بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

## دانشکده :علوم ریاضی

**پایان نامه کارشناسی ارشد**

# یافتن الگوریتم برای بهترین تقریب


سید حسین اکبرزاده

**استاد راهنما :**

دکتر مهدی ایرانمنش


**دیماه ۱۳۹۰**

# تعهد نامه

اینجانب سید حسین اکبرزاده دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض،گرایش آنالیز دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده پایان نامه یافتن الگوریتم برای بهترین تقریب تحت راهنمائی دکتر مهدی ایرانمنش متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده ( یا بافتهای آنها ) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

**تاریخ**

**امضای دانشجو**

**مالکیت نتایج و حق نشر**

سپاس خداوندی را سزاست که از نسبت محیط به قطر دایره آگاه است.

(غیاث الدین جمشید کاشانی)

## سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر مهدی ایرانمنش، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر کامران شریفی که زحمت مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از جناب آقای دکتر احمد زیره و دکتر محمود بیدخام که داوری پایان‌نامه مرا بعهده داشتند کمال قدردانی را داشته باشم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از برادران عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

سید حسین اکبرزاده

دیماه ۱۳۹۰

نام خانوادگی: اکبرزاده　　　　　　　　　نام: سید حسین

عنوان پایان‌نامه: یافتن الگوریتم برای بهترین تقریب

استاد راهنما: دکتر مهدی ایرانمنش
استاد مشاور: دکتر کامران شریفی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد　　　　　　　　　رشته: ریاضی محض
گرایش: آنالیز ریاضی

دانشگاه: صنعتی شاهرود　　　　　　　　　دانشکده: علوم ریاضی
تاریخ فارغ‌التحصیلی: زمستان ۱۳۹۰　　　　　　　　　تعداد صفحه: ۸۲

کلیدواژه‌ها: الگوریتم، بهترین تقریب، فضای توابع پیوسته، ابر صفحه

**چکیده**

در این پایان‌نامه، به بررسی یک سری فرآیندهای پیاپی و تکراری که منجر به رسیدن بهترین تقریب می شود، می پردازیم. البته ما این فرآیندها را با نام " الگوریتمهایی برای یافتن بهترین تقریب" بکار می بریم. ابتدا به بیان الگوریتمهای می پردازیم که به وسیله آنها بتوان بهترین تقریب یک تابع دو متغیره و پیوسته را به صورت مجموع دو تابع یک متغیره و البته پیوسته یافت، سپس الگوریتمهایی در فضای هیلبرت و حاصل ضرب متناهی از فضاهای هیلبرت معرفی می کنیم تا ما را در یافتن تقریبی مناسب برای تمام نقاط فضا یاری کنند. در نهایت سعی داریم الگوریتمی برای بهترین تقریب مجموعه های بسته و محدب در فضای هیلبرت با استفاده از ابر صفحه ها ارائه دهیم.

# پیشگفتار

همانطور که می دانیم نظریه بهترین تقریب همواره اهمیت و کاربرد زیادی در مسایل ریاضی دارد. اما همیشه پیدا کردن بهترین تقریب کار آسانی نبود و همواره نمی توان یک روش کلی برای آن ارائه کرد. لذا در این پایان‌نامه سعی کردیم چند نمونه از الگوریتم هایی که ما را در رسیدن بهترین تقریب یاری میکنند، بیان کنیم.
در سال ۱۹۵۱ دیلبرتو [۱] و استراوس [۲] به بیان تقریب توابع چند متغیره به وسیله مجموعی از توابعی با تعداد متغیر کمتر پرداختند [۱۰] .
در سال ۱۹۷۹ فرانک داش[۳] و وون نیومن[۴] به بیان الگوریتمی با نام "الگوریتم متناوب[۵]" پرداختند [۶] که این الگوریتم به طور کلی در فضاهای باناخ بیان شده بود. اما لایت[۶] و چنی[۷] در سال ۱۹۸۰ از روش "الگوریتم متناوب " در آنچه که دیلبرتو و استراوس بیان کرده بودند، استفاده کردند و الگوریتمی متناوب برای توابع دو متغیره ارائه دادند[۱۲] که با آن می توان بهترین تقریب یک تابع پیوسته ی دو متغیره را به صورت مجموع دو تابع یک متغیره پیدا کرد که حاصل آن را می توان در بخش اول از فصل دوم با نام "الگوریتم دیلبرتو-استراوس" مشاهده نمود.
در سال ۱۹۸۴ وون گولیچک[۸] به بررسی الگوریتمهایی برای کوتاهترین مسیر در فضاهای توابع پرداخت [۷]. یکی از این الگوریتمهای او در فضای توابع دو متغیره را در بخش دوم از فصل دوم می بینیم که می توان گفت این الگوریتم یکی از قویترین

[۱] S.P.Diliberto
[۲] E.G.Straus
[۳] Frank R Deutsch
[۴] von Neumann
[۵] Alternating Algorithm
[۶] W.A.Light
[۷] E.W.Cheney
[۸] M. von Golitschek

الگوریتم هایی است که در این زمینه بیان شده و از آن می توان برای پیدا کردن فاصله یک نقطه از یک زیر مجموعه استفاده کرد.

در سال ۱۹۹۸ الگوریتمهایی موسوم به "گریدی[۹]" در فضاهای هیلبرت و باناخ ارائه شد، که می توان بعضی از آنها را در [۴] ، [۱۱] دید. در فصل سوم به بیان بعضی از این الگوریتم ها خواهیم پرداختیم .

که هدف ما در این فصل این است که هر $x \in H$ را بتوان به صورت $\sum a_i y_i$ تقریب زد بطوریکه $a_i$ ضرایب حقیقی و $y_i$ عضو $H$ باشند. برای این منظور ابتدا الگوریتم ساده ای بیان نموده و سپس به بیان الگوریتم قویتری می پردازیم که حالت اول را هم شامل می شود. در [۴] می توان دید که سری فوریه و اتحاد پارسوال نیز از این الگوریتم نتیجه می شوند.

فرانک داش در [۵] به بررسی ابر صفحه ها و الگوریتمی که منجر به یافتن بهترین تقریب در فضای هیلبرت می شود، پرداخت که ما در فصل آخر این مطالب را بیان می کنیم.

[۹] Greedy

**مقاله های مستخرج از پایان نامه**

[1] ایرانمنش ، مهدی و اکبرزاده ، حسین ، "الگوریتمی برای یافتن بهترین تقریب" ، همایش ملی الکترونیکی نقش ریاضی در علوم، بهمن ماه ۱۳۸۹، مجتمع آموزش آلی جهرم

[2] M. Iranmanesh, S.H.Akbarzadeh and H.R.Ellahi, “Find Best Simultaneous Approximation of two points in Hyperplanes”, J. Numerical Functional Analysis and Optimization

# فهرست مطالب

# فصل ۱

# پیشینه و تعاریف مقدماتی

## ۱.۱ مفاهیم مقدماتی

**تعریف ۱.۱.۱.** مجموعه تمام توابع حقیقی پیوسته و کراندار با قلمرو $X$ را با $C(X)$ نشان می دهیم. به هر $f \in C(X)$ نرم سوپریمم آن یعنی

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

را مربوط می کنیم. چون $f$ کراندار است پس $\|f\| < \infty$

**تعریف ۲.۱.۱.** فرض کنیم $X, Y$ دو زیر فضای ناتهی از یک فضای باناخ باشند. نگاشت $F : X \longrightarrow Y$ را انقباضی گوییم اگر

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\| \quad ; \quad \forall x \in X, y \in Y$$

**تعریف ۳.۱.۱.** فرض کنیم $U$ زیرفضای ناتهی از فضای باناخ $X$ باشد در این صورت تعریف می کنیم:

$$U^{\perp} = \{\varphi \in X^*; \varphi(u) = 0 \quad \forall u \in U\}$$

که در آن $X^*$، همان فضای دوگان $X$ است.

**تذکر ۴.۱.۱.** فرض می کنیم که $X$ یک فضای باناخ و $X^*$ دوگان آن باشد. در [۲] می توان دید که $X^*$ یک فضای نرمدار است و اگر $f$ یک تابعک در $X^*$ باشد آنگاه پیوسته و کراندار بودن آن معادل است. همچنین نرم $f$ به صورت های معادل زیر بیان می گردد.

$$\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$$

**تعریف ۵.۱.۱.** فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ باشد و$K \subseteq X$ و $x \in X$ باشد. در این صورت فاصله $x$ از مجموعه $K$ را با $d(x,K)$ یا $dist(x,K)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر بیان می کنیم

$$d(x,K) = \inf\{\|x-y\| \ ; \ y \in K\}$$

**تعریف ۶.۱.۱.** فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ باشد برای هر $K \subseteq X$ و $x \in X$ مجموعه ی بهترین تقریبهای $x$ در $K$ را با $P_K(x)$ نشان می دهیم و به صورت زیر بیان می کنیم

$$P_K(x) = \{y \in K; \|y-x\| = dist(x,K)\}$$

و $P_K : X \longrightarrow K$ را نگاشت تقریب می نامیم.

**تعریف ۷.۱.۱.** زیر مجموعه $K$ از $X$ را چبیشف [۱] گوییم اگر برای هر $x \in X$ دقیقا یک بهترین تقریب منحصر به فرد در $K$ داشته باشد.

[۱] Chebyshev

در اینجا فرض می کنیم $T, S$ دو فضای فشرده و هاسدورف باشند و $C(S), C(T)$ فضای توابع پیوسته روی $S, T$ باشد. حال به نکات زیر توجه می کنیم.

**تذکر ۸.۱.۱.** اگر $f \in C(S)$ باشد، آنگاه $f(S)$ (مجموعه برد) فشرده و لذا بسته است در نتیجه دارای ماکزیمم و مینیمم است.

**گزاره ۹.۱.۱.** $C(S)$ بسته است.

**برهان**. فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله ای در $C(S)$ باشد به طوریکه همگرای یکنواخت به تابع $f$ باشد . کافی است نشان دهیم $f \in C(S)$ ولی چون $\{f_n\}$ همگرای یکنواخت به $f$ است پس $f$ نیز پیوسته است در نتیجه $f \in C(S)$.

□

**تذکر ۱۰.۱.۱.** $C(S) \subseteq C(S \times T)$ چون اگر فرض کنیم $f \in C(S)$ در اینصورت می توان تابع $F \in C(S \times T)$ هم ارز آن در نظر گرفت بطوریکه $F(s,t) = f(s)$

**تذکر ۱۱.۱.۱.** $C(S), C(T)$ و همچنین $C(S) + C(T)$ زیر فضاهای محدب از فضای $C(S \times T)$ هستند.

**تذکر ۱۲.۱.۱.** فرض کنید $f \in C(S \times T)$ در این صورت$\max\limits_{s} f(s,t)$ یک تابع یک متغیره است چون مافقط اجازه تغییر یک متغیر، یعنی $t$ را داریم.

**تذکر ۱۳.۱.۱.** می توانیم بنویسیم $\max\limits_{x} f(s,t) \simeq F(t)$ پس $F(t) \in C(T) \subseteq C(S \times T)$ بنابراین داریم :

$$\max_t(\max_s f(s,t)) = \max_t(F(t)) = \text{مقدار ثابت}$$

اکنون به قضیه هان - باناخ و نتایجی از آن می پردازیم.

**قضیه ۱۴.۱.۱.** فرض کنیم $M$ زیر فضایی از $X$ باشد و $\varphi$ یک تابعک خطی پیوسته روی $M$ باشد در این صورت $\psi \in X^*$ موجود است بطوریکه

$$1)\quad \varphi(m) = \psi(m) \qquad \forall m \in M$$

$$2)\quad \|\varphi\|_M = \|\psi\|_X$$

**برهان**. رجوع شود به ([9],1.7) □

**گزاره ۱۵.۱.۱.** فرض کنیم $M$ زیر فضای بسته از $X$ و $x \in X$ باشد. همچنین فرض کنیم

$$dist(x,M) = d > 0$$

در اینصورت $\varphi \in X^*$ موجود است بطوریکه

$$1)\quad \varphi(m) = 0 \qquad \forall m \in M$$

$$2)\quad \|\varphi\| = 1$$

$$3)\quad \varphi(x) = d$$

**برهان**. فرض کنیم $L$ زیر فضای تولید شده توسط $M$ و $x$ باشد. تابعک خطی $\varphi$ را روی $L$ برای هر $\alpha \in R$ و هر $m \in M$ دلخواه به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\varphi(\alpha x + m) = \alpha d$$

واضح است که $\varphi(m) = 0$ و $\varphi(x) = d$ . می دانیم

$$\|\varphi\| = \sup \frac{|\varphi(\alpha x + m)|}{\|\alpha x + m\|} = \sup \frac{|\alpha| d}{\|\alpha x + m\|} = \sup \frac{|\alpha| d}{|\alpha|.\|(x + \frac{m}{\alpha})\|} = \sup \frac{d}{\|(x + \frac{m}{\alpha})\|}$$

قرار می دهیم $m' = \frac{m}{\alpha}$ می دانیم $d = dist(x,M) = \inf\{\|x-y\|; y \in M\}$ پس $d \leq \|x + m'\|$ با قرار دادن در نامساوی بالا داریم:

$$\|\varphi\| \leq 1$$

همچنین اگر قرار دهیم $\alpha = \dfrac{1}{d}$ در اینصورت

$$\varphi(\alpha x + m) = \varphi(\frac{1}{d}x + m) = \frac{1}{d}d = 1$$

این نتیجه می دهد که $\|\varphi\| = 1$.

حال با استفاده از قضیه هان - باناخ می توان $\varphi$ را روی $X$ گسترش داد.

□

**نتیجه ۱۶.۱.۱.** فرض کنیم $M$ زیر فضای $X$ و $x \in X$ باشد. در اینصورت داریم:

$$dist(x,M) = \sup\{\varphi(x) \ ; \ \varphi \in M^{\perp} \ , \|\varphi\| = 1\}$$

**برهان.** فرض کنیم $d = dist(x,M)$ و $A = \{\varphi(x) \ ; \ \varphi \in M^{\perp} \ , \|\varphi\| = 1\}$ ، طبق گزاره قبل $\varphi(x) \in A$ موجود است بطوریکه $\varphi(x) = d$ . بنابراین داریم :

$$d \leq \sup A$$

برعکس. نشان می دهیم $d \geq \sup A$ برای این منظور کافی است نشان دهیم $d$ کران بالا برای $A$ است یعنی برای هر $\varphi(x) \in A$ ، $d \geq \varphi(x)$ فرض کنیم اینگونه نباشد پس $\varphi(x) \in A$ موجود است بطوریکه $d < \varphi(x)$ پس $m \in M$ موجود است بطوریکه

$$\varphi(x) > \|x - m\|$$

و چون $\varphi$ روی $M$ صفر است، نتیجه می گیریم

$$\varphi(x-m) > \|x-m\|$$

و این بدان معنی است که $\|\varphi\| > 1$ اما این تناقض است چون $\|\varphi\| = 1$ بنابراین $d = \sup A$. □

**قضیه ۱۷.۱.۱.** اگر $X,Y$ دو فضای باناخ باشند و $\Lambda : X \longrightarrow Y$ پیوسته، خطی و پوشا باشد. در این صورت عدد حقیقی و مثبت $a$ موجود است بطوریکه

$$a\|x\| \leq \|\Lambda x\| \quad \forall x \in X$$

**برهان**. رجوع شود به [۱۳] صفحه ۴۹ □

**تعریف ۱۸.۱.۱.** فرض کنیم $X,Y$ دو فضای باناخ باشند و $X^*,Y^*$ دوگان آنها باشند همچنین $T : X \longrightarrow Y$ عملگر خطی باشد. در این صورت نگاشت $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ را با ضابطه $T^*y^* = y^*T$ را الحاق $T$ گوییم.

**قضیه ۱۹.۱.۱.** اگر $X,Y$ دو فضای باناخ باشند و $X^*,Y^*$ دوگان آنها باشند و $L : X \longrightarrow Y$ یک عملگر خطی باشد و $L^* : Y^* \longrightarrow X^*$ الحاق $L$ با برد بسته باشد، آنگاه برد $L$ نیز بسته است.

**برهان**. رجوع شود به [۸] صفحه ۴۸۸-۴۷۸ □

**قضیه ۲۰.۱.۱.** فرض کنید $U,V$ دو زیر فضای باناخ و بسته باشند در اینصورت موارد زیر معادلند

$(i)$ $U+V$ بسته است.

$(ii)$ ثابت $c$ موجود است بطوریکه برای هر $w \in U+V$ که دارای نمایش به صورت $w=u+v$ است و $u \in U, v \in V$ داریم

$\|u\|+\|v\| \leqslant c\|u+v\|$

$(iii)$ $U^{\perp}+V^{\perp}=(U\bigcap V)^{\perp}$

$(iv)$ $U^{\perp}+V^{\perp}$ بسته است.

**برهان.** $(i) \longrightarrow (ii)$ ابتدا نرم روی $U\times V$ را به صورت $\|(u,v)\|=\|u\|+\|v\|$ تعریف می کنیم.

نگاشت خطی $L: U\times V \longrightarrow U+V$ با ضابطه $L(u,v)=u+v$ یک نگاشت پیوسته و پوشاست چون $U+V$ بسته است پس تام است در نتیجه یک فضای باناخ است. طبق قضیه ۱.۱.۱۷ عدد حقیقی و مثبت $c$ موجود است که

$$\|(u,v)\| \leq c\|u+v\|$$

در نتیجه

$$\|u\|+\|v\| \leq c\|u+v\|$$

$(ii) \longrightarrow (iii)$ اولا واضح است که $U^{\perp}+V^{\perp} \subset (U\cap V)^{\perp}$

زیرا اگر $\varphi+\psi \in U^{\perp}+V^{\perp}$ بطوریکه $\varphi \in U^{\perp}$ و $\psi \in V^{\perp}$ در این صورت $\psi(V)=0$ پس $\psi(U\cap V)=0$ پس $\psi \in (U\cap V)^{\perp}$ به همین ترتیب $\varphi \in (U\cap V)^{\perp}$.

برعکس. فرض کنیم $\varphi \in (U\cap V)^{\perp}$ نشان می دهیم $\varphi \in U^{\perp}+V^{\perp}$.

$\psi$ را روی $U+V$ اینگونه تعریف می کنیم که برای هر $w \in U+V$ که $w=u+v$، با شرایط $u \in U, v \in V$ و $\|u\|+\|v\| \leq c\|w\|$ داشته باشیم

$$\psi(w) = \psi(u+v) = \varphi(v)$$

اولا $\psi$ خوش تعریف است زیرا اگر $w = u' + v'$ آنگاه $u' - u = v - v'$ بنابراین $v - v' \in U \cap V$ چون $\varphi \in (U \cap V)^{\perp}$ پس $\varphi(v - v') = 0$ بنابراین $\varphi(v) = \varphi(v')$
ثانیا $\varphi$ پیوسته است زیرا

$$|\psi(w)| = |\varphi(v)| \leq \|\varphi\| \, \|v\| \leq c\|\varphi\| \, \|w\|$$

حال طبق قضیه هان-باناخ $\theta \in X^*$ موجود است که $\theta|_{(U+V)} = \psi$ بعلاوه $\theta \in U^{\perp}$ زیرا

$$\theta(u) = \psi(u) = \psi(u+0) = \varphi(0) = 0$$

همچنین اگر $v \in V$ باشد آنگاه

$$(\varphi - \theta)(v) = \varphi(v) - \psi(v) = \varphi(v) - \psi(0+v) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0$$

$$\varphi - \theta \in V^{\perp}$$

و چون $\varphi = \theta + (\varphi - \theta)$ پس $\varphi \in U^{\perp} + V^{\perp}$

$(iii) \longleftarrow (iv)$ فرض کنیم $K$ زیر مجموعه ای از $X$ باشد. نشان می دهیم $K^{\perp}$ بسته است.

فرض کنیم $\{f_n\}$ دنباله ای در $K^{\perp}$ و همگرا به عنصری مانند $g \in X^*$ باشد. بدین ترتیب برای هر $n \in N$ داریم

$$f_n(x) = 0 \quad \forall x \in K$$

و چون این دنباله همگرا به $g$ بود، پس خواهیم داشت

$$g(x) = 0 \quad \forall x \in K$$

که این بسته بودن $K^\perp$ را نشان می دهد. بدین ترتیب $(U \cap V)^\perp$ بسته است و بنابه فرض نتیجه می گیریم $U^\perp + V^\perp$ نیز بسته است.

$(iv) \longleftarrow (i)$ نگاشت خطی $L : U \longrightarrow X/V$ را با ضابطه $L(u) = u + V$ تعریف می کنیم همچنین نگاشتهای خارج قسمتی

$$Q : X \longrightarrow X/V$$

$$Q' : X^* \longrightarrow X^*/U^\perp$$

را تعریف می کنیم.

نگاشت $A : (X/V)^* \longrightarrow V^\perp$ را در نظر گرفته و فرض کنیم $\psi \in (X/V)^*$ . حال $A\psi$ را بگونه ای تعریف می کنیم که $A\psi \in V^\perp$ باشد.

برای هر $x \in X$ تعریف می کنیم $(A\psi)(x) = \psi(x + V)$

و فرض می کنیم $B : X^*/U^\perp \longrightarrow U^*$ با ضابطه $B(\varphi + U^\perp) = \varphi|_U$ تعریف شده باشد و می نویسیم $L^* = BQ'A$ پس

$$L^* : (X/V)^* \longrightarrow U^*$$

فرض کنیم $\varphi \in (X/V)^*$ در این صورت با توجه به ضابطه $L^*$ خواهیم داشت

$$L^*(\varphi) = (A\varphi)|_U$$

و چنانچه رابطه فوق را روی هر $u \in U$ تاثیر دهیم، داریم

$$L^*\varphi(u) = (A\varphi)|_U(u) = \varphi(u + V)$$

همچنین داریم

$$\varphi L(u) = \varphi(u + V) \qquad \forall u \in U$$

که نتیجه می گیریم $L^*\varphi = \varphi L$.  پس $L^*$ الحاق $L$ می باشد.  از طرفی برد $L^*$ ، $B(U^\perp + V^\perp)$ می باشد.

زیرا $V^\perp \subset X^*$ پس $Q'(V^\perp) = V^\perp + U^\perp$ اما می دانیم $U^\perp + V^\perp$ بسته است پس $B(U^\perp + V^\perp)$ در $U^*$ بسته است اما طبق قضیه ۱۹.۱.۱ برد $L$ نیز بسته است اما برد $L$ که همان $U + V$ است در $X/V$ بسته است.

با توجه به نگاشت خارج قسمتی $Q$ ، $U + V$ در $X$ بسته است. $\square$

# فصل ۲

# الگوریتمهایی برای یافتن بهترین تقریب در فضای توابع

در این فصل به مطالعه روشهایی برای یافتن بهترین تقریب در فضای توابع پیوسته می پردازیم. لمها و قضایای که بیان خواهد شد نهایتا ما را به این هدف نایل می کند که بتوانیم بهترین تقریب یک تابع در فضای $C(S \times T)$ را در زیر مجموعه ی $C(S) + C(T)$ بیابیم به بیان ساده تر یک تابع دو متغیره را با مجموع دو تابع یک متغیره تقریب بزنیم. برای این منظور الگوریتم هایی بیان می کنیم که نهایتا ما را به این هدف می رساند

## ۱.۲ الگوریتم دیلبرتو - استراوس [۱]

فرض کنیم $S, T$ دو فضای فشرده و هاسدورف باشند. برای تابع دو متغیره $z_0 \in C(S \times T)$ به دنبال الگوریتمی برای یافتن بهترین تقریب آن در $C(S) + C(T)$ به عنوان زیر فضایی از $C(S \times T)$ هستیم.

**تعریف ۱.۱.۲.** فرض کنیم $X$ یک فضای باناخ باشد و $U \subseteq X$ . نگاشت تقریب $P_U$ را

[۱] DILIBERTO-STRAUS

نگاشت تقریب مرکزی گوییم اگر برای هر $x \in X$ و $u \in U$ داشته باشیم:

$$\|x - P_U(x) + u\| = \|x - P_U(x) - u\|$$

فرض کنیم $z(s,t) \in C(S \times T)$ باشد. نگاشتهای

$$A : C(S \times T) \longrightarrow C(S)$$

$$B : C(S \times T) \longrightarrow C(T)$$

را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$\begin{cases} (Az)(s) = \frac{1}{2}(\max\limits_t z(s,t) + \min\limits_t z(s,t)) \\ (Bz)(t) = \frac{1}{2}(\max\limits_s z(s,t) + \min\limits_s z(s,t)) \end{cases} \tag{۱.۲}$$

فرض کنیم $z_0 \in C(S \times T)$ دلخواه باشد حال دنباله $\{z_n\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\begin{cases} w_n = Az_n & n \text{ فرد} \\ w_n = Bz_n & n \text{ زوج} \\ z_{n+1} = z_n - w_n \end{cases} \tag{۲.۲}$$

نشان می دهیم دنباله $\{z_0 - z_n\}$ همگرای یکنواخت به بهترین تقریب $z_0$ در $C(S) + C(T)$ می باشد.

این روند در واقع الگوریتمی است برای یافتن بهترین تقریب یک تابع دو متغیره که موسوم است به الگوریتم *Diliberto - Straus* است.

**لم ۲.۱.۲.** فرض کنیم $f \in C(S)$ تابع غیر ثابت باشد، در اینصورت

$$\alpha = \frac{1}{2}(\max f + \min f)$$

بهترین تقریب آن در مجموعه ی توابع ثابت است.

**برهان**. کافی است نشان دهیم

$$\|f - \alpha\| \leq \|f - k\|$$

یا به عبارتی

$$\sup |f(x) - \alpha| \leq \sup |f(x) - k| \qquad (I)$$

که $k$ یک تابع ثابت دلخواه است.

می دانیم

$$\alpha - \min f = \max f - \alpha = \frac{1}{2}(\max f - \min f)$$

از طرفی

$$\min f \leq f(x) \leq \max f \qquad \forall x \in S$$

پس داریم

$$\min f - \alpha \leq f(x) - \alpha \leq \max f - \alpha \qquad \forall x \in S$$

که نهایتا به رابطه زیر می رسیم

$$|f(x) - \alpha| \leq \alpha - \min f = \max f - \alpha = \frac{1}{2}(\max f - \min f)$$

بنابراین $\alpha - \min f$ کران بالا و در نتیجه سوپریمم $|f(x) - \alpha|$ می باشد بنابراین

$$\|f - \alpha\| = \alpha - \min f = \max f - \alpha = \frac{1}{2}(\max f - \min f)$$

حال حالات زیر را برای ثابت $k$ در نظر می گیریم.

حالت اول: $\min f(x) \leq f(x) \leq \max f(x) \leq k$

که در این صورت

$$k - \max f(x) \leq k - f(x) \leq k - \min f(x)$$

و در نتیجه

$$\|f - k\| = k - \min f(x)$$

و از طرفی چون $\alpha \leq k$ پس داریم

$$\|f - \alpha\| = \alpha - \min f \leq k - \min f(x) = \|f - k\|$$

حالت دوم: $\min f(x) \leq \alpha < k < \max f(x)$

فرض کنیم $f(x)$ به گونه ای باشد که $f(x) < k$ در اینصورت

$$\min f \leq f(x) \Longrightarrow k - f(x) \leq k - \min f \tag{۳.۲}$$

حال فرض کنیم $f(x)$ به گونه ای باشد که $k < f(x)$ باشد.داریم:

$$\min f < \alpha < k < f(x) < \max f$$

روابط زیر برقرار است.

$$\begin{aligned} f(x)-k<\max f-k &< \max f-\alpha \\ &= \max f+\min f-\min f-\alpha \\ &= 2\alpha-\min f-\alpha \\ &= \alpha-\min f<k-\min f \end{aligned}$$

که به رابطه زیر می رسیم

$$f(x)-k<k-\min f \tag{۴.۲}$$

از روابط (۳.۲) و (۴.۲) داریم:

$$|f(x)-k|\leq k-\min f \qquad \forall x$$

بنابراین

$$k-\min f=\sup|f(x)-k|=\|f-k\|$$

ودر نتیجه

$$\|f-\alpha\|=\alpha-\min f\leq k-\min f(x)=\|f-k\|$$

به طور مشابه رابطه $(I)$ برای حالات دیگر نیز ثابت می شود. پس $\alpha$ بهترین تقریب برای $f$ در توابع ثابت است. □

**تعریف ۳.۱.۲.** نگاشت میانگین $M:C(X)\longrightarrow R$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$Mf=\frac{1}{2}(\sup_s f(s)+\inf_s f(s))$$

بلافاصله نتیجه می گیریم :

$$(Az)(s) = Mz_s \qquad (Bz)(t) = Mz^t$$

بطوریکه $z_s, z^t$ اینگونه تعریف شوند

$$z_s(t) = z^t(s) = z(s,t)$$

**لم ۴.۱.۲.** نگاشت $M$ انقباضی است یعنی $|Mf_1 - Mf_2| \leqslant \|f_1 - f_2\|$

**برهان.** فرض کنیم $\alpha = \|f_1 - f_2\|$ پس $f_2 - \alpha \leqslant f_1 \leqslant f_2 + \alpha$ ولذا داریم:

$$M(f_2 - \alpha) \leqslant Mf_1 \leqslant M(f_2 + \alpha)$$

$$Mf_2 - \alpha \leqslant Mf_1 \leqslant Mf_2 + \alpha$$

در نتیجه

$$|Mf_1 - Mf_2| \leq \alpha$$

□

**لم ۵.۱.۲.** فرض کنیم $f, g$ دو تابع پیوسته بروی دامنه فشرده باشند، در این صورت

$$\sup f - \sup g \leq \sup(f - g)$$

**برهان.** برای هر $s$، عضو دامنه داریم

$$f(s) = f(s) - g(s) + g(s) \leq \sup(f - g) + g(s) \leq \sup(f - g) + \sup g$$

در نتیجه خواهیم داشت $\sup f \leq \sup(f - g) + \sup g$ □

**لم ۶.۱.۲.** در رابطه (۱.۲ )، $A, B$ نگاشتهای انقباضی ، تقریب و مرکزی هستند.

**برهان.** از لم ۴.۱.۲ نتیجه می گیریم $A, B$ انقباضی است.

ادامه برهان را برای نگاشت $B$ بیان کرده و برای نگاشت $A$ به طور مشابه نتیجه می گیریم.

از لم ۲.۱.۲ می توان نتیجه گرفت که بهترین تقریب تابع $x \in C(S)$ در مجموعه توابع ثابت، $\alpha = Mx$ است. یعنی

$$\alpha = \frac{1}{2}(\min x + \max x)$$

برای هر $y \in C(T), t \in T$ در مورد عملگر $B$ داریم :

$$\sup_s |z(s,t) - (Bz)(t)| \leqslant \sup_s |z(s,t) - y(t)| \Longrightarrow \|z - Bz\| \leqslant \|z - y\|$$

این نشان می دهد $B$ یک نگاشت تقریب از $C(S \times T)$ به $C(T)$ است.

حال نشان می دهیم $B$ مرکزی است. برای این منظور کافی است نشان دهیم

$$\|z - Bz - u\| \geq \|z - Bz + u\| \qquad \forall u \in C(T)$$

فرض کنیم $w = z - Bz$ ، چون این توابع کراندارند پس $(s_0, t_0)$ را طوری انتخاب می کنیم که

$$\|w + u\| = |(w + u)(s_0, t_0)|$$

دو حالت زیر را در نطر می گیریم

$$\|w + u\| = (w + u)(s_0, t_0)$$

$$\|w + u\| = -(w + u)(s_0, t_0)$$

حالت اول را فرض می کنیم، حالت دیگر مشابه است.

داریم $Bw = Bz - Bz = 0$ پس با توجه به تعریف $B$ داریم:

$$\max_s w + \min_s w = 0$$

پس نقطه $s_1 \in S$ وجود دارد بطوریکه

$$w(s_0, t_0) + w(s_1, t_0) \leq 0$$

بنابراین

$$\|w - u\| \geq |u(t_0) - w(s_1, t_0)| \geq |u(t_0) + w(s_0, t_0)| = \|w + u\|$$

$\square$

**تذکر ۷.۱.۲.** با توجه به قضیه قبل چون $Az_n$ بهترین تقریب برای $z_n$ در فضای $C(S)$ پس همواره داریم

$$\|z_n - Az_n\| \leq \|z_n - h\| \quad \forall h \in C(S)$$

از طرفی با توجه به رابطه ۲.۲ و اینکه $0 \in C(S)$، می توان نتیجه گرفت

$$\|z_{n+1}\| = \|z_n - Az_n\| \leq \|z_n\|$$

بنابراین دنباله $\{\|z_n\|\}$ نزولی می باشد.

**لم ۸.۱.۲.** فرض کنید $P : X \longrightarrow U$ نگاشت تقریب و مرکزی باشد. متناظر با هر $x \in X, \varphi \in X^*$، عنصری مانند $\psi \in X^*$ هست که

$$\|\psi\| \leq \|\varphi\| \quad , \quad \varphi + \psi \in U^{\perp} \quad , \quad \psi(x - Px) = \varphi(x - Px)$$

**برهان**. فرض کنیم $M$ زیرفضای تولید شده بوسیله $U$ و $x - Px$ باشد قرار می دهیم

$$\psi(u + \lambda(x - Px)) = \varphi(-u + \lambda(x - Px))$$

بطوریکه $u \in U, \lambda \in R$ است.

واضح است که

$$(\varphi + \psi)(u) = 0 \qquad \Longrightarrow \psi + \varphi \in U^{\perp}$$

در نتیجه

$$\varphi(x - Px) = \psi(x - Px)$$

چون $P$ نگاشت تقریب و مرکزی است ، چنانچه فرض کنیم $u' = \dfrac{u}{\lambda}, \lambda \neq 0$ داریم:

$$\begin{aligned}
|\psi(u + \lambda(x - Px))| &= |\varphi(-u + \lambda(x - Px))| \\
&= |\lambda|.|\varphi(-u' + x - Px)| \\
&\leq |\lambda|.\|\varphi\|.\| - u' + x - Px\| \\
&= |\lambda|.\|\varphi\|.\|u' + x - Px\| \\
&= \|\varphi\|.\|u + \lambda(x - Px)\|
\end{aligned}$$

که نتیجه می شود

$$\frac{|\psi(u + \lambda(x - Px))|}{\|u + \lambda(x - Px)\|} \leqslant \|\varphi\|$$

بنابراین

$$\|\psi\| \leqslant \|\varphi\|$$

با استفاده از قضیه هان-باناخ می توان $\psi$ را روی $X$ توسیع داد. $\square$

از این پس قرار داد می کنیم $U = C(S)$ ,$V = C(T)$ و همچنین $W = C(S) + C(T) = U + V$ در این صورت نتیجه زیر بدست می آید.

**نتیجه ۹.۱.۲.** $W = C(S) + C(T)$ بسته است.

**برهان.** می دانیم $U, V$ بسته هستند با استفاده از قضیه ۲۰.۱.۱ نشان می دهیم ثابتی مانند $c$ موجود است بطوریکه برای هر $h \in U+V$ که دارای نمایش به صورت $h = f+g$ است و هر $f \in U, g \in V$ داریم

$$\|f\| + \|g\| \leqslant c\|h\|$$

به برهان خلف، فرض کنیم برای هر $c > 0$ ، وجود داشته باشد $f \in U, g \in V$ بطوریکه

$$\|f\| + \|g\| > c\|h\|$$

قرار می دهیم $c = \frac{1}{\|h\|}(n + \|g\|)$ که $n \in N$ دلخواه است. با قرار دادن در رابطه با لا داریم:

$$\|f\| + \|g\| > \frac{1}{\|h\|}(n + \|g\|)\|h\|$$
$$\|f\| + \|g\| > n + \|g\| \Longrightarrow \|f\| > n \qquad \forall n \in N$$

که این متناقض با کراندار بودن $f$ است. پس با توجه به قضیه ۲۰.۱.۱ $C(S) + C(T)$ بسته است. $\square$

**لم ۱۰.۱.۲.** خواص زیر در مورد دنباله $z_n$ برقرار است.

$(i)$ $\|z_n\| = \|z_n - 2z_{n+1}\|$

$(ii)$ اگر $\varphi \in X^*$و $\|\varphi\| \leqslant 1$ آنگاه :

$$\varphi(z_n) \geqslant 2\varphi(z_{n+1} - \|z_n\|)$$

**برهان**. اگر $n$ زوج باشد، با توجه به رابطه ۲.۲ ، می دانیم $z_{n+1} = z_n - Az_n$

$$\begin{aligned} \|2z_{n+1} - z_n\| &= \|z_{n+1} + (z_{n+1} - z_n)\| \\ &= \|z_n - Az_n + (z_{n+1} - z_n)\| \\ &= \|z_n - Az_n - Az_n\| \end{aligned}$$

چون $A$ نگاشت مرکزی است داریم :

$$\|z_n - Az_n - Az_n\| = \|z_n - Az_n + Az_n\| = \|z_n\|$$

برای $n$ فرد نیز به طور مشابه بیان می شود.

حال اگر $\|\varphi\| \leq 1$ آنگاه چون $\frac{|\varphi(x)|}{\|x\|} \leqslant 1$ داریم:

$$\varphi(2z_{n+1} - z_n) \leqslant \|2z_{n+1} - z_n\| = \|z_n\|$$

□

در ادامه تعریف می کنیم :

$$\begin{aligned} u_n &= w_1 + w_3 + w_5 + \ldots + w_{2n-1} \\ v_n &= w_0 + w_2 + w_4 + \ldots + w_{2n} \end{aligned} \tag{۵.۲}$$

که نتیجه می شود $u_n \in C(S)$ و $v_n \in C(T)$.

همچنین روابط زیر نتیجه می شوند.

$$u_n + v_{n-1} = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_{2n-2} + w_{2n-1}$$

$$u_n + v_n = w_0 + w_1 + w_2 + ... + w_{2n-1} + w_{2n}$$

با توجه به الگوریتم (رابطه ۲.۲) و تعریف $u_n, v_n$ (رابطه ۵.۲) دنباله $\{z_n\}$ به صورت زیر به دست می آید.

$$z_0, z_1 = z_0 - Bz_0 = z_0 - u_0 - v_0$$

$$z_2 = z_1 - Az_1 = z_0 - w_0 - w_1 = z_0 - u_1 - v_0$$

$$z_3 = z_2 - Bz_2 = z_0 - w_0 - w_1 - Bz_2 = z_0 - w_0 - w_1 - w_2 = z_0 - u_2 - v_2$$

$$\vdots$$

$$z_{2n} = z_0 - u_n - v_{n-1} \quad , \quad z_{2n+1} = z_0 - u_n - v_n \tag{۶.۲}$$

**قضیه ۱۱.۱.۲.** دنباله $\{z_n\}$ که توسط الگوریتم ۲.۲ تولید شده این خاصیت را دارد که

$$\|z_{2n}\| \longrightarrow dist(z_0, C(S) + C(T))$$

**برهان**. فرض کنیم $m, k$ زوج وثابت باشند قرار دهید $n = m + k$ با استفاده از گزاره ۱۵.۱.۱ که بعنوان نتیجه ای از قضیه هان - باناخ بیان شد، $\varphi_0 \in U^{\perp}$ وجود دارد

بطوریکه $\|\varphi_0\| = 1$ و $\|z_n\| = \varphi_0(z_n)$ با استفاده از لم ۸.۱.۲ متناظر با $z_1$ و $\varphi_0$ می توان $\varphi_1$ و برای $z_2$ و $\varphi_1$ تابعک $\varphi_2$ و به همین ترتیب $\varphi_1, ..., \varphi_k$ را طوری می توانیم بدست آوریم که :

(1) $\varphi_i + \varphi_{i-1} \in U^{\perp} \quad 1 \le i \le k$ فرد $i$

(2) $\varphi_i + \varphi_{i-1} \in V^{\perp} \quad 1 \le i \le k$ زوج $i$

(3) $\|\varphi_i\| \le 1 \quad 0 \le i \le k$

(4) $\varphi_i(z_{n-i} - w_{n-i}) = \varphi_{i-1}(z_{n-i} - w_{n-i}) \quad 1 \le i \le k$

همچنین با استفاده از تعریف الگوریتم (رابطه ۲.۲) و رابطه (۴) داریم:

$$\varphi_i(z_{n-i+1}) = \varphi_{i-1}(z_{n-i+1})$$

ادعا می کنیم برای هر $1 \le r \le k$ داریم:

(5) $\varphi_i(z_{n-r}) \ge \|z_m\| - 2^r(\|z_m\| - \|z_n\|) \quad 0 \le i \le r$

به استقرا روی $r$ ثابت می کنیم. برای $r = 1$

اگر $i = 0$ باشد باید نشان دهیم

$$\varphi_0(z_{n-1}) \ge 2\|z_n\| - \|z_m\|$$

با توجه به لم ۱۰.۱.۲ داریم

$$\begin{aligned} \varphi_0(z_{n-1}) &\ge 2\varphi_0(z_n) - \|z_{n-1}\| \\ &= 2\|z_n\| - \|z_{n-1}\| \end{aligned}$$

چون دنباله نزولی است و $m < n - 1$ پس $\|z_m\| \ge \|z_{n-1}\|$ بنابراین با توجه به رابطه قبل داریم

$$\varphi_0(z_{n-1}) \geq 2\|z_n\| - \|z_m\|$$

اگر $i = 1$ آنگاه با توجه به اینکه $z_n = z_{n-1} - w_{n-1}$ داریم :

$$\varphi_1(z_{n-1}) = \varphi_1(z_n + w_{n-1})$$

از اینکه $\varphi_1 \in U^\perp$ و $Az_{n-1} = w_{n-1} \in U$پس سمت راست عبارت فوق برابر است با:

$$\varphi_1(z_n) + \varphi_1(w_{n-1}) = \varphi_1(z_n)$$

حال در رابطه (۴) به ازای $i = 1$ داریم:

$$\varphi_1(z_{n-1} - w_{n-1}) = \varphi_0(z_{n-1} - w_{n-1})$$

که با توجه به تعریف الگوریتم (رابطه۲.۲) خواهیم داشت

$$\varphi_1(z_n) = \varphi_0(z_n)$$

همچنین با توجه به فرض داریم:

$$\varphi_0(z_n) = \|z_n\|$$

اما چون $m \leq n$ و دنباله نزولی است پس $\|z_m\| \leq \|z_n\|$ و می نویسیم :

$$\begin{aligned} \|z_n\| &\geq \|z_n\| + (\|z_n\| - \|z_m\|) \\ &= \|z_n\| + (\|z_n\| - \|z_m\|) - \|z_m\| + \|z_m\| \\ &= \|z_m\| - 2(\|z_m\| - \|z_n\|) \end{aligned}$$

حال فرض کنیم رابطه (۵) برای $r = t < k$ درست باشد، برای $r = t + 1$ اثبات می کنیم .

$$\varphi_i(z_{n-t-1}) \geq \|z_m\| - 2^{t+1}(\|z_m\| - \|z_n\|) \quad 0 \leq i \leq t+1$$

با استفاده از لم ۲.۱.۱۰ داریم :

$$\varphi_i(z_{n-t-1}) \geq 2\varphi_i(z_{n-t}) - \|z_{n-t-1}\| \quad 0 \leq i \leq t$$

اما بنابه فرض استقرا داریم:

$$\varphi_i(z_{n-t}) \geq \{\|z_m\| - 2^t(\|z_m\| - \|z_n\|)\} - \|z_{n-t-1}\|$$

چون $\|z_m\| < \|z_{n-t-1}\|$ بنابراین

$$\begin{aligned} \varphi_i(z_{n-t-1}) &\geq 2\{\|z_m\| - 2^t(\|z_m\| - \|z_n\|)\} - \|z_{n-t-1}\| \\ &\geq 2\|z_m\| - 2^{t+1}(\|z_m\| - \|z_n\|)\} - \|z_m\| \\ &\geq \|z_m\| - 2^{t+1}(\|z_m\| - \|z_n\|) \end{aligned}$$

حال اگر $i = t+1$ باشد، از لم ۲.۱.۱۰ داریم

$$\varphi_{t+1}(z_{n-t-1}) \geq 2\varphi_{t+1}(z_{n-t}) - \|z_{n-t-1}\|$$

اگر در رابطه (۴) قرار دهیم $i = t+1$، خواهیم داشت

$$\varphi_{t+1}(z_{n-t}) = \varphi_t(z_{n-t})$$

با جایگذاری در رابطه اخیر و با استفاده از فرض استقرا خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \varphi_{t+1}(z_{n-t-1}) &\geq 2\varphi_{t+1}(z_{n-t}) - \|z_{n-t-1}\| \\ &\geq 2\varphi_t(z_{n-t}) - \|z_m\| \\ &\geq 2\{\|z_m\| - 2^t(\|z_m\| - \|z_n\|)\} - \|z_m\| \\ &= \|z_m\| - 2^{t+1}(\|z_m\| - \|z_n\|) \end{aligned}$$

پس گزاره (۵) برای $1 \leq r \leq k$ برقرار است.

حال اگر در رابطه (۵) قرار دهیم $r = k, m = n - k$ داریم:

$$(6)\ \varphi_i(z_m) \geq \|z_m\| - 2^k(\|z_m\| - \|z_{m+k}\|) \quad 1 \leq i \leq k$$

با توجه به قضیه ۲۰.۱.۱ چون $U+V$ بسته است پس $U^\perp+V^\perp$ نیز بسته است.همچنین برای هر تابعک $\varphi \in U^\perp + V^\perp$ که دارای نمایشی به فرم $\varphi = \theta + \psi$ باشد، مقدار ثابت $c$ موجود است که

$$\|\theta\| + \|\psi\| \leq c\|\varphi\|$$

بطوریکه $\theta \in U^\perp$ و $\psi \in V^\perp$.

حال رابطه بیان شده را برای $\varphi_k \in U^\perp + V^\perp$ می نویسیم. داریم:

$$\varphi_k = \theta + \psi\ ,\ \|\theta\| + \|\psi\| \leq c$$

تعریف می کنیم :

$$\varphi_{k+1} = -\psi - \varphi_0$$

داریم :

$$\|\varphi_{k+1}\| = \|\psi + \varphi_0\| \leq \|\psi\| + \|\varphi_0\| \leq c + 1 \tag{۷.۲}$$

و با توجه به آنچه که در اول برهان بیان شد، $\varphi_0 \in U^\perp$ بنابراین

$$\varphi_{k+1} + \varphi_0 = -\psi \in V^\perp$$

$$\varphi_{k+1} + \varphi_k = -\psi - \varphi_0 + \theta + \psi = \theta - \varphi_0 \in U^\perp$$

تعریف می کنیم

$$\varphi = \sum_{i=0}^{k+1} \varphi_i$$

که روابط زیر را داریم

$$\varphi = (\varphi_0 + \varphi_1) + (\varphi_2 + \varphi_3) + ... + (\varphi_k + \varphi_{k+1}) \in U^{\perp}$$

$$\varphi = (\varphi_1 + \varphi_2) + ... + (\varphi_{k-1} + \varphi_k) + (\varphi_{k+1} + \varphi_0) \in V^{\perp}$$

در نتیجه $\varphi \in U^{\perp} \cap V^{\perp}$ پس $\varphi$ تابعکی است که روی $U$ و هم روی $V$ صفر است، پس به ازای هر $u + v \in U + V$ خواهیم داشت

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v) = 0$$

بنابراین $\varphi \in (U + V)^{\perp}$ خواهد شد.

می دانیم $z_m - z_0 \in U + V$ پس $\varphi(z_m - z_0) = 0$ در نتیجه $\varphi(z_m) = \varphi(z_0)$ از طرفی داریم:

$$\|\varphi\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_2\| + ... + \|\varphi_k\| + \|\varphi_{k+1}\| \leq 1 + ... + 1 + c + 1 \leq k + 1 + c + 1 \equiv c'$$

از ۱۶.۱.۱ داریم:

$$dist(x, U + V) = \sup\{\varphi(x); \varphi \in (U + V)^{\perp}, \|\varphi\| \leq 1\}$$

همان طور که گفته شد $\varphi \in (U + V)^{\perp}$ می باشد و چون $\|\frac{\varphi}{c'}\| \leq 1$ پس

$$\frac{\varphi}{c'}(z_0) \in \{\varphi(z_0); \varphi \in (U + V)^{\perp}, \|\varphi\| \leq 1\}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$dist(z_0, U + V) \geq \frac{\varphi(z_0)}{c'} = \frac{\varphi(z_m)}{c'} = \frac{\sum_{i=0}^{k} \varphi_i(z_m) + \varphi_{k+1}(z_m)}{c'}$$

با استفاده از رابطه (۶) داریم:

$$dist(z_0, U+V) \geq \frac{1+k}{c'} \ \{\|z_m\| - 2^k(\|z_m\| - \|z_{m+k}\|)\} + \frac{1}{c'} \ \varphi_{k+1}(z_m) \qquad (۸.۲)$$

اما می دانیم $|\varphi_{k+1}(z_m)| \leq \|\varphi_{k+1}\|.\|z_m\|$ و همچنین با استفاده از ۷.۲ داریم

$$-\|\varphi_{k+1}\|.\|z_m\| \leq \varphi_{k+1}(z_m) \leq \|\varphi_{k+1}\|.\|z_m\|$$

$$\varphi_{k+1}(z_m) \geq -\|\varphi_{k+1}\|.\|z_m\| \geq (c+1)\|z_m\|$$

با جایگذاری $\varphi_{k+1}(z_m) \geq (c+1)\|z_m\|$ در رابطه ۸.۲ و با فرض $\rho = \lim\limits_{m\to\infty} \|z_m\|$ داریم:

$$dist(z_0, U+V) \geq \frac{k+1}{c'}\rho - \frac{c+1}{c'}\rho = \frac{k+1-c-1}{c'}\rho = \frac{k-c}{k+c+2}\rho$$

حال اگر $k \to \infty$ آنگاه

$$dist(z_0, U+V) \geq \rho$$

$\square$

حال برای هر $z_0$ دلخواه ولی ثابت دنباله ی زیر را تعریف می کنیم :

$$\lambda_n = \max\{|z_n(s,t)|; |w_n(s,t)| = \|w_n\|\}$$

**لم ۱۲.۱.۲.** اگر $\|w_{n-1}\| = \|w_n\|$ آنگاه $\lambda_{n-1} \geq \lambda_n + \|w_n\|$

**برهان.** فرض کنیم $n$ زوج باشد حالت دیگر مشابه است. در مورد نگاشت $B$ داریم

$$Bz_{n-1} = B(z_{n-2} - w_{n-2}) = Bz_{n-2} - w_{n-2} = w_{n-2} - w_{n-2} = 0$$

چون $n$ زوج است پس $w_n$ تنها به متغیر $t$ وابسته است و چون $w_n \in C(T)$ کراندار است پس $\tau \in T$ موجود است بطوریکه

$$|w_n(\tau)| = \|w_n\|$$

پس با توجه به تعریف $\lambda_n$ داریم

$$\max_s |z_n(s,\tau)| = \lambda_n \tag{۹.۲}$$

دو حالت داریم که بستگی به علامت $w_n(\tau)$ دارد.

حالت اول : فرض کنیم $w_n(\tau) = \|w_n\|$

از قبل می دانیم $w_n = Bz_n$ و $Bz_{n-1} = 0$ و با توجه به رابطه ۱.۲ داریم

$$\begin{aligned} w_n &= Bz_n - Bz_{n-1} \\ &= \frac{1}{2}[\max_s z_n(s,\tau) + \min_s z_n(s,\tau)] - \frac{1}{2}[\max_s z_{n-1}(s,\tau) + \min_s z_{n-1}(s,\tau)] \\ &= \|w_n\| = \|w_{n-1}\| \end{aligned}$$

رابطه بالا را به صورت زیر جابه جا می کنیم

$$\frac{1}{2}[\max_s z_n(s,\tau) - \max_s z_{n-1}(s,\tau)] + \frac{1}{2}[\max_s(-z_{n-1}(s,\tau)) - \max_s(-z_n(s,\tau))]$$
$$= \|w_{n-1}\|$$

با استفاده از لم ۵.۱.۲ برای براکت اول داریم

$$\max_s z_n(s,\tau) - \max_s z_{n-1}(s,\tau) \leq \max_s[z_n(s,\tau) - z_{n-1}(s,\tau)]$$

اما با توجه به تعرف الگوریتم (۲.۲ ) برای رابطه سمت راست داریم

$$\max_s[-w_{n-1}(s,\tau)] \leq \|w_{n-1}\|$$

به طور مشابه همین روابط برای براکت دوم نیز برقرار است. پس می توان نوشت

$$\begin{aligned} \|w_{n-1}\| &= \frac{1}{2}[\max_s z_n(s,\tau) - \max_s z_{n-1}(s,\tau)] + \frac{1}{2}[\max_s(-z_{n-1}(s,\tau)) - \max_s(-z_n(s,\tau))] \\ &\leq \max_s[-w_{n-1}(s,\tau)] \leq \|w_{n-1}\| \end{aligned}$$

بنابراین روابط زیر حاصل می شود

$$\max_s[-w_{n-1}(s,\tau)] = \|w_{n-1}\|$$

$$\max_s[z_n(s,\tau) - z_{n-1}(s,\tau)] = \|w_{n-1}\|$$

$$\max_s z_n(s,\tau) - \max_s z_{n-1}(s,\tau) = \|w_{n-1}\|$$

که از اولین رابطه نتیجه می شود که نقطه ای مانند $\sigma$ موجود است که ماکزیمم در آن رخ می دهد

$$-w_{n-1}(\sigma) = \|w_{n-1}\| \qquad (۱۰.۲)$$

$$z_n(\sigma,\tau) = \max_s z_n(s,\tau)$$

$$z_{n-1}(\sigma,\tau) = \max_s z_{n-1}(s,\tau)$$

همچنین با توجه به تعریف نگاشت $B$ داریم

$$0 \leq \|w_n\| = w_n(\tau) = Bz_n(\tau) = \tfrac{1}{2}[\max_s z_n(s,\tau) + \min_s z_n(s,\tau)]$$

بنابراین

$$\max_s z_n(s,\tau) \geq -\min_s z_n(s,\tau)$$

و با توجه به رابطه ۹.۲ نتیجه می شود

$$\lambda_n = \max_s |z_n(s,\tau)| = \max_s z_n(s,\tau) = z_n(\sigma,\tau)$$

همچنین از الگوریتم ۲.۲ داریم

$$w_{n-1}(\sigma) = (Az_{n-1})(\sigma) = \tfrac{1}{2}[\max_t z_{n-1}(\sigma,t) + \min_t z_{n-1}(\sigma,t)]$$

که می توان نوشت

$$\begin{aligned} -\min_t z_{n-1}(\sigma,t) &= \max_t z_{n-1}(\sigma,t) - 2w_{n-1}(\sigma) \\ &\geq z_{n-1}(\sigma,\tau) - 2w_{n-1}(\sigma) \\ &= z_{n-1}(\sigma,\tau) - w_{n-1}(\sigma) - w_{n-1}(\sigma) \end{aligned}$$

با توجه به اینکه $w_n = z_{n-1} - w_{n-1}$ و $-w_{n-1}(\sigma) = \|w_{n-1}\|$ داریم

$$\begin{aligned} -\min_t z_{n-1}(\sigma,t) &\geq z_n(\sigma,\tau) + \|w_{n-1}\| \\ &\geq \lambda_n + \|w_{n-1}\| \end{aligned}$$

پس به رابطه زیر می رسیم

$$-\min_t z_{n-1}(\sigma,t) \geq \lambda_n + \|w_{n-1}\|$$

همچنین می دانیم

$$\lambda_{n-1} \geq \max_t z_{n-1}(\sigma,t) \geq -\min_t z_{n-1}(\sigma,t)$$

از دو رابطه اخیر داریم

$$\lambda_{n-1} \geq -\min_t z_{n-1}(\sigma,t) \geq \lambda_n + \|w_{n-1}\|$$

پس در حالت اول برهان کامل شد، حالت دیگر به طور مشابه بیان می شود. $\square$

حال عملگرهای $A' : V \longrightarrow U$ و $B' : U \longrightarrow V$ به صورت زیر تعریف می کنیم

$$A'v = A(z_0 - v), \quad B'u = B(z_0 - u)$$

که $z_0 \in C(S \times T)$ همان نقطه شروع در الگوریتم ۲.۲ می باشد. بنابه تعریف ۲.۲ داریم

$$z_{2n} = z_{2n-1} - Az_{2n-1}$$

همچنین از ۶.۲ می دانیم

$$z_{2n} = z_0 - u_n - v_{n-1}$$

پس روابط زیر حاصل می شود

$$0 = A(z_{2n-1} - Az_{2n-1}) = Az_{2n} = A(z - u_n - v_{n-1}) = A(z - v_{n-1}) - u_n$$

بنابراین $u_n = A(z - v_{n-1}) = A'v_{n-1}$. به طور مشابه $v_n = B'u_n$ خواهد شد. در نتیجه داریم

$$u_{n+1} = A'v_n = A'B'u_n, \quad v_{n+1} = B'u_{n+1} = B'A'v_n \tag{۱۱.۲}$$

**لم ۱۳.۱.۲.** برای هر $n$ داریم:

$$|u_n(s) - u_n(\sigma)| \leq \|z_s - z_\sigma\|$$

$$|v_n(t) - v_n(\tau)| \leq \|z^t - z^\tau\|$$

$$|z_n(s,t) - z_n(\sigma,\tau)| \leq 2\|z_s - z_\sigma\| + 2\|z^t - z^\tau\|$$

**برهان.** با توجه به آنچه گفته شده داریم $u_n = A(z - v_{n-1})$ و همچنین با توجه به تعریف ۳.۱.۲ به رابطه زیر می رسیم

$$\begin{aligned}
|u_n(s) - u_n(\sigma)| &= |A(z - v_{n-1})(s) - A(z - v_{n-1})(\sigma)| \\
&= |M(z_s - v_{n-1}) - M(z_\sigma - v_{n-1})| \\
&\leq \|(z - v_{n-1}) - (z - v_{n-1})\| \\
&= \|z_s - z_\sigma\|
\end{aligned}$$

برای رابطه دوم نیز مشابه است. حال رابطه سوم را اثبات می کنیم.

می دانیم $z_{2n} = z - u_n - v_{n-1}$ داریم

$$\begin{aligned}
|z_{2n}(s,t) - z_{2n}(\sigma,\tau)| &\leq |z_{2n}(s,t) - z_{2n}(\sigma,t)| + |z_{2n}(\sigma,t) - z_{2n}(\sigma,\tau)| \\
&= |z(s,t) - z(\sigma,t) - u_n(s) + u_n(s)| \\
&+ |z(\sigma,t) - z(\sigma,\tau) - v_{n-1}(t) - v_{n-1}(\tau)| \\
&\leq |z(s,t) - z(\sigma,t)| + |u_n(s) - u_n(s)| \\
&+ |z(\sigma,t) - z(\sigma,\tau)| + |v_{n-1}(t) + v_{n-1}(\tau)| \\
&\leq 2\|z_s - z_\sigma\| + 2\|z^t - z^\tau\|
\end{aligned}$$

برای حالت $z_{2n+1}$ به طور مشابه نیز رابطه سوم اثبات می شود. $\square$

**تذکر ۱۴.۱.۲.** در رابطه سوم از لم قبل چون $z^t, z_\sigma, z_s$ و $z^\tau$ پیوسته اند نتیجه می گیریم $\{z_n\}$ یک دنباله از توابع هم پیوسته است.

**لم ۱۵.۱.۲.** در الگوریتم دیلبرتو - استراوس داریم $\lim w_n = 0$.

**برهان**. با توجه به برهان لم ۱۲.۱.۲ داریم $Bz_{n-1} = 0$ پس در مورد $w_n$ داریم

$$\|w_n\| = \|Bz_n\| = \|Bz_n - Bz_{n-1}\| \leq \|z_n - z_{n-1}\| = \|w_{n-1}\|$$

رابطه بالا برای نگاشت $A$ نیز برقرار است. پس همواره داریم $\|w_{n+1}\| \leq \|w_n\|$ پس دنباله $\{\|w_n\|\}$ نزولی و کراندار است، بنابراین همگراست. فرض کنیم $e = \lim \|w_n\|$ از نتیجه قبل داریم که $\{z_n\}$ همپیوسته است. با توجه به ([۱۴]، ۷-۲۵) هرگاه $K$ مجموعه ای فشرده و $f_n \in C(K)$ و $\{f_n\}$ بر $K$ کراندار و همپیوسته باشد، آنگاه دنباله شامل زیر دنباله ای به طور یکنواخت همگرا می باشد.

پس زیر دنباله مانند $\{z_{n_k}\}$ موجود است که به تابعی مانند $z^*$ همگراست. اگر $z^*$ را به عنوان نقطه شروع در الگوریتم به کار ببریم یک دنباله به صورت $z_1^*, z_2^*, ...$ داریم.

از طرفی چون $z_{n_k} \longrightarrow z^*$ و نگاشت $B$ پیوسته است پس داریم

$$Bz_{n_k} \longrightarrow Bz^*$$

$$z_{n_k} - Bz_{n_k} \longrightarrow z^* - Bz^*$$

اما با توجه به تعریف الگوریتم ۲.۲ رابطه بالا به صورت $z_{n_k+1} \longrightarrow z_1^*$ نوشته می شود.

پس به طور کلی داریم

$$z_m^* = \lim_k (z_{n_k+m})$$

در ادامه می نویسیم

$$\|z_{m+1}^* - z_m^*\| = \lim_k \|z_{n_k+m+1} - z_{n_k+m}\| = \lim_k \|w_{n_k+m}\|$$

با توجه به اینکه $w_m^* = z_{m+1}^* - z_m^*$ و با توجه به اینکه $\lim \|w_n\| = e$ داریم

$$\|w_m^*\| = e$$

با انجام روند مشابه داریم

$$\|w_{m-1}^*\| = e$$

پس نتیجه می گیریم

$$\|w_m^*\| = \|w_{m-1}^*\|$$

اما با اعمال لم ۱۲.۱.۲ در مورد $w_n^*$ داریم

$$\lambda_m^* \leq \lambda_{m-1}^* - \|w_m^*\| \quad m = 1, 2, ...$$

بنابراین

$$0 \leq \lambda_m^* \leq \lambda_{m-1}^* - \|w_m^*\| \leq \lambda_{m-2}^* - 2\|w_m^*\| \leq ... \leq \lambda_1^* - (m-1)e$$

ادعا می کنیم $e = 0$. زیرا در غیر اینصورت اگر $e > 0$ در این صورت $m$ای به اندازه کافی بزرگ موجود است که $\lambda_1^* < (m-1)e$ پس باید داشته باشیم

$0 \leq \lambda_m^* \leq \lambda_1^* - (m-1)e < 0$ که تناقض است پس $e = 0$ □

**لم ۱۶.۱.۲.** دنباله $\{u_n\}$ کراندار است.

**برهان.** می دانیم که $\{z_n\}$ همپیوسته است و از تذکر ۷.۱.۲ می دانیم $\|z_0\| \geq \|z_1\| \geq ...$ پس این دنباله کراندار است. بنابراین دنباله $\{z_{2n}\}$ دارای زیر دنباله همگرا مانند $\{z_{2n_k}\}$ است. فرض کنیم $W = C(S)+C(T)$ با توجه به نتیجه ۹.۱.۲ می دانیم $W$ بسته است. با توجه به رابطه ۶.۲، $z_n - z_0$ در $W$ قرار دارد. از طرفی گفتیم $\{z_{2n_k}\}$ همگراست پس دنباله $\{z_{2n_k} - z_0\}$ از اعضای $W$ است پس به عنصری از $W$ مانند $z_0-u-v$ که $u \in C(S)$ و $v \in C(T)$ همگراست. پس داریم $\lim z_{2n_k} = z_0-u-v$ می دانیم $Bz_{2n} = 0$ و چون $B$ یک نگاشت پیوسته است بنابراین

$$0 = Bz_{2n_k} \longrightarrow B(z_0 - u - v)$$

با توجه به نگاشت $B'$ داریم

$$0 = B(z_0 - u - v) = B(z - u) - v = B'(u) - v$$

که نتیجه می شود

$$B'(u) = v \tag{۱۲.۲}$$

از لم قبل داریم $w_n \longrightarrow 0$ پس $z_{n+1} - z_n \longrightarrow 0$ بنابراین $z_{2n_k+1} - z_{2n_k} \longrightarrow 0$ در نتیجه $z_{2n_k+1} \longrightarrow z_{2n_k} \longrightarrow z_0 - u - v$ چون $Az_{2n+1} = 0$ و نگاشت $A$ پیوسته است داریم

$$0 = A(z_{2n_k+1}) \longrightarrow A(z_0 - u - v)$$

$$0 = A(z_0 - u - v) = A(z_0 - v) - u = A'(v) - u$$

در نتیجه

$$A'(v) = u \tag{۱۳.۲}$$

از رابطه ۱۲.۲ و ۱۳.۲ نتیجه می گیریم $A'B'(u) = u$

حال از انقباضی بودن $A'B'$ و رابطه ۱۱.۲ استفاده می کنیم

$$\|u_{n+1} - u\| = \|A'B'(u_n) - A'B'(u)\| \leq \|u_n - u\|$$

که این نشان می دهد $\{u_n\}$ کراندار است. $\square$

حال به بیان آخرین و مهمترین قضیه می پردازیم.

**قضیه ۱۷.۱.۲.** دنباله $\{z_n\}$ تولید شده توسط یک $z$ دلخواه در $C(S \times T)$ که با روند الگوریتم *Diliberto - Straus* تولید شده، همگرای یکنواخت است و $z - \lim z_n$ بهترین تقریب در $W = C(S) + C(T)$ می باشد.

**برهان**. از لم ۱۳.۱.۲ داریم که $\{u_n\}$ همپیوسته است و از لم قبل داریم این دنباله کراندار است بنابراین دارای زیر دنباله همگرا مانند $\{u_{n_k}\}$ می باشد.
قرار می دهیم $u^* = \lim\limits_{k} u_{n_k}$. چون نگاشت $A'B'$ پیوسته است و $u_{n_k} \longrightarrow u^*$ و همچنین با توجه به رابطه ۱۱.۲ داریم

$$u_{n_k+1} = A'B'u_{n_k} \longrightarrow A'B'u^*$$

از رابطه ۵.۲، داریم

$$u_{n+1} - u_n = w_{2n+1}$$

پس توجه به لم ۱۵.۱.۲ داریم $\|u_{n+1} - u_n\| \longrightarrow \|w_{2n+1}\| \longrightarrow 0$ بنابراین $\|u_{n_k+1} - u_{n_k}\| \longrightarrow 0$ که خواهیم داشت $u_{n_k+1} \longrightarrow u_{n_k}$ پس می توان نوشت $u_{n_k+1} \longrightarrow u^*$ و نهایتا نتیجه می گیریم $A'B'u^* = u^*$
همانند برهان لم ۱۳.۱.۲ داریم

$$\|u_{n+1} - u^*\| = \|A'B'u_n - A'B'u^*\| \leq \|u_n - u^*\|$$

این نشان می دهد $u_n \longrightarrow u^*$ بنابراین

$$v_n = B'u_n \longrightarrow B'u^* \equiv v^*$$

که به روابط زیر می رسیم

$$u_n + v_n \longrightarrow u^* + v^*$$

$$z_{2n} = z - u_n - v_{n-1} \longrightarrow z - u^* - v^*$$

از رابطه بالا نتیجه می گیریم $z - z_{2n} \longrightarrow u^* + v^*$ بنابراین

$$\lim(z - z_{2n}) = z - \lim z_{2n} = u^* + v^*$$

از قضیه ۲.۱.۱۱ داریم $\|z_{2n}\| \longrightarrow dist(z, W)$ با جایگذاری $z_{2n} = z - u_n - v_{n-1}$ در رابطه بالا داریم

$$\|z - u_n - v_{n-1}\| \longrightarrow dist(z, W)$$

اما $z - u_n - v_{n-1} \longrightarrow z - u^* - v^*$ پس نتیجه می گیریم

$$\|z - u^* - v^*\| = dist(z, W)$$

□

## ۲.۲ الگوریتم وون گولیچک [۲]

در این بخش نیز به بیان الگوریتمی برای بهترین تقریب یک تابع دو متغیره به صورت مجموع دو تابع یک متغیره می پردازیم . اما این الگوریتم با آنچه در بخش قبل گفته شد، متفاوت می باشد که به وون گولیچک موسوم است.در این بحث مجموعه خاصی از $C(S\times T)$ با نام $W$ را معرفی کرده و بهترین تقریب یک تابع دو متغیره در $C(S\times T)$ را روی $W$ جستجو می کنیم.

فرض کنیم $S,T$ هاسدورف و فشرده باشند و $z \in C(S \times T)$ قصد داریم یکی از قدرتمندترین الگوریتم ها برای تقریب $z$ به صورت زیر بیان کنیم

$$z(s,t) \simeq f[x(s)h(t) + y(t)g(s)]$$

که در آن $h \in C(T)$ و $g \in C(S)$ را بگونه ای فرض می کنیم که $g,h > 0$، و همچنین $f \in C(R)$ را اکیدا صعودی و با شرط $f^{-1} \in C(R)$ در نظر می گیریم. در این صورت در جستجوی $x \in C(S)$ و $y \in C(T)$ مناسبی هستیم که در رابطه بالا صدق کند.

برای این منظور فرض کنیم

$$W = \{fo(xh + yg); \quad x \in C(S), y \in C(T)\}$$

پارامتر $\alpha$ را که در بازه $0 \le \alpha \le \|z - f(0)\|$ قرار دارد در نظر می گیریم.

از این پس $\alpha$ را ثابت در نظر می گیریم تعریف می کنیم

$$l(s,t) = f^{-1}[z(s,t) - \alpha]/g(s)h(t)$$

$$k(s,t) = f^{-1}[z(s,t) + \alpha]/g(s)h(t)$$

[۲] VON GOLITSCHEK

اولین قدم الگوریتم به صورت زیر شروع می شود.

$$x_0(s) = 0 \qquad y_0(t) = \inf_s k(s,t)$$

و در $i$ امین مرحله تعریف می کنیم

$$\begin{aligned} x_i(s) &= \max\{x_{i-1}(s), \sup_t [l(s,t) - y_{i-1}(t)]\} \\ y_i(t) &= \min\{y_{i-1}(t), \inf_s [k(s,t) - x_i(s)]\} \end{aligned} \qquad (۱۴.۲)$$

چنانچه $y_i = y_{i-1}$ الگوریتم را متوقف می کنیم.

حال قصد داریم پارامتر $\alpha$ را بگونه ای بیابیم که الگوریتم پس از $n$ مرحله متوقف شود برای این منظور به تعاریف و قضایای زیر توجه می کنیم

**لم ۱.۲.۲.** اگر $t_i$ نقطه ای باشد که $y_i(t_i) < y_{i-1}(t_i)$ در اینصورت نقطه $t_{i-1}$ و $s_i$ وجود دارد بطوریکه

1. $y_i(t_i) = y_{i-1}(t_{i-1}) + k(s_i, t_i) - l(s_i, t_{i-1})$

2. $y_{i-1}(t_{i-1}) < y_{i-2}(t_{i-1})$

**برهان**. فرض کنیم $s_i$ نقطه ای باشد که در این نقطه $k(s_i, t_i) - x_i(s_i)$ به مینیمم مقدار خود برسد و همچنین فرض کنید $t_{i-1}$ به گونه ای باشد که

$$l(s_i, t_{i-1}) - y_{i-1}(t_{i-1})$$

به ماکزیمم مقدار خود برسد.(دقت شود چون این توابع کراندارند پس min و max وجود دارند ) در این صورت

$$k(s_i, t_i) - x_i(s_i) = \inf_s [k(s, t_i) - x_i(s)]$$

بنا به فرض لم $y_{i-1}(t_i)$ اکیدا از $y_i(t_i)$ بزرگتر است و بنابه تعریف الگوریتم ۱۴.۲ $y_i(t_i)$ مینیمم $y_{i-1}(t_i)$ و $\inf_s[k(s,t_i)-x_i(s)]$ می باشد. پس باید داشته باشیم

$$k(s_i,t_i)-x_i(s_i)=\inf_s[k(s,t_i)-x_i(s)]=y_i(t_i)<y_{i-1}(t_{i-1})\le k(s_i,t_i)-x_{i-1}(s) \tag{۱۵.۲}$$

بنابراین $x_{i-1}(s_i)<x_i(s_i)$ . به طور مشابه داریم

$$l(s_i,t_{i-1})-y_{i-1}(t_{i-1})=\sup_t[l(s_i,t)-y_{i-1}(t)]=x_i(s_i)>x_{i-1}(s_i)\ge l(s_i,t_{i-1})-y_{i-1}(t_{i-1}) \tag{۱۶.۲}$$

بنابراین $y_{i-1}(t_{i-1})<y_{i-2}(t_{i-1})$.

برای اثبات رابطه ۱ با توجه به رابطه ۱۵.۲ و ۱۶.۲ می نویسیم

$$y_i(t_i)=k(s_i,t_i)-x_i(s_i)=k(s_i,t_i)-l(s_i,t_{i-1})-y_{i-1}(t_{i-1})$$

□

**تعریف ۲.۲.۲.** به مجموعه ای مرتب از نقاط به صورت زیر یک مسیر گفته می شود

$$(s_1,t_0),(s_1,t_1),(s_2,t_1),(s_2,t_2),...,(s_n,t_{n-1}),(s_n,t_n)$$

یک مسیر را بسته گوییم اگر $t_n=t_0$

**لم ۳.۲.۲.** اگر $n \geq 1$ باشد و $t_n$ نقطه ای باشد که $y_n(t_n) < y_{n-1}(t_n)$ در این صورت یک مسیر موجود است بطوریکه

$$y_n(t_n) = \sum_{i=1}^{n}\{k(s_i,t_i) - l(s_i,t_{i-1})\} + y_0(t_0)$$

**برهان.** کافی است لم قبل را $n$ بار تکرار می کنیم $\square$

اکنون به یکی از قضیه های مهم در این بخش می پردازیم.

**قضیه ۴.۲.۲.** اگر الگوریتم در $n$امین مرحله متوقف شود آنگاه $\alpha \geq dist(z,W)$ و $\|z - f(ghx_n + ghy_n)\| \leq \alpha$ همچنین اگر $\alpha > dist(z,W)$ آنگاه الگوریتم در یک مرحله متوقف می شود.

**برهان.** می دانیم

$$y_i(t) = \min\{y_{i-1}(t), \inf_s[k(s,t) - x_i(s)]\}$$

$$k(s,t) = \frac{f^{-1}(z(s,t)+\alpha)}{g(s)h(t)} - x_i(s)$$

پس نامساویهای زیر را داریم

$$y_i \leq k - x_i = \frac{f^{-1}(z+\alpha)}{gh} - x_i$$

$$ghy_i + x_igh \leq f^{-1}(z+\alpha)$$

$$f(ghx_i + ghy_i) \leq z + \alpha$$

$$-\alpha \leq z - f(ghx_i + ghy_i)$$

به طور مشابه با شروع از $x_i$ داریم

$$z - f(ghx_i + ghy_{i-1}) \leq \alpha$$

بنا به فرض لم چون الگوریتم ۱۴.۲ در مرحله $n$ام متوقف می شود، پس $y_n = y_{n-1}$ در نتیجه داریم

$$-\alpha \le z - f(ghx_n + ghy_n) \le \alpha$$

چون $dist(z, W) = \inf_{w \in W} \|z - w\|$ پس نتیجه می گیریم

$$dist(z, W) \le \|z - f(ghx_n + ghy_n)\| \le \alpha$$

حال فرض کنیم $\alpha > dist(z, W)$ آنگاه ادعا می کنیم $n$ای موجود است که $y_n = y_{n-1}$. در غیر اینصورت چون دنباله نزولی است، برای هر $n$ دلخواه نقطه ای مانند $t_n$ موجود است بطوریکه $y_n(t_n) < y_{n-1}(t_n)$. بنابه لم ۳.۲.۲ یک مسیر بصورت زیر موجود است

$$(s_1, t_0), (s_1, t_1), (s_2, t_1), (s_2, t_2), ..., (s_n, t_{n-1}), (s_n, t_n)$$

بطوریکه

$$y_n(t_n) - y_0(t_0) = \sum_{i=1}^{n} \{k(s_i, t_i) - l(s_i, t_{i-1})\} \qquad (۱۷.۲)$$

قرار می دهیم $\rho \equiv dist(z, W) < \beta < \alpha$

از طرفی چون $f^{-1}$ نزولی است، خواهیم داشت

$$\frac{f^{-1}(z+\beta)}{gh} < \frac{f^{-1}(z+\alpha)}{gh}$$

پس $\epsilon > 0$ موجود است بطوریکه

$$\frac{f^{-1}(z+\beta)}{gh} + \epsilon \le \frac{f^{-1}(z+\alpha)}{gh}$$
$$\frac{f^{-1}(z+\beta)}{gh} \le \frac{f^{-1}(z+\alpha)}{gh} - \epsilon$$

از طرفی داریم $-\alpha < -\beta$ در نتیجه $\frac{f^{-1}(z-\alpha)}{gh} < \frac{f^{-1}(z-\beta)}{gh}$ که می توان نوشت

$$\frac{f^{-1}(z-\alpha)}{gh}+\epsilon \leq \frac{f^{-1}(z-\beta)}{gh}$$

چون $dist(z,W)=\inf_{w\in W}\|z-w\|$ و $dist(z,W)=\rho<\beta$ پس $x\in C(S)$ و $y\in C(T)$ موجود است بطوریکه

$$\rho<\|z-f(ghx+ghy)\|<\beta$$

پس نا مساوی زیر را داریم

$$-\beta<f(xgh+ygh)-z<\beta$$

$$\frac{f^{-1}(z-\beta)}{gh}<x+y<\frac{f^{-1}(z+\beta)}{gh}$$

که روابط زیر نتیجه می شود

$$\epsilon+\frac{f^{-1}(z-\alpha)}{gh}\leq\frac{f^{-1}(z-\beta)}{gh}<x+y<\frac{f^{-1}(z+\beta)}{gh}\leq\frac{f^{-1}(z+\alpha)}{gh}-\epsilon$$

$$l+\epsilon<x+y<k-\epsilon$$

همچنین روابط زیر نیز برقرار است

$$k-l>2\epsilon$$

$$k-l>(x+y+\epsilon)-(x+y-\epsilon)$$

با قرار دادن در رابطه ۱۷.۲ داریم

$$\begin{aligned}
y_n(t_n)-y_0(t_0) &= \sum k-l\\
&\geq \sum_{i=1}^{n}\{[x(s_i)+y(t_{i-1})+\epsilon]-[x(s_i)+y(t_{i-1})-\epsilon]\}\\
&= y(t_n)-y(t_0)+2n\epsilon
\end{aligned}$$

این نشان می دهد که با افزایش $n$ ، $y_n$ نیز افزایش می یابد یعنی

$$y_0 > y_1 > y_2 > ...$$

و این تناقض با نزولی بودن دنباله $\{y_n\}$است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. $\square$

**تعریف ۵.۲.۲.** فرض کنیم $F \in C(S \times T)$ باشد، تعریف می کنیم

$$F^-(s) = \inf_t F(s,t)$$

$$F^+(s) = \sup_t F(s,t)$$

**لم ۶.۲.۲.** برای هر $F \in C(S \times T)$ و هر $s, r \in S$ داریم

$$|F^-(s) - F^-(r)| \leq \|F_s - F_r\|$$

$$|F^+(s) - F^+(r)| \leq \|F_s - F_r\|$$

**برهان.** برای هر $s, r \in S$ و هر $t \in T$ داریم

$$F^-(s) \leq F(s,t) = F(s,t) - F(r,t) + F(r,t) \leq \|F_s - F_r\| + F(r,t)$$

با اینفیمم گرفتن از طرفین روی $t$ داریم

$$F^-(s) \leq \|F_s - F_r\| + F^-(r)$$

$$F^-(s) - F^-(r) \leq \|F_s - F_r\|$$

که این برهان را کامل می کند. $\square$

**لم ۷.۲.۲.** برای هر $n \in N$ و $s, r \in S$ و $t, \tau \in T$ داریم

$$|x_n(s) - x_n(r)| \leq \|l_s - l_r\|$$

$$|y_n(t) - y_n(\tau)| \leq \|k^t - k^\tau\|$$

**برهان**. فرض کنیم $n=0$، چون $x_0(s)=0$ پس نامساوی اول برقرار است. همچنین داریم $y_0(t)=\inf_s k(s,t)$ پس از رابطه دوم لم قبل نتیجه می گیریم

$$|y_0(t)-y_0(\tau)|=|k^-(t)-k^-(\tau)|\leq\|k^t-k^\tau\|$$

حال فرض کنیم این دو نامساوی برای $n$ برقرار باشد.برای $n+1$ داریم

$$x_{n+1}(s)=\max\{x_n(s),\sup_t[l(s,t)-y_n(t)]\}$$

با توجه به فرض استقرا برای $n$ داریم

$$|x_n(s)-x_n(r)|\leq\|l_s-l_r\|$$

اما با توجه به رابطه دوم لم قبل داریم

$$|\sup_t[l(s,t)-y_n(t)]-\sup_t[l(r,t)-y_n(t)]|\leq\|(l-y_n)_s-(l-y_n)_r\|\leq\|l_s-l_r\|$$

چون $x_{n+1}$ ماکزیمم دو رابطه بالا می باشد پس حکم استقرا نیز برقرار می باشد. در مورد $y_n$ نیز به طور مشابه بیان می شود □

**تذکر ۸.۲.۲.** از لم قبل نتیجه می شود که $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله های از توابع همپیوسته می باشند.

**لم ۹.۲.۲.** اگر $\alpha\geq dist(z,W)$ آنگاه برای هر مسیر بسته داریم

$$\sum_{i=0}^n[k(s_i,t_i)-l(s_i,t_{i-1})]\geq 0$$

**برهان**. ابتدا فرض می کنیم $\alpha>p\equiv dist(z,W)$ با توجه به قضیه ۴.۲.۲ ، $x\in C(S)$ و $y\in C(T)$ موجود است بطوریکه

$$\|z-f(ghx+ghy)\|\leq\alpha$$

پس روابط زیر برقرارند

$$-\alpha \leq z - f(ghx + ghy) \leq \alpha$$

$$z - \alpha \leq f(ghx + ghy) \leq \alpha + z$$

$$f^{-1}(z - \alpha) \leq ghy + xgh \leq f^{-1}(z + \alpha)$$
$$\frac{f^{-1}(z - \alpha)}{gh} < x + y < \frac{f^{-1}(z + \alpha)}{gh}$$

$$l \leq x + y \leq k$$

تعریف می کنیم $\Phi : C(S \times T) \longrightarrow R$ با ضابطه $\Phi(q) = \sum_{i=0}^{n} q(s_i, t_i)$ و

$\Psi : C(S \times T) \longrightarrow R$ با ضابطه $\Psi(q) = \sum_{i=0}^{n} q(s_i, t_{i-1})$

اولا واضح است که $\Psi, \Phi$ صعودی هستند

دوما برای هر $u \in C(S)$ و $v \in C(T)$ داریم

$$\begin{aligned}(\Phi - \Psi)(u + v) &= \sum_{i=0}^{n} [(u + v)(s_i, t_i) - (u + v)(s_i, t_{i-1})] \\ &= \sum_{i=0}^{n} u(s_i) + v(t_i) - u(s_i) - v(t_{i-1})\end{aligned}$$

چون مسیر بسته است پس $t_n = t_{-1}$، که نتیجه می شود

$$(\Phi - \Psi)(u + v) = \textstyle\sum_{i=0}^{n} v(t_i) - v_(t_{i-1}) = v(t_n) - v(t_{-1}) = 0$$

از رابطه اخیر داشتیم $l \leq x + y \leq k$ با تاثیر نگاشت $\Phi$ و $\Psi$ بر این رابطه داریم

$$\Phi(x + y) \leq \Phi(k) \qquad \Psi(l) \leq \Psi(x + y)$$

که رابطه زیر نتیجه می شود

$$\begin{aligned}
0=(\Phi-\Psi)(x+y) &= \Phi(x+y)-\Psi(x+y)\\
&\leq \Phi(k)-\Psi(l)\\
&= \sum_{i=1}^{n}[k(s_i,t_i)-l(s_i,t_{i-1})]
\end{aligned}$$

حال اگر قرار دهیم $\alpha=p$ در اینصورت دنباله حقیقی و نزولی$\{\alpha_m\}$ موجود است که $\alpha_m \longrightarrow \alpha$ پس برای هر $m\in N$ تعریف می کنیم

$$l_m=\frac{f^{-1}(z-\alpha_m)}{gh}$$
$$k_m=\frac{f^{-1}(z+\alpha_m)}{gh}$$

چون توابع $k,l$ پیوسته اند داریم

$$l_m \longrightarrow l$$

$$k_m \longrightarrow k$$

با توجه به اینکه برای هر $m$، حکم مسئله برقرار است پس داریم

$$\begin{aligned}
0\leq\ & \lim_m \sum_{i=1}^{n}[k_m(s_i,t_i)-l_m(s_i,t_{i-1})]\\
=\ & \sum_{i=1}^{n}[\lim_m k_m(s_i,t_i)-\lim_m l_m(s_i,t_{i-1})]\\
=\ & \sum_{i=1}^{n}[k(s_i,t_i)-l(s_i,t_{i-1})]
\end{aligned}$$

پس حکم ثابت است. □

**لم ۱۰.۲.۲.** اگر $\alpha\geq dist(z,W)$ آنگاه برای هر $n$، داریم $y_n\geq -2\|k\|-\|l\|$

**برهان**. قرار می دهیم $c \equiv -2\|k\| - \|l\|$ می دانیم $-\|k\| \leq y_0 = \inf_s k(s,t) \leq \|k\|$ پس $y_0 \geq c$

قرار می دهیم $J_n = \{t; y_n(t) < y_{n-1}(t)\}$ اگر این مجموعه ناتهی باشد و $\tau \in J_n$ آنگاه با توجه به لم ۳.۲.۲ یک مسیر موجود است بطوریکه

$$y_n(\tau) = \sum_{i=1}^{n}\{k(s_i,t_i) - l(s_i,t_{i-1})\} + y_0(t_0)$$

قرار می دهیم $t_{-1} \equiv t_n$ بدین ترتیب دو نقطه $(s_0,t_0)$ و $(s_0,t_{-1})$ را به مسیر فوق اضافه می کنیم که یک مسیر بسته ایجاد می شود و بنابه لم قبل داریم

$$y_n(\tau) = y_0(t_0) + \sum_{i=0}^{n}\{k(s_i,t_i) - l(s_i,t_{i-1})\} - k(s_0,t_0) + l(s_0,t_{-1})$$

$$\geq y_0(t_0) - k(s_0,t_0) + l(s_0,t_{-1}) \geq -\|y_0\| - \|k\| - \|l\| \geq c$$

بدین صورت ادعا می کنیم برای هر $t \in T$ خواهیم داشت $y_n(t) \geq c$. به برهان خلف اگر نقطه $a \in T$ موجود باشد بطوریکه $y_n(a) < c$، آنگاه

$$a \notin J_n \quad \forall n \in N$$

زیرا در غیر اینصورت اگر $n$ای باشد که $a \in j_n$ آنگاه با روند مشابه به آنچه در اول اثبات بیان شد، خواهیم داشت $y_n(a) \geq c$ که تناقض خواهد شد.

حال چون دنباله $\{y_n\}$ نزولی است و $y_{n-1}(a) \not\geq y_n(a)$، پس $y_{n-1}(a) = y_n(a) < c$ اما چون $y_{n-1}(a) < c$ پس $a \notin J_{n-1}$ در نتیجه $y_{n-2}(a) = y_{n-1}(a) < c$ به همین ترتیب نتیجه می شود که $y_0(a) < c$ که تناقض است پس فرض خلف باطل و $y_n \geq c$.

حال اگر برای $n$ای ، $J_n$ تهی باشد پس باید داشته باشیم $y_n = y_{n-1}$ در نتیجه الگوریتم متوقف می شود و چون $J_{n-1}$ نا تهی است، با انجام فرآیند مشابه $y_{n-1} \geq c$ از طرفی داریم

$$y_0 \geq y_1 \geq ... \geq y_{n-1} = y_n$$

که این برهان را کامل می کند. □

**قضیه ۱۱.۲.۲.** اگر پارامتر $\alpha$ در الگوریتم را برابر $dist(z, W)$ قرار دهیم در این صورت دنباله های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ تولید شده توسط الگوریتم همگرای یکنواخت هستند به $x \in C(S)$ و $y \in C(T)$ بطوریکه $\|z - f(ghx + ghy)\| = dist(z, W)$

**برهان.** می دانیم دنباله $\{y_n\}$ نزولی به صورت

$$y_0 \geq y_1 \geq y_2 \geq ...$$

و دنباله $\{x_n\}$ دنباله صعودی به صورت

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq ...$$

می باشند از لم قبل داریم $y_n \geq c$.

پس $\{y_n\}$ دنباله ای نزولی و از پایین کراندار است و چون این دنباله ها همپیوسته اند پس $y \in C(T)$ موجود است بطوریکه این دنباله به طور یکنواخت به آن همگرا باشد. از طرفی داریم با توجه به برهان قضیه ۴.۲.۲، داریم $x_n + y_n \leq k$ پس دنباله $\{x_n\}$ از بالا کراندار است و چون دنباله ای از توابع همپیوسته بود پس $x \in C(S)$ موجود است بطوریکه این دنباله به $x$ همگرای یکنواخت است.

حال اگر در رابطه بالا به جای $k$ قرار دهیم $\frac{f^{-1}(z+\alpha)}{gh}$ که نتیجه می شود

$$-\alpha \leq z - f(x_n gh + y_n gh)$$

چون $f$ پیوسته است ، وقتی $n \longrightarrow \infty$ داریم

$$-\alpha \leq z - f(xgh + ygh)$$

چون $\alpha = dist(z, W)$ پس

$$\|z - f(xgh + ygh)\| \leq dist(z, W)$$

این برهان را کامل می کند. □

**لم ۱۲.۲.۲.** اگر پارامتر $\alpha$ در الگوریتم بگونه ای باشد که $\alpha < dist(z, W)$ آنگاه $n$ای موجود است که $\inf_t y_n(t) < c$

**برهان**. به برهان خلف اگر برای هر $n$، $y_n \geq c$ باشد در این صورت با توجه به برهان قضیه قبل دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا هستند به توابع $x \in C(S)$ و $y \in C(T)$ بطوریکه

$$\|z - f(ghx + ghy)\| \leq \alpha$$

$$\|z - f(ghx + ghy)\| \leq \alpha < dist(z, W)$$

و این متناقض است با اینکه $dist(z, W) \leq \|z - f(ghx + ghy)\|$ پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. □

**قضیه ۱۳.۲.۲.** فرض کنیم $S, T$ هاسدورف و فشرده باشند و فرض کنیم

$$z \in C(S \times T), \quad g \in C(S), h \in C(T), \quad g, h > 0$$

همچنین اگر $f \in C(R)$ اکیدا صعودی باشد بطوریکه $f^{-1} \in C(R)$ آنگاه $z$ دارای بهترین تقریب به فرم

$$f[x(s)h(t) + y(t)g(s)]$$

می باشد که $x \in C(S)$ و $y \in C(T)$ هستند.

بدین ترتیب چنانچه $0 \leq a \leq \alpha \leq b \leq \|z - f(0)\|$ و $\rho = dist(z, W)$، در این صورت با روش نصف کردن در بازه $[a, b]$ و با قرار دادن $\alpha = \dfrac{a+b}{2}$، چنانچه $\alpha < \rho$ طبق لم ۱۲.۲.۲ الگوریتم متوقف می شود و اگر $\alpha > \rho$ آنگاه طبق ۴.۲.۲، الگوریتم بواسطه $y_n = y_{n-1}$ متوقف می شود چنانچه $\alpha = \rho$، طبق قضیه فوق دنباله تولید شده به بهترین تقریب $z$ روی $W$ میل خواهد کرد.همچنین می توان $[a, \alpha]$ و $[\alpha, b]$ را برای ادامه این روند در نظر گرفت.

**تذکر ۱۴.۲.۲.** اگر در قضیه قبل $f$ را تابع همانی فرض کرده و قرار دهیم $g = h = 1$ آنگاه واضح است که $W = C(S) + C(T)$ و چنانچه فرض کنیم $z \in C(S \times T)$ و قرار دهیم $\alpha = dist(z, C(S)+C(T))$ در این صورت طبق قضیه ۱۱.۲.۲ دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ تولید شده توسط الگوریتم وون گولیچک، همگرای یکنواخت هستند به $x \in C(S)$ و $y \in C(T)$ بطوریکه $\|z - x - y\| = dist(z, C(S) + C(T))$ و این همان هدف نهایی الگوریتم دیلبرتو- استراوس بیان شده در بخش اول می باشد.

# فصل ۳

# الگوریتمهای گریدی برای یافتن تقریب در فضای هیلبرت

## ۱.۳ اولین الگوریتم

**تعریف ۱.۱.۳.** فرض کنیم $H$ فضای هیلبرت حقیقی با ضرب داخلی $<.,.>$ باشد. گوییم $H$ دارای خاصیت $P$ است اگر زیر مجموعه $D$ از $H$ موجود باشد، بطوریکه برای $y \in D$ داشته باشیم $\|y\| = 1$ و همچنین $\overline{span} D = H$.

**تذکر ۲.۱.۳.** در گزاره زیر خواهیم دید که اغلب فضاهایی که ما می شناسیم دارای خاصیت $P$ می باشند.

**گزاره ۳.۱.۳.** فضاهای هیلبرت که دارای پایه شمارا هستند دارای خاصیت $P$ می باشند.

**برهان.** فرض کنیم $H$ فضای هیلبرت با پایه شمارای $\{x_1, x_2, ...\}$ باشد.قرار می دهیم

$$y_i = \frac{x_i}{\|x_i\|}, \quad i = 1, 2, ...$$

بدین ترتیب $D = \{y_1, y_2, ..\}$ پایه ای برای $H$ که هر عضو آن با نرم یک می باشند و چون این پایه فضای $H$ را تولید می کند پس $H$ دارای خاصیت $P$ می باشد. $\square$

از این پس قرار داد می کنیم فضای هیلبرت $H$ دارای خاصیت $P$ باشد.

**لم ۴.۱.۳.** فرض کنیم $x \in H$ باشد در این صورت $y \in D$ موجود است بطوریکه $|<x,y>|$ به ماکزیمم خود برسد.

**برهان**. اولا می دانیم $D$ بسته است. زیرا اگر فرض کنیم $\{y_n\}$ دنباله ای در $D$ و همگرا به $y$ باشد در این صورت $\|y_n\| \longrightarrow \|y\|$ چون برای هر $n$، $\|y_n\| = 1$ و تابع نرم یک تابع پیوسته است در نتیجه $\|y\| = 1$ پس داریم $y \in D$.

حال فرض کنیم $x \in H$ دلخواه ولی ثابت باشد و $A = \{<x,y> | y \in D\}$ . نشان می دهیم $A$ بسته است. فرض کنیم $\{<x,y_n>\}$ دنباله ای همگرا به $p$ باشد نشان می دهیم $p \in A$ . چون دنباله $\{<x,y_n>\}$ همگراست پس $y_n \in D$ نیز همگراست بنابراین $y \in D$ موجود است که $y_n \longrightarrow y$، پس $<x,y> \in A$ خواهدشد. ادعا می کنیم $p = <x,y>$ داریم:

$$|<x,y_n> - <x,y>| = |<x,y_n - y>| \leq \|x\| \; \|y_n - y\|$$

چون $y_n \longrightarrow y$ و $x$ ثابت فرض شده بود بنابراین $<x,y_n> \longrightarrow <x,y>$ در نتیجه $A$ بسته است و این برهان را کامل می کند. $\square$

**تذکر ۵.۱.۳.** با توجه به آنچه در لم فوق گفته شد، برای هر $x \in H$ می توان $\max_y |<x,y>|$ را به دست آورد.

حال به الگوریتم زیر توجه می کنیم

۱. فرض کنیم $x_0 = x \in H$ و $m = 1, 2, 3, ..$ در این صورت $y_m \in D$ را بگونه ای در نظر می گیریم که $| < x_{m-1}, y_m > |$ به ماکزیمom خود برسد.

۲. $x_m := x_{m-1} - < x_{m-1}, y_m > y_m$

۳. $G_m(x) := \sum_{j=1}^{m} < x_{j-1}, y_j > y_j$

در ادامه نشان می دهیم $\lim \|x - G_m(x)\| = 0$

## ۲.۳ الگوریتم دوم

**تعریف ۱.۲.۳.** فرض کنید $x \in H$ در اینصورت نرم وابسته به $D$ را به صورت زیر بیان می کنیم

$$\|x\|_D := \sup_{y \in D} | < x, y > |$$

فرض کنیم $\{t_k\}$ دنباله ای باشد که $0 < t_k \leq 1$ و $x_0 = x \in H$ برای $m = 1, 2, ..$ الگوریتم زیر را دنبال می کنیم:

۱. فرض کنیم $y_m \in D$ بگونه ای باشد که

$$| < x_{m-1}, y_m > | \geq t_m \ \|x_{m-1}\|_D$$

۲. $x_m := x_{m-1} - < x_{m-1}, y_m > y_m$

۳. $G_m(x) := \sum_{j=1}^{m} < x_{j-1}, y_j > y_j$

**تذکر ۲.۲.۳.** واضح است با قرار دادن $(t_m = 1; \quad m \in N)$ الگوریتم فوق همان الگوریتم اول می شود.

**تذکر ۳.۲.۳.** با توجه به الگوریتم فوق روابط زیر حاصل می شود.

$$\begin{aligned} \|x_m\|^2 &= \langle x_{m-1} - < x_{m-1}, y_m > y_m, x_{m-1} - < x_{m-1}, y_m > y_m \rangle \\ &= \langle x_{m-1}, x_{m-1} \rangle - 2 \langle x_{m-1}, < x_{m-1}, y_m > y_m \rangle + \langle < x_{m-1}, y_m > y_m, < x_{m-1}, y_m > y_m \rangle \\ &= \|x_{m-1}\|^2 - | < x_{m-1}, y_m > |^2 \end{aligned}$$

بدین ترتیب واضح است که دنباله $\{\|x_m\|\}$، نزولی است.

در ادامه اثبات خواهیم کرد که اگر دنباله $\{t_k\}$، دارای این خاصیت باشد که $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{k} = \infty$ آنگاه برای هر $x \in H$ داریم:

$$\lim \|x - G_m(x)\| = 0$$

یا به عبارتی

$$x \simeq \sum_{j=1}^{\infty} < x_{j-1}, y_j > y_j$$

برای اثبات این مطلب لازم است به نکات زیر توجه کنیم.

**لم ۴.۲.۳.** اگر دنباله $t_k$ گفته شده در الگوریتم دوم دارای این خاصیت باشد که $\sum t_k^2 = \infty$ و دنباله $\{x_m\}$ همگرا باشد، آنگاه این دنباله به صفر همگراست.

**برهان.** فرض کنیم $x_m \longrightarrow u \neq 0$ چون $0 \neq y \in D$ و $u$ نیز مخالف صفر است، پس $\delta > 0$ موجود است بطوریکه

$$\sup_{y \in D} | < u, y > | \geq \delta$$

بنابراین $n \in N$ موجود است که برای هر $m \geq n$ داشته باشیم

$$\sup_{y\in D} |<x_m, y>| \geq \delta$$

و با توجه به اینکه $|<x_{m-1}, y_m>| \geq t_m \ \sup_{y\in D} |<x_{m-1}, y>|$ به رابطه زیر می رسیم

$$\|x_m\|^2 = \|x_{m-1}\|^2 - |<x_{m-1}, y_m>|^2 \leq \|x_n\|^2 - \delta^2 \sum_{n+1}^{m} t_k^2$$

و چون عبارت فوق به ازای هر $m \leq n$ برقرار است، بنابراین سمت راست عبارت فوق به $-\infty$ میل می کند که این تناقض را به وجود می آورد. پس فرض خلف باطل و حکم ثابت است. $\square$

**لم ۵.۲.۳.** فرض کنید $j = 1, 2, \ldots$ $\quad b_j \geq 0$ بطوریکه $\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2 < \infty$ و $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{t_k}{k} = \infty$
آنگاه $\liminf\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{b_n}{t_n} \sum\limits_{j=1}^{\infty} b_j = 0$

**برهان**. سری زیر را در نظر بگیرید

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t_n}{n}\ \frac{b_n}{t_n} \sum_{j=1}^{\infty} b_j$$

این سری همگراست زیرا

$$\textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{t_n}{n}\ \dfrac{b_n}{t_n} \sum_{j=1}^{n} b_j) = \sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{b_n}{n} \sum_{j=1}^{n} b_j)$$

با استفاده از نامساوی کوشی- شوارتز رابطه فوق را می بصورت زیر ادامه داد

$$\leq (\textstyle\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2)^{\dfrac{1}{2}}\ (\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j)^2)^{\dfrac{1}{2}} < \infty$$

اگر $\sum_{j=1}^{\infty} b_j^2$ همگرا باشد آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} b_j)^2$ نیز همگراست.
(رجوع شود به [1],Ch.1,S.9 ) پس $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{b_n}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ همگراست. ادعا می کنیم

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \frac{b_n}{t_n} \sum_{j=1}^{n} b_j = 0$$

اگر اینگونه نباشد آنگاه $m \in N$ و $c > 0$ موجود است که برای هر $n \geq m$ داریم

$$\frac{b_n}{t_n} \sum_{j=1}^{n} b_j > c$$

پس به این رابطه می رسیم

$$c\frac{t_n}{n} < \frac{b_n}{n} \textstyle\sum_{j=1}^{n} b_j$$

که نتیجه می دهد

$$c \textstyle\sum_{n=m}^{\infty} \frac{t_n}{n} < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{b_n}{n} \sum_{j=1}^{n} b_j$$

و این متناقض با فرض $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{k} = \infty$ است. پس حکم برقرار می باشد. □

**قضیه ۶.۲.۳.** فرض کنید $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t_k}{k} = \infty$ در این صورت برای هر $x \in H$ داریم:

$$\lim \|x - G_m(x)\| = 0$$

**برهان.** دو رابطه ی زیر را از الگوریتم دوم داریم:

$$x_m = x - \sum_{j=1}^{m} < x_{j-1}, y_j > y_j$$

$$\|x_m\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{m} | < x_{j-1}, y_j > |^2$$

قرار می دهیم $a_j := | < x_{j-1}, y_j > |$ از رابطه اخیر داریم $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \leq \|x\|^2$ پس می توان نتیجه گرفت دنباله $\{\|x_m\|^2\}$ نزولی و کراندار است پس همگراست.

فرض کنیم $n < m$ پس $x_m - x_n$ به صورت زیر است.

$$x_m - x_n = \sum_{j=n+1}^{m} < x_{j-1}, y_j > y_j$$

$$\|x_m - x_n\|^2 = \|x_m\|^2 - \|x_n\|^2 - 2 < x_m - x_n, x_m >$$

قرار می دهیم $\theta_{m,n} :=< x_m - x_n, x_m >$ داریم:

$$\begin{aligned}
\theta_{m,n} :=< x_m - x_n, x_m > &= \left\langle \sum_{j=n+1}^{m} < x_{j-1}, y_j > y_j, x_m \right\rangle \\
&= \sum_{j=n+1}^{m} < x_{j-1}, y_j >< y_j, x_m > \\
&\leq \sum_{j=n+1}^{m} | < x_{j-1}, y_j > | \, | < y_j, x_m > | \\
&= \sum_{j=n+1}^{m} a_j \; | < y_j, x_m > |
\end{aligned}$$

اما با توجه به تعریف می دانیم

$$a_{m+1} = | < x_m, y_{m+1} > | \geq t_{m+1} \|x_m\|_D$$

پس خواهیم داشت

$$\frac{a_{m+1}}{t_{m+1}} \geq \|x_m\|_D \geq | < x_m, y_j > | \qquad j = 1, 2, ...$$

با جایگذاری در رابطه قبل داریم

$$\theta_{m,n} \leq \sum_{j=n+1}^{m} a_j \; \frac{a_{m+1}}{t_{m+1}} \leq \frac{a_{m+1}}{t_{m+1}} \sum_{j=n+1}^{m} a_j$$

با توجه به لم بیان شده حد پایینی سری سمت راست به صفر همگراست پس

$$\liminf_{m \longrightarrow \infty} \theta_{m,n} = 0$$

می دانیم

$$\liminf_{m \longrightarrow \infty} \theta_{m,n} \leq \lim_{m \longrightarrow \infty} \theta_{m,n}$$

پس نامساوی زیر نتیجه می شود

$$\begin{aligned}\lim_{m,n\longrightarrow\infty}\|x_m-x_n\|^2 &= \lim_{m\longrightarrow\infty}\|x_m\|^2-\lim_{n\longrightarrow\infty}\|x_n\|^2-2\lim_{m,n\longrightarrow\infty}\theta_{m,n}\\ &\leq \lim_{m\longrightarrow\infty}\|x_m\|^2-\lim_{n\longrightarrow\infty}\|x_n\|^2-2\liminf_{m,n\longrightarrow\infty}\theta_{m,n}=0\end{aligned}$$

پس $\{x_m\}$ دنباله ای کوشی و چون دنباله کوشی در فضای هیلبرت همگراست، در نتیجه دنباله $\{x_m\}$ نیز همگراست. همچنین با توجه به لم ۴.۲.۳ این دنباله به صفر همگرا خواهد شد. بنابراین

$$\lim\|x-G_m(x)\|=0$$

□

## ۳.۳ تقریب در فضای حاصل ضربی

فرض کنیم $H$ فضای هیلبرت با خاصیت $p$ باشد برای $N\geq 2$ تعریف می کنیم

$$H_N:=H\times...\times H$$

برای هر $X\in H_N$ داریم

$$X=(x^1,..,x^N)\ ,\qquad x^k\in H$$

که ضرب داخلی را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$<X,Y>:=\sum_{k=1}^{N}<x^k,y^k>$$

و همچنین تعریف می کنیم

$$D_N:=\{(\alpha_1y_1,...,\alpha_Ny_N)\mid y_k\in D,\alpha_n\in R\qquad \textstyle\sum_{k=1}^N\alpha_k^2=1\}$$

می توان مشاهده کرد که $\overline{span} D_N = H_N$.

فرض کنیم $X = (x^1, ..., x^N)$ و دنباله $\{t_m\}$ بگونه ای باشد که $0 < t_m \leq 1$ در اینصورت تعریف می کنیم

$$Y := (\beta_1 y^1, ..., \beta_N y^N) \quad y^k \in D \tag{۱.۳}$$

بطوریکه در آن هر $y^k$ بگونه ای باشند که برای هر $k = 1, ..., N$ ، عبارت $| < x^k, y^k > |$ به ماکزیمم خود برسد و همچنین قرار می دهیم

$$\beta_i := < x^i, y^i > (\textstyle\sum_{j=1}^N < x^j, y^j >^2)^{-\frac{1}{2}} \quad i = 1, .., N$$

از این پس فرض می کنیم $X_0 = X \in H_N$ دلخواه ولی ثابت باشد.

برای $m = 1, 2, ...$ دنباله $\{X_m\}$ را به صورت زیر تولید می کنیم

$$X_m := X_{m-1} - < X_{m-1}, Y_m > \tag{۲.۳}$$

که $Y_m$ به همان صورت گفته شده تولید می شود.

**تذکر ۱.۳.۳.** با توجه به رابطه ۱.۳ واضح است که $Y \in D_N$، زیرا داریم

$$\textstyle\sum_{i=1}^N \beta_i^2 = \sum_{i=1}^N < x^i, y^i >^2 (\sum_{j=1}^N < x^j, y^j >^2)^{-1} = 1$$

**لم ۲.۳.۳.** در رابطه ۲.۳، هر مولفه ی $\{X_m\}$ را می توان به صورت زیر نوشت

$$x_m^i = x_{m-1}^i - < x_{m-1}^i, y_m^i > y_m^i \quad i = 1, ..., N$$

**برهان**. برای راحتی برهان، رابطه فوق را برای $i = 1$ و $m = 1$، اثبات می کنیم. یعنی نشان خواهیم داد

$$x_1^1 = x^1 - < x^1, y^1 > y^1$$

برای این منظور کافی است نشان دهیم مولفه $r$ام عبارت $< X, Y > Y$ را می توان به صورت $< x^r, y^r > y^r$ نوشت. پس با توجه به رابطه ۱.۳ می نویسیم:

$$< X, Y > Y = (\textstyle\sum_{i=1}^N < x^i, \beta_i y^i >)(\beta_1 y^1, ..., \beta_N y^N)$$

که مولفه $r$ام رابطه بالا را به صورت زیر می توان نوشت.

$$\textstyle\sum_{i=1}^N < x^i, \beta_i y^i > \beta_r y^r \qquad 1 \le r \le N$$

برای ادامه اثبات لازم است حاصل $\beta_r \beta_i$ را بدست آوریم

$$\begin{aligned} \beta_r \beta_i &= < x^r, y^r > (\sum_{j=1}^N < x^j, y^j >^2)^{-\frac{1}{2}} \ < x^i, y^i > (\sum_{j=1}^N < x^j, y^j >^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (\sum_{j=1}^N < x^j, y^j >^2)^{-1} \ < x^r, y^r >< x^i, y^i > \end{aligned}$$

حال با جایگذاری داریم

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N < x^i, y^i > \beta_i \beta_r y^r &= \sum_{i=1}^N < x^i, y^i > \left( (\sum_{j=1}^N < x^j, y^j >^2)^{-1} \ < x^i, y^i >< x^r, y^r > \right) y^r \\ &= (\sum_{j=1}^N < x^j, y^j >^2)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N < x^i, y^i > (< x^i, y^i >< x^r, y^r >) \right) y^r \\ &= (\sum_{j=1}^N < x^j, y^j >^2)^{-1} \left( \sum_{i=1}^N < x^i, y^i >^2 \right) < x^r, y^r > y^r \\ &= < x^r, y^r > y^r \end{aligned}$$

□

**قضیه ۳.۳.۳.** فرض کنیم $X_0 = X \in H_N$ دلخواه باشد در این صورت دنباله $\{X_m\}$ در رابطه ۲.۳، همگرا به صفر خواهد بود. یا به عبارتی داریم

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\|X-\sum_{i=1}^{m}<X_{i-1},Y_i>Y_i\|=0$$

**برهان**. فرض کنیم $X=(x^1,...,x^N)$، با توجه به لم قبل برای هر $m\in N$

$$x_m^k=x^k-\textstyle\sum_{i=1}^{m}<x_{i-1}^k,y_i^k>y_i^k;\qquad k=1,...,N$$

بنابراین با توجه به قضیه ۶.۲.۳، داریم

$$\lim_{m\longrightarrow\infty}\|x^k-\sum_{i=1}^{m}<x_{i-1}^k,y_i^k>y_i^k\|=0;\qquad k=1,...,N$$

پس برای هر مولفه $X$ می توان نوشت $x^k\simeq\sum_{i=1}^{\infty}<x_{i-1}^k,y_i^k>y_i^k$ که نتیجه می شود

$$X\simeq\textstyle\sum_{i=1}^{\infty}<X_{i-1},Y_i>Y_i$$

□

# فصل ۴

# بهترین تقریب و ابرصفحه ها

در این فصل ابتدا به تعریف ابرصفحه[۱] و خواص آن می پردازیم و سپس الگوریتمی بیان خواهیم کرد که با استفاده از ابرصفحه ها بتوان بهترین تقریب را روی یک مجموعه بسته و محدب پیدا کرد.

## ۱.۴ تابعک های خطی و کراندار

در تمام مراحل این فصل فرض می کنیم که $X$ یک فضای ضرب داخلی حقیقی و $X^*$ دوگان آن باشد.

**تذکر ۱.۱.۴.** فرض کنیم $f$ یک تابعک خطی باشد. چون $\|f\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{|f(x)|}{\|x\|}$ لذا $\|f\|$ یک کران بالا برای مجموعه $\{\frac{|f(x)|}{\|x\|}; x \in X\}$ محسوب می شود. بنابراین برای هر $x \in X$ خواهیم داشت $|f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$

**لم ۲.۱.۴.** فرض کنیم $z \in X$ دلخواه باشد. اگر برای هر $y \in X$ داشته باشیم $f(y) := < y, z >$ آنگاه $f \in X^*$ و $\|f\| = \|z\|$ خواهد شد.

**برهان.** با توجه تعریف $f$ واضح است که یک تابعک خطی و کراندار است. پس $f \in X^*$

[۱] Hyperplane

و همچنین با توجه به اینکه $\|f\| = \sup\limits_{\|y\|=1} |f(y)|$، لذا با فرض $\|y\| = 1$ و استفاده از نامساوی شوارتز داریم

$$|f(y)| = | < y, z > | \leq \|y\| \; \|z\| = \|z\|$$

که نتیجه می گیریم $\|z\| \leq \|f\|$ از طرفی با توجه به تذکر قبل خواهیم داشت

$$\|z\|^2 =< z, z >= f(z) \leq \|f\| \; \|z\|$$

بنابراین نتیجه می گیریم $\|z\| = \|f\|$ □

## ۲.۴ وجود و یکتایی بهترین تقریب

**لم ۱.۲.۴.** فرض کنیم $K$ زیر مجموعه بسته و محدب از $X$ باشد. در اینصورت بهترین تقریب $x \in X$ در صورت وجود منحصر به فرد است.

**برهان**. فرض کنیم $x \in X$ باشد و $y_1, y_2 \in P_K(x)$ در اینصورت با توجه به محدب بودن $K$ ، $(y_1 + y_2)/2$ نیز در $K$ قرار دارد و

$$\begin{aligned} d(x, K) &\leq \|x - \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2)\| = \|\tfrac{1}{2}(x - y_1) + \tfrac{1}{2}(x - y_2)\| \\ &\leq \tfrac{1}{2}\|x - y_1\| + \tfrac{1}{2}\|x - y_2\| = d(x, K) \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می گیریم که تمام نامساوی ها به تساوی تبدیل می شوند پس با توجه به خاصیت نامساوی مثلث $c > 0$ موجود است بطوریکه $x - y_1 = c(x - y_2)$ اما چون $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = d(x, K)$ پس باید داشته باشیم $c = 1$ که نتیجه می شود $y_1 = y_2$ □

**لم ۲.۲.۴.** فرض کنیم $K$ زیر مجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت $X$ باشد و $x \in X \setminus K$ در اینصورت $K$ چبیشف است.

**برهان.** قرار می دهیم $D = \{\|x-y\|; \quad y \in K\}$ در اینصورت می دانیم که $d(x,K) = \inf D$ پس دنباله ای از $D$ مانند $\{\|x-y_n\|\}$ موجود است که به $d(x,K)$ همگرا باشد. با توجه به قانون متوازی الاضلاع داریم

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|(x-y_n)-(x-y_m)\|^2 \\ &= 2(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2) - \|2x-(y_m+y_n)\|^2 \\ &= 2(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2) - 4\|x-\frac{1}{2}(y_m+y_n)\|^2 \end{aligned}$$

چون $K$، محدب است پس $(y_n+y_m)/2 \in K$ و بنابراین

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2) - 4d(x,K)^2$$

اما چون $d(x,K) \longrightarrow \|x-y_m\|$ پس سمت راست رابطه فوق به صفر همگرا که نتیجه می دهد دنباله $\{y_n\}$ کوشی است و چون $X$ هیلبرت است پس $\{y_n\}$ به عنصری همچون $y \in X$ همگراست و چون $K$ نیز بسته است پس $y$ عضوی از $K$ خواهد بود. بدین ترتیب $y$ بهترین تقریب $x$ در $K$ خواهد بود و چون $K$ محدب است پس با توجه به لم قبل بهترین تقریب منحصر به فرد بوده و در نتیجه $K$ چبیشف است. $\square$

**لم ۳.۲.۴.** فرض کنیم $K$ زیر مجموعه محدب از فضای $X$ باشد و $x \in X$ در اینصورت $y_0 = P_K(x)$ اگر و تنها اگر

$$< x - y_0, y - y_0 > \leq 0 \quad \forall y \in K$$

**برهان**. فرض کنیم برای هر $y \in K$، داشته باشیم $< x-y_0, y-y_0 > \leq 0$ در اینصورت

$$\begin{aligned} \|x-y_0\|^2 &= < x-y_0, x-y_0 >=< x-y_0, x-y > + < x-y_0, y-y_0 > \\ &\leq < x-y_0, x-y > \leq \|x-y_0\| \ \|x-y\| \end{aligned}$$

که از نا مساوی شوارتز نتیجه شد. بنابراین $\|x-y_0\| \leq \|x-y\|$ پس $y_0 = P_K(x)$.

برعکس، به برهان خلف فرض کنیم $y \in K$ موجود باشد بطوریکه

$$< x-y_0, y-y_0 > > 0$$

در اینصورت برای هر $0 < \lambda < 1$ تعریف می کنیم $y_\lambda := \lambda y + (1-\lambda)y_0$ که با توجه به محدب بودن $K$، $y_\lambda$ عضوی از $K$ می باشد و می نویسیم

$$\begin{aligned} \|x-y_\lambda\|^2 =< x-y_\lambda, x-y_\lambda > &= < x-y_0-\lambda(y-y_0), x-y_0-\lambda(y-y_0) > \\ &= \|x-y_0\|^2 - 2\lambda < x-y_0, y-y_0 > + \lambda^2\|y-y_0\|^2 \\ &= \|x-y_0\|^2 - \lambda[2 < x-y_0, y-y_0 > - \lambda\|y-y_0\|^2] \end{aligned}$$

که برای $\lambda > 0$ و به اندازه کافی کوچک، عبارت داخل براکت مثبت خواهد شد، و بنابراین $\|x-y_\lambda\|^2 < \|x-y_0\|^2$ که نتیجه می شود $y_0 \neq P_K(x)$ که این متناقض با فرض است پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. $\square$

**نتیجه ۴.۲.۴.** فرض کنیم $M$ زیر فضایی از $X$ باشد و $x \in X$ در اینصورت $y_0 = P_K(x)$ اگر و تنها اگر

$$< x-y_0, y >= 0 \quad \forall y \in M$$

**برهان**. با توجه به لم قبل واضح است

$$< x - y_0, y > \leq 0 \quad \forall y \in M$$

و چون $M$ زیر فضای $X$ است پس می توان گفت $-M = M$ بنابراین

$$< x - y_0, -y > \leq 0 \quad \forall y \in M$$

$$< x - y_0, y > \geq 0 \quad \forall y \in M$$

که نتیجه می شود

$$< x - y_0, y > = 0 \quad \forall y \in M$$

□

## ۳.۴ ابرصفحه ها و خواص آنها

**تعریف ۱.۳.۴.** فرض کنیم $f \in X^* \setminus \{0\}$ و $c \in R$ در اینصورت به مجموعه

$$H = \{y \in X; \quad f(y) = c\}$$

یک ابر صفحه گوییم که با $H =< f, c >$ نشان می دهیم همچنین تعریف می کنیم

$$kerf :=< f, 0 >$$

**تذکر ۲.۳.۴.** فرض کنیم $H$ یک ابر صفحه باشد و $y_0 \in H$ دلخواه باشد در اینصورت

$$y_0 + kerf = H$$

**تذکر ۳.۳.۴.** $kerf$ بسته، محدب و زیر فضای برداری از $X$ است.

**تذکر ۴.۳.۴.** هر ابر صفحه، بسته محدب است ولی لزوما زیر فضای برداری نیست.

**قضیه ۵.۳.۴.** فرض کنیم $f \in X^* \setminus \{0\}$ و $H =< f, c >$، که در آن $c \in R$ می باشد. در این صورت برای هر $x \in X$ داریم

$$d(x, H) = \frac{|f(x) - c|}{\|f\|}$$

و می دانیم $d(x, H) = \inf_{y \in H} \|x - y\|$

**برهان.** ابتدا مسئله را برای حالت $c = 0$ بیان می کنیم. پس خواهیم داشت $H =< f, 0 >$، نشان می دهیم

$$d(x, H) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

فرض کنیم $x \in X$ ثابت باشد.می دانیم برای هر $y \in H$، $f(y) = 0$ خواهد شد. پس داریم

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|} = \frac{|f(x) - 0|}{\|f\|} = \frac{|f(x) - f(y)|}{\|f\|} = \frac{|f(x - y)|}{\|f\|}$$

با توجه به تذکر ۱.۱.۴ داریم

$$|f(x - y)| \leq \|f\| \ \|x - y\|$$

با جایگذاری در رابطه قبل داریم

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x - y\|$$

اما چون رابطه فوق برای هر $y \in H$ برقرار است، لذا با اینفیمم گرفتن از طرفین داریم

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \inf_{y \in H} \|x - y\| = d(x, H)$$

حال $\epsilon$ را طوری می گیریم که $0 < \epsilon < \|f\|$ و همچنین فرض کنیم $z \in X$ بگونه ای باشد که $\|z\| = 1$ و $f(z) > \|f\| - \epsilon$ (دقت شود با توجه به خاصیت سوپریمم این

رابطه بدست می آید.) حال قرار می دهیم $y := x - f(x)[f(z)]^{-1}z$

اولا $y$ در $H$ قرار دارد. زیرا

$$f(y) = f(x - f(x)[f(z)]^{-1}z) = f(x) - f(x)[f(z)]^{-1}f(z) = 0$$

دوما رابطه زیر برای $y$ برقرار است.

$$\|x-y\| = \|x - x + f(x)[f(z)]^{-1}z\| = \frac{|f(x)|}{|f(z)|}\|z\| = \frac{|f(x)|}{|f(z)|} \leq \frac{|f(x)|}{\|f\| - \epsilon}$$

از طرفی چون $y \in H$ و $d(x,H) \leq \|x-y\|$ پس خواهیم داشت

$$d(x,H) \leq \frac{|f(x)|}{\|f\| - \epsilon}$$

و چون $\epsilon$ دلخواه فرض شده بود، لذا داریم

$$d(x,H) \leq \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

و بنابراین حکم لم در حالت $c = 0$ اثبات شد. حال فرض کنیم $c \neq 0$ و $H =< f, c >$.

برای هر $x_0 \in H$ تعریف می کنیم

$$H_0 = H - x_0$$

با توجه به تذکر ۲.۳.۴، می توان نوشت $H_0 =< f, 0 >$ و حکم لم را برای آن بیان کرد. حال ادامه برهان را به صورت زیر می نویسیم

$$\begin{aligned} d(x,H) &= d(x - x_0, H - x_0) = d(x - x_0, H_0) \\ &= \frac{|f(x - x_0)|}{\|f\|} = \frac{|f(x) - c|}{\|f\|} \end{aligned}$$

□

**نتیجه ۶.۳.۴.** فرض کنیم $c \in R, z \in X$ دلخواه باشند بطوریکه $\|z\| = 1$ و $H = \{y \in X; < y, z >= c\}$ در این صورت برای هر $x \in X$ داریم

$$P_H(x) = x - \frac{(< x, z > -c)z}{\|z\|^2}$$

**برهان.** قرار می دهیم $y := x - \frac{(< x, z > -c)z}{\|z\|^2}$
در اینصورت $y$ در $H$ قرار دارد زیرا

$$\begin{aligned} < y, z > &= < x - \frac{(< x, z > -c)z}{\|z\|^2}, z > \\ &= < x, z > - \frac{(< x, z > -c)}{\|z\|^2} < z, z > \\ &= < x, z > - \frac{(< x, z > -c)}{\|z\|^2} \|z\|^2 = c \end{aligned}$$

و همچنین داریم

$$\|x - y\| = \|x - x + \frac{(< x, z > -c)z}{\|z\|^2}\| = \frac{(< x, z > -c)}{\|z\|} = d(x, H)$$

بنابراین $y$ بهترین تقریب $x$ در $H$ خواهد بود. □

**تعریف ۷.۳.۴.** فرض کنید $K$ زیر مجموعه ای از $X$ باشد و $f \in X^*$ در این صورت تعریف می کنیم

$$\sup f(K) := \sup\{f(y); \quad y \in K\}$$

$$\inf f(K) := \inf\{f(y); \quad y \in K\}$$

**تعریف ۸.۳.۴.** فرض کنیم $f \in X^*\{0\}$ و $c \in R$ دلخواه باشد. در این صورت گوییم ابر صفحه $H =< f, c >$ جدا کننده ی نقطه $x$ و مجموعه $K$ است، هرگاه داشته باشیم

$$\sup f(K) \leq c \leq f(x)$$

که در آن $x \in X$ و $K$ زیر مجموعه $X$ است.

**لم ۹.۳.۴.** فرض کنیم ابرصفحه $H =< f, c >$ یک جدا کننده ی $x$ و مجموعه $K$ باشد. در اینصورت ابرصفحه $H' =< f, \sup f(K) >$ نیز یک جدا کننده ی $x$ و مجموعه $K$ خواهد بود و همچنین

$$d(x, H) \leq d(x, H') \leq d(x, K)$$

**برهان**. با توجه به قضیه ۵.۳.۴ داریم

$$\begin{aligned} d(x, H) &= \frac{|f(x) - c|}{\|f\|} \\ &\leq \frac{|f(x) - \sup f(K)|}{\|f\|} = d(x, H') \end{aligned}$$

همچنین برای هر $y \in K$ داریم

$$d(x, H') = \frac{|f(x) - \sup f(K)|}{\|f\|} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{\|f\|} \leq \|x - y\|$$

بنابراین $d(x, H')$ یک کران پایین برای مجموعه $\{\|x - y\|; y \in K\}$ خواهد بود که می توان نتیجه گرفت.

$$d(x, H') \leq d(x, K)$$

□

**لم ۱۰.۳.۴.** فرض کنید $K$ زیر مجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت $X$ باشد و $x \in X \setminus K$ . در این صورت $f \in X^*$ موجود است به طوریکه $\|f\| = 1$ و

$$d(x, K) = f(x) - \sup f(K) = d(x, H) \quad , \quad H =< f, \sup f(K) >$$

و همچنین $\sup f(K) < f(x)$

**برهان**. چون $x \notin K$ پس $d := d(x, K)$ بزرگتر از صفر خواهد بود و چون $X$ هیلبرت بوده و $K$ بسته و محدب است لذا طبق قضیه ۲.۲.۴، $P_K(x)$ موجود است. قرار می دهیم $z = d^{-1}(x - P_K(x))$ که با توجه به قضیه ۳.۲.۴ داریم

$$\sup_{y\in K} < x - P_K(x), y - P_K(x) >= 0$$

و بنابراین $\sup_{y\in K} < z, y - P_K(x) >= 0$ که می توان نتیجه گرفت

$$\sup_{y\in K} < z, y >=< z, P_K(x) >$$

همچنین

$$\|z\| = \frac{\|x - P_K(x)\|}{d} = 1$$

حال برای هر $y \in X$ قرار می دهیم $f(y) =< y, z >$ و $H =< f, \sup f(K) >$ پس داریم

$$\begin{aligned} f(x) - \sup f(K) &= < x, z > - \sup_{y\in K} < z, y > \\ &= < x, z > - < P_K(x), z >=< x - P_K(x), z > \\ &= < x - P_K(x), \frac{x - P_K(x)}{d} >= \frac{\|x - P_K(x)\|^2}{d} = d(x, K) \end{aligned}$$

با توجه به قضیه ۵.۳.۴ و لم ۲.۱.۴ داریم

$$d(x, H) = \frac{|f(x) - \sup f(K)|}{\|f\|} = \frac{f(x) - \sup f(K)}{\|z\|} = d(x, K)$$

□

**نتیجه ۱۱.۳.۴.** با توجه به قضیه فوق واضح است که ابرصفحه $H =< f, \sup f(K) >$ یک جداکننده $x$ و مجموعه $K$ خواهد بود بطوریکه فاصله $x$ تا $H$ دقیقا برابر با فاصله $x$ تا $K$ خواهد شد.

**نتیجه ۱۲.۳.۴.** در قضیه فوق چنانچه قرار دهیم $K = \{0\}$ در اینصورت برای هر $x \in X$ ، $f \in X^*$ وجود دارد بطوریکه $\|f\| = 1$ و

$$\|x\| = \|x - 0\| = d(x, K) = f(x) - \sup f(K) = f(x)$$

## ۴.۴ الگوریتم

**گزاره ۱.۴.۴.** فرض کنیم $K$ زیر مجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت $X$ باشد و $x \in X \setminus K$ در اینصورت داریم

$$d(x, K) = \max\{f(x) - \sup f(K) \ ; \ f \in X^*, \|f\| = 1\}$$

و

$$d(x, K) = \max d(x, H)$$

که در آن $H$ ابرصفحه ای است که $x$ را از مجموعه $K$ جدا می کند.

**برهان**. با توجه به لم ۹.۳.۴، اگر ابر صفحه $H$ جداکننده نقطه $x$ و $K$ باشد آنگاه $d(x, H) \leq d(x, K)$ و چون این خاصیت برای هر ابرصفحه جداکننده با نرم یک نیز برقرار است، لذا خواهیم داشت

$$d(x, K) \geq \max\{f(x) - \sup f(K); f \in X^*, \|f\| = 1\}$$

اما با توجه به قضیه قبل $f \in X^*$ با نرم یک موجود است بطوریکه $d(x, K) = f(x) - \sup f(K)$ پس نا مساوی بالا به تساوی تبدیل خواهد شد و $d(x, K) = \max d(x, H)$ که در واقع این ماکزیمم بروی ابرصفحه هایی است که نقطه $x$ و مجموعه $K$ را جدا می کنند و ماکزیمم در یک ابر صفحه رخ خواهد داد. □

اکنون با توجه به آنچه که گفته شد، الگوریتم را به صورت زیر بیان می کنیم.

فرض کنیم $x \in X$ و $K$ زیر مجموعه بسته و محدب از فضای هیلبرت $X$ باشد. $z \in X$ و $c \in R$ را به گونه ای اخذ می کنیم که ابرصفحه $H = \{y \in X \; ; \; < y, z >= c\}$ نقطه $x$ و مجموعه $K$ را جدا کند.

حال ماکزیمم $d(x, H)$ را برای اینگونه ابرصفحه ها بدست آورده و بدین ترتیب $d(x, K)$ با این ماکزیمم برابر خواهد بود.

در نتیجه می توان نوشت

$$d(x, K) = \frac{| < x, z > -c|}{\|z\|} \quad , \quad P_K(x) = x - \frac{[< x, z > -c]z}{\|z\|^2}$$

# مراجع


[1] A. Zygmund, "Trigonometric series", University Press, Cambridge, (1959).

[2] B. J. Conway ."A course in functional analysis .", Springer-Verlag,(1985),p.84.

[3] D. Fang , X. Luo and Chong Li, Nonlinear simultaneos approximation in complete lattice banach spaces ,Taiwanese journal of mathematics, (2008).

[4] D. Leviatan and V. N. Temlyakov, "Simultaneous approximation by greedy algorithms, University of South Carolina in January (2003).

[5] F. R. Deutsch, "Best Approximation in Inner Product Spaces",Springer, (2001).

[6] F. Deutsch, Von Neumann,"Multivariate Approximation Theory," (1979), p.83-96.

[7] M. von Golitschek, "Approximation Theory and Functional Analysis," (1984).

[8] N. Dunford and J.T. Schwartz, "Linear Operators. Part I," Interscience, New York ,(1959), p.488

[9] Pinkus and Allan, "On $L^1$-approximation", Cambridge University Press, (1989), p.12-20.

[10] S. P. Diliberto and E. G. Straus, "On the approximation of a function of several variables by the sum of functions of fewer variables", Pacific J. Math. 1 (1951), 195-210. MR IS, p. 334.

[11] V. N. Temlyakov, "Weak greedy algorithms", Advances in Comp. Math. 12 (2000).

[12] W. A. Light , E. W. Cheney, "Approximation Theory in Tensor Product Spaces" , Springer, (1985).

[13] W. Rudin,"Functional Analysis," McGraw-Hill, New York, (1973).

[14] W. Rudin, "Principles of mathematical analysis" 3ed, McGraw-Hill, (1976).

[15] W. Rudin, "Real and Complex Analysis," Second Edition, McGraw-Hill, New York, (1974).

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ابر صفحه ........ *Hyperplane*
استقرا ........ *Induction*
الحاق ........ *Adjoint*
الگوریتم ........ *Algorithm*
بهترین تقریب ........ *Best Approximation*
پیوسته ........ *Continuous*
تابعک ........ *Functional*
تام ........ *Complete*
جدا کننده ........ *Separate*
دنباله همگرا ........ *Convergent sequence*
عملگر ........ *Operator*
فشرده ........ *Compact*
فضای دوگان ........ *Dual space*
فضای ضرب داخلی ........ *Inner product space*
فضای هیلبرت ........ *Hilbert Space*
قانون متوازی الاضلاع ........ *Parallelogram law*
کراندار ........ *Bounded*
محدب ........ *Convex*
مسیر ........ *Path*
نامساوی مثلث ........ *Triangle inequality*
نگاشت انقباضی ........ *non-expansive map*

نگاشت تقریب . . . . . . . . . . *Proximity map*
نگاشت مرکزی . . . . . . . . . . *Central map*
همپیوسته . . . . . . . . . . *Equicontinuous*

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

الحاق ........ *Adjoint*

الگوریتم ........ *Algorithm*

بهترین تقریب ........ *Best Approximation*

کراندار ........ *Bounded*

نگاشت مرکزی ........ *Central map*

فشرده ........ *Compact*

تام ........ *Complete*

پیوسته ........ *Continuous*

دنباله همگرا ........ *Convergent sequence*

محدب ........ *Convex*

فضای دوگان ........ *Dual space*

همپیوسته ........ *Equicontinuous*

تابعک ........ *Functional*

فضای هیلبرت ........ *Hilbert Space*

ابر صفحه ........ *Hyperplane*

استقرا ........ *Induction*

فضای ضرب داخلی ........ *Inner product space*

نگاشت انقباضی ........ *non-expansive map*

عملگر ........ *Operator*

قانون متوازی الاضلاع ........ *Parallelogram law*

نگاشت تقریب ........ *Proximity map*

مسیر ........ *Path*

جدا کننده ........ *Separate*

نامساوی مثلث ........ *Triangle inequality*

*Surname: Akbarzadeh* *Name: Hossein*

*Title: Finding Algorithms for best approximation*

*Supervisor: Mahdi Iranmanesh*

*Advisor: Kamran Sharifi*

*Degree: Master of Science* *Subject: Pure Mathematics*

*Field: Mathematical Analysis*

*University of Shahrood* *Faculty of Mathematical Sciences*

*Date: 2012* *Number of Pages: 82*

*Keywords:Algorithm, Best approximation, Continuous functions space, Hyperplane*

***Abstract***

*In this paper, we investigate a series of successive and repetitive processes that lead to the best approximation, we called this process "the best approximation algorithms", First, we describe algorithms that could find best approximation of a continuous two variable function as the sum of two continuous functions. Next we introduce some algorithms in Hilbert space and finite product of Hilbert spaces and we can assist to find an approximation for all points in Hilbert space. Finally we propose the best approximation algorithm for closed convex sets in Hilbert space using hyperplanes.*

**Shahrood University of Technology**

**Faculty of Mathematical Sciences**

# Finding Algorithms for best approximation

**S.Hossein Akbarzadeh**

**Supervisor:**

Dr. Mahdi Iranmanesh

**Date:** 2012