

دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان

α - احاطه گری در گراف ها

نگارش

زینب علی بیگی

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

شهریور ۱۳۹۰

قدردانی

تشکر و سپاس خداوندی را که فراگیری علم و دانش را تا این مقطع برای اینجانب فراهم ساخت. هر چند واژه ها را یارای آن نیست که لطف و محبت کسانی را مه در تمام دوران زندگیم جرعه نوش دریای مهر و محبتشان بوده ام به تصویر بکشم، اما به رسم ادب و احترام بوسه بر دستانشان زده و بر خود واجب می دانم از زحمات مستمر و بی دریغ استاد راهنمای بزرگوarm جناب آقای دکتر نادر جعفری راد که با راهنمایی های ارزنده خویش نقش مهمی در به ثمر رساندن این پایان نامه داشته اند صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم، همچنین از استاد مشاورم آقای دکتر صادق رحیمی شهرباف کمال تشکر را دارم از اساتید محترم آقایان دکتر بهزاد صالحیان و دکتر علیرضا ناظمی که زحمت داوری این پایان نامه را تقبل نمودند صمیمانه تشکر و قدردانی می کنم.

چکیده

فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی با n رأس و m یال و فاقد رأس تنها باشد و فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$. عددی حقیقی باشد. زیر مجموعه S از رؤس G را یک مجموعه α -احاطه گر نامیم، هرگاه برای هر رأس $v \in V - S$ ، $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$. کوچکترین اندازه یک مجموعه α -احاطه گر در گراف G را عدد α -احاطه گری G نامیده و آن را با $\gamma_\alpha(G)$ نشان می دهیم.

در فصل اول این پایان نامه مفاهیم و مقدمات نظریه گراف که در فصل های بعد به آنها نیازمندیم را یاد آوری می کنیم.

در فصل دوم مفهوم α -احاطه گری را به طور کامل بررسی خواهیم کرد و کران هایی قابل دسترس برای آن معرفی می کنیم.

در فصل سوم مفهوم α -احاطه گری را تعمیم می دهیم و آن را α -احاطه گری کلی می نامیم و مطالعه نسبتا جامعی در خصوص این موضوع جدید خواهیم داشت و کران هایی قابل دسترس برای آن پیدا خواهیم کرد.

فصل چهارم تأثیر حذف و افزایش یک یال و کاهش یک رأس را بر عدد α -احاطه گری بررسی می کنیم. همچنین گراف های بحرانی را تعریف کرده و آن ها را دسته بندی می کنیم.

نتایج حاصله در فصل های سوم و چهارم برای اولین بار در این پایان نامه انجام شده است.

واژه های کلیدی: احاطه گر، α -احاطه گر، α -احاطه گری کلی، گراف های بحرانی

فهرست مطالب

۱	۱	
۱	۱.۱	مقدمه
۲	۲.۱	تعاریف و نمادهای مقدماتی
۱۰	۳.۱	احاطه گری
۱۵	۴.۱	احاطه گری کلی
۱۷	۲	α - احاطه گری
۱۷	۱.۲	مقدمه
۱۸	۲.۲	تعاریف و نمادهای مقدماتی
۲۷	۳.۲	کران هایی روی $\gamma_\alpha(G)$
۳۲	۴.۲	مجموعه α - غیر زائد و α - مستقل
۳۸	۳	α - احاطه گری کلی
۳۸	۱.۳	مقدمه
۳۹	۲.۳	تعاریف و نتایج مقدماتی
۴۶	۳.۳	کران هایی روی α - احاطه گری کلی
۴۸	۴.۳	نتایج دیگر
۵۳	۴	گراف های بحرانی
۵۳	۱.۴	مقدمه
۵۳	۲.۴	تأثیر حذف یک رأس و کاهش و افزایش یک یال بر $\gamma_\alpha(G)$
۵۷	۳.۴	γ_α - یال بحرانی و γ_α - یال بحرانی بالا
۶۴		مراجع
۶۶		واژه نامه فارسی به انگلیسی
۶۸		واژه نامه انگلیسی به فارسی

فصل ۱

۱.۱ مقدمه

در دنیای اطراف ما، مسائل فراوانی وجود دارند که می توان توسط نموداری متشکل از یک مجموعه نقاط، به علاوه ی خطوطی که برخی از این نقاط را به یکدیگر متصل می کنند، به توصیف آن ها پرداخت. به عنوان مثال، برای نشان دادن رابطه دوستی بین یک دسته از انسان ها می توانیم هر شخص را با یک نقطه مشخص کنیم رابطه دوستی بین افراد را با یک خط متصل بین آن نقاط مشخص کنیم. توجه داشته باشید که در این گونه نمودارها، آنچه بیشتر مورد توجه است این است که آیا دو نقطه داده شده به وسیله یک خط به یکدیگر متصل هستند یا نه، و طریقه اتصال آنها اهمیتی ندارد.

در این فصل به تعاریف و مفاهیم اولیه نظریه گراف می پردازیم و برای تعاریف و مفاهیم دیگری که در اینجا ذکر نمی شود خواننده را به مراجع [۱، ۱۷] ارجاع می دهیم. همچنین با مفاهیم احاطه گری و احاطه گری کلی آشنا شده و برخی از قضایا و نتایج مورد استفاده در فصل های بعد را مطرح می کنیم.

۲.۱ تعاریف و نمادهای مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. گراف G یک سه تایی مرتب $(V(G), E(G), \Psi_G)$ ، متشکل از مجموعه ناتهی $V(G)$ ی رأس ها، مجموعه $E(G)$ ی یال های مجزا از $V(G)$ ، و تابع وقوع Ψ_G است که با هر یال G ، یک جفت نامرتب (نه لزوماً مجزا) از رأس های G را همراه می کند. اگر e یک یال و u و v رأس هایی باشند، به قسمی که $\Psi_G(e) = uv$ ، آنگاه می گویند e را به v وصل می کند، رأس های u و v را دو انتهای e می نامند.

در سراسر این پایان نامه، گراف G را به صورت یک دوتایی مرتب $(V(G), E(G))$ معرفی می کنیم که از یک مجموعه ناتهی $V(G)$ موسوم به مجموعه رأس ها و مجموعه $E(G)$ موسوم به مجموعه یال ها تشکیل شده است.

حرف G نشان دهنده ی یک گراف است و برای سهولت به جای $V(G)$ و $E(G)$ ، به ترتیب از V و E استفاده می کنیم.

تعریف ۲.۲.۱. یک گشت به طول k ، یک دنباله ی متناوب $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ از رأس ها و یال ها است، به طوری که به ازای هر i ، $e_i = v_{i-1}v_i$ یک یال باشد. یک گذر گشتی است که هیچ یال تکراری نداشته باشد.

تعریف ۳.۲.۱. یک مسیر گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت فهرست مرتبی از رأس های متمایز $v_1, v_2, \dots, v_n$ در نظر می گیریم، به طوری که به ازای هر $2 \leq i \leq n$ ، $v_{i-1}v_i$ یک یال باشد.

تعریف ۴.۲.۱. یک دور گذر بسته ای به طول حداقل یک است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری دیگری نداریم. یک دور را به صورت

فهرست مرتبی از $v_1, v_2, \dots, v_n$ در نظر می گیریم، به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq n$ ، $v_{i-1}v_i$ یک یال باشد. (یک طوقه دوری به طول یک است).

تعریف ۵.۲.۱. یک گراف، ساده است اگر هیچ طوقه ای نداشته باشد و بین هر دو رأس آن، بیش از یک یال موجود نباشد.

تعریف ۶.۲.۱. درجه رأس v در G تعداد یال های G است که v بر آن ها واقع است و آن را با $\deg(v)$ نمایش می دهیم. بزرگترین درجه در میان درجات رؤس گراف G را با $\Delta(G)$ و کوچکترین درجه را با $\delta(G)$ نمایش می دهیم. گراف G ، k - منتظم نامیده می شود هرگاه درجه هر رأس آن، k باشد.

تعریف ۷.۲.۱. مجموعه ای از رؤس که با رأس v از گراف G مجاور باشند را همسایگی باز رأس v نامیده و و آنرا با $N(v)$ نمایش می دهیم. همسایگی باز زیرمجموعه S از رؤس گراف G را به صورت $\cup_{v \in S} N(v)$ تعریف می کنیم و آن را با $N(S)$ نمایش می دهیم. $N(v) \cup v$ را همسایگی بسته رأس v نامیده و آنرا با $N[v]$ نمایش می دهیم. همچنین همسایگی بسته زیر مجموعه S از رؤس گراف G را به صورت $\cup_{v \in S} N[v]$ تعریف می کنیم، و آن را با $N[S]$ نمایش می دهیم.

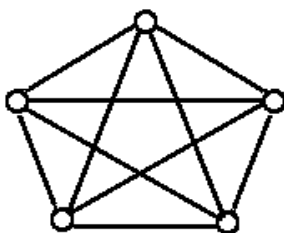
تعریف ۸.۲.۱. گراف G همبند نامیده می شود هرگاه به ازای هر دو رأس متمایز u و v از G مسیری از u به v موجود باشد. (یا یک (u, v) - مسیر موجود باشد)

تعریف ۹.۲.۱. فاصله بین دو رأس u و v در گراف G که با $d_G(u, v)$ نمایش داده می شود، عبارت است از طول کوتاهترین (u, v) - مسیر در گراف G . قطر گراف G برابر است با بیشترین فاصله بین دو رأس از G و با $diam(G)$ نمایش داده می شود.

قضیه ۱۰.۲.۱. [۱] در هر گراف G با m یال، $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m$.

تعریف ۱۱.۲.۱. گرافی که در آن هر دو رأس متمایز توسط یک یال به یکدیگر متصل شده باشند، گراف کامل نامیده می شود. یک گراف کامل n رأسی را با K_n نمایش می دهیم. همچنین منظور از P_n و C_n به ترتیب یک مسیر و یک دور n رأسی می باشد.

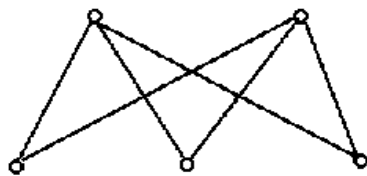
شکل ۱.۱ گراف کامل K_5 را نشان می دهد.



شکل ۱.۱: گراف کامل K_5

تعریف ۱۲.۲.۱. گراف دو بخشی گرافی است که مجموعه رأس های آن به دو زیر مجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال های G در X و سر دیگر آن ها در Y باشد. یک گراف دو بخشی با بخش های X و Y ، که در آن هر رأس X ، به هر رأس Y وصل شده باشد گراف دو بخشی کامل نامیده می شود. اگر $|X| = m$ و $|Y| = n$ آنگاه گراف دو بخشی کامل با بخش های X و Y را با $K_{m,n}$ نمایش می دهیم. گراف k - بخشی، گرافی است که می توان مجموعه رأس های آن را به k زیرمجموعه طوری افراز کرد که دو سر هیچ یالی در یک زیر مجموعه نباشد. گراف k - بخشی کامل، یک گراف k - بخشی است که در آن، هر رأس یک بخش به تمام رأس هایی که در بخش های دیگر قرار دارند، وصل شده باشد.

شکل ۲.۱ گراف دو بخشی کامل $K_{2,3}$ را نشان می دهد.

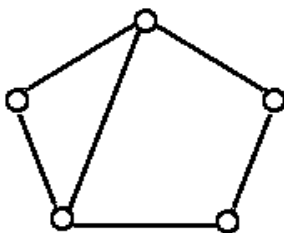


شکل ۲.۱: گراف دو بخشی کامل $K_{2,3}$

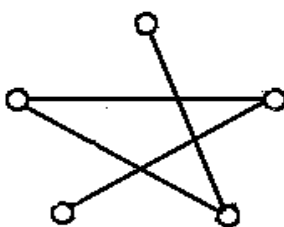
تعریف ۱۳.۲.۱. یک زیرگراف از گراف G ، گرافی مانند H است که $V(H) \subseteq V(G)$ و

$$E(H) \subseteq E(G) \text{ به طوری که } V(H) \neq \emptyset$$

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید G گرافی n رأسی باشد، متمم (یا مکمل) گراف G را با $\bar{G}$ نشان داده و به این صورت تعریف می کنیم: $V(G) = V(\bar{G})$ و هر دو رأس مانند u و v در $\bar{G}$ مجاور هستند، اگر و تنها اگر در G مجاور نباشند. شکل های ۳.۱ و ۴.۱ گراف G و متمم آنرا نشان می دهند.



شکل ۳.۱:



شکل ۴.۱:

تعریف ۱۵.۲.۱. فرض کنید S زیر مجموعه ناتهی از V باشد. زیر گراف G را که مجموعه رأس هایش S و مجموعه یال هایش، زیر مجموعه ای از یال های G باشد که هر دو انتهایش در S قرار دارد، زیر گراف القا شده به وسیله S نامیده و با $G[S]$ نمایش می دهند.

تعریف ۱۶.۲.۱. گراف همبندی که فاقد دور باشد درخت نام دارد. یک برگ (رأس آویزان) رأسی از درجه یک است. یک رأس تنها، رأسی است که دارای درجه صفر باشد.

تعریف ۱۷.۲.۱. رأسی که در همسایگی یک برگ باشد رأس پشتیبان نام دارد. مجموعه رئوس پشتیبان گراف G را با $S(G)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۱۸.۲.۱. گراف های G و H را در نظر بگیرید. حاصلضرب دکارتی آنها را که به صورت $G \square H$ می نویسیم، گرافی با مجموعه رأس های $V(G) \times V(H)$ می باشد که در آن رأس (u, v) مجاور با رأس (u', v') است اگر و تنها اگر یکی از دو حالت زیر برقرار باشد:

$$(۱) \quad u = u' \text{ و } vv' \in E(H)$$

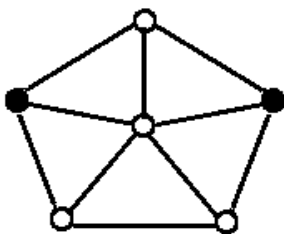
$$(۲) \quad v = v' \text{ و } uu' \in E(G)$$

تعریف ۱۹.۲.۱. زیر مجموعه ای از یال های گراف G که هیچ دو تایی از آنها رأس مشترکی نداشته باشند تطابق نام دارد. اگر M یک تطابق در G باشد و x رأسی روی یکی از یالهای M

باشد گوییم M ، x را اشباع می کند. اگر هر رأس از گراف G توسط تطابق M اشباع شود M را تطابق کامل می نامیم.

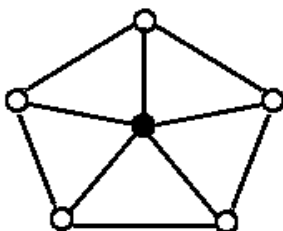
تعریف ۲۰.۲.۱. زیر مجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه مستقل می نامیم، هرگاه هیچ دو رأسی در مجموعه S مجاور نباشند، یعنی برای هر رأس $v \in S$ داشته باشیم $|N(v) \cap S| = 0$. مجموعه مستقل S را ماکسیمال می نامیم، هرگاه نتوان هیچ رأس جدید مانند v را به S اضافه کرد به طوری که $S \cup \{v\}$ نیز مستقل باشد.

اندازه بزرگترین مجموعه مستقل ماکسیمال از رئوس گراف G را با $\beta(G)$ نمایش می دهیم. شکل ۵.۱ بزرگترین مجموعه مستقل ماکسیمال را نشان می دهد.



شکل ۵.۱: $\beta(G) = 2$

اندازه کوچکترین مجموعه مستقل ماکسیمال از رئوس گراف G را با $i(G)$ نمایش می دهیم. شکل ۶.۱ کوچکترین مجموعه مستقل ماکسیمال را نشان می دهد.



شکل ۶.۱: $i(G) = ۱$

تعریف ۲۱.۲.۱. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه غیر زائد گوئیم، هرگاه برای هر $x \in S$ ، رأسی مانند $y \in N[x]$ وجود داشته باشد، به طوری که

$$|N(y) \cap (S - \{x\})| = ۰ \text{ و } y \notin S - \{x\}$$

اندازه بزرگترین مجموعه غیر زائد ماکسیمال از رئوس گراف G را با $IR(G)$ نمایش می دهیم.

اندازه کوچکترین مجموعه غیر زائد ماکسیمال از رئوس گراف G را با $ir(G)$ نمایش می دهیم.

تعریف ۲۲.۲.۱. اندازه کوچکترین زیر مجموعه S از رئوس گراف G ، به طوری که هر یال G حداقل یک سر در S داشته باشد را عدد پوشش رأسی G نامیده و آنرا با $\alpha_*(G)$ نمایش می دهیم.

در سال ۱۹۵۹ گالای^۱ [۷] رابطه زیر را ارائه نمود.

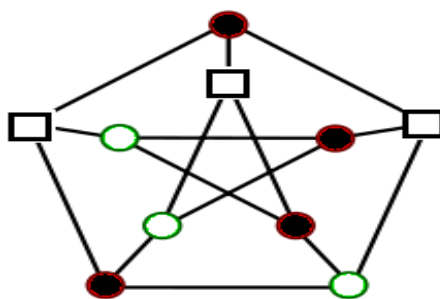
قضیه ۲۳.۲.۱. برای هر گراف G ، $\beta(G) + \alpha_*(G) = n$.

^۱Gallai

تعریف ۲۴.۲.۱. یک k - رنگ آمیزی واقعی از گراف G تابعی است مانند $f : V(G) \rightarrow C$ که $C = \{1, 2, \dots, k\}$ و به ازای هر دو رأس مجاور مانند x, y ، $f(x) \neq f(y)$. عدد رنگی گراف G که با $\chi(G)$ نشان داده می شود، عبارت است از حداقل تعداد k ، به طوری که G دارای یک k -رنگ آمیزی واقعی باشد.

توجه کنید که رأس های هم رنگ در یک رنگ آمیزی واقعی گراف G ، مجموعه ی مستقل تشکیل می دهند. لذا $\chi(G)$ با کمترین تعداد مجموعه های مستقل برای پوشش $V(G)$ برابر است.

شکل ۷.۱ رنگ آمیزی گراف پترسن را نشان می دهد.



شکل ۷.۱: $\chi(G) = 3$

قرارداد: $[n]$ و $[x]$ را به ترتیب برای نمایش کف و سقف x به کار می بریم، $[x]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است و $[x]$ کوچکترین عدد صحیح بزرگتر یا مساوی x است.

قضیه ۲۵.۲.۱. [۹] اگر P_n مسیری با n رأس باشد، آنگاه $\alpha_*(P_n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

قضیه ۲۶.۲.۱. [۹] اگر C_n دوری با n رأس باشد، آنگاه $\alpha_*(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$.

۳.۱ احاطه گری

در سال های اخیر، مفهوم احاطه گری در گراف ها به دلیل کاربردهای زیاد آن در زمینه های مختلف همچون علوم کامپیوتر و شبکه های الکترونیکی مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته و رشد چشمگیری داشته است. این مفهوم برای نخستین بار در سال ۱۸۶۲ توسط دوجکنیش^۲ روی صفحه شطرنج مورد استفاده قرار گرفت. اما بعدها به عنوان یک بحث نظری در نظریه گراف ها بررسی و مطالعه گردید و تا کنون مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است.

در سال ۱۸۶۲ بال^۳ [۱۵] مسأله کمترین تعداد مهره های وزیر مورد نیاز جهت قرار گرفتن روی صفحه شطرنج را به قسمی که هر خانه ای مورد حمله یک وزیر قرار گرفته و هیچ وزیری مورد حمله وزیر دیگری نباشد، مطرح کرد. این مسأله به مسأله ۵ - وزیر مشهور شد. ازجمله کاربردهای دیگر آن می توان درمخابرات برای نصب دکل های آنتن در مناطقی از شهر یا انتخاب بهترین مکان ها برای احداث بیمارستان یا مراکز آتش نشانی و... اشاره نمود. به عنوان مثال فرض کنید قرار است در مناطقی از شهر دکل های مخابرات نصب شود به طوری که به تمامی نقاط شهر آنتن دهی مناسب انجام شده و همچنین از نظر اقتصادی نیز مقرون به صرفه باشد. یعنی با انتخاب کمترین نقاط برای نصب دکل به هدف مورد نظر دست یابیم. برای این منظور مناطق مختلف شهر را به عنوان رئوس گراف در نظر می گیریم و با توجه به برد آنتن دهی، در صورت نصب دکل در هر منطقه، آن مناطقی که آنتن دهی می شوند را با خطوطی به آن متصل می کنیم و به این ترتیب یال های گراف مورد نظر را رسم کرده و گرافی طراحی می کنیم. حال به دنبال کمترین تعداد رأس از گراف هستیم، به طوری که

^۲De Jacnish

^۳w. w. Rouse Ball

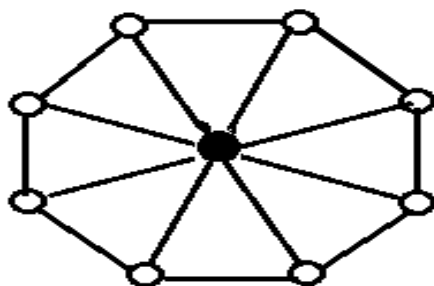
تمامی رئوس بیرونی را تحت پوشش قرار دهد.

تعریف ۱.۳.۱. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه گر می نامیم، هرگاه برای هر رأس $v \in V - S$ ، $|N(v) \cap S| \geq 1$. معادل تعریف فوق به این صورت می باشد که $N[S] = V(G)$.

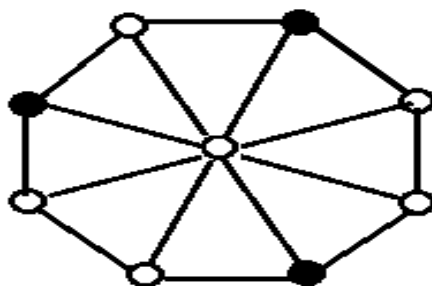
کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه گر در گراف G را عدد احاطه گری G نامیده و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می دهیم.

بزرگترین اندازه یک مجموعه احاطه گر مینیمال در گراف G را عدد احاطه گری بالای G نامیده و با $\Gamma(G)$ نمایش می دهیم.

شکل ۸.۱ کوچکترین مجموعه احاطه گر و شکل ۹.۱ بزرگترین مجموعه احاطه گر مینیمال گراف مورد نظر را نشان می دهد.



شکل ۸.۱: $\gamma(G) = 1$

شکل ۹.۱: $\Gamma(G) = ۳$

قضیه ۲.۳.۱. [۹] اگر مسیری P_n با n رأس و C_n دوری با n رأس باشد، آنگاه

$$\gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$$

قضیه ۳.۳.۱. هر مجموعه احاطه گر مینیمال یک مجموعه غیر زائد ماکسیمال است.

اثبات. فرض کنید زیر مجموعه S از رئوس گراف G یک مجموعه احاطه گر مینیمال باشد. بنابراین طبق تعریف مجموعه احاطه گر برای هر رأس $v \in V - S$ ، $|N(v) \cap S| \geq ۱$. حال به برهان خلف حکم را ثابت می کنیم. فرض کنید رأسی مانند x وجود داشته باشد به طوری که $x \in S$ و برای هر $y \in N[x]$ و $y \notin S - \{x\}$ و $|N(y) \cap S - \{x\}| \neq ۰$ در نتیجه حداقل دو همسایگی در مجموعه S موجود می باشد. بنابراین می توان x را حذف کرد. زیرا تمام رئوس موجود در همسایگی x حداقل توسط یک رأس دیگر در S احاطه می شوند. لذا $S - \{x\}$ نیز یک مجموعه احاطه گر می باشد که با فرض مسأله در تناقض است. بنابراین هر مجموعه احاطه گر مینیمال یک مجموعه غیر زائد است. حال نشان می دهیم مجموعه احاطه گر مینیمال S یک مجموعه غیر زائد ماکسیمال است. (برهان خلف) فرض کنید مجموعه S غیر زائد ماکسیمال نباشد بنابراین رأسی مانند z وجود دارد به طوری که $S \cup \{z\}$ غیر زائد

است. این مجموعه را S' می نامیم. بنابراین برای $z \in S'$ وجود دارد $y \in N[z]$ به طوری که $y \notin S' - \{z\}$ و $|N(y) \cap S' - \{z\}| = 0$. لذا $|N(y) \cap S| = 0$. بنابراین مجموعه S احاطه گر نمی باشد و این با فرض مسأله در تناقض است. $\square$

قضیه ۴.۳.۱. هر مجموعه مستقل ماکسیمال یک مجموعه احاطه گر مینیمال است.

اثبات. فرض کنید زیر مجموعه S از رئوس گراف G یک مجموعه مستقل ماکسیمال باشد. بنابراین هر رأس خارج از مجموعه S مانند x ، توسط حداقل یک رأس در مجموعه S احاطه می شود. زیرا اگر چنین نباشد، آنگاه آن رأس نسبت به رئوس موجود در مجموعه S مستقل خواهد بود و با اضافه شدن آن رأس به مجموعه S ، مجموعه $S \cup \{x\}$ مجموعه ای مستقل خواهد بود و این با فرض مسأله در تناقض می باشد، زیرا مجموعه S مستقل ماکسیمال است. بنابراین مجموعه S احاطه گر می باشد. حال ثابت می کنیم مجموعه S احاطه گر مینیمال می باشد. (برهان خلف) فرض کنید مجموعه S احاطه گر مینیمال نباشد. بنابراین رأسی مانند y در مجموعه S وجود دارد، به طوری که مجموعه $S - \{y\}$ احاطه گر می باشد. این مجموعه را S' می نامیم. بنابراین رأس y باید توسط رأسی در S' مانند z احاطه شود. لذا z و y مجاور می باشند و این با فرض مسأله که مجموعه S مستقل ماکسیمال است، در تناقض می باشد. $\square$

با توجه به قضیه ۳.۳.۱ و با توجه به این که $IR(G)$ بزرگترین مجموعه غیرزائد ماکسیمال است داریم $\Gamma(G) \leq IR(G)$. همچنین با توجه به اینکه $ir(G)$ کوچکترین مجموعه غیرزائد ماکسیمال است داریم $ir(G) \leq \gamma(G)$. با توجه به قضیه ۴.۳.۱ و با توجه به اینکه $\Gamma(G)$ بزرگترین مجموعه احاطه گر مینیمال می باشد، داریم $\beta(G) \leq \Gamma(G)$. همچنین با توجه به اینکه $\gamma(G)$ کوچکترین مجموعه احاطه گر مینیمال می باشد، داریم $\gamma(G) \leq i(G)$.

و طبق تعریف مجموعه مستقل ماکسیمال $i(G) \leq \beta(G)$. بنابراین [۳]

$$ir(G) \leq \gamma(G) \leq i(G) \leq \beta(G) \leq \Gamma(G) \leq IR(G)$$

قضیه ۵.۳.۱. برای هر یال e در گراف G ، $\gamma(G) \leq \gamma(G - e)$.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma(G - e)$ - مجموعه و $e = xy$ یال دلخواهی باشد. اگر $\{x, y\} \subseteq S$ ، آنگاه S یک مجموعه احاطه گر برای گراف G می باشد. زیرا با اضافه شدن یال xy به مجموعه S و با توجه به تعریف احاطه گری، مجموعه S همچنان رئوس خارجی را احاطه می کند. لذا $\gamma(G) \leq \gamma(G - e)$. اگر $\{x, y\} \not\subseteq S$ آنگاه به وضوح S یک مجموعه احاطه گر برای گراف G می باشد. لذا $\gamma(G) \leq \gamma(G - e)$. اگر $x \in S$ و $y \notin S$ ، آنگاه با اضافه شدن یال $e = xy$ به مجموعه S یک مجموعه احاطه گر برای گراف G می باشد. لذا $\gamma(G) \leq \gamma(G - e)$.

□

مسأله ی احاطه گری در دهه های گذشته در بیش از ۸۰ نوع شاخه تقسیم بندی شده و گسترش فراوانی داشته است. از جمله آنها می توان به احاطه گری کلی^۴ و α - احاطه گری^۵ و احاطه گری k -لایه^۶ و احاطه گری زوج^۷ اشاره نمود. در این پایان نامه درباره α - احاطه گری به طور مفصل بحث خواهیم کرد. همچنین پارامتر جدیدی به نام α - احاطه گری کلی^۸ برای اولین بار مورد مطالعه واقع خواهد شد که لازم است قبل از مطرح کردن آنها مطالبی را در خصوص احاطه گری کلی بیان نماییم.

^۴total- domination

^۵ α -domination

^۶k-tuple-domination

^۷paired-domination

^۸total- α -domination

۴.۱ احاطه گری کلی

در سال ۱۹۸۰ به دنبال حل مسأله ۵ - وزیر، هدتنیمی^۹ و داووز^{۱۰} و کوکین^{۱۱} مسأله احاطه گری کلی را در مقاله ای تحت عنوان "احاطه گری کلی در گراف"^[۲] مطرح کردند.

فرض کنید ساخت بیمارستان در نقاط مختلف شهر مورد نظر باشد و هدف به گونه ای باشد که هر بیمارستان حداقل توسط یک بیمارستان دیگر پوشش داده شود تا در صورت کمبود امکانات پزشکی، از آن بیمارستان کمک گرفته شود. بدین منظور گراف مورد نظر را به همان صورت ذکر شده در مثال های قبل طراحی کرده و با استفاده از مسأله ی احاطه گری کلی آن را بررسی می کنیم.

تعریف ۱.۴.۱. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه احاطه گر کلی می نامیم، هرگاه برای هر رأس $v \in V$ ، $|N(v) \cap S| \geq 1$. معادل این تعریف به این صورت می باشد که $N(S) = V(G)$.

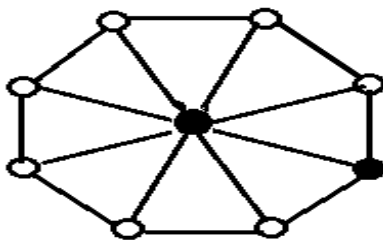
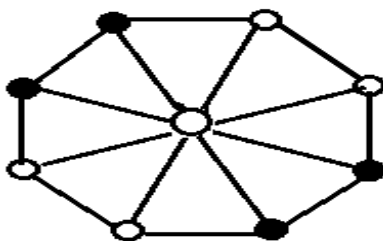
کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه گر کلی در گراف G را عدد احاطه گری کلی G نامیده و آن را با $\gamma_t(G)$ نمایش می دهیم. بزرگترین اندازه یک مجموعه احاطه گر کلی مینیمال در گراف G را عدد احاطه گری کلی بالای G نامیده و با $\Gamma_t(G)$ نمایش می دهیم.

شکل ۱۰.۱ کوچکترین مجموعه احاطه گر کلی و شکل ۱۱.۱ بزرگترین مجموعه احاطه گر کلی مینیمال را نشان می دهد.

^۹S. T. Hedetniemi

^{۱۰}R. M. Dawes

^{۱۱}Cockayne

شکل ۱.۱۰:۲ $\gamma_t(G)$ شکل ۱.۱۱:۴ $\Gamma_t(G)$

قضیه ۲.۴.۱. [۹] اگر P_n مسیری n رأسی و C_n دوری n رأسی باشد، آنگاه

$$\gamma_t(P_n) = \gamma_t(C_n) = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$$

این نکته را متذکر می شویم که برای تمامی گراف ها مقادیر دقیق عدد احاطه گری و احاطه گری کلی بدست نیامده، بلکه دانشمندان توانسته اند در حالت کلی کران هایی برای آن پیدا کنند و همچنان در تلاشند که این کران ها را بهبود داده و به مقدار واقعی آنها نزدیک کنند. برای مطالعه بیشتر خواننده را به مراجع [۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳] ارجاع می دهیم.

فصل ۲

α - احاطه گری

۱.۲ مقدمه

همانطور که در فصل قبل گفته شد یکی از شاخه های احاطه گری در گراف ها مسأله α - احاطه گری می باشد که در سال ۲۰۰۰ توسط دانشمندان بزرگی چون دانبر^۱، هافمن^۲، لاسکار^۳ و مارکوس^۴ در مقاله ای تحت عنوان " α - احاطه گری" [۶] مطرح شد. α -احاطه گری در واقع تعمیمی از احاطه گری است، به این صورت که در مسأله احاطه گری درجه رؤس خارج از مجموعه احاطه گر، اهمیتی ندارند و هدف این است که هر رأس خارج از مجموعه احاطه گر، توسط رؤس موجود در مجموعه پوشش داده شود، اما در مسأله α - احاطه گری درجه رؤس نیز اهمیت دارند و هر رأسی که درجه بیشتری داشته باشد، توسط رؤس بیشتری احاطه می شود. برای روشن شدن اهمیت این موضوع مثال تأسیس بیمارستان در نقاطی از شهر را در نظر بگیرید. اگر بخواهیم در انتخاب مکان های مورد نظر فاکتورهایی مثل جمعیت منطقه، ترافیک و... را در نظر بگیریم، در مناطقی با جمعیت بالا باید مراکز درمانی بیشتری وجود داشته باشد، که اولاً امکانات پزشکی به درستی در اختیار مردم قرار

^۱J.E.Dunbar

^۲D.G.Hoffman

^۳R.C.Laskar

^۴L.R.Markus

گیرد، ثانياً به دلیل وجود ترافیک در مواقع اورژانسی، امکان استفاده از چند مرکز درمانی وجود داشته باشد. بنابراین گراف مورد نظر را به شیوه ای که قبلاً توضیح دادیم، طراحی کرده و آن را به کمک مسأله α - احاطه گری مورد مطالعه قرار می دهیم.

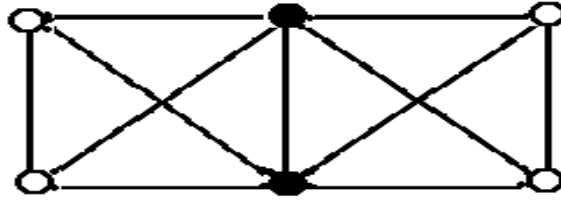
در این فصل مقدار دقیق کوچکترین مجموعه α - احاطه گر را در برخی گراف های خاص بدست آورده و برای دیگر گراف ها کران هایی قابل دسترس معرفی می کنیم. همچنین رابطه مجموعه α - احاطه گر را با مجموعه α - غیر زائد و α - مستقل بررسی می نماییم. در کلیه قضایای این فصل که بدون ذکر مرجع نوشته شده اند، از مقاله [۶] استفاده شده است.

۲.۲ تعاریف و نمادهای مقدماتی

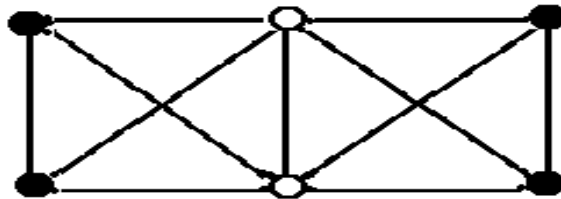
تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی با n رأس و m یال و فاقد رأس تنها باشد و فرض کنید $0 < \alpha \leq 1$ عددی حقیقی باشد. زیر مجموعه S از رئوس G را یک مجموعه α - احاطه گر نامیم، هرگاه برای هر رأس $v \in V - S$ ، $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$. کوچکترین اندازه یک مجموعه α - احاطه گر در گراف G را عدد α - احاطه گری G نامیده و آن را با $\gamma_\alpha(G)$ نشان می دهیم.

بزرگترین اندازه یک مجموعه α - احاطه گر مینیمال در گراف G را عدد α - احاطه گری بالایی G نامیده و آن را با $\Gamma_\alpha(G)$ نشان می دهیم. در این پایان نامه منظور از یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه، مجموعه ای α - احاطه گر با اندازه ی $\gamma_\alpha(G)$ است.

شکل ۱.۲ کوچکترین مجموعه $\frac{2}{3}$ - احاطه گر و شکل **۳.۲** بزرگترین مجموعه $\frac{2}{3}$ - احاطه گر مینیمال را نشان می دهد.



شکل ۱.۲: $\gamma_{\frac{1}{2}}(G) = 2$



شکل ۲.۲: $\Gamma_{\frac{1}{2}}(G) = 4$

نتیجه ۲.۲.۲. با توجه به تعریف ۱.۲.۲، برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، حداقل یک رأس خارج از مجموعه S وجود دارد. لذا $\gamma_{\alpha}(G) < n$.

نتیجه ۳.۲.۲. با توجه به تعریف ۱.۲.۲، به ازای $\alpha = 1$ برای هر رأس خارج از مجموعه S ، تمام همسایه های آن رأس در S قرار دارد. بنابراین هر یال حداقل یک سر در S دارد. لذا $\gamma_1(G) = \alpha_*(G)$.

لم ۴.۲.۲. اگر $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_{\alpha_1}(G) \leq \gamma_{\alpha_2}(G)$.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_{\alpha_2}(G)$ - مجموعه باشد. در این صورت برای هر $0 < \alpha \leq 1$ و هر رأس $v \in V - S$ ، $|N(v) \cap S| \geq \alpha_2 |N(v)|$. از طرفی با توجه به فرض مسئله $\alpha_2 > \alpha_1$. بنابراین $|\alpha_2 |N(v)| > \alpha_1 |N(v)|$ در نتیجه $|N(v) \cap S| \geq \alpha_2 |N(v)| > \alpha_1 |N(v)|$. بنابراین S یک مجموعه α_1 - احاطه گر خواهد بود. حال با توجه به اینکه $\gamma_{\alpha_1}(G)$ اندازه ی کوچکترین مجموعه α_1 - احاطه گر می باشد، خواهیم داشت $\gamma_{\alpha_1}(G) \leq \gamma_{\alpha_2}(G)$. $\square$

قضیه ۵.۲.۲. در گراف G برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G) \leq \alpha \cdot (G)$.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه باشد. با توجه به تعریف ۱.۲.۲، برای هر $0 < \alpha \leq 1$ و هر رأس $v \in V - S$ ، $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$. همچنین α عددی مخالف صفر است و G فاقد رأس تنهاست. لذا $\alpha |N(v)| > 0$. از طرفی $|N(v) \cap S|$ عددی صحیح است. در نتیجه $|N(v) \cap S| \geq 1$. در نتیجه S یک مجموعه احاطه گر می باشد. حال با توجه به اینکه $\gamma(G)$ اندازه ی کوچکترین مجموعه احاطه گر می باشد، خواهیم داشت $\gamma(G) \leq |S| = \gamma_\alpha(G)$. از طرفی در لم ۴.۲.۲ داریم اگر $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_{\alpha_1}(G) \leq \gamma_{\alpha_2}(G)$. بنابراین $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma_1(G)$ همچنین با توجه به نتیجه ۳.۲.۲، $\gamma_1(G) = \alpha \cdot (G)$. بنابراین

$$\gamma_\alpha(G) \leq \alpha \cdot (G)$$

از قضیه ی فوق نتیجه می گیریم هر مجموعه α - احاطه گر، یک مجموعه احاطه گر می باشد.

قضیه ۶.۲.۲. اگر $0 < \alpha \leq \frac{1}{\Delta(G)}$ ، آنگاه $\gamma_\alpha(G) = \gamma(G)$.

اثبات. با توجه به قضیه ۵.۲.۲، برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G)$. کفایت ثابت کنیم $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma(G)$.

فرض کنید S یک $\gamma(G)$ - مجموعه باشد. بنابراین برای هر رأس $v \in V - S$

$|N(v) \cap S| \geq 1$. همچنین می دانیم $|N(v)| \leq \Delta(G)$. از فرض مسأله نیز داریم $1 \geq \alpha \Delta(G)$.

بنابراین $|N(v) \cap S| \geq 1 \geq \alpha \Delta(G) \geq \alpha |N(v)|$ - احاطه گری α یک مجموعه S در نتیجه

باشد. لذا $\gamma_\alpha(G) \leq |S| = \gamma(G)$. $\square$

قضیه ۷.۲.۲. اگر $1 \geq \alpha \leq \frac{\Delta(G)-1}{\Delta(G)}$ ، آنگاه $\gamma_\alpha(G) = \alpha_*(G)$

اثبات. با توجه به قضیه ۵.۲.۲ برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، $\gamma_\alpha(G) \leq \alpha_*(G)$ حال کفایت ثابت

کنیم $\alpha_*(G) \leq \gamma_\alpha(G)$.

فرض کنید S یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه باشد. با توجه به تعریف مجموعه α - احاطه گری برای

هر $0 < \alpha \leq 1$ و هر رأس $v \in V - S$ ، $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$. همچنین در فرض مسأله داریم

$$|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)| > \frac{\Delta(G)-1}{\Delta(G)} |N(v)| \quad \text{بنابراین} \quad \alpha > \frac{\Delta(G)-1}{\Delta(G)}$$

از طرفی می دانیم $|N(v) \cap S| = |N(v)| - |N(v) - S|$

$$\Delta(G)|N(v)| - \Delta(G)|N(v) - S| > \Delta(G)|N(v)| - |N(v)| \quad \text{بنابراین}$$

$$\Delta(G)|N(v) - S| < |N(v)| \quad \text{در نتیجه}$$

حال با توجه به اینکه $\Delta(G)$ بزرگترین درجه رأس در یک گراف است و $|N(v) - S|$ عددی

صحیح است. نامساوی فوق برقرار نمی باشد. لذا $|N(v) - S| = 0$. در نتیجه برای هر رأس

$v \in V - S$ ، تمام همسایه های آن در S قرار دارد. بنابراین S یک پوشش رأسی خواهد بود و با

توجه به اینکه $\alpha_*(G)$ کوچکترین پوشش رأسی می باشد، داریم $\alpha_*(G) \leq |S| = \gamma_\alpha(G)$. $\square$

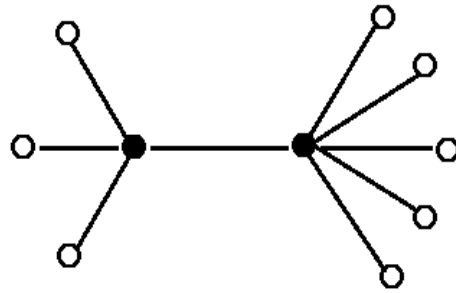
عکس قضایای ۶.۲.۲ و ۷.۲.۲ برقرار نمی باشد.

مثال: فرض کنید G گرافی باشد که از وصل کردن دو رأس با ماکزیمم درجه از گراف

های $K_{1,t}$ و $K_{1,r}$ برای $t \leq r$ بدست آمده باشد، با قرار دادن دو رأس با ماکزیمم درجه در

مجموعه S داریم $\gamma_\alpha(G) = \gamma(G) = \alpha_*(G) = 2$.

در شکل ۳.۲ برای هر $0 < \alpha \leq 1$ و $t = 3$ و $r = 5$ داریم



شکل ۳.۲: $\gamma_\alpha(G) = \gamma(G) = \alpha_*(G) = 2$

قضیه ۸.۲.۲. اگر P_n مسیری n رأسی باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه

$$\gamma_\alpha(P_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil & 0 < \alpha \leq \frac{1}{3} \\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor & \frac{1}{3} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

اثبات. با توجه به قضیه ۶.۲.۲ اگر $0 < \alpha \leq \frac{1}{\Delta(G)}$ ، آنگاه $\gamma_\alpha(G) = \gamma(G)$. همچنین با توجه به

قضیه ۲.۳.۱، $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. بنابراین به ازای $0 < \alpha \leq \frac{1}{3}$ ، $\gamma_\alpha(P_n) = \gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$. و با توجه به

قضیه ۷.۲.۲، اگر $\frac{\Delta(G)-1}{\Delta(G)} < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_\alpha(G) = \alpha_*(G)$. همچنین با توجه به قضیه ۲.۵.۲.۱،

□

$\alpha_*(P_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. بنابراین به ازای $\frac{1}{3} < \alpha \leq 1$ ، $\gamma_\alpha(P_n) = \alpha_*(P_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

قضیه ۹.۲.۲. اگر C_n دوری n رأسی باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه

$$\gamma_\alpha(C_n) = \begin{cases} \lceil \frac{n}{3} \rceil & 0 < \alpha \leq \frac{1}{3} \\ \lfloor \frac{n}{3} \rfloor & \frac{1}{3} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

اثبات. مشابه قضیه قبل ثابت می شود. $\square$

قضیه ۱۰.۲.۲. اگر K_n گراف کامل n رأسی باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_\alpha(K_n) = \lceil \alpha(n-1) \rceil$

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه باشد. بنابراین برای هر رأس $v \in V - S$ ،
 $|N(v) \cap S| \geq \alpha|N(v)| = \alpha(n-1)$ از طرفی با توجه به خواص گراف کامل برای هر رأس
 $v \in V - S$ ، $|N(v) \cap S| = |S|$ ، بنابراین $|S| \geq \alpha(n-1)$ و چون $|S|$ عددی صحیح می باشد،
نتیجه می گیریم $|S| = \gamma_\alpha(K_n) \geq \lceil \alpha(n-1) \rceil$ از طرفی اگر S مجموعه ای از رؤوس با اندازه
 $\lceil \alpha(n-1) \rceil$ باشد، آنگاه برای هر رأس $v \in V - S$ ، $|N(v) \cap S| = \lceil \alpha(n-1) \rceil \geq \alpha(n-1)$

بنابراین S یک مجموعه احاطه گر خواهد بود. لذا $\gamma_\alpha(K_n) \leq \lceil \alpha(n-1) \rceil$ $\square$

قضیه ۱۱.۲.۲. اگر $K_{m,n}$ گراف دوبخشی کامل باشد و $1 \leq m \leq n$ و $0 < \alpha \leq 1$ ،

$$\gamma_\alpha(K_{m,n}) = \min\{\lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil, m\}$$

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه و X و Y بخش های G باشند، به طوری که
 $|X| = m$ و $|Y| = n$ و $1 \leq m \leq n$. دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

حالت ۱: $\lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil < m$. فرض کنید $x \in X - S$ و $y \in Y - S$ در این صورت

$$|N(x) \cap S| \geq \alpha \deg(x) = \alpha n \quad \text{و} \quad |N(y) \cap S| \geq \alpha \deg(y) = \alpha m$$

در نتیجه $|N(y) \cap S| \geq \lceil \alpha m \rceil$ لذا $|S| = \gamma_\alpha(G) \geq \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$ از طرف دیگر اگر
 $X_1 \subseteq X$ و $Y_1 \subseteq Y$ ، دو مجموعه باشند به طوری که $|X_1| = \lceil \alpha m \rceil$ و $|Y_1| = \lceil \alpha n \rceil$ ، آنگاه
 $X_1 \cup Y_1$ یک مجموعه α - احاطه گر می باشد. در نتیجه $\gamma_\alpha(G) \leq \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$ بنابراین
 $\gamma_\alpha(G) = \lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil$

حالت ۲: $\lceil \alpha m \rceil + \lceil \alpha n \rceil \geq m$. فرض کنید X یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه باشد. لذا $\gamma_\alpha(G) \leq m$

حال نشان می دهیم $\gamma_\alpha(G) \geq m$. اگر $X - S \neq \emptyset$ و $Y - S \neq \emptyset$ ، آنگاه رأس های $x \in X - S$ و

در $y \in Y - S$ را در نظر می گیریم. در این صورت $|N(x) \cap S| \geq \lceil \alpha n \rceil$ و $|N(y) \cap S| \geq \lceil \alpha m \rceil$. در نتیجه $|S| = \gamma_\alpha(G) \geq \lceil \alpha n \rceil + \lceil \alpha m \rceil \geq m$. حال اگر $X - S = \emptyset$ یا $Y - S = \emptyset$ ، آنگاه $X \subseteq S$ یا $Y \subseteq S$. لذا $|S| = \gamma_\alpha(G) \geq m$. بنابراین $\gamma_\alpha(G) = m$. $\square$

تعریف ۱۲.۲.۲. فرض کنید $C = \{1, 2, \dots, k\}$ و $f : V \rightarrow C$ یک رنگ آمیزی رأسی از G باشد. مجموعه ی رأس هایی که با رنگ i ام رنگ آمیزی شده اند را با S_i نشان می دهیم.

نردهاس^۵ و گادم^۶ [۱۴] در لم زیرنتیجه ای بدست آوردند که به کمک این نتیجه کران هایی برای عدد α - احاطه گری بدست می آوریم.

لم ۱۳.۲.۲. اگر $G = (V, E)$ و $C = \{1, 2, \dots, k\}$ و $p_1, \dots, p_k$ اعداد حقیقی نا منفی باشند، به طوری که $\sum_i p_i \geq 1$ ، آنگاه یک رنگ آمیزی $f : V \rightarrow C$ وجود دارد به طوری که برای هر رأس $v \in V$

$$|N(v) \cap S_i| \leq p_{f(v)} |N(v)|$$

قضیه ۱۴.۲.۲. اگر G گرافی n رأسی باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(G) \leq n$.

اثبات. اگر $k = 2$ و $p_1 = \alpha$ و $p_2 = 1 - \alpha$ ، آنگاه با توجه به لم ۱۳.۲.۲، یک رنگ آمیزی از رئوس گراف G وجود دارد، به طوری که برای هر رأس $v \in V$

$$|N(v) \cap S_i| \leq P_{f(v)} |N(v)|$$

فرض کنید $v \notin S_1$ و $f(v) = 2$ باشد. با توجه به لم ۱۳.۲.۲،

$$|N(v) \cap S_2| \leq P_2 |N(v)| = (1 - \alpha) |N(v)|$$

همچنین

$$|N(v) \cap S_1| = |N(v)| - |N(v) \cap S_2| \geq |N(v)| - (1 - \alpha) |N(v)| = \alpha |N(v)|$$

^۵Nordhaus

^۶Gaddum

و چون این رابطه برای هر رأس $v \notin S_1$ درست است، بنابراین S_1 مجموعه ای α - احاطه گر می باشد. لذا $|S_1| \leq \gamma_\alpha(G)$. همچنین داریم $|N(v) \cap S_1| \leq P_1|N(v)| = \alpha|N(v)|$. از طرفی $|N(v) \cap S_2| = |N(v)| - |N(v) \cap S_1| \geq |N(v)| - \alpha|N(v)| = (1 - \alpha)|N(v)|$. بنابراین S_2 مجموعه ای $(1 - \alpha)$ - احاطه گر می باشد. لذا $|S_2| \leq \gamma_{(1-\alpha)}(G)$. بنابراین

$$\gamma_\alpha(G) + \gamma_{(1-\alpha)}(G) \leq |S_1| + |S_2| = n$$

□

نتیجه ۱۵.۲.۲. اگر K_n گراف کامل n رأسی باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه

$$n - 1 \leq \gamma_\alpha(K_n) + \gamma_{1-\alpha}(K_n) \leq n$$

اثبات. می دانیم $\gamma_\alpha(K_n) = \lceil \alpha(n - 1) \rceil$ در نتیجه $\alpha(n - 1) \leq \gamma_\alpha(K_n)$.

همچنین $\gamma_{1-\alpha}(K_n) = \lceil (1 - \alpha)(n - 1) \rceil$ در نتیجه $(1 - \alpha)(n - 1) \leq \gamma_{1-\alpha}(K_n)$.

بنابراین $\alpha n - \alpha + n - 1 - \alpha n + \alpha \leq \gamma_\alpha(K_n) + \gamma_{1-\alpha}(K_n)$

لذا $n - 1 \leq \gamma_\alpha(K_n) + \gamma_{1-\alpha}(K_n) \leq n$. از طرفی با توجه به قضیه ۱۴.۲.۲، $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(G) \leq n$

□

بنابراین $n - 1 \leq \gamma_\alpha(K_n) + \gamma_{1-\alpha}(K_n) \leq n$

نتیجه ۱۶.۲.۲. اگر G گرافی n رأسی باشد، آنگاه $\gamma_{\frac{1}{p}}(G) \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ و این کران قابل دسترس می باشد.

اثبات. با توجه به قضیه ۱۴.۲.۲، $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(G) \leq n$. بنابراین برای $\alpha = \frac{1}{p}$ داریم

$\gamma_{\frac{1}{p}}(G) + \gamma_{\frac{p-1}{p}}(G) \leq n$ بنابراین $\gamma_{\frac{1}{p}}(G) \leq \frac{n}{p}$. لذا $\gamma_{\frac{1}{p}}(G) \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ از طرفی می دانیم

$\gamma_{\frac{1}{p}}(K_n) = \lceil \frac{n-1}{p} \rceil$ حال اگر تعداد رئوس گراف K_n فرد باشد به وضوح $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor = \lceil \frac{n-1}{p} \rceil$.

□

بنابراین این کران قابل دسترس می باشد.

نتیجه ۱۷.۲.۲. اگر G و $\bar{G}$ فاقد رأس تنها باشند، آنگاه $\gamma_{\frac{1}{p}}(G) + \gamma_{\frac{1}{p}}(\bar{G}) \leq n$ و این کران قابل دسترس می باشد.

اثبات. با توجه به نتیجه ۱۶.۲.۲ داریم $\gamma_{\frac{1}{p}}(G) \leq \frac{n}{p}$. همچنین برای گراف $\bar{G}$ نیز این نتیجه درست خواهد بود یعنی $\gamma_{\frac{1}{p}}(\bar{G}) \leq \frac{n}{p}$. بنابراین $\gamma_{\frac{1}{p}}(G) + \gamma_{\frac{1}{p}}(\bar{G}) \leq n$ از طرفی می دانیم $\gamma_{\frac{1}{p}}(C_4) = \lceil \frac{4}{p} \rceil = 2$ و $\gamma_{\frac{1}{p}}(\bar{C}_4) = \lceil \frac{4}{p} \rceil + \lceil \frac{4}{p} \rceil = 4$ (زیرا $\bar{C}_4$ از دو مسیر P_2 تشکیل شده است). در نتیجه $\gamma_{\frac{1}{p}}(C_4) + \gamma_{\frac{1}{p}}(\bar{C}_4) = 4$. بنابراین این کران قابل دسترس می باشد. $\square$

قضیه ۱۸.۲.۲. اگر G گرافی n رأسی باشد و $0 < \alpha_i < 1$ و به ازای $k \geq 2$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq 1, \text{ آنگاه } \gamma_{\alpha_1} + \gamma_{\alpha_2} + \dots + \gamma_{\alpha_k} \leq \frac{kn}{p}$$

اثبات. به استقرا روی k این قضیه را ثابت می کنیم. اگر $k = 2$ ، آنگاه $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$. بنابراین $\alpha_2 \leq 1 - \alpha_1$. با توجه به لم ۴.۲.۲، $\gamma_{\alpha_2}(G) \leq \gamma_{1-\alpha_1}(G)$ ، بنابراین

$$\gamma_{\alpha_1}(G) + \gamma_{\alpha_2}(G) \leq \gamma_{\alpha_1}(G) + \gamma_{1-\alpha_1}(G)$$

حال فرض کنید $k > 2$ و برای مقادیر کمتر از k رابطه برقرار باشد، یعنی $\gamma_{\alpha_1}(G) + \gamma_{\alpha_2}(G) + \dots + \gamma_{\alpha_{k-1}}(G) \leq (k-1)\frac{n}{p}$. ثابت می کنیم برای k نیز این رابطه برقرار است. با توجه به اینکه $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k \leq 1$ ، حداقل یک α_i وجود دارد به طوری که $\alpha_i \leq \frac{1}{p}$ باشد. بدون آنکه به کلیت مسئله آسیبی برسد، فرض می کنیم $\alpha_k \leq \frac{1}{p}$. با توجه به لم ۱۶.۲.۲، $\gamma_{\frac{1}{p}}(G) \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$. از طرفی $\alpha_k \leq \frac{1}{p}$. در نتیجه با توجه به لم ۴.۲.۲، $\gamma_{\alpha_k}(G) \leq \gamma_{\frac{1}{p}}(G) \leq \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$. حال با استفاده از فرض استقرا خواهیم داشت

$$(\gamma_{\alpha_1}(G) + \gamma_{\alpha_2}(G) + \dots + \gamma_{\alpha_{k-1}}(G)) + \gamma_{\alpha_k}(G) \leq (k-1)\frac{n}{p} + \frac{n}{p} = k\frac{n}{p}$$

$\square$

قضیه ۱۹.۲.۲. اگر G و $\bar{G}$ فاقد رأس تنها باشند و $0 < \alpha < 1$ ، آنگاه

$$\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(\bar{G}) \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 2$$

اثبات. از آنجایی که $0 < \alpha < 1$ است، نتیجه می گیریم α و $1 - \alpha$ به طور همزمان نمی توانند مقادیر بزرگتر یا مساوی $\frac{1}{3}$ را کسب نمایند. بنابراین بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می کنیم $\alpha \leq \frac{1}{3}$. در نتیجه با توجه به لم ۴.۲.۲، $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma_{\frac{1}{3}}(G) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. از طرفی طبق فرض مسأله G فاقد رأس تنهاست. بنابراین $\bar{G}$ رأس احاطه گر ندارد. (رأس احاطه گر، رأسی است که درجه آن $n - 1$ باشد) در نتیجه دو رأس مانند x و y در G وجود دارد، به طوری که xy در $\bar{G}$ مجاور نباشد. بنابراین مجموعه $V - \{x, y\}$ یک پوشش رأسی به اندازه $n - 2$ برای $\bar{G}$ می باشد. لذا $\alpha_*(\bar{G}) \leq n - 2$. همچنین $\gamma_1(\bar{G}) = \alpha_*(\bar{G})$ و با توجه به لم ۴.۲.۲، $\gamma_{1-\alpha}(\bar{G}) \leq \gamma_1(\bar{G}) = \alpha_*(\bar{G})$. بنابراین $\gamma_{1-\alpha}(\bar{G}) \leq \gamma_1(\bar{G}) = \alpha_*(\bar{G})$. $\gamma_\alpha(G) + \gamma_{1-\alpha}(\bar{G}) \leq \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + n - 2 = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor - 2$ $\square$

۳.۲ کران هایی روی $\gamma_\alpha(G)$

فرض کنید S یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه باشد. در نتیجه $|S| = \gamma_\alpha(G)$. همچنین M مجموعه یال های بین مجموعه S و $V - S$ باشد. با شمردن این یال ها خواهیم داشت $|M| \leq \sum_{v \in S} \deg(v)$. از طرفی طبق تعریف مجموعه α - احاطه گر برای هر رأس $v \in V - S$ ، $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$. در نتیجه $M \geq \sum_{v \in V(G) - S} \alpha \deg(v)$ از روابط فوق خواهیم داشت

$$\sum_{v \in S} \deg(v) \geq |M| \geq \sum_{v \in V(G) - S} \alpha \deg(v)$$

حال با توجه به تعریف $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$\Delta(G)|S| \geq \sum_{v \in S} \deg(v) \geq \sum_{v \in V - S} \alpha \deg(v) \geq \alpha \delta(G)|V - S| \quad (۱.۲)$$

قضیه ۱.۳.۲. اگر G گرافی با ماکزیمم درجه $\Delta(G)$ و مینمم درجه $\delta(G)$ باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ،

$$\gamma_\alpha(G) \geq \frac{\alpha\delta(G)n}{\Delta(G)+\alpha\delta(G)} \quad \text{آنگاه}$$

اثبات. با استفاده از رابطه ۱.۲ و با توجه به اینکه $|S| = \gamma_\alpha(G)$ و $|V(G)| = n$ خواهیم داشت

$$\Delta(G)|S| \geq \alpha\delta(G)|V(G) - S| \geq \alpha\delta(G)|V(G)| - |S| = \alpha\delta(G)(n - \gamma_\alpha(G))$$

در نتیجه $\Delta(G)\gamma_\alpha(G) \geq \alpha\delta(G)(n - \gamma_\alpha(G))$ لذا

$$\gamma_\alpha(G)[\Delta(G) + \alpha\delta(G)] \geq n\alpha\delta(G) \quad \text{بنابراین} \quad \Delta(G)\gamma_\alpha(G) + \alpha\delta(G)\gamma_\alpha(G) \geq n\alpha\delta(G)$$

□

$$\gamma_\alpha(G) \geq \frac{\alpha\delta(G)n}{\Delta(G)+\alpha\delta(G)} \quad \text{در نتیجه}$$

قضیه ۲.۳.۲. اگر G گرافی با ماکزیمم درجه $\Delta(G)$ و مینمم درجه $\delta(G)$ باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ،

$$\gamma_\alpha(G) \leq \frac{\Delta(G)n}{\Delta(G)+(1-\alpha)\delta(G)} \quad \text{آنگاه}$$

اثبات. با توجه به قضیه ۱.۴.۲.۲، $\gamma_\alpha(G) \leq n - \gamma_{1-\alpha}(G)$ و با توجه به قضیه ۱.۳.۲،

$$\gamma_{1-\alpha}(G) \geq \frac{(1-\alpha)\delta(G)n}{\Delta(G)+(1-\alpha)\delta(G)} \quad \text{بنابراین}$$

$$\gamma_\alpha(G) \leq n - \gamma_{1-\alpha}(G)$$

$$\begin{aligned} &\leq n - \frac{(1-\alpha)\delta(G)n}{\Delta(G) + (1-\alpha)\delta(G)} \\ &= \frac{n\Delta(G) + n\delta(G) - n\alpha\delta(G) - n\delta(G) + n\alpha\delta(G)}{\Delta(G) + (1-\alpha)\delta(G)} \\ &= \frac{\Delta(G)n}{\Delta(G) + (1-\alpha)\delta(G)} \end{aligned} \quad (۲.۲)$$

□

نتیجه ۳.۳.۲. اگر T درختی با ماکزیمم درجه $\Delta(T)$ و مینمم درجه $\delta(T)$ باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ،

$$\frac{\alpha n}{\Delta(T)+\alpha} \leq \gamma_\alpha(T) \leq \frac{\Delta(T)n}{\Delta(T)+1-\alpha} \quad \text{آنگاه}$$

اثبات. با توجه به قضایای ۱.۳.۲ و ۲.۳.۲ داریم $\frac{\alpha\delta(G)n}{\Delta(G)+\alpha\delta(G)} \leq \gamma_\alpha(T) \leq \frac{\Delta(G)n}{\Delta(G)+(1-\alpha)\delta(G)}$. حال با توجه به اینکه در درخت ها همواره $\delta(T) = 1$ می باشد، با جایگذاری در رابطه فوق حکم ثابت می شود. $\square$

قضیه ۴.۳.۲. اگر G گرافی شامل m یال باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_\alpha(G) \geq \frac{2\alpha m}{(1+\alpha)\Delta(G)}$.

اثبات. با توجه به رابطه ۱.۲ داریم $\sum_{v \in S} \deg(v) \geq \sum_{v \in V-S} \alpha \deg(v)$. حال اگر $\sum_{v \in S} \alpha \deg(v)$ را به طرفین رابطه فوق اضافه نماییم، خواهیم داشت

$$\sum_{v \in S} \deg(v) + \sum_{v \in S} \alpha \deg(v) \geq \sum_{v \in V-S} \alpha \deg(v) + \sum_{v \in S} \alpha \deg(v)$$

بنابراین $(\alpha + 1)\sum_{v \in S} \deg(v) \geq \alpha \sum_{v \in V} \deg(v)$. حال با توجه به قضیه ۱.۰.۲.۱،

$\sum_{v \in S} \deg(v) = 2m$. همچنین $\sum_{v \in S} \deg(v) \geq (\alpha + 1)|S|\Delta(G)$. از طرفی

می دانیم $|S| = \gamma_\alpha(G)$. در نتیجه با جایگذاری در رابطه فوق حکم ثابت می شود. $\square$

قضیه ۵.۳.۲. برای هر گراف G از مرتبه n با ماکزیمم درجه $\Delta(G)$ و m یال، $\gamma_\alpha(G) \leq$

$$\frac{(2-\alpha)\Delta(G)n - (2-2\alpha)m}{(2-\alpha)\Delta(G)}$$

اثبات. با توجه به قضیه ۱.۴.۲.۲، $\gamma_\alpha(G) \leq n - \gamma_{1-\alpha}(G)$ و با توجه به قضیه ۴.۳.۲،

$$\gamma_\alpha(G) \leq n - \frac{(2-2\alpha)m}{(2-\alpha)\Delta(G)} = \frac{(2-\alpha)\Delta(G)n - (2-2\alpha)m}{(2-\alpha)\Delta(G)} \quad \text{بنابراین} \quad \gamma_{1-\alpha}(G) \geq \frac{2(1-\alpha)m}{(2-\alpha)\Delta(G)}$$

نتیجه ۶.۳.۲. اگر G گرافی k -منتظم باشد، آنگاه $\gamma_{\frac{1}{k}}(G) = \gamma(G)$.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma(G)$ - مجموعه باشد. طبق تعریف مجموعه احاطه گر برای هر رأس

$v \in V - S$ ، $|N(v) \cap S| \geq 1$. از طرفی G گرافی k -منتظم می باشد. بنابراین برای هر رأس

$v \in V$ ، $|N(v)| = k$ و برای $\alpha = \frac{1}{k}$ داریم $|N(v) \cap S| \geq 1 = \frac{1}{k}k = \alpha|N(v)|$ و این همان تعریف

α - احاطه گری می باشد. در نتیجه مجموعه S ، α - احاطه گر می باشد. لذا $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma(G)$.

از طرفی طبق قضیه ۵.۲.۲، $\gamma(G) \leq \gamma_\alpha(G)$. بنابراین به ازای $\alpha = \frac{1}{k}$ ، $\gamma(G) = \gamma_\alpha(G)$. $\square$

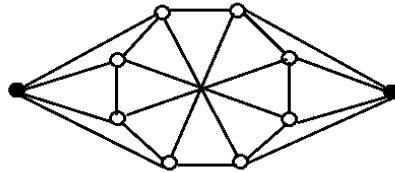
نتیجه ۷.۳.۲. اگر G گرافی k - منتظم باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\frac{\alpha n}{1+\alpha} \leq \gamma_\alpha(G) \leq \frac{n}{1-\alpha}$.

اثبات. با توجه به قضایای ۴.۳.۲ و ۵.۳.۲ داریم $\frac{2\alpha m}{(1+\alpha)\Delta(G)} \leq \gamma_\alpha(G) \leq \frac{(1-\alpha)\Delta(G)n - (1-2\alpha)m}{(1-\alpha)\Delta(G)}$

حال با توجه به اینکه در گراف k - منتظم G ، $\Delta(G) = \delta(G) = k$ و $m = \frac{kn}{2}$ ، با جایگذاری در رابطه فوق داریم $\frac{2\alpha \frac{kn}{2}}{(1+\alpha)k} \leq \gamma_\alpha(G) \leq \frac{(1-\alpha)kn - (1-2\alpha)\frac{kn}{2}}{(1-\alpha)k}$ و پس از ساده کردن نتیجه بدست می آید. $\square$

نتیجه ۸.۳.۲. اگر G گرافی k - منتظم باشد، آنگاه به ازای $1 \leq i \leq k$ ، $\gamma_{\frac{i}{k}}(G) \geq \lceil \frac{i}{i+k}n \rceil$ و این کران قابل دسترس می باشد.

اثبات. با توجه به نتیجه ۷.۳.۲، $\gamma_\alpha(G) \geq \frac{\alpha n}{1+\alpha}$ و با توجه به اینکه $\frac{1}{k} \leq \frac{i}{k} \leq 1$ و قرار دادن $\alpha = \frac{i}{k}$ در رابطه فوق داریم $\gamma_{\frac{i}{k}}(G) \geq \frac{in}{k(1+\alpha)} = \frac{in}{k+k\alpha} = \frac{in}{k+i}$ همچنین $\gamma_{\frac{i}{k}}(G)$ عددی صحیح است. لذا $\gamma_{\frac{i}{k}}(G) \geq \lceil \frac{i}{i+k}n \rceil$ حال نشان می دهیم این کران قابل دسترس است. برای این منظور فرض کنید H گرافی $(k-i)$ - منتظم با $2k$ رأس و مجموعه S دارای $2i$ رأس مستقل باشد. i رأس از مجموعه S را به k رأس از گراف H متصل می کنیم و رؤس باقی مانده از مجموعه S را به رؤس باقی مانده از گراف H متصل می کنیم و گراف حاصل را G می نامیم. به وضوح گراف G ، k - منتظم می باشد و $n = 2k + 2i$ و S ، $\gamma_{\frac{i}{k}}(G)$ - مجموعه به اندازه $2i = \lceil \frac{i}{i+k}n \rceil$ می باشد. شکل ۴.۲ گرافی ۴ - منتظم به ازای $k = 4$ و $i = 1$ می باشد.



شکل ۴.۲: $\gamma_{\frac{1}{4}}(G) = 2$

نتیجه ۹.۳.۲. اگر G گرافی k - منتظم باشد، آنگاه به ازای $1 \leq i \leq k$ ، $\gamma_{\frac{i}{k}}(G) \leq \lfloor \frac{kn}{\sqrt{k-i}} \rfloor$.

اثبات. با توجه به نتیجه ۷.۳.۲، $\gamma_{\alpha}(G) \leq \frac{n}{\sqrt{1-\alpha}}$ حال با توجه به اینکه $1 \leq \frac{i}{k} \leq \frac{1}{k}$ و قرار دادن

$\alpha = \frac{i}{k}$ در رابطه فوق داریم $\gamma_{\frac{i}{k}}(G) \leq \frac{n}{\sqrt{1-\frac{i}{k}}} = \frac{kn}{\sqrt{k-i}}$ همچنین $\gamma_{\frac{i}{k}}(G)$ عددی صحیح است. لذا

□

$$\gamma_{\frac{i}{k}}(G) \leq \lfloor \frac{kn}{\sqrt{k-i}} \rfloor$$

قضیه ۱۰.۳.۲. [۴] اگر G گرافی n رأسی باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_{\alpha}(G) \leq (1 - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}})n$

اثبات. فرض کنید $r = \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil$ و $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$ بخش هایی از G باشند، به طوری

که $\sum_{i=1}^r \sum_{u \in V_i} |N_G(u) \cap V_i|$ مینیمم شود. ثابت می کنیم به ازای هر $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ و

$u_i \in V_i$ ، $|N_G(u_i) \cap V_i| \leq (1 - \alpha)deg(u_i)$ (برهان خلف) فرض کنید به ازای $i_1 \in \{1, 2, \dots, r\}$ و

$u_{i_1} \in V_{i_1}$ ، $|N_G(u_{i_1}) \cap V_{i_1}| > (1 - \alpha)deg(u_{i_1})$ بنابراین اندیس i_1 وجود دارد به طوری که

$1 \leq i_1 \leq r$ و $|N_G(u_{i_1}) \cap V_{i_1}| < (1 - \alpha)deg(u_{i_1})$ زیرا اگر به ازای هر $i \in \{1, 2, \dots, r\}$

$$|N_G(u_{i_1}) \cap V_{i_1}| \geq (1 - \alpha)deg(u_{i_1}) \text{، آنگاه}$$

$$deg(u_{i_1}) > (1 - \alpha)deg(u_{i_1}) + (r - 1)(1 - \alpha)deg(u_{i_1}) = r(1 - \alpha)deg(u_{i_1})$$

از طرفی $r = \lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil \geq \frac{1}{1-\alpha}$ در نتیجه $r(1 - \alpha) \geq 1$ لذا $deg(u_{i_1}) > deg(u_{i_1})$ و به تناقض

می رسیم. بنابراین اگر برای $i_1 \in \{1, 2, \dots, r\}$ و $u_{i_1} \in V_{i_1}$ ، $|N_G(u_{i_1}) \cap V_{i_1}| > (1 - \alpha)deg(u_{i_1})$

آنگاه اندیس i_1 وجود دارد به طوری که $i_1 \in \{1, 2, \dots, r\}$ و $|N_G(u_{i_1}) \cap V_{i_1}| < (1 - \alpha)deg(u_{i_1})$

در نتیجه $|N_G(u_{i_1}) \cap V_{i_1}| > |N_G(u_{i_1}) \cap V_{i_1}|$ حال اگر $V'_{i_1} = V_{i_1} \cup \{u_{i_1}\}$ و $V'_{i_1} = V_{i_1} - \{u_{i_1}\}$

برای $V'_L = V_L$ ، $L \notin \{i_1, i_1\}$ آنگاه

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \sum_{u \in V'_i} |N_G(u) \cap V'_i| &= \sum_{i=1}^r \sum_{u \in V_i} |N_G(u) \cap V_i| - 1|N_G(u_{i_1}) \cap V_{i_1}| + 1|N_G(u_{i_1}) \cap V_{i_1}| \\ &< \sum_{i=1}^r \sum_{u \in V_i} |N_G(u) \cap V_i| \end{aligned} \quad (3.2)$$

با توجه به اینکه $\sum_{i=1}^r \sum_{u \in V_i} |N_G(u) \cap V_i|$ مینیمم می باشد، از نامساوی فوق به تناقض می رسم. بنابراین برای هر $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ و $u \in V_i$ ، $|N_G(u) \cap V_i| \leq (1 - \alpha) \deg(u)$.
 در نتیجه برای هر $u \in V_i$ ، $|N_G(u) \cap (V_G - V_i)| \geq \alpha \deg(u)$. بنابراین $V - V_i$ یک مجموعه α - احاطه گر می باشد. لذا $\gamma_\alpha(G) \leq |V| - |V_i|$. بنابراین $\gamma_\alpha(G) \leq n - |V_i|$ از طرفی $\max\{|V_i| \mid 1 \leq i \leq r\} \geq \frac{n}{r}$. (زیرا اگر به ازای هر i ، $|V_i| < \frac{n}{r}$ ، آنگاه $\sum_{i=1}^r |V_i| < r \frac{n}{r} = n$ و این با فرض اینکه گراف G ، n رأسی می باشد در تناقض است.) در نتیجه

$$\gamma_\alpha(G) \leq n - \max |V_i| \leq n - \frac{n}{r} = n \left(1 - \frac{1}{r}\right)$$

□

قضیه ۱۱.۳.۲. [۴] فرض کنید $i \in N_* = \{0, 1, 2, \dots\}$ و $\alpha \in R$ به طوری که $\frac{i}{i+1} < \alpha \leq \frac{i+1}{i+2}$ ،

اگر G گرافی شامل n رأس باشد، آنگاه $\gamma_\alpha(G) \leq \frac{i+1}{i+2}n < \frac{n}{2-\alpha}$.

اثبات. اگر $i \in N_* = \{0, 1, 2, \dots\}$ و $\frac{i}{i+1} < \alpha \leq \frac{i+1}{i+2}$ ، آنگاه $1 - \frac{i}{i+1} < 1 - \alpha \leq 1 - \frac{i+1}{i+2}$. لذا

$i+1 < \frac{1}{1-\alpha} \leq i+2$ و $2 - \frac{i}{i+1} < 2 - \alpha \leq 2 - \frac{i+1}{i+2}$. بنابراین $\frac{i+2}{i+1} > 2 - \alpha \geq \frac{i+3}{i+2}$. در نتیجه

$\frac{i+1}{i+2} < \frac{1}{2-\alpha}$. بنابراین با توجه به قضیه ی ۱۰.۳.۲،

$$\gamma_\alpha(G) \leq \left(1 - \frac{1}{\lceil \frac{1}{1-\alpha} \rceil}\right)n \leq \left(1 - \frac{1}{i+2}\right)n = \frac{i+1}{i+2}n < \frac{n}{2-\alpha}$$

□

۴.۲ مجموعه α - غیر زائد و α - مستقل

تعریف ۱.۴.۲. زیرمجموعه S از رئوس گراف G را یک مجموعه α - غیر زائد گوئیم، هرگاه

برای هر $x \in S$ ، رأسی مانند y وجود داشته باشد، به طوری که $y \in N[x]$ و $y \notin S - \{x\}$ و

$|N(y) \cap (S - \{x\})| < \alpha |N(y)|$. اندازه بزرگترین مجموعه غیر زائد ماکسیمال از رؤوس گراف G را با $IR_\alpha(G)$ نمایش می دهیم و اندازه کوچکترین مجموعه غیر زائد ماکسیمال از رؤوس گراف G را با $ir_\alpha(G)$ نمایش می دهیم.

نتیجه ۲.۴.۲. هر مجموعه α - احاطه گر مینیمال یک مجموعه α - غیر زائد ماکسیمال می باشد.

□

اثبات. مشابه قضیه ۳.۳.۱ ثابت می شود.

با توجه به توضیحات فوق نتیجه می گیریم $ir_\alpha(G) \leq \gamma_\alpha(G) \leq \Gamma_\alpha(G) \leq IR_\alpha(G)$

تعریف ۳.۴.۲. زیر مجموعه S از رؤوس گراف G را α - مستقل گوئیم هرگاه S یک مجموعه α - احاطه گر و مستقل باشد. بزرگترین اندازه مجموعه مستقل ماکسیمال از رؤوس گراف G را با $\beta_\alpha(G)$ نمایش می دهیم و کوچکترین اندازه مجموعه مستقل ماکسیمال را با $i_\alpha(G)$ نمایش می دهیم.

نتیجه ۴.۴.۲. هر مجموعه α - مستقل یک مجموعه α - احاطه گر مینیمال است.

□

اثبات. مشابه قضیه ۴.۳.۱ ثابت می شود.

با توجه به توضیحات فوق نتیجه می گیریم

$$ir_\alpha(G) \leq \gamma_\alpha(G) \leq i_\alpha(G) \leq \beta_\alpha(G) \leq \Gamma(G) \leq IR_\alpha(G) \quad (۴.۲)$$

همچنین با توجه به اینکه هر مجموعه α - احاطه گر مستقل، احاطه گر مستقل نیز می باشد، رابطه ی زیر نیز برقرار خواهد بود.

$$i(G) \leq i_\alpha(G) \leq \beta_\alpha(G) \leq \beta(G) \quad (۵.۲)$$

توجه داشته باشید برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، لزوماً گرافی مانند G موجود نمی باشد به طوری که α مستقل باشد. مثلاً در گراف K_n برای $n \geq 3$ مجموعه α -مستقل به ازای $\alpha > \frac{1}{n-1}$ وجود ندارد.

لم ۵.۴.۲. برای هر گراف G اگر $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ ، آنگاه $IR_{\alpha_1}(G) \leq IR_{\alpha_2}(G)$.

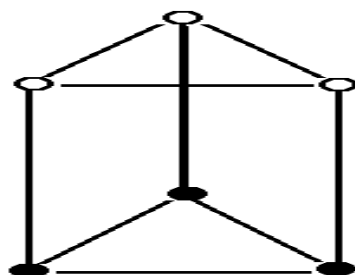
اثبات. فرض کنید زیرمجموعه S از رئوس گراف G یک α_1 -مجموعه غیر زائد باشد به طوری که $|S| = IR_{\alpha_1}(G)$. بنابراین برای هر رأس مانند x در مجموعه S رأسی مانند y وجود دارد به طوری که $y \in N[x]$ و $y \notin S - \{x\}$. بنابراین $|N(y) \cap (S - \{x\})| < \alpha_1 |N(y)| < \alpha_2 |N(y)|$. بنابراین S ، α_2 -غیر زائد می باشد و چون IR_{α_2} بزرگترین مجموعه α_2 -غیر زائد است داریم $|S| = IR_{\alpha_1}(G) \leq IR_{\alpha_2}(G)$. $\square$

قضیه ۶.۴.۲. برای هر گراف G و هر $0 < \alpha \leq 1$ ، $IR(G) \leq IR_\alpha(G)$.

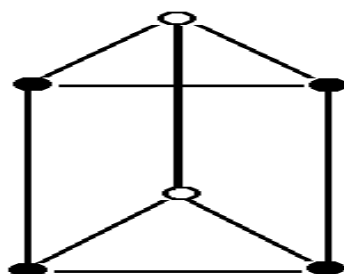
اثبات. فرض کنید زیرمجموعه S از رئوس گراف G یک مجموعه غیر زائد باشد، به طوری که $|S| = IR(G)$. بنابراین برای هر رأس مانند x که $x \in S$ ، رأسی مانند y وجود دارد به طوری که $y \in N[x]$ و $y \notin S - x$. بنابراین $|N(y) \cap (S - \{x\})| = 0 \leq \alpha |N(y)|$. در نتیجه مجموعه S ، α -غیر زائد می باشد و چون $IR_\alpha(G)$ بزرگترین مجموعه α -غیر زائد است، داریم $|S| = IR(G) \leq IR_\alpha(G)$. $\square$

از قضایای فوق نتیجه می گیریم $\Gamma(G) \leq IR(G) \leq IR_\alpha(G)$.

توجه داشته باشید که قضیه فوق را برای $\Gamma_\alpha(G)$ نمی توان تعمیم داد، زیرا $\Gamma(G)$ و $\Gamma_\alpha(G)$ با یکدیگر قابل مقایسه نمی باشند. مثلاً اگر $G = P_2 \square C_3$ همانطور که در شکل ۵.۲ و ۶.۲ مشاهده می کنید به ازای $\alpha = \frac{2}{3}$ ، $\Gamma(G) < \Gamma_{\frac{2}{3}}(G)$.



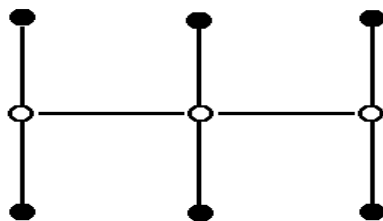
شکل ۵.۲: $\Gamma(G) = ۳$



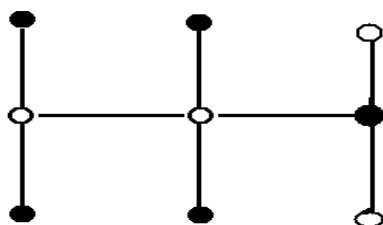
شکل ۶.۲: $\Gamma_{\frac{2}{3}}(G) = ۴$

حال اگر G گرافی باشد که با اضافه شدن دو برگ به هر رأس از مسیر $P_۳$ حاصل شود.

همانطور که در شکل ۸.۲ و ۷.۲ مشاهده می کنید به ازای $\alpha = \frac{2}{3}$ ، $\Gamma_{\frac{2}{3}}(G) < \Gamma(G)$.



شکل ۷.۲: $\Gamma(G) = ۶$

شکل ۸.۲: $\Gamma_{\frac{1}{2}}(G) = 5$

لم ۷.۴.۲. [۵] برای هر گراف G ، $IR(G) \leq n - \delta(G)$.

قضیه ۸.۴.۲. برای هر گراف G و هر $0 < \alpha \leq 1$ ، $IR_{\alpha}(G) \leq n - \gamma(G)$.

اثبات. فرض کنید زیرمجموعه S از رئوس گراف G یک مجموعه α -غیر زائد باشد، به طوری که $|S| = IR_{\alpha}(G)$. ادعا می کنیم $V(G) - S$ یک مجموعه احاطه گر می باشد، زیرا اگر مجموعه $V(G) - S$ احاطه گر نباشد، آنگاه رأسی مانند x از مجموعه S وجود دارد، به طوری که توسط مجموعه $V(G) - S$ احاطه نمی شود. بنابراین $N[x] \subseteq S$. از طرفی طبق فرض مسأله مجموعه S ، α -غیر زائد می باشد. بنابراین رأسی مانند $y \in N[x]$ وجود دارد به طوری که $y \notin S - \{x\}$ و $|N(y) \cap (S - \{x\})| < \alpha |N(y)|$ و این با فرض مسأله در تناقض است. بنابراین مجموعه $V(G) - S$ مجموعه ای احاطه گر با اندازه $n - |S|$ می باشد و چون $\gamma(G)$ اندازه کوچکترین مجموعه احاطه گر می باشد نتیجه می گیریم $\gamma(G) \leq n - |S|$ لذا $|S| = IR_{\alpha}(G) \leq n - \gamma(G)$. $\square$

قضیه ۹.۴.۲. اگر برای $0 < \alpha \leq 1$ ، G دارای یک مجموعه α -غیر زائد باشد، آنگاه

$$\gamma_{\alpha}(G) \leq \lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor$$

اثبات. با توجه به رابطه های ۴.۲ و ۵.۲ داریم $\gamma_{\alpha}(G) \leq i_{\alpha}(G) \leq \beta(G)$ و با توجه به قضیه

۲.۳.۲.۱، $\beta(G) = n - \alpha_*(G)$. بنابراین $\gamma_\alpha(G) \leq n - \alpha_*(G)$ همچنین با توجه به قضیه ۵.۲.۲،

$\gamma_\alpha(G) \leq \alpha_*(G)$ با جمع طرفین دو رابطه فوق داریم $\gamma_\alpha(G) \leq n$. در نتیجه $\gamma_\alpha(G) \leq \frac{n}{4}$. $\square$

قضیه ۱۰.۴.۲. [۸] مسأله α - احاطه گری برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، NP - complete می باشد.

فصل ۳

α - احاطه گری کلی

۱.۳ مقدمه

در فصل قبل مجموعه α - احاطه گر را تعریف نمودیم . اینک این مسأله را برای تمام رؤس گراف G تعمیم می دهیم و آنرا α - احاطه گری کلی می نامیم. از کاربردهای این مسأله می توان به انتخاب مناطقی از شهر برای تأسیس بیمارستان پرداخت به طوری که علاوه بر در نظر گرفتن موارد ذکر شده در فصل قبل، هر بیمارستان به بیمارستان های دیگر نیز دسترسی داشته باشد و هرچه جمعیت منطقه بیشتر باشد، امکان دسترسی به بیمارستان ها و همچنین بیمارستان ها به یکدیگر بیشتر باشد. در این گونه مسائل ابتدا گراف مورد نظر را مانند فصل گذشته طراحی کرده سپس آن را به کمک مسأله α - احاطه گری کلی بررسی می کنیم.

ما در این فصل ابتدا مجموعه α - احاطه گر کلی را تعریف می کنیم و کران هایی قابل دسترس برای آن بدست می آوریم و در آخر تأثیر حذف یک رأس و تأثیر کاهش و افزایش یک یال از گراف G را بر روی عدد α - احاطه گری کلی بررسی می کنیم.

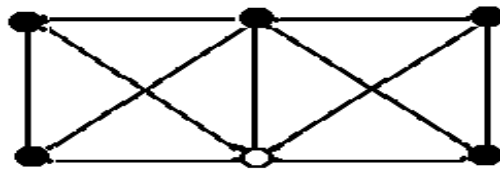
۲.۳ تعاریف و نتایج مقدماتی

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی با n رأس و m یال و فاقد رأس تنها باشد و $0 < \alpha \leq 1$ عددی حقیقی باشد. زیر مجموعه S از رئوس G را یک مجموعه α - احاطه گر

کلی می نامیم، هرگاه برای هر رأس v از گراف G داشته باشیم $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$.

کوچکترین اندازه یک مجموعه α - احاطه گر کلی در گراف G را عدد α - احاطه گری کلی

گراف G نامیده و آن را با $\gamma_{t\alpha}(G)$ نمایش می دهیم. شکل ۱.۳ کوچکترین مجموعه $\frac{2}{3}$ - احاطه گر کلی را نشان می دهد.



شکل ۱.۳: $\gamma_{t\frac{2}{3}}(G) = 5$

همچنین منظور از یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه یک مجموعه α - احاطه گر کلی با اندازه $\gamma_{t\alpha}(G)$ می باشد.

نتیجه ۲.۲.۳. برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، $\gamma_t(G) \leq \gamma_{t\alpha}(G)$.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه باشد. بنابراین برای هر رأس v از گراف G ،

$|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$. از طرفی α مخالف صفر و $|N(v)|$ عددی طبیعی است. لذا $\alpha |N(v)| > 0$

و $|N(v) \cap S|$ عددی طبیعی است. بنابراین $|N(v) \cap S| \geq 1$. در نتیجه مجموعه S احاطه

گر کلی می باشد. حال با توجه به اینکه $\gamma_t(G)$ اندازه ی کوچکترین مجموعه احاطه گر کلی می باشد، خواهیم داشت

□

$$\gamma_t(G) \leq \gamma_{t\alpha}(G)$$

نتیجه ۳.۲.۳. اگر G گرافی n رأسی باشد و $\alpha = 1$ ، آنگاه $\gamma_{t\alpha}(G) = n$ زیرا اگر S یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه باشد، آنگاه تمام همسایه های رئوس گراف G در S قرار خواهند گرفت.

نتیجه ۴.۲.۳. برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، $\gamma_{t\alpha}(G) \geq 2$.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه باشد و $\gamma_{t\alpha}(G) \not\geq 2$ ، بنابراین $\gamma_{t\alpha}(G) = 1$. در نتیجه تنها یک رأس مانند v در مجموعه S قرار دارد، که این رأس توسط هیچ رأسی احاطه نمی شود. لذا S ، $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه نمی باشد.

□

لم ۵.۲.۳. اگر $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_{t\alpha_1}(G) \leq \gamma_{t\alpha_2}(G)$.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_{t\alpha_2}(G)$ - مجموعه باشد. در این صورت برای هر رأس v از گراف G ، $|N(v) \cap S| \geq \alpha_2 |N(v)| > \alpha_1 |N(v)|$. بنابراین S یک مجموعه α_1 - احاطه گر خواهد بود. حال با توجه به اینکه $\gamma_{t\alpha_1}(G)$ اندازه ی کوچکترین مجموعه α_1 - احاطه گر است، خواهیم داشت

□

$$\gamma_{t\alpha_1}(G) \leq \gamma_{t\alpha_2}(G)$$

نتیجه ۶.۲.۳. درگراف G با n رأس، برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma_{t\alpha}(G) \leq n$.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه باشد. بنابراین برای هر رأس v از گراف G و هر $0 < \alpha \leq 1$ ، $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$. لذا برای هر رأس $v \in V - S$ نیز، رابطه فوق برقرار می باشد. در نتیجه هر مجموعه α - احاطه گر کلی، α - احاطه گر می باشد. لذا $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma_{t\alpha}(G)$.

□

همچنین با توجه به لم ۵.۲.۳ و نتیجه ۳.۲.۳ داریم $\gamma_{t\alpha}(G) \leq \gamma_t(G) = n$

قضیه ۷.۲.۳. اگر $0 < \alpha \leq \frac{1}{\Delta(G)}$ ، آنگاه $\gamma_{t\alpha}(G) = \gamma_t(G)$.

اثبات. با توجه به نتیجه ۲.۲.۳، $\gamma_t(G) \leq \gamma_{t\alpha}(G)$ ثابت می کنیم $\gamma_{t\alpha}(G) \leq \gamma_t(G)$ فرض کنید S یک $\gamma_t(G) -$ مجموعه باشد. بنابراین برای هر رأس v از گراف G ، $|N(v) \cap S| \geq 1$. همچنین به وضوح $|N(v)| \leq \Delta(G)$. بنابراین $|N(v)| \geq \alpha \Delta(G) \geq \alpha |N(v)|$ در نتیجه S یک مجموعه α - احاطه گر کلی می باشد. لذا $\gamma_{t\alpha}(G) \leq |S| = \gamma_t(G)$.

□

قضیه ۸.۲.۳. اگر $1 - \frac{1}{\Delta(G)} < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_{t\alpha}(G) = n$.

اثبات. با توجه به نتیجه ۶.۲.۳، $\gamma_{t\alpha}(G) \leq n$ حال کفایت ثابت کنیم $n \leq \gamma_{t\alpha}(G)$ فرض کنید S یک $\gamma_{t\alpha}(G) -$ مجموعه باشد و $|S| < n$. کفایت ثابت کنیم $\alpha \leq 1 - \frac{1}{\Delta(G)}$ فرض کنید x رأسی خارج از مجموعه S باشد و y رأسی مجاور با x در S باشد. یعنی $y \in N(x) \cap S$ بنابراین خواهیم داشت $|N(y) \cap S| \geq \alpha \deg(y)$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \alpha &\leq \frac{\deg(y) - 1}{\deg(y)} \\ &= 1 - \frac{1}{\deg(y)} \\ &\leq 1 - \frac{1}{\Delta(G)} \end{aligned} \quad (۱.۳)$$

بنابراین اگر $\alpha > 1 - \frac{1}{\Delta(G)}$ ، آنگاه $\gamma_{t\alpha}(G) = n$.

قضیه ۹.۲.۳. اگر P_n مسیری n رأسی باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه

$$\gamma_{t\alpha}(P_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor & 0 < \alpha \leq \frac{1}{4} \\ n & \frac{1}{4} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

اثبات. عدد احاطه گری کلی مسیر را که در قضیه ۲.۲.۴ مطرح شده در نظر بگیرید. حال با توجه به قضیه ۷.۲.۳ و با توجه به اینکه $\Delta(P_n) = 2$ برای $\frac{1}{4} < \alpha \leq 1$ ، خواهیم داشت $\gamma_{t\alpha}(P_n) = \gamma_t(P_n) = \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ داشت $\gamma_{t\alpha}(P_n) = \gamma_t(P_n) = n$

قضیه ۱۰.۲.۳. اگر C_n دوری n رأسی باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه

$$\gamma_{t\alpha}(C_n) = \begin{cases} \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + \lceil \frac{n}{4} \rceil - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor & 0 < \alpha \leq \frac{1}{4} \\ n & \frac{1}{4} < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

□

اثبات. مشابه قضیه قبل ثابت می شود.

قضیه ۱۱.۲.۳. اگر K_n گراف کامل n رأسی باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_{t\alpha}(K_n) = \lceil \alpha(n-1) \rceil + 1$

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه باشد. بنابراین برای هر رأس v از گراف G ، $|N(v) \cap S| \geq \alpha|N(v)|$. با توجه به خواص گراف کامل برای هر رأس موجود در S مانند x داریم $|N(x) \cap S| = |S| - 1 \geq \alpha|N(x)| = \alpha(n-1)$. در نتیجه $|S| = \gamma_{t\alpha}(K_n) \geq \lceil \alpha(n-1) \rceil + 1$.
و برای هر رأس خارج از S مانند x ، $|N(x) \cap S| = |S| \geq \alpha|N(x)| = \alpha(n-1)$. در نتیجه $|S| = \gamma_{t\alpha}(K_n) \geq \lceil \alpha(n-1) \rceil$. از طرفی اگر S مجموعه ای از رؤوس با اندازه $\lceil \alpha(n-1) \rceil + 1$ باشد، آنگاه برای هر رأس موجود در S مانند x ، $|N(x) \cap S| = \lceil \alpha(n-1) \rceil \geq \alpha(n-1) = \alpha|N(x)|$.
و برای هر رأس خارج از S مانند x ، $|N(x) \cap S| = \lceil \alpha(n-1) \rceil + 1 \geq \alpha(n-1) + 1 = \alpha|N(x)|$.
در نتیجه برای هر رأس از گراف G مجموعه S ، α - احاطه گر کلی می باشد. لذا

$$\gamma_{t\alpha}(K_n) \leq \lceil \alpha(n-1) \rceil + 1$$

□

قضیه ۱۲.۲.۳. اگر $G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ گراف p - بخشی کامل با رأس n باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ،

$$\frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p [\alpha(n - n_i)] \leq \gamma_{t\alpha}(G) \leq \sum_{i=1}^p [\alpha(n_i)] \quad \text{آنگاه}$$

اثبات. فرض کنید $V_1, V_2, \dots, V_p$ مجموعه رئوس بخش های گراف p - بخشی کامل

$G = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ باشند، به طوری که برای $1 \leq i \leq p$ ، $|V_i| = n_i$ و S یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه

باشد. اگر $x_i \in V_i$ ، آنگاه $|N(x_i) \cap S| \geq \alpha|N(x_i)| = \alpha(n - n - i)$ ، بنابراین

برای هر $1 \leq i \leq p$ ، $|N(x_i) \cap S| \geq [\alpha(n - n_i)]$ ، همچنین

$$(p-1)\gamma_{t\alpha}(G) = (p-1)|S| = (p-1)|V \cap S| = \sum_{i=1}^p |V - V_i| \cap S| \geq \sum_{i=1}^p [\alpha(n - n_i)]$$

بنابراین $\gamma_{t\alpha}(G) \geq \frac{1}{(p-1)} \sum_{i=1}^p [\alpha(n - n_i)]$ حال فرض کنید برای $1 \leq i \leq p$ ، V'_i زیر مجموعه

ای از V_i با اندازه $[\alpha n_i]$ باشد. زیر مجموعه S از رئوس گراف G را به این صورت تعریف می

کنیم $S = \cup_{i=1}^p V'_i$. ثابت می کنیم S یک مجموعه α - احاطه گر کلی برای G می باشد. اگر

x رأسی دلخواه در G باشد و برای $1 \leq j \leq p$ ، $x \in V_j$ آنگاه

$$\begin{aligned} |N(x) \cap S| &= \sum_{i=1}^p |V'_i| - |V'_j| \\ &= \sum_{i=1}^p [\alpha n_i] - [\alpha n_j] \\ &\geq [\alpha(n - n_j)] \\ &= [\alpha|N(x)|] \geq \alpha|N(x)| \end{aligned} \quad (2.3)$$

در نتیجه S با اندازه $\sum_{i=1}^p [\alpha n_i]$ ، یک مجموعه α - احاطه گر کلی برای G می باشد.

□

$$\gamma_{t\alpha}(G) = |S| \leq \sum_{i=1}^p [\alpha n_i] \quad \text{بنابراین}$$

کران های قضیه فوق قابل دسترس می باشد.

مثال: فرض کنید $H = K_{n_1, n_2, \dots, n_p}$ گراف p - بخشی کامل برای $p \geq 2$ باشد و

$\sum_{i=1}^p n - n_i = \sum_{i=1}^p (p-1)n_i$ آنگاه با توجه به اینکه $\alpha = \frac{1}{n_1}$ اگر $n_1 = n_2 = \dots = n_p$

داریم $\frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p [\alpha(n - n_i)] = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p [\alpha(p-1)n_i] = \frac{(p-1)p}{p-1} = p = \sum_{i=1}^p [\alpha n_i]$

در این صورت خواهیم داشت $\gamma_{t\alpha}(H) = p = \frac{1}{p-1} \sum_{i=1}^p [\alpha(n - n_i)] = \sum_{i=1}^p [\alpha n_i]$

نتیجه ۱۳.۲.۳. اگر K_{n_1, n_2} گراف دو بخشی کامل باشد، آنگاه $\gamma_{t\alpha}(K_{n_1, n_2}) = [\alpha(n_1)] + [\alpha(n_2)]$

اثبات. با توجه به قضیه ۱۲.۲.۳، اگر $p = 2$ ، آنگاه

$$\frac{1}{2-1} \sum_{i=1}^2 [\alpha(n - n_i)] \leq \gamma_{t\alpha}(G) \leq \sum_{i=1}^2 [\alpha(n_i)]$$

در نتیجه $[\alpha(n - n_1)] + [\alpha(n - n_2)] \leq \gamma_{t\alpha}(G) \leq [\alpha(n_1)] + [\alpha(n_2)]$ حال با توجه به

□

اینکه $n_1 + n_2 = n$ ، نتیجه بدست می آید.

برای $0 < \alpha \leq 1$ ، فرض کنید F_α^* کلاس آن دسته از گراف های G باشد که شامل دو رأس

مجاور v_1 و v_2 از درجه حداکثر $\frac{1}{\alpha}$ می باشد به طوری که، $V(G) = N(v_1) \cup N(v_2)$ و هر رأس

موجود در $N(v_i) - N(v_j)$ برای $i, j \in \{1, 2\}$ از درجه حداکثر $\frac{1}{\alpha}$ باشد و هر رأس موجود در

$N(v_i) \cap N(v_j)$ از درجه حداکثر $\frac{2}{\alpha}$ باشد.

قضیه ۱۴.۲.۳. $\gamma_{t\alpha}(G) = 2$ اگر و فقط اگر $G \in F_\alpha^*$.

اثبات. ($\Rightarrow$) اگر $G \in F_\alpha^*$ ، آنگاه G شامل دو رأس مجاور مانند v_1, v_2 با شرایط فوق می باشد.

ثابت می کنیم $\{v_1, v_2\}$ یک مجموعه α - احاطه گر کلی می باشد. برای این منظور باید برای

هر رأس v از گراف G ، $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$ با توجه به اینکه رأس v_1 حداکثر از درجه $\frac{1}{\alpha}$

می باشد. برای v_2 نیز به طور مشابه ثابت می شود و برای هر رأس $v \neq \{v_1, v_2\}$ دو حالت

زیر را در نظر می گیریم.

حالت ۱: اگر $v \in N(v_i) - N(v_j)$ برای $i, j \in \{1, 2\}$ آنگاه $\deg(v) \leq \frac{1}{\alpha}$.

لذا $|N(v) \cap S| = 1 \geq \alpha \deg(v)$ در نتیجه S یک مجموعه α - احاطه گر کلی می باشد.

حالت ۲: اگر $v \in N(v_i) \cap N(v_j)$ برای $i, j \in \{1, 2\}$ آنگاه با توجه به مفروضات مسأله

$$\deg(v) \leq \frac{2}{\alpha} \text{ لذا } |N(v) \cap S| = 2 \geq \alpha \deg(v)$$

در نتیجه $\{v_1, v_2\}$ یک مجموعه α - احاطه گر کلی می باشند. بنابراین $\gamma_{t\alpha}(G) \leq 2$ از

طرفی با توجه به نتیجه ۴.۲.۳، $\gamma_{t\alpha}(G) \geq 2$ در نتیجه $\gamma_{t\alpha}(G) = 2$.

($\Leftarrow$) فرض کنید $\gamma_{t\alpha}(G) = 2$ و $S = \{x, y\}$ یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه باشد. با توجه به تعریف

مجموعه α - احاطه گر کلی، x و y مجاور می باشد. بنابراین $|N(x) \cap S| = 1$ و $|N(y) \cap S| = 1$

در نتیجه $|N(x) \cap S| = 1 \geq \alpha \deg(x)$ و $|N(y) \cap S| = 1 \geq \alpha \deg(y)$ بنابراین $\deg(x) \leq \frac{1}{\alpha}$ و

$\deg(y) \leq \frac{1}{\alpha}$ حال فرض کنید $z \in V - S$ دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

حالت ۱: اگر $z \in N(x) \cap N(y)$ آنگاه $|N(z) \cap S| = 2$ بنابراین $|N(z) \cap S| = 2 \geq \alpha \deg(z)$

$$\text{لذا } \deg(z) \leq \frac{2}{\alpha}$$

حالت ۲: اگر $z \notin N(x) \cap N(y)$ آنگاه $|N(z) \cap S| = 1$ بنابراین $|N(z) \cap S| = 1 \geq \alpha \deg(z)$

لذا $\deg(z) \leq \frac{1}{\alpha}$ بنابراین $G \in F_{\alpha}^*$

□

لم ۱۵.۲.۳. اگر G گراف همبند n رأسی باشد و $n \geq 3$ ، آنگاه یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه، شامل

تمام رئوس پشتیبان وجود دارد.

قضیه ۱۶.۲.۳. فرض کنید G گرافی n رأسی و $0 < \alpha < 1$ باشد. اگر G ستاره نباشد، آنگاه

$\gamma_{t\alpha}(G) = n$ اگر و فقط اگر برای هر رأس غیر پشتیبان مانند x ، رأسی مانند y در همسایگی

x موجود باشد، به طوری که $\deg(y) < \frac{1}{1-\alpha}$

اثبات. ($\Leftarrow$) (برهان خلف) فرض کنید $\gamma_{t\alpha}(G) = n$ و رأسی غیرپشتیبان باشد، یعنی

$$x \in V - S(G) \text{ و برای هر همسایگی } x \text{ مانند } y, \deg(y) \geq \frac{1}{1-\alpha} \text{ بنابراین}$$

$$\deg(y) - 1 \geq \alpha \deg(y) \text{ حال فرض کنید } S = V - \{x\}, \text{ در نتیجه}$$

$$|N(x) \cap S| = \deg(x) \geq \alpha \deg(x) \text{ همچنین برای هر } y \in N(x)$$

$$|N(y) \cap S| = \deg(y) - 1 \geq \alpha \deg(y) \text{ بنابراین } S = V - \{x\} \text{ یک مجموعه } \alpha \text{ - احاطه گر}$$

کلی با اندازه $n - 1$ می باشد که با فرض مسأله در تناقض است. لذا اگر $\gamma_{t\alpha}(G) = n$ ، آنگاه

برای هر رأس غیر پشتیبان مانند x ، رأسی مانند y در همسایگی x موجود است، به طوری که

$$\deg(y) < \frac{1}{1-\alpha}$$

($\Rightarrow$) فرض کنید S یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه باشد. (برهان خلف) فرض کنید $\gamma_{t\alpha}(G) < n$.

بنابراین رأسی مانند $x \notin S$ وجود دارد. با توجه به لم ۱۵.۲.۳، رأس x پشتیبان نمی باشد. لذا

رأسی مانند $y \in N(x)$ وجود دارد به طوری که $\deg(y) < \frac{1}{1-\alpha}$ از طرفی $|N(y) \cap S| \geq \alpha \deg(y)$.

همچنین با توجه به اینکه $y \in N(x)$ و $x \notin S$ داریم $|N(y) \cap S| \leq \deg(y) - 1$

از دو نامساوی فوق نتیجه می گیریم $\deg(y) - 1 \geq \alpha \deg(y)$ بنابراین $\deg(y) \geq \frac{1}{1-\alpha}$ و این

□

با فرض مسأله در تناقض می باشد. لذا $\gamma_{t\alpha}(G) = n$.

۳.۳ کران هایی روی α - احاطه گری کلی

قضیه ۱.۳.۳. اگر G گرافی n رأسی باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_{t\alpha}(G) \geq \lceil \frac{n\alpha\delta(G)}{\Delta} \rceil$.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه باشد و M مجموعه یال های بین S و $V - S$

و N مجموعه یال های موجود در $G[S]$ باشد. خواهیم داشت $\sum_{x \in S} \deg(x) = 2N + M$.

همچنین برای هر رأس v از گراف G ، $|N(v) \cap S| \geq \alpha |N(v)|$. با شمردن رئوس گراف G داریم

$$\sum_{v \in V} |N(v) \cap S| \geq \sum_{v \in V} \alpha |N(v)| \text{ همچنین}$$

$$\sum_{v \in S} |N(v) \cap S| + \sum_{v \in V-S} |N(v) \cap S| \geq \sum_{v \in V} \alpha |N(v)|$$

$$\sum_{v \in S} |N(v) \cap S| + \sum_{v \in V-S} |N(v) \cap S| = 2N + M \text{ از طرفی}$$

$$\sum_{v \in S} \deg(v) \geq \sum_{v \in V} \alpha \deg(v) \text{ در نتیجه } 2N + M \geq \sum_{v \in V} \alpha |N(v)| = \sum_{v \in V} \alpha \deg(v) \text{ لذا}$$

. همچنین می دانیم $\Delta(G) \geq \sum_{v \in S} \deg(v)$ بنابراین

$$|S| \Delta(G) \geq \sum_{v \in S} \deg(v) \geq \sum_{v \in V} \alpha \deg(v) \geq n \alpha \delta(G) \quad (3.3)$$

□

$$|S| \geq \frac{n \alpha \delta(G)}{\Delta(G)} \text{ در نتیجه}$$

نتیجه ۲.۳.۳. اگر T درختی n رأسی باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_{t\alpha}(T) \geq \frac{n\alpha}{\Delta(T)}$.

□

اثبات. با توجه به قضیه ی ۳.۳ و با توجه به اینکه $\delta(T) = 1$ نتیجه بدست می آید.

نتیجه ۳.۳.۳. اگر G گراف k -منتظم n رأسی باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_{t\alpha}(G) \geq \lceil n\alpha \rceil$.

□

اثبات. با توجه به قضیه ی ۳.۳ و اینکه $\Delta(G) = \delta(G) = k$ نتیجه بدست می آید.

قضیه ۴.۳.۳. اگر G گرافی با m یال باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_{t\alpha}(G) \geq \lceil \frac{m\alpha}{\Delta(G)} \rceil$.

اثبات. با توجه به رابطه ۳.۳، $|S| \Delta(G) \geq \sum_{v \in S} \deg(v) \geq \sum_{v \in V} \alpha \deg(v) \geq n \alpha \delta(G)$

$$|S| \Delta(G) \geq 2m\alpha \text{ بنابراین } \sum_{v \in V} \alpha \deg(v) = 2m\alpha$$

□

$$\text{لذا } |S| \geq \frac{2m\alpha}{\Delta}$$

قضیه ۵.۳.۳. اگر G گرافی با m یال باشد و $0 < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $\gamma_{t\alpha}(G) \geq \lceil \frac{2(n\alpha\delta(G)-m)}{\alpha\delta(G)} \rceil$.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه و E_1 مجموعه ی تمام یال های موجود بین S و

$G-S$ باشد. بنابراین $|E(G)| \geq |E(G[S])| + |E_\backslash|$. همچنین می دانیم $E(G) = \frac{1}{\gamma} \sum_{v \in V} \deg(v)$. از طرفی با توجه به اینکه S یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه می باشد، برای هر رأس موجود در S ، حداقل α برابر درجه آن رأس در S قرار دارد. بنابراین

$$\begin{aligned} |E(G)| &\geq |E(G[S])| + |E_\backslash| \\ &\geq \frac{1}{\gamma} \sum_{v \in S} \alpha \deg(v) + \sum_{v \in V-S} |N(v) \cap S| \\ &\geq \frac{\alpha \delta(G) |S|}{\gamma} + \alpha \delta(G) (n - |S|) \\ &= \frac{\gamma n \alpha \delta(G) - \alpha \delta(G) |S|}{\gamma} \end{aligned} \quad (۴.۳)$$

در نتیجه $|E(G)| = m \geq \frac{\gamma n \alpha \delta(G) - \alpha \delta(G) |S|}{\gamma}$. در نتیجه $|S| \geq \frac{\gamma n \alpha \delta(G) - \gamma m}{\alpha \delta(G)}$. لذا

$$\gamma_{t\alpha}(G) \geq \left\lceil \frac{\gamma(n\alpha\delta(G) - m)}{\alpha\delta(G)} \right\rceil$$

□

۴.۳ نتایج دیگر

تأثیر حذف رأسی از گراف یا حذف یالی از آن و یا افزودن یالی به آن بر روی عدد احاطه گری کلی، به طور گسترده مورد مطالعه قرار گرفته است. واندامر^۱ و همکارانش [۱۶] تأثیر افزودن یک یال را بر عدد احاطه گری کلی یک گراف مورد مطالعه قرار داده اند. ما در این بخش تأثیر حذف رأسی از گراف یا حذف یالی از آن و یا افزودن یالی به آن را بر روی عدد α - احاطه گری کلی بررسی می نماییم.

قضیه ۱.۴.۳. برای هر رأس v از گراف G ،

$$\gamma_{t\alpha}(G) - \alpha \deg(v) - 1 \leq \gamma_{t\alpha}(G - v) \leq \gamma_{t\alpha}(G) + \deg(v) - 1$$

^۱L. C. Van der Merwe

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه و v رأسی دلخواه از گراف G باشد. اگر $v \notin S$ ، آنگاه S مجموعه α - احاطه گر کلی برای $G - v$ خواهد بود. لذا $\gamma_{t\alpha}(G - v) \leq \gamma_{t\alpha}(G)$ حال فرض کنید $v \in S$ ، در این صورت برای هر رأس $x \in N(v)$ یکی از رأس های $N(x) - S$ را به S اضافه می کنیم. در نتیجه حداکثر به اندازه $\deg(v)$ رأس، به S اضافه خواهد شد. لذا

$$\gamma_{t\alpha}(G - v) \leq \gamma_{t\alpha}(G) + \deg(v) - 1$$

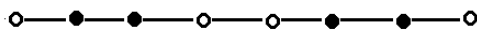
حال فرض کنید D یک $\gamma_{t\alpha}(G - v)$ - مجموعه باشد. اگر رأس دلخواه v را به D اضافه کرده و α برابر همسایه های آنرا نیز به D اضافه نماییم، آنگاه یک مجموعه α - احاطه گر کلی با اندازه $|D \cup \alpha N(v)| + 1$ برای گراف G خواهیم داشت. لذا $\gamma_{t\alpha}(G) \leq \gamma_{t\alpha}(G - v) + \alpha \deg(v) + 1$

□

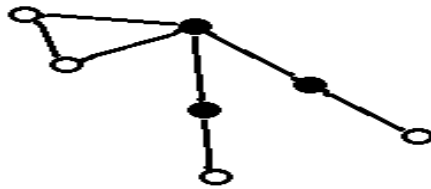
نمودارهای زیر به ازای $\alpha = \frac{1}{4}$ نمونه هایی از گراف هایی که کران بالا و پایین قابل دسترس دارند را نشان می دهند.



شکل ۲.۳: $\gamma_{t\alpha}(G) = 6$



شکل ۳.۳: $\gamma_{t\alpha}(G - v) = 4$

شکل ۴.۳: $\gamma_{t\alpha}(G) = ۳$ شکل ۵.۳: $\gamma_{t\alpha}(G - v) = ۶$

قضیه ۲.۴.۳. برای هر یال e از گراف G ، $\gamma_{t\alpha}(G) - ۲ \leq \gamma_{t\alpha}(G - e) \leq \gamma_{t\alpha}(G) + ۲$ و این کران قابل دسترس می باشد.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_{t\alpha}(G) -$ مجموعه و $e = xy$ یال دلخواهی باشد. دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

حالت ۱: اگر $\{x, y\} \not\subseteq S$ به طوری که $x \notin S$ و $y \notin S$ ، آنگاه S یک مجموعه α - احاطه گر کلی برای گراف $G - e$ می باشد. لذا $\gamma_{t\alpha}(G - e) \leq \gamma_{t\alpha}(G)$. حال فرض کنید $x \notin S$ و $y \in S$. در این صورت یکی از رأس های $N[x] - S$ را به S اضافه کرده و آن را S' می نامیم. به وضوح S' مجموعه ای α - احاطه گر کلی برای گراف $G - e$ می باشد. لذا $\gamma_{t\alpha}(G - e) \leq |S'| = \gamma_{t\alpha}(G) + ۱$.

حالت ۲: اگر $\{x, y\} \subseteq S$ ، آنگاه یکی از رأس های $N(x) - S$ و یکی از رأس های $N(y) - S$ را به S اضافه کرده و آن را S' می نامیم. به وضوح S' مجموعه ای α - احاطه گر برای گراف $G - e$ می باشد. لذا $\gamma_{t\alpha}(G - e) \leq |S'| = \gamma_{t\alpha}(G) + ۲$.

حال فرض کنید D یک $\gamma_{t\alpha}(G - e) -$ مجموعه باشد. دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

حالت ۱: اگر $\{x, y\} \subseteq D$ ، آنگاه D یک مجموعه α - احاطه گر کلی برای گراف G می باشد.

$$\gamma_{t\alpha}(G) \leq \gamma_{t\alpha}(G - e) \text{ لذا}$$

حالت ۲: اگر $\{x, y\} \not\subseteq S$ به طوری که $x \notin D$ و $y \in D$ ، آنگاه یکی از رأس های $N(y) - S$

را به S اضافه کرده و آن را S' می نامیم. به وضوح S' مجموعه ای α - احاطه گر کلی برای

گراف $G - e$ می باشد. لذا $\gamma_{t\alpha}(G) \leq \gamma_{t\alpha}(G - e) + ۱$. حال فرض کنید $x \notin D$ و $y \notin D$. در

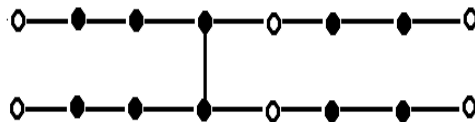
این صورت یکی از رأس های $N[x] - S$ و یکی از رأس های $N[y] - S$ را به S اضافه کرده و

آن را S' می نامیم. به وضوح S' مجموعه ای α - احاطه گر برای گراف $G - e$ می باشد. لذا

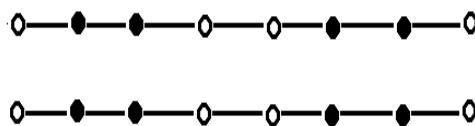
□

$$\gamma_{t\alpha}(G - e) \leq |S'| = \gamma_{t\alpha}(G) + ۲$$

نمودارهای زیر نمونه هایی از گراف هایی است که کران بالا و پایین قابل دسترس دارند.



$$\gamma_{t\alpha}(G) = ۱۰: ۶.۳ \text{ شکل}$$



$$\gamma_{t\alpha}(G - e) = ۸: ۷.۳ \text{ شکل}$$



شکل ۸.۳: $\gamma_{t\alpha}(G) = 2$



شکل ۹.۳: $\gamma_{t\alpha}(G - e) = 4$

قضیه ۳.۴.۳. اگر $e \notin G$ ، آنگاه $\gamma_{t\alpha}(G) - 2 \leq \gamma_{t\alpha}(G + e) \leq \gamma_{t\alpha}(G) + 2$ و این کران قابل دسترس می باشد.

اثبات. مانند قضیه ۲.۴.۳ ثابت می شود.

□

فصل ۴

گراف های بحرانی

۱.۴ مقدمه

در فصل دوم درباره α - احاطه گری به طور مفصل بحث شد. در مقاله ی دانبر^۱ و همکارانش [۶] چهار مسأله باز مطرح شده است. مسأله اول این مقاله به این صورت می باشد: اگر $\alpha > \frac{1}{4}$ و n فرد باشد، آنگاه $\gamma_\alpha(C_n) > \gamma_\alpha(P_n)$. بنابراین با کاهش یک یال، $\gamma_\alpha(C_n)$ کاهش می یابد. حال مایلیم بدانیم کدام گراف ها دارای این ویژگی می باشند. همچنین اگر یک یال به گراف G اضافه نماییم، $\gamma_\alpha(G)$ چه تغییری می کند.

ما در این فصل به توضیح این مسأله پرداخته و بسیاری از خواص آن را استخراج می کنیم. سپس ویژگی های گراف های γ_α - یال بحرانی و γ_α - یال بحرانی بالا را بررسی می نماییم.

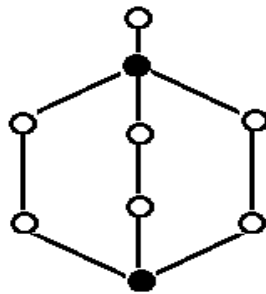
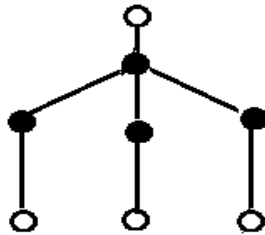
۲.۴ تأثیر حذف یک رأس و کاهش و افزایش یک یال بر $\gamma_\alpha(G)$

قضیه ۱.۲.۴. برای هر رأس v از گراف G ,

$$\gamma_\alpha(G) - 1 \leq \gamma_\alpha(G - v) \leq \gamma_\alpha(G) + \deg(v) - 1$$

^۱ J.E.Dunbar

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه باشد. اگر رأس $v \in S$ را از گراف G حذف نماییم و تمام رئوس همسایه آن را در S قرار دهیم، آنگاه یک مجموعه α - احاطه گر با اندازه $\gamma_\alpha(G) - 1 + \deg(v)$ برای گراف G خواهیم داشت. لذا $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma_\alpha(G - v) + 1$. حال فرض کنید D یک $\gamma_\alpha(G - v)$ - مجموعه باشد. با اضافه کردن رأس v به گراف $G - v$ و قرار دادن آن در D ، به وضوح $D \cup \{v\}$ یک مجموعه α - احاطه گر با اندازه $\gamma_\alpha(G - v) + 1$ برای گراف G خواهد بود. لذا $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma_\alpha(G - v) + 1$ نمودارهای زیر نمونه ای از گراف هایی که کران بالا و پایین قابل دسترس دارند را نشان می دهد.

شکل ۴.۱: $\gamma_\alpha(G) = 2$ شکل ۴.۲: $\gamma_\alpha(G - v) = 4$

شکل ۳.۴: $\gamma_\alpha(G) = 3$ شکل ۴.۴: $\gamma_\alpha(G - v) = 2$

قضیه ۲.۲.۴. برای هر یال e از گراف G ، $\gamma_\alpha(G) - 1 \leq \gamma_\alpha(G - e) \leq \gamma_\alpha(G) + 1$ و این کران قابل دسترس می باشد.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه و $e = xy$ یال دلخواهی باشد. دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

حالت ۱: اگر $\{x, y\} \subseteq S$ ، آنگاه S یک مجموعه α - احاطه گر برای گراف $G - e$ می باشد. لذا $\gamma_\alpha(G - e) \leq \gamma_\alpha(G)$.

حالت ۲: اگر $\{x, y\} \not\subseteq S$ به طوری که $x \notin S$ و $y \notin S$ ، آنگاه S یک مجموعه α - احاطه گر برای گراف $G - e$ می باشد. لذا $\gamma_\alpha(G - e) \leq \gamma_\alpha(G)$. حال فرض کنید $x \notin S$ و $y \in S$ ، در این صورت یکی از رأس های $N[x] - S$ را به S اضافه کرده و آن را S' می نامیم. به وضوح S' مجموعه ای α - احاطه گر برای گراف $G - e$ می باشد. لذا $\gamma_\alpha(G - e) \leq |S'| = \gamma_\alpha(G) + 1$. حال فرض کنید D یک $\gamma_\alpha(G - e)$ - مجموعه باشد. دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

حالت ۱: اگر $\{x, y\} \subseteq D$ ، آنگاه D یک مجموعه α - احاطه گر برای گراف G می باشد. لذا

$$\gamma_{\alpha}(G) \leq \gamma_{\alpha}(G - e)$$

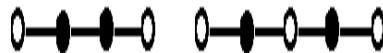
حالت ۲: اگر $\{x, y\} \not\subseteq D$ به طوری که $x \notin D$ و $y \in D$ ، آنگاه D مجموعه ای α - احاطه گر برای گراف G می باشد. لذا $\gamma_{\alpha}(G) \leq \gamma_{\alpha}(G - e)$. حال فرض کنید $x \notin D$ و $y \notin D$ در این صورت با قرار دادن یکی از رئوس x یا y در D ، $D \cup \{x\}$ و $D \cup \{y\}$ یک مجموعه α - احاطه گر برای گراف G می باشد. لذا $\gamma_{\alpha}(G) \leq \gamma_{\alpha}(G - e) + 1$

□

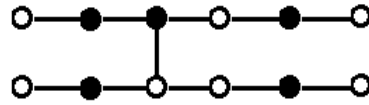
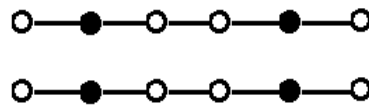
نمودارهای زیر نمونه ای از گراف هایی که کران بالا و پایین قابل دسترس دارند را نمایش می دهند.



شکل ۵.۴: $\gamma_{\alpha}(G) = 3$



شکل ۶.۴: $\gamma_{\alpha}(G - e) = 4$

شکل ۷.۴: $\gamma_\alpha(G) = 5$ شکل ۸.۴: $\gamma_\alpha(G - e) = 4$

قضیه ۳.۲.۴. اگر $e \notin G$ ، آنگاه $\gamma_\alpha(G) - 1 \leq \gamma_\alpha(G + e) \leq \gamma_\alpha(G) + 1$ و این کران قابل دسترس می باشد.

□

اثبات. مانند قضیه ۲.۲.۴ ثابت می شود.

۳.۴ γ_α - یال بحرانی و γ_α - یال بحرانی بالا

در قضیه ۲.۲.۴ ثابت کردیم برای هر یال e از گراف G ، $\gamma_\alpha(G) - 1 \leq \gamma_\alpha(G - e) \leq \gamma_\alpha(G) + 1$ و با رسم شکل و حذف یک یال مشخص از آن، نشان دادیم کران های فوق قابل دسترس می باشند. حال اگر برای هر یال دلخواه از گراف G ، این کران ها قابل دسترس باشند، مفهوم جدیدی به نام گراف های بحرانی بوجود می آید.

تعریف ۱.۳.۴. برای $0 < \alpha \leq 1$ ، گراف G را γ_α - یال بحرانی می نامیم، هرگاه با حذف هر یال غیر آویزان از آن، عدد α - احاطه گری یک واحد کاهش یابد. یعنی $\gamma_\alpha(G - e) = \gamma_\alpha(G) - 1$. همچنین اگر عدد احاطه گری یک واحد افزایش یابد یعنی $\gamma_\alpha(G - e) = \gamma_\alpha(G) + 1$ ، آنگاه

گراف G را γ_α - یال بحرانی بالا می نامیم.

نتیجه ۲.۳.۴. اگر هر یال از گراف G آویزان باشد، آنگاه با حذف هر یال دلخواه از G ، رأس تنها خواهیم داشت. لذا گراف G ، γ_α - یال بحرانی و γ_α - یال بحرانی بالا خواهد بود.

قضیه ۳.۳.۴. برای $0 < \alpha \leq 1$ ، گراف همبند G ، γ_α - یال بحرانی بالا است، اگر و تنها اگر G ، ستاره باشد.

اثبات. ($\Rightarrow$) اگر G یک ستاره باشد، آنگاه تمام یال های آن آویزان می باشد و با توجه به نتیجه ۲.۳.۴، γ_α - یال بحرانی بالا خواهد بود.

($\Leftarrow$) فرض کنید G ، γ_α - یال بحرانی بالا و S یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه باشد. (برهان خلف) فرض کنید G ستاره نباشد. بنابراین یال غیر آویزانی مانند $e = xy$ ، وجود دارد. اگر $\{x, y\} \subseteq S$ یا $\{x, y\} \cap S = \emptyset$ ، آنگاه با حذف $e = xy$ ، S همچنان یک مجموعه α - احاطه گر برای $G - e$ خواهد بود و این با فرض اینکه G ، γ_α - یال بحرانی بالا است در تناقض می باشد. بنابراین برای هر یال غیر آویزان مانند $e = xy$ از گراف G ، یک سر یال در S و سر دیگر آن خارج از S قرار دارد. یعنی $|\{x, y\} \cap S| = 1$. حال نشان می دهیم هر یال G آویزان است. (برهان خلف) فرض کنید $e = xy$ یک یال غیر آویزان باشد. بنابراین یک سر آن در S و سر دیگر آن خارج از S قرار دارد. فرض کنید $x \in S$ و $y \notin S$. اگر $\deg(y) > 1$ ، آنگاه $N(y) \subseteq S$. (زیرا $y \notin S$) بنابراین باید هر رأس همسایه آن در S قرار داشته باشد. (در این صورت S یک مجموعه α - احاطه گر برای $G - e$ خواهد بود که با فرض مسأله در تناقض می باشد. لذا $\deg(y) = 1$ است. از طرفی با توجه به اینکه G همبند است، نتیجه می گیریم G یک ستاره می باشد. $\square$

قضیه ۴.۳.۴. برای $0 < \alpha \leq \frac{1}{\Delta(G)}$ ، گراف همبند G ، γ_α - یال بحرانی است، اگر و تنها اگر G ، ستاره باشد.

اثبات. ($\Rightarrow$) اگر G یک ستاره باشد، آنگاه تمام یال های آن آویزان می باشد و با توجه به نتیجه ۲.۳.۴، $\gamma_\alpha -$ یال بحرانی بالا خواهد بود.

($\Leftarrow$) فرض کنید G ، $\gamma_\alpha -$ یال بحرانی باشد و $0 < \alpha \leq \frac{1}{\Delta(G)}$. (برهان خلف) فرض کنید G ، ستاره نباشد. بنابراین یال غیر آویزانی مانند $e = xy$ وجود دارد، به طوری که

$\gamma_\alpha(G - e) = \gamma_\alpha(G) - 1$ حال با توجه به اینکه $\Delta(G - e) \leq \Delta(G)$ نتیجه می گیریم $\alpha \leq \frac{1}{\Delta(G)} \leq \frac{1}{\Delta(G - e)}$ و با توجه به قضیه ۶.۲.۲، $\gamma_\alpha(G - e) = \gamma(G - e)$ و همچنین

$\gamma(G - e) = \gamma(G) - 1$ از طرفی در قضیه ۳.۱ $\gamma(G) \leq \gamma(G - e)$ از طرفی $\gamma_\alpha(G - e)$ در نتیجه $\gamma(G) \leq \gamma(G) - 1$ و به تناقض رسیدیم. بنابراین هر یال از گراف G آویزان می باشد. لذا گراف G ستاره است.

□

تعریف ۵.۳.۴. گراف G را بحرانی یالی پوشش رأسی نامیم، هرگاه برای هر یال غیر آویزان e ، $\alpha_*(G - e) = \alpha_*(G) - 1$.

قضیه ۶.۳.۴. گراف G برای $1 - \frac{1}{\Delta(G)} < \alpha \leq 1$ ، $\gamma_\alpha -$ یال بحرانی است، اگر و تنها اگر G بحرانی یالی پوشش رأسی باشد.

اثبات. فرض کنید e یالی غیر آویزان از G باشد. می دانیم $\Delta(G - e) \leq \Delta(G)$. بنابراین $\alpha > 1 - \frac{1}{\Delta(G)} \geq 1 - \frac{1}{\Delta(G - e)}$ حال با توجه به قضیه ۷.۲.۲، $\gamma_\alpha(G - e) = \alpha_*(G)$ و با توجه به

اینکه G بحرانی یالی پوشش رأسی است، نتیجه می گیریم

$$\gamma_\alpha(G - e) = \alpha_*(G - e) = \alpha_*(G) - 1 = \gamma_\alpha(G) - 1$$

□

قضیه ۷.۳.۴. برای $0 < \alpha \leq 1$ ، مسیر $P_n, \gamma_\alpha -$ یال بحرانی است، اگر و تنها اگر $2 \leq n \leq 3$ باشد.

اثبات. ($\Rightarrow$) به وضوح اگر $n = 2$ یا $n = 3$ ، آنگاه هر یال از مسیر P_n آویزان می باشد و با توجه به نتیجه ۲.۳.۴، $\gamma_\alpha -$ یال بحرانی خواهد بود.

($\Leftarrow$) فرض کنید مسیر $P_n, \gamma_\alpha -$ یال بحرانی باشد. (برهان خلف) حالت اول: فرض کنید $n \geq 4$ و $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$. اگر $n = 4$ ، آنگاه با حذف یال وسط مسیر P_4 به دو مسیر P_2 تبدیل می شود و خواهیم داشت $\gamma_\alpha(P_4) = \lceil \frac{4}{4} \rceil = 2$ و $2\gamma_\alpha(P_2) = 2\lceil \frac{2}{4} \rceil = 2$. لذا P_4 بحرانی نمی باشد. حال اگر $n \geq 5$ ، آنگاه با حذف یال سوم، مسیر P_n به دو مسیر P_3 و P_{n-3} تبدیل می شود و با توجه به اینکه مسیر $P_n, \gamma_\alpha -$ یال بحرانی می باشد داریم $\gamma_\alpha(P_{n-3}) + \gamma_\alpha(P_3) < \gamma_\alpha(P_n)$. بنابراین $\lceil \frac{n-3}{4} \rceil + \lceil \frac{3}{4} \rceil < \lceil \frac{n}{4} \rceil$. در نتیجه $1 + 1 < \lceil \frac{n}{4} \rceil - 1$ و به تناقض رسیدیم. لذا برای $0 < \alpha \leq \frac{1}{4}$ و $n \geq 5$ مسیر $P_n, \gamma_\alpha -$ یال بحرانی نمی باشد.

حالت دوم: فرض کنید $\frac{1}{4} < \alpha \leq 1$ ، در این صورت با حذف یال دوم مسیر P_n به دو مسیر P_2 و P_{n-2} تبدیل خواهد شد و با توجه به اینکه مسیر $P_n, \gamma_\alpha -$ یال بحرانی است داریم $\gamma_\alpha(P_{n-2}) + \gamma_\alpha(P_2) < \gamma_\alpha(P_n)$. بنابراین $\lceil \frac{n-2}{4} \rceil + \lceil \frac{2}{4} \rceil < \lceil \frac{n}{4} \rceil$. در نتیجه $1 + 1 < \lceil \frac{n}{4} \rceil - 1$ و به تناقض می رسیدیم. لذا برای $\frac{1}{4} < \alpha \leq 1$ و $n \geq 5$ مسیر $P_n, \gamma_\alpha -$ یال بحرانی نمی باشد. $\square$

قضیه ۸.۳.۴. دور $C_n, \gamma_\alpha -$ یال بحرانی است، اگر و تنها اگر n فرد و $\alpha > \frac{1}{4}$ باشد.

اثبات. ($\Rightarrow$) فرض کنید $n = 2k + 1$ و $\alpha > \frac{1}{4}$ ، در این صورت با حذف یال دلخواه e ، دور C_n به مسیر P_n تبدیل خواهد شد. لذا $\gamma_\alpha(P_n) = \lfloor \frac{2k+1}{4} \rfloor = k + \lfloor \frac{1}{4} \rfloor = k$

و $\gamma_\alpha(C_n - e) = \gamma_\alpha(C_n) - 1$ در نتیجه $\gamma_\alpha(C_n) = \lceil \frac{2k+1}{4} \rceil = k + \lceil \frac{1}{4} \rceil = k + 1$

($\Leftarrow$) فرض کنید $n = 2k$ یا $\alpha \leq \frac{1}{4}$ ، حالت های زیر را در نظر می گیریم.

(برهان خلف) حالت اول: فرض کنید $\frac{1}{4} < \alpha \leq \frac{1}{3}$. در این صورت برای هر n

$\gamma_\alpha(C_n) = \gamma_\alpha(P_n) = \lceil \frac{n}{4} \rceil$ لذا $\gamma_\alpha(C_n) - \gamma_\alpha$ یال بحرانی نمی باشد و این با فرض مسأله در

تناقض است.

حالت دوم: فرض کنید $n = 2k$ و $\frac{1}{4} < \alpha$ ، در نتیجه $\gamma_\alpha(C_n) = \lceil \frac{2k}{4} \rceil = k$ و

$\gamma_\alpha(P_n) = \lfloor \frac{2k}{4} \rfloor = k$ لذا $\gamma_\alpha(C_n) - \gamma_\alpha$ یال بحرانی نمی باشد و این با فرض مسأله در تناقض

□

است.

با توجه به قضایای فوق گراف K_n به ازای $n = 2$ و $n = 3$ ، $\gamma_\alpha -$ یال بحرانی خواهد بود. و

برای $n \geq 4$ بررسی خواهیم کرد.

قضیه ۹.۳.۴.، گراف کامل K_n ، برای $n \geq 4$ ، $\gamma_\alpha -$ یال بحرانی است، اگر و تنها اگر $\frac{n-2}{n-1} < \alpha \leq 1$

$\alpha \leq 1$

اثبات. ($\Leftarrow$) اگر $\frac{n-2}{n-1} < \alpha \leq 1$ ، آنگاه $n-1 \leq \alpha(n-1) < n-2$ در نتیجه

$\gamma_\alpha(K_n) = \lceil \alpha(n-1) \rceil = n-1$ فرض کنید $e = xy$ یال دلخواهی باشد. و $S = V - \{x, y\}$

کافیست ثابت کنیم $|S| = \gamma_\alpha(K_n - e) = n-2$. برای هر رأس $v \in V - S$ داریم

$|N(x) \cap S| = n-2 \geq \alpha(n-2)$ و $|N(y) \cap S| = n-2 \geq \alpha(n-2)$ در نتیجه $S = V - \{x, y\}$

یک مجموعه α - احاطه گر برای $K_n - e$ با اندازه $n-2$ می باشد. لذا $|S| \leq n-2$. از طرفی

با توجه به قضیه ۲.۲.۴، $\gamma_\alpha(K_n) - 1 = n-2 \leq \gamma_\alpha(K_n - e)$ لذا $|S| \leq n-2$. بنابراین

$|S| = n-2$

($\Rightarrow$) (برهان خلف) فرض کنید $\alpha \leq \frac{n-2}{n-1}$ و S یک $\gamma_\alpha(G - e)$ - مجموعه و $e = xy$ یال

دلخواهی باشد. در نتیجه $\gamma_\alpha(K_n) = \lceil \alpha(n-1) \rceil \leq n-2$ از طرفی $\gamma_\alpha(K_n) - \gamma_\alpha$ ، یال بحرانی می

باشد. بنابراین $n-3 \leq \gamma_\alpha(K_n) - 1 = \gamma_\alpha(K_n - e) = \gamma_\alpha(K_n) - 1 = \lceil \alpha(n-1) \rceil - 1 \leq n-3$ بنابراین $|V - S| \geq 3$.

در نتیجه رأس $z \in V - (S \cap \{x, y\})$ موجود می باشد، به طوری که

$$|N_{G-e}(z) \cap S| \geq \alpha \deg_{G-e}(z) = \alpha(n-1)$$

$$|N_{G-e}(z) \cap S| = |S| = \gamma_\alpha(K_n - e)$$

$$|S| = \gamma_\alpha(K_n - e) \geq \lceil \alpha(n-1) \rceil = \gamma_\alpha(K_n) \text{ و به تناقض}$$

رسیدیم. بنابراین اگر گراف کامل K_n ، γ_α - یال بحرانی باشد، آنگاه $1 \leq \alpha \leq \frac{n-2}{n-1}$.

□

قضیه ۱۰.۳.۴. اگر گراف G ، $\gamma_\alpha(G)$ - یال بحرانی باشد، آنگاه برای هر یال غیر آویزان $e = xy$

و هر $\gamma_\alpha(G - e)$ مجموعه داریم

$$1) \{x, y\} \cap S = \emptyset$$

$$2) |N_G(y) \cap S| < \alpha \deg(y) \text{ یا } |N_G(x) \cap S| < \alpha \deg(y)$$

اثبات. فرض کنید گراف G ، $\gamma_\alpha(G)$ - یال بحرانی باشد بنابراین $\gamma_\alpha(G - e) = \gamma_\alpha(G) - 1$ فرض

کنید S یک $\gamma_\alpha(G - e)$ - مجموعه باشد. (برهان خلف) اگر $\{x, y\} \cap S \neq \emptyset$ ، آنگاه S یک

مجموعه α - احاطه گر برای G می باشد. لذا $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma_\alpha(G - e)$ که با فرض مسأله در تناقض

است. لذا $\{x, y\} \cap S = \emptyset$.

اگر $\{x, y\} \cap S = \emptyset$ و $|N_G(y) \cap S| \geq \alpha \deg(y)$ و $|N_G(y) \cap S| \geq \alpha \deg(y)$ ، آنگاه S

یک مجموعه α - احاطه گر برای G می باشد و با فرض مسأله در تناقض است. بنابراین

□

$$|N(x) \cap S| < \alpha \deg(y) \text{ و } |N(y) \cap S| < \alpha \deg(y)$$

لم ۱۱.۳.۴. در هر گراف همبند G از مرتبه $n \geq 3$ ، یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه شامل تمام رؤوس

پشتیبان وجود دارد.

قضیه ۱۲.۳.۴. فرض کنید گراف G حداقل دارای یک رأس پایانی باشد. در این صورت گراف G ، $\gamma_\alpha(G)$ - یال بحرانی می باشد، اگر و تنها اگر ستاره باشد.

اثبات. به وضوح گراف های ستاره $\gamma_\alpha(G)$ - یال بحرانی می باشند. حال فرض کنید گراف G ، $\gamma_\alpha(G)$ - یال بحرانی با حداقل یک رأس پایانی مانند x باشد. (برهان خلف) فرض کنید G ستاره نباشد، در نتیجه یال غیر آویزان yz وجود دارد، به طوری که $y \in N(x)$ و $z \in N(y)$ و $\deg(z) > 1$ می باشد. بنابراین با توجه به قضیه ۱۰.۳.۴ برای هر $\gamma_\alpha(G - yz)$ - مجموعه، $\{y, z\} \cap S = \emptyset$. از طرفی y رأسی پشتیبان می باشد. لذا با توجه به لم ۱۱.۳.۴، یک $\gamma_\alpha(G - yz)$ - مجموعه شامل y وجود دارد. و این مسئله با قضیه ۱۰.۳.۴ در تناقض می باشد. $\square$

قضیه ۱۳.۳.۴. اگر S یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه و شامل دو رأس پشتیبان مجاور باشد، آنگاه گراف G ، γ_α - یال بحرانی نمی باشد.

اثبات. فرض کنید S یک $\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه و شامل دو رأس پشتیبان مجاور مانند x, y باشد. با حذف $e = xy$ به وضوح S یک مجموعه α - احاطه گر برای گراف $G - e$ می باشد. لذا $\gamma_\alpha(G - e) \leq \gamma_\alpha(G)$. حال فرض کنید D یک $\gamma_\alpha(G - e)$ - مجموعه باشد و x و y دو رأس پشتیبان غیر مجاور در D باشند. با اضافه کردن یال $e = xy$ به وضوح D یک مجموعه α - احاطه گر برای گراف G می باشد. لذا $\gamma_\alpha(G) \leq \gamma_\alpha(G - e)$. در نتیجه $\gamma_\alpha(G) = \gamma_\alpha(G - e)$ بنابراین گراف G ، γ_α - یال بحرانی نمی باشد. $\square$

از قضیه فوق نتیجه می گیریم گراف های دو ستاره γ_α - یال بحرانی نمی باشند.

مراجع

- [1] J. A. Bondy, U. S. R. Murty. " Graph Theory With Applications. " North Holland New York, (1980). [1](#), [4](#)
- [2] E. J. Cockayne, R. Dowes, S. T. Hedetniemi, " Total domination in graphs. " *Networks*, 10 (1980), 211-219. [15](#)
- [3] E. J. Cockayne, S. T. Hedetniemi, D. J. Miller, " Properties of hereditary hypergraphs and middle graphs " *Canad. Math. Bull.* 21 (4) (1978) 461-468. MR0523588 (80m:05087) . [14](#)
- [4] F. Dahme, D. Rautenbach, and L. Volkmann, "Some remarks on α - domination " *Discussiones Mathematicae Graph Theory* 24 (2004), 423-430. [31](#), [32](#)
- [5] G. S. Domke, J. E. Dunbar, L. R. Markus, "Gallai-type theorems and domination parameters " *Discrete Math.* 167/168 (1997) 237-248. MR1446748 (98b:05053). [36](#)
- [6] J. E. Dunbar, D. G. Hoffman, R. C. Laskar, L. R. Markus α - Domination " *Discrete Math.* 234(2001) 133-138. [17](#), [18](#), [53](#)
- [7] T. Gallai, *Uber extreme Punkt-und Kantenmengen*, *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eotvos Sect. Math.* 2 (1959), 133-138. MRO131370 (24 1222). [8](#)
- [8] M. R. Garey, D. S. Johnson, " *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness* " Freeman, New York, 1979. MR0519066 (80g:68056). [37](#)
- [9] T. w. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, " *Fundamentals of Domination in Graphs.* " Marcel Dakkr, New York, 1998. MR1605684 (2001 a:05112). [9](#), [16](#)
- [10] T. w. Haynes, S. T. Hedetniemi, P. J. Slater, " *Domination in graphs: Advanced Topics* " Marcel Dekker, Inc. New york(1998). [16](#)
- [11] T. W. Haynes, M. A. Henning, " Upper bounds on the total domination number " *To appear in Ars Combin.* [16](#)
- [12] M. A. Henning " *Graphs with large total domination number* " *J. Graph Theory* 35(1), 21-45 (2000). [16](#)

- [13] M. A. Henning " A survey of selected recent results on total domination in graphs " *Discrete Math.* 309(2009) 32-63. [16](#)
- [14] E. A. Nordhaus, J. w. Gaddum "On complementary graphs" *Amer. Math. Mon.* 63 (1956) 175-177. MR0078685 (17, 1231c). [24](#)
- [15] W. W. Rouse Ball, *Mathematical recreation and problems of past and present times*, Mack Millan, London, (1982). [10](#)
- [16] L. C. Van der Merwe, C. M. Mynhardt and T. W. Haynes "Total domination edge critical graphs" *Util. Math.*, 54(1998), 229-240.
- [17] D. B. West. "Introduction to graph Theory. " *Seconded Prentice- Hall, Upper Saddle River NJ*, (2001). [1](#)

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

<i>Domination</i>	احاطه گری
α - <i>Domination</i>	α -احاطه گری
<i>Total domination</i>	احاطه گری کلی
<i>Total α-domination</i>	α - احاطه گری کلی
<i>Independence</i>	استقلال
α - <i>Independence</i>	α - استقلال
<i>Critical</i>	بحرانی
<i>Leaf</i>	برگ
<i>Matching</i>	تطابق
<i>Perfect matching</i>	کامل تطابق
<i>Cycle</i>	دور
<i>End vertex</i>	رأس پایانی
<i>Support vertex</i>	رأس پوششی
<i>Isolated vertex</i>	رأس تنها
<i>Independent vertices</i>	رئوس مستقل
<i>Induced subgraph</i>	زیرگراف القایی
<i>Domination number</i>	عدد احاطه گری
α - <i>Domination number</i>	عدد α احاطه گری
<i>Total domination number</i>	عدد احاطه گری کلی
<i>Total α-domination number</i>	عدد α - احاطه گری کلی
<i>Chromatic number</i>	عدد رنگی
<i>Irredundance</i>	غیر زائد
α - <i>Irredundance</i>	α -غیرزائد
<i>Bound</i>	کران
<i>Upper bound</i>	کران بالا
<i>Lower bound</i>	کران پایین
<i>Sharp bound</i>	کران قابل دسترس
<i>Complete bipartite graph</i>	گراف دو بخشی کامل
<i>Complete p-partite graph</i>	گراف p -بخشی کامل
<i>Star graph</i>	گراف ستاره
<i>Complete graph</i>	گراف کامل

<i>Regular graph</i>	گراف منتظم
<i>K-Regular graph</i>	گراف k - منتظم
<i>Dominating set</i>	مجموعه احاطه گر
$\gamma(G)$ - Set	$\gamma(G)$ - مجموعه
α - Dominating set	مجموعه α - احاطه گر
$\gamma_\alpha(G)$ - set	$\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه
<i>Total-dominating set</i>	مجموعه احاطه گر کلی
$\gamma_t(G)$ - Set	$\gamma_t(G)$ - مجموعه
<i>Total α-dominating set</i>	مجموعه α - احاطه گر کلی
$\gamma_{t\alpha}(G)$ - Set	$\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه
α -Independent set	مجموعه α - مستقل
<i>Irredundant set</i>	مجموعه غیر زائد
α -Irredundant set	مجموعه α - غیرزائد
<i>Path</i>	مسیر
<i>Connected</i>	همبند
<i>Open neighborhood</i>	همسایگی باز
<i>Close neighborhood</i>	همسایگی بسته
<i>Pendant edge</i>	یال آویزان
<i>Non-pendant edge</i>	یال غیر آویزان
γ_α -Edge critical	γ_α - یال بحرانی
γ_α -Edge super critical	γ_α - یال بحرانی بالا

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

<i>Bound</i>	کران
<i>Chromatic number</i>	عدد رنگی
<i>Close neighborhood</i>	همسایگی بسته
<i>Complete bipartite graph</i>	گراف دو بخشی کامل
<i>Complete graph</i>	گراف کامل
<i>Complete p-partite graph</i>	گراف p -بخشی کامل
<i>Connected</i>	همبند
<i>Critical</i>	بحرانی
<i>Cycle</i>	دور
<i>Dominating set</i>	مجموعه احاطه گر
α - <i>Dominating set</i>	مجموعه α - احاطه گر
<i>Domination</i>	احاطه گری
α - <i>Domination</i>	α -احاطه گری
<i>Domination number</i>	عدد احاطه گری
α - <i>Domination number</i>	عدد α احاطه گری
γ_α - <i>Edge critical</i>	γ_α - یال بحرانی
γ_α - <i>Edge super critical</i>	γ_α - یال بحرانی بالا
<i>End vertex</i>	رأس پایانی
<i>Independence</i>	استقلال
α - <i>Independence</i>	α - استقلال
α - <i>Independent set</i>	مجموعه α - مستقل
<i>Independent vertices</i>	رئوس مستقل
<i>Induced subgraph</i>	زیرگراف القایی
<i>Irredundance</i>	غیر زائد
α - <i>Irredundance</i>	α -غیرزائد
<i>Irredundant set</i>	مجموعه غیر زائد
α - <i>Irredundant set</i>	مجموعه α - غیرزائد
<i>Isolated vertex</i>	رأس تنها
<i>Leaf</i>	برگ
<i>Lower bound</i>	کران پایین
<i>Matching</i>	تطابق

<i>Non-pendant edge</i>	یال غیر آویزان
<i>Open neighborhood</i>	همسایگی باز
<i>Path</i>	مسیر
<i>Pendant edge</i>	یال آویزان
<i>Perfect matching</i>	کامل تطابق
<i>Regular graph</i>	گراف منتظم
<i>K-Regular graph</i>	گراف k - منتظم
$\gamma(G)$ - Set	$\gamma(G)$ - مجموعه
$\gamma_t(G)$ - Set	$\gamma_t(G)$ - مجموعه
$\gamma_\alpha(G)$ - set	$\gamma_\alpha(G)$ - مجموعه
$\gamma_{t\alpha}(G)$ - Set	$\gamma_{t\alpha}(G)$ - مجموعه
<i>Sharp bound</i>	کران قابل دسترس
<i>Star graph</i>	گراف ستاره
<i>Support vertex</i>	رأس پوششی
<i>Total-dominating set</i>	مجموعه احاطه گر کلی
<i>Total α-dominating set</i>	مجموعه α - احاطه گر کلی
<i>Total domination</i>	احاطه گری کلی
<i>Total α-domination</i>	α - احاطه گری کلی
<i>Total domination number</i>	عدد احاطه گری کلی
<i>Total α-domination number</i>	عدد α - احاطه گری کلی
<i>Upper bound</i>	کران بالا

Abstract

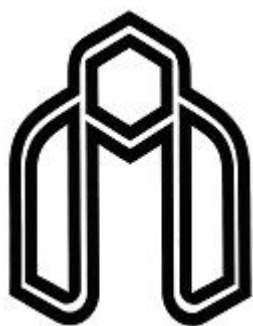
Let $G = (V, E)$ be a graph of order n and with no isolated vertex, and let $0 < \alpha \leq 1$ be a real number. A subset $S \subseteq V$ is an α - dominating set for G if for each $v \in V - S$, $|N(v) \cap S| \geq \alpha|N(v)|$, where $N(v)$ is the set of all vertices of G which are adjacent to v . The α - domination number $\gamma_\alpha(G)$ of G is the minimum cardinality of an α - dominating set of G . In this thesis we study α - domination in graphs.

In chapter 1, we state some basic and elementary concepts which we use for the next chapters.

In chapter 2, we study α - domination in a graph, and give several properties, bounds and exact values for the α - domination number of a graph.

In chapter 3, we extend the concept of α - domination to total α - domination and obtain a lot of new results. Finally in chapter 4 we study the effect of removal or addition of an edge on the α - domination number of a graph.

Keywords: *Domination, α - Domination, Total α - domination, Critical graphs*



Shahid Beheshti University
Faculty of Mathematical Sciences
Department of Mathematics

Ph.D. Thesis

Title

By:
Name

Supervisor:
Professor ...

Date