دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی‌ارشد ریاضی

عنوان

خودریختی‌های حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌های متناهی

نگارش

منیره سیفی عبدل‌آبادی

استاد راهنما

دکتر سید حیدر جعفری

استاد مشاور

۱۳۹۰

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

شکر و سپاس بیکران خداوندی را
که به من پدری داد که تکیه گاه استوارم باشد
مادری داد که پناهگاه پرمهری برایم باشد
همسری که همواره یار و یاورم باشد
و استادانی که راهنمایم باشند

چکیده

در این پایان‌نامه ساختار و مرتبه گروه خودریختی‌های حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌های متناهی را به‌دست می‌آوریم.ما ابتدا نشان می‌دهیم که اگر H و K گروه‌هایی متناهی باشند که هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند و $G = H \times K$، آنگاه ساختار و مرتبه $AutG$ را می‌توان برحسب $AutH$ ، $AutK$ و گروه‌های همریختی مرکزی $Hom(H, Z(K))$ و $Hom(K, Z(H))$ بیان کرد.

در فصل سوم ابتدا گروه خودریختی‌های حاصل‌ضرب مستقیم n نسخه از یک گروه ناآبلی تجزیه‌ناپذیر را می‌یابیم. ما گروه خودریختی‌ها را به‌صورت ماتریس‌هایی با درایه‌هایی که همریختی‌های بین n عامل مستقیم هستند توصیف می‌کنیم. سپس این توصیف را همراه با تعمیم نتیجه ای از بیدول و کاران [1] روی $Aut(H \times K)$ ، که H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند به‌کار می‌بریم تا قضایای ساختار و مرتبه را برای یک حاصل‌ضرب مستقیم دلخواه به‌دست آوریم.

به‌عنوان نتیجه اصلی گروه خودریختی‌های یک حاصل‌ضرب مستقیم متناهی دلخواه $G = H_1^{\beta_1} \times \cdots \times H_n^{\beta_n}$ را توصیف می‌کنیم که H_iها همگی غیریکریخت و تجزیه‌ناپذیرند و $\beta_i \geq 1$ ($1 \leq i \leq n$). مطالب فصل‌های ۲ و ۳ از منابع [۱۱] و [۱۲] گرفته شده‌اند.

کلمات کلیدی: خودریختی‌ها، حاصل‌ضرب مستقیم، گروه‌های متناهی.

[1] Bidwell,Curran

فهرست مطالب

فصل ۱
مفاهیم اساسی و مقدماتی

۱.۱ تعاریف و نتایج اولیه

در این فصل به بیان تعاریف اولیه و لم‌های مورد نیاز در فصل‌های بعد می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱.۱. مجموعه‌ی همه‌ی همریختی‌های از گروه G به گروه H را با $Hom(G,H)$ نشان می‌دهیم. این مجموعه غیرخالی است زیرا تابع $f:G\to H$ با ضابطه‌ی $f(x)=1$ (به ازای هر x از G) یک همریختی است. (۱ نمایانگر عضو خنثی هر گروه است.)

لم ۲.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و H یک گروه آبلی باشد. دراین‌صورت $Hom(G,H)$ با عمل زیر یک گروه آبلی است : برای هر f و g در $Hom(G,H)$ و هر x در G ،

$$(f+g)(x)=f(x)g(x).$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. هر همریختی مانند $f:G\to G$ را یک درون‌ریختی G می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی درون‌ریختی‌های G را با $End(G)$ نشان می‌دهیم. درصورتی‌که f یک یکریختی از G به G باشد، آن را یک خودریختی G می‌نامیم مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های G با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می‌دهد که آن را گروه خودریختی‌های G می‌نامیم و با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم.

از این پس خودریختی همانی G را که یک درون‌ریختی G نیز هست با علامت ۱ نشان می‌دهیم. همچنین درون‌ریختی بدیهی G را با علامت $\circ$ نمایش خواهیم داد و آن را درون‌ریختی صفر می‌نامیم.

هرگاه α و β دو درون‌ریختی G باشندآنگاه حاصل‌ضرب $\alpha\beta$ (ترکیب دو تابع α و β) نیز یک درون‌ریختی G است. یعنی مجموعه‌ی $End(G)$ نسبت به عمل ضرب (=ترکیب) درون‌ریختی‌ها بسته است. این عمل شرکت‌پذیر نیز هست. پس $End(G)$ با عمل ضرب یک نیم‌گروه است.

لم ۴.۱.۱. اگر $\theta, \phi \in Hom(G, H)$ ، نگاشت $\phi+\theta : G \to H$ که بصورت $(\phi+\theta)(g) = \phi(g)\theta(g)$ تعریف می‌شود یک همریختی است اگر $Im\phi$ و $Im\theta$ با یکدیگر جابجا شوند.

اثبات. برای هر $g, g' \in G$ چون ϕ و θ همریختی هستند و تصاویر آن‌ها جابجا می‌شود، داریم

$$\begin{aligned}
(\phi+\theta)(gg') &= \phi(gg')\theta(gg') \\
&= \phi(g)\phi(g')\theta(g)\theta(g') \\
&= \phi(g)\theta(g)\phi(g')\theta(g') \\
&= (\phi+\theta)(g)(\phi+\theta)(g')
\end{aligned}$$

□

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم $G_۱$ و ... و G_n ، n گروه باشند. در مجموعه $G_۱ \times \cdots \times G_n$ عمل دوتایی زیر را چنین تعریف می‌کنیم:

$$(g_۱, \ldots, g_n)(g'_۱, \ldots, g'_n) = (g_۱g'_۱, \ldots, g_ng'_n),$$

که در آن برای هر i، g_i و g'_i در G_i اند. به آسانی ملاحظه می‌شود که مجموعه $G_۱\times\cdots\times G_n$ با عمل فوق یک گروه است. این گروه را حاصل‌ضرب مستقیم (خارجی) گروه‌های $G_۱$ و ... و G_n می نامند و آن را با همان علامت $G_۱\times\cdots\times G_n$ نشان می‌دهیم. هر G_i را یک عامل مستقیم G گوییم.

قضیه ۶.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد و $G_۱$ و ... و G_n زیرگروه هایی از آن باشند به‌طوری‌که

۱. به ازای هر i، $۱\leq i\leq n$، $G_i\lhd G$؛

۲. $G=G_۱\ldots G_n$؛

۳. به ازای هر i، $۱\leq i\leq n$، $G_i\cap G_۱\ldots G_{i-۱}G_{i+۱}\ldots G_n=۱$.

دراین‌صورت $G\cong G_۱\times\cdots\times G_n$.

اثبات. به [۳] رجوع شود.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم $x,g\in G$. عضو $g^{-۱}xg$ را مزدوج x توسط g می‌نامیم و با x^g نشان می‌دهیم.

به آسانی معلوم می‌شود که به ازای هر g از G، تابع $i_g:G\rightarrow G$ با ضابطه $i_g(x)=x^g$ یک خودریختی G است. این خودریختی را خودریختی داخلی G القا شده توسط g می نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های داخلی G، که آن را با $Inn(G)$ نشان می‌دهیم، یک زیرگروه نرمال $Aut(G)$ است. به علاوه تابع $\tau:G\rightarrow Aut(G)$ با ضابطه $\tau(g)=i_g$ یک همریختی است که هسته آن مجموعه اعضایی از G است که با هر عضو G جابه‌جا می‌شوند

و تصویر τ عبارت است از $Inn(G)$. بنابراین،

$$G/Z(G) \cong Inn(G).$$

هر خودریختی G را که داخلی نباشد، خارجی گوییم.

لم ۸.۱.۱. اگر G یک گروه باشد و $H \leqslant Z(G)$ آنگاه $H \lhd G$.

اثبات. بدیهی است. □

لم ۹.۱.۱. اگر $A \leq G$ و $H \leq Z(G)$ ، آنگاه AH ناآبلی است اگر و تنها اگر A ناآبلی باشد.

اثبات. فرض کنیم AH ناآبلی باشد، دراین‌صورت اعضایی مانند $a_1h_1, a_2h_2 \in AH$ موجودند به‌طوری‌که $[a_1h_1, a_2h_2] \neq 1$. اما داریم $h_1, h_2 \in H \subseteq Z(G)$ لذا $[a_1h_1, a_2h_2] = [a_1, a_2]$، پس $[a_1, a_2] \neq 1$ که $a_1, a_2 \in A$. پس A ناآبلی است. بالعکس فرض کنیم A ناآبلی باشد، دراین‌صورت $a_1, a_2 \in A$ موجودند به‌طوری‌که $[a_1, a_2] \neq 1$ از طرفی داریم $a_1, a_2 \in AH$ پس AH نیز ناآبلی است. □

تعریف ۱۰.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. زیرگروه H از G را یک زیرگروه مشخصه گوییم اگر برای هر $\alpha \in Aut(G)$ داشته باشیم $\alpha(H) = H$. بعنوان مثال $Z(G)$ یک زیرگروه مشخصه G است.

تعریف ۱۱.۱.۱. خودریختی σ از G را خودریختی مرکزی گوییم اگر σ با هر خودریختی در $Inn(G)$ جابجا شود. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های مرکزی G را با $Aut_c(G)$ نشان می‌دهیم.

لم ۱۲.۱.۱. فرض کنید $\sigma \in Aut(G)$. دراین‌صورت σ یک خودریختی مرکزی است اگر و فقط اگر برای هر $g \in G$ داشته باشیم $g^{-1}\sigma(g) \in Z(G)$.

اثبات. فرض کنیم σ یک خودریختی مرکزی باشد، دراین‌صورت برای هر $g \in G$ ، σ با خودریختی داخلی $i_g : G \to G$ ،که هر $x \in G$ را به $g^{-1}xg$ می برد، جابه‌جا می‌شود. پس داریم $i_g\sigma = \sigma i_g$. لذا برای هر $x \in G$ داریم $i_g(\sigma(x)) = \sigma i_g(x)$. بنابراین

$$g^{-1}\sigma(x)g = \sigma(g^{-1}xg) = \sigma(g^{-1})\sigma(x)\sigma(g)$$

با ضرب g از چپ و $\sigma(g^{-1})$ از راست در رابطه فوق داریم $\sigma(x)g\sigma(g^{-1}) = g\sigma(g^{-1})\sigma(x)$. بنابراین $g\sigma(g^{-1})$ با هر $\sigma(x)$ جابه‌جا می‌شود و چون $\{\sigma(x)|x \in G\} = G$ پس $g\sigma(g^{-1})$ با هر عضو G جابه‌جا می‌شود. لذا $g\sigma(g^{-1}) \in Z(G)$. برهان عکس به‌طور بازگشتی برقرار است. $\square$

لم ۱۳.۱.۱. $Aut_c(G)$ یک زیرگروه نرمال $Aut(G)$ است.

اثبات. فرض کنید $\alpha \in Aut(G)$ و $\sigma \in Aut_c(G)$. داریم

$$\begin{aligned} x^{-1}((\alpha^{-1}\sigma\alpha)(x)) &= x^{-1}\alpha^{-1}(\sigma(\alpha(x))) \\ &= x^{-1}\alpha^{-1}(\alpha(x)(\alpha(x)^{-1}\sigma(\alpha(x))) \\ &= x^{-1}\alpha^{-1}(\alpha(x))\alpha^{-1}(\alpha(x)^{-1}\sigma(\alpha(x))) \\ &= x^{-1}x\ \alpha^{-1}(\alpha(x)^{-1}\sigma(\alpha(x))) \\ &= \alpha^{-1}(\alpha(x)^{-1}\sigma(\alpha(x))) \end{aligned}$$

حال چون $\sigma \in Aut_c(G)$ لذا $\alpha(x)^{-1}\sigma(\alpha(x)) \in Z(G)$ و چون $Z(G)$ یک زیرگروه مشخصه است لذا $\alpha^{-1}(\alpha(x)^{-1}\sigma(\alpha(x))) \in Z(G)$. بنابراین $\alpha^{-1}\sigma\alpha \in Aut_c(G)$. لذا $Aut_c(G) \lhd Aut(G)$. $\square$

تعریف ۱۴.۱.۱. گروه G را یک گروه به‌طورمحض ناآبلی گوییم اگر در هر تجزیه G هیچ عامل آبلی وجود نداشته باشد.

لم ۱۵.۱.۱. فرض کنید G یک گروه به‌طورمحض ناآبلی باشد و $\phi \in Hom(G, Z(G))$ ، دراین‌صورت برای هر $g \in G$ ، نگاشت $\sigma : G \to G$ ، با ضابطه‌ی $\sigma(g) = g\phi(g)$ یک خودریختی مرکزی G است.

اثبات. برای هر $g \in G$ داریم

$$g^{-۱}\sigma(g) = g^{-۱}g\phi(g) = \phi(g) \in Z(G)$$

پس بنا به لم ۱۲.۱.۱ σ ، یک خودریختی مرکزی است. □

تعریف ۱۶.۱.۱. اگر G یک گروه باشد و $x, y \in G$ ، آنگاه $[x, y] = x^{-۱}y^{-۱}xy$ را جابجاگر x و y می‌نامیم. زیرگروه G تولید شده به وسیله‌ی تمام جابجاگرهای اعضای G را زیرگروه جابجاگر G می‌نامیم و آن را با G' نمایش می‌دهیم (گاهی G' را زیرگروه مشتق شده از G یا زیرگروه مشتق G می‌نامیم).

لم ۱۷.۱.۱. فرض کنیم K یک گروه دلخواه و H یک گروه آبلی باشد و $\beta \in Hom(K, H)$ دراین‌صورت داریم $K' \subset Ker\beta$.

اثبات. فرض می‌کنیم $[a, b] \in K'$ مولد دلخواهی از K' باشد، دراین‌صورت چون $Im\beta \subseteq H$ و H آبلی است، داریم

$$\beta([a, b]) = \beta(a^{-۱}b^{-۱}ab) = \beta(a^{-۱})\beta(b^{-۱})\beta(a)\beta(b) = ۱$$

پس $[a, b] \in ker\beta$. □

لم ۱۸.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه دلخواه و H یک گروه آبلی باشد دراین‌صورت:

$$Hom(G,H) \cong Hom(G/G',H).$$

اثبات. فرض کنید $\phi: G \to H$ یک همریختی باشد. بنا به لم ۱۷.۱.۱ داریم $G' \leq Ker\phi$. لذا همریختی $\bar{\phi}: G/G' \to H$ با ضابطه $\bar{\phi}(gG') = \phi(g)$ متناظر با ϕ موجود است . برای بررسی خوش تعریفی $\bar{\phi}$ فرض می‌کنیم $g_1G' = g_2G'$. دراین‌صورت $g_2^{-1}g_1G' = G'$ در نتیجه $g_2^{-1}g_1 \in G' \leq Ker\phi$ پس $\phi(g_2^{-1}g_1) = 1$ لذا $\phi(g_1) = \phi(g_2)$. بنابراین $\bar{\phi}(g_1G') = \bar{\phi}(g_2G')$. در این صورت نگاشتی که هر $\phi \in Hom(G,H)$ را به $\bar{\phi}$ نظیر می‌کند یک یکریختی است. □

نتیجه ۱۹.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه دلخواه باشد دراین‌صورت:

$$Hom(G,Z(G)) \cong Hom(G/G',Z(G))$$

اثبات. کافی‌است در لم ۱۸.۱.۱ به جای H از $Z(G)$ استفاده کنیم. □

لم ۲۰.۱.۱. فرض کنیم G و H_1 و ... و H_t گروه‌هایی آبلی باشند. دراین‌صورت داریم:

$$Hom(H_1 \times \cdots \times H_t, G) \cong Hom(H_1,G) \times \cdots \times Hom(H_t,G)$$

و

$$Hom(G, H_1 \times \cdots \times H_t) \cong Hom(G,H_1) \times \cdots \times Hom(G,H_t).$$

اثبات. بدیهی است . □

لم ۲۱.۱.۱. فرض کنیم H_1 و ... و H_t گروه‌هایی دلخواه باشند، دراین‌صورت داریم

$$(H_1 \times \cdots \times H_t)' = (H_1' \times \cdots \times H_t')$$

اثبات. کافیست برای حالت $t = ۲$ و برای مولدهای $H'_۱ \times H'_۲$ و $(H_۱ \times H_۲)'$ثابت کنیم.
برای هر $([a_۱, b_۱], [a_۲, b_۲]) \in H'_۱ \times H'_۲$ داریم

$$([a_۱, b_۱], [a_۲, b_۲]) = (a_۱^{-۱} b_۱^{-۱} a_۱ b_۱, a_۲^{-۱} b_۲^{-۱} a_۲ b_۲) = (a_۱^{-۱}, a_۲^{-۱})(b_۱^{-۱}, b_۲^{-۱})(a_۱, a_۲)(b_۱, b_۲)$$

$$= [(a_۱, a_۲), (b_۱, b_۲)] \in (H_۱ \times H_۲)'$$

برهان عکس به‌طور بازگشتی برقرار است. □

لم ۲۲.۱.۱. اگر G گروهی آبلی باشد و $H_۱$ و ... و H_t گروه‌هایی ناآبلی باشند آنگاه

$$Hom(H_۱ \times \cdots \times H_t, G) \cong Hom(H_۱, G) \times \cdots \times Hom(H_t, G)$$

اثبات. با استفاده از لم‌های ۱۸.۱.۱ ، ۲۰.۱.۱ و ۲۱.۱.۱ داریم

$$Hom(H_۱ \times \cdots \times H_t, G) \cong Hom(\frac{H_۱ \times \cdots \times H_t}{H'_۱ \times \cdots \times H'_t}, G)$$
$$\cong Hom(\frac{H_۱}{H'_۱} \times \cdots \times \frac{H_t}{H'_t}, G)$$
$$\cong Hom(\frac{H_۱}{H'_۱}, G) \times \cdots \times Hom(\frac{H_t}{H'_t}, G)$$
$$\cong Hom(H_۱, G) \times \cdots \times Hom(H_t, G)$$

□

لم ۲۳.۱.۱. اگر p و q دو عدد اول و r و s دو عدد صحیح مثبت باشند و $l = min\{r, s\}$ ،
آنگاه $Hom(C_{p^m}, C_{q^n}) \cong \begin{cases} ۱ & (p \neq q) \\ C_{p^l} & (p = q) \end{cases}$

اثبات. به [۴] رجوع شود. □

لم ۲۴.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه باشد، دراین‌صورت :

۱. $G' \lhd G$ و G/G' گروهی آبلی است.

۲. اگر $N \lhd G$ ، آنگاه G/N آبلی است اگر و تنها اگر $G' \leqslant N$.

اثبات. به [۱] رجوع شود. $\square$

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و p یک عدد اول باشد. گروه G را یک p-گروه می‌نامیم درصورتی‌که مرتبه هر عضو G توانی از p باشد. زیرگروه H از G را یک p-زیرگروه G گوییم درصورتی‌که H یک p-گروه باشد.

گزاره ۲۶.۱.۱. اگر G یک p-گروه متناهی باشد آنگاه مرتبه G به صورت p^n است که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است. همچنین اگر G گروهی متناهی و مرتبه اش توانی از عدد اول p باشد آنگاه G یک p-گروه خواهد بود.

قضیه ۲۷.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه آبلی متناهی باشد. دراین‌صورت دنباله متناهی $(p_1^{s_1}, \dots, p_m^{s_m})$ از اعداد صحیح مثبت وجود دارد به‌طوری‌که با صرف نظر از ترتیب اعضا منحصربفرد است و $G \cong Z_{p_1^{s_1}} \oplus \cdots \oplus Z_{p_m^{s_m}}$ (p_1 ، ...،p_m اعدادی اول (نه لزوماً متمایز) و $s_m, \dots, s_1$ اعداد صحیح مثبت (نه لزوماً متمایز) هستند.)

اثبات. به [۵] رجوع شود. $\square$

هر $p_i^{s_i}$ را که در قضیه ۲۷.۱.۱ بیان شد یک مقسوم علیه مقدماتی G می‌نامیم.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و X مجموعه‌ای ناتهی باشد. فرض کنیم به ازای هر g از G و هر x از X، عضو یکتایی از X که آن را با علامت $x * g$ نشان می‌دهیم وجود داشته باشد به‌طوری‌که

۱. به ازای هر x از X، $x * 1 = x$.

۲. به ازای هر g_1 و g_2 از G و هر x از X، $x * (g_1 g_2) = (x * g_1) * g_2$

دراین‌صورت گوییم G بر X عمل می‌کند و $*$ را عمل G بر X گوییم.

مثال. ساده‌ترین مثال از گروهی که بر مجموعه‌ای اثر کند گروه متقارن S_X است. در این‌جا با فرض $f \in S_X$ و $x \in X$ قرار می‌دهیم $x * f = f(x)$. به دو طریق مهم یک گروه می‌تواند بر خودش عمل کند. اگر برای هر $x, g \in G$ قرار دهیم $x * g = xg$ که در آن xg به معنی ضرب دو عضو G است به آن عمل منتظم گوییم و اگر قرار دهیم $x * g = g^{-1}xg$ به آن عمل تزویج گوییم.

۱.۱.۱ حاصل‌ضرب نیم مستقیم و حلقوی

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنیم H و K دو گروه و $\phi : H \to Aut(K)$ یک همریختی باشد.(به ازای هر h از H تصویر h توسط ϕ را با ϕ_h نشان می‌دهیم.) در حاصل‌ضرب دکارتی $H \times K$ عمل دوتایی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 h_2, (k_1 \phi_{h_2}) k_2).$$

مجموعهٔ $H \times K$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می‌دهد. این گروه را حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم H و K با عمل ϕ می‌نامیم و آن را با علامت $H \times_\phi K$ نشان می‌دهیم. و اصطلاحاً می‌گوییم گروه H بر گروه K با ϕ عمل می‌کند. در حالتی که ابهامی در مورد ϕپیش نیاید، یا مشخص کردن آن مورد نیاز نباشد، به جای علامت مذکور از علامت $H \ltimes K$ استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و n یک عدد صحیح مثبت باشد. همچنین فرض کنید $\Gamma \leq S_n$ و $\sigma \in \Gamma$ قرار می‌دهیم $K = \underbrace{G \times \cdots \times G}_{n}$ و تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\sigma^* : K \to K$$

$$(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(n)})$$

به سهولت معلوم می‌شود که $\sigma^*\in Aut(K)$ و تابع $\begin{array}{c}\phi:\Gamma\to Aut(K)\\ \sigma\mapsto\sigma^*\end{array}$ یک تکریختی است. حاصل‌ضرب نیم مستقیم $\Gamma\times_\phi K$ را حاصل‌ضرب حلقوی G و Γ می‌نامیم و آن را با علامت $Gwr\Gamma$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنیم G یک گروه و H یک گروه متناهی باشد. فرض کنیم $\phi:H\to S_{|H|}$ همریختی متناظر با نمایش جایگشتی H با عمل ضرب از راست باشد و قرار می‌دهیم $\Gamma=\phi(H)$. حاصل‌ضرب حلقوی $GwrH$ را حاصل‌ضرب حلقوی G و H می‌نامیم و آن را با علامت $G\wr H$ نشان می‌دهیم .

واضح است که اگر G متناهی باشد آنگاه $|G\wr H|=|H||G|^{|H|}$.

۲.۱.۱ معرفی گروه‌های D_{2n} و Q_{4n}

تعریف ۳۲.۱.۱. گروه $<a,b|a^n=b^2=1,bab^{-1}=a^{-1}>$، $(n\geq 3)$ را گروه دووجهی مرتبه $2n$ می‌نامیم و با D_{2n} نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۳.۱.۱. گروه $<a,b|a^n=b^2,bab^{-1}=a^{-1}>$، $(n\geq 2)$ را گروه کواترنیون تعمیم یافته (یا چهارگانه) از مرتبه $4n$ می‌نامیم و با Q_{4n} نمایش می‌دهیم.

لم ۳۴.۱.۱.

۱. اگر n زوج باشد آنگاه $Z(D_{2n})=<a^{n/2}>=\{1,a^{n/2}\}$ از مرتبه ۲ و یکریخت با C_2 است. و اگر n فرد باشد آنگاه $Z(D_{2n})=1$.

۲. $Z(Q_{4n})=<a^n>=\{1,a^n\}$ از مرتبه ۲ و یکریخت با C_2 است.

اثبات. به [۲] رجوع شود. □

لم ۳۵.۱.۱. برای $n\geq 3$ داریم $Z(S_n)=1$ و برای $n\geq 4$ داریم $Z(A_n)=1$.

اثبات. به [۵] رجوع شود. □

لم ۳۶.۱.۱. فرض کنید G یک گروه دوری از مرتبه n باشد. دراین‌صورت $AutG$ یک گروه آبلی از مرتبه $\phi(n)$ است.

اثبات. به [۱۵] صفحه ۷۳ مراجعه شود. □

لم ۳۷.۱.۱. برای $n \geq ۲$ ، $\left|AutQ_{۴n}\right| = ۲n\phi(۲n)$ و $\left|AutD_{۲n}\right| = n\phi(n)$

اثبات. به [۲۰] مراجعه شود. □

فصل ۲

خودریختی‌های حاصل‌ضرب مستقیم دو گروه متناهی

۱.۲ مقدمه فصل

در این فصل نشان می‌دهیم که اگر H و K گروه‌هایی باشند که هیچ عامل مستقیم مشترکی نداشته باشند و $G = H \times K$ دراین‌صورت ساختار و مرتبه $AutG$ را می‌توانیم برحسب $AutH$، $AutK$ و گروه‌های همریختی مرکزی $Hom(H, Z(K))$ و $Hom(K, Z(H))$ بیان کنیم. در این فصل فقط گروه‌های متناهی را در نظر می‌گیریم و علائم بکار رفته استاندارد هستند. مطالب این فصل براساس [۱۱] می‌باشند.

قبل از شروع جزئیات به تعدادی نمادگذاری نیاز داریم.

فرض کنید

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \begin{array}{ccc} \alpha \in EndH, & \beta \in Hom(K, H), & [Im\alpha, Im\beta] = ۱ \\ \gamma \in Hom(H, K), & \delta \in EndK, & [Im\gamma, Im\delta] = ۱ \end{array} \right\}$$

نشان می‌دهیم که $\mathcal{M}$ تحت ضرب ماتریسی یک نیم‌گروه است. کافیست خاصیت شرکت پذیری را بررسی کنیم. برای هر $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ داریم

$$(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + \beta\gamma' & \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma\alpha' + \delta\gamma' & \gamma\beta' + \delta\delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\alpha'\alpha'' + \beta\gamma'\alpha'' + \alpha\beta'\gamma'' + \beta\delta'\gamma'' & \alpha\alpha'\beta'' + \beta\gamma'\beta'' + \alpha\beta'\delta'' + \beta\delta'\delta'' \\ \gamma\alpha'\alpha'' + \delta\gamma'\gamma'' + \gamma\beta'\gamma'' + \delta\delta'\gamma'' & \gamma\alpha'\beta'' + \delta\gamma'\beta'' + \gamma\beta'\delta'' + \delta\delta'\delta'' \end{pmatrix}$$

و

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'\alpha'' + \beta'\gamma'' & \alpha'\beta'' + \beta'\delta'' \\ \gamma'\alpha'' + \delta'\gamma'' & \gamma'\beta'' + \delta'\delta'' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha\alpha'\alpha'' + \alpha\beta'\gamma'' + \beta\gamma'\alpha'' + \beta\delta'\gamma'' & \alpha\alpha'\beta'' + \alpha\beta'\delta'' + \beta\gamma'\beta'' + \beta\delta'\delta'' \\ \gamma\alpha'\alpha'' + \gamma\beta'\gamma'' + \delta\gamma'\gamma'' + \delta\delta'\gamma'' & \gamma\alpha'\beta'' + \gamma\beta'\delta'' + \delta\gamma'\beta'' + \delta\delta'\delta'' \end{pmatrix}$$

بخاطر خاصیت جابجایی تصاویر نگاشت‌های داده شده نتیجه می‌گیریم که خاصیت شرکت پذیری برقرار است.

قضیه ۲.۱.۱. فرض کنیم $G = H \times K$ در اینصورت $EndG \cong \mathcal{M}$ (بعنوان نیم گروه).

اثبات. فرض کنیم i_H و i_K نگاشت‌های شمول به ترتیب از H و K به G باشند و π_H و π_K نگاشت‌های تصویر از G به ترتیب به H و K باشند. برای هر $\theta \in EndG$ تعریف می‌کنیم $\alpha = \pi_H\theta i_H \in EndH$ ، $\beta = \pi_H\theta i_K \in Hom(K,H)$ ، $\gamma = \pi_K\theta i_H \in Hom(H,K)$ و $\delta = \pi_K\theta i_K \in EndK$. برای هر $h \in H$ و $k \in K$ با فرض $\theta(h,1) = (h_1,k_1)$ و $\theta(1,k) = (h_2,k_2)$ داریم:

$$\theta(h,1) = (h_1,k_1) = (\pi_H(h_1,k_1),\pi_K(h_1,k_1)) = (\pi_H\theta(h,1),\pi_K\theta(h,1))$$

$$= (\pi_H\theta i_H(h),\pi_K\theta i_H(h)) = (\alpha(h),\gamma(h))$$

و

$$\theta(1,k) = (h_2,k_2) = (\pi_H(h_2,k_2),\pi_K(h_2,k_2)) = (\pi_H\theta(1,k),\pi_K\theta(1,k))$$

$$= (\pi_H\theta i_K(k),\pi_K\theta i_K(k)) = (\beta(k),\delta(k))$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\theta(h,k) &= \theta(h,1)\theta(1,k) = (\alpha(h)\beta(k), \gamma(h)\delta(k))\\ &= \theta(1,k)\theta(h,1) = (\beta(k)\alpha(h), \delta(k)\gamma(h))\end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $[Im\alpha, Im\beta] = 1 = [Im\gamma, Im\delta]$. حال نگاشت $f : EndG \to \mathcal{M}$ را با ضابطه $f(\theta) = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ در نظر می‌گیریم. f یک تکریختی است زیرا:

$$\begin{aligned}f(\theta_1)f(\theta_2) &= \begin{pmatrix}\pi_H\theta_1 i_H & \pi_H\theta_1 i_K\\ \pi_K\theta_1 i_H & \pi_K\theta_1 i_K\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\pi_H\theta_2 i_H & \pi_H\theta_2 i_K\\ \pi_K\theta_2 i_H & \pi_K\theta_2 i_K\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\pi_H\theta_1(i_H\pi_H + i_K\pi_K)\theta_2 i_H & \pi_H\theta_1(i_H\pi_H + i_K\pi_K)\theta_2 i_K\\ \pi_K\theta_1(i_H\pi_H + i_K\pi_K)\theta_2 i_H & \pi_K\theta_1(i_H\pi_H + i_K\pi_K)\theta_2 i_K\end{pmatrix}\end{aligned}$$

و

$$f(\theta_1\theta_2) = \begin{pmatrix}\pi_H\theta_1\theta_2 i_H & \pi_H\theta_1\theta_2 i_K\\ \pi_K\theta_1\theta_2 i_H & \pi_K\theta_1\theta_2 i_K\end{pmatrix}$$

حال چون $(i_H\pi_H + i_K\pi_K) = I_{H\times K}$ لذا $f(\theta_1\theta_2) = f(\theta_1)f(\theta_2)$ پس f یک همریختی است. برای بررسی یک‌به‌یک بودن فرض کنیم $f(\theta_1) = f(\theta_2)$ باشد، پس

$$\begin{pmatrix}\pi_H\theta_1 i_H & \pi_H\theta_1 i_K\\ \pi_K\theta_1 i_H & \pi_K\theta_1 i_K\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_H\theta_2 i_H & \pi_H\theta_2 i_K\\ \pi_K\theta_2 i_H & \pi_K\theta_2 i_K\end{pmatrix}$$

درنتیجه برای هر $(h,k) \in G$ داریم

$$\begin{pmatrix}\pi_H\theta_1 i_H & \pi_H\theta_1 i_K\\ \pi_K\theta_1 i_H & \pi_K\theta_1 i_K\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pi_H\theta_2 i_H & \pi_H\theta_2 i_K\\ \pi_K\theta_2 i_H & \pi_K\theta_2 i_K\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}$$

حال اگر $\theta_1(h,k)=(h_1,k_1)$ و $\theta_2(h,k)=(h_2,k_2)$ باشد، داریم

$$\begin{aligned}
\pi_H\theta_1 i_H(h)+\pi_H\theta_1 i_K(k) &= \pi_H\theta_2 i_H(h)+\pi_H\theta_2 i_K(k)\\
\to \pi_H\theta_1(i_H(h)+i_K(k)) &= \pi_H\theta_2(i_H(h)+i_K(k))\\
\to \pi_H\theta_1(h,k) &= \pi_H\theta_2(h,k)\\
\to \pi_H(h_1,k_1) &= \pi_H(h_2,k_2)\\
\to h_1 &= h_2
\end{aligned}$$

به همین ترتیب ثابت می‌شود که $k_1=k_2$. لذا $\theta_1(h,k)=\theta_2(h,k)$. پس $\theta_1=\theta_2$ و بنابراین f یک‌به‌یک است. بعلاوه، اگر $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ و $\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}\in H\times K$ ، می‌توانیم $\theta: G\to G$ را تعریف کنیم به‌طوری‌که $\begin{pmatrix}\alpha(h)\beta(k)\\ \gamma(h)\delta(k)\end{pmatrix}=\theta\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}$ و بصورت $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h\\ k\end{pmatrix}$ می‌نویسیم. دراین‌صورت $\theta\in EndG$ زیرا با توجه به تعریف $\mathcal{M}$ داریم

$$\theta(h_1,k_1)\theta(h_2,k_2)=(\alpha(h_1)\beta(k_1),\gamma(h_1)\delta(k_1))(\alpha(h_2)\beta(k_2),\gamma(h_2)\delta(k_2))$$

$$=(\alpha(h_1)\beta(k_1)\alpha(h_2)\beta(k_2),\gamma(h_1)\delta(k_1)\gamma(h_2)\delta(k_2))$$

$$=(\alpha(h_1h_2)\beta(k_1k_2),\gamma(h_1h_2)\delta(k_1k_2))=\theta(h_1h_2,k_1k_2)$$

و $f(\theta)=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ ، بنابراین f پوشاست و لذا f یک یکریختی است. □

از این پس می‌توانیم هر $\theta\in EndG$ را با ماتریس آن $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\in\mathcal{M}$ نشان دهیم.

حال فرض کنید

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}:\ \begin{matrix}\alpha\in AutH & \beta\in Hom(K,Z(H))\\ \gamma\in Hom(H,Z(K)) & \delta\in AutK\end{matrix}\right\}$$

نتایج اصلی این فصل نشان می‌دهند که در شرایط معینی $Aut(G) \cong \mathcal{A}$ و از آنجا می‌توانیم مرتبه $Aut(G)$ را بدست آوریم.

۲.۲ نتایج مقدماتی

در این بخش به تعدادی از نتایج مقدماتی مورد نیاز می‌پردازیم.

قضیه ۱.۲.۲. اگر G یک گروه باشد و $\phi \in EndG$ آنگاه یک عدد صحیح مثبت r وجود دارد به‌طوری‌که برای هر عدد صحیح مثبت n ، $Ker\phi^r = Ker\phi^{r+n}$. بعلاوه اگر $\sigma = \phi^r$ و $Im\sigma \lhd G$، آنگاه $G \cong Ker\sigma \times Im\sigma$.

اثبات. برای هر عدد صحیح مثبت j ، فرض کنید $k_j = Ker\phi^j$. دراین‌صورت

$$k_۱ \leq k_۲ \leq k_۳ \leq \ldots \leq G.$$

چون G متناهی است یک عدد صحیح مثبت r وجود دارد به‌طوری‌که $k_r = k_{r+۱}$. با استقرا روی n نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد صحیح مثبت n ، $k_r = k_{r+n}$.

حال فرض کنید $\sigma = \phi^r$ و $Im\sigma \lhd G$. قرار می‌دهیم : $K = k_r = ker\phi^r$ و $L = Im\phi^r$.

بوضوح $K \trianglelefteq G$ و بنا بر فرض داریم $L \trianglelefteq G$.

فرض کنید $x \in K \cap L$ ، دراین‌صورت $\phi^r(x) = ۱$ و $y \in G$ موجود است به‌طوری‌که $x = \phi^r(y)$. حال داریم $\phi^{۲r}(y) = \phi^r(\phi^r(y)) = \phi^r(x) = ۱$. پس با استفاده از قسمت قبل داریم، $y \in k_{۲r} = k_r$. بنابراین $x = \phi^r(y) = ۱$ درنتیجه $K \cap L = ۱$. با استفاده از قضیه دوم یکریختی داریم $L \cong \frac{KL}{K}$. از طرفی بنابر قضیه اول یکریختی $L \cong \frac{G}{K}$. بنابراین چون $KL \leqslant G$ و G متناهی است پس $G = KL$ درنتیجه بنا به لم ۶.۱.۱، $G = K \times L$. □

نتیجه بعدی مستقیما از قضیه ۱.۲.۲ به دست می‌آید.

نتیجه ۲.۲.۲. اگر G یک گروه ناآبلی باشد و $\phi \in Hom(G, Z(G))$ ، و برای یک $g \in G$ که $g \neq ۱$ داشته باشیم $\phi(g) = g$ ، آنگاه G یک عامل مستقیم آبلی دارد.
بویژه، اگر G بطور محض ناآبلی باشد و برای یک $x \in G$ داشته باشیم $\phi(x) = x$ ، دراین‌صورت $x = ۱$.

اثبات. چون $\phi \in Hom(G, Z(G))$ پس $\phi \in EndG$ و بنابه قضیه ۱.۲.۲ عدد صحیح مثبت r وجود دارد به‌طوری‌که برای هر عدد صحیح مثبت n ، $Ker\phi^r = Ker\phi^{r+n}$. قرار می‌دهیم $\sigma = \phi^r$ داریم $Im\sigma \subseteq Z(G)$ پس $Im\sigma \lhd G$ و آبلی است و با استفاده از قضیه ۱.۲.۲ داریم $G \cong Im\sigma \times Ker\sigma$. حال چون برای یک $g \in G$ که $g \neq ۱$ ، $\phi(g) = g$ ، پس $\phi^r(g) = g$. لذا $۱ \neq g \in Im\sigma$. بنابراین $Im\sigma$ یک عامل مستقیم آبلی نابدیهی G است. $\square$

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنیم $G = H \times K$ ، و $\beta \in Hom(K, H)$ و $\gamma \in Hom(H, K)$ طوری باشند که برای هر عدد صحیح مثبت m ، $Im(\gamma\beta)^m \lhd K$ و $Im(\beta\gamma)^m \lhd H$. دراین‌صورت اگر برای یک $k \in K$ که $k \neq ۱$ ، $\gamma\beta(k) = k$ (یا برای یک $h \in H$ که $h \neq ۱$ ، $\beta\gamma(h) = h$) آنگاه H و K یک عامل مستقیم مشترک نابدیهی دارند.

اثبات. چون $\beta\gamma \in EndH$ و $\gamma\beta \in EndK$ ، بنابر قضیه ۱.۲.۲ اعداد صحیح مثبت r و s موجودند به‌طوری‌که برای هر عدد صحیح مثبت n ، $Ker(\beta\gamma)^r = Ker(\beta\gamma)^{r+n}$ و $Ker(\gamma\beta)^s = Ker(\gamma\beta)^{s+n}$. حال فرض کنیم $t = max\{r, s\}$ ، $\sigma = (\gamma\beta)^t$ و $\tau = (\beta\gamma)^t$. دراین‌صورت چون $Im\tau \lhd H$ و $Im\sigma \lhd K$ (طبق فرض) پس با استفاده از قضیه ۱.۲.۲ داریم

$H = Im\tau \times Ker\tau$ و $K = Im\sigma \times Ker\sigma$. از طرفی برای هر $k_۱ \in K$ داریم،

$$\begin{aligned} \beta(\sigma(k_۱)) &= \beta(\gamma\beta)^t(k_۱) \\ &= (\beta\gamma)^t(\beta(k_۱)) \\ &= \tau(\beta(k_۱)) \in Im\tau. \end{aligned}$$

پس $\beta : Im\sigma \to Im\tau$ یک همریختی است. بعلاوه

$$\beta(\sigma(k_۱)) = ۱ \Rightarrow \sigma(k_۱) \in Ker\beta \subseteq Ker\sigma.$$

اما چون $Ker\sigma \cap Im\sigma = ۱$ لذا $\sigma(k_۱) = ۱$. این یعنی β ، $Im\sigma$ را بطور یک‌به‌یک به $Im\tau$ می‌نگارد. با روش مشابه معلوم می‌شود که γ نیز $Im\tau$ را به بطور یک‌به‌یک به $Im\sigma$ می‌نگارد.

بنابراین چون H و K متناهی هستند داریم $Im\tau \cong Im\sigma$ ، از طرفی چون $\gamma\beta(k) = k$ نتیجه می‌دهد $(\gamma\beta)^t(k) = k$ ، پس $k \in Im\sigma$ (یا بطور مشابه $h \in Im\tau$)، لذا $Im\sigma$ (یا $Im\tau$) نابدیهی است. در نتیجه H و K یک عامل مستقیم مشترک نابدیهی دارند. $\square$

نتیجه ۴.۲.۲. فرض کنیم $G = H \times K$ ، $\beta \in Hom(K, Z(H))$ و $\gamma \in Hom(H, Z(K))$. دراین‌صورت اگر برای یک $k \in K$ که $k \neq ۱$ ، $\gamma\beta(k) = k$ (یا برای یک $h \in H$ که $h \neq ۱$ ، $\beta\gamma(h) = h$) آنگاه H و K یک عامل مستقیم آبلی مشترک دارند.

بویژه، اگر H و K هیچ عامل مستقیم آبلی مشترکی نداشته باشند و برای یک $k \in K$ ، داشته باشیم $\gamma\beta(k) = k$ ، آنگاه $k = ۱$ (یا اگر برای یک $h \in H$ ، داشته باشیم $\beta\gamma(h) = h$ ، آنگاه $h = ۱$).

اثبات. فرض کنیم m یک عدد صحیح مثبت باشد. چون $Im(\gamma\beta)^m \leq Z(K)$ ، پس

$Im(\gamma\beta)^m \lhd K$ ؛ و چون $Im(\beta\gamma)^m \leq Z(H)$ ، پس $Im(\beta\gamma)^m \lhd H$. بنابراین از قضیه ۳.۲.۲ نتیجه می‌شود که H و K یک عامل مستقیم آبلی مشترک نابدیهی مانند $Im(\gamma\beta)^t$ دارند که ضرورتاً آبلی است. $\square$

برای نتایج بعدی از نمادگذاری زیر استفاده خواهیم کرد:

اگر $G = H \times K$ ، آنگاه با استفاده از قضیه ۱.۱.۲ هر $\theta \in AutG$ با یک ماتریس در $\mathcal{M}$ متناظر می‌شود و معکوس آن $\theta^{-۱}$ نیز به همین صورت می‌باشد. پس می‌توانیم فرض کنیم که

$$\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M} \ , \ \theta^{-۱} = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}.$$

لم ۵.۲.۲. باتوجه به نمادگذاری بالا روابط زیر برقرارند:

$$(i)\alpha'\alpha + \beta'\gamma = ۱ \ , \ (ii)\alpha'\beta + \beta'\delta = ۰ \ , \ (iii)\gamma'\alpha + \delta'\gamma = ۰ \ , \ (iv)\gamma'\beta + \delta'\delta = ۱$$

$$(i)'\alpha\alpha' + \beta\gamma' = ۱ \ , \ (ii)'\alpha\beta' + \beta\delta' = ۰ \ , \ (iii)'\gamma\alpha' + \delta\gamma' = ۰ \ , \ (iv)'\gamma\beta' + \delta\delta' = ۱$$

اثبات. چون $\theta^{-۱} \circ \theta = ۱ = \theta \circ \theta^{-۱}$ ، روابط فوق فوراً از ضرب ماتریس‌های نظیر θ و $\theta^{-۱}$ و مساوی قرار دادن با ماتریس همانی به دست می‌آیند. (توجه شود که در اینجا ماتریس همانی، عضوی از $\mathcal{M}$ است.) $\square$

لم ۶.۲.۲. ۱- اگر $\alpha \in AutH$ آنگاه $\beta \in Hom(K, Z(H))$.

۲- اگر $\delta \in AutK$ آنگاه $\gamma \in Hom(H, Z(K))$.

اثبات. با استفاده از برهان قضیه ۱.۱.۲ داریم $[Im\alpha, Im\beta] = ۱$. اما چون $\alpha \in AutH$ پس $Im\alpha = H$ ، لذا $Im\beta \subseteq Z(H)$ و $\beta \in Hom(K, Z(H))$. برهان قسمت دوم مشابه با قسمت یک است. $\square$

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنیم t یک عدد صحیح مثبت باشد و $\sigma = (\gamma'\beta)^t$ و $\tau = (\beta\gamma')^t$.
دراین‌صورت $Im\sigma \lhd K$ و $Im\tau \lhd H$.

اثبات. از لم ۵.۲.۲ قسمت (iv) داریم برای هر $x \in K$ ، $x = \gamma'\beta(x)\delta'\delta(x)$. اگر $\gamma'\beta$ را با ϕ و $\delta'\delta(x)$ را با x^* نشان دهیم، داریم $x = \phi(x)x^*$ $(\dagger)$. از طرفی $Im\phi \subseteq Im\gamma'$ و با استفاده از برهان قضیه ۱.۱.۲ داریم $[Im\gamma', Im\delta'] = 1$ ، لذا $[Im\phi, Im\delta'] = 1$ ، پس برای هر $x, y \in K$ ، $[\phi(y), \delta'\delta(x)] = 1$ لذا $[\phi(y), x^*] = 1$ بنابراین $\phi(y)^{x^*} = \phi(y)$ و این نتیجه می‌دهد که $Im\phi \lhd K$ زیرا:

$$\phi(y)^x = \phi(y)^{\phi(x)x^*} = \phi(y)^{\phi(x)} = \phi(y^x) \in Im\phi$$

بعلاوه $Im\phi^2 \lhd K$ ، زیرا اگر در رابطه $(\dagger)$ به جای x ، $\phi(x)$ قرار دهیم داریم:

$$\phi(x) = \phi^2(x)x^{**}$$

(که در آن $x^{**} = \delta'\delta(\phi(x))$)

بنابراین

$$x = \phi(x)x^* = (\phi^2(x)x^{**})x^*$$

و چون رابطهٔ $[\phi(y), \delta'\delta(x)] = 1$ برای هر $x, y \in K$ برقرار است داریم
$[\phi^2(y), x^{**}] = [\phi(\phi(y)), \delta'\delta(\phi(x))] = 1$ ، لذا

$$\phi^2(y)^x = \phi^2(y)^{(\phi^2(x)x^{**})x^*} = \phi^2(y)^{\phi^2(x)} = \phi^2(y^x) \in Im\phi^2$$

با ادامه این روند به‌طور استقرایی خواهیم داشت:

$$Im\sigma = Im\phi^t \lhd K.$$

هم چنین با استفاده از لم ۵.۲.۲ قسمت $(i)'$ ، برای هر $y \in H$ داریم $y = \beta\gamma'(y)\alpha\alpha'(y)$.
استدلالی مشابه بالا نشان می‌دهد که $Im\tau \lhd H$. □

نتیجه بعدی به آسانی از قضیه ۳.۲.۲ به دست می‌آید.

نتیجه ۸.۲.۲. اگر برای یک $k \in K$ که $k \neq ۱$ ، داشته باشیم $\gamma'\beta(k) = k$ (یا برای یک $h \in H$ که $h \neq ۱$ ، داشته باشیم $\beta\gamma'(h) = h$) آنگاه H و K یک عامل مستقیم مشترک دارند.

بویژه، اگر H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی نداشته باشند و برای یک $k \in K$ ، داشته باشیم $\gamma'\beta(k) = k$ ، آنگاه $k = ۱$ (یا اگر برای یک $h \in H$ ، داشته باشیم $\beta\gamma'(h) = h$ ، آنگاه $h = ۱$).

اثبات. فرض کنید برای هر عدد صحیح مثبت t ، $\sigma = (\gamma'\beta)^t$ و $\tau = (\beta\gamma')^t$. دراین‌صورت بنا به قضیه ۷.۲.۲ داریم $Im\sigma \lhd K$ و $Im\tau \lhd H$. حال با توجه به اینکه $\beta \in Hom(K, H)$ و $\gamma' \in Hom(H, K)$ شرایط قضیه ۳.۲.۲ برقرار می‌باشد و نتیجه به دست می‌آید.
□

۳.۲ نتایج اصلی

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید $G = H \times K$. دراین‌صورت $\mathcal{A} \subseteq AutG$ اگر و فقط اگر H و K هیچ عامل مستقیم آبلی مشترکی نداشته باشند.

اثبات. فرض کنیم H و K هیچ عامل مستقیم آبلی مشترکی نداشته باشند. فرض کنیم $\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ و

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix}.$$

دراین‌صورت $\alpha(h)\beta(k) = 1$ ، پس $h = \alpha^{-1}(\beta(k^{-1}))$.

هم چنین $\gamma(h)\delta(k) = 1$ ، پس $k = \delta^{-1}(\gamma(h^{-1}))$.

لذا $\delta(k) = \gamma(h^{-1}) = \gamma(\alpha^{-1}(\beta(k)))$. بنابراین

$$k = (\delta^{-1}\gamma)(\alpha^{-1}\beta)(k)$$

که در آن $\delta^{-1}\gamma \in Hom(H, Z(K))$ و $\alpha^{-1}\beta \in Hom(K, Z(H))$. حال با استفاده از نتیجه ۴.۲.۲ ، چون H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند داریم $k = 1$. و با استفاده از رابطهٔ $h = \alpha^{-1}(\beta(k^{-1}))$ داریم $h = 1$. بنابراین θ یک‌به‌یک است و چون گروه G متناهی است θ پوشا نیز هست و داریم $\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in AutG$. در نتیجه $\mathcal{A} \subseteq AutG$.

بالعکس فرض کنید $\mathcal{A} \subseteq AutG$. فرض کنیم H و K یک عامل مستقیم آبلی مشترک داشته باشند (فرض خلف)، $H = A \times H^*$ و $K = A \times K^*$ که A آبلی باشد. تعریف می‌کنیم:

$$\gamma : H \to Z(K)$$

به‌طوری‌که $\gamma(a, h^*) = (a^{-1}, 1)$ و

$$\beta : K \to Z(H)$$

به‌طوری‌که $\beta(a, k^*) = (a^{-1}, 1)$.

دراین‌صورت $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. پس $\theta = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$ یک‌به‌یک نمی‌باشد و $\theta = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \notin AutG$ که این با فرض $\mathcal{A} \subseteq AutG$تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و H و K هیچ عامل مستقیم آبلی مشترکی ندارند. □

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید $G = H \times K$، که H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی نداشته

باشند. دراین‌صورت $AutG \cong \mathcal{A}$. بویژه،

$$|AutG| = |AutH||AutK||Hom(H, Z(K))||Hom(K, Z(H))|.$$

اثبات. فرض کنید $\theta \in AutG$ دلخواه باشد و $\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{M}$. همچنین فرض کنید $k \in K$ و $\delta(k) = ۱$. با استفاده از لم ۵.۲.۲ قسمت (iv) داریم:

$$\gamma'\beta(k)\delta'\delta(k) = k$$

وچون $\delta(k) = ۱$ لذا داریم:

$$\gamma'\beta(k) = k$$

بنابراین با استفاده از نتیجه ۸.۲.۲، چون H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند، داریم $k = ۱$. پس δ یک‌به‌یک است و لذا $\delta \in AutK$. با استدلالی مشابه و استفاده از لم ۵.۲.۲ قسمت (i) می‌توان نشان داد که $\alpha \in AutH$. بنابراین با استفاده از لم ۶.۲.۲ داریم $\beta \in Hom(K, Z(H))$ و $\gamma \in Hom(H, Z(K))$، لذا $\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ و این یعنی $AutG \subseteq \mathcal{A}$.
از طرفی چون H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند، بنابر قضیه ۱.۳.۲ داریم $\mathcal{A} \subseteq AutG$. بنابراین $AutG \cong \mathcal{A}$ و

$$|AutG| = |\mathcal{A}| = |AutH||AutK||Hom(H, Z(K))||Hom(K, Z(H))|.$$

□

ساختار و مرتبه‌ی گروه خودریختی‌های مرکزی یک ضرب مستقیم از قضیه ۲.۳.۲ به دست می‌آید.

فرض کنید:

$$\mathcal{A}_c = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \begin{array}{cc} \alpha \in Aut_c H & \beta \in Hom(K, Z(H)) \\ \gamma \in Hom(H, Z(K)) & \delta \in Aut_c K \end{array} \right\}.$$

نتیجه ۳.۳.۲. فرض کنید $G = H \times K$، که H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی نداشته باشند. دراین‌صورت $Aut_cG \cong \mathcal{A}_c$ ، و بنابراین

$$|Aut_cG| = |Aut_cH||Aut_cK||Hom(H, Z(K))||Hom(K, Z(H))|.$$

اثبات. فرض کنیم $\theta \in Aut_cG$ دراین‌صورت بنابه لم ۱۲.۱.۱ برای هر $g \in G$ داریم $g^{-1}\theta(g) \in Z(G)$.

حال چون $G = H \times K$ پس $g \in G$ را با (h, k) نشان می‌دهیم و چون $\theta \in Aut_cG \subseteq AutG$ و بنا به قضیه ۲.۳.۲ داریم $AutG \cong \mathcal{A}$ پس در نظر می‌گیریم $\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ که در آن $\beta \in Hom(K, Z(H))$ و $\gamma \in Hom(H, Z(K))$. بنابراین روابط زیر برقرارند:

$$\begin{aligned}
\theta \in Aut_cG &\Leftrightarrow \forall g \in G, g^{-1}\theta(g) \in Z(G) \\
&\Leftrightarrow (h^{-1}, k^{-1})(\alpha(h)\beta(k), \gamma(h)\delta(k)) \in Z(H) \times Z(K) \\
&\Leftrightarrow h^{-1}\alpha(h) \in Z(H), k^{-1}\delta(k) \in Z(K) \\
&\Leftrightarrow \alpha \in Aut_cH, \delta \in Aut_cK \\
&\Leftrightarrow \theta \in \mathcal{A}_c.
\end{aligned}$$

□

نتیجه ۴.۳.۲. اگر H آبلی و K بطور محض ناآبلی باشد، آنگاه H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند. دراین‌صورت با استفاده از قضیه ۲.۳.۲ داریم $AutG \cong \mathcal{A}$ ، و با استفاده از نتیجه ۳.۳.۲ داریم $Aut_cG \cong \mathcal{A}_c$. بعلاوه

$$|Aut_cG| = |Aut_cH||Aut_cK||Hom(H, Z(K))||Hom(K, Z(H))|.$$

مثال. فرض کنید $G = C_{۲} \times Q_{۱۲}$. در اینجا $H = C_{۲}$ آبلی است، $K = Q_{۱۲}$ (گروه غیر دوری از مرتبه ۱۲) بطور محض ناآبلی است. بنابراین با استفاده از توجه فوق داریم

$$|AutG| = |AutC_{۲}||AutQ_{۱۲}||Hom(C_{۲}, C_{۲})||Hom(C_{۴}, C_{۲})| = |D_{۱۲}||C_{۲}||C_{۲}| = ۴۸.$$

نتیجه ۵.۳.۲. فرض کنید $G = H \times K$ یک p-گروه باشد، که H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی نداشته باشند. دراین‌صورت $AutG$ یک p-گروه است اگروفقط‌اگر $AutH$ و $AutK$ هر دو p-گروه باشند.

اثبات. چون H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند پس بنا به قضیه ۲.۳.۲ داریم

$$|AutG| = |AutH||AutK||Hom(H, Z(K))||Hom(K, Z(H))|. \quad (*)$$

حال فرض کنیم $Aut(G)$ یک p-گروه باشد دراین‌صورت بنا به گزاره‌ی ۲۶.۱.۱ مرتبه $Aut(G)$ توانی از عدد اول p خواهد بود. پس بنابر رابطه $(*)$ مرتبه $Aut(H)$ و $Aut(K)$ نیز توانی از p است لذا $Aut(H)$ و $Aut(K)$ نیز p-گروه هستند.

بالعکس، فرض کنیم $Aut(H)$ و $Aut(K)$ هر دو p-گروه باشند دراین‌صورت مرتبه آنها توانی از p است. از طرفی بنا به فرض $G = H \times K$ یک p-گروه است پس H و K هر دو p-گروه هستند. بنا به لم ۱۹.۱.۱، $Hom(H, Z(K)) \cong Hom(\frac{H}{H'}, Z(K))$ و $Hom(K, Z(H)) \cong Hom(\frac{K}{K'}, Z(H))$. حال چون گروه‌های $\frac{H}{H'}$، $Z(K)$، $\frac{K}{K'}$ و $Z(H)$ آبلی هستند پس می‌توانیم آن‌ها را به‌صورت حاصل‌ضرب گروه‌های دوری بنویسیم و با استفاده از لم‌های ۲۰.۱.۱و ۲۳.۱.۱ نتیجه می‌گیریم که $Hom(H, Z(K))$ و $Hom(K, Z(H))$ هر دو p-گروه هستند. در نتیجه بنا به رابطه $(*)$ $AutG$ نیز p-گروه است. □

حال به ساختار $AutG$ که $G = H \times K$ باز می‌گردیم. فرض کنید:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} : \alpha \in AutH \right\},$$
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ & \beta \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} : \beta \in Hom(K, Z(H)) \right\},$$
$$C = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ \gamma & ۱ \end{pmatrix} : \gamma \in Hom(H, Z(K)) \right\},$$
$$D = \left\{ \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \delta \end{pmatrix} : \delta \in AutK \right\},$$

چون A ، B ، C و D نسبت به ضرب بسته‌اند و $AutG$ متناهی است پس A ، B ، C و D زیرگروه‌هایی از $Aut(G)$ هستند (حتی اگر H و K یک عامل مستقیم مشترک داشته باشند).

قضیه ۶.۳.۲. فرض کنید $G = H \times K$، که H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند. دراین‌صورت $AutG = ABCD$ ، بطوریکه $AD = A \times D \subseteq N(B)$ و $AD = A \times D \subseteq N(C)$.

اثبات. چون A ، B ، C و D زیرگروه‌هایی از $AutG$ هستند، $ABCD \subseteq AutG$. بالعکس، ابتدا توجه کنید که اگر $\begin{pmatrix} ۱ & \beta \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$ ، آنگاه $۱ - \beta\gamma \in AutH$. زیرا $(۱ - \beta\gamma)(h) = ۱$ نتیجه می‌دهد که $\beta\gamma(h) = h$ و چون H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند بنا بر نتیجه ۴.۲.۲ داریم $h = ۱$. این یعنی $۱ - \beta\gamma$ یک‌به‌یک است و لذا متعلق به $AutH$ است. هم‌چنین $(۱ - \beta\gamma)^{-۱}\beta$ متعلق به $Hom(K, Z(H))$ می‌باشد بنابراین داریم:

$$\begin{pmatrix} ۱ & \beta \\ \gamma & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ - \beta\gamma & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & (۱ - \beta\gamma)^{-۱}\beta \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ \gamma & ۱ \end{pmatrix} \in ABC.$$

حال فرض کنید $\theta \in AutG$ داده شده باشد بنا بر قضیه ۲.۳.۲ داریم $\theta = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathcal{A}$. با در نظر گرفتن

$$\beta^* = \alpha^{-۱}\beta\delta^{-۱} \in Hom(K, Z(H))$$

و با توجه به نکته فوق داریم

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & \beta^* \\ \gamma & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & \delta \end{pmatrix} \in A(ABC)D = ABCD,$$

بنابراین $AutG \subseteq ABCD$. حال ثابت می‌کنیم A و D ، B و C را نرمال می‌کنند. برای هر $\begin{pmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \in A$ و برای هر $\begin{pmatrix} ۱ & \beta \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \in B$ داریم

$$\begin{pmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۱ & \beta \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha\beta \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۱ & \alpha\beta \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \in B \begin{pmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$$

پس $\begin{pmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ لذا $\begin{pmatrix} \alpha & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix} \in N(B)$ بنابراین $A \subseteq N(B)$. به همین ترتیب داریم $A \subseteq N(C)$ ، $D \subseteq N(B)$ و $D \subseteq N(C)$. پس $A \times D \subseteq N(B)$ و $A \times D \subseteq N(C)$. □

نتیجه ۷.۳.۲. فرض کنید $G = H \times K$، که H و K هیچ عامل مستقیم آبلی مشترکی ندارند. دراین صورت $\mathcal{A} = ABCD$.

اثبات. کافی است در برهان قضیه فوق بجای $AutG$ از $\mathcal{A}$ استفاده کنیم، دراین‌صورت نیازی به استفاده از قضیه ۲.۳.۲ نمی‌باشد. □

مثال. فرض کنید $G = Q_۸ \times D_۸$ داریم $AutQ_۸ \cong S_۴$، $AutD_۸ \cong D_۸$ ،

$Hom(D_۸, Z(Q_۸)) = Hom(\frac{D_۸}{D'_۸}, C_۲) = Hom(C_۲ \times C_۲, C_۲) = C_۲ \times C_۲$ و

$Hom(Q_۸, Z(D_۸)) = Hom(\frac{Q_۸}{Q'_۸}, C_۲) = Hom(C_۲ \times C_۲, C_۲) = C_۲ \times C_۲$. بنابراین داریم:

$$A \cong S_۴, B \cong C_۲ \times C_۲, C \cong C_۲ \times C_۲, D \cong D_۸.$$

نتیجه ۸.۳.۲. فرض کنید $G = H \times K$، که H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند و

$$gcd(|H/H'|, |Z(K)|) = ۱ = gcd(|K/K'|, |Z(H)|) \qquad (*)$$

دراین‌صورت

$$AutG = AutH \times AutK.$$

اثبات. در اینجا داریم $Hom(K, Z(H)) = ۱ = Hom(H, Z(K))$. زیرا فرض کنیم $\phi \in Hom(H/H', Z(K))$ دراین‌صورت برای هر $h \in H$ داریم :

$$o(\phi(hH'))\Big||Z(K)| \quad , \quad o(\phi(hH'))\Big|o(hH'), \quad o(hH')\Big||H/H'|$$

پس

$$o(\phi(hH'))\Big|gcd(|H/H'|, |Z(K)|) = ۱$$

لذا

$$o(\phi(hH')) = ۱ \Rightarrow \phi(hH') = ۱ \Rightarrow \phi \equiv ۱ \Rightarrow Hom(H/H', Z(K)) = ۱$$

حال با استفاده از نتیجه‌ی ۱۹.۱.۱ داریم $Hom(H, Z(K)) = Hom(H/H', Z(K)) = ۱$. به همین روش ثابت می‌شود که $Hom(K, Z(H)) = ۱$. بنابراین زیرگروه‌های B و C از $AutG$ هر دو بدیهی‌اند و بنابر قضیه ۶.۳.۲ داریم

$$AutG = AD \cong AutH \times AutK.$$

□

به ویژه ، در حالتی که $H = H'$ یا $Z(K) = ۱$ و $K = K'$ و $Z(H) = ۱$ رابطه$(*)$ برقرار می‌شود و می‌توان نتیجه بالا را بکار برد.

مثال. فرض کنید $G = D_۸ \times A_۴$ ، که $H = D_۸$ و $K = A_۴$ هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند. $H = D_۸$ و $K = A_۴$ هر دو ناآبلی اند و مثلاً اگر $D_۸$ تجزیه شود باید به‌صورت حاصل

ضرب زیرگروه‌های ۲ و ۴ عضوی باشد که هر دو آبلی‌اند و این غیر ممکن است پس D_8 تجزیه‌ناپذیر است و لذا عامل مشترکی با A_4 ندارد. از طرفی $Z(K) = Z(A_4) = 1$ و چون $Z(D_8) = C_2$ و $A_4' = C_2 \times C_2$ داریم

$$gcd(|K/K'|, |Z(H)|) = gcd(3, 2) = 1$$

پس شرایط نتیجه ۸.۳.۲ برقرار است و داریم

$$AutG = AutH \times AutK \cong D_8 \times S_4.$$

نتیجه ۹.۳.۲. فرض کنید $G = H \times K$، که H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند و $Z(K) = 1$. دراین‌صورت $AutG$ یک حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم به‌صورت زیر است

$$AutG \cong (AutH \times AutK) \ltimes Hom(K/K', Z(H)).$$

اثبات. چون $Z(K) = 1$ پس $C = 1$ و با استفاده از قضیه ۶.۳.۲ ، $A \times D$ ، B را نرمال می‌کند لذا $A \times D \subseteq N(B)$ و هم‌چنین به‌وضوح $B \subseteq N(B)$ پس $AutG = ABD \subseteq N(B)$. بنابراین $B \lhd AutG$ و

$$AutG = (A \times D) \ltimes B \cong (AutH \times AutK) \ltimes Hom(K, Z(H))$$

حال با استفاده از نتیجهٔ ۱۹.۱.۱ داریم

$$AutG \cong (AutH \times AutK) \ltimes Hom(K/K', Z(H)).$$

□

مثال. دو گروه $G_1 = (C_2 \times C_2) \times S_3$ $(H_1 = C_2 \times C_2, K = S_3)$ و $G_2 = C_4 \times S_3$ $(H_2 = C_4, K = S_3)$ را که از مرتبه ۲۴ هستند در نظر بگیرید. نتیجه ۹.۳.۲ در هر دو

مورد برقرار می‌باشد زیرا $Z(K) = Z(S_3) = 1$ و H_1 و H_2 آبلی هستند. از طرفی $S_3' = A_3$ لذا $S_3/S_3' \cong C_2$. بنابراین داریم :

$$AutG_1 \cong (AutH_1 \times AutK) \ltimes Hom(C_2, C_2 \times C_2) \cong (S_3 \times S_3) \ltimes (C_2 \times C_2)$$

و

$$AutG_2 \cong (AutH_2 \times AutK) \ltimes Hom(C_2, C_4) \cong (C_2 \times S_3) \ltimes C_2.$$

تعریف ۱۰.۳.۲. اگر $Z(G) \subseteq G'$ ، آنگاه گروه G را یک گروه تنه‌ای [1] می‌نامیم.

قضیه ۱۱.۳.۲. فرض کنید $G = H \times K$، که H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی نداشته باشند و H و K هر دو گروه‌های تنه‌ای باشند. یعنی $Z(H) \subseteq H'$ و $Z(K) \subseteq K'$. دراین‌صورت

$$AutG \cong (AutH \times AutK) \ltimes (Hom(K/K', Z(H)) \times Hom(H/H', Z(K))).$$

اثبات. فرض کنید $B \ni \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $C \ni \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$. در این صورت

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\beta\gamma & \beta \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

و

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \gamma & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \gamma & 1+\gamma\beta \end{pmatrix}.$$

اما با استفاده از ۱۷.۱.۱داریم $Im\gamma \subseteq Z(K) \subseteq K' \subseteq Ker\beta$. بنابراین $\beta\gamma = 0$. به روش مشابه ثابت می‌شود که $\gamma\beta = 0$. درنتیجه $BC = CB \cong B \times C$.

[1] stem group

به علاوه بنا به قضیه ۶.۳.۲ $AD \cong A \times D$، BC را نرمال می‌کند. پس $AD \subseteq N(BC)$ و به‌وضوح $BC \subseteq N(BC)$ پس با استفاده از قضیه ۶.۳.۲ داریم

$$AutG = ABCD \subset N(BC)$$

. بنابراین $BC \lhd AutG$. در نتیجه

$$AutG = (AD) \ltimes (BC) \cong (A \times D) \ltimes (B \times C).$$

□

مثال. فرض کنید $G = Q_8 \times D_8$ توجه کنید که Q_8 و D_8 گروه‌های تنه ای هستند. (چون $Z(Q_8) = C_2$ پس $\left|Q_8/Z(Q_8)\right| = 4$ لذا $Q_8/Z(Q_8)$ آبلی است و بنا به لم ۲۴.۱.۱ داریم $Q'_8 \subseteq Z(Q_8)$. به‌طور مشابه داریم $D'_8 \subseteq Z(D_8)$.) پس شرایط قضیه ۱۱.۳.۲ برقرار است. و با استفاده از لم‌های ۲۰.۱.۱ و ۲۳.۱.۱ داریم

$$\begin{aligned}
AutG &\cong (AutQ_8 \times AutD_8) \ltimes (Hom(Q_8/Q'_8, Z(D_8)) \times Hom(D_8/D'_8, Z(D_8))) \\
&\cong (S_4 \times D_8) \ltimes (Hom(C_2 \times C_2, C_2) \times Hom(C_2 \times C_2, C_2) \\
&\cong (S_4 \times D_8) \ltimes (Hom(C_2, C_2) \times Hom(C_2, C_2) \times (Hom(C_2, C_2) \times Hom(C_2, C_2)) \\
&\cong (S_4 \times D_8) \ltimes (C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2)
\end{aligned}$$

فصل ۳

خودریختی‌های حاصل‌ضرب مستقیم چند گروه متناهی

۱.۳ مقدمه فصل

در این فصل ابتدا گروه خودریختی‌های حاصل‌ضرب مستقیم n نسخه از یک گروه غیرآبلی تجزیه‌ناپذیر را می‌یابیم. نشان می‌دهیم گروه خودریختی‌ها یکریخت با مجموعه‌ای از ماتریس‌ها با درایه‌هایی که همریختی‌های بین n عامل مستقیم هستند، می‌باشد. سپس این تعریف را همراه با تعمیم نتیجه ای از بیدول و کاران [۱] روی $Aut(H \times K)$ ، که H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند به‌کار می‌بریم تا قضایای ساختار و مرتبه را برای یک حاصل‌ضرب مستقیم دلخواه به‌دست آوریم. در این فصل نیز تمام گروه‌های در نظر گرفته شده متناهی هستند و مطالب این فصل براساس [۱۲] می‌باشند.

گروه خودریختی‌های حاصل‌ضرب مستقیم دو گروه متناهی H و K در فصل ۲ مطالعه شد. در آن جا نشان دادیم که اگر $G = H \times K$ و H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی نداشته باشند آنگاه

$$AutG \cong \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \begin{matrix} \alpha \in AutH & \beta \in Hom(K, Z(H)) \\ \gamma \in Hom(H, Z(K)) & \delta \in AutK \end{matrix} \right\}$$

[۱] Bidwell,Curran

به عنوان نتایج اولیه توصیفی از $AutG$ وقتی $G = H^n$ ، $(n > ۱)$ ، حاصل‌ضرب مستقیم n نسخه از یک گروه تجزیه‌ناپذیر ناآبلی H است، به‌دست می‌آوریم. حالت $n = ۲$ با قرار دادن $K = H$ در گروه‌های مطالعه شده در فصل ۲ به‌دست می‌آید.
برای یک n کلی ما باید با دو پیچیدگی که در فصل ۲ موا جه نشدیم سر وکار داشته باشیم. اولاً باید روی ماتریس‌های $n \times n$ کار کنیم و دوماً باید خودریختی‌های که عوامل مستقیم را جابه‌جا می‌کند در نظر بگیریم. نتایج اصلی ما نشان می‌دهند که $AutG$ یک حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم از یک گروه ماتریسی در گروه متقارن S_n است و

$$|AutG| = |AutH|^n |Hom(H, Z(H)|^{n^۲ - n} n!.$$

به عنوان نتیجه اصلی این فصل، گروه خودریختی‌های یک حاصل‌ضرب مستقیم متناهی دلخواه مانند $G = H_۱^{\beta_۱} \times \cdots \times H_n^{\beta_n}$ را توصیف می‌کنیم که H_iها همگی غیریکریخت و تجزیه‌ناپذیرند و $\beta_i \geq ۱$ $(۱ \leq i \leq n)$.

۲.۳ نتایج مقدماتی

فرض کنید $G = H_۱ \times \cdots \times H_n$ ، بدون هیچ شرطی روی H_i باشد. توجه کنید که ما می‌توانیم هر درونریختی ϕ از G را به‌صورت یک ماتریس $[\alpha_{ij}]_{n \times n}$ بنویسیم به‌طوری‌که $\alpha_{ij} = \pi_i \phi e_j$ ، که در آن π_i و e_j به ترتیب تابع تصویر طبیعی و تابع نشاندن عامل مستقیم H_j هستند. بنابراین $\alpha_{ij} \in Hom(H_j, H_i)$. تصویر یک عنصر $(h_۱, \ldots, h_n)$ ، تحت ϕ توسط ضرب از چپ بردار ستونی $(h_۱, \ldots, h_n)^T$ در ماتریس $[\alpha_{ij}]_{n \times n}$ به‌دست می‌آید.
در فصل ۲ نشان دادیم که اگر $n = ۲$ آنگاه $[Im\alpha_{i۱}, Im\alpha_{i۲}] = ۱$ ، که $i = ۱, ۲$. در واقع این نتیجه به آسانی برای هر n تعمیم می‌یابد و لم زیر به‌دست می‌آید.

لم ۱.۲.۳. فرض کنید $G = H_۱ \times \cdots \times H_n$ ، دراین‌صورت $EndG \cong \mathcal{M}$ ، که

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \dots & \alpha_{۱n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n۱} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} ; \begin{array}{ll} \alpha_{ij} \in Hom(H_j, H_i), & [Im\alpha_{ij_۱}, Im\alpha_{ij_۲}] = ۱, \\ & \forall i, j_۱, j_۲; j_۱ \neq j_۲ \end{array} \right\}$$

و ضرب در $\mathcal{M}$ همان ضرب معمولی ماتریس‌ها است، به علاوه جمع دو همریختی $\alpha, \beta \in Hom(H_j, H_i)$ به‌صورت $(\alpha+\beta)(x) = \alpha(x)\beta(x)$ و ضرب $\alpha, \beta \in Hom(H_j, H_i)$ همان ترکیب α با β است.

اثبات. فرض کنیم $\phi \in EndG$ و $\alpha_{ij} = \pi_i \phi e_j$ ، که در آن π_i تابع تصویر از G به H_i و e_j تابع نشاندن عامل مستقیم H_j در G است. داریم:

$$\begin{aligned} \phi(۱, \dots, h_{j_۱}, ۱, \dots, ۱, h_{j_۲}, \dots, ۱) &= \phi(۱, \dots, ۱, h_{j_۱}, ۱, \dots, ۱)\phi(۱, \dots, ۱, h_{j_۲}, ۱, \dots, ۱) \\ &= (\alpha_{۱j_۱}(h_{j_۱}), \dots, \alpha_{nj_۱}(h_{j_۱}))(\alpha_{۱j_۲}(h_{j_۲}), \dots, \alpha_{nj_۲}(h_{j_۲})) \\ &= (\alpha_{۱j_۱}(h_{j_۱})\alpha_{۱j_۲}(h_{j_۲}), \dots, \alpha_{nj_۱}(h_{j_۱})\alpha_{nj_۲}(h_{j_۲})). \end{aligned}$$

از طرفی

$$\begin{aligned} \phi(۱, \dots, h_{j_۱}, ۱, \dots, ۱, h_{j_۲}, \dots, ۱) &= \phi(۱, \dots, ۱, h_{j_۲}, ۱, \dots, ۱)\phi(۱, \dots, ۱, h_{j_۱}, ۱, \dots (۱.۳) \\ &= (\alpha_{۱j_۲}(h_{j_۲})\alpha_{۱j_۱}(h_{j_۱}), \dots, \alpha_{nj_۲}(h_{j_۲})\alpha_{nj_۱}(h_{j_۱})). \end{aligned}$$

لذا برای هر $i, j_۱, j_۲$ ، $(j_۱ \neq j_۲)$، داریم

$$[Im\alpha_{ij_۱}, Im\alpha_{ij_۲}] = ۱$$

پس $\phi \in \mathcal{M}$ و در نتیجه $EndG \subseteq \mathcal{M}$. حال نگاشت $f : EndG \to \mathcal{M}$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

$$f(\theta) = \begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \dots & \alpha_{۱n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n۱} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

بررسی همریختی و یک‌به‌یک بودن f مشابه برهان قضیه ۱.۱.۲ است. حال برای هر $\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix} \in \mathcal{M}$ و $(h_1,\dots,h_n) \in G$ ، نگاشت $\theta : G \to G$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\theta(h_1,\dots,h_n) = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}$$

θ یک درون‌ریختی از G است زیرا:

$$\theta(h_1,\dots,h_n)\theta(h'_1,\dots,h'_n) = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h'_1\\ \vdots\\ h'_n\end{pmatrix}$$

$$= (\alpha_{11}(h_1)\dots\alpha_{1n}(h_n),\dots,\alpha_{n1}(h_1)\dots\alpha_{nn}(h_n))(\alpha_{11}(h'_1)\dots\alpha_{1n}(h'_n),\dots,\alpha_{n1}(h'_1)\dots\alpha_{nn}(h'_n))$$

$$= (\alpha_{11}(h_1)\dots\alpha_{1n}(h_n)\alpha_{11}(h'_1)\dots\alpha_{1n}(h'_n),\dots,\alpha_{n1}(h_1)\dots\alpha_{nn}(h_n)\alpha_{n1}(h'_1)\dots\alpha_{nn}(h'_n))$$

$$= (\alpha_{11}(h_1h'_1)\dots\alpha_{1n}(h_nh'_n),\dots,\alpha_{n1}(h_1h'_1)\dots\alpha_{nn}(h_nh'_n))$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1h'_1\\ \vdots\\ h_nh'_n\end{pmatrix} = \theta(h_1h'_1,\dots,h_nh'_n)$$

و داریم $f(\theta) = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}$. پس f پوشاست و لذا $EndG \cong \mathcal{M}$. □

حال فرض می‌کنیم که هیچ دو تا از H_iها $(1 \leq i \leq n)$ عامل مستقیم مشترک نداشته باشند و تعمیم زیر از قضیه ۲.۳.۲ در فصل ۲ را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنیم $G = H_1 \times \dots \times H_n$ که هیچ جفت از H_iها عامل مستقیم مشترک ندارند. دراین‌صورت $AutG \cong \mathcal{A}$ که در آن

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}; \alpha_{ij} \in \left\{ \begin{array}{ll} AutH_i & i = j\\ Hom(H_j, Z(H_i)) & i \neq j \end{array} \right. \right\}.$$

اثبات. قرار می‌دهیم $\mathcal{A} = A_n$ که n تعداد H_iها است. برهان را به استقرا روی n دنبال می‌کنیم. اگر $n = ۲$ یعنی $G = H_۱ \times H_۲$، آنگاه بنا به قضیه ۲.۳.۲ داریم:

$$AutG \cong A_۲ = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \alpha_{۱۲} \\ \alpha_{۲۱} & \alpha_{۲۲} \end{pmatrix}; \alpha_{ij} \in \left\{ \begin{array}{ll} AutH_i & i = j \\ Hom(H_j, Z(H_i)) & i \neq j \end{array} \right. \right\}.$$

فرض کنیم برای $K = H_۱ \times \cdots \times H_{n-۱}$ داشته باشیم

$$AutK \cong A_{n-۱} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \cdots & \alpha_{۱(n-۱)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(n-۱)۱} & \cdots & \alpha_{(n-۱)(n-۱)} \end{pmatrix}; \alpha_{ij} \in \left\{ \begin{array}{ll} AutH_i & i = j \\ Hom(H_j, Z(H_i)) & i \neq j \end{array} \right. . \right\}$$

حال فرض کنیم $G = K \times H_n$ که در آن $K = H_۱ \times \cdots \times H_{n-۱}$. داریم

$$AutG \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} : \begin{array}{ll} \alpha \in AutK & \beta \in Hom(K, Z(H_n)) \\ \gamma \in Hom(H_n, Z(K)) & \delta \in AutH_n \end{array} \right\}$$

اما $\alpha \in AutK = Aut(H_۱ \times \cdots \times H_{n-۱})$، پس بنا به فرض استقرا

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \cdots & \alpha_{۱(n-۱)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(n-۱)۱} & \cdots & \alpha_{(n-۱)(n-۱)} \end{pmatrix}; \alpha_{ij} \in \left\{ \begin{array}{ll} AutH_i & i = j \\ Hom(H_j, Z(H_i)) & i \neq j \end{array} \right. .$$

از طرفی

$$\beta \in Hom(K, Z(H_n)) = Hom(H_۱ \times \cdots \times H_{n-۱}, Z(H_n))$$

$$= Hom(H_۱, Z(H_n)) \times \cdots \times Hom(H_{n-۱}, Z(H_n))$$

پس داریم:

$$\beta = \begin{pmatrix} \alpha_{۱n} \\ \alpha_{۲n} \\ \vdots \\ \alpha_{(n-۱)n} \end{pmatrix}; \alpha_{in} \in Hom(H_i, Z(H_n)).$$

همچنین

$$\begin{aligned} \gamma \in Hom(H_n, Z(K)) &= Hom(H_n, Z(H_۱ \times \cdots \times H_{n-۱})) \\ &= Hom(H_n, Z(H_۱) \times \cdots \times Z(H_n)) \\ &= Hom(H_n, Z(H_۱)) \times \cdots \times Hom(H_n, Z(H_n)) \end{aligned}$$

لذا

$$\gamma = \begin{pmatrix}\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n(n-1)}\end{pmatrix}; \alpha_{ni} \in Hom(H_n, Z(H_i)) \ i = 1, \dots, n-1.$$

بنابراین با فرض $\delta = \alpha_{nn}$ خواهیم داشت

$$AutG \cong \left\{ \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} : \begin{array}{ll} \alpha \in AutK & \beta \in Hom(K, Z(H_n)) \\ \gamma \in Hom(H_n, Z(K)) & \delta \in AutH_n \end{array} \right\}$$

$$\cong \left\{ \begin{pmatrix} \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(n-1)1} & \dots & \alpha_{(n-1)(n-1)}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\alpha_{1n} \\ \alpha_{2n} \\ \vdots \\ \alpha_{(n-1)n}\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}\alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{n(n-1)}\end{pmatrix} & \alpha_{nn} \end{pmatrix} : \alpha_{ij} \in \left\{ \begin{array}{ll} AutH_i & i = j \\ Hom(H_j, Z(H_i)) & i \neq j \end{array} \right. \right\}$$

$$\cong \left\{ \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix} ; \alpha_{ij} \in \left\{ \begin{array}{ll} AutH_i & i = j \\ Hom(H_j, Z(H_i)) & i \neq j \end{array} \right. \right\} = A_n.$$

به این ترتیب استقرا کامل می‌شود و داریم $AutG \cong \mathcal{A}$. □

در سراسر این بخش فرض می‌کنیم $G = H_1 \times \dots \times H_n$ و هر $\theta \in AutG$ را با یک ماتریس در $\mathcal{M}$ در نظر می‌گیریم.

لم ۳.۲.۳. با توجه به توضیحات بالا فرض کنید $\theta = (\alpha_{ij})$ که در آن برای $(1 \leq i, j \leq n)$ ، $\alpha_{ij} \in Hom(H_j, H_i)$. دراین‌صورت برای هر i ، $H_i = \prod_j Im\alpha_{ij}$.

اثبات. چون $\theta : G \to G$ پوشاست پس برای هر $(h'_1, \dots, h'_n) \in G$ عضو $(h_1, \dots, h_n) \in G$ موجود است به‌طوری‌که

$$\theta(h_1, \dots, h_n) = (h'_1, \dots, h'_n)$$

و این یعنی

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}h_1 \\ \vdots \\ h_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}h'_1 \\ \vdots \\ h'_n\end{pmatrix}$$

لذا

$$\begin{cases} \alpha_{11}(h_1)\dots\alpha_{1n}(h_n)=h'_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n1}(h_1)\dots\alpha_{nn}(h_n)=h'_n \end{cases}$$

پس برای هر $h'_i \in H_i$ ، $h'_i=\prod_j \alpha_{ij}(h_j)$. در نتیجه برای هر i ، $H_i=\prod_j Im\alpha_{ij}$. □

لم ۴.۲.۳. فرض کنید $\theta=(\alpha_{ij})$ و $\theta^{-1}=(\alpha'_{ij})$. دراین‌صورت برای هر i $(1\leq i\leq n)$ داریم:

۱. $\sum_{j=1}^{n}\alpha'_{ij}\alpha_{ji}=1$

۲. $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha'_{ji}=1$

اثبات. با درنظر گرفتن خودریختی همانی به‌صورت ماتریس همانی و این‌که $\theta\theta^{-1}=1$ و $\theta^{-1}\theta=1$ داریم

$$\theta^{-1}\theta=\begin{pmatrix}\alpha'_{11}&\dots&\alpha'_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha'_{n1}&\dots&\alpha'_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\dots&\alpha_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{n1}&\dots&\alpha_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}\alpha'_{1j}\alpha_{j1}&\dots&\sum_{j=1}^{n}\alpha'_{1j}\alpha_{jn}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \sum_{j=1}^{n}\alpha'_{nj}\alpha_{j1}&\dots&\sum_{j=1}^{n}\alpha'_{nj}\alpha_{jn}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&1\end{pmatrix}$$

با توجه به درایه‌های روی قطر اصلی، حکم برقرار است. برهان ۲ مشابه است. □

در حالت $n=2$ با فرض $\alpha=\alpha_{11}, \beta=\alpha_{12}, \gamma=\alpha_{21}, \delta=\alpha_{22}, \beta'=, \gamma'=\alpha'_{21}$ $\alpha'=\alpha'_{11}, \alpha'_{12}$ و $\delta'=\alpha'_{22}$ لم فوق به‌صورت زیر خواهد بود:

۱. $\alpha'\alpha+\beta'\gamma=1, \gamma'\beta+\delta'\delta=1$

۲. $\alpha\alpha'+\beta\gamma'=1, \gamma\beta'+\delta\delta'=1$

که دقیقاً همان خواص $(iv)', (iv), (i)', (i)$ در لم ۵.۲.۲ می‌باشند.

ما هم‌چنین نیاز به لم کاربردی زیر داریم که تعمیمی‌از قضیه ۷.۲.۲ می‌باشد.

لم ۵.۲.۳. فرض کنیم برای $1 \leq i, m \leq n$ ،

$$\sigma_{i,m} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} \alpha'_{ij}\alpha_{ji} \quad , \quad \sigma'_{i,m} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} \alpha_{ij}\alpha'_{ji}.$$

دراین‌صورت برای هر عدد صحیح مثبت r ، $Im\sigma^{r}_{i,m} \trianglelefteq H_i$ و $Im\sigma'^{r}_{i,m} \trianglelefteq H_i$.

اثبات. فرض کنید $x \in H_i$ ، بنابر لم ۴.۲.۳ قسمت ۱، داریم $\sum_{j=1}^{n} \alpha'_{ij}\alpha_{ji}(x) = x$ و از خاصیت جابه‌جایی در لم ۱.۲.۳ داریم

$$\alpha'_{im}\alpha_{mi}(x) \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{n} \alpha'_{ij}\alpha_{ji}(x) = x$$

لذا

$$\alpha'_{im}\alpha_{mi}(x)\sigma_{i,m}(x) = x. \qquad (*)$$

حال قرار می‌دهیم $x = x^*\sigma_{i,m}(x)$ که $x^* = \alpha'_{im}\alpha_{mi}(x)$. چون برای $j_1 \neq j_2$ داریم $[Im\alpha'_{ij_1}, Im\alpha'_{ij_2}] = 1$ لذا $[Im\sigma_{i,m}, Im\alpha'_{im}\alpha_{mi}] = 1$. پس $[Im\sigma_{i,m}, x^*] = 1$ و برای هر $x, y \in H_i$ داریم

$$\sigma_{i,m}(y)^x = \sigma_{i,m}(y)^{x^*\sigma_{i,m}(x)} = \sigma_{i,m}(y)^{\sigma_{i,m}(x)} = \sigma_{i,m}(y^x).$$

به عبارت دیگر، $Im\sigma_{i,m} \trianglelefteq H_i$. حال با قراردادن $\sigma_{i,m}(x)$ به جای x در $(*)$ خواهیم داشت $\sigma_{i,m}(x) = \sigma^2_{i,m}(x)x^{**}$ ، که $x^{**} = \alpha'_{im}\alpha_{mi}\sigma_{i,m}(x)$. . بنابراین

$$x = x^*\sigma_{i,m}(x) = \sigma_{i,m}(x)x^* = \sigma^2_{i,m}(x)x^{**}x^*.$$

اما چون $[Im\sigma_{i,m}, Im\alpha'_{im}\alpha_{mi}] = ۱$ لذا $[Im\sigma_{i,m}, \alpha'_{im}\alpha_{mi}\sigma_{i,m}(x)] = ۱$ و این یعنی $[Im\sigma_{i,m}, x^{**}] = ۱$. پس داریم

$$\sigma^{۲}_{i,m}(y)^x = \sigma^{۲}_{i,m}(y)^{\sigma^{۲}_{i,m}(x)x^{**}x^*} = \sigma^{۲}_{i,m}(y)^{\sigma^{۲}_{i,m}(x)} = \sigma^{۲}_{i,m}(y^x).$$

در نتیجه $Im\sigma^{۲}_{i,m} \trianglelefteq H_i$. این فرآیند به‌طور استقرایی نتیجه می‌دهد که برای هر عدد صحیح مثبت r ، $Im\sigma^r_{i,m} \trianglelefteq H_i$. اثبات قسمت دوّم مشابه قسمت اوّل است. □

۳.۳ حاصل‌ضرب مستقیم گروه‌های ناآبلی به فرم H^n

فرض کنید $G = H^n = H_۱ \times \cdots \times H_n$ ، که H_iها همگی یکریخت با گروه ناآبلی تجزیه‌ناپذیر H هستند. $\mathcal{A}$ را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{۱۱} & \dots & \alpha_{۱n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n۱} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} ; \alpha_{ij} \in \left\{ \begin{array}{ll} AutH_i & i = j \\ Hom(H_j, Z(H_i)) & i \neq j \end{array} \right\} \right\}.$$

همچنین زیرگروه زیر از $AutH^n$ را تعریف می‌کنیم:

$$\left\{ \bar{\sigma} : H^n \to H^n ; \bar{\sigma}(h_۱, \dots, h_n) = (h_{\sigma(۱)}, \dots, h_{\sigma(n)}), \sigma \in S_n \right\}$$

زیر گروه فوق با S_n یکریخت است زیرا کافی‌است ϕ را از مجموعه فوق به S_n طوری تعریف کنیم که هر $\bar{\sigma}$ را به σ نظیر آن ببرد. بدون این‌که ابهامی‌پیش بیاید ما این زیرگروه را با S_n نمایش می‌دهیم.

لم ۱.۳.۳. با توجه به توضیحات فوق داریم $\mathcal{A} \cap S_n = ۱$.

اثبات. می دانیم که هر خودریختی $\bar{\sigma}$ از مجموعه فوق را می‌توان به‌صورت یک ماتریس $n \times n$ مانند $[\beta_{ij}]_{n\times n}$ با درایه‌های $\beta_{ij} = \pi_i\bar{\sigma}e_j$ نوشت که در آن π_i تابع تصویر از G به H_i و

e_j تابع نشاندن عامل مستقیم H_j در G است. بنابراین $\beta_{ij} \in Hom(H_j, H_i)$ و داریم

$$\beta_{ij}(h_j) = \pi_i \bar{\sigma} e_j(h_j) = \pi_i \bar{\sigma}(1, \ldots, h_j, \ldots, 1) = \pi_i(\delta_{\sigma(1)j} h_j, \delta_{\sigma(2)j} h_j, \ldots, \delta_{\sigma(n)j} h_j)$$

$$= \delta_{\sigma(i)j} h_j = \begin{cases} 0 & \sigma(i) \neq j \\ h_j & \sigma(i) = j \end{cases}$$

پس $\beta_{ij} = \delta_{\sigma(i),j}$ و ماتریس متناظر با $\bar{\sigma}$ به شکل زیر است

$$\begin{pmatrix} \delta_{\sigma(1),1} & \cdots & \delta_{\sigma(1),n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\sigma(n),1} & \cdots & \delta_{\sigma(n),n} \end{pmatrix}$$

اگر σ همانی باشد ماتریس فوق ماتریس همانی است، درغیراین‌صورت حداقل یک صفر روی قطر اصلی دارد. اما با توجه به تعریف در مجموعه $\mathcal{A}$ درایه‌های روی قطر اصلی متعلق به $AutH$ و لذا پوشا هستند پس نمی‌توانند صفر باشند و لذا تنها عضو مشترک S_n و $\mathcal{A}$ ماتریس همانی است. $\square$

لم ۲.۳.۳. $S_n \subset N(\mathcal{A})$.

اثبات. با توجه به نمایشی که برای هر $\bar{\sigma}$ در لم قبل بدست آمد می‌توانیم بگوییم که $\bar{\sigma}$ در هر سطر و ستون فقط یک ۱ دارد و بقیه درایه‌ها صفر هستند. پس σ از جابه‌جا کردن سطرها یا ستون‌های ماتریس همانی به‌دست می‌آید، یعنی اگر یک سری اعمال سطری مقدماتی جابه‌جایی سطرها روی ماتریس همانی انجام شود $\bar{\sigma}$ به‌دست می‌آید. لذا $\bar{\sigma} = E_1 E_2 \ldots E_n$ که E_iها ماتریس‌های سطری مقدماتی متناظر با هر عمل سطری مقدماتی هستند و داریم $\bar{\sigma}^{-1} = E_n^{-1} E_{n-1}^{-1} \ldots E_1^{-1}$. اما E_i^{-1} همان E_i است، چون معکوس هر ماتریس سطری مقدماتی خودش می‌شود.

بنابراین برای هر $\theta \in \mathcal{A}$ داریم

$$\bar{\sigma}^{-1} \theta \bar{\sigma} = E_1 E_2 \ldots E_n \theta E_n^{-1} \ldots E_2^{-1} E_1^{-1}$$

اگر E_i ماتریس سطری مقدماتی متناظر با عمل جابه‌جا کردن سطر i-ام و j-ام باشد، با ضرب E_i از چپ در ماتریس θ سطر i-ام و j-ام θ با هم جابه‌جا شده و با ضرب E_i^{-1} از راست در ماتریس θ ستون i-ام و j-ام θ با هم جابه‌جا می‌شود. اما درایه‌های روی قطر اصلی هم‌چنان روی قطر اصلی باقی می‌مانند و متعلق به $AutH$ هستند و سایر درایه‌ها که جابه‌جا می‌شوند نیز هم‌چنان متعلق به $Hom(H, Z(H))$ می‌باشند و لذا $\bar{\sigma}^{-1}\theta\bar{\sigma}$ باز هم عضوی از $\mathcal{A}$ خواهد بود. درنتیجه S_n، $\mathcal{A}$ را نرمال می‌کند. $\square$

قضیه ۳.۳.۳. فرض کنیم H یک گروه ناآبلی تجزیه‌ناپذیر باشد و فرض کنید $G = H^n = H_1 \times \cdots \times H_n$. دراین‌صورت $AutG = \mathcal{A} \rtimes S_n$ و به ویژه

$$|AutG| = |AutH|^n |Hom(H, Z(H))|^{n^2-n} n!.$$

اثبات. فرض کنیم $\theta \in AutG$ و مثل قبل θ را با یک ماتریس در $\mathcal{M}$ نشان می‌دهیم. برای هر i ثابت، $H_i = \prod_j Im\alpha_{ij}$ و طبق تعریف $\mathcal{M}$ تصاویر α_{ij} برای jهای متفاوت جابه‌جا می‌شوند. از طرفی چون H ناآبلی است پس حداقل یکی از $Im\alpha_{ij}$ها باید یک گروه ناآبلی باشد. فرض کنید که $Im\alpha_{im} = K$ که K ناآبلی است. از ۴.۲.۳ قسمت ۲ برای هر $k \in K$ داریم

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\alpha'_{ji}\right)(k) = k$$

یا به‌عبارتی $\sigma'_{i,m}(k)\alpha_{im}\alpha'_{mi}(k) = k$ که $\sigma'_{i,m}$ همان است که در ۵.۲.۳ تعریف شده است. بنابراین $\sigma'_{i,m}(k) \in K$ و برای $j \neq m$ داریم $[Im\alpha_{ij}, Im\alpha_{im}] = 1$. لذا $[Im\alpha_{ij}, K] = 1$. پس $Im\alpha_{ij} \leqslant C_{H_i}(K)$. بنابراین $\sigma'_{i,m}(k)$ در $C_{H_i}(K)$ قرار می‌گیرد و لذا $\sigma'_{i,m}(k) \in Z(K)$. چون می‌توان هر عنصر k از گروه غیرآبلی K را به‌صورت $k = z\alpha_{im}\alpha'_{mi}(k)$ نوشت که $z = \sigma'_{i,m}(k) \in Z(K)$ پس $K = Z(K)Im\alpha_{im}\alpha'_{mi}$ لذا بنا به لم ۹.۱.۱ $Im\alpha_{im}\alpha'_{mi}$ باید ناآبلی

باشد. در نتیجه $Im\alpha'_{mi}$ یکریخت با گروه ناآبلی دیگری مانند $\hat{K}$ است.

حال فرض کنیم $x \in Ker\alpha_{im}$، از۴.۲.۳ قسمت ۱ داریم

$$\left(\sum_{j=۱}^{n} \alpha'_{mj}\alpha_{jm}\right)(x) = x$$

و چون $\alpha_{im}(x) = ۱$ پس $\alpha'_{mi}\alpha_{im}(x) = ۱$ بنابراین

$$\sigma_{m,i}(x) = \left(\sum_{\substack{j=۱\\ j\neq i}}^{n} \alpha'_{mj}\alpha_{jm}\right)(x) = x.$$

لم ۵.۲.۳ نتیجه می‌دهد که برای هر عدد صحیح r، $Im\sigma^r_{m,i} \trianglelefteq H_m$ و با استفاده از قضیه ۱.۲.۲ برای یک عدد صحیح t، داریم $H_m = Ker\sigma^t_{m,i} \times Im\sigma^t_{m,i}$. حال چون H تجزیه‌ناپذیر است پس یکی از $Ker\sigma^t_{m,i}$ و $Im\sigma^t_{m,i}$ باید بدیهی باشد.

اگر $Ker\sigma^t_{m,i} = ۱$ ، آنگاه $\sigma^t_{m,i}$ یک خودریختی است. اما داریم $Im\sigma^t_{m,i} \leq Im\sigma_{m,i}$ و $[Im\sigma_{m,i}, Im\alpha'_{mi}] = [Im\sigma_{m,i}, \hat{K}] = ۱$.

از رابطه فوق نتیجه می‌گیریم که $Im\sigma_{m,i}$ نمی‌تواند برابر H_m باشد چون دراین‌صورت باید H_m با گروه ناآبلی $\hat{K}$ جابه‌جا شود و لذا $\hat{K} \leq Z(H_m)$ که این غیرممکن است چون $Z(H_m)$ آبلی و $\hat{K}$ ناآبلی است. بنابراین $\sigma_{m,i}$ پوشا نیست و لذا خودریختی نمی‌باشد. پس $\sigma^t_{m,i}$ نیز خودریختی نمی‌باشد. در نتیجه $Im\sigma^t_{m,i} = ۱$ برقرار است و داریم

$$x = \sigma_{m,i}(x) = \sigma_{m,i}(\sigma_{m,i}(x)) = \cdots = \sigma^t_{m,i}(x) = ۱.$$

پس $Ker\alpha_{im} = ۱$ و چون گروه‌ها متناهی‌اند، لذا α_{im} پوشا نیز هست.

چون بنا به تعریف $\mathcal{M}$ تصویر α_{ij} ها در هر سطر باید جابه‌جا شوند و گروه H ناآبلی است پس دقیقاً یک عنصر پوشا در هر سطر θ وجود دارد. تصاویر بقیه درایه‌ها نیز باید با H

جابه جا شوند پس باید زیر مجموعه‌های $Z(H)$ باشند. لذا باقیمانده درایه‌ها همریختی‌هایی به‌توی مرکز H می‌باشند.

با در نظر گرفتن لم ۴.۲.۳ قسمت ۲ داریم

$$\alpha_{i1}\alpha'_{1i} + \cdots + \alpha_{in}\alpha'_{ni} = 1 \quad (*)$$

می‌دانیم که همه‌ی درایه‌های یک سطر بجز شاید یکی از آن‌ها همریختی‌هایی به $Z(H_i)$ هستند ($n-1$ تا از α_{ij}ها در $Hom(H_j, Z(H_i))$ قرار می‌گیرند). فرض کنید که α_{im} پوشا باشد، بنابراین همه به جز m - امین جمله‌ی فوق در $Hom(H_j, Z(H_i))$ قرار می‌گیرند. با استفاده از رابطه $(*)$ می‌توانیم بنویسیم $\alpha_{im}\alpha'_{mi}(h) = h\phi(h)$ که $\phi = -\sigma'_{i,m} \in Hom(H_i, Z(H_i))$. با استفاده از لم ۱۵.۱.۱ نتیجه می‌گیریم که چون H_i هیچ عامل مستقیم آبلی ندارد، لذا $\alpha_{im}\alpha'_{mi} \in AutH_i$ بنابراین α'_{mi} یک‌به‌یک و لذا پوشاست. تا اینجا نشان داده‌ایم که اگر α_{ij} پوشا باشد α'_{ji} نیز باید چنین باشد. پس هر ستون از θ^{-1} باید شامل حداقل یک درایهٔ پوشا باشد. بنابراین می‌توانیم ثابت کنیم که ماتریس θ شامل دقیقاً یک درایه‌ی پوشا در هر سطر و یک درایهٔ پوشا در هر ستون است (برای این منظور جای θ و θ^{-1} را عوض کنید) و می‌دانیم که بقیه درایه‌ها که پوشا نیستند باید همریختی‌هایی مرکزی باشند.

ضرب از راست $\sigma \in S_n$ در ماتریس θ ستون‌های θ را جابه‌جا می‌کند. بنابراین یک $\sigma \in S_n$ وجود دارد به‌طوری‌که $\theta\sigma \in \mathcal{A}$. در نتیجه $AutG = \mathcal{A}.S_n$ و به علاوه بنا به لم ۲.۳.۳ ، S_n ، $\mathcal{A}$ را نرمال می‌کند. بنابراین $AutG = \mathcal{A} \rtimes S_n$. فرمول مرتبه نیز با توجه به ساختار $\mathcal{A}$ به‌دست می‌آید.

$$|AutG| = |\mathcal{A}||S_n| = |AutH|^n |Hom(H, Z(H))|^{n^2-n} n!.$$

□

مثال. فرض کنید $G = D_8 \times D_8 \times D_8$. داریم $AutD_8 \cong D_8$ و $Hom(D_8, Z(D_8)) \cong C_2^2$، بنابراین بنا به قضیه قبل داریم

$$|AutG| = |AutH|^n |Hom(H, Z(H))|^{n^2-n} n! = 8^3 4^6 3! = 12,582,912.$$

نتیجه ۴.۳.۳. فرض کنید $G = H^n$ که $Hom(H, Z(H)) = 1$. دراین‌صورت $AutG = (AutH) \wr S_n$ و لذا $|AutG| = |AutH|^n n!$.

اثبات. برای هر $\theta \in \mathcal{A}$ چون $Hom(H, Z(H)) = 1$، درایه‌های خارج قطر اصلی θ بدیهی هستند. بنابراین $\mathcal{A} \cong (AutH)^n$. حال با توجه به قضیه ۳.۳.۳ و تعریف حاصل‌ضرب نیم‌مستقیم داریم

$$AutG = \mathcal{A} \rtimes S_n = (AutH)^n \rtimes S_n = AutH \wr S_n$$

. بنابراین $|AutG| = |AutH|^n |S_n| = |AutH|^n |n!$. □

مثال. فرض کنید $G = S_4^4$. با قرار دادن $H = S_4$ در رابطه فوق چون $Z(S_4) = 1$ نتیجه برقرار می‌شود و چون $AutS_4 = S_4$ داریم $AutG = S_4 \wr S_4$.

و بعلاوه داریم $|AutG| = 4!^4 4! = 7,962,624$.

لم ۵.۳.۳. عناصر نابدیهی در S_n یعنی $\{\bar{\sigma}; \sigma \in S_n, \sigma \neq 1\}$ خودریختی مرکزی نیستند.

اثبات. برای هر $x = (x_1, \ldots, x_n) \in G$ و هر $\bar{\sigma} \in \{\bar{\sigma}; \sigma \in S_n, \sigma \neq 1\}$ با فرض $\sigma(1) = t_1$ ، $\sigma(2) = t_2$ ، ... و $\sigma(n) = t_n$ داریم

$$x^{-1}\bar{\sigma}(x) = (x_1, \ldots, x_n)^{-1} \left(\begin{pmatrix} \delta_{\sigma(1),1} & \cdots & \delta_{\sigma(1),n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\sigma(n),1} & \cdots & \delta_{\sigma(n),n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right)$$

$$= (x_1^{-1}(\delta_{\sigma(1),1}x_1 \dots \delta_{\sigma(1),n}x_n), \dots, x_n^{-1}(\delta_{\sigma(n),1}x_1 \dots \delta_{\sigma(n),n}x_n))$$

$$= (x_1^{-1}x_{t_1}, \dots, x_n^{-1}x_{t_n})$$

چون $\sigma \neq 1$ پس i ای موجود است به‌طوریکه $t_i \neq i$. حال $x' \in G$ را طوری درنظر می‌گیریم که $x'_{t_i} = h$ و $h \notin Z(H_i)$ و بقیه x'_iها را ۱ درنظر می‌گیریم. بنابراین طبق رابطه‌ی فوق داریم $x'^{-1}\bar{\sigma}(x') = (1, \dots, 1, h, 1, \dots, 1)$ که h در مولفه i ام است و چون $h \notin Z(H_i)$ پس $x'^{-1}\bar{\sigma}(x') \notin Z(G)$. در نتیجه $\bar{\sigma} \notin Aut_c(G)$. □

می‌دانیم $Aut_c(G) \leq Aut(G)$. حال با توجه به قضیه ۳.۳.۳ و لم ۵.۳.۳ داریم $Aut_c(G) \leq \mathcal{A}$. و به‌علاوه می‌توانیم ساختار $Aut_c(G)$ را نیز مشخص کنیم.

نتیجه ۶.۳.۳. فرض کنیم $G = H^n$ که H ناآبلی و تجزیه‌ناپذیر است. دراین‌صورت

$$Aut_c(G) \cong \mathcal{A}_c = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} ; \alpha_{ij} \in \left\{ \begin{array}{ll} Aut_c(H_i) & i = j \\ Hom(H_j, Z(H_i)) & i \neq j \end{array} \right. \right\}.$$

اثبات. فرض کنیم $\theta \in \mathcal{A}$ و $g = (h_1, \dots, h_n) \in G$ که $h_i \in H_i$. دراین‌صورت i–امین مولفه $g^{-1}\theta(g)$ به‌صورت زیر است

$$h_i^{-1}(\alpha_{i1}(h_1)\alpha_{i2}(h_2)\dots\alpha_{in}(h_n)) = h_i^{-1}(\alpha_{ii}(h_i)\Pi_i\alpha_{ij}(h_j)) = h_i^{-1}(\alpha_{ii}(h_i)z)$$

که $z = \Pi_i\alpha_{ij}(h_j) \in Z(H_i)$. اما $\alpha_{ii} \in Aut_c(H_i)$ ،پس $h_i^{-1}\alpha_{ii}(h_i) \in Z(H_i)$ لذا $h_i^{-1}(\alpha_{ii}(h_i)z) \in Z(H_i)$ پس i–امین مولفه $g^{-1}\theta(g)$ متعلق به $Z(H_i)$ است.

پس $g^{-1}\theta(g) \in Z(G)$. بنابراین $\theta \in Aut_cG$. در نتیجه $\mathcal{A}_c \subset Aut_cG$.

بالعکس فرض کنید $\theta \notin \mathcal{A}_c$ پس i ، $(1 \leq i \leq n)$ ، وجود دارد به‌طوریکه $\alpha_{ii} \notin Aut_c(H_i)$. پس $h_i \in H_i$ وجود دارد به‌طوریکه $h_i^{-1}\alpha_{ii}(h_i) \notin Z(H_i)$. با فرض

$g = (1, \dots, 1, h_i, 1, \dots, 1)$ که مولفه i–ام آن h_i و بقیه‌ی مولفه‌ها ۱ هستند داریم که i–امین مولفه $g^{-1}\theta(g)$ یعنی $h_i^{-1}(\alpha_{ii}(h_i)\Pi_i\alpha_{ij}(h_j))$ متعلق به $Z(H_i)$ نیست. بنابراین $g^{-1}\theta(g) \notin Z(G)$. پس $\theta \notin Aut_cG$. در نتیجه $Aut_c(G) \subset \mathcal{A}_c$. □

ما هم‌چنین n^2 زیرگروه $A_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$ از $\mathcal{A}$ را توصیف می‌کنیم که A_{ij} مجموعه ای از ماتریس‌های $n \times n$ است که درایه (i, j) آن‌ها اگر $i \neq j$ باشد متعلق به $Hom(H_j, Z(H_i))$ و اگر $i = j$ باشد متعلق به $AutH_i$ است و سایر درایه‌ها اگر روی قطر اصلی باشند ۱ و در غیر این‌صورت صفر در نظر می‌گیریم. پس اگر $i = j$ باشد آنگاه $A_{ii} \cong Aut(H_i)$ و اگر $i \neq j$ باشد آنگاه $A_{ij} \cong Hom(H_j, Z(H_i))$. در قضیه ۶.۳.۲ نشان دادیم اگر $G = H \times K$، که H و K هیچ عامل مستقیم مشترکی ندارند آنگاه $\mathcal{A} = ABCD$، که $A \cong AutH$، $B \cong Hom(K, Z(H))$، $C \cong Hom(H, Z(K))$ و $D \cong AutK$. برای اثبات در آنجا از لم ۵.۲.۲ و این که H و K هیچ عامل مستقیم آبلی مشترکی نداشتند، استفاده شد. در این‌جا چون H ناآبلی و تجزیه‌ناپذیر است. پس نتیجه ۷.۳.۲ برای $G = H \times H$ نیز برقرار می‌باشد. بنابراین داریم

$$\mathcal{A} = ABCD = A_{11}A_{12}A_{21}A_{22}$$

. در واقع این فرآیند می‌تواند به‌طور استقرایی برای هر n برقرار شود.

لم ۷.۳.۳. فرض کنیم $G = H^n = H_1 \times \cdots \times H_n$ و

$$\mathcal{A}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}; \alpha_{ij} \in \left\{ \begin{array}{ll} AutH_i & i = j \\ Hom(H_j, Z(H_i)) & i \neq j \end{array} \right\} \right\}.$$

دراین‌صورت داریم

$$\mathcal{A}_n = A_{11} \dots A_{1n}A_{21} \dots A_{n1}A_{22} \dots A_{2n}A_{32} \dots A_{n2} \dots A_{nn}$$

اثبات. به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. بنابه توضیحات فوق برای $n = ۲$ رابطه برقرار است.

فرض کنیم برای $n - ۱$ برقرار باشد، یعنی اگر $G = H^{n-۱} = H_۱ \times \cdots \times H_{(n-۱)}$ آنگاه

$$\mathcal{A}_{(n-۱)} = A_{۱۱} \dots A_{۱(n-۱)} A_{۲۱} \dots A_{(n-۱)۱} A_{۲۲} \dots A_{۲(n-۱)} A_{۳۲} \dots A_{(n-۱)۲} \dots A_{(n-۱)(n-۱)}$$

حال فرض کنیم $K = H_۱ \times \cdots \times H_{(n-۱)}$ دراین‌صورت $G = H^n = K \times H_n$. حال عناصر $\mathcal{A}_n$ را می‌توان به‌صورت ماتریس‌های بلوکی $(n-۱) \times (n-۱)$، $(n-۱) \times ۱$، $۱ \times (n-۱)$ و ۱×۱ به‌صورت زیردر نظر گرفت.

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{۱۱} & \dots & \alpha_{۱(n-۱)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{(n-۱)۱} & \dots & \alpha_{(n-۱)(n-۱)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{۱n} \\ \vdots \\ \alpha_{(n-۱)n} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{n۱} & \dots & \alpha_{n(n-۱)} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{nn} \end{bmatrix} \end{pmatrix}$$

حال فرض کنیم $\bar{A}$ ، $\bar{B}$ ، $\bar{C}$ و $\bar{D}$ مجموعه‌هایی از ماتریس‌های $n \times n$ باشند که به ترتیب از توسیع ماتریس‌های بلوکی $(n-۱) \times (n-۱)$ ، $(n-۱) \times ۱$ ، $۱ \times (n-۱)$ و ۱×۱ فوق به‌دست می‌آیند به این ترتیب که درایه‌های باقیمانده را اگر روی قطر اصلی باشند یک و در غیر این‌صورت صفر می‌گذاریم. پس بنا به فرض

$$\bar{A} = \mathcal{A}_{n-۱} = A_{۱۱} \dots A_{۱(n-۱)} A_{۲۱} \dots A_{(n-۱)۱} A_{۲۲} \dots A_{۲(n-۱)} A_{۳۲} \dots A_{(n-۱)۲} \dots A_{(n-۱)(n-۱)}$$

از طرفی با توجه به خاصیت ضرب ماتریس‌ها داریم $\bar{B} = A_{۱n} \dots A_{۱(n-۱)}$ ، $\bar{C} = A_{n۱} A_{n۲} \dots A_{n(n-۱)}$ و $\bar{D} = A_{nn}$. پس با استفاده از فرض و قضیه ۶.۳.۲ داریم

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= \bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D} \\ &= A_{۱۱} \dots A_{۱(n-۱)} A_{۲۱} \dots A_{(n-۱)۱} A_{۲۲} \dots A_{۲(n-۱)} A_{۳۲} \dots A_{(n-۱)۲} \dots A_{(n-۱)(n-۱)} \\ &\quad (A_{n۱} A_{n۲} \dots A_{n(n-۱)})(A_{۱n} A_{۲n} \dots A_{(n-۱)n}) A_{nn} \\ &= A_{۱۱} \dots A_{۱n} A_{۲۱} \dots A_{n۱} A_{۲۲} \dots A_{۲n} A_{۳۲} \dots A_{n۲} \dots A_{nn} \end{aligned}$$

□

برای هر i و j که $(1 \leq i,j \leq n) i \neq j$ زیرگروه‌های A_{ii} و A_{jj} نقطه‌به‌نقطه جابه‌جا می‌شوند، بنابراین $A_{11} \times \cdots \times A_{nn}$ زیرگروهی از $\mathcal{A}$ است که یکریخت با

$$AutH_1 \times \cdots \times AutH_n \cong (AutH)^n$$

می‌باشد.

لم ۸.۳.۳. زیرگروه $A_{11} \times \cdots \times A_{nn}$ از $\mathcal{A}$ مجموعه

$$D = \{a = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{A} : \alpha_{kk} = 1, \forall k, 1 \leq k \leq n\}$$

را نرمال می‌کند.

اثبات. برای هر $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \in A_{11} \times \cdots \times A_{nn}$ $a =$ و هر
$\begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{(n-1)n} \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \in D$ $b =$ داریم

$$a^{-1}ba = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22}^{-1} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{(n-1)n} \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{n(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}\alpha_{22} & \dots & \alpha_{11}^{-1}\alpha_{1n}\alpha_{nn} \\ \alpha_{22}^{-1}\alpha_{21}\alpha_{11} & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \alpha_{(n-1)(n-1)}^{-1}\alpha_{(n-1)n}\alpha_{nn} \\ \alpha_{nn}^{-1}\alpha_{n1}\alpha_{11} & \dots & \alpha_{nn}^{-1}\alpha_{n(n-1)}\alpha_{(n-1)(n-1)} & 1 \end{pmatrix} \in D$$

بنابراین زیرگروه فوق مجموعه‌ی D را نرمال می‌کند. □

لم ۹.۳.۳. اگر H یک گروه تنه‌ای باشد، آنگاه مجموعه‌ی D یک زیرگروه از $\mathcal{A}$ است.

اثبات. کافی است نشان دهیم مجموعه‌ی D نسبت به عمل ضرب ماتریسی بسته است. برای $j \neq k$ ، زیرگروه‌های A_{ij} و A_{kl} نقطه‌به‌نقطه جابه‌جا می‌شوند. ضرب یک عنصر از A_{ij} در یک عنصر از A_{jk} یک ماتریس با درایه‌های متفاوت از ماتریس همانی در مکان‌های ij و ik و jk می‌دهد و درایه‌های روی قطر اصلی ۱ باقی می‌مانند. به علاوه برای $i \neq j$ تنها ضرب ممکن که درایه‌های غیربدیهی روی قطر اصلی دارد توسط ضرب یک درایه در مکان ij در یک درایه در مکان ji به‌دست می‌آید. به‌طور خاص‌تر اگر $\alpha_{ij} \in Hom(H_j, Z(H_i))$ ، ij–امین درایه از A_{ij} باشد و $\alpha_{ji} \in Hom(H_i, Z(H_j))$ ، ji–امین درایه از A_{ji} باشد، آنگاه ii–امین درایه‌ی $A_{ij}A_{ji}$، $\alpha_{ij}\alpha_{ji} + ۱$ خواهد بود.

برای هر $[a, b] \in H_j'$ چون $Im\alpha_{ij} \subset Z(H_i)$ است داریم

$$\alpha_{ij}([a, b]) = \alpha_{ij}(a^{-۱}b^{-۱}ab) = \alpha_{ij}(a^{-۱})\alpha_{ij}(b^{-۱})\alpha_{ji}(a)\alpha_{ij}(b) = ۱$$

لذا $[a, b] \in Ker\alpha_{ij}$ در نتیجه $H' \leq Ker\alpha_{ij}$. حال چون H یک گروه تنه ای است داریم $Z(H) \leq H' = H_j' \leq Ker\alpha_{ij}$. لذا $Im\alpha_{ji} \leq Ker\alpha_{ij}$. بنابراین برای هر i و j ، $(i \neq j)$ و هر همریختی مرکزی α_{ij} و α_{ji} داریم $\alpha_{ij}\alpha_{ji} = ۰$. پس مجموعهٔ D نسبت به عمل ضرب ماتریسی بسته است و لذا D یک زیرگروه از $\mathcal{A}$ خواهد بود.

در این مورد هر دو زیرگروه مجزای غیر قطری مثلاً A_{ij} و A_{jk} نقطه‌به‌نقطه جابه‌جا خواهند شد. زیرا عبارت حاصل‌ضرب در مکان ik از بین می‌رود. در واقع اگر H یک گروه تنه ای باشد، آنگاه چون همه‌ی زیرگروه‌های غیر قطری جابه‌جا می‌شوند، D یکریخت با گروه آبلی $Hom(H, Z(H))^{n^۲-n}$ می‌باشد. □

نتیجه بعدی شبیه به نتیجه ۱۱.۳.۲ می‌باشد.

نتیجه ۱۰.۳.۳. فرض کنید $G = H^n$ که H یک گروه تنه‌ای تجزیه‌ناپذیر است. دراین‌صورت $\mathcal{A} = (A_{11} \times \cdots \times A_{nn}) \ltimes D$ و

$$AutG \cong (D \rtimes (A_{11} \times \cdots \times A_{nn})) \rtimes S_n$$

اثبات. چون بنا به لم ۸.۳.۳ $A_{nn} \times \cdots \times A_{11}$ ، D را نرمال می‌کند و این دو زیرگروه‌های $\mathcal{A}$ با اشتراک بدیهی هستند پس $\mathcal{A} = (A_{11} \times \cdots \times A_{nn}) \ltimes D$ و بنا به قضیه ۳.۳.۳ داریم $AutG \cong \mathcal{A} \rtimes S_n$ با جایگذاری در $\mathcal{A}$ نتیجه فوق به‌دست می‌آید. □

مثال. فرض کنیم $G = D_8 \times D_8 \times D_8$. می دانیم که D_8 یک گروه تنه‌ای است چون $Z(D_8) = D'_8 = C_2$. از طرفی داریم $Hom(D_8, Z(D_8)) = C_2 \times C_2$ و $AutD_8 = D_8$ پس $A_{ij} = \begin{cases} D_8 & i = j \\ C_2 \times C_2 & i \neq j \end{cases}$ که $(1 \leq i, j \leq 3)$ لذا با توجه به نتیجه فوق داریم

$$AutG \cong ((C_2 \times C_2)^6 \rtimes D_8^3) \rtimes S_3.$$

۴.۳ حاصل‌ضرب مستقیم در حالت کلی

در این بخش ما قضایای ۳.۳.۳ و ۲.۲.۳ را با نتایج شناخته شده در مورد ساختار خودریختی‌های یک p-گروه آبلی همودوری یعنی $AutC_{p^r}^n$، که p یک عدد اول ، n و r اعداد صحیح مثبت هستند، ترکیب می‌کنیم . پس از آن می‌توانیم خودریختی‌های هر گروه حاصل‌ضرب مستقیم متناهی را مشخص کنیم.

هر گروه متناهی G یک ساختار حاصل‌ضرب مستقیم به شکل $G = A \times H_1^{\beta_1} \times \cdots \times H_n^{\beta_n}$ دارد که A آبلی و H_iها غیر یکریخت و تجزیه‌ناپذیر وناآبلی‌اند و β_iها اعداد صحیح مثبت اند.

لم ۱.۴.۳. $AutC_{p^r}^n \cong GL(n, Z_{p^r})$

اثبات. به [۱۶] مراجعه شود. □

لم ۲.۴.۳. فرض کنید n و r اعداد صحیح باشند و p یک عدد اول باشد، دراینصوت

$$|GL(n, Z_{p^r})| = p^{n^{۲}(r-۱)} \prod_{i=۱}^{n} (p^n - p^{n-i})$$

اثبات. به [۱۰] مراجعه شود. □

چون برای هر i، هیچ عامل مستقیم مشترکی بین A و $H_i^{\beta_i}$ وجود ندارد، قضیه ۲.۲.۳ نتیجه می‌دهد که $AutG$ یکریخت با مجموعه‌ی ماتریس‌های $\mathcal{B}' = (B'_{ij})$ که $(n+۱)\times(n+۱)$ هستند، می‌باشد به‌طوری‌که

$$B'_{ij} \in \begin{cases} AutA & i = j = ۱ \\ AutH_{i-۱}^{\beta_{i-۱}} & i > ۱, i = j \\ Hom(H_{j-۱}^{\beta_{j-۱}}, A) & i = ۱, j > ۱ \\ Hom(A, Z(H_{i-۱}^{\beta_{i-۱}})) & i > ۱, j = ۱ \\ Hom(H_{j-۱}^{\beta_{j-۱}}, Z(H_{i-۱}^{\beta_{i-۱}})) & i.j > ۱, i \neq j \end{cases}$$

حال ما در موقعیتی هستیم که قضیه ۳.۳.۳ را به کار ببریم که ما را قادر می‌سازد تا $AutH_i^{\beta_i}$ را به‌صورت درایه‌های کوچک‌تر $AutH_i$ و $Hom(H_i, Z(H_i))$ توصیف کنیم. ما سعی نمی‌کنیم که بیش از این ساختار $AutA$ را در این مرحله تجزیه کنیم. بدین ترتیب ما $\mathcal{B}'$ را به‌صورت یک مجموعه از ماتریس‌های بلوکی درنظر می‌گیریم.

B'_{ij}ها، $۱ \leq i, j \leq n + ۱$ ، وقتی $i = ۱$ ماتریس‌هایی با ۱ سطرند و در غیر این‌صورت، دارای $\beta_{i-۱}$ سطرند. هم‌چنین وقتی $j = ۱$، بلوک B'_{ij} یک ستون دارد و در غیر این‌صورت $\beta_{j-۱}$ ستون دارد. ما از این پس این بلوک‌ها را با (α_{kl}) نشان می‌دهیم که $۱ \leq k, l \leq \beta_i$.

بنابراین با استفاده از قضیه ۳.۳.۳ داریم:

$$B'_{i,j} = \begin{cases} (\alpha_{kl}) : \alpha_{kl} \in Hom(H_{j-۱}, Z(H_{i-۱})) & i \neq j, i, j > ۱ \\ (\alpha_{kl}) : \alpha_{kl} \in Hom(H_{j-۱}, A) & i = ۱ < j \\ (\alpha_{kl}) : \alpha_{kl} \in Hom(A, Z(H_{i-۱})) & i > ۱, j = ۱ \\ (\alpha_{kl}) \in AutA & i = j = ۱ \\ (\alpha_{kl}) \in \mathcal{A} \rtimes S_{\beta_{i-۱}} & i = j > ۱. \end{cases}$$

برای قضیه‌ی اصلی ما $\mathcal{B}$ را به‌صورت یک ماتریس بلوکی مشابه با $\mathcal{B}'$ تعریف می‌کنیم که شامل بلوک‌های $B_{i,j}$ با اندازه $\beta_{i-1} \times \beta_{j-1}$ در درایه‌ی i,j -ام باشد به جز وقتی که i یا j یک باشند. تنها تفاوت بین بلوک‌های B و بلوک‌های B' این است که در مورد $i = j > m$ ما شرط می‌کنیم که $B_{i,j}$ ماتریسی از $\mathcal{A}$ است. برای توضیح بیشتر می‌توانیم شکل کلی یک ماتریس در $\mathcal{B}$ را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$\begin{pmatrix} a & H_{NA} & \dots & \dots & H_{NA} \\ H_{AN} & \theta & H_{NN} & \dots & H_{NN} \\ \vdots & H_{NN} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ H_{AN} & H_{NN} & \dots & H_{NN} & \theta \end{pmatrix}$$

که $a \in AutA$، H_{NA} نمادی برای نشان دادن بردارهای سطری با درایه‌هایی از $Hom(H_j, A)$ است، H_{AN}ها نشان دهنده بردارهای ستونی با درایه‌هایی از $Hom(A, Z(H_i))$ هستند، H_{NN}ها نشان دهنده ماتریس‌هایی با درایه‌هایی از $Hom(H_j, Z(H_i))$ ، برای یک i و j هستند و θها نشان دهنده ماتریس‌هایی از $\mathcal{A}$ هستند.

اگر $N = ۱ + \sum_{i=۱}^{n} \beta_i$ آنگاه واضح است که هر دو $\mathcal{B}$ و $\mathcal{B}'$ شامل ماتریس‌های $N \times N$ هستند.

قضیه ۳.۴.۳. فرض کنید $G = A \times H_۱^{\beta_۱} \times \dots \times H_n^{\beta_n}$ که A آبلی است و H_iها $(۱ \leq i \leq n)$ ناآبلی، غیریکریخت و به‌طور مستقیم تجزیه‌ناپذیرند. دراین‌صورت

$$AutG \cong \mathcal{B} \rtimes (S_{\beta_۱} \times \dots \times S_{\beta_n})$$

و بویژه،

$$|AutG| = |AutA| \prod_{j=۱}^{n} |Hom(H_j, A)|^{\beta_j} \prod_{i=۱}^{n} |Hom(A, Z(H_i))|^{\beta_i}$$

$$\times \prod_{\substack{i,j=۱ \\ i \neq j}}^{n} |Hom(H_j, Z(H_i))|^{\beta_i \beta_j} \prod_{i=۱}^{n} |AutH_i|^{\beta_i} \prod_{i=۱}^{n} \beta_i!.$$

اثبات. قبلاً نشان داده‌ایم که $AutG \cong \mathcal{B}'$ بنابراین همهٔ آنچه باقی می‌ماند این است که درایه‌ها را در بلوک‌های B'_{ii} وقتی که $1 < i \leq n$ دوباره مرتب کنیم. برای هر i ، قضیه‌ی ۳.۳.۳ نشان می‌دهد که این بلوک‌ها می‌توانند به‌صورت $\delta_i\sigma_i$ نوشته شوند که $\delta_i \in \mathcal{A}$ و $\sigma_i \in S_{\beta_i}$. یادآوری می‌کنیم که S_{β_i} یک نمایش ماتریسی از یک جایگشت است. این σ_iها سپس می‌توانند به‌طور طبیعی با جایگذاری مناسب یک‌ها و صفرها گسترش یابند و به ماتریس‌های $N \times N$ ، $\bar{\sigma}_i \in AutG$ تبدیل شوند.

توجه کنید که برای $i \neq j$ ، σ_i و σ_j جابه‌جا می‌شوند، چون آن‌ها روی عامل‌های مستقیم متفاوتی عمل می‌کنند. به علاوه چون مزدوج یک خودریختی در $\mathcal{B}$ توسط $\bar{\sigma}_i$ فقط روی عامل‌های نوع H_i اثر می‌کند و در قضیه ۳.۳.۳ دیدیم که S_n ، $\mathcal{A}$ را نرمال می‌کند، پس نتیجه می‌گیریم که $\bar{\sigma}_i$ باید $\mathcal{B}$ را نرمال کند.

اگر ما سپس بلوک‌های B'_{ii} را با δ_i جایگزین کنیم می‌بینیم که هر خودریختی $\theta \in \mathcal{B}'$ ممکن است به‌صورت یک ماتریس در $\mathcal{B}$ ضرب در یک حاصل‌ضرب از $\bar{\sigma}_i$ها نوشته شود. واضح است که $\bar{\sigma}_i$ها تشکیل یک گروه یکریخت با $S_{\beta_1} \times \cdots \times S_{\beta_n}$ می‌دهد که هم با $\mathcal{B}$ اشتراک بدیهی دارد و هم $\mathcal{B}$ را نرمال می‌کند. □

با بکار بردن قضیه‌ی اساسی گروه‌های آبلی متناهی داریم $A = A_1^{\gamma_1} \times \cdots \times A_m^{\gamma_m}$ که برای $1 \leq i \leq m$ ، $A_i \cong Z_{p_i^{r_i}}$ و p_iها اعداد اول و r_iها اعداد صحیح مثبت اند. بعلاوه، ما می‌توانیم فرض کنیم که A_iها گروه‌های دوری غیریکریخت هستند. یعنی از $p_i = p_j$ و $r_i = r_j$ می‌توان نتیجه گرفت که $i = j$، پس A_iها غیر یکریخت هستند. با استفاده از این تجزیه ما می‌توانیم بردارهای H_{AN} و H_{NA} که قبلاً بیان شد را به ماتریس‌هایی توسیع دهیم، البته باید نگاشت‌های تصویر و تحدید مناسب را برای هر عامل دوری A_i در نظر

بگیریم.

چون $A = A_1^{\gamma_1} \times \cdots \times A_m^{\gamma_m}$ با استفاده از قضیه ۲.۲.۳ داریم

$$AutA = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} ; \alpha_{ij} \in \left\{ \begin{array}{ll} AutA_i^{\gamma_i} & i = j \\ Hom(A_j^{\gamma_j}, A_i^{\gamma_i}) & i \neq j \end{array} \right. \right\}.$$

از طرفی برای $1 \leq i \leq m$، $A_i \cong Z_{p_i^{r_i}}$ پس با استفاده از لم ۱.۴.۳ می‌توانیم یک عنصر از $AutA_i^{\gamma_i}$ را به یک ماتریس در $GL(\gamma_i, A_i)$ توسیع دهیم.

بنابراین با توجه به این نکته که

$$|Hom(A_j, A_i)|^{\gamma_i\gamma_j} = gcd(p_i^{r_i}, p_j^{r_j})^{\gamma_i\gamma_j}$$

و با بکار بردن لم ۲.۴.۳ می‌توانیم $|AutA|$ را به‌دست آوریم.

نتیجه ۴.۴.۳. فرض کنید $A = A_1^{\gamma_1} \times \cdots \times A_m^{\gamma_m}$ که برای هر $1 \leq i \leq m$ ، $A_i \cong Z_{p_i^{r_i}}$ و A_iها غیر یکریخت و p_iها اول هستند و $r_i > 0$. دراین‌صورت

$$|AutA| = \prod_{i=1}^{m} \left(p_i^{\gamma_i^2(r_i-1)} \prod_{j=1}^{\gamma_i} (p_i^{\gamma_i} - p_i^{\gamma_i - j}) \right) \prod_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} gcd(p_i^{r_i} p_j^{r_j})^{\gamma_i\gamma_j}$$

مثال. فرض کنید $G = C_2 \times D_8^2 \times Q_8^2$. دراین‌صورت

$$\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{matrix} [\alpha_{11}] & \begin{bmatrix} \alpha_{12} & \alpha_{13} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{14} & \alpha_{15} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{24} & \alpha_{25} \\ \alpha_{34} & \alpha_{35} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \alpha_{41} \\ \alpha_{51} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{42} & \alpha_{43} \\ \alpha_{52} & \alpha_{53} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \alpha_{44} & \alpha_{45} \\ \alpha_{54} & \alpha_{55} \end{bmatrix} \end{matrix} \right) \right\},$$

که α_{11} نگاشت همانی روی C_2 است ،

$\alpha_{12}, \alpha_{13} \in Hom(D_8, C_2) \cong C_2 \times C_2$ ،

$\alpha_{14}, \alpha_{15} \in Hom(Q_8, C_2) \cong C_2 \times C_2$ ،

$\alpha_{21}, \alpha_{31} \in Hom(C_2, Z(D_8)) \cong C_2$ ،

$\alpha_{۲۳}, \alpha_{۳۲} \in Hom(D_۸, Z(D_۸)) \cong C_۲ \times C_۲$ ،

$\alpha_{۲۴}, \alpha_{۲۵}\alpha_{۳۴}, \alpha_{۳۵} \in Hom(Q_۸, Z(D_۸)) \cong C_۲ \times C_۲$ ،

$\alpha_{۴۱}, \alpha_{۵۱} \in Hom(C_۲, Z(Q_۸)) \cong C_۲$ ،

$\alpha_{۴۲}, \alpha_{۴۳}\alpha_{۵۲}, \alpha_{۵۳} \in Hom(D_۸, Z(Q_۸)) \cong C_۲ \times C_۲$ ،

$\alpha_{۴۵}, \alpha_{۵۴} \in Hom(Q_۸, Z(Q_۸)) \cong C_۲ \times C_۲$ ،

$\alpha_{۲۲}, \alpha_{۳۳} \in AutD_۸ \cong D_۸$ و $\alpha_{۴۴}, \alpha_{۵۵} \in AutQ_۸ \cong S_۴$.

بنابراین

$$|\mathcal{B}| = ۱ \cdot ۴^۲ \cdot ۴^۲ \cdot ۲^۲ \cdot ۴^۲ \cdot ۴^۴ \cdot ۲^۲ \cdot ۴^۴ \cdot ۴^۲ \cdot ۸^۲ \cdot ۲۴^۲ = ۲,۵۳۳,۲۷۴,۷۹۰,۳۹۵,۹۰۴$$

و چون بنا به قضیه ۳.۴.۳ داریم $AutG \cong \mathcal{B} \rtimes (S_۲ \times S_۲)$ پس

$$|AutG| = |\mathcal{B}||S_۲||S_۲| = ۱۰,۱۳۳,۰۹۹,۱۶۱,۵۸۳,۶۱۶.$$

مثال. فرض کنید $G = C_۲^۳ \times C_۳^۲ \times S_۳^۲ \times Q_۸^۲$. دراین‌صورت داریم

$|AutC_۲^۳| = |GL(۳, Z_۲)| = ۱۶۸$ ،

$|AutC_۳^۲| = |GL(۲, Z_۳)| = ۴۸$ ،

$|AutS_۳|^۲ = |S_۳|^۲ = ۳۶$ ،

$|AutQ_۸|^۲ = |S_۴|^۲ = ۵۷۶$ ، $|Hom(C_۳^۲, C_۲^۳)| = ۱$ ،

$|Hom(S_۳, C_۲^۳)|^۲ = |Hom(\frac{S_۳}{S_۳'}, C_۲^۳)|^۲ = |Hom(C_۲, C_۲^۳)|^۲ = ۶۴$ ،

$|Hom(Q_۸, C_۲^۳)|^۲ = |Hom(\frac{Q_۸}{Q_۸'}, C_۲^۳)|^۲ = |Hom(C_۲ \times C_۲, C_۲^۳)|^۲ = ۲^{۱۲}$ ،

$|Hom(C_۲^۳, C_۳^۲)|^۲ = ۱$ ،

$|Hom(S_۳, C_۳^۲)|^۲ = |Hom(\frac{S_۳}{S_۳'}, C_۳^۲)|^۲ = |Hom(C_۲, C_۳^۲)|^۲ = ۱$ ،

$$|Hom(Q_8, C_3^2)|^2 = |Hom(\frac{Q_8}{Q_8'}, C_3^2)|^2 = |Hom(C_2 \times C_2, C_3^2)|^2 = 1$$ ،

$$|Hom(C_2^3, Z(S_3))|^2 = |Hom(C_2^3, 1)|^2 = 1$$ ،

$$|Hom(C_3^2, Z(S_3))|^2 = |Hom(C_3^2, 1)|^2 = 1$$ ،

$$|Hom(Q_8, Z(S_3))|^4 = |Hom(\frac{Q_8}{Q_8'}, 1)|^4 = |Hom(C_2 \times C_2, 1)|^4 = 1$$ ،

$$|Hom(C_2^3, Z(Q_8))|^2 = |Hom(C_2^3, C_2)|^2 = 64$$ ،

$$|Hom(C_3^2, Z(Q_8))|^2 = |Hom(C_3^2, C_2)|^2 = 1$$ ،

$$|Hom(S_3, Z(Q_8))|^4 = |Hom(\frac{S_3}{S_3'}, C_2)|^4 = |Hom(C_2, C_2)|^4 = 16$$ ،

$$|Hom(S_3, Z(S_3))|^2 = |Hom(\frac{S_3}{S_3'}, 1)|^2 = |Hom(C_2, 1)|^2 = 1$$ و

$$|Hom(Q_8, Z(Q_8))|^2 = |Hom(\frac{Q_8}{Q_8'}, C_2)|^2 = |Hom(C_2 \times C_2, C_2)|^2 = 16.$$

بنابراین

$$|AutG| = |\mathcal{B}||S_2||S_2| = 168 \cdot 48 \cdot 36 \cdot 576 \cdot 64 \cdot 4096 \cdot 64 \cdot 16 \cdot 16 \cdot 2! \cdot 2!$$

$$= 2,872,733,612,308,955,136.$$

کتاب‌نامه

[۱] توماس دبلیو.هانگرفورد، (۱۳۸۷)، **جبر**، علی اکبر عالم زاده، حسین ذاکری، چاپ هفتم، انتشارات پژوهش.

[۲] سید حیدر جعفری، (۱۳۸۴)، رساله دکتری "خودریختی‌های مرکزی گروه های‌متناهی" ، دانشکده ریاضی، دانشگاه تربیت معلم تهران .

[۳] علیرضا جمالی، (۱۳۸۰)، **مباحثی در نظریه گروه ها**، چاپ اول، انتشارات مبتکران .

[۴] محمدرضا رجب‌زاده مقدم، (۱۳۷۷) ، **آشنایی با نظریه گروه‌ها، حلقه‌ها، میدان‌ها و مدول‌ها** ، انتشارات روزنامه قدس.

[۵] و.ساهای، و.بیست، (۱۳۸۷)، **جبر**، ابراهیم هاشمی، چاپ اول، انتشارات دانشگاه صنعتی شاهرود.

[6] *A. D. Thomas and G. V. Wood, **Group Tables**. Exeter, Devon 1980.*

[7] *C. Hillar and D. Rhea, Automorphisms of an abelian p-group, **Amer. Math. Monthly**, 114, 917–922 (2007).*

[8] *H. Fitting, Ü ber die direkten Produktzerlegungen einer Gruppe in direkt unzerlegbare Faktoren. **Math. Z**. 39, 16-30 (1934).*

[9] *J. E. Adney and T. Yen, Automorphisms of a p-group. **Illinois J. Math**. 9, 137–145 (1965).*

[10] *J. Han, The general linear group over a finite ring, Bull. **Korean Math. Soc**. 43, 619-626 (2006).*

[11] *J. N. S. Bidwell, M. J. Curran, and D. J. McCaughan, Automorphisms of direct products of finite groups, **Arch. Math**. 86, 481–489 (2006).*

[12] *J. N. S. Bidwell, Automorphisms of direct products of finite groups II, **Arch. Math**. 91, 111-121 (2008).*

[13] *J. N. S. Bidwell, Computing Automorphisms of Finite Groups, Ph.D. thesis, U Otago, 2006.*

[14] *J. S. Rose,* ***A Course on Group Theory****. Cambridge 1978.*

[15] *H.E. Rose,* ***A Course on Finite Groups****, Springer-Verlag London Limited 2009.*

[16] *K. Shoda, ¨Uber die Automorphismen einer endlichen Abelschen Gruppe,* ***Math. Ann****. 100, 674-686 (1928).*

[17] *M. J. Curran, Semidirect product groups with abelian automorphism groups.* ***J. Austral. Math. Soc****. 42, 84-91 (1987).*

[18] *P. Hall, The classification of prime power groups.* ***J. Reine Angew. Math****. 182, 130–41 (1940).*

[19] *P. R. Sanders, The central automorphisms of a finite group.* ***J. London Math****. Soc. 44, 225–228 (1969).*

[20] *S. H. Jafari, Automorphism Group of Groups.* ***International Journal of Algebra****, Vol. 4, no. 28, 1355 - 1359 (2010)*

[21] *The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.10; 2007, (http://www.gap-system.org).*

فهرست نمادها

$\|G\|$	مرتبه G
$Im(\phi)$	تصویر همریختی ϕ
$Ker\phi$	هسته‌ی همریختی ϕ
$\varphi(n)$	تابع φ-اویلر
$N \lhd G$	N یک زیرگروه نرمال G است
C_n	گروه دوری از مرتبه n
$\frac{G}{N}$	گروه خارج قسمتی G روی N
S_n	گروه متقارن روی n حرف
A_n	گروه متناوب روی n حرف
D_n	گروه دووجهی از مرتبه n
$G \cong H$	G با H یکریخت است
G'	زیرگروه جابه‌جاگرهای G
$Z(G)$	مرکز G
$Aut(G)$	گروه خودریختی‌های G
$Aut_c(G)$	گروه خودریختی‌های مرکزی G
$Inn(G)$	گروه خودریختی‌های داخلی G
$Hom(G,H)$	مجموعه تمام همریختی‌های از G به H
$End(G)$	مجموعه تمام درون‌ریختی‌های روی G

Abstract

In this thesis, we show that if H and K are finite groups with no common direct factor and $G = H \times K$, then the structure and order of $AutG$ can be simply expressed in terms of $AutH$, $AutK$ and the central homomorphism groups $Hom(H, Z(K))$ and $Hom(K, Z(H))$.

In section 3, we first find the automorphism group of the direct product of n copies of an indecomposable non-abelian group. We describe the automorphism group as matrices with entries which are homomorphisms between the n direct factors. We then use this description with a generalization of a result by Bidwell, Curran, and McCaughan on $Aut(H \times K)$, where H and K have no common direct factor, to provide structure and order theorems for an arbitrary direct product.

Keywords: *Automorphisms, direct products, finite groups.*

Shahrood University Of Technology

Facualty of Mathematical Sciences

Department of Mathematics

M.Sc. Thesis

Automorphism of direct product of finite groups

By:

Monireh Seifi

Supervisor:
Professor S. H. Jafari

Advisor:

2012