپ روی G و ضرب داخلی $\langle, \rangle$ از تحدید α به $\mathfrak{g}$ باشد، در این صورت یک تناظر یک به یک بین همه متریک های راندرز ناوردای چپ روی G تحت متریک ریمانی α و مجموعه

$$V_1 = \{X \in \mathfrak{g} | \langle X, X \rangle < 1\}.$$

وجود دارد. همچنین متریک راندرز از نوع بروالد است اگر و تنها اگر adX نسبت به ضرب داخلی $\langle, \rangle$ پاد متقارن باشد و $\langle X, [g, g] \rangle = 0$.

اثبات. با توجه به قضیه قبل اگر $H = \{e\}$ ، آنگاه به راحتی قسمت اول حکم برقرار است. فرض کنیم $X \in V_1$. با توجه به فرمول الصاق لوی چویتا برای متریک ریمانی ناوردا روی گروه لی G ، متریک راندرز از نوع بروالد می باشد اگر و تنها اگر X در رابطه

$$2\langle Y, \nabla_Z X \rangle = \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle = 0, \quad (\forall Y, Z \in \mathfrak{g}). \quad (5.3)$$

صدق کند. اگر $ad(X)$ نسبت به متریک ریمانی α الحاقی کج باشد و $\langle X, [g, g] \rangle = 0$ آنگاه برای هر $Z, Y \in \mathfrak{g}$ ، $2\langle Y, \nabla_Z X \rangle = 0$. بنابراین برای هر $Z \in \mathfrak{g}$ ، $\nabla_Z X = 0$. یعنی X نسبت به الصاق لوی چویتا a موازی است.

برعکس، فرض کنیم X نسبت به الصاق لوی چویتا a موازی باشد. پس برای هر $Y, Z \in \mathfrak{g}$ داریم $\langle Y, \nabla_Z X \rangle = 0$. حال اگر در رابطه (۴.۳) برای حالت خاص فرض کنیم $Y = Z$ ، آنگاه برای هر $Y \in \mathfrak{g}$ داریم $2\langle Y, [Y, X] \rangle = 0$. یعنی $ad(X)$ الحاقی کج می باشد. حال با استفاده از این ویژگی داریم:

$$-\langle Z, [Y, X] \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle = \langle Z - Y, [Z - Y, X] \rangle = 0,$$

با توجه به رابطه (۵.۳) برای هر $Y, Z \in \mathfrak{g}$ ، $\langle X, [Y, Z] \rangle = 0$ ، به عبارت دیگر $\langle X, [g, g] \rangle = 0$. ■

ممکن است بعضی از متریک های راندرز روی گروه های لی علاوه بر ناوردای چپ بودن ناوردای راست نیز باشند یعنی ناوردای دوطرفه باشند که به نظر می رسد در این صورت شرایط بروالد بودن را دارا باشند. حال در قضیه زیر نشان می دهیم متریک های راندرز ناوردای دو طرفه روی گروه های لی از نوع بروالد می باشند.

قضیه ۸.۲.۳. فرض کنیم G یک گروه لی باشد و F متریک راندرز ناوردی دو طرفه تعریف شده

بوسیله متریک ریمانی $a = a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ و میدان برداری X باشد. در این صورت متریک راندرز F از نوع بروالد است.

اثبات. فرض کنیم:

$$F(p, y) = \alpha(p, y) + \beta(p, y) = \sqrt{a_p(y, y)} + a_p(X, y), \quad (\forall p \in G, \forall y \in T_p G).$$

حال برای هر $r, s \in R$ داریم:

$$F^\natural(y + ru + sv) = (\sqrt{a(y + ru + sv, y + ru + sv)} + a(X, y + ru + sv))^\natural =$$

$$a(y + ru + sv, y + ru + sv) + a(X, y + ru + sv)^\natural +$$

$$^\natural \sqrt{a(y + ru + sv, y + ru + sv)} a(X, y + ru + sv) =$$

$$a_{ij}(y^i + ru^i + sv^i)(y^j + ru^j + sv^j) + (a_{ij}X^i(y^j + ru^j + sv^j))^\natural +$$

$$^\natural \sqrt{a_{ij}(y^i + ru^i + sv^i)(y^j + ru^j + sv^j)} \cdot a_{ij}X^i(y^j + ru^j + sv^j),$$

فرض کنیم:

$$A = a_{ij}(y^i + ru^i + sv^i)(y^j + ru^j + sv^j),$$

$$B = a_{ij}X^i(y^j + ru^j + sv^j).$$

لذا داریم:

$$F^\natural(y + ru + sv) = A + B^\natural + ^\natural \sqrt{AB},$$

$$\Rightarrow \frac{1}{^\natural} \frac{\partial^\natural}{\partial r \partial s} F^\natural(y + ru + sv) =$$

$$A_{sr} + ^\natural B_r B_s + ^\natural B B_{sr} + \frac{A_{sr} B}{\sqrt{A}} +$$

$$\frac{A_s B_r}{\sqrt{A}} - \frac{A_r A_s B}{^\natural A \sqrt{A}} + \frac{A_r B_s}{\sqrt{A}} + ^\natural \sqrt{A} B_{sr}.$$

که در آن

$$\begin{aligned} A|_{r=s=\bullet} &= a(y, y), & B|_{r=s=\bullet} &= a(X, y), \\ A_s|_{r=s=\bullet} &= \frac{\partial A}{\partial s}|_{r=s=\bullet} = \mathfrak{Y}a(v, y), & B_s|_{r=s=\bullet} &= \frac{\partial B}{\partial s}|_{r=s=\bullet} = a(X, v), \\ A_r|_{r=s=\bullet} &= \frac{\partial A}{\partial r}|_{r=s=\bullet} = \mathfrak{Y}a(y, u), & B_r|_{r=s=\bullet} &= \frac{\partial B}{\partial r}|_{r=s=\bullet} = a(X, u), \\ A_{sr}|_{r=s=\bullet} &= \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial s}|_{r=s=\bullet} = \mathfrak{Y}a(u, v), & B_{sr}|_{r=s=\bullet} &= \frac{\partial^2}{\partial r \partial s}|_{r=s=\bullet} = \bullet. \end{aligned}$$

با محاسبات ساده ای می توان نشان داد:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_y(u, v) &= \frac{1}{\mathfrak{Y}} \frac{\partial^2}{\partial r \partial s} F^{\mathfrak{Y}}(y + ru + sv)|_{r=s=\bullet} = \\ &= a(u, v) + a(X, u)a(X, v) + \frac{a(u, v)a(X, y)}{\sqrt{a(y, y)}} - \\ &= \frac{a(v, y)a(u, y)a(X, y)}{a(y, y)\sqrt{a(y, y)}} + \frac{a(X, v)a(u, y)}{\sqrt{a(y, y)}} + \frac{a(X, u)a(v, y)}{\sqrt{a(y, y)}}. \end{aligned} \quad (۶.۳)$$

بنابراین برای هر $y, z \in \mathfrak{g}$ داریم:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_y(y, [y, z]) &= a(y, [y, z]) + a(X, y)a(X, [y, z]) + \\ &= \frac{a(y, [y, z])a(X, y)}{\sqrt{a(y, y)}} + a(X, [y, z])\sqrt{a(y, y)} = \\ &= a(y, [y, z])\left(1 + \frac{a(X, y)}{\sqrt{a(y, y)}}\right) + a(X, [y, z])(a(X, y) + \sqrt{a(y, y)}). \end{aligned}$$

یعنی:

$$\mathfrak{g}_y(y, [y, z]) = a(y, [y, z])\left(\frac{F(y)}{\sqrt{a(y, y)}}\right) + a(X, [y, z])F(y), \quad (\forall y, z \in \mathfrak{g}). \quad (۷.۳)$$

چون متریک ریمانی $a = a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ ناوردای دوطرفه است طبق نتیجه ۲۶.۲.۲ داریم:

$$a(y, [y, z]) = \bullet, \quad (\forall y, z \in \mathfrak{g}).$$

بنابراین $a([y, X], z) + a([z, X], y) = a([z + y, X], z + y) = 0$ که نشان می دهد adX نسبت به متریک ریمانی a الحاقی کج می باشد. از طرفی چون متریک راندرز F ناوردای دو طرفه است طبق نتایج ۲.۲.۲ و ۲.۲.۳ داریم:

$$a(X, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0,$$

■ حال بنا به نتیجه ۲.۲.۳ متریک راندرز ناوردای دو طرفه F از نوع بروالد می باشد.

حال این سوال پیش می آید که تحت چه شرایطی متریک های راندرز ناوردای چپ، ناوردای راست نیز می باشند که در قضیه زیر به آن می پردازیم.

قضیه ۲.۳.۹. فرض کنیم G یک گروه لی همبند باشد و F متریک راندرز ناوردای چپ تعریف شده بوسیله متریک ریمانی $a = a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ و میدان برداری X باشد. در این صورت متریک راندرز F ناوردای راست و لذا ناوردای دو طرفه می باشد اگر و تنها اگر $ad(x)$ نسبت به متریک ریمانی $a = a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ برای هر $x \in \mathfrak{g}$ الحاقی کج باشد و $a(X, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$.

اثبات. فرض کنیم $ad(x)$ برای هر $x \in \mathfrak{g}$ الحاقی کج باشد و $a(X, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$. نشان می دهیم که متریک راندرز ناوردای چپ F ، ناوردای راست نیز می باشد.

به راحتی با استفاده از رابطه (۶.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}_y([z, u], v) &= a(z, [u, v]) \left(1 + \frac{a(X, y)}{\sqrt{a(y, y)}} \right) + a([z, u], y) \left(\frac{a(X, v)}{\sqrt{a(y, y)}} - \frac{a(v, y)a(X, y)}{a(y, y)\sqrt{a(y, y)}} \right), \\ \mathbf{g}_y(u, [z, v]) &= a(u, [z, v]) \left(1 + \frac{a(X, y)}{\sqrt{a(y, y)}} \right) + a([z, v], y) \left(\frac{a(X, u)}{\sqrt{a(y, y)}} - \frac{a(u, y)a(X, y)}{a(y, y)\sqrt{a(y, y)}} \right),\end{aligned}$$

با استفاده از تعریف داریم:

$$C_y(z, u, v) = \frac{1}{\sqrt{a(y, y)}} \frac{d}{dt} [\mathbf{g}_{y+tv}(z, u)]|_{t=0}.$$

با محاسبات مستقیم و با در نظر گرفتن فرضیات مسئله داریم:

$$C_y([z, y], u, v) = a([z, y], u) \left(\frac{a(X, v)}{\sqrt{a(y, y)}} - \frac{a(v, y)a(X, y)}{a(y, y)\sqrt{a(y, y)}} \right) + a([z, y], v) \left(\frac{a(X, u)}{\sqrt{a(y, y)}} - \frac{a(u, y)a(X, y)}{a(y, y)\sqrt{a(y, y)}} \right).$$

در نتیجه:

$$\begin{aligned} & \mathbf{g}_y([z, u], v) + \mathbf{g}_y(u, [z, v]) + \mathbf{y}C_y([z, y], u, v) \\ &= (a([z, u], v) + a(u, [z, v])) \left(1 + \frac{a(X, y)}{\sqrt{a(y, y)}} \right) \\ &+ (a([z, u], y) + a([z, y], u)) \left(\frac{a(X, v)}{\sqrt{a(y, y)}} - \frac{a(v, y)a(X, y)}{a(y, y)\sqrt{a(y, y)}} \right) \\ &+ (a([z, v], y) + a([z, y], v)) \left(\frac{a(X, u)}{\sqrt{a(y, y)}} - \frac{a(u, y)a(X, y)}{a(y, y)\sqrt{a(y, y)}} \right). \end{aligned}$$

چون $ad(x)$ به ازای هر $x \in \mathfrak{g}$ الحاقی کج است در نتیجه:

$$\mathbf{g}_y([z, u], v) + \mathbf{g}_y(u, [z, v]) + \mathbf{y}C_y([z, y], u, v) = \bullet, \quad (\forall u, v, y, z \in \mathfrak{g}). \quad (۸.۳)$$

تابع

$$\psi(t) = \mathbf{g}_{Ad(\exp(tz))y}(Ad(\exp(tz))u, Ad(\exp(tz)v)),$$

را در نظر می گیریم. با توجه به مشتق $\Psi(t)$ نسبت به t و رابطه (۸.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \Psi(t)' &= \mathbf{g}_{Ad(\exp(tz))y}(ad(tz)(Ad(\exp(tz))u), Ad(\exp(tz)(v))) + \\ &\mathbf{g}_{Ad(\exp(tz))y}(Ad(\exp(tz))(u), ad(x)(Ad(\exp(tz))(v))) + \\ &\mathbf{y}C_{Ad(\exp(tz))y}(ad(x)(Ad(\exp(tz))(y)), u, v) = \bullet. \end{aligned}$$

که نشان می دهد Ψ تابع ثابت است. در نتیجه $\Psi(t) = \Psi(\bullet)$. یعنی:

$$\mathfrak{g}_y(u, v) = \mathfrak{g}_{Ad(exp(tz))y}(Ad(exp(tz))u, Ad(exp(tz))v),$$

از همبندی G نتیجه می شود که

$$\mathfrak{g}_y(u, v) = \mathfrak{g}_{Ad(g)y}(Ad(g)u, Ad(g)v). \quad (۹.۳)$$

با توجه به فرمول $F(y) = \sqrt{\mathfrak{g}_y(y, y)}$ داریم :

$$F(Ad(g)y) = F(y),$$

$$\implies F((R_{g^{-1}})u) = F(u), \quad (\forall g \in G).$$

یعنی متریک راندرز ناوردای راست نیز می باشد.

برعکس، فرض کنیم متریک راندرز ناوردای دوطرفه باشد. بنا به نتیجه ۲۶.۲.۲ و رابطه (۷.۳) داریم:

$$a(y, [y, z])\left(\frac{F(y)}{\sqrt{a(y, y)}}\right) + a(X, [y, z])F(y) = 0, \quad (\forall y, z \in \mathfrak{g}).$$

در نتیجه $ad(x)$ نسبت به متریک ریمانی $a = a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ برای هر $x \in \mathfrak{g}$ الحاقی کج می باشد و

$$a(X, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0.$$

■

۳.۳ ژئودزیک

فرض کنیم M یک منیفلد دیفرانسیل پذیر همراه با یک الصاق خطی باشد. با توجه به تعریف ۸.۲.۱

منحنی دیفرانسیل پذیر $\gamma : I \rightarrow M$ با میدان سرعت $T = \dot{\gamma}(t)$ را ژئودزیک فینسلری می نامیم

$$D_t T = 0 \text{ اگر}$$

در چارت مختصاتی (U, ϕ) حول $\gamma(t_0) = p$ منحنی

$$\gamma(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t)),$$

یک ژئودزیک است اگر و تنها اگر

$$D_t \dot{\gamma}(t) = (\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t))) \partial_k = 0, \\ \implies \ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

فرض کنیم $(M = G/H)$ یک فضای فینسلری همگن باشد و $\mathfrak{g}$ و $\mathfrak{h}$ به ترتیب جبر لی G و H باشند و $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ یک تجزیه مستقیم جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد. برای هر $X \in \mathfrak{g}$ میدان برداری X^* روی M را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$X_q^* = \frac{d}{dt}(\exp(tX)q), \quad (\forall q \in M).$$

میدان برداری $\{0\} - \mathfrak{g} \in X$ را بردار ژئودزیک می نامیم اگر منحنی $\gamma(t) = \exp(tX)(p)$ ژئودزیک (M, F) باشد.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنیم $(M = G/H)$ یک فضای فینسلری همگن باشد و $\mathfrak{g}$ و $\mathfrak{h}$ به ترتیب جبر لی G و H باشند و $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ یک تجزیه مستقیم جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد. در این صورت $\{0\} - \mathfrak{g} \in x$ بردار ژئودزیک است اگر و تنها اگر

$$\mathbf{g}_{X_m}(X_m, [X, Z]_m) = 0, \quad (\forall Z \in \mathfrak{g}).$$

اثبات. برای هر سه میدان برداری T, V, W روی M داریم:

$$T\mathbf{g}_W(V, W) = \mathbf{g}_W(D_TV, W) + \mathbf{g}_W(V, D_TW), \quad (۱۰.۳)$$

$$V\mathbf{g}_W(T, W) = \mathbf{g}_W(D_VT, W) + \mathbf{g}_W(T, D_VW), \quad (۱۱.۳)$$

$$W\mathbf{g}_W(V, W) = \mathbf{g}_W(D_WV, W) + \mathbf{g}_W(V, D_WW). \quad (۱۲.۳)$$

که W بردار مرجع می باشد. با جمع روابط اول و سوم و کم کردن رابطه دوم و با استفاده از خاصیت تقارنی الصاق داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_W(V, D_{W+T}W) &= +\mathbf{g}_W(W - T, D_VW) = \\ T\mathbf{g}_W(V, W) - V\mathbf{g}(T, W) + W\mathbf{g}_W(V, W) &- \mathbf{g}_w([T, W], W) - \mathbf{g}_W([W, V], W), \end{aligned}$$

اگر در معادله بالا $T = W - V$ ، آنگاه:

$$\mathbf{g}_W(V, D_WW) = \mathbf{g}_W(W, W) - V\mathbf{g}_W(W, W) - \mathbf{g}([W, V], W). \quad (۱۳.۳)$$

فرض کنید $X, Z \in \mathfrak{g}$ ، که X^* و Z^* میدان برداری اساسی روی M متناظر با X و Z باشند. لذا فرمول (۱۳.۳) به صورت زیر می باشد:

$$\mathbf{g}_{X^*}(D_{X^*}X^*, Z^*) = \mathbf{g}_{X^*}(X^*, Z^*) - Z^*\mathbf{g}_{X^*}(X^*, X^*) + \mathbf{g}_{X^*}([Z^*, X^*], X^*). \quad (۱۴.۳)$$

حال فرمول های زیر را در نظر می گیریم:

$$Ad(\exp(tX))Y = Y + t[X, Y] + O(t^2), \quad (X, Y \in \mathfrak{g}), \quad (۱۵.۳)$$

$$k \cdot \exp(tX) \cdot k^{-1} = \exp(tAd(k)X), \quad (k \in G, X \in \mathfrak{g}). \quad (۱۶.۳)$$

فرض کنیم $g_t = \exp(tX)$ ، $h_s = \exp(sZ)$ در نتیجه برای هر $x \in M$ داریم:

$$\begin{aligned} Z_{g_t(x)}^* &= \frac{d}{ds} \Big|_o h_s g_t(x) = (dg_t) \frac{d}{ds} \Big|_o g_t^{-1} h_s g_t(x) \\ &= (dg_t) \frac{d}{ds} \Big|_o \exp(sAd(g_t^{-1})Z)(x) \\ &= (dg_t)[Ad(g_t^{-1})Z]_x^* \\ &= (dg_t)[Ad(\exp(-tX))Z]_x^* \\ &= (dg_t)[Z - t[X, Z] + O(t^2)]_x^*. \end{aligned}$$

همچنین:

$$X_{h_s(x)}^* = (dh_s)[X - s[Z, X] + O(s^2)]_x^*.$$

با استفاده از روابط قبلی

$$X_{g_t(x)}^* = (dg_t)X_x^* \quad , \quad Z_{h_s(x)}^* = (dh_s)Z_x^*.$$

چون g_t یک ایزومتري می باشد لذا برای هر $p \in M$ یک ایزومتري خطی بین فضای $T_p M$ و $T_{g_t(p)} M$ می باشد. بنابراین برای هر میدان برداری V, W روی M داریم:

$$g_{dg_t(X^*)}(dg_t(V), dg_t(W)) = g_{X^*}(V, W). \quad (۱۷.۳)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} X_x^* g_{X^*}(X^*, Z^*) &= \frac{d}{dt} \Big|_o g_{X^*}(X_{g_t(x)}^*, Z_{g_t(x)}^*) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_o g_{X^*}(dg_t(X_x^*), (dg_t)[Z - t[X, Z] + O(t^2)]_x^*) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_o g_{X^*}(X_x^*, Z_x^* + t[X^*, Z^*]_x + O(t^2)) \\ &= g_{X^*}(X^*, [X^*, Z^*]). \end{aligned}$$

همچنین:

$$\begin{aligned} Z_x^* g_{X^*}(X^*, X^*) &= \frac{d}{dt} \Big|_o g_{X^*}(\dot{X}_x^* + s[Z^*, X^*]_x + O(s^2), \dot{X}_x^* + s[Z^*, X^*]_x + O(s^2)) \\ &= \dot{X}_x^* g_{X^*}(X^*, [Z^*, X^*])(x). \end{aligned}$$

با جایگذاری در رابطه (۱۴.۳) داریم:

$$g_{X^*}(D_{X^*} X^*, Z^*) = g_{X^*}(X^*, [X^*, Z^*]) = -g_{X^*}(X^*, [X, Z]^*). \quad (۱۸.۳)$$

حال فرض کنیم X یک میدان ژئودزیک باشد. یعنی $\gamma(t) = \exp(tX)(p)$ ژئودزیک F با سرعت ثابت

می باشد. در نتیجه $D_{X_{g_t(p)}^*} X_{g_t(p)}^* = 0$ بنابراین:

$$g_{X^*}(X_p^*, [X, Z]_p^*) = \bullet$$

در نتیجه:

$$g_{X_m}(X_m, [X, Z]_m) = \bullet$$

بر عکس، فرض کنیم Z یک میدان برداری روی M باشد. با استفاده از روابط (۱۴.۳) و (۱۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y} g_{dg_t(X^*)}(dg_t(Z), D_{dg_t X^*} dg_t X^*) &= \mathfrak{Y}(dg_t X^*) g_{dg_t(X^*)}(dg_t Z, dg_t X^*) - \\ dg_t(Z) g_{dg_t(X^*)}(dg_t X^*, dg_t X^*) &+ \mathfrak{Y} g_{dg_t(X^*)}([dg_t Z, dg_t X^*], dg_t X^*) = \\ \mathfrak{Y} X^* g_{X^*}(Z, X^*) - Z g_{X^*}(X^*, X^*) &+ \mathfrak{Y} g_{X^*}([Z, X^*], X^*) = \mathfrak{Y} g_{X^*}(Z, D_{X^*} X^*). \end{aligned}$$

در نتیجه:

$$g_{dg_t(X^*)}(dg_t(Z), D_{dg_t X^*} dg_t X^*) = g_{dg_t(X^*)}(dg_t(Z), dg_t(D_{X^*} X^*)).$$

بنابه خواص ضرب داخلی، داریم:

$$D_{dg_t X^*} dg_t X^* = dg_t(D_{X^*} X^*).$$

به عبارت دیگر اگر $\bullet = g_{X^*}(X_p^*, [X, Z]_p^*) = \bullet$ آنگاه

$$g_{X_{g_t(p)}^*}(X^*, [X, Z]^*)(\exp(tX)(p)) = g_{X_{g_t(p)}^*}(dg_t X_p^*, dg_t [X, Z]_p^*) = g_{X_p^*}(X_p^*, [X, Z]_p^*) = \bullet.$$

در نتیجه با توجه به رابطه (۱۸.۳) برای هر $Z \in \mathfrak{g}$ داریم:

$$\begin{aligned} g_{X^*}(D_{X^*} X^*, Z)(\exp(tX)(p)) &= g_{X^*}(dg_t(D_{X^*} X^*)_p, dg_t Z_p^*) = g_{X^*}((D_{dg_t X^*} dg_t X^*)_p, dg_t Z_p^*) = \\ g_{X^*}(D_{X_{g_t(p)}^*} X_{g_t(p)}^*, dg_t Z_p^*) &= \bullet. \end{aligned}$$

■

یعنی $\exp(tX)(p)$ ژئودزیک با سرعت ثابت می باشد.

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنیم (M, F) فضای همگن راندرز تعریف شده با متریک ریمانی a و میدان برداری X باشد. در این صورت X ژئودزیک (M, a) است اگر و تنها اگر X ژئودزیک (M, F) باشد.

اثبات. بنا به رابطه (۶.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_X(X, [X, Z]) &= a(X, [X, Z]) + a(X, X)a(X, [X, Z]) + \\ &\quad \frac{a(X, [X, Z])a(X, X)}{\sqrt{a(X, X)}} + a(X, [X, Z])\sqrt{a(X, X)}, \end{aligned}$$

یعنی:

$$\mathbf{g}_X(X, [X, Z]) = a(X, [X, Z])(1 + \sqrt{a(X, X)} + F(X)), \quad (\forall Z \in \mathfrak{g}).$$

در نتیجه برای هر $Z \in \mathfrak{m}$ داریم:

$$\mathbf{g}_X(X, [X, Z]_{\mathfrak{m}}) = a(X, [X, Z]_{\mathfrak{m}})(1 + \sqrt{a(X, X)} + F(X)) \quad , \quad (\forall Z \in \mathfrak{g}).$$

بنابراین $\mathbf{g}_X(X, [X, Z]_{\mathfrak{m}}) = 0$ اگر و تنها اگر $a(X, [X, Z]_{\mathfrak{m}}) = 0$. بنا به قضیه ۱.۳.۳ X ژئودزیک (M, F) است اگر و تنها اگر X ژئودزیک (M, a) باشد. ■

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنیم $(M = G/H, F)$ فضای همگن راندرز تعریف شده با متریک ریمانی a و میدان برداری X باشد و $\mathfrak{g}$ و $\mathfrak{h}$ به ترتیب جبر لی G و H باشند و $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{h}$ یک تجزیه مستقیم جبر لی $\mathfrak{g}$ باشد. فرض کنیم $y \in \mathfrak{g}$. اگر برای هر $z \in \mathfrak{m}$ داشته باشیم $a(X, [y, z]_{\mathfrak{m}}) = 0$ آنگاه y ژئودزیک (M, F) است اگر و تنها اگر y ژئودزیک (M, a) باشد.

اثبات. بنا به رابطه (۶.۳) داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{y_{\mathfrak{m}}}(y_{\mathfrak{m}}, [y, z]_{\mathfrak{m}}) &= a(y_{\mathfrak{m}}, [y, z]_{\mathfrak{m}}) + a(X, y_{\mathfrak{m}})a(X, [y, z]_{\mathfrak{m}}) + \\ &\quad \frac{a(y_{\mathfrak{m}}, [y, z]_{\mathfrak{m}})a(X, y_{\mathfrak{m}})}{\sqrt{a(y_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}})}} + a(X, [y, z]_{\mathfrak{m}})\sqrt{a(y_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}})} = \\ &= a(y_{\mathfrak{m}}, [y, z]_{\mathfrak{m}}) \left(1 + \frac{a(X, y_{\mathfrak{m}})}{\sqrt{a(y_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}})}} \right) + a(X, [y, z]_{\mathfrak{m}}) \left(a(X, y_{\mathfrak{m}}) + \sqrt{a(y_{\mathfrak{m}}, y_{\mathfrak{m}})} \right), \end{aligned}$$

یعنی:

$$\mathbf{g}_{y_m}(y_m, [y, z]_m) = a(y_m, [y, z]_m) \left(\frac{F(y_m)}{\sqrt{a(y_m, y_m)}} \right) + a(X, [y, z]_m) F(y_m), \quad (\forall z \in \mathfrak{g}).$$

■

حال ما به بیان یک سری قضایا برای متریک راندرز که رابطه بین ژئودزیک ها در نقطه همانی و زیر گروه های یک پارامتری که همان منحنی انتگرال میدان های برداری نوردای چپ می باشند می پردازیم. ابتدا در قضیه زیر برای حالتی که متریک راندرز نوردای چپ باشد را بیان می کنیم.

قضیه ۴.۳.۳. فرض کنیم G یک گروه لی باشد و F متریک راندرز نوردای چپ تعریف شده بوسیله متریک ریمانی $a = a_{ij} dx^i \otimes dx^j$ و میدان برداری X باشد. اگر متریک راندرز F از نوع بروالد باشد آنگاه زیر گروه یک پارامتری $t \rightarrow \exp(tX)$ ژئودزیک F است.

اثبات. چون متریک راندرز از نوع بروالد است لذا X نسبت به الصاق لوی چویتا ∇ موازی می باشد در نتیجه:

$$\nabla_X X = 0.$$

بنا به بروالد بودن متریک راندرز F الصاق ریمانی و فینسلری بر هم منطبق هستند لذا منحنی انتگرال میدان برداری نوردای چپ X در نقطه همانی که همان زیر گروه یک پارامتری $t \rightarrow \exp(tX)$ می باشد ژئودزیک F است.

■

حال این سوال پیش می آید اگر متریک راندرز نوردای دو طرفه باشد آیا نتایج بهتری درباره ژئودزیک های آن به دست می آید؟ ما در قضیه زیر نشان می دهیم که اگر متریک راندرز نوردای دوطرفه باشد ژئودزیک آن در نقطه همانی همان زیر گروه یک پارامتری می باشد.

قضیه ۵.۳.۳. فرض کنیم G یک گروه لی باشد و F متریک راندرز ناوردای دوطرفه تعریف شده بوسیله متریک ریمانی $a = a_{ij}dx^i \otimes dx^j$ و میدان برداری X باشد. اگر Y میدان برداری ناوردای چپ دلخواه روی G باشد آنگاه $\nabla_Y Y = 0$ ، که در آن ∇ الصاق چرن-راند F می باشد. یعنی منحنی انتگرال هر میدان برداری ناوردای چپ در نقطه همانی ژئودزیک F می باشد که همان زیر گروه یک پارامتری G است.

اثبات. چون متریک راندرز F ناوردای دوطرفه است بنا به نتیجه ۷.۲.۳ از نوع بروالد می باشد. پس الصاق ریمانی و فینسلری بر هم منطبق اند در نتیجه بنا به قضیه ۵.۳.۲ منحنی انتگرال میدان برداری ناوردای چپ Y که همان زیر گروه یک پارامتری G است ژئودزیک (G, F) در نقطه همانی می باشد.

■

لم ۶.۳.۳. فرض کنیم G یک گروه لی باشد اگر F متریک راندرز ناوردای دوطرفه باشد آنگاه برای هر $Y, Z \in \mathfrak{g}$ ، $\nabla_Y Z = \frac{1}{4}[Y, Z]$ ، که در آن ∇ الصاق چرن-راند (G, F) می باشد.

اثبات. چون متریک راندرز F ناوردای دوطرفه است بنا به نتیجه ۷.۲.۳ از نوع بروالد می باشد. پس الصاق ریمانی و فینسلری بر هم منطبق اند. در نتیجه بنا به لم ۶.۳.۲ حکم ثابت است.

■

مراجع

- [1] A. Toth and Z. Kovacs, *On the geometry of two-step nilpotent groups with left invariant Finsler metrics*, Acta Math. Acad. Paed. Nyregyhaziensis, 24 (2008), 155-168.
- [2] D. Bao Z. Shen and S.S. Chern, *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, Springer-Verlag, New York, (2000).
- [3] D. Latifi, *Homogeneous geodesics in homogeneous Finsler spaces*, J. Geom. Phys, 57 (2007), 1421-1433.
- [4] D. Latifi, *Bi-invariant Randers metrics on Lie groups*, Publ. Math. Debrecen, 76 (2010), 219-226.
- [5] E. Esrafilian and H. R. Salimi Moghaddam, *Flag curvature of invariant Randers metrics on homogeneous manifolds*, J. Phys. A: Math. Gen, 39 (2006), 3319-3324.
- [6] G. Randers, *On an asymmetric metric in the four-space of general relativity*, Phys. Rev.Math, 128 (1997), 195-199.
- [7] J. M. Lee, *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, Springer-Verlag, New York, (1991).
- [8] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*, Springer-Verlag, New York, (2004).
- [9] J. Milnor, *Curvature of left invariant riemannian metric on lie groups*, Adv. Math, 21 (1976), 293-329.
- [10] K. Nomizu and S. Kobayashi, *Foundations of Differential Geometry*, vol 2, Interscience Publishers, (1969).
- [11] S. Deng and Z. Hou, *Invariant randers metric on homogenous riemannian manifold*, J. Phys. A:Math. Gen, 37 (2004), 4353-4360.
- [12] S. Deng and Z. Hou, *Invariant Finsler metrics on homogeneous manifolds*, J. Phys. A:Math. Gen, 37 (2004), 8245-8253.

-
- [13] *S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic, New York, (1978).
- [14] *S.S. Chern and Z. Shen, Riemann-Finsler Geometry*, World Scientific Publishers.

فهرست الفبایی

قضیه اویلر، ۱۵

اسپری، ۲۱
 الصاق آفین، ۴
 الصاق لوی چویتا، ۹
 الصاق چرن، ۲۰
 الحاقی کج، ۳۴
 انحنای، ۱
 انحنای ریمانی، ۱۱
 انحنای برشی، ۱۱
 انحنای ریچی، ۱۲
 انحنای اسکالر، ۱۲
 انحنای پرچمی، ۲۳
 انحنای بروالد، ۲۳
 تعدی، ۳۴
 تاب الصاق، ۸
 تانسور انحنای، ۱۱
 تانسور تاب کارتانه، ۱۴
 جبرلی، ۲۷
 جبرلی مینکوفسکی، ۳۵
 ساختار فینسلری، ۱۴
 علائم کریستوفل، ۴
 فضای همگن، ۳۴
 فضای همگن تحویلی، ۳۵
 متقارن، ۸
 متریک ریمانی، ۶
 متریک شبه ریمانی، ۷
 متریک بروالد، ۲۳
 متریک راندرز، ۱۵
 مشتق کواریانت، ۵
 گروه لی، ۲۵
 ژئودزیک، ۶
 نرم مینکوفسکی، ۱۴
 نگاشت نمایی، ۲۹

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

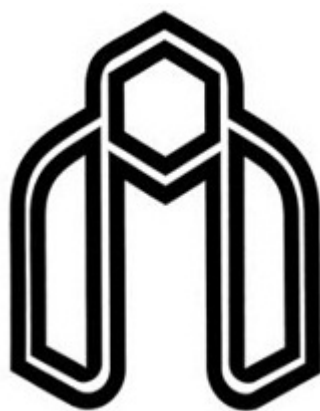
<i>Connection</i>	الصاق
<i>Levi-Civita Connection</i>	الصاق لوی چویتا
<i>Skew-Adjoint</i>	الحاقی کج
<i>Curvature</i>	انحنا
<i>Berwald type</i>	از نوع بروالد
<i>Lie bracket</i>	براکت لی
<i>Closed</i>	بسته
<i>Skew-symmetry</i>	پاد متقارن
<i>Orthonormal basis</i>	پایه یکا متعامد
<i>Smoot function</i>	تابع هموار
<i>Decomposition</i>	تجزیه
<i>One-to-one corresponding</i>	تناظر یک به یک
<i>Lie algebra</i>	جبر لی
<i>Direct consequence</i>	جمع مستقیم
<i>Local coordinate system</i>	دستگاه مختصات موضعی
<i>Geodesic</i>	ژئودزیک
<i>Coefficients</i>	ضرایب
<i>Christoffel symbols</i>	علائم کریستوفل
<i>Action</i>	عمل
<i>Douglas space</i>	فضای داگلاس
<i>Coset space</i>	فضای رده ای
<i>Tangent space</i>	فضای مماس
<i>Slit tangent bundle</i>	فضای مماس سوراخ دار
<i>Origin</i>	مبدا
<i>Trajectory</i>	مسیر
<i>Equation</i>	معادله
<i>Manifold</i>	منیفلد
<i>Reductive homogenous manifold</i>	منیفلد همگن تحویلی
<i>Parallel</i>	موازی
<i>Invariant</i>	ناوردا
<i>Nondegeneracy</i>	ناتباهیده
<i>Mikowski noem</i>	نرم مینکوفسکی

<i>Zero points</i>	نقاط صفر
<i>Mapping</i>	نگاشت
<i>Neighborhood</i>	همسایگی
<i>Homogeneous</i>	همگن
<i>1-Form</i>	یک فرمی

Abstract

In this thesis we study the geometry of Lie groups with bi-invariant Randers metric. We first give a necessary and sufficient condition for a left invariant Randers metric to be of Berwald type. We then prove that bi-invariant Randers metrics are of Berwald type. Finally a necessary and sufficient condition that left invariant Randers metrics on Lie groups are bi-invariant is given.

Keywords: *invariant metric, Randers space, bi-invariant metric, Lie group, Homogeneous.*



Shahrood University of Technology
Department of Mathematics

M.SC. Thesis

Bi-invariant Randers metrics on Lie groups

By:
Mojtaba Parhizkar Kohne oghaz

Supervisor:
Dr. Ebrahim Hashemi
Dr. Hamid-Reza Salimi-Moghaddam

Advisor:
Dr. S. Reza Hejazi
Mr. S. Reza Mosavi

July 2012