دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان:

گروه‌هایی با خودریختی‌های مرکزی تقریبا داخلی

نگارش:

سمیرا سلطانی

استاد راهنما:

دکتر سید حیدر جعفری

استاد مشاور:

دکتر محبوبه علیزاده

دی ۱۳۹۰

تقدیم به :

اکنون جایگاهی است که باید به یاد آورم که بودم و چگونه به اینجا رسیدم. کودکی که به امید دستان مادر خود به روی پا ایستاد و با دلگرمی‌های مدام مرا به استواری ایام فراخواند. به پاس تشویق ها، دلگرمی‌ها و محبت های بی شائبه **مادرم** این ناقابل را به ایشان تقدیم می‌کنم.

دخترم که در هنگام قبولی ام در این مقطع نوزادی بیش نبود و با صبری که پیشه نمود و دوری مرا تحمل کرد مرا یاری رساند تا بتوانم در کمال خونسردی به تحصیل بپردازم .

همسرم که با روحیه دهی های بی نظیرشان خستگی را از وجودم پاک ساخته اند و بی‌شک اگر همدلی و همیاری ایشان نبود قدم نهادن در این راه بزرگ بس سخت و دشوار بود.

پدرم که وجودش برای همیشه گرمابخش خانه دلم بوده و مهرش روشنی بخش زندگی‌ام می‌باشد.

تشکرو قدردانی:

سپاس خدایی را که همراهم بود و بر من علم و دانش ارزانی داشت تا بتوانم نگارش این پایان نامه را به اتمام برسانم. بر خود لازم می‌دانم که از کلیه افرادی که در دوران تحصیل به هر نحوی در رسیدن من تا این پایه نقش داشته اند به ویژه از استاد گرامی **جناب آقای دکتر سید حیدر جعفری** جهت روشن نمودن راهی که ابتدای آن بدون وجود ایشان و رهنمودهایشان به کوره راه ختم می‌شد تشکر و قدر دانی نمایم.

و استاد ارجمند **سرکار خانم دکتر محبوبه علیزاده** بخاطر مشاوره های موثرشان که حق بزرگی برگردن بنده دارند بسیار سپاسگذارم.

همچنین از دو خواهرم، برادرم و دوست عزیزم که همواره در تمام مراحل زندگی‌ام در کنارم بوده‌اند صمیمانه سپاسگذارم.

در پایان از کلیه معلمان و دبیران ریاضی‌ام بالاخص **جناب** آقای فریدون شهریاری و اساتید محترم دانشکده ریاضی (در مقاطع کارشناسی و کارشناسی ارشد) و ریاست محترم دانشکده آقای دکتر احمد زیره تشکر نموده و از استادان گرامی که داوری این پایان نامه را به عهده داشته‌اند متشکرم.

فهرست مطالب

عنوان		صفحه
فصل اول	**تعاریف و نتایج اولیه**	
۱-۱	همریختی‌ها و خودریختی‌ها	۲
۱-۲	ساختار گروه‌ها	۹
۱-۳	سری‌ها	۱۵
فصل دوم	**گروه‌هایی با خودریختی‌های مرکزی تقریبا داخلی**	
۲-۱	لم‌ها و نتایج بنیادی	۲۴
۲-۲	نتایج اصلی	۴۰
فصل سوم	**خودریختی‌های مرکزی که مرکز گروه را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارند**	۴۶
فصل چهارم	**p-گروه‌ها با گروه خودریختی مرکزی آبلی مقدماتی**	۶۳
واژه‌نامه		۷۵
نمادگذاری		۷۷
مراجع		۷۸

چکیده

فرض کنید G یک گروه باشد. مجموعه تمام خودریختی‌های G را با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم. یک خودریختی را که با هر خودریختی داخلی جابه‌جا شود، **خودریختی مرکزی** می‌گوییم و مجموعه همه خودریختی‌های مرکزی را با $Aut_c(G)$ نشان می‌دهیم که زیرگروهی نرمال از $Aut(G)$ می‌باشد.

اگر M و N دو زیرگروه نرمال G باشند مجموعه تمام خودریختی‌هایی که $\frac{G}{N}$ را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارند را با $Aut^N(G)$ نمایش می‌دهیم. به علاوه مجموعه تمام خودریختی‌هایی که M را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارند با $Aut_M(G)$ نشان داده می‌شود. همچنین قرار می دهیم: $Aut_M^N(G) := Aut^N(G) \bigcap Aut_M(G)$.

در فصل اول مفاهیم پایه‌ای که در فصل‌های بعد به کار می‌رود را معرفی می‌کنیم، در فصل دوم به مطالعه گروه‌هایی با خودریختی‌های مرکزی تقریبا داخلی می‌پردازیم و در این فصل ثابت می‌کنیم که اگر G یک p-گروه از رده پوچ‌توانی دو و $Z(G)$ دوری باشد آنگاه $|Aut_c(G):Inn(G)|=|Z(G):G'|$. سپس در فصل سوم خودریختی‌های مرکزی که مرکز گروه را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارند بررسی می کنیم. به علاوه در فصل دوم و سوم به دو روش متفاوت ثابت می‌کنیم که اگر G یک p-گروه ناآبلی باشد و $Inn(G) \leq Aut_c(G)$، آنگاه $Aut_c(G) = Inn(G)$ اگروتنهااگر $Z(G)$ دوری باشد و $G' = Z(G)$.

سرانجام در فصل چهارم به ازای عدد اول فرد p، شرط لازم و کافی برای آبلی مقدماتی بودن گروه خودریختی‌های مرکزی یک p-گروه متناهی ناآبلی محض را ارائه می‌دهیم.

در سراسر این پایان نامه G یک گروه متناهی می‌باشد.

کلمات کلیدی: خودریختی مرکزی، خودریختی داخلی، گروه ناآبلی محض، گروه پوچ‌توان، رده پوچ-توانی، نما، گروه آبلی مقدماتی، ارتفاع.

فصل اول

تعاریف و نتایج اولیه

در این فصل مفاهیم مقدماتی را ذکر می‌کنیم. هدف از این فصل یادآوری، معرفی اصطلاحات، علامات و مقدماتی است که در فصل های آتی مورد نیاز خواهد بود. در این پایان نامه همواره ، C_n نشان‌دهنده یک گروه دوری از مرتبه n است. این فصل شامل سه بخش است.

۱-۱ همریختی‌ها و خودریختی‌ها

۱-۱-۱ تعریف. فرض کنید G و H دو گروه باشند. دراین‌صورت مجموعه تمام همریختی‌ها از G به H را با $Hom(G,H)$ نمایش می‌دهند. واضح است که این مجموعه همراه با عمل $(f.g)(x)=f(x)g(x)$ تشکیل یک گروه می‌دهد.

۱-۱-۲ لم. فرض کنیم A یک گروه آبلی و $m>0$. دراین‌صورت $Hom(C_m,A)\cong A[m]=\{a\in A|ma=0\}$.

برهان: فرض می‌کنیم $a\in A[m]$. نگاشت $\psi_a:C_m\to A$ را با ضابطه $\psi_a(\bar{r})=ra$ در نظر می‌گیریم.

اگر $\bar{x}=\bar{y}$ آنگاه $m|x-y$، ازاین‌رو عدد صحیح kای وجود دارد به طوری که $x-y=km$، لذا $(x-y)a=kma=0$. بنابراین $xa=ya$. پس $\psi_a(\bar{x})=\psi_a(\bar{y})$.

در نتیجه ψ_a خوش‌تعریف است. از طرفی

$$\psi_a(\bar{x}+\bar{y})=\psi_a(\overline{x+y})=(x+y)a=xa+ya=\psi_a(\bar{x})+\psi_a(\bar{y})$$

لذا ψ_a یک همریختی است. حال نشان می‌دهیم $\theta:A[m]\to Hom(C_m,A)$ با ضابطه $\theta(a)=\psi_a$ یک یکریختی است.

به وضوح θ خوش‌تعریف است.

از طرفی به ازای هر $a,b \in A[m]$ و $\bar{r} \in C_m$ داریم،

$$\psi_{a+b}(\bar{r}) = r(a+b) = ra + rb = \psi_a(\bar{r}) + \psi_b(\bar{r}) = (\psi_a + \psi_b)(\bar{r})$$

بنابراین $\psi_{a+b} = \psi_a + \psi_b$. لذا θ یک همریختی می‌باشد.

بـه علاوه اگر $\theta(a) = \theta(b)$، یعنی $\psi_a = \psi_b$. آنگاه $\psi_a(\bar{1}) = \psi_b(\bar{1})$ و لذا $a = b$. بنابراین θ یـک‌بـه‌یـک اســـت. همچنـــین بـــه ازای $f \in Hom(C_m, A)$ قـــرار مـــی‌دهـــیم $a = f(\bar{1})$، داریـــم $ma = mf(\bar{1}) = f(\bar{m}) = f(\bar{0}) = 0$. لذا $a \in A[m]$ و $\psi_{f(\bar{1})}(\bar{r}) = \bar{r}f(\bar{1}) = f(\bar{r})$. بنابراین θ پوشاست.

در نتیجه θ یک یکریختی است . ■

۱-۱-۳ تعریف. فرض کنیم G یک گروه باشد. هر همریختی مانند $f: G \to G$ را یک **درونریختی** از G می‌نامیم. مجموعه همـه درونریختی‌هـای G را بـا $End(G)$ نشـان می‌دهیم. در صـورتی کـه f یک‌به‌یک و پوشا هم باشد، آن را یک **خودریختی** از G می‌گوییم و مجموعه تمام خودریختی‌هـای G با $Aut(G)$ نشان می‌دهیم. به ازای هر $g \in G$ نگاشت $i_g: G \to G$ با ضابطه $i_g(x) = x^g$ یـک خودریختی است که **خودریختی داخلی** G نامیده می‌شود. مجموعه همه خودریختی‌های داخلی G، که آن را با $Inn(G)$ نشان می‌دهیم، یک زیرگروه نرمال از $Aut(G)$ است.

۱-۱-۴ لم. فرض کنید G گروهی دوری از مرتبه p^k باشد که p عددی اول است. دراین‌صورت

(۱) اگر $p > 2$، آنگاه $Aut(C_{p^k}) \cong U_{p^k} = C_{p^{k-1}(p-1)}$.

(۲) اگر $p = 2$، آنگاه $Aut(C_{2^k}) \cong U_{2^k} = C_2 \times C_{2^{k-2}}$.

برهان: (۱) می‌دانیم U_p یک گروه دوری از مرتبه $p-1$ است، بنابراین، قضیه برای $k = 1$ برقرار است. حال فرض می‌کنیم $k > 1$. دراین‌صورت $0 < p+1 < p^k$ و با توجه به بسط دو جمله‌ای داریم

$$(p+1)^{p^{k-2}} \equiv 1 + p^{k-1} (\mathrm{mod}\ p^k)$$

$$(p+1)^{p^{k-1}} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p^k)$$

لـذا $o(p+۱)=p^{k-۱}$. چون U_p گروهی دوری است، بنابراین عـنصر نابـدیهی مانـند a از مرتبـه $p-۱$ دارد. یعنی، $a^{p-۱}\equiv ۱(\mod p)$ که $۱\leq a\leq p-۱$. حال a را عنصری از U_{p^k} در نظر می‌گیریم و فـرض می‌کنیم $o(a)=t$، پس $a^t \equiv^{p^k} ۱$. لذا $p^k \left| a^t-۱\right.$. در نتیجه $p\left|a^t-۱\right.$، یعنی $a^t \equiv^p ۱$. بنابراین در گروه U_p، $o(a)|t$، و لذا $p-۱|t$. چون عکس قضیه لاگرانژ در گروه‌های دوری برقرار است، در نتیجه $<a>$ در گـــروه U_{p^k} عنصـــری مانـــند x از مرتبـــه $p-۱$ دارد. چـــون $(p-۱,p^{k-۱})=۱$، پـــس $o(x(p+۱))=[o(x),o(p+۱)]=p^{k-۱}(p-۱)$ و لذا U_{p^k} دوری است.

(۲) واضح است که $Aut(C_۲)=۱$ و $Aut(C_۴)\cong C_۲$، بنابرایـن فرض می‌کنیم $k\geq ۳$ در ایـن صورت

$$۵^{۲^{k-۳}}=(۱+۴)^{۲^{k-۳}}=۱+۲^{k-۱}(\mod ۲^k)$$

$$۵^{۲^{k-۲}}=(۱+۴)^{۲^{k-۲}}=۱(\mod ۲^k)$$

پـس $o(۵)=۲^{k-۲}$. حال قرار می‌دهـیم $b=۲^k-۱$، چون $U_{۲^k}$ دارای مرتبه $۲^{k-۱}$ اسـت، داریم $o(b)=۲$ و $<b>=\{۱,b\}$. اگر $۱\neq x\in <۵>\bigcap <b>$ آنگـاه $x=b\in <۵>$. لـذا $۲^k-۱=b\equiv ۵^s(\mod ۲^k)$ کـه در آن s یـک عـدد صـحیح اســـت. بنـابراین، $۲^k-۱\equiv ۵^s(\mod ۲^k)$. چـون $k\geq ۳$ پـــس $۴|۲^k$. لـذا $۲^k-۱\equiv ۵^s(\mod ۴)$. درایـن‌صـورت، $-۱\equiv ۱^s(\mod ۴)$ که یک تناقض است. پس $<b>\bigcap <۵>=\{۱\}$.

از اینکـــــه $\left|U_{۲^k}\right|=۲^{k-۱}=\dfrac{۲\times ۲^{k-۲}}{۱}=\dfrac{|<b>||<۵>|}{|<b>\bigcap <۵>|}=|<b><۵>|$ نتیجـــــه مـــــی‌گیـــــریم $U_{۲^k}=<۵>\times <b>$. ■

قضیه زیر در بسیاری از کتب جبر مطرح شده است به عنوان مثـال [۱۶] را ببنیـد. لـذا فقـط بـه ذکـر صورت آن اکتفا می‌کنیم.

۱-۱-۵ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد در این صورت $\dfrac{G}{Z(G)}\cong Inn(G)$.

۱-۱-۶ لم. اگر f تابعی از A به B باشد که درآن A و B متناهی باشند و $card(A)=card(B)$، آنگاه شرط یک‌به‌یک بودن با پوشا بودن معادل است.

برهان: بدیهی است. ■

۱-۱-۷ تعریف. به هر درونریختی که با همه خودریختی‌های داخلی جابه‌جا شود، **درونریختی نرمال** می‌گوییم. مجموعه تمام درونریختی‌های نرمال را با $End_c(G)$ نشان می‌دهیم. همچنین هر خودریختی را که با همه خودریختی‌های داخلی جابه‌جا شود، **خودریختی مرکزی**[۱] می‌نامیم. مجموعه همه خودریختی‌های مرکزی با $Aut_c(G)$ نشان می‌دهیم، دراین‌صورت $Aut_c(G)=C_{Aut(G)}(Inn(G))$.
به عبارت دیگر هر خودریختی نرمال، خودریختی مرکزی نامیده می‌شود.

۱-۱-۸ قضیه. مجموعه خودریختی‌های مرکزی گروه G زیرگروهی نرمال از $Aut(G)$ می‌باشد.

برهان: چون $Aut_c(G)=C_{Aut(G)}(Inn(G))$، پس $Aut_c(G)\le Aut(G)$. حال نشان می‌دهیم $Aut_c(G)$ در $Aut(G)$ نرمال می‌باشد. برای این کارکافی است ثابت کنیم که به ازای هر $g\in G$، $f\in Aut(G)$ و $\alpha\in Aut_c(G)$، $\alpha^f i_g=i_g\alpha^f$. به ازای هر $x\in G$ می‌توان نوشت

$$\alpha^f i_g(x)=(f\alpha f^{-1})i_g(x)=f\alpha f^{-1}(x^g)=f\alpha f^{-1}(gxg^{-1})$$

$$\begin{aligned}&=f\alpha(f^{-1}(g)f^{-1}(x)f^{-1}(g^{-1}))=f\alpha i_{f^{-1}(g)}(f^{-1}(x))=fi_{f^{-1}(g)}(\alpha f^{-1}(x))\\&=f(f^{-1}(g)\alpha f^{-1}(x)f^{-1}(g)^{-1})=f(f^{-1}(g))f(\alpha f^{-1}(x))f(f^{-1}(g^{-1}))\\&=g(f\alpha f^{-1}(x))g^{-1}=i_g(f\alpha f^{-1})(x)=i_g(\alpha^f)(x)\end{aligned}$$

بنابراین اثبات به اتمام می‌رسد. ■

۱-Central automorphism

۱-۱-۹ قضیه. فرض کنید σ یک خودریختی از گروه G باشد، در این صورت σ یک خودریختی مرکزی است اگر و تنها اگر برای هر $g\in G$، $g^{-1}\sigma(g)\in Z(G)$.

برهان: σ خودریختی مرکزی است اگر و تنها اگر به ازای هر $g\in G$، $i_g\sigma=\sigma i_g$. لذا برای هر $x\in G$، $i_g\sigma(x)=\sigma i_g(x)$. با توجه به ضابطه i_g داریم، $g\sigma(x)g^{-1}=\sigma(gxg^{-1})$. بنا به خاصیت همریختی σ، $g\sigma(x)g^{-1}=\sigma(g)\sigma(x)\sigma(g^{-1})=\sigma(g)\sigma(x)\sigma(g)^{-1}$. بنابراین $\sigma(x)g^{-1}\sigma(g)=g^{-1}\sigma(g)\sigma(x)$، چون σ پوشاست این تساوی معادل این است که $g^{-1}\sigma(g)\in Z(G)$.■

۱-۱-۱۰ نتیجه. فرض کنید G گروهی متناهی و α یک درونریختی از G باشد. اگر به ازای هر $x\in G$، $x^{-1}\alpha(x)\in Z(G)$ آنگاه α یک درونریختی نرمال است.

۱-۱-۱۱ مثال. در گروه S_n، به ازای $n\geq ۳$، $Aut_c(S_n)=\{۱\}$. زیرا $f\in Aut_c(G)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $g\in G$، $g^{-1}f(g)\in Z(G)$. از آنجا که (برای $n\geq ۳$) $Z(S_n)=\{۱\}$، بنابراین $f(g)=g$. لذا $f=I_d$.

۱-۱-۱۲ تعریف. اگر G یک گروه باشد و $x,y\in G$ آنگاه $[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}$ را **جابجا گر** x و y می‌نامیم. زیرگروه تولید شده به وسیله جابجاگرهای G را **زیرگروه جابجاگر** یا **مشتق** G می‌گوییم و آن را با G' نمایش می‌دهیم. همچنین داریم $[G,x]=<\{[g,x]=gxg^{-1}x^{-1}|g\in G\}>$. درحالت کلی برای دو زیرگروه Hو K از G جابجاگر Hو K به صورت $[H,K]=<\{[h,k]=hkh^{-1}k^{-1}|h\in H,k\in K\}>$ تعریف می‌شود.

اکنون برخی از مهم ترین خواص جابجاگر را که در این پایان نامه مورد نیاز است بیان می‌کنیم.

۱-۱-۱۳ لم. فرض کنید G یک گروه باشد و x، y و w عناصری از G باشند. دراین‌صورت

(۱) $x^{y}=[y,x]x$.

(۲) $[y,x]=[x,y]^{-1}$.

(۳) $[xy,w]=[y,w]^{x}[x,w]$.

(۴) $[x,yw]=[x,y][x,w]^{y}$.

برهان: بدیهی است. ■

۱-۱-۱۴ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد، دراین‌صورت

(۱) $G'\lhd G$ و G/G' گروهی آبلی است.

(۲) اگر $N\lhd G$ آنگاه G/N آبلی است اگر و تنها اگر $G'\leq N$.

برهان: به [۱۵، گزاره ۲-۳-۱۷] رجوع کنید. ■

به کمک قضیه بالا زیرگروه مشتق D_{8} را می‌یابیم.

۱-۱-۱۵ مثال. گروه $D_{8}=<a,b|a^{2}=b^{4}=1, aba^{-1}=b^{-1}>$ را در نظر بگیرید که در آن

$$D_{8}=\{1,a,b,b^{2},b^{3},ab,ab^{2},ab^{3}\}$$

به علاوه زیرگروه نرمال $H=\{1,b^{2}\}=<b^{2}>$ را در نظر بگیرید دراین‌صورت $\left|\frac{G}{H}\right|=4$. بنابراین $\frac{G}{H}$ آبلی است، و درنتیجه $G'\leq H$. لذا مرتبه G' یک یا دو می‌باشد. چون گروه D_{8} ناآبلی است، پس $|G'|=2$. بنابراین $G'=H=<b^{2}>$.

۱-۱-۱۶ لم. خودریختی‌های مرکزی، عناصر زیرگروه G' از گروه G را نقطه‌به‌نقطه ثابت نگه می‌دارد (به همان عنصر از G' تصویر می‌کنند).

برهان: فرض می‌کنیم σ یک خودریختی مرکزی و $[a,b]$ مولدی از G' باشد کافی است نشان دهـیم به ازای هر $a,b \in G$، $\sigma([a,b])=[a,b]$.

$$\sigma([a,b])=\sigma(aba^{-1}b^{-1})=\sigma(a)\sigma(b)\sigma(a^{-1})\sigma(b^{-1})=aa^{-1}\sigma(a)bb^{-1}\sigma(b)a^{-1}a\sigma(a^{-1})b^{-1}b\sigma(b^{-1})$$

$$=a(a^{-1}\sigma(a))b(b^{-1}\sigma(b))a^{-1}(a\sigma(a^{-1}))b^{-1}(b\sigma(b^{-1}))$$

چون σ خـودریـختی مرکزی است، پس $a^{-1}\sigma(a)$، $b^{-1}\sigma(b)$، $a\sigma(a^{-1})$ و $b\sigma(b^{-1})$ در مرکز G قرار دارند و لذا $\sigma([a,b])=aba^{-1}b^{-1}$. پس $\sigma([a,b])=[a,b]$. بنابراین اثبات کامل می‌شود. ■

۱-۲ ساختار گروه‌ها

۱-۲-۱ تعریف. کمترین تعداد مولدهای یک گروه را **رتبه گروه** می‌گوییم و آن را با $rank\,(G)$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر $rank\,(G)=\min\{|X|\,\big|\,X\subseteq G, <X>=G\}$. واضح است که گروه‌های دوری از رتبه یک هستند.

۱-۲-۲ مثال. گروه D_8 دارای رتبه دو می‌باشد، زیرا توسط دو عنصر a و b تولید می‌شود.

۱-۲-۳ تعریف. اگر G یک گروه باشد، **نما**[1] G را که با $\exp(G)$ نمایش می‌دهیم، به صورت $\exp(G)=\min\{t\,\big|\,\forall x\in G, x^t=1\}$ تعریف می‌شود. اگر چنین t ای موجود نباشد گوییم گروه از توان ∞ است.

۱-۲-۴ مثال. در گروه $C_2\times C_2$ مرتبه هر عنصر نابدیهی برابر دو می‌باشد. بنابراین $\exp(C_2\times C_2)=2$.

۱-۲-۵ لم. اگر $\exp(H)=n$ و $\exp(G)=m$ آنگاه $\exp(G\times H)=[m,n]$.

برهان: فرض می‌کنیم $\exp(G\times H)=t$ باشد دراین‌صورت به ازای هر $g\in G$ و $h\in H$، $(g,h)^t=(e,e)$. ازاین‌رو $(e,e)=(g,h)^{tn}=(g^{tn},h^{tn})=(g^{tn},e)$. لذا $g^{tn}=e$، بنابراین $m|tn$، پس $\frac{m}{(m,n)}\Big|t$. به طور مشابه $\frac{n}{(m,n)}\Big|t$. در نتیجه $\frac{mn}{(m,n)}=[m,n]|t$.

همچنین $(g,h)^{\frac{mn}{(m,n)}}=(g^{\frac{mn}{(m,n)}},h^{\frac{mn}{(m,n)}})=(e,e)$. بنابراین $t\,|\,\frac{mn}{(m,n)}=[m,n]$. بنا به آنچه گفتیم $t=[m,n]$ ■

1-Exponent

۱-۲-۶ قضیه (**قانون مدولی دد کیند**). اگر H، K و L زیرگروه‌هایی از گروه G باشند به طوری که $K \leq L$، آنگاه $(H \cap L)K = (HK) \cap L$.

برهان: اثبات به کمک عضوگیری بسیار ساده می‌باشد. ■

۱-۲-۷ تعریف. فرض کنید $G = H \times K$ دراین‌صورت H و K را عامل مستقیم می‌نامیم. همچنین به گروه ناآبلی G که عامل مستقیم آبلی نابدیهی ندارد **گروه ناآبلی محض**[1] می‌گوییم.

۱-۲-۸ مثال. گروه‌های S_3، D_8 و $D_8 \times S_3$ گروه‌های ناآبلی محض‌اند.

اگر S_3 ناآبلی محض نباشد آنگاه S_3 را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب مستقیم دو زیرگروه نابدیهی نوشت که حداقل یکی از آنها آبلی است. بنا به قضیه لاگرانژ مرتبه هر زیرگروه نابدیهی و واقعی گروه S_3، ۲ یا ۳ می‌باشد. لذا این زیرگروه‌های نابدیهی S_3 آبلی‌اند. پس S_3 به صورت حاصل‌ضرب دو زیرگروه آبلی نوشته می‌شود که یک تناقض است. به طور مشابه می‌توان نشان داد مرتبه هر زیرگروه نابدیهی و واقعی گروه D_8، ۲ یا ۴ می‌باشد. فرض کنیم D_8 ناآبلی محض نباشد دراین‌صورت D_8 را می‌توان به صورت حاصل‌ضرب مستقیم دو زیرگروه آبلی نوشت، که یک تناقض است.

حال فرض می‌کنیم $G = D_8 \times S_3$ ناآبلی محض نباشد، دراین صورت $G = H \times K$ که در آن H آبلی و K ناآبلی محض است. لذا $Z(G) = Z(D_8) \times Z(S_3)$، بنابراین $Z(G) = Z(D_8)$. پس $H = Z(D_8)$. در نتیجه $G = Z(D_8) \times K$. دراین‌صورت بنا به قانون مدولی دد کیند داریم

$D_8 = D_8 \cap G = D_8 \cap (Z(D_8).K) = Z(D_8).(D_8 \cap K) = H \times (D_8 \cap K)$.

که این با ناآبلی محض بودن D_8 در تناقض می‌باشد. پس $D_8 \times S_3$ ناآبلی محض است.

۱-Purely non-abelian group

۱-۲-۹ تعریف. p-گروه آبلی متناهی G را **آبلی مقدماتی** گوییم در صورتی که مرتبه هر عنصر نابدیهی G عدد اول p باشد.

۱-۲-۱۰ قضیه. فرض کنیم G یک گروه متناهی آبلی باشد. دراین‌صورت G به حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های سیلویش تجزیه می‌شود. به عبارت دیگر اگر $\{P_1,\dots,P_n\}$ مجموعه‌ی همه اعداد اولی باشند که در تجزیه‌ی $|G|$ ظاهر می‌شوند و $G_i \in syl_{p_i}(G)$ آنگاه $G = G_1 \times\cdots\times G_n$.

برهان: به [۱۴، قضیه ۶-۱-۱] رجوع کنید. ■

۱-۲-۱۱ قضیه. فرض کنیم G یک p-گروه متناهی آبلی نابدیهی باشد و $a \in G$، دراین‌صورت اگر مرتبه a از مرتبه هر عنصر G ناکمتر باشد آنگاه G زیرگروهی مانند H دارد که $G =< a > \times H$.

برهان: فرض کنیم $|G| = p^n$، با استقرا روی n حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $n = 1$، با در نظر گرفتن $H = 1$ حکم به وضوح برقرار است. فرض کنیم $n > 1$ و $A =< a >$، هرگاه $G = A$ آنگاه حکم بدیهی است. (دراین‌صورت قرار می‌دهیم $H := 1$) پس فرض می‌کنیم $A \neq G$ و x را از $G - A$ چنان انتخاب می‌کنیم که کوچکترین مرتبه ممکن را داشته باشد. به وضوح $x \neq 1$. ثابت می‌کنیم $o(x) = p$.

ادعا می‌کنیم $x^p \in A$، زیرا در غیر این صورت $x^p \in G - A$ و داریم $o(x^p) < o(x)$ که با انتخاب x در تناقض است. بنابراین، $< x^p > \leq A$. اینک اگر $< x^p >= A$ آنگاه $o(x^p) = \dfrac{o(x)}{(p,o(x))} = |A| = o(a)$، لذا $o(x) = p|A| = p.o(a)$ که ممکن نیست، زیرا بنابر فرض مرتبه a از مرتبه هر عنصر G ناکمتر است. پس $< x^p > \neq < A >$ و در نتیجه عدد صحیح t وجود دارد که $x^p = a^t$، $0 \leq t \leq o(a)$ و $p | t$.

(در غیر این صورت اگر $p \nmid t$ آنگاه $o(x^p) = o(a^t) = \dfrac{o(a)}{(t,o(a))} = o(a)$، لذا $< a^t >=< a >$ که یک تناقض است.)

حال بـا فـرض $y=a^{-\frac{t}{p}}$، چـون G آبلـی اسـت $(xy)^p=x^p y^p=۱$. چـون $y\in A$ و $x\notin A$ پـس $xy\notin A$. در نتیجـه $۱\neq o(x)\leq o(xy)\leq p$. بنابراین $o(x)=p$.

اینک قرار می‌دهیم $N=<x>$، ادعا می‌کنیم که مرتبه Na در گروه $\frac{G}{N}$ برابر با مرتبه a است. زیرا اگر فرض کنیم مرتبه a برابر p^{α} و مرتبه Na برابـر $p^{\alpha'}$ باشـد چـون $o(Na)|o(a)$ پـس $\alpha'\leq\alpha$. از طرف دیگر چون $a^{p^{\alpha'}}\in<x>$، پس به ازای یک s، $۰\leq s\leq p$، $a^{p^{\alpha'}}=x^s$. حال اگر $s\neq 0$ آنگاه چون $(s,p)=۱$، اعـداد صـحیح $k_۱,k_۲$ وجـود دارنـد بـه طـوری کـه $sk_۱+pk_۲=۱$، درایـن‌صـورت $x=x^۱=x^{sk_۱}x^{pk_۲}=(x^s)^{k_۱}=(a^{p^{\alpha'}})^{k_۱}\in A$ که یک تناقض است، بنابراین $s=۰$. در نتیجه $a^{p^{\alpha'}}=۱$. پس $o(a)\big|p^{\alpha'}$ و لذا $\alpha\leq\alpha'$ ازاین‌رو $\alpha=\alpha'$. بنابراین مرتبه Na در گـروه $\frac{G}{N}$ از مرتبـه هـر عنصـر ناکمتر است. چون $|N|>۱$ داریم $\left|\frac{G}{N}\right|<|G|$.

بنابر فرض استقرا داریم، $\frac{G}{N}=<Na>\times\frac{H}{N}$ که در آن $N\leq H\leq G$. ثابت می‌کنیم $G=<a>\times H$. فـرض کنیم $g\in G$ و Ng عنصر دلخواهی از $\frac{G}{N}$ باشد. بنابراین $Ng=(Na)^l Nh$ که در آن l عدد صحیح و h عنصری از H است. چون $g\in<a>H$، پس $G=<a>H$.

اینـک فـرض مـی‌کنـیم $z\in<a>\cap H$. چـون $<Na>\cap\frac{H}{N}=۱$، در نتیجـه $Nz\in$ $z\in N$. پـس $z\in A\cap N=\{۱\}$. لذا $<a>\cap H=۱$. بنابراین $G=<a>\times H$ و حکم ثابت می‌شود.■

۱-۲-۱۲ قضیه. فـرض کنیـد $G=H\times K$ تجزیـه‌ای از G بـه حـاصل‌ضـرب مستقیـم دو زیـرگـروه نـرمالش باشد. دراین‌صورت

(۱) $Aut(H)\times Aut(K)$ با زیرگروهی از $Aut(G)$ یکریخت است.

(۲) اگر G متناهی باشد و $(|H|,|K|)=۱$ آنگاه $Aut(G)\cong Aut(H)\times Aut(K)$.

برهان: به [۱۴، قضیه ۶-۴-۲] رجوع کنید. ■

۱-۲-۱۳ نتیجه. فرض کنید G یک گروه متناهی و $\{P_1,...,P_n\}$ مجموعه تمام زیرگروه‌های سیلوی دوبه‌دو متمایز G باشد. دراین‌صورت اگر $G \cong P_1 \times \cdots \times P_n$ آنگاه $Aut(G) \cong Aut(P_1) \times \cdots \times Aut(P_n)$.

۱-۲-۱۴ قضیه. فرض کنید G یک گروه متناهی و $\{P_1,...,P_n\}$ مجموعه زیرگروه‌های سیلوی دو به دو متمایز G باشد. دراین‌صورت اگر $G = P_1 \times \cdots \times P_n$ آنگاه $Inn(G) \cong Inn(P_1) \times \cdots \times Inn(P_n)$.

برهان: به ازای $x = (x_1,...,x_n) \in G$ و $g = (g_1,...,g_n) \in G$، داریم

$$i_g(x) = x^g = (x_1,...,x_n)^{(g_1,...,g_n)} = (x_1^{g_1},...,x_n^{g_n})$$

پس به ازای هر i، $1 \le i \le n$، $f_i(x_i) = x_i^{g_i}$ و لذا $f_i \in Inn(P_i)$. بنابراین $Inn(G) \le Inn(P_1) \times \cdots \times Inn(P_n)$.

برعکس: اگر $(i_{g_1},...,i_{g_n}) \in Inn(P_1) \times \cdots \times Inn(P_n)$ آنگاه با در نظر گرفتن $g = (g_1,...,g_n) \in G$ داریم $i_g = (i_{g_1},...,i_{g_n})$، ازاین‌رو $Inn(P_1) \times \cdots \times Inn(P_n) \le Inn(G)$. بدین ترتیب اثبات به اتمام می‌رسد. ■

۱-۲-۱۵ تعریف. فرض کنیم F یک میدان و n عددی طبیعی باشد. مجموعه تمام ماتریس‌های معکوس پذیر $n \times n$ را که درایه‌های هر یک از آنها در Fاند، با $GL(n,F)$ نمایش می‌دهیم. همچنین اگر n عددی طبیعی و q توان مثبتی از یک عدد اول باشد، دراین‌صورت

$$|GL(n,q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1})$$

۱-۲-۱۶ قضیه. فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی باشد دراین‌صورت $|Aut(G)|=۱$ اگر و تنها اگر $G\cong ۱$ یا $G\cong C_۲$.

برهان: فرض کنید $|G|=p_۱^{\alpha_۱}\dots p_n^{\alpha_n}$ و $|Aut(G)|=۱$. چون G یک گروه آبلی متناهی است، پس $G=P_۱\times\cdots\times P_n$، که به ازای هر i، $۱\le i\le n$، P_iها سیلو زیرگروه‌های متمایز G اند. لذا بنا به قضیه ۱-۲-۱۲، $Aut(P_۱)\times\cdots\times Aut(P_n)\le Aut(G)$، چون $|Aut(G)|=۱$، ازاین‌رو $|Aut(P_۱)|=۱$، ... و $|Aut(P_n)|=۱$. به ازای $P_۱$، داریم $P_۱\cong C_{p_۱^{\alpha_۱}}\times\cdots\times C_{p_۱^{\alpha_s}}$ و دوباره بنا به قضیه ۱-۲-۱۲، $Aut(C_{p_۱^{\alpha_۱}})\times\cdots\times Aut(C_{p_۱^{\alpha_s}})\le Aut(P_۱)$. حال طبق لم ۱-۱-۴، $p_۱^{\alpha_۱-۱}(p_۱-۱)\dots p_n^{\alpha_n-۱}(p_n-۱)\le|Aut\,(P_۱)|$. از آنجا که $|Aut(P_۱)|=۱$، بنابراین $p_۱=۲$ و $\alpha_1=1$. درنتیجه $P_۱\cong ۱$ یا $P_۱\cong C_۲$. با ادامه همین روند می‌توان نشان داد به ازای هر i، $1\le i\le n$، $P_i\cong ۱$ یا $P_i\cong C_۲$. پس $G\cong ۱$ یا $G\cong C_۲$ و یا $G\cong C_۲\times C_۲\times\cdots\times C_۲$. که حالت آخر امکان پذیر نیست، زیرا $Aut(C_2\times C_2)\cong GL(2,C_2)$ و $Aut(C_۲\times C_۲)\le Aut(G)$ که بنا به ۱-۲-۱۵، داریم $GL(2,C_2)$ از مرتبه شش می‌باشد که یک تناقص است.

برعکس: بدیهی است. ■

۱-۲-۱۷ تعریف. فرض کنید G یک p-گروه آبلی متناهی و xعنصر نابدیهی آن باشد، دراین‌صورت بزرگترین عنصر مجموعه $\{p^n\,|\,x\in G^{p^n}, n\in N\cup\{۰\}\}$ را **ارتفاع** x می‌نامیم و با $height\,(x)$ نمایش می‌دهند.

۱-۲-۱۸ مثال. در گروه دووجهی $D_۸=<a,b\,|\,a^۲=b^۴=۱, aba^{-۱}=b^{-۱}>$ تنها عنصر از ارتفاع دو فقط $b^۲$ است و بقیه عناصر نابدیهی دارای ارتفاع یک هستند.

۱-۳ سری‌ها

۱-۳-۱ تـعریف. فرض کنید G یک گروه باشد. زنجیر متناهی از زیرگروه‌های نرمال G به صورت

$$1 = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$$

را یک **سری مرکزی** گوییم در صورتی که به ازای هر i، $0 \leq i \leq n-1$، $\frac{G_{i+1}}{G_i} \leq Z(\frac{G}{G_i})$.

۱-۳-۲ مثال. در گروه دووجهی D_8، $\frac{G}{G'} = \frac{G}{<b^2>}$ آبلی است، از طـرف دیگـر $Z(G) = <b^2>$، لـذا طبق تعریف $1 \leq <b^2> \leq G$ یک سری مرکزی برای گروه دووجهی D_8 می‌باشد.

۱-۳-۳ تعریف. گروه G را **پوچ‌توان** گوییم در صورتی که یـک سـری مرکـزی داشـته باشـد. طـول کوتاهترین سری مرکزی G را **رده (کلاس) پوچ‌توانی** G می‌نامیم و آن را با $c(G)$ نشان می‌دهند.

واضح است که هر گروه آبلی نابدیهی یک گروه پوچ‌توان از رده پوچ‌توانی یک است و رده پوچ‌توانی گروه بدیهی را صفر در نظر می‌گیرند.

از تعریف رده پوچ‌توانی نتیجه زیر را داریم.

۱-۳-۴ نتیجه. اگر G یک گروه پوچ‌توان نابدیهی باشد آنگاه $Z(G) \neq 1$. همچنین اگر G گـروه پـوچ-توان از رده دو باشد آنگاه $G' \leq Z(G)$.

۱-۳-۵ مثال. گروه دووجهی D_8 دارای سری مرکزی $1 \leq <b^2> \leq G = D_8$ اسـت. بنـابراین D_8 یـک گروه پوچ‌توان از رده دو می‌باشد.

۱-۳-۶ لم. گروه G پوچ‌توان است اگر و تنها اگر یک سری نرمال مانند

$$1 = G_0 \le G_1 \le \cdots \le G_n = G$$

داشته باشد به طوری که به ازای هر i، $1 \le i \le n$، $[G, G_{i+1}] \le G_i$**.**

برهان: به [۱۵، گزاره ۲-۱۱-۹] رجوع کنید. ■

۱-۳-۷ لم. هر p-گروه متناهی پوچ‌توان است.

برهان: به [۱۵، گزاره ۲-۱۱-۲۰] رجوع کنید. ■

۱-۳-۸ تعریف. سری $1 = Z_0 \le Z_1 \le \cdots \le Z_n \le \cdots$ را **سری مرکزی بالایی** گویند، که در آن به ازای هر i، $0 \le i \le n-1$، $\frac{Z_{i+1}(G)}{Z_i(G)} = Z(\frac{G}{Z_i(G)})$.

۱-۳-۹ مثال. گروه $G = Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ را در نظر بگیرید که در آن روابط $i^2 = j^2 = k^2 = 1$، $ij = k$، $jk = i$ و $ki = j$ برقرار است. در این صورت $Z_0(G) = 1$، و با توجه به روابط موجود در گروه Q_8 داریم $Z_1(G) = Z(G) = \{1, -1\}$. بالاخره از $\frac{Z_2(G)}{Z_1(G)} = Z(\frac{G}{Z_1(G)}) = \frac{G}{Z_1(G)}$ معلوم می‌شود که $Z_2(G) = G$. بنابراین سری $1 \le \{1, -1\} \le G$ یک سری مرکزی بالایی برای گروه Q_8 است.

۱-۳-۱۰ لم. به ازای هر $g_1, \ldots, g_n \in G$، $[x, g_1, \ldots, g_n] = 1$ اگر و تنها اگر $x \in Z_n(G)$.

برهان: به استقرا روی n ثابت می‌کنیم. واضح است که به ازای $n = 1$، $x \in Z(G)$ اگر و تنها اگر به ازای $g_1 \in G$، $[x, g_1] = 1$. فرض می‌کنیم حکم به ازای $n-1$ برقرار باشد یعنی $x \in Z_{n-1}(G)$ اگر و تنها اگر به ازای $g_1, g_2, \ldots, g_{n-1} \in G$، داشته باشیم $[x, g_1, g_2, \ldots, g_{n-1}] = 1$.

حال حکم را برای n ثابت می‌کنیم. بنابر تعریف سری مرکزی بالایی داریم $Z(\frac{G}{Z_{n-۱}(G)}) = \frac{Z_n(G)}{Z_{n-۱}(G)}$.

بنابراین $x \in Z_n(G)$ اگر و تنها اگر $xZ_{n-۱} \in Z(\frac{G}{Z_{n-۱}(G)})$. لذا به ازای هر $g_۱ \in G$ داریم $xZ_{n-۱}(G)g_۱Z_{n-۱}(G) = g_۱Z_{n-۱}(G)xZ_{n-۱}(G)$. ازاین‌رو $xg_۱Z_{n-۱}(G) = g_۱xZ_{n-۱}(G)$. پس $xg_۱x^{-۱}g_۱^{-۱}Z_{n-۱}(G) = Z_{n-۱}(G)$. در نتیجه $[x, g_۱] \in Z_{n-۱}(G)$.

بنابر فرض استقرا $[x, g_۱] \in Z_{n-۱}(G)$ اگر و تنها اگر به ازای هر $g_۲, g_۳, \ldots, g_n \in G$ داشته باشیم $\big[[x, g_۱], g_۲, \ldots, g_n\big] = ۱$. در نتیجه $[x, g_۱, g_۲, \ldots, g_n] = ۱$.■

۱-۳-۱۱ قضیه. فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان از رده دو باشد. برای هر عدد طبیعی m و هر $x, y \in G$،

(۱) $[x, yw] = [x, y][x, w]$.

(۲) $[xy, w] = [x, w][y, w]$.

(۳) $[x, y^m] = [x^m, y] = [x, y]^m$.

برهان: فرض کنید رده پوچ‌توانی G دو باشد. اگر $x \in Z_۲(G) = G$ آنگاه به ازای هر $g \in G$، $[x, g] \in Z(G)$. لذا با استفاده از لم ۱-۱-۱۳، (۱) و (۲) نتیجه می‌شود.

(۳) حکم را به استقرا روی m ثابت می‌کنیم. برای $m = ۱$، $[x^۱, y] = [x, y^۱] = [x, y]^۱$. لذا حکم برای $m = ۱$ صادق است. فرض می‌کنیم برای $m-۱$ برقرار باشد. چون

$$[x, y]^m = [x, y]^{m-۱}.[x, y] = [x, y^{m-۱}][x, y] = [x, y^{m-۱}.y] = [x, y^m]$$

لذا حکم برای m نیز برقرار است. ■

۱-۳-۱۲ قضیه. فرض کنید G یک گروه پوچ‌توان باشد و $N \lhd G$. دراین‌صورت اگر $N \neq ۱$ آنگاه $N \cap Z(G) \neq ۱$.

برهان: چون G پوچ‌توان است، یک عدد طبیعی مانند s وجود دارد که $Z_s(G)=G$. k را کوچکترین عدد طبیعی قرار دهید که $N\bigcap Z_k(G)\neq 1$. به وضوح $N\bigcap Z_{k-1}(G)=1$. دراین‌صورت $[G,N\bigcap Z_k(G)]\leq [G,Z_k(G)]\leq Z_{k-1}(G)$. از طرفی چون $N\bigcap Z_k(G)$ در G نرمال است، پس $[G,N\bigcap Z_k(G)]\leq N\bigcap Z_k(G)\leq N$. بنابراین $[G,N\bigcap Z_k(G)]\leq N\bigcap Z_{k-1}(G)=1$. در نتیجه $N\bigcap Z_k(G)\leq N\bigcap Z(G)$. حال چون $N\bigcap Z_k(G)\neq 1$، حکم ثابت می‌شود. ■

۱-۳-۱۳ قضیه. فرض کنیم G یک گروه باشد. دراین‌صورت $Inn(G)\leq Aut_c(G)$، اگر و تنها اگر رده پوچ‌توانی G حداکثر دو باشد.

برهان: اگر گروه G آبلی بوده و رده پوچ‌توانی برابر یک باشد حکم برقرار است.

در غیر این صورت $Inn(G)\leq Aut_c(G)=C_{Aut(G)}(Inn(G))$، اگر و تنها اگر $Inn(G)\cong \dfrac{G}{Z(G)}$ آبلی باشد به طور معادل $G'\leq Z(G)$. لذا $Inn(G)\leq Aut_c(G)$ اگر و تنها اگر G یک گروه پوچ‌توان از رده پوچ‌توانی دو باشد. ■

۱-۳-۱۴ قضیه. **فرض کنید** $G=P_1\times\cdots\times P_n$ **که در آن** P_i **ها سیلو زیرگروه‌های** G **اند. دراین‌صورت** $Inn(G)\subseteq Aut_c(G)$ **اگر و تنها اگر برای هر** i، $1\leq i\leq n$، $Inn(P_i)\subseteq Aut_c(P_i)$.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم که $Inn(G)\subseteq Aut_c(G)$، به ازای $i_g\in Inn(P_1)$ دلخواه که در آن $x,g\in P_1$ داریم $(i_g,1,\dots 1)\in Inn(G)$ که $\begin{matrix}1:G\to G\\ x\to 1\end{matrix}$ همریختی همانی است. بنابراین $(i_g,1,\dots 1)\in Inn(G)\subseteq Aut_c(G)$، دراین‌صورت به ازای $(x,1,\dots,1)\in G$، $(i_g,1,\dots 1)(x,1,\dots,1)=(i_g(x),1,\dots,1)$، لذا

$$(x,1,\dots,1)^{-1}(i_g(x),1,\dots,1)=(x^{-1}i_g(x),1,\dots,1)\in Z(G)=Z(P_1)\times\dots\times Z(P_n)$$

بنــــابراین $x^{-1}i_g(x)\in Z(P_1)$. پـــس $i_g\in Aut_c(P_1)$. بـــه طـــور مشـــابه بـــرای هـــر i، $1\le i\le n$، $Inn(P_i)\subseteq Aut_c(P_i)$.

بـــرعکس: اگـــر $Inn(P_i)\subseteq Aut_c(P_i)$ آنگـــاه بـــرای هـــر i و $x_i\in P_i$ داریـــم $i_{g_i}(x_i)\in Inn(P_i)$ و $x_i^{-1}i_{g_i}(x_i)\in Z(P_i)$. دراین صورت به ازای هر $g=(g_1,\dots,g_n)$ و $i_g=(i_{g_1},i_{g_2},\dots,i_{g_n})$،

$$x^{-1}i_g(x)=(x_1,x_2,\dots,x_n)^{-1}(i_{g_1}(x_1),i_{g_2}(x_2),\dots,i_{g_n}(x_n))$$

$$=(x_1^{-1},x_2^{-1},\dots,x_n^{-1})(i_{g_1}(x_1),i_{g_2}(x_2),\dots,i_{g_n}(x_n))$$

$$=(x_1^{-1}i_{g_1}(x_1),x_2^{-1}i_{g_2}(x_2),\dots,x_n^{-1}i_{g_n}(x_n))\in Z(P_1)\times Z(P_2)\times\dots\times Z(P_n)$$

$$=Z(P_1\times P_2\times\dots\times P_n)=Z(G).\blacksquare$$

۱-۳-۱۵ تعریف. فـرض کنید G یک گروه باشد. دراین صورت گویند G در **شرط زنجیـــر صـــعودی** (روی زیرگروه‌های نرمالش) صدق می‌کـند هرگاه هر زنجیر صعـودی از زیرگروه‌های نرمـال G متوقـف شـود. به طور مشابه شرط زنجیر نزولی تعریف می‌شود.

۱-۳-۱۶ قضیه. فـرض کنیـد گـروه G در شـرط زنجیر نزولی صدق کند، و α یک درونریختی نرمال G باشد. دراین‌صورت اگر α یک‌به‌یک باشد آنگاه α یک خودریختی (مرکزی) است.

برهان: چون α نرمال است، به ازای هر عدد طبیعی n، درونریختی α^n نیز نرمال اسـت. اینـک زنجیـر نزولی $G\ge\alpha(G)\ge\alpha^2(G)\ge\cdots$ از زیرگروه‌های نرمال G را در نظـر بگیریـد، چـون G در شـرط زنجیـر نزولی صدق می‌کند، عدد طبیعی مانند n را داریم به طوری که $\alpha^n(G)=\alpha^{n+1}(G)$. بنابراین به ازای هر $a\in G$، وجود دارد $b\in G$ به طوری که $\alpha^n(a)=\alpha^{n+1}(b)$. حال چون α یـک‌بـه‌یـک اسـت، α^n نیـز چنین است. پس $a=\alpha(b)$. یعنی $\alpha(G)=G$ و حکم ثابت می‌شود. ■

به همریختی $\alpha: G \to G$، همریختی پوچ‌توان گوییم در صورتی که عدد طبیعی مانند n یافت شود به طوری که $\alpha^n = ۰$.

۱-۳-۱۷ قضیه (لم فیتینگ). فرض کنید گروه G در هر دو شرط زنجیر(صعودی و نزولی) صدق کند، و α یک درونریختی نرمال باشد. دراین‌صورت اگر α نه خودریختی و نه پوچ‌توان باشد آنگاه G را می‌توان به حاصل ضرب مستقیم دو زیرگروه نابدیهی اش تجزیه کرد.

برهان: زنجیرهای زیر از زیرگروه‌های نرمال G را در نظر می‌گیریم،

$$G \geq \alpha(G) \geq \alpha^{۲}(G) \geq \cdots$$

$$۱ \leq \ker\alpha \leq \ker\alpha^{۲} \leq \cdots$$

چون G در هر دو شرط زنجیر صدق می‌کند، لذا هر یک از زنجیرهای بالا در مرحله‌ای متوقف می‌شوند. دراین‌صورت عدد طبیعی مانند k وجود دارد که برای هر عدد طبیعی n، $n \geq k$، $\alpha^n(G) = \alpha^k(G)$ و $\ker\alpha^n = \ker\alpha^k$. حال قرار می‌دهیم $H = \alpha^k(G)$ و $K = \ker\alpha^k$ و ثابت می‌کنیم $G = H \times K$. چون α^k نرمال است، پس به وضوح $H \lhd G$ و $K \lhd G$.

ادعا می‌کنیم $H \cap K = ۱$. فرض کنیم $x \in H \cap K$. از اینکه $x \in H$، عنصری مانند $y \in G$ وجود دارد که $x = \alpha^k(y)$. چون $x \in K$، پس $۱ = \alpha^k(x) = \alpha^{۲k}(y)$ و در نتیجه $y \in \ker\alpha^{۲k}$. چون $\ker\alpha^k = \ker\alpha^{۲k}$، لذا $y \in \ker\alpha^k$. بنابراین $x = \alpha^k(y) = ۱$ و $H \cap K = ۱$.

حال نشان می‌دهیم $G = HK$. فرض می‌کنیم g عنصر دلخواهی از G باشد چون $\alpha^k(g) \in \alpha^k(G)$ و $\alpha^k(G) = \alpha^{۲k}(G)$، پس عنصری مانند $z \in G$ وجود دارد به طوری که $\alpha^k(g) = \alpha^{۲k}(z)$. ازاین‌رو $u = \alpha^k(z)^{-۱} g \in K$. لذا $g = \alpha^k(z)u \in HK$، در نتیجه $G = H \times K$.

بالاخره چون α پوچ‌توان نیست، $H \neq ۱$. از طرفی $K \neq ۱$، زیرا در غیر این صورت α^k و در نتیجه α یک‌به‌یک می‌شود و از آنجا بنا به قضیه ۱-۳-۱۶، α یک خودریختی است که یک تناقض است. ■

۱-۳-۱۸ تعریف. فرض کنید G یک گروه باشد. اشتراک تمام زیرگروه‌های ماکسیمال G را **زیرگروه فراتینی**[۱] G گوییم و آن را با علامت $\phi(G)$ نشان می‌دهیم. هرگاه G فاقد زیرگروه ماکسیمال باشد، $\phi(G)$ را برابر G تعریف می‌کنیم.

۱-۳-۱۹ لم. فرض کنید G یک گروه متناهی باشد، $C \subseteq G$ و $D \subseteq \phi(G)$. دراین‌صورت اگر $G = <C, D>$ آنگاه $G = <C>$.

برهان: فرض کنیم $<C> \neq G$. بنابراین G زیرگروهی ماکسیمال مانند M دارد به طوری که $<C> \leq M$. حال چون $D \subseteq \phi(G)$، بنابراین $D \subseteq M$ و در نتیجه $<C, D> \leq M$. لذا $G = M$، که یک تناقض است. ■

از لم فوق نتیجه می‌شود، مولدهایی از یک گروه متناهی که در زیرگروه فراتینی قرار دارند را از مجموعه ی مولدها می‌توان حذف کرد. گاهی چنین عناصری را **نامولد گروه** گویند.

۱-۳-۲۰ قضیه. فرض کنید G یک p-گروه و M زیرگروهی از نما p و $M \leq Z(G) \cap \phi(G)$، اگر m_1، m_2،...و m_d عناصر دلخواهی از M و $\{h_1, h_2, ..., h_d\}$ پایه مینیمال G باشند آنگاه نگاشت، $\alpha(h_i) = h_i m_i$، $(i = 1, ..., d)$ یک خودریختی است.

برهان: به [۷، لم۱] رجوع کنید. ■

1-Frattini subgroup

۱-۳-۲۱ قضیه. فرض کنید G، یک p-گروهی باشد که دوری نیست، دراین‌صورت $\frac{G}{G'}$ نیز دوری نمی‌باشد.

برهان: چون G پوچ‌توان است فرض می‌کنیم $c(G)=t$. دراین‌صورت سری مرکزی بالایی $1 \le Z_1 \le \cdots \le Z_{t-2} \le Z_{t-1} \le Z_t = G$ را داریم، که در آن $\frac{Z_t}{Z_{t-1}} = Z(\frac{G}{Z_{t-1}})$. بنابراین $\frac{G}{Z_{t-1}}$ آبلی است، پس $G' \le Z_{t-1}$. همچنین $\frac{Z_{t-1}}{Z_{t-2}} = Z(\frac{G}{Z_{t-2}})$، ازاین‌رو $\frac{G}{Z_{t-2}} \cong \frac{\frac{G}{Z_{t-2}}}{\frac{Z_{t-1}}{Z_{t-2}}} = \frac{\frac{G}{Z_{t-2}}}{Z(\frac{G}{Z_{t-2}})}$. چون $c(G)=t$، لذا $\frac{G}{Z_{t-2}}$ آبلی نیست، پس $\frac{G}{Z_{t-1}}$ دوری نمی‌باشد. با توجه به $\frac{G}{Z_{t-1}} \cong \frac{\frac{G}{G'}}{\frac{Z_{t-1}}{G'}}$، $\frac{G}{G'}$ نیز دوری نیست. ■

فصل دوم

گروه‌هایی با خودریختی‌های مرکزی تقریبا داخلی

اگر $Aut(G)$ آبلی باشد آنگاه همه خودریختی‌ها، خودریختی‌های مرکزی هستند. به عبارت دیگر $Aut(G) = Aut_c(G)$.

بعدا نیز مشاهده شده که اگر $Aut(G)$ ناآبلی باشد ممکن است همه خودریختی‌ها مرکزی باشند. (به عنوان مثال به **[۸]** رجوع کنید.)

در این فصل ما حالت متفاوتی را در نظر می‌گیریم که خودریختی‌های مرکزی به جای اینکه با کل خودریختی‌ها برابر باشند فقط با خودریختی‌های داخلی برابر باشند، یعنی $Aut_c(G) = Inn(G)$. در ابتدا ما p-گروه‌های متناهی که دارای این خاصیت هستند را طبقه بندی کرده و نشان می‌دهیم که شکل منحصر به فرد دارند. به علاوه ثابت خواهیم کرد که اگر G یک p-گروه متناهی باشد دراین‌صورت $Aut_c(G) = Inn(G)$ اگر و تنها اگر $Z(G)$ دوری باشد و $G' = Z(G)$.

تذکر: این فصل برگرفته از مرجع **[۲]** است. همچنین منظور از p-گروه از رده دو، p-گروهی است که پوچ‌توان از رده دو می‌باشد.

۲-۱ لم‌ها و نتایج بنیادی

۲-۱-۱ لم. فرض کنید G یک p-گروه از رده دو می‌باشد، دراین‌صورت

(۱) $G' \leq Z(G)$.

(۲) $\exp(G') = \exp(\frac{G}{Z(G)})$.

(۳) در تجـزیـه دوری $\frac{G}{Z(G)}$ بـه گـروه‌هـای دوری حـداقـل دو تـا از عــوامل دارای بیشــترین مرتبــه هستند. به عبارت دیگـر اگـر $\exp(\frac{G}{Z(G)})=p^c$، آنگـاه یـک p-گــروه آبلــی C وجــود دارد کــه $\frac{G}{Z(G)}\cong C_{p^c}\times C_{p^c}\times C$.

بــــرهان: (۱) چـون G یـک گـروه پوچ‌توان از رده دو می‌باشد، بـنابـرایـن $G'\leq Z(G)$.

(۲) فـرض کنیـد $\exp(\frac{G}{Z(G)})=m$ و $\exp(G')=n$ و $[x,y]$ مـولـدی از G' بـاشـد.

دراین‌صورت به ازای هر $x,y\in G$، $(xZ(G))^m=(yZ(G))^m=1$. بنابراین $x^m,y^m\in Z(G)$، که بنا به قضیه ۱-۳-۱۱ داریم $[x,y]^m=[x^m,y]=1$. چون G' آبلی است در نتیجه $n\leq m$.

از طرف دیگر برای $[x,y]\in G'$، داریم $[x,y]^n=1$. دراین‌صورت بنا به قضیه ۱-۳-۱۱، $[x^n,y]=1$. لذا $x^ny=yx^n$. چــون y عنصــر دلخــواهی از G اســت نتیجــه مــی‌گیــریم $x^n\in Z(G)$. بنــابراین $x^nZ(G)=Z(G)$. پس $(xZ(G))^n=1_{\frac{G}{Z(G)}}$، لـذ ا $m\leq n$.

بنابه آنچه گفتیم $m=n$، پس $\exp(G')=\exp(\frac{G}{Z(G)})$.

(۳) فرض کنید $\exp(G')=\exp(\frac{G}{Z(G)})=p^c$. دراین‌صورت $\frac{G}{Z(G)}$ عنصری مانند $x_1Z(G)$ دارد به طوری که $o(x_1Z(G))=p^c$، یعنی $x_1Z(G)$ دارای بزرگترین مرتبه است. لذا طبق قضیه ۱-۲-۱۱، برای p-گروه آبلی $\frac{G}{Z(G)}$ زیـرگـروهـی مـانند K وجـود دارد بـه طـوری کـه $\frac{G}{Z(G)}=<x_1Z(G)>\times K$. ادعـا مـی‌کنیــم $\exp(K)=p^c$. فرض کنید $\exp(K)=t$. چون $K\leq\frac{G}{Z(G)}$، پس $t\leq p^c$. از طرفی طبق قضیه اساسی گروه‌های آبلی عناصری از G مانند x_1، x_2،...و

x_n وجود دارند که $K=<x_۲Z(G)>\times\cdots\times<x_nZ(G)>$ همچنین $\frac{G}{Z(G)}=<x_۱Z(G)>\times K$، لذا

$\frac{G}{Z(G)}=<x_۱Z(G)>\times<x_۲Z(G)>\times\cdots\times<x_nZ(G)>$.

چون $\exp(K)=t$، در نتیجه به ازای هر $۲\le i\le n$، $(x_iZ(G))^t=Z(G)$. پس $x_i{}^t\in Z(G)$. چون G از رده پوچ‌توانی دو می‌باشد، لذا به ازای هر j، $۱\le j\le n$، $[x_i,x_j]^t=[x_i{}^t,x_j]=۱$. همچنین به ازای هر i، $۱\le i\le n$، $[x_1,x_i]^t=[x_1,x_i{}^t]=1$. چون $G'=<\{[x_i,x_j]\,|\,۱\le i<j\le n\}>$، بنابراین به ازای هر $g\in G'$، $g^t=۱$. ازاین‌رو $\exp(G')\le t$.

از طرفی $\exp(G')=p^c$ پس $p^c\le t$. در نتیجه $\exp(K)=p^c$.

فرض کنید $xZ(G)\in K$ چنان باشد که $o(xZ(G))=p^c$. بنا به قضیه ۱-۲-۱۱، K زیرگروهی مانند C دارد به طوری که $K=<xZ(G))>\times C$. لذا $\frac{G}{Z(G)}=<x_۱Z(G)>\times<xZ(G))>\times C$. ■

۲-۱-۲ لم. فرض کنیم G یک گروه ناآبلی محض باشد دراین‌صورت یک تناظر یک‌به‌یک بین $Aut_c(G)$ و $Hom(\frac{G}{G'},Z(G))$ وجود دارد، به عبارت دیگر $|Aut_c(G)|=\left|Hom(\frac{G}{G'},Z(G))\right|$.

برهان: فرض می‌کنیم $\alpha\in Aut_c(G)$، دراین‌صورت نگاشت $f_\alpha:G\to Z(G)$ را با ضابطه $f_\alpha(g)=g^{-۱}\alpha(g)$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم f_α یک همریختی از G به $Z(G)$ است.

اگر $g_1=g_2$ آنگاه $g_۱^{-۱}=g_۲^{-۱}$ و $\alpha(g_۱)=\alpha(g_۲)$. بنابراین $g_۱^{-۱}\alpha(g_۱)=g_۲^{-۱}\alpha(g_۲)$. پس $f_\alpha(g_۱)=f_\alpha(g_۲)$. لذا f_α خوش تعریف است.

به ازای هر $g\in G$، $g^{-۱}\alpha(g)\in Z(G)$، بنابراین برای هر $g_۱,g_۲\in G$،

$$f_\alpha(g_۱g_۲)=(g_۱g_۲)^{-۱}\alpha(g_۱g_۲)=g_۲^{-۱}(g_۱^{-۱}\alpha(g_۱))\alpha(g_۲)$$
$$=g_۱^{-۱}\alpha(g_۱)g_۲^{-۱}\alpha(g_۲)=f_\alpha(g_۱).f_\alpha(g_۲).$$

چون $Aut_c(G)$، G' را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارد، به ازای هر $x \in G'$، $f_\alpha(x) = x^{-1}\alpha(x) = x^{-1}.x = 1$، بنابراین $G' \leq kerf_\alpha$. لذا همریختی f_α، همریختی $\bar{f}_\alpha : \frac{G}{G'} \to Z(G)$ را با ضابطه $\bar{f}_\alpha(gG') = g^{-1}\alpha(g)$ القا می‌کند.

حال $\theta : Aut_c(G) \to Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))$ را با ضابطه‌ی $\alpha \to \bar{f}_\alpha$ در نظر می‌گیریم.

به ازای هر $g \in G$، $\alpha_1(g) = \alpha_2(g)$ اگر و تنها اگر $g^{-1}\alpha_1(g) = g^{-1}\alpha_2(g)$. پس $\bar{f}_{\alpha_1}(gG') = \bar{f}_{\alpha_2}(gG')$ اگر و تنها اگر $\theta(\alpha_1) = \theta(\alpha_2)$. لذا θ خوش تعریف و یک‌به‌یک است.

فرض کنید $f : \frac{G}{G'} \to Z(G)$ یک همریختی دلخواه باشد و $\alpha : G \to G$ را با ضابطه $\alpha(x) = xf(xG')$ تعریف می‌کنیم. به وضوح α خوش تعریف است. همچنین به ازای $x, y \in G$،

$$\alpha(xy) = (xy)f(xyG') = xyf(xG')f(yG')$$
$$= xf(xG')yf(yG') = \alpha(x)\alpha(y)$$

لذا α یک درونریختی است. به برهان خلف فرض می‌کنیم α خودریختی نباشد. چون G متناهی است، لذا G در هر دو شرط زنجیر صدق می‌کند. همچنین به ازای $x \in G$، $x^{-1}\alpha(x) = f(xG') \in Z(G)$، پس α یک درونریختی نرمال است. از طرف دیگر

$$\alpha^2(x) = \alpha(\alpha(x)) = \alpha(xf(xG')) = xf(xG')f(xf(x)G')$$

و به طور مشابه $\alpha^t(x) = xa_{t,x}$ که در آن $a_{t,x} \in Z(G)$. اگر α پوچ‌توان باشد در این صورت $a_{t,x} = x^{-1}$، از آنجا که G ناآبلی و x دلخواه است به تناقص می رسیم، پس α پوچ‌توان نیست. لذا بنا به لم فیتینگ $G \cong \mathrm{Im}\alpha^k \times \ker\alpha^k$. چون $\alpha^k(x) = xf(u)$ به ازای $x \in \ker\alpha^k$، $\alpha^k(x) = xf(u) = 1$. ازاین‌رو $x^{-1} = f(u) \in Z(G)$ و لذا $x \in Z(G)$. پس $\ker\alpha^k \leq Z(G)$، دراین‌صورت $\ker\alpha^k$ گروه آبلی نابدیهی است، بنابراین با ناآبلی محض بودن G در تناقص است. درنتیجه α یک خودریختی است. چون α یک خودریختی نرمال است، پس α خودریختی مرکزی است. بنابراین $\alpha \in Aut_c(G)$. حال با توجه به ضابطه $\alpha(x) = xf(xG')$، $x^{-1}\alpha(x) = f(xG')$.

دراین‌صورت به ازای هر $x \in G$، $\bar{f}_\alpha(xG') = f(xG')$. لذا $\bar{f}_\alpha = f$. بـنابرایـن $\theta(\alpha) = f$. پـس θ یـک تناظـر یک‌به‌یک است. ■

۲-۱-۳ لم. فرض می کنیم A، C و U گروه‌های آبلی باشند، دراین‌صورت

(۱) $Hom(A \times C, U) \cong Hom(A,U) \times Hom(C,U)$.

(۲) اگر $d = \gcd(m,n)$، آنگاه $Hom(C_m, C_n) \cong C_d$.

(۳) اگـر B یـک زیرگـــروه از A بـاشـــد آنگـــاه $Hom(B,U)$ بـــا زیـرگـروهـــی از $Hom(A,U)$ یـکریخـت است.

(۴) $Hom(A,U) \cong Hom(U,A)$.

بــرهان: (۱) به [۱۷، قضیه ۴-۷] رجوع کنید.
(۲) بنا به قضیه ۱-۱-۲

$$Hom(C_m, C_n) \cong C_n[m] = \{\bar{r} \in C_n ; m\bar{r} = \cdot\} = \{\bar{r} \in C_n ; n \mid mr\}$$

$$= \{\bar{r} \in C_n ; \frac{n}{d} \mid \frac{m}{d} r\} = \{\bar{r} \in C_n ; \frac{n}{d} \mid r\}$$
$$= \{\frac{\bar{n}}{d}, \frac{۲\bar{n}}{d}, \ldots, \frac{d\bar{n}}{d}\} = < \frac{n}{d} >$$

از آنـجا کـه هـر گـروه دوری از مـرتبـه d بـا C_d یکریخـت اسـت، بـنابـرایـن $Hom(C_m, C_n) \cong C_d$.

(3) چـون A، B و U آبلـی انـد و $B \le A$، لذا $A \cong C_{p^{\alpha_۱}} \times \cdots \times C_{p^{\alpha_s}}$ و $B \cong C_{p^{\beta_۱}} \times \cdots \times C_{p^{\beta_s}}$ به طوری که به ازای هر i، $۱ \le i \le s$، $\alpha_i \ge \beta_i$. $U \cong C_{p^{\tau_۱}} \times \cdots \times C_{p^{\tau_t}}$. بنابراین

$$\begin{aligned}
Hom(A,U) &\cong Hom(C_{p^{\alpha_۱}} \times \cdots \times C_{p^{\alpha_s}}, C_{p^{\tau_۱}} \times \cdots \times C_{p^{\tau_t}}) \\
&\cong Hom(C_{p^{\alpha_۱}}, C_{p^{\tau_۱}}) \times \cdots \times Hom(C_{p^{\alpha_s}}, C_{p^{\tau_۱}}) \times \cdots \times Hom(C_{p^{\alpha_s}}, C_{p^{\tau_t}}) \\
&\ge Hom(C_{p^{\beta_۱}}, C_{p^{\tau_۱}}) \times \cdots \times Hom(C_{p^{\beta_s}}, C_{p^{\tau_۱}}) \times \cdots \times Hom(C_{p^{\beta_s}}, C_{p^{\tau_t}}) \\
&\cong Hom(B,U).
\end{aligned}$$

(۴) اگر $d=gcd(m,n)$ آنگاه بنا به قسمت (۲) همین قضیه $Hom(C_m,C_n)\cong C_d$ و همچنین $Hom(C_n,C_m)\cong C_d$. بنابراین $Hom(C_m,C_n)\cong Hom(C_n,C_m)\cong C_d$.

چون A و U آبلی اند، لذا

$$A\cong C_{p^{m_1}}\times C_{p^{m_2}}\times\cdots\times C_{p^{m_k}}\,;m_1\le m_2\le\cdots\le m_k$$
$$B\cong C_{p^{n_1}}\times C_{p^{n_2}}\times\cdots\times C_{p^{n_t}}\,;n_1\le n_2\le\cdots\le n_t$$

بنا به قسمت (۱) همین لم و آنچه در بالا گفته شده داریم

$$\begin{aligned}Hom(A,U)&\cong Hom(C_{p^{m_1}}\times\cdots\times C_{p^{m_k}},C_{p^{n_1}}\times\cdots\times C_{p^{n_t}})\\&\cong Hom(C_{p^{m_1}},C_{p^{n_1}})\times\cdots\times Hom(C_{p^{m_1}},C_{p^{n_t}})\times\cdots\times Hom(C_{p^{m_k}},C_{p^{n_1}})\times\cdots\times Hom(C_{p^{m_k}},C_{p^{n_t}})\\&\cong Hom(C_{p^{n_1}},C_{p^{m_1}})\times\cdots\times Hom(C_{p^{n_t}},C_{p^{m_1}})\times\cdots\times Hom(C_{p^{n_1}},C_{p^{m_k}})\times\cdots\times Hom(C_{p^{n_t}},C_{p^{m_k}})\\&\cong Hom(C_{p^{n_1}}\times\cdots\times C_{p^{n_t}},C_{p^{m_1}}\times\cdots\times C_{p^{m_k}})\cong Hom(U,A)\end{aligned}$$

لذا اثبات به اتمام می‌رسد. ■

۲-۱-۴ لم. فرض کنید A و U، p-گروه‌های آبلی نابدیهی باشند. اگر B یک زیرگروه سره از A و V یک زیرگروه سره از U باشد، دراین‌صورت $Hom(B,V)$ با زیرگروه سره‌ای از $Hom(A,U)$ یکریخت است. علاوه بر این اگر $p^k=\min\{\frac{|A|}{|B|},\frac{|U|}{|V|}\}$ آنگاه p^k، عدد $\frac{|Hom(A,\mathrm{U})|}{|Hom(B,V)|}$ را عاد می‌کند.

برهان: در ابتدا فرض می‌کنیم که B از اندیس p در A و V نیز از اندیس p در U باشد.

اگر B یک عامل مستقیم از A باشد آنگاه بنا به لم ۲-۱-۳(۳) حکم برقرار است. به طور مشابه اگر V یک عامل مستقیم از U باشد نیز چنین است. بنابراین برای بعضی از i و S، $A\cong S\times C_{p^{i+1}}$ و $B\cong S\times C_{p^i}$. و برای بعضی از j و T، $U\cong T\times C_{p^{j+1}}$ و $V\cong T\times C_{p^j}$. بنابراین

$$\begin{aligned}Hom(A,U)&\cong Hom(S\times C_{p^{i+1}},T\times C_{p^{j+1}})\\&\cong Hom(S,T)\times Hom(S,C_{p^{j+1}})\times Hom(C_{p^{i+1}},T)\times Hom(C_{p^{i+1}},C_{p^{j+1}})\end{aligned}$$

$$Hom(B,V)\cong Hom(S\times C_{p^i},T\times C_{p^j})$$

$$\cong Hom(S,T)\times Hom(S,C_{p^j})\times Hom(C_{p^i},T)\times Hom(C_{p^i},C_{p^j})$$

از مقایســـه تمـــام عوامـل مـی‌بینـیم کـــه تمـــام عاملهـای $Hom(B,V)$ زیرگـروه‌هـایی از عوامـل $Hom(A,U)$ هستند. اما عامل آخر در $Hom(B,V)$ یک زیـرگـروه سـره یکـریخت از انـدیس p در عامل آخـر $Hom(A,U)$ اسـت، زیـرا با فرض $i\geq j$،

$$[Hom(C_{p^{i+1}},C_{p^{j+1}}):Hom(C_{p^i},C_{p^j})]=\frac{|Hom(C_{p^{i+1}},C_{p^{j+1}})|}{|Hom(C_{p^i},C_{p^j})|}=\frac{(p^{i+1},p^{j+1})}{(p^i,p^j)}=\frac{p^{i+1}}{p^i}=p$$

حـال بـه اسـتقرا روی m که $p^m=\min(\frac{|A|}{|B|},\frac{|U|}{|V|})$، حکـم را ثـابت می‌کنیم.

گفتیم اگر $m=1$ باشد، حکم برقرار است. حال فرض می‌کنیم حکم برای p^{k-1} نیز برقرار باشد.

اگـر $p^k=\min\{\frac{|A|}{|B|},\frac{|U|}{|V|}\}$ آنگـاه بدون آنکه به کلیت اثبات خللیوارد شـود فـرض مـی‌کنـیم $p^k=\frac{|A|}{|B|}$ است. دراین‌صورت دو حالت ممکن است رخ دهد.

حالت (a): $A\cong S\times C_{p^{i+k}}$، $B\cong S\times C_{p^i}$، $U\cong T\times C_{p^{j+r}}$ و $V\cong T\times C_{p^{i+s}}$ کـه در آن $r-s\geq k$ و $r\geq s$، که سه حالت ممکن است رخ دهد.

حالت اول: اگر $r\geq k$ و $s\geq 0$ آنگاه

$$p^k=\frac{|C_{p^{i+k}}|}{|C_{p^i}|}=\frac{|Hom(C_{p^{i+k}},C_{p^{i+r}})|}{|Hom(C_{p^i},C_{p^{i+s}})|}$$. بنابراین $p^k\,\Big|\,\frac{|Hom(A,U)|}{|Hom(B,V)|}$.

حالـت دوم: اگـر $r\geq k$، $s\leq 0$ و $|s|\leq i$ آنگـاه $\frac{|Hom(C_{p^{i+k}},C_{p^{i+r}})|}{|Hom(C_{p^i},C_{p^{i+s}})|}=\frac{|C_{p^{i+k}}|}{|C_{p^{i+s}}|}=\frac{p^{i+k}}{p^{i+s}}=p^{k-s}$. چـون $s\leq 0$، بنابراین $p^k\,|\,p^{k-s}$. پس $p^k\,\Big|\,\frac{|Hom(A,U)|}{|Hom(B,V)|}$.

حالت سوم : اگر $k \geq r$، $s \leq ۰$ و $|s| \leq i$ آنگاه $p^{r-s} = \frac{p^{i+r}}{p^{i+s}} = \frac{|Hom(C_{p^{i+k}}, C_{p^{i+r}})|}{|Hom(C_{p^i}, C_{p^{i+s}})|}$. چون $r-s \geq k$ است، پس $p^k \,|\, p^{r-s}$. بنابراین $p^k \,\Big|\, \frac{|Hom(A,U)|}{|Hom(B,V)|}$.

حالت (b): $A \cong A_۱ \times A_۲$ و $B \cong B_۱ \times B_۲$ که در آن $p^{k_1} = \frac{|A_1|}{|B_1|}$، $p^{k_2} = \frac{|A_2|}{|B_2|}$ و $p^{k_۱} \times p^{k_۲} = p^k$.

لذا $\frac{|Hom(A,U)|}{|Hom(B,V)|} = \frac{|Hom(A_۱,U)|}{|Hom(B_۱,V)|} \times \frac{|Hom(A_۲,U)|}{|Hom(B_۲,V)|}$. بنا به فرض استقرا $p^{k_۱} \,\Big|\, \frac{|Hom(A_۱,U)|}{|Hom(B_۱,V)|}$ و $p^{k_۲} \,\Big|\, \frac{|Hom(A_۲,U)|}{|Hom(B_۲,V)|}$، در نتیجه $p^k \,\Big|\, \frac{|Hom(A,U)|}{|Hom(B,V)|}$. ■

۲-۱-۵ لم. p-گروه آبلی K از نما p^c و گروه دوری A که مرتبه آن قابل قسمت بر p^c است را در نظر بگیرید، دراین‌صورت $Hom(K,A)$ با K یکریخت است.

برهان: چون K آبلی است، لذا $K \cong K_۱ \times K_۲ \times \cdots \times K_t$ که در آن برای هر i، $۱ \leq i \leq t$، K_i دوری است. بنابراین

$$Hom(K,A) \cong Hom(K_۱ \times K_۲ \times \cdots \times K_t, A) \cong Hom(K_۱, A) \times Hom(K_۲, A) \times \cdots \times Hom(K_t, A)$$

چون مرتبه هر زیرگروه K مرتبه A را عاد می کند و A و K_iها دوری اند لذا بنا به قضیه ۲-۱-۳(۲)،

$$Hom(K,A) \cong K_۱ \times K_۲ \times \cdots \times K_t \cong K . ■$$

۲-۱-۶ لم. اگر K یک p-گروه آبلی از رتبه r و A دوری از مرتبه p باشد آنگاه $Hom(K,A)$ با $(C_p)^r$ یکریخت است.

برهان: چون K آبلی است، لذا $K \cong K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_r$، که در آن برای هر i، $1 \le i \le r$، K_i دوری است. بنابراین

$$Hom(K,A) \cong Hom(K_1 \times K_2 \times \cdots \times K_r, A) \cong Hom(K_1,A) \times Hom(K_2,A) \times \cdots \times Hom(K_r,A)$$

$$\cong C_p \times C_p \times \cdots \times C_p \cong (C_p)^r \quad . \blacksquare$$

۲-۱-۷ لم. فرض کنید $G = A \times N$ یک p-گروه ناآبلی باشد که در آن A آبلی نابدیهی و N ناآبلی محض است. اگر $Inn(G) \le Aut_c(G)$ آنگاه $|Aut_c(G) : Inn(G)| > p^2$.

برهان: اگر $\alpha \in Hom(N,A)$ آنگاه نگاشت $\alpha^* : G \to G$ را با ضابطه $\alpha^*(a,n) = (a\alpha(n), n)$ درنظر می‌گیریم، ادعا می‌کنیم α^* یک خودریختی مرکزی روی G است.

به ازای $a_1, a_2 \in A$ و $n_1, n_2 \in N$، $(a_1, n_1) = (a_2, n_2)$ اگر و تنها اگر $(a_1\alpha(n_1), n_1) = (a_2\alpha(n_2), n_2)$. به عبارت دیگر $(a_1, n_1) = (a_2, n_2)$ اگر و تنها اگر $\alpha^*(a_1, n_1) = \alpha^*(a_2, n_2)$. دراین‌صورت خوش تعریفی و یک‌به‌یک بودن α^* اثبات می‌شود.

به ازای $a_1, a_2 \in A$ و $n_1, n_2 \in N$،

$$\alpha^*(a_1,n_1)\alpha^*(a_2,n_2) = (a_1\alpha(n_1), n_1).(a_2\alpha(n_2), n_2) = (a_1\alpha(n_1).a_2\alpha(n_2), n_1n_2)$$

$$= (a_1a_2\alpha(n_1)\alpha(n_2), n_1n_2) = (a_1a_2\alpha(n_1n_2), n_1n_2)$$
$$= \alpha^*(a_1a_2, n_1n_2)$$

بنابراین α^* یک همریختی است.

حال به ازای هر $(x,y) \in G$، قرار دهید $a = x\alpha^{-1}(y)$ و $n = y$، دراین‌صورت $\alpha^*(a,n) = \alpha^*(x\alpha(y^{-1}), y) = (x\alpha(y^{-1})\alpha(y), y) = (x,y)$. لذا α^* پوشاست. بنابراین α^* یک خودریختی می‌باشد.

همچنین به ازای هر $(a_1,n_1),(a_2,n_2) \in G$،

$$(a,n)^{-1}\alpha^*(a,n) = (a^{-1}, n^{-1})(a\alpha(n), n) = (\alpha(n), 1) \in Z(G)$$

پس α^* خودریختی مرکزی است.

به علاوه اگر $a=\alpha(n)\neq ۱$ آنگاه بعضی از عناصر به صورت $(۱,n)$ در N وجود دارند که تحت خودریختی α عنصری از N نیستند، چون به ازای $a=\alpha(n)\neq ۱$، $\alpha^*(۱,n)=(\alpha(n),n)=(a,n)\notin N$. لذا α^* داخلی نیست.

از طرفی چون N، p-گروه ناآبلی محض است، لذا طبق قضیه ۱-۳-۲۱، $\frac{N}{N'}$ دوری نیست ولی آبلی است، بنابراین از آنجا که گروه متناهی است $\frac{N}{N'}\cong C_{p^{a_1}}\times C_{p^{a_2}}\times\cdots\times C_{p^{a_n}}$ که در آن $n\geq ۲$ و به ازای هر i، $1\leq i\leq n$، $a_i\geq 1$.
از طرف دیگر A، p- گروه آبلی نابدیهی است، لذا بنا لم ۲-۱-۳(۱) و (۲) داریم،

$$|Hom(N,A)|=\left|Hom(\frac{N}{N'},A)\right|\geq\left|\prod_i Hom(C_p,C_p)\right|=\left|\prod_i C_p\right|\geq p^۲$$

بنابراین حداقل p^2 انتخاب برای α و α^* وجود دارد. اگر تمام این انتخاب‌ها را با مجموعه B نشان دهیم آنگاه بنا به قضیه دوم یکریختی $\left|\frac{BInn(G)}{Inn(G)}\right|=\left|\frac{B}{B\bigcap Inn(G)}\right|\geq p^۲$.

به طور مشابه اگر $\beta\in Hom\left(A,Z(N)\right)$ آنگاه نگاشت $\beta^*:G\to G$ را با ضابطه $\beta^*(a,n)=(a,n\beta(a))$ درنظر می‌گیریم، ادعا می‌کنیم β^* یک خودریختی مرکزی است.

به ازای $a_۱,a_۲\in A$ و $n_۱,n_۲\in N$، $(a_۱,n_۱)=(a_۲,n_۲)$ اگر و تنها اگر $(a_۱,n_۱\beta(a_۱))=(a_۲,n_۲\beta(a_۲))$. به عبارت دیگر $(a_۱,n_۱)=(a_۲,n_۲)$ اگر و تنها اگر $\beta^*(a_۱,n_۱)=\beta^*(a_۲,n_۲)$. دراین‌صورت خوش تعریفی و یک‌به‌یک بودن β^* اثبات می‌شود.

به ازای هر $a_۱,a_۲\in A$ و $n_۱,n_۲\in N$،

$$\begin{aligned}\beta^*(a_۱,n_۱)\beta^*(a_۲,n_۲)&=(a_۱,n_۱\beta(a_۱)).(a_۲,n_۲\beta(a_۲))=(a_۱a_۲,n_۱\beta(a_۱)n_۲\beta(a_۲))\\&=(a_۱a_۲,n_۱n_۲\beta(a_۱)\beta(a_۲))=(a_۱a_۲,n_۱n_۲\beta(a_۱a_۲))\\&=\beta^*(a_۱a_۲,n_۱n_۲)\end{aligned}$$

بنابراین β^* یک همریختی است.

حال به ازای هر $(x,y)\in G$، قرار دهید $a=x$ و $n=y\beta(x^{-1})$، دراین‌صورت $\beta^*(a,n)=\beta^*(x,y\beta(x^{-1}))=(x,y\beta(x^{-1})\beta(x))=(x,y)$. بنابراین β^* پوشاست. ازاین‌رو β^* یک خودریختی است. همچنین به ازای هر $(a_1,n_1),(a_2,n_2)\in G$،

$$(a,n)^{-1}\beta^*(a,n)=(a^{-1},n^{-1})(a,n\beta(a))=(1,\beta(a))\in Z(G)$$

بنابراین β^* خودریختی مرکزی است.

به علاوه اگر $n=\beta(a)\neq 1$ آنگاه بعضی از عناصر $(a,1)$ در A وجود دارند که تحت خودریختی β لزوما عنصری از A نیستند، زیرا به ازای $n=\beta(a)\neq 1$، $\beta^*(a,1)=(a,\beta(a))=(a,n)\notin A$. بنابراین β^* داخلی نیست.

چون A و N، p-گروه‌های نابدیهی‌اند لذا بنا به لم ۲-۱-۳ حداقل p انتخاب مجزا برای β وجود دارد. همچنین $|Hom(A,Z(N))|\geq p$، لذا حداقل p انتخاب مجزا برای β^* وجود دارد. اگر تمام این انتخاب‌ها را با مجموعه C نشان دهیم آنگاه با استفاده از قضیه دوم یکریختی نتیجه می‌گیریم

$$\left|\frac{CInn(G)}{Inn(G)}\right|=\left|\frac{C}{C\bigcap Inn(G)}\right|\geq p.$$

حال کافی است نشان دهیم مجموعه B با مجموعه C اشتراک نابدیهی دارد. اگر به ازای هر $(a,n)\in G$، $\beta^*(a,n)=\alpha^* i_g(a,n)$، که در آن $g=(x,y)\in G$ آنگاه

$$(a,n\beta(a))=\alpha^*(a,n)^{(x,y)}=\alpha^*(a^x,n^y)=(a^x\alpha(n^y),\alpha(n^y))$$

دراین‌صورت به ازای هر عنصر از گروه G، $a^x\alpha(n^y)=a$ و $n\beta(a)=n^y$، لذا به ازای عنصر $(a,1)\in G$، $a^x=a$ و به ازای $(1,n)\in G$، $n=n^y$. در نتیجه $\alpha(n^y)=1$ و $\beta(a)=1$، ازاین‌رو $\alpha^*=1$ و $\beta^*=1$. ■

۲-۱-۸ لم. فرض می‌کنیم $Inn(G)\leq Aut_c(G)$ و به ازای عدد طبیعی n، $|Aut_c(G):Inn(G)|=p^n$، که در آن p یک عدد اول فرد است. دراین‌صورت G ناآبلی محض می‌باشد.

برهان: (فرض خلف) فرض می‌کنیم G ناآبلی محض نباشد دراین‌صورت $G=A\times N$، که در آن A آبلی نابدیهی و N ناآبلی محض است. اینک فرض کنید $\varphi\in Aut(A)$. $\bar{\varphi}:G\to G$ را با ضابطه $\bar{\varphi}(a,n)=(\varphi(a),n)$ تعریف می‌کنیم. ادعا می‌کنیم $\bar{\varphi}\in Aut_c(G)$.

از آنجا که φ یک خودریختی است، خوش تعریفی و یک به یک بودن $\bar{\varphi}$ به وضوح دیده می‌شود.

حال به ازای هر $a,a'\in A$ و $n,n'\in N$،

$$\bar{\varphi}(a,n)\bar{\varphi}(a',n')=(\varphi(a),n).(\varphi(a'),n')=(\varphi(a)\varphi(a'),nn')$$

$$=(\varphi((aa'),nn')=\bar{\varphi}(aa',nn')$$

بنابراین $\bar{\varphi}$ همریختی است.

همچنین به ازای هر $(x,y)\in G$، وجود دارند $a=\varphi^{-1}(x)$ و $n=y$ به طوری که $\bar{\varphi}(a,n)=(\varphi(a),n)=(\varphi(\varphi^{-1}(x)),y)=(x,y)$، پس $\bar{\varphi}$ پوشاست.

$$Ker\bar{\varphi}=\{(a,n)\in G=A\times N\,|\bar{\varphi}(a,n)=1_G\}=\{(a,n)\in G\,|(\varphi(a),n)=(1,1)\}$$

$$=\{(a,n)\in G|\varphi(a)=1,n=1\}=\{(a,n)\in G|a=1,n=1\}=\{(1,1)\}$$

بنابراین $\bar{\varphi}$ یک‌به‌یک است و لذا $\bar{\varphi}$ یک خودریختی است.

همچنین به ازای هر $(a,n)\in G$،

$$(a,n)^{-1}\bar{\varphi}(a,n)=(a^{-1},n^{-1})(\varphi(a),n)=(a^{-1}\varphi(a),1)\in Z(G)$$

لذا $\bar{\varphi}\in Aut_c(G)$. پس $Aut(A)\le Aut_c(G)$.

از طرف دیگر چون A آبلی است، پس $A\cong C_{p^{\alpha_1}}\times\cdots\times C_{p^{\alpha_n}}$. بنا به لم ۱-۱-۴ و قضیه ۱-۲-۱۲، $p-1\,||Aut(A)|$. از طرفی نشان دادیم $Aut(A)\le Aut_c(G)$، لذا $|Aut(A)|\,\big|\,|Aut_c(G)|$. در نتیجه $p-1\,\big|\,|Aut_c(G)|$. طبق فرض $|Aut_c(G):Inn(G)|=p^n$، پس $|Aut_c(G)|=p^n\,|Inn(G)|$.

به علاوه $|Inn(G)|=\left|\frac{G}{Z(G)}\right|=p^{\alpha}$، بنابراین $|Aut_c(G)|=p^n.p^{\alpha}=p^{n+\alpha}$. پس $p-1\,|\,p^{n+\alpha}$ که یک تناقض است، لذا G ناآبلی محض می‌باشد. ■

۲-۱-۹ لم. در گروه ناآبلی G از رده پوچ‌توانی دو، رتبه $\frac{G}{Z(G)}$ حداقل دو است، همچنین اگر رتبه $\frac{G}{Z(G)}$ دو باشد آنگاه رتبه G' یک است.

برهان: فرض کنید رتبه‌های $\frac{G}{Z(G)}$ و G' به ترتیب r و d باشند.

اگر $r=1$ آنگاه $\frac{G}{Z(G)}$ دوری است و لذا G آبلی می باشد که یک تناقض است.پس $r \geq 2$. حال اگر $r=۲$، آنگاه به ازای $x,y \in G$، $\frac{G}{Z(G)}=<xZ(G),yZ(G)>$. پس به ازای هر $a,b \in G$ که $a=x^i y^j z$، $b=x^{i'} y^{j'} z'$ و $z,z' \in Z(G)$، $[a,b]=[x^i y^j, x^{i'} y^{j'}]=[x^{i}, x^{i'} y^{j'}][y^j, x^{i'} y^{j'}]=[x,y]^l$. بنابراین $G'=<[x,y]>$ و $d=۱$. ■

۲-۱-۱۰ نتیجه. اگر G، p-گروه ناآبلی محض پوچ‌توان از رده دو باشد آنگاه نامعادلات زیر را داریم،

$$\left|Inn(G)\right|=\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \leq \left|Hom(\frac{G}{Z(G)},G')\right| \leq \left|Hom(\frac{G}{Z(G)},Z(G))\right|$$
$$\leq \left|Hom(\frac{G}{G'},Z(G))\right|=\left|Aut_c(G)\right| .$$

برهان: . چون G پوچ‌توان از رده دو می‌باشد و $\frac{G}{G'}$ آبلی است، لذا $\frac{G}{Z(G)} \cong \frac{\frac{G}{G'}}{\frac{Z(G)}{G'}}$. بنابراین $\frac{G}{Z(G)}$ با زیرگروهی از $\frac{G}{G'}$ یکریخت است، (در حد یکریختی $\frac{G}{Z(G)} \leq \frac{G}{G'}$).

از قضیه۱-۱-۵ تساوی اول بدیهی است، نامساوی اول از لم ۲-۱-۵ بدست می‌آید. همچنین نامساوی دوم و سوم با استفاده از لم ۲-۱-۳ حاصل می‌شود، بالاخره آخرین تساوی را از لم ۲-۱-۱داریم، بدین صورت اثبات کامل می‌شود. ■

برای راحتی کار ما علامت‌هایی که قبلاً به آن اشاره کردیم را ثابت در نظر می‌گیریم، G را p-گروه ناآبلی محض پوچ‌توان از رده دو قرار دهید و فرض کنید $\frac{G}{Z(G)}$ و G' از نما p^c و به ترتیب از رتبه‌های r و d باشند. همچنین $Z(G)$ را از رتبه z (از نما حداقل p^c) قرار دهید.(❋)

۲-۱-۱۱ لم. با مفروضات(❋) داریم،

(۱) $$\left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, G')\right| \geq \left|\frac{G}{Z(G)}\right| p^{r(d-1)}.$$

(۲) $$\left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))\right| \geq \left|\frac{G}{Z(G)}\right| p^{r(z-1)}.$$

برهان: (۱) بنا به لم ۲-۱-۱، $\exp(G') = \exp(\frac{G}{Z(G)}) = p^c$. فرض کنید $x \in G'$ که $o(x) = p^c$. چون G' آبلی است لذا $G' = <x> \times K$ که در آن K آبلی می‌باشد. همچنین چون $\frac{G}{Z(G)}$، p-گروه آبلی از نما p^c است و $<x>$ دوری از مرتبه p^c می‌باشد، بنا به لم ۲-۱-۵ داریم $Hom(\frac{G}{Z(G)}, <x>) \cong \frac{G}{Z(G)}$. پس

$$Hom(\frac{G}{Z(G)}, G') \cong Hom(\frac{G}{Z(G)}, <x> \times K) \cong Hom(\frac{G}{Z(G)}, <x>) \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, K)$$

$$\cong \frac{G}{Z(G)} \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, K)$$

چون رتبه G'، d است، بنابراین رتبه K، $d-1$ خواهد بود. از طرفی K آبلی است، لذا $K \cong C_{p^{\alpha_1}} \times \cdots \times C_{p^{\alpha_{d-1}}}$. حال

$$Hom(\frac{G}{Z(G)},K)\cong Hom(\frac{G}{Z(G)},C_{p^{\alpha_1}}\times\cdots\times C_{p^{\alpha_{d-1}}})\cong Hom(\frac{G}{Z(G)},C_{p^{\alpha_1}})\times\cdots\times Hom(\frac{G}{Z(G)},C_{p^{\alpha_{d-1}}})$$

بنابراین

$$\left|Hom(\frac{G}{Z(G)},G')\right|=\left|\frac{G}{Z(G)}\right|\left|Hom(\frac{G}{Z(G)},C_{p^{\alpha_1}})\times\cdots\times Hom(\frac{G}{Z(G)},C_{p^{\alpha_{d-1}}})\right|$$

$$\geq\left|\frac{G}{Z(G)}\right|\left|Hom(\frac{G}{Z(G)},C_p)\right|\ldots\left|Hom(\frac{G}{Z(G)},C_p)\right|$$

چون $\frac{G}{Z(G)}$ یک p-گروه آبلی از رتبه r و C_p یک گروه دوری از مرتبه p است، لذا بنا به لم ۲-۱-۶، $Hom(\frac{G}{Z(G)},C_p)\cong(C_p)^r$. بنابراین $\left|Hom(\frac{G}{Z(G)},G')\right|\geq\left|\frac{G}{Z(G)}\right|.\left|(C_p)^r\right|\ldots\left|(C_p)^r\right|$. پس $\left|Hom(\frac{G}{Z(G)},G')\right|\geq\left|\frac{G}{Z(G)}\right|.p^{r(d-1)}$.

(۲) بنا به لم ۲-۱-۱، $\exp(G')=p^c$، بنابراین $\exp(Z(G))=p^{c+\alpha}$ که در آن $\alpha\geq 0$. $y\in Z(G)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $o(y)=p^{c+\alpha}$. بنابراین $Z(G)=<y>\times K_1$ که در آن K_1 زیرگروه آبلی $Z(G)$ است. چون $Z(G)$ دارای رتبه z است، بنابراین رتبه K_1، $z-1$ است. لذا $K_1\cong C_{p^{m_1}}\times\cdots\times C_{p^{m_{z-1}}}$.

از طرف دیگر $\frac{G}{Z(G)}$ یک p-گروه آبلی از نما p^c و رتبه r است. همچنین $<y>$ دوری و مرتبه آن $p^{c+\alpha}$ است که قابل قسمت بر p^c می‌باشد، لذا بنا به لم ۲-۱-۵، $Hom(\frac{G}{Z(G)},<y>)\cong\frac{G}{Z(G)}$.

بنابراین

$$Hom(\frac{G}{Z(G)},Z(G))\cong Hom(\frac{G}{Z(G)},<y>\times K_1)\cong Hom(\frac{G}{Z(G)},<y>)\times Hom(\frac{G}{Z(G)},K_1)$$

$$\cong \frac{G}{Z(G)} \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, K_1) \cong \frac{G}{Z(G)} \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, C_{p^{m_1}} \times \cdots \times C_{p^{m_{z-1}}})$$
$$\cong \frac{G}{Z(G)} \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, C_{p^{m_1}}) \times \cdots \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, C_{p^{m_{z-1}}})$$
$$\geq \frac{G}{Z(G)} \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, C_p) \times \cdots \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, C_p)$$
$$\cong \frac{G}{Z(G)} \times (C_p)^r \times \cdots \times (C_p)^r$$

پس $\left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))\right| \geq \left|\frac{G}{Z(G)}\right| p^{r(z-1)}$.■

۲-۱-۱۲ لم. با مفروضات(❋) داریم، $\left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| \geq \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, G')\right| \left|Z(G):G'\right|$.

برهان: در لم ۲-۱-۴، $A := \frac{G}{G'}$، $B := \frac{G}{Z(G)}$، $U := Z(G)$ و $V := G'$. بنابراین $\left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| \geq \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, G')\right| . p^m$، که در آن

$$p^m = \min(\frac{\frac{|G|}{|G'|}}{\frac{|G|}{|Z(G)|}}, \frac{|Z(G)|}{|G'|}) = \min(\frac{|Z(G)|}{|G'|}, \frac{|Z(G)|}{|G'|}) = \frac{|Z(G)|}{|G'|}.$$

پس $p^m = \left|Z(G):G'\right|$. لذا $\left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| \geq \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, G')\right| \left|Z(G):G'\right|$.■

۲-۱-۱۳ لم. با مفروضات(❋) داریم،

(۱) $\left|Aut_c(G):Inn(G)\right| \geq \left|Z(G):G'\right| p^{r(d-1)}$.

(۲) $\left|Aut_c(G):Inn(G)\right| \geq p^{r(z-1)}$.

برهان: (۱) از لم‌های ۲-۱-۲، ۲-۱-۱۱ و ۲-۱-۱۲ داریم

$$\left|Aut_c(G)\right| = \left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| \geq \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, G')\right| \left|Z(G):G'\right| \geq \left|\frac{G}{Z(G)}\right| . p^{r(d-1)} \left|Z(G):G'\right|$$

بنابراین $\left|Z(G):G'\right| . p^{r(d-1)} = \dfrac{\left|\frac{G}{Z(G)}\right| \left|Z(G):G'\right| . p^{r(d-1)}}{\left|\frac{G}{Z(G)}\right|} \leq \left|Aut_c(G):Inn(G)\right|$.

(۲) از لم‌های ۲-۱-۲ و ۲-۱-۱۱ داریم

$$\left|Aut_c(G)\right| = \left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| \geq \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))\right| \geq \left|\frac{G}{Z(G)}\right| p^{r(z-1)}$$

بنابراین $p^{r(z-1)} = \dfrac{\left|\frac{G}{Z(G)}\right| p^{r(z-1)}}{\left|\frac{G}{Z(G)}\right|} \leq \left|Aut_c(G):Inn(G)\right|$. ■

۲-۲ نتایج اصلی

۲-۲-۱ قضیه. اگر G یک p-گروه از رده دو باشد به طوری که $Z(G)$ دوری و $|Z(G):G'|=p^e$، آنگاه $|Aut_c(G):Inn(G)|=p^e$.

برهان: چون $Z(G)$ دوری است لذا G ناآبلی محض می‌باشد، درغیر این صورت $G=A\times K$ که در آن A **یک** گروه آبلی و K یک گروه ناآبلی محض است، پس $Z(G)=A\times Z(K)$. از طرفی G یک p-گروه است، بنابراین A و $Z(K)$، p-گروه‌اند.

چون $Z(G)$ دوری است، لذا باید A و $Z(K)$ دوری و مرتبه آنها نسبت به هم اول باشد که تناقض است. پس بنا به لم ۲-۱-۲، $|Aut_c(G)|=\left|Hom(\frac{G}{G'},Z(G))\right|$.

همچنین G گروه پوچتوان از رده دو می‌باشد، لذا بنا به لم ۲-۱-۱، $\exp(\frac{G}{Z(G)})=\exp(G')=p^c$. به علاوه $|Z(G)|=|G'||Z(G):G'|$، که از دوری بودن $Z(G)$ داریم $\exp(Z(G))=\exp(G')|Z(G):G'|$. پس $\exp(Z(G))=p^{c+e}$. چون $\exp(\frac{G}{Z(G)})=p^c$، به ازای هر $g\in G$، $z\in Z(G)$ وجود دارد به طوری که $z=g^{p^c}$. از طرفی $|Z(G):G'|=p^e$، لذا $z^{p^e}\in G'$. پس $(g^{p^c})^{p^e}=g^{p^c.p^e}=g^{p^{c+e}}\in G'$. در نتیجه به ازای هر $gG'\in\frac{G}{G'}$، $(gG')^{p^{c+e}}=G'$. دراین‌صورت $\exp(\frac{G}{G'})\leq p^{e+c}=\exp(Z(G))$. لذا بنا به لم ۲-۱-۵، $Hom(\frac{G}{G'},Z(G))\cong\frac{G}{G'}$ و در نتیجه $|Aut_c(G)|=\left|Hom(\frac{G}{G'},Z(G))\right|=\left|\frac{G}{G'}\right|$. همچنین طبق لم ۱-۱-۶، $\frac{G}{Z(G)}\cong Inn(G)$، لذا

$$|Aut_c(G):Inn(G)|=\frac{\left|\frac{G}{G'}\right|}{\left|\frac{G}{Z(G)}\right|}=\frac{\frac{|G|}{|G'|}}{\frac{|G|}{|Z(G)|}}=\frac{|Z(G)|}{|G'|}=|Z(G):G'|=p^e\ .\blacksquare$$

۲-۲-۲ قضیه. فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی و $Aut_c(G)$ شامل $Inn(G)$ باشد، اگر $|Aut_c(G):Inn(G)|\le p^{2}$، آنگاه

یا $Z(G)$ دوری است و $|Z(G):G'|=|Aut_c(G):Inn(G)|$

و یا $|Aut_c(G):Inn(G)|=p^{2}$ و $|Z(G):G'|=p$. همچنین G در یکی از ساختارهای $\frac{G}{Z(G)}\cong C_{p^c}\times C_{p^c}$، $Z(G)\cong C_{p^c}\times C_p$، $G'\cong C_{p^c}$ و $\frac{G}{G'}\cong C_{p^{c+1}}\times C_{p^c}$ صدق می‌کند.

برهان: چون $Aut_c(G)$ شامل $Inn(G)$ و G ناآبلی است، پس G پوچ‌توان از رده دو می‌باشد، لذا $G'\le Z(G)$. علاوه بر این چون $|Aut_c(G):Inn(G)|\le p^2$، با توجه به لم ۲-۱-۷، G ناآبلی محض است، پس طبق لم ۲-۱-۱۳(۱)، $r=2$ و $d=1$، زیرا اگر $d>1$ آنگاه $r>2$، که در این حالت $|Aut_c(G):Inn(G)|\ge p^{3}$ که یک تناقض است. بنابراین G' دوری است .

برای $Z(G)$ ممکن است دو حالت اتفاق بیفتد.

حالت اول: فرض می‌کنیم $Z(G)$ دوری باشد، دراین‌صورت چون G پوچ‌توان از رده دو و $Aut_c(G)$ شامل $Inn(G)$ است بنا به قضیه ۲-۲-۱، $|Z(G):G'|=|Aut_c(G):Inn(G)|$.

حال دوم: $Z(G)$ دوری نباشد، چون $r=2$، طبق لم ۲-۱-۱۳(۲)، $z=2$، پس $Z(G)$ و $\frac{G}{Z(G)}$ دارای رتبه‌های دو هستند و همچنین $|Aut_c(G):Inn(G)|=p^{2}$.

چون G پوچ‌توان از رده دو، لذا بنا به لم ۲-۱-۱، $\exp(\frac{G}{Z(G)})=\exp(G')=p^c$ و $\frac{G}{Z(G)}\cong C_{p^c}\times C_{p^c}$. از این رو G' دوری است، پس $G'\cong C_{p^c}$.

ادعا می‌کنیم که رتبه $\frac{G}{G'}$ دو می‌باشد. اگر $\frac{G}{G'}$ دارای رتبه s باشد آنگاه $\frac{G}{G'}\cong C_{p^{\alpha_1}}\times\cdots\times C_{p^{\alpha_s}}$. همچنین $Z(G)$ دارای رتبه دو می‌باشد، پس $Z(G)\cong C_{p^{m_1}}\times C_{p^{m_2}}$ که در آن $m_1\le m_2$.

مطابق با آنچـه در اثبـات ۲-۲-۱ دیـدیم $\exp(\frac{G}{G'}) \le \exp(Z(G))$، پس α_sای وجود دارد که $C_{p^{\alpha_s}}$ با زیرگروهی از $C_{p^{m_2}}$ یکـریخت است. چـون G پوچ‌توان از رده دو می‌باشـد و $\frac{G}{G'}$ آبلـی اسـت، لـذا $\frac{G}{Z(G)} \cong \frac{\frac{G}{G'}}{\frac{Z(G)}{G'}}$. بنابراین $\frac{G}{Z(G)}$ بـا زیـرگـروهـی از $\frac{G}{G'}$ یکـریـخت اسـت، (در حـد یکـریختـی $\frac{G}{Z(G)} \le \frac{G}{G'}$). لـذا طبـق قضیـه ۲-۱-۳(۱)،

$$Hom(\frac{G}{G'}, Z(G)) \cong Hom(\frac{G}{G'}, C_{p^{m_1}} \times C_{p^{m_2}}) \cong Hom(\frac{G}{G'}, C_{p^{m_1}}) \times Hom(\frac{G}{G'}, C_{p^{m_2}})$$

پـس $\left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G)\right| = \left|Hom(\frac{G}{G'}, C_{p^{m_1}})\right| \left|Hom(\frac{G}{G'}, C_{p^{m_2}})\right|$. بنـابراین $\left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| \ge p^{2c}.p^{s-2}.p^s$. درنتیجه $\left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| \ge p^{2(s-1)}.p^{2c} = p^{2(s-1+c)}$.

از طرفـی $Inn(G) \cong \frac{G}{Z(G)}$، بنـابراین $|Inn(G)| = p^{2c}$. ازایـن‌رو طبـق لـم ۲-۱-۲، $|Aut_c(G)| = \left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right|$. در نتیجـه $|Aut_c(G) : Inn(G)| \ge p^{2(s-1)}$. لـذا بنـا بـه فـرض $s = 2$، و $\frac{G}{G'}$ دارای رتبـه دو مـی‌باشـد.

همچنـین بنـا بـه لـم ۲-۱-۱۳(۱)، $p^2 = |Aut_c(G) : Inn(G)| \ge |Z(G) : G'| \, p^{r(d-1)}$، لـذا دو حالـت $|Z(G) : G'| = p$ یا $|Z(G) : G'| = p^2$ ممکن است رخ دهد.

حالت (a): $|Z(G) : G'| = p$، درایـن‌صـورت G' یـک عـامل مسـتقیم از $Z(G)$ اسـت.

مـی‌دانیـم کـه $Z(G)$ دارای رتبـه دو مـی‌بـاشد، لـذا $G' \cong C_{p^c}$، $Z(G) \cong C_{p^c} \times C_p$ و $\frac{G}{Z(G)} \cong C_{p^c} \times C_{p^c}$.

با توجه به مرتبه‌های $\frac{G}{Z(G)}$، $Z(G)$ و G' مرتبه $\frac{G}{G'}$، باید به فرم p^{2c+1} باشد، همچنین رتبه $\frac{G}{G'}$ دو می‌باشد. از طرف دیگر چون G پوچ‌توان از رده دو می‌باشد، لذا در حد یکریختی $\frac{G}{Z(G)} \le \frac{G}{G'}$ بنابراین از $\frac{G}{Z(G)} \cong C_{p^c} \times C_{p^c}$، داریم $\frac{G}{G'} \cong C_{p^{c+1}} \times C_{p^c}$.

حالت (b): $|Z(G):G'| = p^2$، دراین‌صورت ادعا می‌کنیم هیچ گروهی با چنین شرایطی وجود ندارد. چون $G' \cong C_{p^c}$ و $Z(G)$ دارای رتبه دو می‌باشد، همچنین $G' \le Z(G)$، بنابراین $Z(G)$ با $C_{p^c} \times C_{p^2}$ یا $C_{p^{c+1}} \times C_p$ یکریخت است.

دوباره $\frac{G}{Z(G)} \cong C_{p^c} \times C_{p^c}$، بنابراین به وسیله محاسبات ساده از $\left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right|$ نشان می‌دهیم $Z(G) \cong C_{p^c} \times C_{p^2}$ نمی‌تواند رخ دهد، زیرا

$$\begin{aligned}Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G)) &\cong Hom(C_{p^c} \times C_{p^c}, C_{p^c} \times C_{p^2}) \\ &\cong Hom(C_{p^c}, C_{p^c}) \times Hom(C_{p^c}, C_{p^2}) \times Hom(C_{p^c}, C_{p^c}) \times Hom(C_{p^c}, C_{p^2}) \\ &\cong C_{p^c} \times C_{p^2} \times C_{p^c} \times C_{p^2}\end{aligned}$$

بنابراین $\left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))\right| = p^{2c+4}$.

چون در حد یکریختی $\frac{G}{Z(G)} \le \frac{G}{G'}$ لذا طبق لم ۲-۱-۳،

$\left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| \ge \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))\right| = p^{2c+4}$.

همچنین بنا به لم ۲-۱-۲، $\left|Aut_c(G)\right| = \left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| \ge p^{2c+4}$. در نتیجه $\left|Aut_c(G):Inn(G)\right| \ge p^4$ که با فرض در تناقض است. پس $Z(G) \cong C_{p^{c+1}} \times C_p$.

چون G پوچ‌توان از رده دو مـی‌باشـد، لـذا در حـد یکریختـی $\frac{G}{Z(G)} \le \frac{G}{G'}$ و $\frac{G}{Z(G)} \cong C_{p^c} \times C_{p^c}$. از طـرف دیگـر $\left|\frac{G}{G'} : \frac{G}{Z(G)}\right| = |Z(G):G'| = p^{۲}$، درایـن‌صـورت دو حالـت $\frac{G}{G'} \cong C_{p^{c+۱}} \times C_{p^{c+۱}}$ یـا $\frac{G}{G'} \cong C_{p^{c+۲}} \times C_{p^c}$ را داریم.

حـالت اول: اگـر $\frac{G}{G'} \cong C_{p^{c+۱}} \times C_{p^{c+۱}}$ آنگاه

$$\begin{aligned} Hom(\frac{G}{G'}, Z(G)) &\cong Hom(C_{p^{c+۱}} \times C_{p^{c+۱}}, C_{p^{c+۱}} \times C_p) \\ &\cong Hom(C_{p^{c+۱}}, C_{p^{c+۱}}) \times Hom(C_{p^{c+۱}}, C_p) \times Hom(C_{p^{c+۱}}, C_{p^{c+۱}}) \times Hom(C_{p^{c+۱}}, C_p) \\ &\cong C_{p^{c+۱}} \times C_p \times C_{p^{c+۱}} \times C_p \end{aligned}$$

بنابراین $\left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| = p^{۲c+۴}$. در نتیجه $|Aut_c(G) : Inn(G)| = p^۴$.

حالت دوم: اگر $\frac{G}{G'} \cong C_{p^{c+۲}} \times C_{p^c}$ آنگاه

$$\begin{aligned} Hom(\frac{G}{G'}, Z(G)) &\cong Hom(C_{p^{c+۲}} \times C_{p^c}, C_{p^{c+۱}} \times C_p) \\ &\cong Hom(C_{p^{c+۲}}, C_{p^{c+۱}}) \times Hom(C_{p^{c+۲}}, C_p) \times Hom(C_{p^c}, C_{p^{c+۱}}) \times Hom(C_{p^c}, C_p) \\ &\cong C_{p^{c+۱}} \times C_p \times C_{p^c} \times C_p \end{aligned}$$

بنـابـرایـن $\left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| = p^{۲c+۳}$، در نتیجـه $|Aut_c(G)| = p^{۲c+۳}$. لـــذا $|Aun_c(G) : Inn(G)| = p^۳$.

کـه هـر دو حـالت ذکـر شـده بـا فـرض قضیـه در تنـاقـض هسـتنـد، بنـابـرایـن $|Z(G):G'| \neq p^{۲}$.■

از دو قـضیــه اخــیـر نتیجـه زیـر را داریــم.

۲-۲-۳ نتیجه. فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی باشد و $Inn(G) \le Aut_c(G)$، دراین‌صورت

(۱) $Aut_c(G) = Inn(G)$ اگر و تنها اگر $G' = Z(G)$ و $Z(G)$ دوری بـاشـد.

(۲) $|Aut_c(G) : Inn(G)| = p$ اگر و تنها اگر $Z(G)$ دوری و $|Z(G):G'| = p$.

برهان: (۱) اگر $Z(G)$ دوری باشد و $G' = Z(G)$، آنگاه $|Z(G):G'| = ۱$. لذا بنا به قضیه ۲-۲-۱، $|Aut_c(G):Inn(G)| = ۱$. بنابراین $Aut_c(G) = Inn(G)$.

برعکس: اگر $Aut_c(G) = Inn(G)$، آنگاه $|Aut_c(G):Inn(G)| = ۱$. لذا بنا به قضیه ۲-۲-۲، $Z(G)$ دوری است و $|Z(G):G'| = |Aut_c(G):Inn(G)| = ۱$. در نتیجه $Z(G) = G'$.

(۲) اگر $Z(G)$ دوری باشد و $|Z(G):G'| = p$، بنا به قضیه ۲-۲-۱، $|Aut_c(G):Inn(G)| = p$.

برعکس: اگر $|Aut_c(G):Inn(G)| = p$، آنگاه بنا به قضیه ۲-۲-۲، $Z(G)$ دوری است و $|Z(G):G'| = |Aut_c(G):Inn(G)| = p$. ■

فصل سوم
خودریختی‌های مرکزی که مرکز گروه را نقطه‌به‌نقطه ثابت نگه می‌دارند

در فصل‌های قبل با $Aut(G)$ و $Aut_c(G)$ آشنا شدیم. در این فصل به معرفی $Aut^N(G)$، $Aut_M(G)$ و $Aut_M^N(G)$ می‌پردازیم و سر انجام نتیجه اصلی فصل دوم را به روشی دیگر ثابت می کنیم.

فرض کنید M و N دو زیرگروه نرمال G باشند منظور از $Aut^N(G)$ زیرگروهی از $Aut(G)$ شامل عناصری است که $\frac{G}{N}$ را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارند. (یعنی هر عنصر $\frac{G}{N}$ را به خودش تصویر می‌کند.) همچنین $Aut_M(G)$ زیرگروهی از $Aut(G)$، متشکل از تمام خودریختی-هایی است که عناصر M را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارند. همچنین $Aut^N(G)\bigcap Aut_M(G)$ را با $Aut_M^N(G)$ نمایش می‌دهند.

توجه: دراین فصل G یک p-گروه متناهی(و پوچ‌توان) از رده دو می‌باشد.

همچنین توجه می‌کنیم که منظور از $C_{Aut_c(G)}(Z(G))$ گروه تمام خودریختی‌های مرکزی است که عناصر $Z(G)$ را نقطه‌به‌نقطه ثابت نگه می‌دارند که همان $Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G)$ است.

تذکر: این فصل برگرفته از مرجع [۱] است.

۳-۱ قضیه. فرض کنید G یک p-گروه متناهی است، دراین‌صورت $C_{Aut_c(G)}(Z(G))=Inn(G)$ اگر و تنها اگر G آبلی باشد، یا G پوچ‌توان از رده دو، و $Z(G)$ دوری باشد.

برهان: ابتدا ثابت می‌کنیم که $C_{Aut_c(G)}(Z(G))\cong Hom(\frac{G}{Z(G)},Z(G))$.

برای هر $\alpha\in C_{Aut_c(G)}(Z(G)$ نگاشت $f_\alpha:\frac{G}{Z(G)}\to Z(G)$ را با ضابطه $f_\alpha(gZ(G))=g^{-1}\alpha(g)$ در نظر می‌گیریم. اگر $g_1Z(G)=g_2Z(G)$، آنگاه $g_1g_2^{-1}\in Z(G)$. پس $\alpha(g_1g_2^{-1})=g_1g_2^{-1}$. چون α یک خودریختی مرکزی است، لذا $\alpha(g_1)\alpha(g_2^{-1})=g_1g_2^{-1}$.

در نتیجه $g_1^{-1}\alpha(g_1)=g_2^{-1}\alpha(g_2)$. بنابراین $f_\alpha(g_1Z(G))=f_\alpha(g_2Z(G))$، که خوش تعریفی f_α ثابت می‌شود. حال نشان می‌دهیم $f_\alpha(gZ(G))$ یک همریختی است.

به ازای هر $x,y\in G$،

$$f_\alpha(xyZ(G))=(xy)^{-1}\alpha(xy)=y^{-1}x^{-1}\alpha(x)\alpha(y)$$

$$=x^{-1}\alpha(x)y^{-1}\alpha(y)=f_\alpha(xZ(G))f_\alpha(yZ(G))$$

در نتیجه $f_\alpha\in Hom(\frac{G}{Z(G)},Z(G))$.

حال نشان می‌دهیم که $f:\alpha\to f_\alpha$ یک همریختی است.

خوش تعریفی f بدیهی است. حال به ازای $\alpha_1,\alpha_2\in C_{Aut_c(G)}(Z(G))$،

$$f(\alpha_1o\alpha_2)(gZ(G))=f_{\alpha_1o\alpha_2}(gZ(G))=g^{-1}(\alpha_1o\alpha_2)(g)$$

$$=g^{-1}(\alpha_1(\alpha_2(g)))=g^{-1}\alpha_1(gg^{-1}\alpha_2(g))$$

$$=g^{-1}\alpha_1(g)\alpha_1(g^{-1}\alpha_2(g))$$

چون $g^{-1}\alpha_2(g)\in Z(G)$ و $\alpha_1\in C_{Aut_c(G)}(Z(G))$، در نتیجه $\alpha_1(g_1^{-1}\alpha_2(g))=g^{-1}\alpha_2(g)$. بنابراین

$$f(\alpha_1o\alpha_2)(gZ(G))=g^{-1}\alpha_1(g)g^{-1}\alpha_2(g)=f_{\alpha_1}(gZ(G))f_{\alpha_2}(gZ(G))=f(\alpha_1)(g)f(\alpha_2)(g)$$

اگر به ازای هر $g\in G$، $f_{\alpha_1}(gZ(G))=f_{\alpha_2}(gZ(G))$، با توجه به ضابطه $f_\alpha(gZ(G))=g^{-1}\alpha(g)$، $g^{-1}\alpha_1(g)=g^{-1}\alpha_2(g)$. لذا $\alpha_1(g)=\alpha_2(g)$. بنابراین f یک همریختی یک‌به‌یک است.

همچنین برای هر $g\in G$ و $h\in Hom(\frac{G}{Z(G)},Z(G))$ نگاشت α را با ضابطه $\alpha(g)=gh(gZ(G))$ در نظر می‌گیریم. چون h یک همریختی است خوش تعریفی α به سادگی نتیجه می‌شود. به ازای هر $g_1,g_2\in G$،

$$\alpha(g_1g_2)=g_1g_2h(g_1g_2Z(G))=g_1g_2h(g_1Z(G))h(g_2Z(G))$$

چون $h(g_1Z(G))\in Z(G)$، بنابراین

$$\alpha(g_1g_2)=g_1h(g_1Z(G))g_2h(g_2Z(G))=\alpha(g_1)\alpha(g_2)$$

لذا α یک همریختی است.

اگر $\alpha(g)=1$، آنگاه $gh(gZ(G))=1$، دراین‌صورت $h(gZ(G))=g^{-1}$. از طرفی چون $h\in Hom(\frac{G}{Z(G)},Z(G))$، پس $g\in Z(G)$. در نتیجه $gZ(G)=Z(G)$. ازاین‌رو $h(gZ(G))=1$، بنابراین $g=1$. لذا α یک‌به‌یک است.

به ازای هر $a\in G$ قرار می‌دهیم $g=ah(a(Z(G))^{-1}$، داریم

$$\alpha(g)=\alpha(ah(aZ(G))^{-1})=ah(aZ(G))^{-1}h((ah(aZ(G))^{-1})Z(G))$$
$$=ah^{-1}(aZ(G))h(aZ(G))=a$$

بنابراین α پوشا و لذا α یکریختی است.

به ازای هر $x\in G$، $x^{-1}\alpha(x)=x^{-1}xh(xZ(G))=h(xZ(G))\in Z(G)$.

چون $Z(G)$ عنصر همانی $\frac{G}{Z(G)}$ است و h یک همریختی می‌باشد بنابراین $h(Z(G))=1$، لذا به ازای هر $x\in Z(G)$، $\alpha(x)=xh(xZ(G))=xh(Z(G))=x$. در نتیجه $\alpha\in C_{Aut_c(G)}(Z(G)$.

حال نشان می دهیم $f(\alpha)=h$. به ازای هر $g\in G$، $\alpha(g)=gh(gZ(G))$. بنابراین $g^{-1}\alpha(g)=h(gZ(G))$. در نتیجه $f_\alpha(gZ(G))=h(gZ(G))$. ازاین‌رو f پوشا و لذا یک یکریختی است و $C_{Aut_c(G)}(Z(G))\cong Hom(\frac{G}{Z(G)},Z(G))$.

فرض کنید $C_{Aut_c(G)}(Z(G))=Inn(G)$ و G ناآبلی باشد، و فرض کنید $g\in G$، پس خودریختی داخلی i_g القا شده توسط g خودریختی مرکزی است.

همچنین برای هر $x\in G$، $[x^{-1},g]=x^{-1}gxg^{-1}=x^{-1}i_g(x)\in Z(G)$.

این نشان می‌دهد که G پوچ‌توان از رده دو می‌باشد، بنابراین $\exp(\frac{G}{Z(G)})=\exp(G')=p^c$.

فرض کنید $\frac{G}{Z(G)}$ **و** $Z(G)$ به ترتیب از رتبه‌های z, r هستند. چون G پوچ‌توان از رده دو می‌باشد، طبق لم ۲-۱-۱۱،

$$\left|\frac{G}{Z(G)}\right| = |Inn(G)| = |C_{Aut_c(G)}(Z(G))|$$
$$= \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))\right| \geq \left|\frac{G}{Z(G)}\right|.p^{r(z-1)}$$

همچنین بنا به لم ۲-۱-۱، $r \geq 2$، بنابراین $z = 1$ است، پس $Z(G)$ دوری می‌باشد.

برعکس: اگر G آبلی باشد. چون $G = Z(G)$، پس $C_{Aut_c(G)}(Z(G)) = Inn(G) = 1$.

فرض کنید که G پوچ‌توان از رده دو و $Z(G)$ دوری باشد. لذا طبق لم ۲-۱-۵، $Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G)) \cong \frac{G}{Z(G)}$. در نتیجه

$$C_{Aut_c(G)}(Z(G)) \cong Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G)) \cong \frac{G}{Z(G)} \cong Inn(G)$$

از طرف دیگر چون G گروه پوچ‌توان از رده دو می‌باشد، $Inn(G) \leq Aut_c(G)$.

همچنین برای هر $x \in Z(G)$، $i_g(x) = x$. لذا $Inn(G) \leq C_{Aut_c(G)}(Z(G))$. بنابراین $C_{Aut_c(G)}(Z(G)) = Inn(G)$.■

۲-۳ نتیجه. اگر G یک p-گروه آبلی باشد، که در آن p یک عدد اول فرد است، و $Aut_c(G) = Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G)$، آنگاه $G \cong 1$.

برهان: در گروه‌های آبلی $Inn(G) = 1$. از طرفی چون G آبلی است، طبق قضیه ۳-۱ $Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G) = Inn(G)$، همچنین طبق فرض $Aut_c(G) = Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G)$، بنابراین $Aut_c(G) = Inn(G) = 1$. پس $Aut(G) = 1$ و لذا $|Aut(G)| = 1$. از طرف دیگر G یک p-گروه است که در آن p یک عدد اول فرد است، بنابراین طبق قضیه ۱-۲-۱۶، $G \cong 1$.■

۳-۳ قضیه. فرض کنید G یک گروه متناهی و M یک زیرگروه مرکزی از آن باشد و $\alpha \in Aut^{M}(G)$. دراین‌صورت نگاشت f_{α} از G به M با ضابطه $f_{\alpha} = x^{-1}\alpha(x)$ یک همریختی است.

به علاوه برای هر همریختی f از G بـه M نگاشـت α_f بـا ضـابطه $\alpha_f(x) = xf(x)$ روی G یـک خودریختی مرکزی است اگر و تنها اگر برای هر عنصر نابدیهی $m \in M$، $f(m) \neq m^{-1}$.

برهان: به وضوح f_{α} و α_f یک همریختی است.

حال فرض کنید α_f خودریختی و $f(m) = m^{-1}$. دراین‌صورت همریختی α_f یک‌به‌یک نخواهـد بـود و لذا با خودریختی بودن α_f در تناقص اسـت. بنـابراین $f(m) \neq m^{-1}$ شـرط لازم بـرای خـودریختی α_f است.

برعکس: اگر $f(m) \neq m^{-1}$ ، آنگاه α_f یک‌به‌یک است. از طرف دیگر چون α_f یک همریختی از G بـه G اسـت، بنـا بـه قضـیه ۱-۱-۶، α_f پوشـا و لـذا یـک خـودریختی اسـت. همچنـین $x^{-1}\alpha_f(x) = x^{-1}xf(x) = f(x) \in M \leq Z(G)$. بنابراین α_f یک خودریختی مرکزی است. ■

۳-۴ لم. فرض کنید G یک گروه متناهی و M یک زیرگروه مرکزی از آن باشد و $\alpha \in Aut^{M}(G)$، و بـرای هـر $f \in Hom(G,M)$ ، $M \leq \bigcap kerf$. درایـن صـورت نگاشـت $f \to \alpha_f$ کـه در آن $\alpha_f(x) = xf(x)$ یک بکریختی از $Hom(G,M)$ به $Aut^{M}(G)$ است.

به علاوه بین $Aut^{M}_{Z(G)}(G)$ و $Hom(\frac{G}{Z(G)}, M)$ یک یکریختی طبیعی وجود دارد.

برهـان: نگاشـت $\alpha : Hom(G,M) \to Aut^{M}(G)$ بـا ضـابطه $\alpha(f) = \alpha_f$، کـه در آن $g \in G$ و $\alpha_f(g) = gf(g)$ و بـه ازای عنصـر نـابـدیهی $g \in G$، $f(g) \neq g^{-1}$ را در نظـر بگـیریـد. در ایـن صـورت بنا به قضیه ۳-۳، $\alpha_f(g) = gf(g)$ یک خودریختی است.

همچنین برای نگاشت $\bar{\alpha}_f : \frac{G}{M} \to \frac{G}{M}$ با ضابطه $\bar{\alpha}_f(gM) = \alpha_f(g)M$،

$$\bar{\alpha}_f(gM) = \alpha_f(g)M = gf(g)M = gM$$

بنابراین $\alpha_f \in Aut^M(G)$.

به وضوح α خوش تعریف است. حال به ازای $f_1, f_2 \in Hom(G,M)$،

$$\alpha(f_1.f_2)(g) = \alpha_{f_1.f_2}(g) = g.f_1(g).f_2(g)$$

از طرف دیگر چون $f_1 \le \ker f \le \bigcap \ker f$، $f_2(g) \in M$ لذا $f_1(f_2(g)) = 1$. پس

$$(\alpha(f_1)\alpha(f_2))(g) = \alpha_{f_1}\alpha_{f_2}(g) = \alpha_{f_1}(\alpha(f_2(g))) = \alpha_{f_1}(gf_2(g))$$
$$= \alpha_{f_1}(g)\alpha_{f_1}(f_2(g)) = gf_1(g)f_2(g)f_1(f_2(g))$$
$$= gf_1(g)f_2(g)$$

بنابراین $\alpha(f_1 f_2) = \alpha(f_1)\alpha(f_2)$ و لذا α یک همریختی است.

همچنین اگر به ازای هر $g \in G$، $\alpha(f_1)(g) = \alpha(f_2)(g)$ آنگاه $\alpha_{f_1}(g) = \alpha_{f_2}(g)$. لذا $gf_1(g) = gf_2(g)$. دراین‌صورت $f_1(g) = f_2(g)$. در نتیجه α یک‌به‌یک است.

حال نشان می‌دهیم به ازای $f_2 \in Aut^M(G)$، $f_1 \in Hom(G,M)$ وجود دارد به طوری که $\alpha(f_1) = \alpha_{f_1} = f_2$. قرار دهید $f_1(x) = x^{-1} f_2(x)$، دراین‌صورت طبق قضیه ۳-۳، $f_1 \in Hom(G,M)$. همچنین به ازای $x \in G$، $\alpha(f_1(x)) = xf_1(x) = x.x^{-1} f_2(x) = f_2(x)$. لذا α پوشاست. بنابراین $\alpha: f \to \alpha_f$ یک همریختی یک‌به‌یک از $Hom(G,M)$ به روی $Aut^M(G)$ است.

به ازای $f \in Hom(\frac{G}{Z(G)}, M)$ نگاشت $\pi: G \to \frac{G}{Z(G)}$ را در نظر بگیرید. دراین‌صورت نگاشت $\beta: Hom(\frac{G}{Z(G)}, M) \to Aut^M_{Z(G)}(G)$ را با ضابطه $\beta(f) = \alpha_{f\pi}$ می‌توان تعریف کرد که در آن $\alpha_{f\pi}(g) = gf\pi(g) = gf(gZ(G))$. به عبارت دیگر

$$\beta: Hom(\frac{G}{Z(G)}, M) \xrightarrow{Hom(-,M)} Hom(G,M) \xrightarrow{\alpha} Aut^M(G) \xrightarrow{\subseteq} Aut^M_{Z(G)}(G)$$

$$f \to f\pi \to \alpha_{f_\pi} \to i(\alpha_{f\pi})$$

β به عنوان ترکیب سه همریختی، همریختی می‌باشد. در ادامه نشان می‌دهیم که β یکریختی است.

اگر $f\in\ker\beta$ آنگاه به ازای هر $g\in G$، $\alpha_{f\pi}(g)=g$. پس $gf\,(gZ(G))=g$. لذا $f(gZ(G))=1$. بنابراین $f=1$. در نتیجه β یک‌به‌یک خواهد بود.

اکنون می‌خواهیم نشان دهیم β پوشاست، یعنی به ازای $f_2\in Aut^M_{Z(G)}(G)$، $f_1\in Hom(\frac{G}{Z(G)},M)$ وجود دارد به طوری که $\beta(f_1)=f_2$. در این صورت به ازای هر $g\in G$، f_1 را با ضابطه $f_1(gZ(G))=g^{-1}f_2(g)$ در نظر می گیریم. حال نشان می دهیم $f_1\in Hom(\frac{G}{Z(G)},M)$. اگر $g_1Z(G)=g_2Z(G)$، آنگاه $g_1g_2^{-1}\in Z(G)$. چون $f_2\in Aut^M_{Z(G)}(G)$، پس $f_2(g_1g_2^{-1})=g_1g_2^{-1}$. لذا $f_2(g_1)f_2(g_2^{-1})=g_1g_2^{-1}$. در نتیجه $g_1^{-1}f_2(g_1)=g_2^{-1}f_2(g_2)$. بنابراین $f_1(g_1Z(G))=f_1(g_2Z(G))$. که خوش تعریفی f_1 ثابت می‌شود.

حال به ازای هر $a,b\in G$،

$$f_1(aZ(G)bZ(G))=f_1(abZ(G))=(ab)^{-1}.f_2(ab)=b^{-1}a^{-1}f_2(a)f_2(b)$$

$$=a^{-1}f_2(a)b^{-1}f_2(b)=f_1(aZ(G))f_1(bZ(G))$$

از طرف دیگر $f_2\in Aut^M_{Z(G)}(G)$، لذا به ازای هر $g\in G$، $f_2(gM)=gM$. بنابراین $f_2(g)M=gM$.

لذا $g^{-1}f_2(g)\in M$. در نتیجه $f_1\in Hom(\frac{G}{Z(G)},M)$. همچنین

$$\beta(f_1)(g)=\alpha_{f_1\pi}(g)=gf_1(gZ(G))=g.g^{-1}f_2(g)=f_2(g)\,.\blacksquare$$

۳-۵ قضیه. فرض کنید G، p-گروه متناهی ناآبلی و M زیرگروه مرکزی از G باشد دراین‌صورت $Aut^M_{Z(G)}(G)=Inn(G)$ اگر و تنها اگر G پوچتوان از رده دو، $G'\le M$ و M دوری باشد.

برهان: چون $M\le Z(G)$، برای هر $m\in M$ و $f\in Hom(\frac{G}{Z(G)},M)$، $f(mZ)=1$. بنابراین $M\le \bigcap_{f\in Hom(\frac{G}{Z(G)},M)}\ker f$.

لذا طبق لم ۳-۴ یکریختی طبیعی بین $Aut^M_{Z(G)}(G)$ و $Hom(\frac{G}{Z(G)},M)$ وجود دارد.

حال فرض می‌کنیم که $Aut^M_{Z(G)}(G)=Inn(G)$. چون $Inn(G)=Aut^M_{Z(G)}(G)\le Aut_c(G)$، و G ناآبلی است، پس G پوچتوان از رده دو می باشد، در نتیجه نما $\frac{G}{Z(G)}$ و G' یکی است.

فرض می‌کنیم i_a خودریختی داخلی القا شده توسط $a \in G$ باشد در این صورت برای هر $g \in G$، $i_a(g) = g^a = aga^{-1}$. چون $Inn(G) = Aut_{Z(G)}^{M}(G)$، بنابراین برای هر $g \in G$، $i_a(g)M = gM$. در نتیجه $i_a(g)g^{-1} \in M$. اما $i_a(g)g^{-1} = aga^{-1}g^{-1} = [a,g]$، ازاین‌رو $\{i_a(g)g^{-1} | g \in G\} = \{[a,g] | g \in G\} \subseteq M$. چون $G' =< \{[a,g] | a,g \in G\} >$، در نتیجه $G' \leq M$.

بنابراین نما M بزرگتر یا مساوی نما G' است. فرض می‌کنیم که نما M، p^e باشد. به برهان خلف فرض می‌کنیم که M دوری نباشد، پس $M = C_{p^e} \times N$ که در آن C_{p^e} زیرگروه دوری از مرتبه p^e و N زیرگروه نابدیهی M است. حال

$$Hom(\frac{G}{Z(G)}, M) \cong Hom(\frac{G}{Z(G)}, C_{p^e} \times N) \cong Hom(\frac{G}{Z(G)}, C_{p^e}) \times Hom(\frac{G}{Z(G)}, N)$$

همچنین طبق لم ۲-۱-۵، $Hom(\frac{G}{Z(G)}, C_{p^e}) \cong \frac{G}{Z(G)}$.

چون $\frac{G}{Z(G)}$ و N، p-گروه‌های نابدیهی آبلی اند، بنابراین

$$\left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, M)\right| = \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, C_{p^e})\right|\left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, N)\right| > \left|\frac{G}{Z(G)}\right| = |Inn(G)|$$

لذا $\left|Aut_{Z(G)}^{M}(G)\right| = \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, M)\right| > |Inn(G)|$ که با فرض در تناقض است. بنابراین M دوری است.

برعکس: فرض کنید G پوچتوان از رده دو باشد، در این صورت نما G' و $\frac{G}{Z(G)}$ یکی است. حال چون $G' \leq M$، لذا نما M بزرگتر یا مساوی نما $\frac{G}{Z(G)}$ است. چون M دوری می‌باشد، طبق لم ۲-۱-۵، $Hom(\frac{G}{Z(G)}, M) \cong \frac{G}{Z(G)}$. لذا

$$\left|Aut_{Z(G)}^{M}(G)\right| = \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, M)\right| = \left|\frac{G}{Z(G)}\right| = |Inn(G)|$$

از $G' \leq M$، داریم بـه ازای $x, g \in G$، $[x^{-1}, g] \in M$. لـذا $x^{-1}x^{g} \in M$، پـس $x^{g}M = xM$. ازایـن‌رو $i_g(xM) = x^{g}M = xM$. در نتیجه $i_g \in Aut^{M}(G)$. همچـنـین $Inn(G)$، $Z(G)$ را نقطـه بـه نقطـه ثابت نگه می‌دارد، بـدین تـرتیب $Inn(G) \leq Aut^{M}_{Z(G)}$. پس $Inn(G) = Aut^{M}_{Z(G)}(G)$.■

۳-۶ لم. اگر G یک p-گروه متناهی باشد به طـوری کـه $Aut_c(G) = Aut^{Z(G)}_{Z(G)}(G)$ آنگـاه G نـاآبلی محض است.

برهان : (فرض‌خلف) فرض کنید G ناآبلی محض نباشد، پس $G = H \times A$، که در آن A یک زیرگـروه آبلی نابدیهی و H ناآبلی محض از G است.

فرض کنید $\{y_1, y_2, ..., y_s\}, \{x_1, x_2, ..., x_r\}$ به ترتیب مجموعه مولد مینیمال‌های A و H باشند.

چون $G = H \times A$، لـذا $S := \{x_1, x_2, ...x_r, y_1, y_2, ..., y_s\}$ مجمـوعه مـولـد مینیمال G اسـت.

در گروه پوچتوان G، داریم $G' \leq \phi(G)$، بنابراین $H' \leq \phi(G)$. از طرف دیگر چون H، p-گـروه نـاآبلی است پس بنـا بـه قضیـه ۱-۳-۱۲، $H' \bigcap Z(H) \neq 1$. درنتیجـه $\phi(G) \bigcap Z(H) \neq 1$. لذا می‌توانیم یک عنصر نابدیهی $z \in Z(H) \bigcap \phi(G)$ انتخاب کنیم که $z^{p} = 1$.

چون S مجموعه مولد مینیمال G است با توجه به لم ۱-۳-۲۰، برای هر $w \in S$ نگاشت f از G به G بـا ضـابطه $f(w) = wz$ یـک خـودریختی اسـت. درایـن‌صـورت بـه ازای هـر $a \in G$، $a^{-1}f(a) = a^{-1}az \in Z(G)$. لذا $f \in Aut_c(G)$.

همچنین برای هر i، $1 \leq i \leq s$، $f(b_i) = b_i z \neq b_i$ هر چند $b_i \in Z(G)$. پس $f \notin Aut^{Z(G)}_{Z(G)}(G)$ کـه با فرض در تناقض است. بنابراین G ناآبلی محض است. ■

۳-۷ لم. فرض کنیـد $A = C_{p^{a_1}} \times C_{p^{a_2}} \times \cdots \times C_{p^{a_s}}$، $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_s$ و $B = C_{p^{b_1}} \times C_{p^{b_2}} \times \cdots \times C_{p^{b_s}}$، $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_s$ دو p-گروه آبلی متناهی باشند به طوری که به ازای هر j، $1 \leq j \leq s$، $b_j \geq a_j$ و بـرای بعضی j ها ، $b_j > a_j$. اگر t کوچکترین عدد بین ۱ و s باشد، به طوری که به ازای هر j، $t+1 \leq j \leq s$

، $a_j = b_j$. دراین‌صورت به ازای هر p-گروه آبلی متناهی C، $|Hom(B,C)| < |Hom(A,C)|$ اگر و تنها اگر نما C حداقل p^{a_t+1} باشد.

برهان: قرار دهید $H \cong C_{p^{a_1}} \times C_{p^{a_2}} \times \cdots \times C_{p^{a_t}}$، $K \cong C_{p^{b_1}} \times C_{p^{b_2}} \times \cdots \times C_{p^{b_t}}$ و $D \cong C_{p^{a_{t+1}}} \times \cdots \times C_{p^{a_s}} \cong C_{p^{b_{t+1}}} \times \cdots \times C_{p^{b_s}}$. چون برای هر j، $t+1 \leq j \leq s$، $b_j = a_j$، لذا

$$Hom(A,C) \cong Hom(H \times D, C) \cong Hom(H,C) \times Hom(D,C)$$

$$Hom(B,C) \cong Hom(K \times D, C) \cong Hom(K,C) \times Hom(D,C)$$

بدین ترتیب $|Hom(A,C)| < |Hom(B,C)|$ اگر و تنها اگر $|Hom(H,C)| < |Hom(K,C)|$.

چون $b_j \geq a_j$، و برای بعضی از j ها ، $1 \leq j \leq s$، $b_j > a_j$، $|Hom(H,C)| < |Hom(K,C)|$ اگر و تنها اگر برای حداقل یک گروه دوری C_{p^c} که در تجزیه دوری C ظاهر می‌شود $|Hom(H,C_{p^c})| < |Hom(K,C_{p^c})|$.

توجه کنید که اگر $c \leq a_t$، دراین‌صورت بنا به لم ۲-۱-۳،

$$Hom(H,C_{p^c}) \cong Hom(C_{p^{a_1}} \times \cdots \times C_{p^{a_t}}, C_{p^c}) \cong Hom(C_{p^{a_1}}, C_{p^c}) \times \cdots \times Hom(C_{p^{a_t}}, C_{p^c})$$

$$\cong C_{p^c} \times C_{p^c} \times \cdots \times C_{p^c}$$

به طور مشابه برای K نیز چنین یکریختی را داریم. بنابراین $|Hom(H,C_{p^c})| = |Hom(K,C_{p^c})|$. در نتیجه $|Hom(H,C_{p^c})| < |Hom(K,C_{p^c})|$ اگر و تنها اگر $c > a_t$. چون نما C حداقل p^c است، پس اثبات کامل می‌شود.■

برای بیان قضیه ۳-۸ ما به یک سری مفروضات نیازمندیم که در زیر آورده شده است.

ابتدا فرض کنید G یک p-گروه از رده دو باشد که در آن $\frac{G}{Z(G)}$ و G' هر دو دارای نما p^c هستند.

$\frac{G}{Z(G)} = C_{p^{a_1}} \times C_{p^{a_2}} \times \cdots \times C_{p^{a_r}}$، به طوری که برای هر i، $1 \le i \le r$، $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_r$.

همچنین k بزرگترین عدد صحیح بین ۱ تا r است به طوری که $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = c$. ازاین‌رو توجه می‌کنیم که بنا به لم ۲-۱-۱، $k \ge 2$.

فرض کنید $\overline{M} = \frac{M}{Z(G)} \cong C_{p^{a_1}} \times \cdots \times C_{p^{a_k}}$ و سرانجام فرض کنید $\frac{G}{G'} = C_{p^{b_1}} \times C_{p^{b_2}} \times \cdots \times C_{p^{b_s}}$ که در آن $b_1 \ge b_2 \ge \cdots \ge b_s$ یک تجزیه دوری از $\frac{G}{G'}$ باشد، به طوری که $\overline{M}$ با زیرگروهی از $\overline{N} = \frac{N}{G'} := C_{p^{b_1}} \times \cdots \times C_{p^{b_k}}$ یکریخت است.

۳-۸ قضیه. فرض کنید G یک p-گروه متناهی پوچ‌توان از رده دو باشد. دراین‌صورت $Aut_c(G) = Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G)$ اگر و تنها اگر $r = s$، $\frac{\frac{G}{Z(G)}}{\overline{M}} \cong \frac{\frac{G}{G'}}{\overline{N}}$، و $Z(G)$ و G' دارای نماهای برابر باشند.

برهان: بنا به مفروضات بالا $\frac{G}{Z(G)} = C_{p^{a_1}} \times C_{p^{a_2}} \times \cdots \times C_{p^{a_r}}$ و $\frac{G}{G'} = C_{p^{b_1}} \times C_{p^{b_2}} \times \cdots \times C_{p^{b_s}}$. چون $\frac{G}{Z(G)}$ گروه خارج قسمتی از $\frac{G}{G'}$ است، لذا $r \le s$، و برای هر j، $1 \le j \le r$، $b_j \ge a_j$.

حال اگر $Aut_c(G) = Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G)$، دراین‌صورت مطابق با لم ۳-۶، G ناآبلی محض است. لذا بنا به لم ۲-۱-۲ یک تناظر دوسویی بین $Aut_c(G)$ و $Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))$ وجود دارد.

همچنین اگر در لم ۳-۴، قرار دهیم $M = Z(G)$ دراین‌صورت یک یکریختی بین $Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G)$ و $Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))$ وجود دارد.

ما ادعا می‌کنیم که $r = s$. حال فرض می‌کنیم که چنین نباشد، یعنی $r < s$، دراین‌صورت چون برای هر j، $1 \le j \le r$، $b_j \ge a_j \ge 0$ و برای هر $r+1 \le j \le s$، $b_j > 0$، پس

$$\left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G)\right| = \left|Hom(C_{p^{a_1}} \times C_{p^{a_2}} \times \cdots \times C_{p^{a_r}}, Z(G))\right|$$

$$\le \left|Hom(C_{p^{b_1}} \times C_{p^{b_2}} \times \cdots \times C_{p^{b_r}}, Z(G)\right|$$

$$< \left|Hom(C_{p^{b_1}} \times C_{p^{b_2}} \times \cdots \times C_{p^{b_r}}, Z(G)\right| \left|Hom(C_{p^{b_{r+1}}} \times \cdots \times C_{p^{b_s}}, Z(G)\right|$$

$$= \left|Hom(C_{p^{b_1}} \times C_{p^{b_2}} \times \cdots \times C_{p^{b_r}}, Z(G)\right| = \left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G)\right|$$

این ثابت می‌کند که $\left|Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G)\right| < \left|Aut_c(G)\right|$ اما این با فرض در تناقض می‌باشد. لذا $r = s$ و ادعا درست است، که این به ازای هر j، $1 \le j \le s$ نابرابری $b_j \ge a_j$ را نتیجه می‌دهد.

حال ما ثابت می‌کنیم که $\frac{\frac{G}{Z(G)}}{\overline{M}} \cong \frac{\frac{G}{G'}}{\overline{N}}$. به برهان خلف فرض می‌کنیم که $\frac{\frac{G}{G'}}{\overline{N}} \ncong \frac{\frac{G}{Z(G)}}{\overline{M}}$، پس برای بعضی j ها، $k+1 \le j \le s$، $b_j > a_j$. اگر برای هر j، $b_j = a_j$ آنگاه $A = C_{p^{a_{k+1}}} \times \cdots \times C_{p^{a_s}}$ با $B = C_{p^{b_{k+1}}} \times \cdots \times C_{p^{b_s}}$ یکریخت است. بنابراین $\frac{\frac{G}{Z(G)}}{\overline{M}} \cong A \cong B \cong \frac{\frac{G}{G'}}{\overline{N}}$ که با فرض در نظر گرفته شده در تناقض است.

t را کوچکترین عدد صحیح می‌گیریم که $k+1 \le t \le s$ و برای هر j، $t+1 \le j \le s$، $b_j = a_j$. انتخاب ما از k نتیجه می‌دهد $p^c > p^{a_k+1} \ge p^{a_t}$، که در آن p^c نما $\frac{G}{Z(G)}$ و G' است.

بنابراین نما $Z(G)$ بزرگتر یا مساوی p^c است، پس نما $Z(G)$ حداقل p^{a_t+1} است.

حال در لم ۳-۷، قرار دهید $C = Z(G)$. دراین صورت $\left|Hom(A, Z(G))\right| < \left|Hom(B, Z(G))\right|$.

چون $\left|Hom(\overline{M}, Z(G))\right| < \left|Hom(\overline{N}, Z(G))\right|$، بنابراین

$$\left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))\right| = \left|Hom(\overline{M} \times A, Z(G))\right| = \left|Hom(\overline{M}, Z(G)\right|\left|Hom(A, Z(G))\right|$$

$$< \left|Hom(\overline{N}, Z(G))\right|\left|Hom(B, Z(G))\right| = \left|Hom(\overline{N} \times B, Z(G))\right|$$

$$= \left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right|$$

دراین‌صورت $\left|Aut^{Z(G)}_{Z(G)}(G)\right| < \left|Aut_c(G)\right|$ که با فرض در تناقض است پس $\dfrac{\frac{G}{G'}}{\overline{N}} \cong \dfrac{\frac{G}{Z(G)}}{\overline{M}}$.

در قسمت آخر فرض می‌کنیم که نما $Z(G)$ با نما G' برابر نباشد. دراین‌صورت نما $Z(G)$ حداقل p^{c+1} است، زیرا نما G' برابر p^c است. همچنین $G' \neq Z(G)$. بنابراین $\left|Z(G)\right| > \left|G'\right|$ ازاین‌رو $\left|\frac{G}{G'}\right| < \left|\frac{G}{Z(G)}\right|$. چون $\dfrac{\frac{G}{G'}}{\overline{N}} \cong \dfrac{\frac{G}{Z(G)}}{\overline{M}}$، نتیجه می‌شود که $\left|\overline{M}\right| > \left|\overline{N}\right|$.

چون $\overline{M} = \frac{M}{Z(G)} \cong C_{p^{a_1}} \times \cdots \times C_{p^{a_k}}$ و $\overline{N} = C_{p^{b_1}} \times C_{p^{b_2}} \times \cdots \times C_{p^{b_k}}$ و برای بعضی j ها، $1 \leq j \leq k$، $b_j \geq a_j$ و $a_j = c$، ما نتیجه می‌گیریم که برای j ای، $b_j > a_j$.

قرار دهید t را کوچکترین عدد صحیح بین ۱ و k به طوری که برای هر j، $t+1 \leq j \leq k$، $b_j = a_j = c$. می‌دانیم نما $Z(G)$ حداقل $p^{c+1} = p^{a_t+1}$ است.

در لم ۳-۷ قرار می‌دهیم $A = \overline{M}$، $B = \overline{N}$ و $C = Z(G)$ در این صورت

$$\left|Hom(\overline{M}, Z(G))\right| < \left|Hom(\overline{N}, Z(G))\right|$$

حال قرار دهید $D \cong C_{p^{a_{k+1}}} \times \cdots \times C_{p^{a_s}} \cong C_{p^{b_{k+1}}} \times \cdots \times C_{p^{b_s}}$، بنابراین

$$\left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))\right| = \left|Hom(\overline{M} \times D, Z(G))\right| = \left|Hom(\overline{M}, Z(G))\right|\left|Hom(D, Z(G))\right|$$

$$< \left|Hom(\overline{N}, Z(G))\right|\left|Hom(D, Z(G))\right| = \left|Hom(\overline{N} \times D, Z(G))\right|$$

$$= \left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right|$$

پس $\left|Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G)\right| < \left|Aut_c(G)\right|$، که این با فرض در تناقض است. لذا نما $Z(G)$ و G' یکی است.

برعکس : فرض کنید $r=s$، $\dfrac{\frac{G}{G'}}{\overline{N}} \cong \dfrac{\frac{G}{Z(G)}}{\overline{M}}$ و نما $Z(G)$ و G' مساوی باشد.

چون $r=s$، ادعا می‌کنیم که G ناآبلی محض است. به برهان خلف فـرض مـی‌کنـیم کـه G نـاآبلی محض نباشد، پس $G=A\times H$ که A گروه آبلی نابدیهی و H زیرگروه ناآبلی محض از G است. چون A آبلی است $Z(A)=A$ و $A'=1$، بنابراین $G'=H'$ و $Z(G)=Z(H)\times A$.

چون $G=H\times A$، لذا

$$\frac{G}{G'}=\frac{G}{H'}=\frac{H\times A}{H'}\cong\frac{H}{H'}\times A$$

$$\frac{G}{Z(G)}=\frac{H\times A}{Z(H)\times A}\cong\frac{H}{Z(H)}$$

این دو تساوی ایجاب می‌کند که رتبه $\frac{G}{G'}$ اکیدا از رتبه $\frac{H}{H'}$ بزرگتر است و رتبه $\frac{G}{Z(G)}$ برابـر رتبـه $\frac{H}{Z(H)}$ است. چون H پوچتوان از رده دو می‌باشد لذا $H'\leq Z(H)$. بنابراین $\frac{H}{Z(H)}$ گـروه خـارج قسمتی $\frac{H}{H'}$ است. آنگاه رتبه $\frac{H}{Z(H)}$ کوچکتر یا مساوی رتبه $\frac{H}{H'}$ می‌باشد. پس رتبـه $\frac{G}{G'}$ اکیـدا از رتبه $\frac{G}{Z(G)}$ بزرگتر است. این ایجاب می‌کند که $s>r$، که یک تناقض است.

چون $r=s$ و $\dfrac{\frac{G}{G'}}{\overline{N}} \cong \dfrac{\frac{G}{Z(G)}}{\overline{M}}$، لذا $\frac{G}{Z(G)}=C_{p^{a_1}}\times\cdots\times C_{p^{a_s}}$ و $\frac{G}{G'}=C_{p^{b_1}}\times\cdots\times C_{p^{b_s}}$ به طـوری کـه $D\cong C_{p^{a_{k+1}}}\times\cdots\times C_{p^{a_s}}\cong C_{p^{b_{k+1}}}\times\cdots\times C_{p^{b_s}}$.

بنابراین حداقل مقدار t، $1\leq t\leq s$ و به ازای تمام j هـایـی، $t+1\leq j\leq s$ و در رابطـه $a_j=b_j$ صـدق می‌کند حداکثر k است.

حال فرض می‌کنیم $Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G)<Aut_c(G)$، در لم ۳-۴، قرار مـی‌دهـیم $M=Z(G)$، چـون G نــــاآبلی محـــــض اســــــت بـــــا اســــــتفاده از لــــــم ۳-۴ و لــــــم ۲-۱-۲،

$\left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| < \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))\right|$. بنابراین برای بعضی j ها، $1 \leq j \leq s$، $b_j > a_j$. اگر برای همه j ها، $b_j = a_j$ آنگاه $\left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| = \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, Z(G))\right|$، که این با آنچه گفته شد در تناقض است.

حال در لم ۳-۷ قرار می‌دهیم $A = \frac{G}{Z(G)}$، $B = \frac{G}{G'}$ و $C = Z(G)$. دراین‌صورت نما $Z(G)$ باید حداقل p^{a_t+1} باشد که اکیدا از p^c یعنی نما G' بزرگتر است، و با این فرض که نما $Z(G)$ و G' یکی است در تناقض است. بنابراین $Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G) = Aut_c(G)$، که اثبات کامل می‌شود.■

۳-۹ نتیجه. فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی متناهی باشد. دراین‌صورت $Aut_c(G) = Inn(G)$ اگر و تنها اگر $Z(G) = G'$ و $Z(G)$ دوری باشد.

برهان: ابتدا فرض می‌کنیم که $Z(G) = G'$ و $Z(G)$ دوری باشد، بنابراین G گروه پوچ‌توان از رده دو می‌باشد. حال با قرار دادن $M = Z(G)$ در قضیه ۳-۵، $Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G) = Inn(G)$.

از طرف دیگر طبق فرض $Z(G) = G'$، ازاین‌رو نما $Z(G)$ و G' یکی می‌باشد و طبق قضیه ۳-۸، $Aut_c(G) = Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G)$، در نتیجه $Aut_c(G) = Inn(G)$.

برعکس: اگر $Inn(G) = Aut_c(G) = C_{Aut(G)}(Inn(G))$، آنگاه چون G ناآبلی است، لذا بنا به قضیه ۱-۳-۱۳، G پوچ‌توان از رده دو می‌باشد، بنابراین $G' \leq Z(G)$. همچنین $Inn(G)$ و $Aut_c(G)$ به ترتیب $Z(G)$ و $\frac{G}{Z(G)}$ را نقطه به نقطه ثابت نگه می‌دارند. حال چون $Inn(G) = Aut_c(G)$، بنابراین $Inn(G) \leq Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G)$. از طرف دیگر $Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G) \leq Aut_c(G) = Inn(G)$، لذا $Inn(G) = Aut_{Z(G)}^{Z(G)}(G)$. اگر در قضیه ۳-۵، قرار دهید $M = Z(G)$، دراین‌صورت $Z(G)$ دوری است. لذا طبق قضیه ۳-۸، $Z(G) = G'$.■

فصل چهارم

p-گروه‌ها با گروه خودریختی مرکزی آبلی مقدماتی

آقای دکتر جمالی و آقای موسوی در ***[6]*** ثابت کرده اند که اگر G یک p-گروه ناآبلی محض متناهی از رده دو باشد که در آن p عدد اول فرد است آنگاه $Aut_c(G)$ آبلی مقدماتی است اگر و تنها اگر

(۱) $\Omega_1(Z(G))=\phi(G)$

(۲) $\exp(\frac{G}{G'})=p$ یا $\exp(Z(G))=p$.

در این فصل ما شرط رده دو بودن را حذف می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که اگر G یک p-گروه ناآبلی محض متناهی باشد که در آن p، عدد اول فرد است آنگاه $Aut_c(G)$ یک p-گروه آبلی مقدماتی است اگر و تنها اگر $\exp(\frac{G}{G'})=p$ یا $\exp(Z(G))=p$.

تذکر: اگر $\frac{G}{G'}=\frac{K_1}{G'}\times\frac{K_2}{G'}$ و $Z(G)=H_1\times H_2$ آنگاه هر $xG'\in\frac{G}{G'}$ را می‌توان به صورت $xG'=x_1G'x_2G'$ نوشت که در آن $x_1\in K_1$ و $x_2\in K_2$. حال با در نظر گرفتن همریختی $f:\frac{K_1}{G'}\to H_1$ می‌توان همریختی $\bar{f}:\frac{G}{G'}\to Z(G)$ را از روی همریختی f ساخت که به ازای هر $x\in G$، $\bar{f}$ با ضابطه $\bar{f}(xG')=f(x_1G')$ تعریف می‌شود. همچنین از روی همریختی $\bar{f}$، همریختی $f^*:G\to Z(G)$ را می‌توان تعریف کرد به طوری که به ازای هر $x\in G$، $f^*(x)=\overline{f}(xG')$ است.

همچنین همریختی $\tilde{f}:\frac{G}{Z(G)}\to Z(G)$ را از روی همریختی f با ضابطه $\tilde{f}(gZ)=f(g)$ می‌توان ساخت. به علاوه همریختی $\sigma_{f^*}:G\to G$ را با ضابطه $\sigma_{f^*}(X)=xf^*(x)$ درنظر بگیرید.

اگر در p-گروه G، $\frac{G}{G'}=<xG'>\times\frac{K}{G'}$ و $z\in Z(G)$، به گونه‌ای باشد که $o(z)\le o(xG')$، آنگاه $f\in Hom(\frac{G}{G'},Z(G))$ را به صورت $f:x^iG'\to z^i$ تعریف می‌کنیم و آن را با $f_{x,z}$ نشان می‌دهیم.

تذکر: این فصل برگرفته از مرجع [3] می‌باشد. همچنین در سراسر این فصل G یک p-گروه ناآبلی محض متناهی از رده دو می‌باشد.

تذکر: هدف از $\prod_{i}^{*} A_i$ حاصل ضرب معمولی خانواده متناهی از زیرگروه‌های $\{A_i\}$ از G است .

۴-۱ لم. فرض کنید G یک گروه ناآبلی محض باشد، $\frac{G}{G'}=\frac{K_1}{G'}\times\frac{K_2}{G'}$، $Z(G)=H_1\times H_2$ و $A_{ij}=\{\sigma_{f^*} \mid f\in Hom(\frac{K_i}{G'},H_j)\}$، در این صورت $Aut_c(G)=\prod_{i,j}^{*} A_{ij}$.

برهان: نگاشت $\varphi:\prod_{j,i} A_{ij}\to\prod_{i,j}^{*} A_{ij}$ را با تعریف $\varphi(\sigma_{f_{11}^*},\sigma_{f_{21}^*},\sigma_{f_{12}^*},\sigma_{f_{22}^*})=\sigma_{f_{11}^*}\sigma_{f_{21}^*}\sigma_{f_{12}^*}\sigma_{f_{22}^*}$ در نظر می‌گیریم. حال فرض کنید $\sigma_{f_{11}^*}\sigma_{f_{21}^*}\sigma_{f_{12}^*}\sigma_{f_{22}^*}=\sigma_{g_{11}^*}\sigma_{g_{21}^*}\sigma_{g_{12}^*}\sigma_{g_{22}^*}$، پس $\sigma_{g_{21}^*}^{-1}\sigma_{g_{11}^*}^{-1}\sigma_{f_{11}^*}\sigma_{f_{21}^*}=\sigma_{g_{12}^*}\sigma_{g_{22}^*}\sigma_{f_{22}^*}^{-1}\sigma_{f_{12}^*}^{-1}$. حال با توجه به اینکه $\mathrm{Im}_{f_{11}}\subseteq H_1$، $\mathrm{Im}_{f_{21}}\subseteq H_1$، $\mathrm{Im}_{g_{11}}\subseteq H_1$ و $\mathrm{Im}_{g_{21}}\subseteq H_1$، برای هر $x\in G$، $x_1\in H_1$ وجود دارد به طوری که $\sigma_{g_{21}^*}^{-1}\sigma_{g_{11}^*}^{-1}\sigma_{f_{11}^*}\sigma_{f_{21}^*}(x)=x_1$. با همین استدلال برای هر $x\in G$، $x_2\in H_2$ وجود دارد به طوری که $\sigma_{g_{12}^*}\sigma_{g_{22}^*}\sigma_{f_{22}^*}^{-1}\sigma_{f_{12}^*}^{-1}(x)=x_2$. از طرفی $H_1\cap H_2=1$، پس $x_1=x_2=1$. بنابراین $\sigma_{g_{21}^*}^{-1}\sigma_{g_{11}^*}^{-1}\sigma_{f_{11}^*}\sigma_{f_{21}^*}=\sigma_{g_{12}^*}\sigma_{g_{22}^*}\sigma_{f_{22}^*}^{-1}\sigma_{f_{12}^*}^{-1}=1$، لذا $\sigma_{f_{11}^*}\sigma_{f_{21}^*}=\sigma_{g_{11}^*}\sigma_{g_{21}^*}$ و $\sigma_{f_{12}^*}\sigma_{f_{22}^*}=\sigma_{g_{12}^*}\sigma_{g_{22}^*}$. حال چون $K_1\subseteq\ker f^*_{21}\cap\ker g^*_{21}$، لذا به ازای هر $x\in K_1$، $\sigma_{f_{11}^*}\sigma_{f_{21}^*}(x)=\sigma_{f_{11}^*}(x)$ و $\sigma_{g_{11}^*}\sigma_{g_{21}^*}(x)=\sigma_{g_{11}^*}(x)$. در نتیجه برای هر $x\in K_1$، $\sigma_{f_{11}^*}(x)=\sigma_{g_{11}^*}(x)$. از طرفی چون $K_2\subseteq\ker f^*_{11}\cap\ker g^*_{11}$، پس به ازای هر $x\in G$، $\sigma_{f_{11}^*}(x)=\sigma_{g_{11}^*}(x)$. با ادامه همین روند $(\sigma_{f_{11}^*},\sigma_{f_{21}^*},\sigma_{f_{12}^*},\sigma_{f_{22}^*})=(\sigma_{g_{11}^*},\sigma_{g_{21}^*},\sigma_{g_{12}^*},\sigma_{g_{22}^*})$. لذا $\varphi:\prod_{j,i} A_{ij}\to\prod_{i,j}^{*} A_{ij}$، نگاشتی یک‌به‌یک است.

پس

$$\left|Aut_c(G)\right|=\left|Hom(\frac{G}{G'},Z(G))\right|=\left|\prod Hom(\frac{K_i}{G'},H_j)\right|$$

$$=\prod\left|Hom(\frac{K_i}{G'},H_j)\right|=\prod\left|A_{ij}\right|=\left|\prod_{i,j} A_{ij}\right|\leq\left|\prod_{i,j}^{*} A_{ij}\right|$$

از طرف دیگر $Aut_c(G) \supseteq \prod_{i,j}^{*} A_{ij}$، بنابراین $\left|\prod_{i,j} A_{ij}\right| = \left|\prod_{i,j}^{*} A_{ij}\right| = |Aut_c(G)|$. حال بنا به لم ۱-۱-۶، φ پوشاست و حکم ثابت می‌شود. ■

۲-۴ قضیه. فرض کنید G یک گروه ناآبلی محض باشد و $Z(G) = \prod_{j=1}^{t} H_j$، $\frac{G}{G'} = \prod_{i=1}^{s} \frac{K_i}{G'}$. اگر $A_{ij} = \{\sigma_{f^*} \mid f \in Hom(\frac{K_i}{G'}, H_j)\}$ به طوری که $1 \le j \le t$ و $1 \le i \le s$ آنگاه

(۱) $|Aut_c(G)| = \prod_{i,j} |A_{ij}|$ و $|A_{ij}| = \left|Hom(\frac{K_i}{G'}, H_j)\right|$.

(۲) $Aut_c(G) = \prod_{i,j}^{*} A_{ij}$.

(۳) $Aut_c(G)$ آبلی است اگر و تنها اگر برای هر i، j ، k و l، $[A_{ij}, A_{kl}] = 1$.

(۴) اگر $Aut_c(G)$ آبلی باشد آنگاه $Aut_c(G) = \prod_{i,j} A_{ij}$.

برهان: (۱) با توجه به تعریف A_{ij} بدیهی است که $|A_{ij}| = \left|Hom(\frac{K_i}{G'}, H_j)\right|$ و در ادامه طبق قضیه ۲-۱-۳،

$$Hom(\frac{G}{G'}, Z(G)) = Hom(\frac{K_1}{G'} \times \cdots \times \frac{K_s}{G'}, H_1 \times \cdots \times H_t)$$

$$\cong Hom(\frac{K_1}{G'}, H_1) \times \cdots \times Hom(\frac{K_s}{G'}, H_1) \times Hom(\frac{K_1}{G'}, H_2) \times \cdots \times Hom(\frac{K_s}{G'}, H_t)$$

بنابراین

$$|Aut_c(G)| = \left|Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))\right| = \left|Hom(\frac{K_1}{G'}, H_1)\right| \ldots \left|Hom(\frac{K_s}{G'}, H_1)\right| \left|Hom(\frac{K_1}{G'}, H_2)\right| \ldots \left|Hom(\frac{G}{Z(G)}, C_p)\right|$$

$$= \prod_{i,j} |A_{ij}|$$

(۲) ما $\prod_{i,j}^{*} A_{ij} \to \prod_{j,i} A_{ij} : \varphi$ را با ضابطه $\varphi(\{\sigma_{f_{ij}^*}\}) = \prod_{i,j} \sigma_{f_{ij}^*}$ تعریف می‌کنیم با استدلال مشابه به لم قبل، φ یک‌به‌یک است و $\left|Aut_c(G)\right| = \left|\prod_{i,j} A_{ij}\right| \le \left|\prod_{i,j}^{*} A_{ij}\right|$. از طرف دیگر $\prod_{i,j}^{*} A_{ij} \subseteq Aut_c(G)$، بنابراین

$\left|Aut_c(G)\right| = \left|\prod_{i,j}^{*} A_{ij}\right| = \left|\prod_{i,j} A_{ij}\right|$. حال بنا به لم ۱-۱-۶، φ پوشاست و حکم ثابت می‌شود.

با توجه به قسمت (۲)، (۳) و (۴) مقدماتی است.■

۴-۳ لم. فرض کنید G یک گروه متناهی است و برای $f \in Hom(G, Z(G))$، $\sigma_f(x) = xf(x)$. به ازای $\sigma_f, \sigma_g \in Aut_c(G)$، $[\sigma_f, \sigma_g] = 1$ اگر و تنها اگر $fg = gf$.

به علاوه اگر برای هر f، $\mathrm{Im} f \le G'$، آنگاه $Aut_c(G)$ آبلی است.

برهان: $fg = gf$ اگر و تنها اگر

$$\sigma_f \sigma_g(x) = \sigma_f(xg(x)) = xg(x) f(xg(x)) = xg(x) f(x) f(g(x))$$

$$= xf(x) g(x) g(f(x)) = \sigma_g(xf(x)) = \sigma_g \sigma_f(x).$$

همچنین فرض کنیم $g(x) = z_1$ و $f(x) = z_2$، اگر برای هر f، $\mathrm{Im} f \le G'$، آنگاه

$$fg(x) = f(g(x)) = f(z_1) = \tilde{f}(z_1 G') = \tilde{f}(1) = f(1) = 1$$

$$gf(x) = g(f(x)) = g(z_2) = \tilde{g}(z_2 G') = \tilde{g}(1) = g(1) = 1$$

لذا $fg = gf$. بنابراین $Aut_c(G)$ آبلی است. ■

۴-۴ قضیه. فرض کنید G یک p-گروه آبلی و x عنصری از مرتبه p باشد اگر ارتفاع x یک باشد آنگاه $<x>$ یک عامل مستقیم از G است.

برهان: فرض کنید $G=<x_1>\times\cdots\times<x_m>$ یک تجزیه از G به عامل‌های دوری باشد که هر عنصر $x\in G$ به صورت $x=x_1^{s_1}\ldots x_m^{s_m}$ نوشته می‌شود. چون $height(x)=1$، ادعا می‌کنم برای بعضی از j ها، $1\le j\le m$، $p\nmid s_j$، زیرا اگر برای هر j، $1\le j\le m$، $p\,|\,s_j$ آنگاه $x=(x_1^{\frac{s_1}{p}}\ldots x_m^{\frac{s_m}{p}})^p$ که با فرض در تناقض است.

بنابراین $p\nmid s_j$ و در نتیجه $(s_j,p)=1$. پس $o(x_j^{s_j})=\dfrac{o(x_j)}{(o(x_j),s_j)}=o(x_j)$، لذا $o(x_j^{s_j})=o(x_j)$. از طرف دیگر $p=o(x)=[o(x_1^{s_1}),\ldots,o(x_m^{s_m})]$، چون $p\nmid s_j$، لذا $o(x_j^{s_j})=p$. بنابراین $o(x_j)=o(x)$.

حال قرار می‌دهیم $K=\prod_{i\ne j}^{*}<x_i>$، در این صورت،

$$x_j^{s_j}=(x_{j-1}^{-s_{j-1}}\ldots x_1^{-s_1})(x_1^{s_1}\ldots x_{j-1}^{s_{j-1}}x_j^{s_j}x_{j+1}^{s_{j+1}}\ldots x_m^{s_m})(x_m^{-s_m}\ldots x_{j+1}^{-s_{j+1}}).$$

پس $x_j^{s_j}\in K<x>$. چون $(s_j,p)=1$، اعداد صحیح a و b وجود دارد به طوری که $ap+bs_j=1$، در این صورت $x_j=x_j^{ap+bs_j}=(x_j^{p})^a(x_j^{s_j})^b=(x_j^{s_j})^b\in K<x>$. لذا $G=K<x>$.

از طرف دیگر چون G آبلی است، بنابراین $<x>$ و K نرمال‌اند.

ادعا می‌کنیم $<x>\cap K=1$. فرض می‌کنیم $<x>\cap K\ne 1$، از این که $|<x>\cap K|\,\big|\,(|<x>|,|K|)$ داریم $|<x>\cap K|=p$. لذا $<x>\cap K=<x>$، بنابراین $<x>\subseteq K$، که یک تناقض است. پس $G=K\times<x>$. ■

۵-۴ نتیجه. فرض کنید G یک p-گروه متناهی و x یک عنصر از G باشد به طوری که $<x>\lhd G$ و $o(x)=o(xG')=p$. اگر $height(xG')=1$ آنگاه $<x>$ یک عامل مستقیم از G است.

برهان: چون $o(xG')=p$ و $height(xG')=1$، بنابراین طبق قضیه ۴-۴، $<xG'>$ یک عامل مستقیم از $\frac{G}{G'}$ است. لذا $\frac{G}{G'}=<xG'>\times\frac{K}{G'}$ که در آن $K\lhd G$. از طرفی $o(x)=o(xG')$ پس

بدیهی است که $<x>\bigcap G'=1$. اگـر $g\in<x>\bigcap K$، آنگـاه $gG'\in<xG'>\bigcap\frac{K}{G'}$. لـذا $gG'=G'$.

بنابراین $g\in G'$ و درنتیجه $g\in<x>\bigcap G'=1$، ازاین‌رو $<x>\bigcap K=1$.

همچنین از $\frac{G}{G'}=<xG'>\times\frac{K}{G'}$، داریم $G=<x>KG'=<x>K$ و لذا $G=<x>K$.

از طرفی $<x>$ و K در G نرمال اند، پس $G=<x>\times K$.■

۴-۶ قضـیه. **فرض کنیم s یک عدد صحیح نامنفی باشد. اگر برای هـر عــدد صــحیح** t، $\gamma(t)=\frac{(s+1)^t-1}{s}$

آنگاه

(۱) $\gamma(t+1)=(s+1)\gamma(t)+1$.

(۲) اگــــر p یــــک عــــدد اول فــــرد باشـــد و $p|s$ آنگـــاه بـــرای هـــر عـــدد صحیـــح m،

$p^{m+1}|\gamma(p^m)-p^m$.

برهان: (۱)

$$(s+1)\gamma(t)+1=(s+1)\frac{(s+1)^t-1}{s}+1=\frac{(s+1)^{t+1}-(s+1)}{s}+\frac{s}{s}=\frac{(s+1)^{t+1}-1}{s}=\gamma(t+1)$$

(۲) داریم $\gamma(p^m)=s^{p^{m-1}}+\cdots+\binom{p^m}{i}s^{i-1}+\cdots+\binom{p^m}{2}s+p^m$**، کافی است نشان دهیم که برای هر** i،

$2\leq i\leq p^m$، $p^{m+1}\left|\binom{p^m}{i}s^{i-1}\right.$. **به عبارت دیگر نشان می‌دهیم** $p^{m+1}\left|\binom{p^m}{i}p^{i-1}\right.$.

فرض کنیـد $i=p^ji'$، j یک عـدد صحیح نـامنفی است و $p\nmid i'$.

می‌دانیـم $\binom{p^m}{i}=\frac{(p^m)!}{i!(p^m-i)!}$، حـال بـا محـاسـبه تـوان p از $(p^m-i)!$، $i!$ و $(p^m)!$ داریـم

$$[\frac{p^m-i}{p}]+[\frac{p^m-i}{p^2}]+[\frac{p^m-i}{p^3}]+\cdots=p^{m-1}+[\frac{-i}{p}]+p^{m-2}+[\frac{-i}{p^2}]+p^{m-3}+[\frac{-i}{p^3}]+\cdots$$

$$[\frac{i}{p}]+[\frac{i}{p^2}]+[\frac{i}{p^3}]+\cdots$$

$$.[\frac{p^m}{p}]+[\frac{p^m}{p^۲}]+[\frac{p^m}{p^۳}]+\cdots = p^{m-۱}+p^{m-۲}+p^{m-۳}+\cdots$$

اینک چون $i = p^j i'$، لذا توان p در مخرج به صورت

$$[\frac{i}{p}]+[\frac{-i}{p}]+[\frac{i}{p^۲}]+[\frac{-i}{p^۲}]+[\frac{i}{p^۳}]+[\frac{-i}{p^۳}]+\cdots = -(m-j)$$

چون $\binom{p^m}{i}$ عدد صحیح است، لذا با انتقال این توان به صورت کسر داریم، $p^{m-j}\,\Big|\binom{p^m}{i}$. چون $i = p^j i'$، پس $i \ge p^j$ و لذا $i-۱ \ge p^j-۱$، بنابراین $p^{p^j-۱}\big|p^{i-۱}$. ازاین‌رو $p^{p^j-۱+m-j}\,\Big|\binom{p^m}{i}p^{i-1}$، اما چون $p \ge ۳$ و $j \ge ۱$، پس $p^j > j+۱$ و لذا $p^j-۱ \ge j+۱$. درنتیجه $p^{m+۱}\,\Big|\binom{p^m}{i}p^{i-۱}$. در غیر این صورت، همانند استدلال بالا $p^m\,\Big|\binom{p^m}{i}$، همچنین چون $i \ge ۲$، $p\big|p^{i-۱}$.

بنابراین $p^{m+۱}\,\Big|\binom{p^m}{i}s^{i-۱}$. درنتیجه $p^{m+۱} \mid \gamma(p^m)-p^m$. ■

۴-۷ قضیه. فرض کنید در p-گروه ناآبلی محض G، $\frac{G}{G'} = \langle xG'\rangle \times \frac{K}{G'}$. همچنین $f \in Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))$ را با ضابطه $f = f_{x,z}$ در نظر بگیرید که در آن $k \in K$، اگر zG' به صورت منحصر به فرد $zG' = (xG')^s(kG')$ باشد که $s \ge ۰$ آنگاه

(۱) $p\,|\,s$

(۲) برای اعداد صحیح t، $\sigma_{f^*}{}^t(x) = xz^{\gamma(t)}$.

برهان: **(۱)** به برهان خلف فرض می‌کنیم $p \nmid s$، در این صورت $(p,s)=۱$ و لذا $\langle xG'\rangle = \langle x^sG'\rangle$.

همچنین $f^*(x) = f(xG') = z$، **پس** $o(z) \le o(xG')$.

از طرف دیگر $zG' = (x^sG')(kG')$، لذا $o(zG') = [o(x^sG'), o(kG')]$ و در نتیجه $o(zG') \ge o(x^sG')$. بنابراین $o(z) \ge o(zG') \ge o(x^sG') = o(xG') \ge o(\bar{f}(xG')) = o(z)$.

لذا $o(z) = o(zG') = o(xG')$.

حال چون $zG' = (xG')^s(kG')$ ازاین‌رو به وضوح $<zG'> \subseteq <xG'> \frac{K}{G'}$.

از طرفی چون $(p,s)=1$، لذا $(o(x),s)=1$، پس اعداد صحیح a و b وجود دارند به طوری که $ao(x)+bs=1$. بنابراین $x = x^{ao(x)+bs} = (x^{o(x)})^a(x^s)^b = (x^s)^b$. در نتیجه به ازای $k_1 \in K$ داریم $xG'k_1G' = ((x^s)G')^b k_1G'(k_1G')^{b-1}(k_1G')^{1-b} = (zG')^b(k_1G')^{1-b} \in <zG'> \frac{K}{G'}$. لذا بنا به خاصیت بسته بودن گروه $\frac{G}{G'} = <xG'> \frac{K}{G'} = <zG'> \frac{K}{G'}$، پس $\frac{G}{G'} = <zG'>(\frac{K}{G'})$. حال چون $o(zG') = o(xG')$،

$$\left|\frac{G}{G'}\right| = \left|<zG'>\frac{K}{G'}\right| = \frac{|<zG'>|\left|\frac{K}{G'}\right|}{\left|<zG'>\bigcap\frac{K}{G'}\right|} = \frac{|<xG'>|\left|\frac{K}{G'}\right|}{\left|<zG'>\bigcap\frac{K}{G'}\right|} = \frac{\left|\frac{G}{G'}\right|}{\left|<zG'>\bigcap\frac{K}{G'}\right|}$$

پس $<zG'>\bigcap\frac{K}{G'}=1$. از $\frac{G}{G'} = <xG'>\times\frac{K}{G'}$ داریم که $\frac{K}{G'}$ در $\frac{G}{G'}$ نرمال است. لذا K در G نرمال است. از طرفی $<zG'>$ نیز در $\frac{G}{G'}$ نرمال است، پس $\frac{G}{G'} = <zG'>\times(\frac{K}{G'})$. بنابراین $G = <z>KG' = <z>K$.

همچنین از $<zG'>\bigcap\frac{K}{G'}=1$ داریم $\frac{<z>G'}{G'}\bigcap\frac{K}{G'}=1$، ازاین‌رو $<z>G'\bigcap K \subseteq G'$. لذا $<z>\bigcap K \subseteq <z>G'\bigcap K \subseteq <z>\bigcap G' = 1$. چون $<z> \lhd G$ و $K \lhd G$، پس $G = <z>\times K$ که با ناآبلی محض بودن G در تناقض است.

(۲) فرض کنید $f^*(x) = f(xG') = z$ که در آن $z \in Z(G)$. در این صورت حکم به استقرا روی t ثابت می‌شود. اگر $t=1$ چون $\gamma(1)=1$، لذا $\sigma_{f^*}(x) = xf^*(x) = xz$. حال فرض می‌کنیم حکم برای $t=k$ برقرار باشد، یعنی $\sigma_{f^*}{}^k(x) = xz^{\gamma(k)}$. در این صورت

$$\sigma_{f^*}{}^{k+1}(x) = \sigma_{f^*}(\sigma_{f^*}{}^k(x)) = \sigma_{f^*}(xz^{\gamma(k)}) = xz^{\gamma(k)}f^*(xz^{\gamma(k)})$$
$$= xz^{\gamma(k)}f^*(x)f^*(z)^{\gamma(k)} = xz^{\gamma(k)+1}f(zG')^{\gamma(k)} = xz^{\gamma(k)+1}f(x^skG')^{\gamma(k)}$$
$$= xz^{\gamma(k)+1}f^*(x)^{s\gamma(k)} = xz^{(s+1)\gamma(k)+1} = xz^{\gamma(k+1)}$$

بنابراین حکم برای $t=k+1$ برقرار است و لذا اثبات به اتمام می‌رسد. ■

۸-۴ قضیه. **فرض کنید G یک p-گروه متناهی ناآبلی محض و p عدد اول فرد باشد به علاوه $\frac{G}{G'} = < xG' > \times (\frac{K}{G'})$ و $z \in Z(G)$. اگر $T = \{\sigma_{f^*} \mid f \in Hom(< xG' >, < z >)\}$، آنگاه T زیرگروه دوری $Aut(G)$ از مرتبه $d = (o(xG'), o(z))$ است.**

برهان: بنا بر خواص G، $|T| = |Hom(< xG' >, < z >)|$ و لذا با استفاده از لم ۱-۲-۵، $|T| = |(o(xG'), o(z))|$.

فرض کنید $z_\cdot$ عنصری از مرتبه d در $< z >$ باشد و $f = f^*_{x, z_\cdot}$. همچنین $z_\cdot G'$ به صورت $z_\cdot G' = (x^s G')(kG')$ نوشته شود که در آن $k \in K$ و $s \geq ۰$. حال بنا به لم ۴-۷، $p \mid s$ و به ازای هر t داریم $\sigma_{f^*}{}^t(x) = xz^{\gamma(t)}$. در این صورت برای اثبات حکم کافی است نشان دهیم $|T| = |\sigma_{f^*}|$.

فرض می‌کنیم $o(\sigma_{f^*}) = p^n$ و $o(z_\cdot) = p^m$. بنابر قضیه ۴-۶، $p^{m+۱} \big| \gamma(p^m) - p^m$. در نتیجه $\gamma(p^m) = p^{m+۱}t + p^m$ که در آن t عددی صحیح است. لذا $z_\cdot^{\gamma(p^m)} = z_\cdot^{p^m(pt+۱)} = ۱$، بنابراین از $\sigma_{f^*}{}^t(x) = xz^{\gamma(t)}$ داریم $\sigma_{f^*}{}^{p^m}(x) = x$. پس $\sigma_{f^*}{}^{p^m} = 1$ و $o(\sigma_{f^*}) \leq p^m$.

حال اگر $o(\sigma_{f^*}) = p^n$ آنگاه $\sigma_{f^*}{}^{p^n}(x) = xz^{\gamma(p^n)} = x$، لذا $z_\cdot^{\gamma(p^n)} = ۱$. اما $p^{n+۱} \big| \gamma(p^n) - p^n$ و در نتیجه عدد صحیح $t_۱$ چنان وجود دارد که $\gamma(p^n) = p^n(۱ + t_۱ p)$. لذا $(z_\cdot^{p^n})^{۱+t_۱p} = ۱$ و $(۱ + t_۱ p, p) = ۱$. از طرف دیگر با فرض $o(z_\cdot^{p^n})^{p^k} = ۱$ که در آن k عدد صحیح است، داریم $o(z_\cdot^{p^n}) \big| (۱ + t_۱ p, p^k) = ۱$. پس $z_\cdot^{p^n} = ۱$ و بنابراین $o(z) \leq p^n$. در نتیجه $p^n = p^m$ و $o(\sigma_{f^*}) = o(z) = d = |T|$. لذا $T = < \sigma_{f^*} >$ و حکم ثابت می‌شود. ■

۹-۴ قضیه. فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی محض است اگر $\exp(\frac{G}{G'}) = p$ یا $\exp(Z(G)) = p$، آنگاه $Aut_c(G)$ یک p-گروه آبلی مقدماتی است.

برهان: فرض کنیم $\exp(\frac{G}{G'}) = p$ و $f \in Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))$. همچنین فرض کنیم $x \in G$ و $x \notin G'$ ، $f(xG') = z$ کـــــه در آن $z \in Z(G)$. چــــون $\exp(\frac{G}{G'}) = p$، پــــس $o(xG') = p$ و لـــــذا $o(z) = o(f(xG'))|o(xG') = p$. حـــال اگـــر $o(zG') \neq 1$، آنگـــاه $o(zG') = o(z) = p$. از طرفـــی $\exp(\frac{G}{G'}) = p$، پس $height(zG') = 1$ و بنا به نتیجه ۴-۵، $<z>$ یک عامل مســتقیم G اسـت کـه بـا ناآبلی محض بودن G در تناقض است. در نتیجه $o(zG') = 1$ و $z \in G'$، پس $\mathrm{Im} f \leq G'$، از آنجا که f دلخواه بود بنا به قضیه ۴-۳، $Aut_c(G)$ آبلی است. حال چون هر عامل مستقیم دوری $Aut_c(G)$ از مرتبه p می‌باشد، لذا $Aut_c(G)$ یک p-گروه آبلی مقدماتی است .

حال فرض می‌کنیم $\exp(Z(G)) = p$ و $f \in Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))$ ، و برای هر $x \in G$، $f(xG') = z$ که در آن $z \in Z(G)$. به روشنی $o(z)|p$ و $o(zG')|o(z)$.

اگر $g \in Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))$ و $z \in G'$، آنگاه $fg(zG') = 1$.

درصورتی که zG' نابدیهی و $height(zG') = 1$، داریم $o(z) = o(zG') = p$. لـذا بنـا بـه نتیجـه ۴-۵، $<z>$ عامل مستقیم از G می‌باشد که با ناآبلی محض بودن G در تناقض اسـت. لـذا بـرای بعضـی از $m \geq 1$، $height(zG') = p^m$. بنابراین عنصر yG' از $\frac{G}{G'}$ وجود دارد به طوری که $zG' = (yG')^{p^m}$.

حـال اگـر $f, g \in Hom(\frac{G}{G'}, Z(G))$، چـون $\exp(Z(G)) = p$، آنگـاه

$$gf(xG') = g(f^*(x)) = g^*(z) = g(zG') = g(yG')^{p^m} = 1$$

چون f ، g و x دلخواه بودند، پس $fg = gf$ و لذا $Aut_c(G)$ آبلی اسـت و چـون هـر عامـل مسـتقیم دوری $Aut_c(G)$ از مرتبه p است، لذا $Aut_c(G)$ یک p-گروه آبلی مقدماتی است. ■

۴-۱۰ قضیه. فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی محض متناهی باشد که در آن p یک عدد اول فرد است. اگر $Aut_c(G)$ آبلی مقدماتی باشد آنگاه $\exp(\frac{G}{G'})=p$ یا $\exp(Z(G))=p$.

برهان: فرض کنید $Aut_c(G)$، p-گروه آبلی مقدماتی است ولی $\exp(\frac{G}{G'})>p$ و $\exp(z(G))>p$. همچنین فرض کنید $<z>$ و $<xG'>$ عوامل مستقیم دوری از مرتبه ماکسیمم از $Z(G)$ و $\frac{G}{G'}$ باشند. در این صورت بنا به قضیه ۴-۸، $T=\{\sigma_{f^*} \mid f\in Hom(<xG'>,<z>)\}$ زیرگروه دوری از مرتبه حداقل p^2 است که با فرض آبلی مقدماتی بودن $Aut_c(G)$ تناقض دارد. ■

۴-۱۱ نتیجه. فرض کنید G یک p-گروه ناآبلی محض باشد که در آن p یک عدد اول فرد است. در این صورت $Aut_c(G)$ آبلی مقدماتی است اگر و تنها اگر $\exp(\frac{G}{G'})=p$ یا $\exp(Z(G))=p$.

برهان: با توجه به قضایای ۴-۹ و ۴-۱۰ حکم بدیهی است. ■

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

action			عمل
automorphism			خودریختی
	central -	- مرکزی	
	inner -	- داخلی	
centralizer			مرکزساز
center group			مرکز گروه
direct			مستقیم
	- factor	عامل -	
	- product	حاصل ضرب -	
decomposition			تجزیه
divisible			قابل قسمت
elemen			عنصر
endomorphism			درونریختی
equivalently			به طور معادل (هم ارز)
exponent			نما
generator			مولد
	minimal -	- مینیمال	
group			گروه
	abelian -	- آبلی	
	central -	- مرکزی	
	cyclic -	- دوری	
	dihedral -	- دووجهی	
	elementary abelian -	- آبلی مقدماتی	
	finite -	- متناهی	
	nilpotent -	- پوچ‌توان	
	purely non-abelian -	- ناآبلی محض	
	quaternion -	- کاترینون	
	quotient -	- خارج قسمت	
height			ارتفاع
homomorphism			همریختی

index		اندیس
injective		یک به یک
isomorphism		یکریختی
	natural –	– طبیعی
nilpotent class		رده پوچ‌توانی
odd		فرد
order		مرتبه
p-group		p – گروه
pointwise		نقطه به نقطه
prime		اول
rank		رتبه
series		سری
	central –	– مرکزی
	normal –	– نرمال
	upper central –	– مرکزی بالایی
subgroup		زیرگروه
	central –	– مرکزی
	commutator –	– جابجاگر
	frattini –	– فراتینی
	maximal –	– ماکسیمال
	normal –	– نرمال
	proper –	– سره
	sylow –	– سیلو
trivial		بدیهی
well-defined		خوش تعریف

نمادگذاری

عدد اول	p
مرکز گروه G	$Z(G)$
Hزیر گروه G	$H \leq G$
Hزیر گروه سره G	$H < G$
Hزیر گروه نرمال G	$H \lhd G$
مرکز گروه G	$Z(G)$
مزدوج x توسط g	x^g
زیر گروه مشتق گروه G	G'
زیرگروه تولید شده توسط X	$< X >$
اندیس زیر گروه Hدر گروه G	$\|G : H\|$
گروه دوری از مرتبه n	C_n
عدد اصلی مجموعه X	$\|X\|$
جابجا گر a با b	$[a,b]$
مجموعه p - زیرگروه سیلوها از گروه G	$syl_p(G)$
زیرگروه فراتینی	$\phi(G)$
نما گروه G	
$exp(G)$	
مرکز ساز Hدر گروه G	$C_G(H)$
مرتبه عنصر x	$o(x)$
ارتفاع عنصر x	$height(x)$
مجموعه تمام همریختی‌ها از G به H	$Hom(G,H)$
گروه خودریختی‌های G	$Aut(G)$
گروه خودریختی‌های مرکزی G	$Aut_c(G)$
گروه خودریختی‌های داخلی G	$Inn(G)$
خودریختی داخلی القاء شده توسط g	i_g
هسته همریختی φ	$Ker\varphi$
$\{g^n \| g \in G\}$	G^n
$\{a \in Z_n \| (a,n)=۱\}$	U_n
$< g \in G \| g^{p^n} = 1 >$	$\Omega_n(G)$
ضرب مستقیم زیرگروه‌های G_iها از گروه G	$\prod G_i$

مجموعه تمام ماتریس‌های $n\times n$ با درایه‌های یک میدان q عضوی	$GL(n,q)$

REFERENCE

[1] M. S. Attar, (2007). On central automorphism that fix the centre element wise, *Arch. Math*, 89:296-297.

[2] M. J. Curran and D. J. McCaughan, (2001). Central automorphisms that are almost inner, *Communication in Algebra*, 29(5):2081-2087.

[3] M. H. Jafari, (2006). Elementary abelian p-groups as central automorphism groups, *Communication in Algebra,* 34(2):601-607.

[4] M. H. Jafari, and A. R. Jamali, (2008). On the nilpotency and solubility of central automorphism group of a finite group, *Algebra Colloquium*, 15(3),485-492.

[5] M. H. Jafari, and A. R. Jamali, (2006). On the occurrence of some finite groups in the central automorphism group of finite groups, *Math*. *Proc. Royal Irish Acad*, 106A(2): 139-148.

[6] A. R. Jamali, and H. Mousavi, (2002). On the central automorphism groups of finite p-groups, *Algebra Colloq*, 9(1):7-14.

[7] H. Liebeckm, (1954). A note on prime-power groups with symmetrical generating relations, *Proc*, *Cambridge Philos. Soc*, 51:394-395.

[8] J. J. Malone, (1984). P-group with non-abelian automorphism groups and all automorphisms central, *Bull. Austral. Math. Soc*, 29:35-37.

[9] K. Yadav Manoj, (2009). Central automorphism that fixing the central element-wis, *Communication in Algebra*, 37:4325-4331.

[10] M. Morigi, (1995). On the minimal number of generators of finite non-abelian p-group having an abelian automorphism group, *Comrn. Algebra*, 23(6):2045-2065.

[11] J. J. Rotman, (1995). An introduction to the theory of groups, 4^{th} Edition. *Springerverlag*, New York.

[12] P. R. Sanders, (1969). The central automorphisms of a finite group, *J. London Math. Soc*, 44:225-228.

.

[13] جعفری س ح، (۱۳۸۴)، رساله دکتری خودریختی‌های مرکزی گروه‌های متناهی، دانشکده علـوم ریاضی، دانشگاه تربیت معلم تهران.

[14] جمالی ع، (۱۳۸۰)، مباحثی در نظریه گروه‌ها، چاپ اول، انتشارات مبتکران، تهران.

[15] ساهای و، و بیست و، (مترجم هاشمی ا)، (۱۳۸۷)، جبر، چاپ اول، انتشارات صنعتی شـاهرود، دانشگاه صنعتی شاهرود.

[16] علیزاده م، (۱۳۸۹)، نظریه مقدماتی گروه‌ها، چاپ اول، انتشارات علمی و فرهنگی، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی گرگان.

[17] هانگرفورد توماس، (مترجم عالم زاده ع و زاکری ح)، (۱۳۸۷)، جبر، چاپ پنجم، انتشارات پژوهش، تهران.

Abstract

For any group G, the set of all automorphism of G is denoted by $Aut(G)$. An automorphim σ is called centeral if σ commutes with every inner automorphism. The central automorphisms form a normal subgroup of $Aut(G)$ and denoted by $Aut_c(G)$.

Let M and N be two normal subgroup of G. $Aut^N(G)$ and $Aut_M(G)$ are the subgroups of $Aut(G)$ consisting of all the automorphism which centralized $\frac{G}{N}$ and M respectively. We denote $Aut_M(G) \cap Aut^N(G)$ by $Aut_M^N(G)$.

In the first chapter, we state some basic concepts which are used in the next chapters. Then in the second chapter, we study central automorphism that are almost inner. Also in the third chapter 3, we pay attention on central automorphisms that fixing the center element-wise. Moreover, for nonabelian finite p_group G, in chapters 2,3 we will prove with two different methods, $Aut_c(G) = Inn(G)$ if and only if $Z(G) = G'$ and $Z(G)$ is cyclic.

Finally, in the last chapter, we give necessary and sufficient condition such that the group of central automorphisms of a finite purely nonablian p_group, (p odd) is elementary abelian group.

Keywords: central automorphism, inner automorphism, purely nonablian group, nilpotent group, exponent, elementary abelian group, height.

Shahrood University of Technology
Department of Mathematics
MS Thesis

Central Automorphisms That are Almost Inner

By:
Samira Soltani

Supervisor:
Heydar Jafari

Advisor:
Mahboubeh Alizadeh
Jun 2012