دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

معکوس های مور-پنروز حاصلضرب و تفاضل عملگرهای تصویر در یک C^*-جبر

نگارش

زهرا رحمتی نصراباد

استاد راهنما

دکتر کامران شریفی

استاد مشاور

دکتر مهدی ایرانمنش

۱۵ بهمن ۱۳۹۰

تقدیم به....

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

چکیده

در این پایان نامه معکوس مور -پنروز حاصلضرب و تفاضل عملگرهای تصویری در C^* جبرها را بررسی می کنیم و همچنین نشان می دهیم برای دو عملگر تصویری p و q در یک C^* جبر، $pq - qp$ معکوس پذیر مور -پنروز است اگر و فقط اگر pq و $p - q$ معکوس پذیر مور -پنروز باشند.

واژه‌های کلیدی: معکوس مور -پنروز؛ معکوس درازین؛ عملگرهای تصویری؛ C^* جبرها

پیشگفتار

مبحث معکوس های تعمیم یافته در سال های اخیر به دلیل کاربرد های فراوانی که در شاخه های مختلف ریاضی دارد، مورد توجه ریاضی دانان قرار گرفته است. یکی از کاربردهای مهم معکوس های تعمیم یافته، حل دستگاه معادلات خطی است.

فرض کنیم $Ax = b$ یک دستگاه معادلات خطی باشد. اگر A معکوس پذیر باشد، در این صورت جواب یکتای $x = A^{-1}b$ وجود دارد.

حال اگر A منفرد یا مستطیل شکل باشد، در این صورت جوابی برای دستگاه $Ax = b$ وجود ندارد و این زمانی است که ما از معکوس های تعمیم یافته استفاده می کنیم.

وجود ماتریس x که در دستگاه $Ax = b$ صدق کند هم ارز این عبارت است که ماتریس b ترکیب خطی از ستون های ماتریس A می باشد.اگر چنین باشد، hای وجود دارد بطوریکه $b = Ah$.

حال اگر X ماتریسی باشد که $AXA = A$ (که در واقع X ای که در این شرط صدق می کند همان تعریف کلی برای معکوس تعمیم یافته ماتریس A است) و اگر قرار دهیم $x = Xb$ در این صورت داریم:

$$Ax = AXb = AXAh = Ah = b$$

بنابر این x در دستگاه $Ax = b$ صدق می کند.

در حالت کلی اگر Xماتریسی باشد که $AXA = A$، در این صورت $Ax = b$ یک جواب دارد اگر و فقط اگر $AXb = b$.

در این پایان نامه، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرد. در فصل دوم معکوس مور-پنروز حاصلضرب و تفاضل عملگرهای تصویری در C^* جبر ها را مورد بررسی قرار می دهیم و در فصل سوم همین امر را برای عملگرهای تصویر متعامد در فضای ماتریس های $m \times n$ بررسی می کنیم.

فهرست مطالب

ر

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ نماد گذاری و تعاریف

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می شود.

A^*	عملگر الحاق
$A^\dagger$	معکوس مور-پنروز
A^-	معکوس درونی A
A^+	معکوس بازتابی A
A^D	معکوس درازین A
$\|A\|$	نرم عملگر A
$\langle x,y\rangle$	حاصل ضرب درونی x و y
H	فضای هیلبرت
$L(X,Y)$	فضای تمام عملگرهای خطی کراندار از X به Y
$B(H)$	مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار روی فضای هیلبرت
I_n	ماتریس همانی $n\times n$
$\mathcal{A}$	C^*- جبر

$R(A)$ برد ماتریس A

$RS(A)$ فضای سطری ماتریس A

$\rho(A)$ رتبه ماتریس A

$\sigma(a)$ طیف عنصر a

$acc\sigma(a)$ نقاط انباشتگی طیف عنصر a

این بخش شامل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصول بعد می باشد.

تعریف ۱.۱.۱. (فضای هیلبرت)([۵])

فرض کنیم X یک فضای برداری مختلط باشد. یک ضرب داخلی روی X نگاشتی مانند $\langle x,y\rangle \longrightarrow (x,y)$ از $X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که :

الف) به ازای هر x، y و z از X و هر a و b از $\mathbb{C}$، $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$

ب) به ازای هر x و y از X، $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$

ج) به ازای هر عضو ناصفر مانند x از X، $\langle x,x\rangle \in (۰,\infty)$

هر فضای برداری مختلط مجهز به یک ضرب داخلی یک فضای پیش هیلبرت نامیده می شود. اگر X یک فضای پیش هیلبرت باشد، به ازای هر $x \in X$ تعریف می کنیم :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

فضای پیش هیلبرتی که نسبت به نرم $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ کامل باشد یک فضای هیلبرت نامیده می شود.

تعریف ۲.۱.۱. (عملگر خطی)([۴])

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. نگاشت $T : X \longrightarrow Y$ خطی نامیده می شود هرگاه برای هر x و z در X و برای هر α و β در میدان اسکالرها داشته باشیم:

$$T(\alpha x+\beta z) = \alpha Tx + \beta Tz.$$

تعریف ۳.۱.۱. (عملگر کراندار)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. عملگر خطی $A : X \longrightarrow Y$ کراندار نامیده می شود هرگاه یک ثابت $c \geqslant ۰$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|A(x)\| \leq c\|x\|.$$

تعریف ٤.۱.۱. (عملگر الحاق)

هرگاه X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X, Y)$ آنگاه عملگر منحصر به فرد $B \in L(Y, X)$ که در تساوی $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ صدق می کند عملگر الحاق A می نامند و با $B = A^*$ نشان می دهند.

تعریف ٥.۱.۱. (عملگر خودتوان)

فرض کنیم X یک فضای هیلبرت باشد.عملگر $A : X \longrightarrow X$ را خودتوان (تصویر) گوییم هرگاه در شرط $A^۲ = A$ صدق کند.

تعریف ٦.۱.۱. (عملگر تصویر متعامد)

عملگر P در شرط های $P^۲ = P$ و $P^* = P$ صدق کند عملگر تصویر متعامد می نامند.

اگر ماتریس A معکوس پذیر نباشد، علاقمندیم که ماتریسی مانند B را جایگزین معکوس A کنیم که در شرایط زیر صدق می کند:

۱) برای یک رده بزرگتری از رده ماتریس های معکوس پذیر موجود باشد.

۲)تعدادی از خاصیت های معکوس معمولی را داشته باشد.

۳) وقتی A معکوس پذیر باشد به معکوس معمولی تبدیل شود.

با توجه به شرایط فوق تعریف زیر را داریم.

تعریف ۷.۱.۱. (معکوس تعمیم یافته یک ماتریس)([۱]) یک معکوس تعمیم یافته برای A، ماتریسی مانند B است که در شرط $ABA = A$ صدق کند.

تعریف ۸.۱.۱. (ماتریس الحاق)([۲])

ترانهاده مزدوج ماتریس $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریس $A^*=[\overline{a_{ji}}]_{n\times m}$ می باشد، که به آن ماتریس الحاق گویند.

تعریف ۹.۱.۱. (ماتریس هرمیتی)

ماتریس مربعی A که $A=A^*$ را ماتریس هرمیتی (خودالحاق) گویند.

تعریف ۱۰.۱.۱. (معادلات پنروز [۱])([۱])

پنروز در سال ۱۹۵۵ نشان داد که برای هر ماتریس متناهی A با درایه های مختلط، ماتریسی مانند B موجود است که در چهار معادله زیر صدق می کند و معادله های پنروز می نامیم :

۱) $ABA=A$

۲) $BAB=B$

۳) $(AB)^*=AB$

۴) $(BA)^*=BA$

تعریف ۱۱.۱.۱. (معکوس مور-پنروز [۲])

معکوس مور-پنروز ماتریس A، ماتریسی مانند B است که در چهار معادله پنروز صدق کند.

تعریف ۱۲.۱.۱. (معکوس درازین [۳])

عنصر b معکوس درازین عنصر $a\in\mathcal{A}$ است و به صورت $b=a^D$ نوشته می شود هرگاه در سه شرط زیر صدق کند:

۱) $ab=ba$

[۱] Penrose equation
[۲] Moor-Penrose inverse
[۳] Drazin inverse

۲) $b = b^{2}a$

۳) $a^k = ba^{k+1}$

برای هر عدد صحیح نامنفی k

تعریف ۱.۱.۱۳. (ماتریس معکوس پذیر)

ماتریس مربعی A معکوس پذیر نامیده می شود هرگاه ماتریسی $n \times n$ مانند B وجود داشته باشد، بطوریکه:

$$AB = BA = I_n.$$

تعریف ۱.۱.۱۴. (فضای سطری)

هرگاه $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$، فضای برداری تولید شده توسط بردارهای سطری ماتریس A، فضای سطری ماتریس A نامیده می شود و با $RS(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۱.۱.۱۵. (جبر)([۱۱])

یک جبر فضای برداری A است همراه با نگاشت دو خطی

$$A \times A \longrightarrow A$$

$$(a, b) \longrightarrow ab$$

بطوریکه:

$$a(bc) = (ab)c \qquad (a, b, c \in A)$$

تعریف ۱.۱.۱۶. ($*$-جبر)

یک بازگشت روی جبر A نگاشت مزدوج خطی $a \longrightarrow a^*$ است بطوریکه

$$a^{**} = a \quad , \quad (ab)^* = b^*a^*$$

برای هر $a, b \in A$.

جفت $(A, *)$ یک $*$-جبر نامیده میشود.

تعریف ۱.۱.۱۷. (نرم زیر ضربی)

یک نرم روی جبر A زیر ضربی است اگر

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$$

در این حالت جفت $(A, \|.\|)$ یک جبر نرمدار نامیده می شود.

تعریف ۱.۱.۱۸. (جبر باناخ)

جبر نرمدار A اگر کامل باشد جبر باناخ نامیده می شود و اگر یکدار باشد جبر باناخ یکدار نامیده می شود.

تعریف ۱.۱.۱۹. ($*$-جبر باناخ)([۱۱])

$*$ -جبر باناخ یک $*$ -جبر A است با یک نرم کامل زیرضربی بطوریکه:

$$\|a^*\| = \|a\| \quad , \quad (a \in A)$$

بعلاوه اگر A عنصر یکه ای داشته باشد بطوریکه $\|1\| = 1$ می گوییم A، $*$-جبر باناخ یکدار است.

تعریف ۱.۱.۲۰. (C^*-جبر)

C^*-جبر یک $*$- جبر باناخ است بطوریکه:

$$\|a^*a\| = \|a\|^2$$

تعریف ۱.۱.۲۱. (طیف یک عنصر)

طیف عنصر a عبارت است از مجموعه زیر:

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda 1 - a \notin Inv(A)\}$$

که A یک جبر یکدار است و $a \in A$.

تعریف ۲۲.۱.۱. (عنصر نرمال)

عنصر $a \in \mathcal{A}$ نرمال است اگر $aa^* = a^*a$.

تعریف ۲۳.۱.۱. (عنصر شبه قطبی)

عنصر $a \in \mathcal{A}$ شبه قطبی است اگر $0 \notin acc\sigma(a)$ که $acc\sigma(a)$ بیانگر نقاط انباشتگی $\sigma(a)$ است.

قضیه ۲۴.۱.۱. اگر $a \in \mathcal{A}$ معکوس پذیر مورپنرز باشد آنگاه $aa^\dagger = a^\dagger a$ اگر و فقط اگر $a \in \mathcal{A}^{\mathcal{D}}$ و $a^\dagger = a^D$.

اثبات . برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۲۵.۱.۱. $a \in \mathcal{A}^{\mathcal{D}}$ اگر و فقط اگر $a \in \mathcal{A}$ شبه قطبی باشد.

اثبات . برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۲۶.۱.۱. اگر $a \in \mathcal{A}$ شبه قطبی و نرمال باشد آنگاه قطبی ساده است.

اثبات . برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۲۷.۱.۱. عنصر a از یک C^*- جبر A معکوس پذیر مورپنرز است اگر وفقط اگر a^*a معکوس پذیر درازین باشد و اگر $a \in A^\dagger$ در این صورت:

$$a^\dagger = (a^*a)^D a^* = a^*(aa^*)^D$$

اثبات . برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۲۸.۱.۱. فرض کنید $a \in \mathcal{A}$. در این صورت شرایط زیر هم ارزند:

۱) $a^\dagger a = aa^\dagger$

۲) $a \in A^D \quad , \quad a^\dagger = a^D$

۳) a قطبی ساده است.

اثبات . برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۲۹.۱.۱. اگر $a \in \mathcal{A}^\mathcal{D}$ آنگاه $a^* \in \mathcal{A}^\mathcal{D}$ و $(a^*)^D = (a^D)^*$

اثبات . برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۳۰.۱.۱. فرض کنیم a, b عناصر جابجایی از $\mathcal{A}$ باشند بطوریکه $a^D, b^D \in \mathcal{A}^\mathcal{D}$. در اینصورت $(ab)^D$ وجود دارد و $(ab)^D = a^D b^D$

اثبات . برای اثبات به مرجع ([۸]) مراجعه شود. ■

قضیه ۳۱.۱.۱. فرض کنیم A, B ماتریس های مختلط باشند. در اینصورت فرمول کلاین عبارت است از:

$$(AB)^D = A[(BA)^D]^{۲}B$$

اثبات . برای اثبات به مرجع ([۳]) مراجعه شود. ■

فصل ۲

معکوس مور-پنروز حاصلضرب و تفاضل عملگرهای تصویر در C^* -جبرها

۱.۲ مقدمه

فرض کنیم H فضای هیلبرت، $B(H)$ مجموعه ی همه ی عملگرهای خطی کراندار روی H و $\mathcal{A}$ یک C^* -جبر با یکه e باشند. قرار می دهیم:

$$P(H) = \{p \in B(H) \; ; \; p^۲ = p = p^*\}$$

و

$$P(\mathcal{A}) = \{p \in \mathcal{A} \; ; \; p^۲ = p = p^*\}$$

فرض کنیم $a \in \mathcal{A}$ و $\sigma(a)$ طیف عنصر a و $acc\sigma(a)$ نقاط انباشتگی $\sigma(a)$ باشد. عنصر a شبه قطبی است اگر $۰ \notin acc\sigma(a)$ و قطبی است اگر شبه قطبی باشد و ۰ حداکثر یک قطب از $R(\lambda; a) = (\lambda e - a)^{-۱}$ باشد. در حالت خاص a قطبی ساده است اگر ۰ حداکثر یک قطب ساده از $R(\lambda; a)$ باشد.

در این فصل ما معکوس مور-پنروز حاصل ضرب و تفاضل عملگرهای تصویر را در یک C^* -جبر بررسی میکنیم. همچنین نشان می دهیم $pq - qp$ معکوس پذیر مور-پنروز است اگر و فقط اگر $p - q$ و pq معکوس پذیر مور-پنروز باشند.

۲.۲ قضایای اصلی

قضیه ۱.۲.۲. [۱۰] فرض کنید $a, b \in \mathcal{A}$ معکوس پذیر مور-پنروز باشند. اگر $a^*b = ۰ = ab^*$ آنگاه $a + b$ معکوس پذیر مور-پنروز است و $(a+b)^\dagger = a^\dagger + b^\dagger$.

اثبات . باید ثابت کنیم $a^\dagger + b^\dagger$ در چهار معادله تعریف معکوس مور-پنروز برای $a + b$ صدق می کند. برای بررسی خاصیت اول داریم:

$$(a+b)(a^\dagger + b^\dagger)(a+b) = aa^\dagger a + aa^\dagger b + ba^\dagger a + ba^\dagger b + ab^\dagger a + ab^\dagger b + bb^\dagger a + bb^\dagger b$$

از طرفی طبق یکی از خواص معکوس های مور-پنروز داریم:

$$a^\dagger = (a^*a)^\dagger a^* = a^*(aa^*)^\dagger \tag{۱.۲}$$

پس: .

$$aa^\dagger b = a(a^*a)^\dagger a^* b$$

اما طبق فرض مسأله $a^*b = ۰ = ab^*$ پس $aa^\dagger b = ۰$ و لذا داریم:

$$ba^\dagger a = ba^*(aa^*)^\dagger a = (ab^*)^*(aa^*)^\dagger a = ۰$$

$$ba^\dagger b = b(a^*a)^\dagger a^* b = ۰$$

$$ab^\dagger a = ab^*(bb^*)^\dagger a = ۰$$

$$ab^\dagger b = ab^*(bb^*)^\dagger b = ۰$$

$$bb^\dagger a = b(b^*b)^\dagger b^* a = b(b^*b)^\dagger (a^*b)^* = ۰$$

پس:

$$(a+b)(a^\dagger+b^\dagger)(a+b)=a+b$$

برای بررسی خاصیت دوم داریم:

$$a^\dagger+b^\dagger(a+b)a^\dagger+b^\dagger=a^\dagger aa^\dagger+a^\dagger ab^\dagger+a^\dagger ba^\dagger+a^\dagger bb^\dagger+b^\dagger aa^\dagger+b^\dagger ab^\dagger+b^\dagger ba^\dagger+b^\dagger bb^\dagger$$

اما طبق رابطه ۱.۲ داریم:

$$a^\dagger ab^\dagger=a^\dagger ab^*(bb^*)^\dagger=۰$$

$$a^\dagger ba^\dagger=(a^*a)^\dagger a^*ba^\dagger=۰$$

$$a^\dagger bb^\dagger=(a^*a)^\dagger a^*bb^\dagger=۰$$

$$b^\dagger aa^\dagger=(b^*b)^\dagger b^*aa^\dagger=(b^*b)^\dagger(a^*b)^*a^\dagger=۰$$

$$b^\dagger ab^*(bb^*)^\dagger=۰$$

$$b^\dagger ba^\dagger=b^\dagger ba^*(aa^*)^\dagger=b^\dagger(ab^*)^*(aa^*)^\dagger=۰$$

پس:

$$(a^\dagger+b^\dagger)(a+b)(a^\dagger+b^\dagger)=a^\dagger+b^\dagger.$$

دو معادله دیگر نیز بطور مشابه ثابت می شود. ■

قضیه ۲.۲.۲. ([۱۱]) فرض کنیم $a,b\in\mathcal{A}$. در اینصورت $\sigma(ab)\setminus\{۰\}=\sigma(ba)\setminus\{۰\}$

اثبات. داریم $a,b\in\mathcal{A}$ در اینصورت $ab-۱$ معکوس پذیر است اگر و فقط اگر $ba-۱$ معکوس پذیر با شد. این امر از این مطلب نتیجه می شود که اگر $ab-۱$ دارای معکوس c باشد، در اینصورت $ba-۱$ دارای معکوس $bca+۱$ است و از این هم ارزی نتیجه میشود که $\sigma(ab)\setminus\{۰\}=\sigma(ba)\setminus\{۰\}$. ■

قضیه ۳.۲.۲. ([۱۰]) فرض کنید $a \in \mathcal{A}$. در اینصورت عبارت های زیر هم ارز هستند:

۱) a معکوس پذیر مور-پنروز است

۲) a^*a معکوس پذیر مور-پنروزاست

۳) a^*a شبه قطبی است

۴) a^*a قطبی ساده است

اثبات . ۲ $\Longleftarrow$ ۱. اگر $x = a^\dagger$ آنگاه طبق تعریف معکوس مور- پنروز a داریم:

$$(ax)^* = x^*a^* = ax, \qquad (xa)^* = a^*x^* = xa$$

نشان می دهیم xx^* معکوس مور-پنروز a^*a است. تساوی های زیر از تعریف معکوس مور-پنروز بدست می آیند:

$$a^*axx^*a^*a = a^*axaxa = a^*a$$

$$x^*xaa^*x^*x = x^*xaxax = x^*x$$

بعلاوه

$$a^*axx^* = a^*x^*a^*x^* = a^*x^* = xa$$

و چون xa خود الحاق است یعنی $(xa)^* = xa$پس برای دو معادله باقی مانده در تعریف معکوس مور-پنروز داریم:

$$\begin{aligned}(a^*axx^*)^* &= (xx^*)^*(a^*a)^* = xx^*a^*a \\ &= xaxa = a^*x^*a^*x^* \\ &= a^*axx^*\end{aligned}$$

(۲.۲)

و

$$\begin{aligned}(xx^*a^*a)^* &= (a^*a)^*(xx^*)^* \\ &= a^*axx^* \\ &= a^*x^*a^*x^* = xaxa = xx^*a^*a\end{aligned}$$

(۳.۲)

۳ $\Longleftarrow$ ۲. فرض می کنیم $b = aa^*$ و $x = b^\dagger$. نشان می دهیم x^* نیز در معادلات تعریف شده در تعریف معکوس مور–پنروز b صدق می کند:

۱) $a^*ax^*a^*a = (a^*axa^*a)^* = (a^*a)^* = a^*a$

۲) $x^*a^*ax^* = (xa^*ax)^* = x^*$

۳) $(a^*ax^*)^* = ((xa^*a)^*)^* = (xa^*a)^* = a^*ax^*$

۴) $(x^*a^*a)^* = ((a^*ax)^*)^* = (a^*ax)^*) = x^*a^*a$

حال با توجه به یکتایی معکوس مور–پنروز $x = x^*$. در این صورت:

$$bx = a^*ax = (xa^*a)^* = xa^*a = xb$$

اما با توجه به قضیه ۲۵.۱.۱ ثابت می شود $b \in \mathcal{A}^\mathcal{D}$. اکنون با به کار بردن قضیه ۲۶.۱.۱ ثابت می شود b شبه قطبی است و حکم ثابت می شود. .

۴ $\Longleftarrow$ ۳. چون a^*a نرمال است و طبق فرض قضیه شبه قطبی است پس با استفاده از قضیه ۲۷.۱.۱ قطبی ساده است و حکم ثابت می شود.

۱ $\Longleftarrow$ ۴. فرض کنید a^*a قطبی ساده باشد. نشان می دهیم که عنصر $x = (a^*a)^Da^*$ معکوس مور–پنروز a است. در ابتدا مشاهده می کنیم که: $xax = (a^*a)^Da^*a(a^*a)^Da^*$

از طرفی چون a^*a نرمال است پس معکوس پذیر درازین است اگر وفقط اگر a^*a معکوس پذیر مور-پنروز باشد و در این حالت $(a^*a)^D = (a^*a)^\dagger$. پس:

$$xax = (a^*a)^\dagger a^*a(a^*a)^\dagger a^* = (a^*a)^\dagger a^* = (a^*a)^D a^* = x$$

با توجه به قطبیت ساده a^*a داریم:

$$a^*a = a^*a(a^*a)^\dagger a^*a = a^*a(a^*a)^D a^*a = a^*axa$$

چون a^*a قطب ساده است پس $a^*a \in A^D$ و $(a^*a)^D = (a^*a)^\dagger$ در این صورت:

$$(a - axa)^*(a - axa) = (a^* - a^*ax)(a - axa) = a^*a - a^*axa - a^*axa + a^*axaxa = ۰$$

با توجه به این نکته که در C^*-جبر ها همواره داریم $\|a^*a\| = \|a\|^۲$ پس:

$$\|a - axa\|^۲ = \|(a - axa)^*(a - axa)\| = ۰$$

بنابراین:

$$a - axa = ۰ \Longrightarrow axa = a$$

همچنین:

$$(ax)^* = (a(a^*a)^D a^*)^* = a(a^*a)^D a^* = ax$$

و

$$(xa)^* = ((a^*a)^D a^*a)^* = ((a^*a)^\dagger a^*a)^* = (a^*a)^\dagger a^*a = xa$$

پس a معکوس پذیر مور-پنروز است.

■

قضیه ۴.۲.۲. ([۱۰، ۸]) فرض کنیم $a \in \mathcal{A}$ نرمال باشد. در این صورت:

۱) a معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر a معکوس پذیر درازین باشد.

۲)اگر a معکوس پذیر درازین باشد در این صورت $a^\dagger = a^D$ و $a^۲ a^D = a$

اثبات . چون a نرمال است، پس $a^*a = aa^*$. در این صورت اگر $a \in \mathcal{A}^D$:

$$a^\dagger a = (a^*a)^D a^*a = (a^*a)^D aa^* = aa^*(a^*a)^D = aa^\dagger.$$

بنابراین طبق قضیه ۲۵.۱.۱ داریم: $a^\dagger = a^D$ و $a \in \mathcal{A}^D$. حال اگر $a \in A^D$ در اینصورت با استفاده از قضیه ۳۰.۱.۱ $a^* \in A^D$ و $a^*a \in A^D$ و لذا با استفاده از قضیه ۲۸.۱.۱ $a \in A^\dagger$ و حکم ثابت می شود.

■

قضیه ۵.۲.۲. ([۱۰، ۶]) فرض کنیم $p, q \in P(\mathcal{A})$. در اینصورت $e - p - q$ معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر pq معکوس پذیر مور–پنروز باشد.

اثبات . برای $p, q \in P(\mathcal{A})$ معادله زیر را داریم:

$$(\lambda - ۱ + p)(\lambda - p - q)(\lambda - ۱ + q) = \lambda((\lambda - ۱)^۲ - pq) \qquad (۴.۲)$$

حال اگر $\lambda \in \sigma(p + q)$ یعنی $\lambda - (p + q)$ معکوس پذیر نیست.اما با توجه به معادله ۴.۲ $(\lambda - ۱)^۲ - pq$ نیز معکوس پذیر نیست و این یعنی $(\lambda - ۱)^۲ \in \sigma(pq)$

در اینصورت باتوجه به قضیه ۳.۲.۲ pq معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر $(pq)(pq)^*$ معکوس پذیر مور–پنروز باشد و چون $p^* = p$ پس pqp معکوس پذیر مور –پنروز است اگر و فقط اگر pqp شبه قطبی باشد یعنی:

$$۰ \notin acc\sigma(pqp) \Longleftrightarrow ۰ \notin acc\sigma(ppq)$$

اما با توجه به قضیه ۲.۲.۲ و معادله ۴.۲

$$0 \notin acc\sigma(pq) \Longleftrightarrow 1 \notin acc\sigma(p+q)$$

و این یعنی $e-p-q$ معکوس پذیر مور-پنروز است.

■

قضیه ٦.۲.۲. ([۱۰]) فرض کنیم $p, q \in P(\mathcal{A})$ آنگاه عبارت های زیر هم ارز هستند:

۱) pq معکوس پذیر مور-پنروز است

۲) qp معکوس پذیر مور-پنروز است؛

۳) $(e-p)(e-q)$ معکوس پذیر مور-پنروز است؛

۴) $(e-q)(e-p)$ معکوس پذیر مور-پنروز است؛

۵) $0 \notin acc\sigma(pq)$

۶) pq معکوس پذیر درازین است؛

اثبات . ۶ $\Longleftrightarrow$ ۱. با استفاده از قضیه ۳.۲.۲ داریم pq معکوس پذیر مور-پنروز است اگر و فقط اگر $pq(pq)^*$ معکوس پذیر مور-پنروز باشد و این یعنی pqp معکوس پذیر مور-پنروز است چون:

$$pq(pq)^* = pqq^*p^* = pqp$$

و چون

$$(pqp)^2 = (pqp)^* = p^*q^*p^* = pqp$$

پس pqp نرمال است بنابراین طبق قضیه ۴.۲.۲ pqp معکوس پذیر درازین است اگر و فقط اگر pq معکوس پذیر درازین باشد و با توجه به قضیه ۳.۲.۲ نتیجه مطلوب را داریم و این اثبات ۱ به ۶ را کامل می کند .

۶ $\Longleftarrow$ ۵. اگر $0 \notin acc\delta(pq)$ انگاه pq شبه قطبی است و با توجه به قضیه ۳.۲.۲ داریم شبه قطبی است اگر و فقط اگر pqp معکوس پذیر مور-پنروز باشد اگر و فقط اگر pqp معکوس پذیر درازین باشد اگر و فقط اگر pq معکوس پذیر درازین باشد واین اثبات ۵ به ۶ را کامل می کند.

۳ $\Longrightarrow$ ۱. pq معکوس پذیر مور-پنروز است اگر و فقط اگر $e-p-q$ معکوس پذیر مور-پنروز باشد اگر وفقط اگر $e-(e-p)-(e-q)$ معکوس پذیر مور-پنروز باشد و این عبارت را با اضافه و کم کردن e به عبارت $e-p-q$ و فاکتور گیری از یک منفی به دست می آوریم و با توجه به قضیه ۴.۲.۲ $e-(e-p)-(e-q)$ معکوس پذیر مور-پنروز است اگر و فقط اگر $(e-p)(e-q)$ معکوس پذیر مور-پنروز باشد و این اثبات ۱ به ۳ را کامل می کند.

۴ $\Longleftarrow$ ۳. داریم $(e-p)(e-q)$ معکوس پذیر مور-پنروز است اگر و فقط اگر $e-(e-p)-(e-q)$ معکوس پذیر مور-پنروز باشد و این یعنی $e-(e-q)-(e-p)$ معکوس پذیر مور-پنروز است اگر وفقط اگر $(e-q)(e-p)$ معکوس پذیر مور-پنروز باشد و این اثبات ۳ به ۴ را کامل می کند.

از ۱ به ۲ نیز به همین صورت است چون با توجه به قضیه ۵.۲.۲ داریم pq معکوس پذیر مور-پنروز است اگر و فقط اگر $e-p-q$ معکوس پذیر مور-پنروز باشد و این یعنی $e-q-p$ معکوس پذیر مور-پنروز است پس qp معکوس پذیر مور-پنروز است. بنابراین از ۱ به ۲ رسیدیم. ■

قضیه ۷.۲.۲. ([۱۰])

فرض کنیم $p,q \in P(\mathcal{A})$ در این صورت گزاره های زیر هم ارزند:

۱) $p-q$ معکوس پذیر مور-پنروز است

۲) $p+q$ معکوس پذیر مور-پنروز است

۳) $p-qp$ معکوس پذیر مور-پنروز است

۴) $q-qp$ معکوس پذیر مور-پنروز است

۵) $q-pq$ معکوس پذیر مور-پنروز است

۶) $p - pq$ معکوس پذیر مور–پنروز است

اثبات. برای اثبات در $p-q$ یک e اضافه و کم می کنیم. در این صورت داریم: $p-q = e-e+p-q = e-(e-p)-q$ و با توجه به قضیه ۵.۲.۲ $e-(e-p)-q$ معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر $(e-p)q$ معکوس پذیر مور–پنروز باشد و این برابر است با $q - pq$ و این معادل بودن ۵ و ۱ را ثابت می کند.

برای اثبات قسمت بعدی در $p+q$ یک e اضافه و کم می کنیم. در این صورت داریم: $p + q = e - e + p + q = e - (-p) - (e - q)$

و با توجه به قضیه ۵.۲.۲ $e - (-p) - (e - q)$ معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر $-p(e - q)$ معکوس پذیر مور–پنروز باشد و این یعنی $-p + pq$ معکوس پذیر مور –پنروز است اگر و فقط اگر $p - pq$ معکوس پذیر مور–پنروز باشد و این معادل بودن ۵ و ۲ را ثابت می کند.

حال طبق قضیه ۶.۲.۲ چون داریم pq معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر qp معکوس پذیر مور–پنروز باشد در این صورت، $q - pq$ معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر $q - qp$ معکوس پذیر مور–پنروز باشد زیرا:

$$e - (e - p) - q = e - q - (e - p)$$

پس طبق قضیه ۵.۲.۲ $e - q - (e - p)$ معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر $q(e - p) = q - qp$ معکوس پذیر مور–پنروز باشد و این معادل بودن ۴ و ۵ را ثابت می کند.

اگر $p - q$ معکوس پذیر مور –پنروز باشد آنگاه $q - p$ معکوس پذیر مور–پنروز است. حال اگر $q - p$ معکوس پذیر مور–پنروز باشد آنگاه $e - e + q - p$ معکوس پذیر مور–پنروز است و با توجه به قضیه ۵.۲.۲ $e - (e - q) - p$ معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر $(e - q)p$ معکوس پذیر مور–پنروز باشد و این یعنی $p - qp$ معکوس پذیر مور–پنروز است و این معادل بودن ۱ و ۶ را ثابت می کند.

حال $p-qp$ معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر $p-pq$ معکوس پذیر مور–پنروز باشد چون:

$$e-(e-q)-p=e-p-(e-q)$$

پس $e-p-(e-q)$ معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر $p(e-q)$ معکوس پذیر مور–پنروز باشد. یعنی $p-pq$ معکوس پذیر مور–پنروز است و این معادل بودن ۳ و ۶ را ثابت می کند.

■

قضیه ۸.۲.۲. ([۱۰])

فرض کنیم $p\in P(\mathcal{A})$ و $a\in\mathcal{A}$ خود الحاق و معکوس پذیر مور–پنروز باشد. اگر $pa(e-p)=\cdot$ آنگاه:

$$pa^{\dagger}(e-p)=\cdot$$

اثبات . با توجه به قضیه ۴.۲.۲ چون در صورت قضیه گفته شده است a نرمال است پس a معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر a معکوس پذیر درازین باشد و $a^{\dagger}=a^{D}$. حال چون بنا به فرض داریم $pa(e-p)=\cdot$ آنگاه $pa=pap$. اما از طرفی داریم:

$$(e-p)ap=ap-pap=ap-pa=a(p-p)=\cdot$$

بنابر این:

$$a=pap+(e-p)a(e-p) \tag{۵.۲}$$

پس باتوجه به رابطه ۵.۲ داریم:

$$\sigma(pap)\setminus\{\cdot\}\subseteq\sigma(a)\setminus\{\cdot\}$$

زیرا اگر فرض کنیم $\lambda\in\sigma(pap)\setminus\{\cdot\}$ در این صورت با توجه به تعریف $\sigma(pap)$ داریم:

$$\lambda-pap\notin Inv(\mathcal{A})$$

اما با استفاده از رابطه ۵.۲ داریم:

$$\lambda - a - (e-p)a(e-p) \notin Inv(A)$$

یعنی $\lambda - a \notin Inv(\mathcal{A})$ و این یعنی $\lambda \in \sigma(a)$ پس:

$$\sigma(pap) \setminus \{۰\} \subseteq \sigma(a) \setminus \{۰\}$$

حال با توجه به این که $۰ \notin acc\sigma(a)$ داریم $۰ \notin acc\sigma(pap)$ پس طبق قضیه ۳.۲.۲ pap معکوس پذیر مور-پنروز است و چون $(pap)^* = pap$ یعنی pap نرمال است. پس طبق قضیه ۴.۲.۲ pap معکوس پذیر درازین است. به طور مشابه برای $(e-p)a(e-p)$ نیز به همین صورت داریم که معکوس پذیر درازین میشود و معکوس پذیر مور-پنروز است. حال با توجه به قضیه ۱.۱.۱ چون:

$$a = pap + (e-p)a(e-p)$$

بنابراین:

$$a^\dagger = (pap)^\dagger + [(e-p)a(e-p)]^\dagger$$

اما داریم:

$$p(pap)^\dagger = (pap)^\dagger, \qquad (pap)^\dagger p = (pap) \tag{۶.۲}$$

زیرا:

$$(e-p)(pap)^* = (e-p)(p^*a^*p^*) = (e-p)(pap) = pap - pap = ۰ \tag{۷.۲}$$

و طبق قضیه ۳.۲.۲ برای pap داریم:

$$(pap)^\dagger = (pap)^*((pap)(pap)^*)^\dagger$$

$$(pap)^*((pap)(pap))^\dagger = (pap)^*(papap)^\dagger$$

حال اگر طرفین رابطه فوق را در $(e-p)$ ضرب کنیم داریم:

$$(e-p)(pap)^\dagger = (e-p)(pap)^*(papap)^\dagger$$

حال با توجه به رابطه ۷.۲ داریم :

$$(e-p)(pap)^* = 0$$

پس :

$$(e-p)(pap)^\dagger = 0 \Longrightarrow (pap)^\dagger = p(pap)^\dagger \tag{۸.۲}$$

بنابراین:

$$[(e-p)a(e-p)]^\dagger = (e-p)[(e-p)a(e-p)]^\dagger$$

زیرا:

$$(e-(e-p))[(e-p)a(e-p)]^* = p[(e-p)a(e-p)] = 0$$

از طرفی باز هم طبق قضیه ۳.۲.۲ داریم:

$$[(e-p)a(e-p)]^\dagger = ((e-p)a(e-p))^*((e-p)a(e-p)[(e-p)a(e-p)]^*)^\dagger$$

حال اگر طرفین رابطه بالا را در $(e-(e-p))$ ضرب می کنیم سمت راست رابطه برابر با صفر می شود. پس:

$$(e-(e-p))[(e-p)a(e-p)]^\dagger = 0 \tag{۹.۲}$$

بنابراین:

$$(e-p)[(e-p)a(e-p)]^\dagger = [(e-p)a(e-p)]^\dagger \tag{۱۰.۲}$$

حال در تساوی که برای a به دست آوردیم روابط ۶.۲ و ۱۰.۲ را جایگزین می کنیم پس:

$$a^\dagger = (pap)^\dagger p + (e-p)[(e-p)a(e-p)]^\dagger$$

سپس طرفین را از راست در $(e-p)$ و از چپ در p ضرب می کنیم. بنابراین داریم:

$$pa^\dagger(e-p) = p(pap)^\dagger p(e-p) + p(e-p)[(e-p)a(e-p)]^\dagger(e-p)$$

حال با توجه به روابط ۸.۲ و ۹.۲ داریم:

$$pa^\dagger(e-p) = ۰$$

و نتیجه مطلوب را به دست آوردیم. ■

قضیه ۹.۲.۲. ([۱۰]) فرض کنیم $p, q \in P(\mathcal{A})$. اگر pq معکوس پذیر مور-پنروز باشد در این صورت گزاره های زیر برقرارند:

۱) $p(qp)^\dagger = (qp)^\dagger$

۲) $(qp)^\dagger q = (qp)^\dagger$

۳) $(qp)^\dagger pq = pq$

۴) $(pqp)^\dagger p = (pqp)^\dagger$

۵) $p[(e-p)(e-q)]^\dagger = -(qp)^\dagger(e-p)$

اثبات. با توجه به قضیه ۶.۲.۲ چون pq معکوس پذیر مور-پنروز است پس qp و $(e-p)(e-q)$ نیز معکوس پذیر مور-پنروز هستند.بنابر قضیه ۳.۲.۲ $(pq)(pq)^*$ نیز معکوس پذیر مور-پنروز است و این یعنی pqp معکوس پذیر مور-پنروز است. حال هریک از گزاره ها را ثابت می کنیم:

۱) می دانیم:

$$(e-p)(qp)^* = (e-p)(p^*q^*) = (e-p)(pq) = pq - pq = ۰ \qquad (۱۱.۲)$$

لذا:

$$(e-p)(qp)^* = ۰$$

بنابر قضیه ۳.۲.۲:

$$(qp)^\dagger = qp^*(qp(qp)^*)^\dagger = qp^*(qpq)^\dagger$$

پس اگر طرفین رابطه بالا را از چپ در $(e-p)$ ضرب کنیم طبق رابطه ۱۱.۲ داریم:

$$(e-p)(qp)^\dagger = (e-p)(qp)^*(qpq)^\dagger = ۰$$

بنابراین :

$$(e-p)(qp)^\dagger = (qp)^\dagger - p(qp)^\dagger = ۰$$

لذا :

$$(qp)^\dagger = p(qp)^\dagger$$

و این اثبات قسمت ۱ را کامل می کند.

۲) کاملاً مشابه اثبات قسمت ۱ است به این صورت که:

$$(qp)^*(e-q) = ۰$$

چون

$$(qp)^*(e-q) = (pq)(e-q) = pq - pq = ۰ \tag{۱۲.۲}$$

از طرفی طبق قضیه ۳.۲.۲ داریم: $(qp)^\dagger = (qp)^*(qpq)^\dagger$ حال طرفین رابطه بالا را از راست در $(e-q)$ ضرب می کنیم با توجه به رابطه ۱۰.۲.۲ داریم:

$$(qp)^\dagger(e-q) = (qpq)^\dagger(qp)^*(e-q) = ۰$$

پس:

$$(qp)^\dagger = (qp)^\dagger q$$

و اثبات قسمت ۲ کامل می شود.

۳) طبق قسمت ۲ داریم:

$$(qp)^\dagger q = (qp)^\dagger$$

حال طرفین رابطه بالا را در pq ضرب می کنیم پس:

$$(qp)^\dagger pq = [(qp)^\dagger q]pq \tag{۱۳.۲}$$

بنابر قضیه ۳.۲.۲ برای qp داریم:

$$(qp)^\dagger = pq(qpq)^\dagger \tag{۱۴.۲}$$

در رابطه ۱۳.۲ مساوی $(qp)^\dagger$ را با توجه به رابطه ۱۴.۲ قرار می دهیم.بنابراین داریم:

$$(qp)^\dagger pq = [pq(qpq)^\dagger q]pq$$

$$= pq(qpq)^\dagger qpq = pq[(qpq)^\dagger qp]pq$$

از طرفی طبق قضیه ۳.۲.۲:

$$(qpq)^\dagger qp = (pq)^\dagger$$

چون

$$(pq)^\dagger = ((pq)^* pq)^\dagger (pq)^*$$

پس:

$$(qp)^\dagger pq = pq(pq)^\dagger pq = pq \Longrightarrow (qp)^\dagger pq = pq$$

و به این صورت قسمت ۳ نیز ثابت می شود.

برای اثبات قسمت ۴ داریم

$$(pqp)^*(e-p) = (pqp)(e-p) = pqp - pqp = 0 \tag{۱۵.۲}$$

اما با توجه به قضیه ۳.۲.۲:

$$(pqp)^\dagger = ((pqp)(pqp)^*)^\dagger (pqp)^*$$

حال اگر طرفین رابطه بالا را از راست در $(e-p)$ ضرب کنیم داریم:

$$(pqp)^\dagger(e-p) = ((pqp)(pqp)^*)^\dagger (pqp)^*(e-p)$$

از طرفی طبق رابطه ۱۵.۲:

$$(pqp)^*(e-p) = 0$$

پس:

$$(pqp)^\dagger(e-p) = 0$$

و از این نتیجه می گیریم که:

$$(pqp)^\dagger = (pqp)^\dagger p$$

پس حکم ثابت شد.

برای اثبات قسمت ۵ با توجه به قسمت های ۱ و ۲ و قضیه ۳.۲.۲ داریم: اولاً

$$[(e-p)(e-q)]^*(e-(e-p)) = [(e-q)(e-p)]p = p - p - qp + qp = 0 \tag{۱۶.۲}$$

و

$$[(e-p)(e-q)]^\dagger = [(e-p)(e-q)]^*(e-p)(e-q))^\dagger[(e-p)(e-q)]^* \tag{۱۷.۲}$$

حال اگر طرفین رابطه فوق را از راست در $(e-(e-p))$ ضرب کنیم طرف راست رابطه ۱۷.۲ با توجه به رابطه ۱۶.۲ برابر صفر می شود. و لذا:

$$[(e-p)(e-q)]^{\dagger}(e-(e-p)) = 0$$

پس:

$$[(e-p)(e-q)]^{\dagger} = [(e-p)(e-q)]^{\dagger}(e-p)$$

حال با توجه به رابطه فوق و قسمت های ۱ و ۲ داریم:

$$p[(e-p)(e-q)]^{\dagger} + (qp)^{\dagger}(e-p) = p[(e-p)(e-q)]^{\dagger}(e-p) + p(qp)^{\dagger}(e-p) \tag{۱۸.۲}$$

بنابر قضیه ۳.۲.۲:

$$[(e-p)(e-q)]^{\dagger} = [(e-q)(e-p)(e-q)]^{\dagger}(e-q)(e-p) \tag{۱۹.۲}$$

و

$$(qp)^{\dagger} = (qp)^*((qp)(qp)^*)^{\dagger} = (pq)(qpq)^{\dagger} \tag{۲۰.۲}$$

اکنون روابط ۱۹.۲ و ۲۰.۲ را در ۱۸.۲ جایگزین می کنیم پس:

$$p([(e-p)(e-q)]^{\dagger} + (qp)^{\dagger})(e-p)$$

$$= p([(e-q)(e-p)(e-q)]^{\dagger}(e-p)(e-q) + (pq)(qpq)^{\dagger})(e-p)$$

و با توجه به قسمت ۴ و قضیه ۱.۱.۱ داریم:

$$p[(e-p)(e-q)]^{\dagger} + (qp)^{\dagger}(e-p)$$

$$= p([(e-q)(e-p)(e-q)]^{\dagger} + (qpq)^{\dagger})(e-p) = p[(e-q)(e-p)(e-q) + qpq]^{\dagger}(e-p)$$

$$= p[e-(p-q)^{۲}]^{\dagger}(e-p)$$

از طرفی:

$$p[e-(p-q)^{۲}](e-p) = p-p-pq+pqp+pq-pqp+pqp-pqp = ۰$$

حال با توجه به قضیه ۸.۱.۱ چون

$$p[e-(p-q)^{۲}](e-p) = ۰$$

پس:

$$p[e-(p-q)^{۲}]^{\dagger}(e-p) = ۰$$

بنابراین:

$$p[(e-p)(e-q)]^{\dagger} + (qp)^{\dagger}(e-p) = ۰$$

پس:

$$p[(e-p)(e-q)]^{\dagger} = -(qp)^{\dagger}(e-p)$$

و حکم ثابت می شود.

■

قضیه ۱۰.۲.۲. ([۱۰]) فرض کنیم $p, q \in P(\mathcal{A})$. در این صورت:

۱) اگر pq معکوس پذیر مور-پنروز باشد در این صورت:

$$(qp)^{\dagger} = pq - p[(e-p)(e-q)]^{\dagger}q$$

۲) اگر $p-q$ معکوس پذیر مور-پنروز باشد در این صورت:

$$(p-q)^{\dagger} = (p-pq)^{\dagger} + (pq-q)^{\dagger} = (p-qp)^{\dagger} + (qp-q)^{\dagger}$$

$$(p-q)^\dagger = p-q+q(p-qp)^\dagger-(q-qp)^\dagger p = p-q+(p-pq)^\dagger q-p(q-pq)^\dagger \qquad (۲۱.۲)$$

اثبات. با توجه به قضیه ۶.۲.۲ داریم pq معکوس پذیر مور–پنروز است اگر و فقط اگر $(e-p)(e-q)$ معکوس پذیر مور–پنروز باشد.

و همچنین با توجه به قضیه ۹.۲.۲ قسمت ۵:

$$p[(e-p)(e-q)]^\dagger = -(qp)^\dagger(e-p) \qquad (۲۲.۲)$$

پس با ضرب رابطه ۲۲.۲ در q داریم:

$$p[(e-p)(e-q)]^\dagger q = -(qp)^\dagger(e-p)q = -(qp)^\dagger q+(qp)^\dagger pq$$

حال بنابر قسمت های ۲ و ۳ قضیه ۹.۲.۲ :

$$(qp)^\dagger q = (qp)^\dagger \quad , \quad (qp)^\dagger pq = pq$$

پس:

$$p[(e-p)(e-q)]^\dagger q = -(qp)^\dagger + pq \Longrightarrow (qp)^\dagger = pq - p[(e-p)(e-q)]^\dagger q$$

و قسمت ۱ ثابت می شود.

برای اثبات قسمت ۲ قرار می دهیم:

$$p-q = p-pq+pq-q \qquad (۲۳.۲)$$

اما چون داریم :

$$(p-pq)(pq-q)^* = (p-pq)(qp-q) = pqp-pq-pqp+pq = ۰$$

و همچنین :

$$(p-pq)^*(pq-q) = (p-pq)(pq-q) = pq-pq-qpq+qpq = ۰$$

پس طبق قضیه ۱.۲.۲ برای رابطه ۲۳.۲ داریم:

$$(p-q)^\dagger = (p-pq)^\dagger + (pq-q)^\dagger$$

و بطور مشابه:

$$(p-q)^\dagger = (p-qp)^\dagger + (qp-q)^\dagger$$

حال برای به دست اوردن رابطه ۲۱.۲ داریم:

$$(p-pq) = p(e-q) \quad , \quad (pq-q) = (p-e)q$$

و طبق قسمت ۱:

$$(p-pq)^\dagger = [p(e-q)]^\dagger = p - qp - [q(e-p)]^\dagger p + q[q(e-p)]^\dagger p \qquad (۲۴.۲)$$

$$(pq-q)^\dagger = -[(e-p)q]^\dagger = -q + qp + q[(e-q)p]^\dagger - q[(e-q)p]^\dagger p \qquad (۲۵.۲)$$

پس با استفاده از روابط ۲۴.۲ و ۲۵.۲:

$$(p-q)^\dagger = p - qp - [q(e-p)]^\dagger p + q[q(e-p)]^\dagger p - q$$
$$+qp + q[(e-q)p]^\dagger - q[(e-q)p]^\dagger p$$

حال باید ثابت کنیم:

$$q[q(e-p)]^\dagger p - q[(e-q)p]^\dagger p = ۰ \qquad (۲۶.۲)$$

اما پنرز نشان داد p و q خود توان هستند، هرگاه دو تصویر متعامد k و f وجود داشته باشند بطوریکه $p=(kf)^\dagger$ در این صورت:([۱۳]) $p=kpf$

اما داریم:

$$(p-qp)^\dagger=[(e-q)p]^{\dagger]}$$

حال اگر قرار دهیم:

$$x=(p-qp)^\dagger=((e-q)p)^\dagger$$

و

$$y=(q-qp)^\dagger=(q(e-p))^\dagger$$

پس x و y خود توان هستند و

$$x=(e-q)xp \qquad , \qquad y=(e-p)yq \tag{۲۷.۲}$$

اما طبق قسمت ۱:

$$(p-q)^\dagger=(p-qp)^\dagger+(qp-q)^\dagger$$

و اگر مساوی آنها را بر اساس x و y قرار دهیم داریم:

$$(p-q)^\dagger=x-y$$

اکنون رابطه ۲۷.۲ را برای x و y جایگزین می کنیم در این صورت:

$$(p-q)^\dagger=(e-q)xp-(e-p)yq \tag{۲۸.۲}$$

حال برای اثبات رابطه ۲۶.۲ در واقع کافیست ثابت کنیم $q(p-q)^\dagger=0$.

که اگر مساوی $(p-q)^\dagger$ را از رابطه ۲۸.۲ قرار دهیم داریم:

$$q[(e-q)xp-qy(e-p)]p=0$$

پس رابطه ثابت میشود. در این صورت:

$$(p-q)^\dagger = p-q+q(p-qp)^\dagger-(q-qp)^\dagger p$$

$$= p-q+(p-pq)^\dagger q-p(q-pq)^\dagger$$

که این قضیه را ثابت می کند.

■

قضیه ۱۱.۲.۲. ([۱۰]) فرض کنید $p,q \in P(\mathcal{A})$ در این صورت عبارت های زیر هم ارز هستند:

۱) $[(pq)^\dagger]^m = [(qp)^\dagger]^n$ ۱ $\geq m,n$برای بعضی

۲) $pq=qp$

۳) $[(pq)^\dagger]^m = [(qp)^\dagger]^n$ ۱ $\geq m,n$برای همه

اثبات . ۲ $\Longrightarrow$ ۱. چون $(pq)^\dagger p=(pq)^\dagger$ در این صورت اگر طرفین قسمت ۱ را در p ضرب کنیم آنگاه

$$p[(pq)^\dagger]^m = p[(qp)^\dagger]^n$$

اما با استقرا ثابت می کنیم $p^n=p$. به این صورت که اگر $k=۲$ باشد در این صورت طبق فرض $p^۲=p$.

حال فرض کنیم فرض استقرا برای $k=n-۱$ درست باشد یعنی $p^{n-۱}=p$. حال باید برای $k=n$ ثابت کنیم.

داریم:

$$p^n=p^{n-۱}p=pp=p^۲=p$$

وحکم استقرا ثابت شد. پس با توجه به قضیه ۹.۲.۲ قسمت ۲:

$$p[(pq)^\dagger]^m = p[(qp)^\dagger]^n = [p(qp)^\dagger]^n$$

$$= [(qp)^\dagger]^n = [(pq)^\dagger]^m$$

اما طبق قضیه ۹.۲.۲ قسمت ۳:

$$qp[(pq)^\dagger]^m = [qp(pq)^\dagger]^m = [qp]^m = qp$$

و بطور مشابه داریم:

$$[(qp)^\dagger]^n pq = [(qp)^\dagger pq]^n = [pq]^n = pq$$

پس:

$$qp = qp[(pq)^\dagger]^m = q[p(pq)^\dagger]^m = [(pq)^\dagger]^m$$

و بنابراین:

$$pq = qp$$

و لذا از ۱ به ۲ رسیدیم.

۳ $\Longrightarrow$ ۲. داریم:

$$[(pq)^\dagger]^m = [(pq)^\dagger]^n = [(qp)^\dagger]^n$$

۱ $\Longrightarrow$ ۳. کاملاً واضح است. ■

قضیه ۱۲.۲.۲. ([۹، ۱۰]) فرض کنید $p, q \in P(\mathcal{A})$. اگر pq معکوس پذیر مور-پنروز باشد، در اینصورت عبارت های زیر هم ارز هستند:

۱) $(pq)^\dagger = (pq)^D$

۲) $(pq)^\dagger = pq$

۳) $(pq)^D = pq$

۴) $(pq)^\dagger = qp$

۵) $(pq)^D = qp$

۶) $pq = qp$

اثبات. ۶ $\Longrightarrow$ ۴. اگر داشته باشیم $(pq)^\dagger = qp$ در این صورت طبق تعریف معکوس مور–پنروز:

$$pq(qp)pq = pq$$

حال اگر طرفین رابطه فوق را از راست در یک p ضرب کنیم در این صورت داریم:

$$pqppqp = pqp$$

پس $(pqp)^۲ = pqp$. چون داریم:

$$pq = pqp + pq(e-p) = pqp + pq - pqp \tag{۲۹.۲}$$

$$qp = pqp + (e-p)qp = pqp + qp - pqp \tag{۳۰.۲}$$

پس از روابط ۲۹.۲ و ۳۰.۲ نتیجه می شود:

$$pqp = pq(qp) = [pqp + pq(e-p)][pqp + (e-p)qp]$$

و لذا:

$$pqp = pqp + pqpqp - pqpqp + pqpqp - pqpqp + pqqp - pqpqp$$

$$= pqp + pqqp - pqpqp = pqp + pq(e-p)qp$$

پس:

$$pqp = pqp + pq(e-p)qp$$

در نتیجه داریم:

$$pq(e-p)qp = ۰$$

بنابراین:

$$qp = pqp, \qquad pq = pqp$$

پس $pq = qp$ و حکم نتیجه میشود.

۴ $\Longleftarrow$ ۱. اگر $(pq)^\dagger = (pq)^D$ در این صورت اگر طرفین این رابطه را از راست در p ضرب کنیم داریم:

$$(pq)^\dagger p = (pq)^D p$$

اما $(pqp)^D = (pq)^D p$. زیرا بنابر فرمول کلاین اگر قرار دهیم $a = pq$ و $b = p$ در این صورت:

$$(pqp)^D = pq[(pq)^D]^۲ p = ([(pq)^D]^۲ pq)p \qquad (۳۱.۲)$$

حال طبق فرمول معکوس های درازین

$$(pq)^D = [(pq)^D]^۲ pq$$

پس با جایگزاری در رابطه ۳۱.۲ داریم:

$$(pqp)^D = (pq)^D p \qquad (۳۲.۲)$$

پس طبق قضیه ۹.۲.۲ و قسمت ۱ ورابطه ۳۲.۲ داریم:

$$(pq)^\dagger = (pq)^\dagger p = (pq)^D p = (pqp)^D$$

اما از طرفی روابط زیر را داریم:

اولا چون pqp نرمال است پس معکوس درازین و مور-پنروز آن باهم برابر است یعنی:

$$(pq)^\dagger = (pqp)^D = (pqp)^\dagger$$

اما داریم:

$$qp(pqp)^\dagger = q(p(pqp)^\dagger) = q(pqp)^\dagger = (pqp)^\dagger$$

که همه این روابط از قضیه ۹.۲.۲ نتیجه می شود. پس:

$$(pq)^\dagger = (pqp)^\dagger = qp(pqp)^\dagger = qp(pq)^\dagger = qp$$

یعنی $(pq)^\dagger = qp$ و این حکم را ثابت می کند.

۶ $\Longrightarrow$ ۲.

اگر $(pq)^\dagger = qp$ آنگاه طبق تعریف معکوس مور-پنروز داریم:

$$pq(pq)^\dagger pq = pq$$

پس $pqpqpq = pq$ و بنابراین $(pqp)^۳ = pqp$ و با استفاده از قضیه نمایش گلفند $(pqp)^۲ = pqp$ و بقیه روند اثبات مشابه اثبات ۴ به ۶ است.([۹])

۶ $\Longrightarrow$ ۳.

اگر $(pq)^D = pq$ انگاه طبق فرمول کلاین $(pqp)^D = (pq)^D p$. از طرفی باتوجه به این که $(pq)^D = pq$ پس:

$$(pqp)^D = (pq)^D p = pqp$$

اما باتوجه به تعریف معکوس درازین:

$$(pqp)^D = [(pqp)^D]^2 pqp$$

پس $pqp = (pqp)^3$. و بقیه روند اثبات مشابه ۲ به ۶ است.

۶ $\Longrightarrow$ ۵. اگر $(pq)^D = qp$ انگاه طبق فرمول کلاین $(pqp)^D = (qp)^D p$ و چون $(pq)^D = qp$ پس $(pqp)^D = qp$. بنابراین qp خود الحاق است یعنی $pq = qp$ و حکم ثابت می شود. ■

در ادامه ابتدا شرط لازم و کافی برای معکوس پذیری مور-پنروز $pq - qp$ بیان می کنیم و سپس فرمولی برای $(pq - qp)^\dagger$ و $(p - q)^\dagger$ زمانی که $p, q \in P(A)$ باشد به دست می اوریم.

قضیه ۱۳.۲.۲. ([۷]) فرض کنید $p, q \in P(A)$ در اینصورت:

۱) $pq - qp$ معکوس پذیر مور -پنروز است اگر و فقط اگر pqp و $p - q$ معکوس پذیر مور -پنروز باشد.

در این حالت:

$$(pq - qp)^\dagger = (pqp)^\dagger (p - q)^\dagger - (p - q)^\dagger (pqp)^\dagger$$

۲)اگر $pq - qp$ معکوس پذیر مور -پنروز باشد آنگاه:

$$(pq - qp)^\dagger (p - q)^\dagger = -(p - q)^\dagger (pq - qp)^\dagger$$

اثبات . شرط کافی: داریم:

$$pq(e - p)qp = pqp(p + q - pq - qp) = pqp(p - q)^2 = (p - q)^2 pqp$$

زیرا:

$$(pq - pqp)qp = pqp - pqpqp$$

حال اگر در رابطه فوق یک $pqpq$ اضافه و کم کنیم و از pqp فاکتور بگیریم در اینصورت:

$$pq(e - p)qp = pqp(p + q - pq - qp) = pqp(p - q)^2 \tag{۳۳.۲}$$

پس رابطه ثابت می شود. با توجه به رابطه ۳۳.۲ و قضیه ۴.۲.۲ چون $(p-q)^۲$ و pqp نرمال هستند پس اگر pq و $p-q$ معکوس پذیر مور–پنروز باشند در اینصورت $(p-q)^۲$ و pqp معکوس پذیر درازین هستند. و لذا $(p-q)^۲pqp$ نیز معکوس پذیر درازین می شود پس $pq(e-p)qp$ نیز معکوس پذیر درازین است و

$$[pq(e-p)qp]^D = [pqp(p-q)^۲]^D = [(p-q)^۲]^D(pqp)^D$$

حال چون pqp و $(p-q)^۲$ نرمال و معکوس پذیر درازین هستند پس $pq(e-p)$ و $(e-p)qp$ معکوس پذیر مور–پنروز می شوند و با توجه به قضیه ۱.۱.۱ چون:

$$[pq(e-p)]^*(e-p)qp = pq(e-p)[(e-p)qp]^* = ۰$$

پس $pq(e-p)+(e-p)qp = pq-qp$ معکوس پذیر مور–پنروز است و

$$[pq-qp]^\dagger = [pq(e-p)]^\dagger - [(e-p)qp]^\dagger$$

شرط لازم: چون $pq-qp$ نرمال است بنابراین اگر $pq-qp$ معکوس پذیر مور–پنروز باشد در اینصورت طبق قضیه ۳.۲.۲ $(pq-qp)(pq-qp)^* = (pq-qp)^۲$ معکوس پذیر مور–پنروز است. اما داریم:

$$(pq-qp)^۲ = [pq(e-p)-(e-p)qp]^۲ = -[pq(e-p)qp+(e-p)qpq(e-p)]$$

بنابراین:

$$\sigma(pq(e-p)qp) \setminus \{۰\} \subseteq \sigma(-(pq-qp))^۲ \setminus \{۰\}$$

و از این نتیجه می شود که اگر

$$۰ \notin acc\sigma(-(pq-qp))^۲$$

پس:

$$۰ \notin acc\sigma(pq(e-p)qp)$$

حال با استفاده از قضیه نگاشت طیفی داریم:

$$\sigma(pq(e-p)qp) = \{\lambda - \lambda^{2}; \lambda \in \sigma(pqp)\}$$

پس $0 \notin acc\sigma(pqp)$ یعنی pqp شبه قطبی است و با توجه به قضیه **۳.۲.۲** $(pqp)(pqp)^* = pqp$ معکوس پذیر مور-پنروز است.

بطور مشابه اگر

$$0 \notin acc\sigma((e-p)qpq(e-p))$$

انگاه:

$$0 \notin acc\sigma((e-p)q(e-p))$$

زیرا:

$$(e-p)qpq(e-p) = (e-p)q[e-(e-p)]q(e-p) = (e-p)q(e-p) - [(e-p)q(e-p)]^{2}$$

بنابراین $(e-p)q(e-p)$ شبه قطبی است پس معکوس پذیر درازین می شود و بنا به قضیه **۶.۲.۲** $(e-p)q(e-p)$ معکوس پذیر مور-پنرو ز است. چون:

$$[(e-p)q(e-p)]^{2} = [(e-p)q(e-p)]^* = (e-p)q(e-p)$$

پس:

$$(e-p)q(e-p) \in P(A)$$

از طرفی طبق قضیه ۷ چون $(e-p)q(e-p)$ معکوس پذیر مور -پنروز است و

$$(e-p)q(e-p) = q - qp - pq + pqp = q - qp$$

پس $p-q$ معکوس پذیر مور -پنروز است. اما داریم:

$$qp(p-q)^۲ = qp(p+q-pq-qp) = qpp + qpq - qppq - qpqp$$

$$= (p+q-qp-pq)qp = (p-q)^۲qp$$

پس:

$$qp[(p-q)^۲]^D = [(p-q)^۲]^D qp$$

بنابراین:

$$[pq(e-p)]^\dagger = (q-p)qp[pq(e-p)qp]^D$$

$$= -(p-q)qp[(p-q)^۲]^D(pqp)^D$$

$$= -(p-q)^D q(pqp)^D$$

چون:

$$\begin{aligned}
(pqp)^\dagger(e-q)(p-q)^\dagger &= (pqp)^\dagger p(p-q)(p-q)^\dagger \\
&= (pqp)^\dagger(p-q)^۲[(p-q)^۲]^\dagger \\
&= (pqp)^D(p-q)^۲[(p-q)^۲]^D \\
&= (p-q)^۲[(p-q)^۲]^D(pqp)^D \\
&= (p-q)^D(p-q)[p(pqp)^\dagger] \\
&= (p-q)^\dagger(e-q)(pqp)^\dagger
\end{aligned}$$

(۳۴.۲)

انگاه:

$$
\begin{aligned}
(pq-qp)^\dagger &= [pq(e-p)]^\dagger - [(e-p)qp]^\dagger \\
&= -(p-q)^\dagger q(pqp)^\dagger + (pqp)^\dagger q(p-q)^\dagger \\
&= (pqp)^\dagger (p-q)^\dagger - (p-q)^\dagger (pqp)^\dagger \\
&+ [(p-q)^\dagger (e-q)(pqp)^\dagger - (pqp)^\dagger (e-q)(p-q)^\dagger] \\
&= (pqp)^\dagger (p-q)^\dagger - (p-q)^\dagger (pqp)^\dagger
\end{aligned}
\tag{۳۵.۲}
$$

و حکم ثابت می شود. ■

فصل ۳

معکوس مور-پنروز حاصلضرب و تفاضل عملگرهای تصویر در فضای ماتریس های $m \times n$

۱.۳ مقدمه

در این فصل برای دو ماتریس دلخواه A و B معکوس مور-پنروز $P_A P_B$ و $P_A - P_B$ را بررسی می کنیم، بطوریکه $P_A = AA^\dagger$.

۲.۳ قضایای اصلی

قضیه ۱.۲.۳. ([۱۴]) فرض کنید A و B به ترتیب ماتریس های $m \times n$ و $n \times p$ باشند در این صورت قانون ترتیب عکس مختلط

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger - B^\dagger T^\dagger A^\dagger$$

برقرار است اگر و فقط اگر A و B در دو تساوی بردی زیر صدق کنند:

$$R(AA^*AB) = R(AB)$$

$$R[(ABB^*B)^*] = R[(AB)^*]$$

بطوریکه در قانون ترتیب عکس مختلط $T = (I_n - BB^\dagger)(I_n - A^\dagger A)$.

اثبات . برای اثبات به مرجع [۱۴] مراجعه شود. ■

قضیه ۳.۲.۲. ([۱۳]) فرض کنید A و B به ترتیب ماتریس های $m \times n$ و $m \times k$ باشند در این صورت

$$(P_A P_B)^\dagger = P_B P_A - P_B[(I_m - P_B)(I_m - P_A)]^\dagger P_A$$

اثبات . برای استفاده از قانون ترتیب عکس مختلط باید P_A و P_B در دو تساوی بردی زیر صدق کنند:

۱) $R(P_A P_A^* P_A P_B) = R(P_A P_B)$

۲) $R[(P_A P_B P_B^* P_B)^*] = R[(P_A P_B)^*]$

اما طبق تعریف P_A و P_B:

$$P_A = P_A^* = P_A^2 \qquad P_A = P_A^\dagger$$

$$P_B = P_B^* = P_B^2 \qquad P_B = P_B^\dagger$$

پس داریم:

۱)

$$R(P_A P_A^* P_A P_B) = R(P_A^2 P_A P_B) = R(P_A P_A P_B) = R(P_A^2 P_B) = R(P_A P_B)$$

۲)

$$R[(P_AP_BP_B^*P_B)^*] = R[(P_AP_B^{۲}P_B)^*] = R[(P_AP_BP_B)^*] = R[(P_AP_B^{۲})^*] = R[(P_AP_B)^*]$$

بنابراین طبق قضیه ۱.۲.۳ نتیجه می شود:

$$(P_AP_B)^\dagger = P_B^\dagger P_A^\dagger - P_B^\dagger[(I_n - P_BP_B^\dagger)(I_n - P_A^\dagger P_A)]^\dagger P_A^\dagger$$

اما چون:

$$P_BP_B^\dagger = P_B, \qquad P_A^\dagger P_A = P_A$$

و

$$P_A = P_A^\dagger, \qquad P_B = P_B^\dagger$$

پس:

$$(P_AP_B)^\dagger = P_BP_A - P_B[(I_m - P_B)(I_m - P_A)]^\dagger P_A$$

■

.

یادآوری :در فصل ۲ بیان شد اگر M و N دو ماتریس با اندازه یکسان باشند و $MN^* = ۰ = N^*M$ در این صورت

$$(M + N)^\dagger = M^\dagger + N^\dagger$$

حال با استفاده از این قضیه به بیان و اثبات قضایای زیر می پردازیم.

قضیه ۳.۲.۳. ([۱۳]) اگر A و B به ترتیب ماتریس های $m \times n$ و $m \times k$ باشند آنگاه

$$(P_A - P_B)^\dagger = (P_A - P_A P_B)^\dagger + (P_A P_B - P_B)^\dagger = (P_A - P_B P_A)^\dagger + (P_B P_A - P_B)^\dagger \quad (۱.۳)$$

اثبات . P_A و P_B خود توان هرمیتی هستند زیرا باتوجه به تعریف و داریم:

$$P_A^{۲} = P_A^* = P_A$$

و

$$P_B^{۲} = P_B^* = P_B$$

اما:

$$(P_A - P_A P_B)(P_A P_B - P_B)^* = (P_A P_B - P_B)^*(P_A - P_A P_B) = ۰ \quad (۲.۳)$$

زیرا:

$$(P_A - P_A P_B)(P_A P_B - P_B)^* = (P_A - P_A P_B)(P_B^* P_A - P_B^*)$$
$$= P_A P_B^* P_A - P_A P_B^* - P_A P_B P_B^* P_A - P_A P_B P_B^* = ۰$$

(۳.۳)

و

$$(P_A - P_B P_A)(P_B P_A - P_B)^* = (P_B P_A - P_B)^*(P_A - P_B P_A) = ۰ \quad (۴.۳)$$

زیرا:

$$(P_A - P_B P_A)(P_B P_A - P_B)^* = (P_A - P_B P_A)(P_A^* P_B^* - P_B^*)$$
$$= P_A P_A^* P_B^* - P_A P_B^* - P_B P_A P_A^* P_B^* - P_B P_A P_B^* = ۰$$

(۵.۳)

حال اگر قرار دهیم:

$$M = (P_A - P_A P_B), \qquad N = (P_A P_B - P_B)$$

در این صورت شرایط قضیه ۱.۲.۲ را داریم. زیرا طبق رابطه (۱.۳) داریم $MN^* = N^*M = 0$ پس:

$$(P_A - P_A P_B + P_A P_B - P_B)^\dagger = (P_A - P_A P_B)^\dagger + (P_A P_B - P_B)^\dagger$$

و اگر $M = P_A - P_B P_A$ و $N = P_B P_A - P_B$ طبق رابطه رابطه (۲.۳) داریم $MN^* = N^*M = 0$ پس:

$$(P_A - P_B P_A + P_B P_A - P_B)^\dagger = (P_A - P_B P_A)^\dagger + (P_B P_A - P_B)^\dagger$$

■

پنروز نشان داد [۱۲] که ماتریس مربعی k خود توان است اگر و فقط اگر تصویر های متعامد E و F وجود داشته باشند بطوریکه $K = (EF)^\dagger$

در این حالت $K = EKF$.

حال اگر قرار دهیم:

$$X = (P_A - P_B P_A), \qquad Y = -(P_B P_A - P_B)^\dagger = (P_B - P_B P_A)^\dagger$$

بر طبق این حکم به این نتیجه می رسیم که X و Y خود توان هستند. زیرا:

$$X = (P_A - P_B P_A) = (P_A(I_m - P_B))^\dagger$$

و

$$Y = (P_B - P_B P_A)^\dagger = (P_B(I_m - P_A))^\dagger$$

پس

$$X = P_A X (I_m - P_B), \qquad Y = (I_m - P_A) Y P_B$$

بنابراین قضیه زیر را داریم.

قضیه ۴.۲.۳. ([۱۳]) فرض کنیم A و Bماتریس های $m \times n$ و $m \times k$ باشند. در این صورت معکوس مور-پنروز $P_A - P_B$ می تواند به صورت زیر بیان شود:

$$(P_A - P_B)^\dagger = X - Y$$

بطوریکه X و Y در خواص زیر صدق می کنند:

$$X^۲ = X, \qquad Y^۲ = Y, \qquad XY^* = Y^*X = ۰$$

.

قضیه ۵.۲.۳. ([۱۳]) فرض کنید A و B بترتیب ماتریس های $m \times n$ و $m \times k$ باشند در این صورت

$$P_A(P_A - P_B)^\dagger P_B = P_B(P_A - P_B)^\dagger P_A = ۰ \tag{۶.۳}$$

اثبات . طبق قضیه ۴.۲.۳ و تعریفی که برای X و Y ارائه دادیم داریم:

$$(P_A - P_B)^\dagger = X - Y = P_AX(I_m - P_B) - (I_m - P_A)YP_B = P_AX - P_AXP_B - YP_B + P_AYP_B$$

پس

$$\begin{aligned} P_A(P_A - P_B)^\dagger P_B &= P_A(P_AX - P_AXP_B - YP_B + P_AYP_B)P_B \\ &= P_A^۲XP_B - P_A^۲XP_B^۲ - P_AYP_B^۲ + P_A^۲YP_B^۲ \end{aligned}$$

(۷.۳)

و چون $P_A = P_A^2$ و $P_B = P_B^2$ پس رابطه بالا برابر است با:

$$P_A X P_B - P_A X P_B - P_A Y P_B - P_A Y P_B = 0$$

و $P_B(P_A - P_B)^\dagger P_A = 0$ بطور مشابه اثبات می شود. ■

اما در ادامه طبق تعریف معکوس مور-پنروز $(P_A - P_B)$ داریم:

$$(P_A - P_B)(P_A - P_B)^\dagger (P_A - P_B) = P_A - P_B.$$

لذا:

$$(P_A - P_B)(P_A - P_B)^\dagger (P_A - P_B) = P_A(P_A - P_B)^\dagger P_A - P_A(P_A - P_B)^\dagger P_B - P_B(P_A - P_B)^\dagger P_A + P_B(P_A - P_B)^\dagger P_B.$$

و بنا به رابطه (۳.۳) :

$$P_A(P_A - P_B)^\dagger P_B = P_B(P_A - P_B)^\dagger P_A = 0,$$

پس:

$$P_A(P_A - P_B)^\dagger P_A - P_B(P_B - P_A)^\dagger P_B = P_A - P_B,$$

که این رابطه کاربرد فراوانی در معکوس های مور-پنروز دارد.

اما از طرفی داریم:

$$(P_A - P_A P_B)^\dagger = P_A - P_B P_A - (I_m - P_B(P_B - P_B P_A)^\dagger P_A. \quad (۸.۳)$$

$$(P_A P_B - P_B)^\dagger = -P_B + P_B P_A + P_B(P_A - PBP_A)^\dagger (I_m - P_A). \quad (۹.۳)$$

$$(P_A - P_B P_A)^\dagger = P_A - P_A P_B - P_A(P_B - P_A P_B)^\dagger (I_m - P_B). \quad (۱۰.۳)$$

$$(P_B P_A - P_B)^\dagger = -P_B + P_A P_B + (I_m - P_A)(P_A - P_A P_B)^\dagger P_B. \tag{۱۱.۳}$$

حال به اثبات رابطه (۴.۳) می پردازیم.

با استفاده از قضیه ۲.۲.۳ داریم:

$$\begin{aligned}(P_A - P_A P_B)^\dagger &= (P_A(I_m - P_B)^\dagger) \\ &= (I_m - P_B)P_A - (I_m - P_B)[P_B(I_m - P_A)]^\dagger P_A \\ &= P_A - P_B P_A - (I_m - P_B)(P_B - P_B P_A)^\dagger P_A\end{aligned}$$

(۱۲.۳)

و سایر رابطه ها به طور مشابه اثبات می شوند. حال با جایگذاری این روابط در رابطه (۱.۳) داریم:

$$(P_A - P_B)^\dagger = P_A - P_B + P_B(P_A - P_B P_A)^\dagger (I_m - P_A) - (I_m - P_B)(P_B - P_B P_A)^\dagger P_A$$

و

$$(P_A - P_B)^\dagger = P_A - P_B + (I_m - P_A)(P_A - P_A P_B)^\dagger P_B - P_A(P_B - P_A P_B)^\dagger (I_m - P_B)$$

و همچنین:

$$P_B(P_A - P_B P_A)^\dagger P_A - P_B(P_B - P_B P_A)^\dagger P_A = P_B(P_A - P_B)^\dagger P_A = ۰$$

و

$$P_A(P_A - P_A P_B)^\dagger P_B - P_A(P_B - P_A P_B)^\dagger P_B = P_A(P_A - P_B)^\dagger P_B = ۰$$

زیرا با توجه به قضیه ۳.۲.۳ داریم:

$$P_B(P_A - P_B)^\dagger P_A = P_B(P_A - P_B P_A)^\dagger P_A - P_B(P_B - P_B P_A)^\dagger P_A$$

و از طرفی طبق قضیه ۵.۲.۳:

$$P_B(P_A - P_B)^\dagger P_A = 0$$

پس:

$$P_B(P_A - P_BP_A)^\dagger P_A - P_B(P_B - P_BP_A)^\dagger P_A = P_B(P_A - P_B)^\dagger P_A = 0$$

رابطه دیگر نیز به همین صورت ثابت می شود. حال با استفاده از این روابط قضیه زیر را داریم.

قضیه ۶.۲.۳. ([۱۳]) فرض کنیم A و B بترتیب ماتریس های $m \times n$ و $m \times k$ باشند در این صورت

$$(P_A - P_B)^\dagger = P_A - P_B + P_B(P_A - P_BP_A)^\dagger - (P_B - P_BP_A)^\dagger P_A \tag{۱۳.۳}$$

$$(P_A - P_B)^\dagger = P_A - P_B + (P_A - P_AP_B)^\dagger P_B - P_A(P_B - P_AP_B)^\dagger \tag{۱۴.۳}$$

اثبات . با توجه به روابط بیان شده ثابت می شود. ■

قضیه ۷.۲.۳. ([۱۳]) فرض کنیم A و B به ترتیب ماتریس های $m \times n$ و $m \times k$ باشند در این صورت چهار عبارت زیر هم ارز هستند:

۱) $(P_A - P_B)^\dagger = P_A - P_B$

۲) $P_B(P_A - P_BP_A)^\dagger = (P_B - P_BP_A)^\dagger P_A$

۳) $(P_A - P_B)^3 = P_A - P_B$

۴) $P_AP_B = P_BP_A$

اثبات . ۲ $\Longrightarrow$ ۱. با توجه به رابطه (۹.۳) داریم:

$$(P_A - P_B)^\dagger = P_A - P_B + P_B(P_A - P_BP_A)^\dagger - (P_B - P_BP_A)^\dagger P_A$$

حال اگر $(P_A - P_B)^\dagger = P_A - P_B$ پس:

$$P_B(P_A - P_BP_A)^\dagger - (P_B - P_BP_A)^\dagger P_A = ۰$$

و لذا:

$$P_B(P_A - P_BP_A)^\dagger = P_BP_A)^\dagger P_A$$

۳ $\Longrightarrow$ ۲. همواره داریم:

$$(P_A - P_B)^\dagger = (P_A - P_B)^* \Longleftrightarrow (P_A - P_B)(P_A - P_B)^*(P_A - P_B) = P_A - P_B \qquad (۱۵.۳)$$

اما طبق قسمت b چون

$$P_B(P_A - P_BP_A)^\dagger = P_BP_A)^\dagger P_A$$

پس

$$(P_A - P_B)^\dagger = P_A - P_B$$

از طرفی $(P_A - P_B)^* = P_A - P_B$ پس طبق رابطه (۱۱.۳) $(P_A - P_B)^۳ = P_A - P_B$.

۴ $\Longrightarrow$ ۳. داریم:

$$\begin{aligned}(P_A - P_B)^۳ &= (P_A - P_B)(P_A - P_B)(P_A - P_B)\\ &= (P_A - P_AP_B - P_BP_A + P_B)(P_A - P_B)\\ &= P_A - P_AP_B - P_AP_BP_A + P_AP_B - P_BP_A + P_BP_AP_B + P_BP_A - P_B\\ &= P_A - P_B - P_AP_BP_A + P_BP_AP_B\end{aligned} \qquad (۱۶.۳)$$

حال اگر $(P_A - P_B)^۳ = P_A - P_B$ آنگاه $P_AP_BP_A = P_BP_AP_B$ ولذا:

$$P_AP_B = P_BP_A$$

۴. $\Longleftarrow$ ۱ اگر $P_BP_A = P_AP_B$ آنگاه داریم: $(P_A - P_B)^۳ = P_A - P_B$ اما از طرفی:

$$(P_A - P_B)^۳ = (P_A - P_B)(P_A - P_B)^*(P_A - P_B)$$

و طبق رابطه (۱۱.۳) چون :

$$(P_A - P_B)(P_A - P_B)^*(P_A - P_B) = P_A - P_B$$

پس

$$(P_A - P_B)^\dagger = (P_A - P_B)^* = P_A - P_B$$

و لذا حکم ثابت می شود.

■

معکوس $P_A - P_B$ بوسیله بوخهولتز [۱] بررسی شد. روش او به این صورت بود که $P_A - P_B$ معکوس پذیر است اگر و فقط اگر Mای وجود داشته باشد به طوریکه:

$$M^۲ = M \qquad R(M) = R(A) \qquad Ker(M) = R(B) \tag{۱۷.۳}$$

در این حالت

$$(P_A - P_B)^{-۱} = M + M^* - I_m \tag{۱۸.۳}$$

ماتریس M که در روابط بالا صدق می کند در حقیقت منحصر به فرد است.[۱۵]

با توجه به روابط قضیه قبل می بینیم که $X = (P_A - P_BP_A)^\dagger$ در سه شرط مطرح شده در بالا صدق می کند. بنابراین Mای که در تعریف معکوس پذیری $(P_A - P_B)$ صدق می کند می تواند به صورت زیر باشد:

$$M = (P_A - P_BP_A)^\dagger \tag{۱۹.۳}$$

[۱] Bokholtz

با جایگذاری ماتریس یکتای M از رابطه(۱۴.۳) در رابطه (۱۳.۳) داریم:

$$(P_A - P_B)^{-1} = (P_A - P_B P_A)^{\dagger} + (P_A - P_A P_B)^{\dagger} - I_m$$

قضیه ۸.۲.۳. ([۱۳]) فرض کنیم A و B به ترتیب ماتریس های $m \times n$ و $m \times k$ باشند در این صورت:

$$(I_m - P_A - P_B)^{\dagger} = [(I_m - P_A)(I_m - P_B)]^{\dagger} - (P_A P_B)^{\dagger} = [(I_m - P_B)(I_m - P_A)]^{\dagger} - (P_B P_A)^{\dagger}$$

اثبات . ابتدا ثابت می کنیم $I_m - P_A$ یک تصویر گر متعامد است. داریم:

$$(I_m - P_A)^* = I_m^* - P_A^*$$

و

$$(I_m - P_A)^{۲} = (I_M - P_A)(I_m - P_A) = I_m - P_A - P_A + P_A = I_m - P_A$$

حال طبق قضیه ۴ اگر به جای P_A از $I_m - P_A$ استفاده کنیم در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}(I_m - P_A - P_B)^{\dagger} &= ((I_m - P_A) - (I_m - P_A)P_B)^{\dagger} + ((I_m - P_A)P_B - P_B)^{\dagger} \\ &= ((I_m - P_A)(I_m - P_B))^{\dagger} - (P_A P_B)^{\dagger}\end{aligned}$$

(۲۰.۳)

حال برای اثبات قسمت دوم تساوی کافیست به جای P_B از $I_m - P_B$ استفاده کنیم.

■

مراجع

[1] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville. *Generalized inverses: Theory and applications*. Springer, New York, second edition, 2003. 3, 4

[2] D.S. Bernstein. *Matrix Mathematics*. Theory, Facts, and Formulas. Princeton University Press, New York, 2009. 4

[3] R.E. Cline. An application of representation of a matrix. *MRC Technical Report.*, (592), 1965. 8

[4] J.B. Conwey. *A course in functional analysis*. Springer, Verlag New York Inc, second edition, 1985. 2

[5] G.B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. canada, second edition, 1999. 2

[6] V.Rakočević. J.J. Koliha. Fredholm properties of the difference of orthogonal projection in a hilbert space. *Integral Equations Operator Theory*, (52):25–134, 2005. 15

[7] J.J. Koliha. A generalized drazin inverse. *Glass. Math. J*, 38:367–381, 1996. 36

[8] J.J. Koliha. The drazin and moore-penrose inverse in c^* -algebras. *Math. Proc. R. Ir. Acad*, pages 17–27, 1999. 7, 8, 15

[9] J.J. Koliha, D.S. Djordjevic, and Cvetkovic IIiC. Moore-penrose inverse in rings with involution. *Linear Algebra Appl*, 426:371–381, 2007. 32, 35

[10] Yuan Li. The moore-penrose inverses of products and differences of projections in a c^* -algebra. *Linear Algebra and its Application*, (428):1169–1177, 2008. 10, 12, 15, 16, 17, 19, 22, 27, 31, 32

[11] G.J. Murphy. *C^* -algebra and Operator Theory*. Acedemic Press Inc, New York, 1990. 5, 6, 11

[12] R. Penrose. A generalized inverse of matrices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, pages 406–413, 1955. 45

[13] Y. Tian. S. Cheng. Moore-penrose inverses of products and differences of orthogonal projectors. *Acta Sci. Math*, (69):533–542, 2003. 30, 42, 44, 46, 49, 52

[14] Y. Tian. On mixed-type reverse order laws for the moore-penrose inverse of a matrix product. *submitted.* 41, 42

[15] F. Zhang. *Linear Algebra: Challenging Problems for Students.* John Hopkins University Press, 1996. 51

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

حکم	Assertion
انباشتگی	Accumulation
مختلط	Complex
مزدوج	Conjugate
تعویض گر	Commutator
معکوس درازین	Ddarzin inverse
خودتوان	Idempotent
معکوس مور-پنروز	Moore-Penrose inverse
ناتکین	Nonsingularity
متعامد	Orthogonal
عملگر	Operator
قطب	Pole
قطبی	Polar
شبه قطبی	Quispolar
برد	Range
طیف	Spectrum
خود الحاقی	Self adjoint
ترانهاده	Transpose

Abstract

.

For two given projection p and q in a C^* -algebra, we investigate how to express Moore-Penrose inverses of products pq and $pq - qp$. Moreover, it is shown that $pq - qp$ is Moore-Penrose invertible if and only if pq and $p - q$ are Moore-Penrose invertible. in addition, some related topics are considered.

Keywords: *Moore-Penrose inverse; Drazin inverse; Projection; C^* -algebra.*

Shahrood University of Technology
Department of Mathematics

MS Thesis

The Moore-Penrose inverses of product and differences of projections in a c^* -algebra

By:
Zahra Rahmati Nasrabad

Supervisor:
Kamran Sharifi

Advisor:
Mahdi Iranmanesh

Feb 2012