

الحسين



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش تحقیق در عملیات

پایان نامه کارشناسی ارشد

مقایسه تعدادی از روش های عددی در مسائل بهینه سازی چندهدفه

نگارنده: رقیه استارمی

استاد راهنما

دکتر مهرداد غزنوی

استاد مشاور

دکتر سمیه مغاری

مهر ۱۴۰۰

تقدیم به:

پدر و مادر فداکارم، اسوه‌های صبر و خستگی‌ناپذیری در زندگی‌ام.
و تقدیم به کسی که لحظات ناب باوربودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن،
عظمت رسیدن و تمام تجربه‌های یکتا و زیبای زندگی‌م، مدیون حضور سبز اوست.

سپاس‌گزاری

نخست خداوند بزرگ و علیم را شاکرم که به من قدرت تفکر و نوشتن داد و تلاش را در وجودم برای یافتن معماهایی هرچند کوچک از علم قرار داد. برخود فرض می‌دانم از استاد فرهیخته و دانشمند خویش، آقای دکتر مهرداد غزنوی که همواره نگارنده را مورد لطف و محبت خود قرار داده‌اند، کمال تشکر و قدردانی را بجا آورم. و نیز از خانواده خود که مرا در این کار یاری نمودند کمال تشکر را بجا می‌آورم.

رقیه استارمی

مهر ۱۴۰۰

تعهد نامه

اینجانب رقیه استارمی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **مقایسه تعدادی از روش های عددی در مسائل بهینه سازی چندهدفه**، تحت راهنمایی مهرداد غزنوی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

رقیه استارمی

مهر ۱۴۰۰

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

↳



چکیده

در این پایان نامه تجزیه و تحلیل، توصیف و مقایسه شش روش عددی در بهینه سازی چندهدفه انجام می شود. با توجه به ویژگی های این روش ها مانند مخروط ترتیبی، تحدب و محدودیت، توانایی به وجود آوردن جواب های کارای سره، توانایی در نظر گرفتن نقاط مرجع که انتخاب تصمیم گیرنده به عنوان یک جواب با متغیرهای وزنی است، مورد بررسی قرار می گیرند. این پایان نامه همچنین ویژگی های جدیدی را برای این روش ها و روابط بین آنها ارائه می دهد. ویژگی های اصلی این روش های عددی در مثال ها نشان داده می شود.

کلمات کلیدی: روش عددی مخروطی. روش جمع وزنی. روش ϵ - محدودیت. روش بنسون. روش وزنی چپیشف. روش پاسکال - سرافینی. بهینه سازی چندهدفه. کارایی سره.

فهرست مطالب

س	فهرست تصاویر	
ف	فهرست جداول	
۱	تعاریف و مقدمات	۱
۱	۱.۱ مقدمه	۱
۳	۲.۱ مقدمات	۳
۵	۲ روش‌های اسکالرسازی در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه	۵
۵	۱.۲ ویژگی‌های اصلی روش‌های اسکالرسازی	۵
۵	۱.۱.۲ روش اسکالرسازی مجموع وزن‌دار (WSS)	۵
۷	۲.۱.۲ روش ε - محدودیت (EC)	۷
۱۰	۳.۱.۲ روش اسکالرسازی بنسون (BS)	۱۰
۱۲	۴.۱.۲ روش اسکالرسازی چپیشف وزن‌دار WCS	۱۲
۱۴	۵.۱.۲ روش اسکالرسازی پاسکلاتی-سرافینی (PSS)	۱۴
۲۱	۳ روابط بین تعدادی از روش‌های عددی در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه	۲۱
۲۱	۱.۰.۳ روش اسکالرسازی مخروطی (CS)	۲۱
	۲.۰.۳ روابط بین اسکالرسازی مخروطی CS و روش اسکالرسازی پاسکلاتی-سرافینی	
۲۶	۳.۰.۳ رابطه بین اسکالرسازی مخروطی و روش بنسون	۲۶
۲۸	۴ مقایسه عددی روش‌های مختلف اسکالرسازی	۲۸
۳۱	۱.۰.۴ بررسی روش WSS	۳۱
۳۲	۲.۰.۴ بررسی روش EC	۳۲
۳۴	۳.۰.۴ بررسی روش BS	۳۴
۳۵	۴.۰.۴ بررسی روش WCS	۳۵

۳۵ بررسی روش pps ۵.۰.۴

۳۶ بررسی روش CS ۶.۰.۴

۳۹ ۵ نتیجه گیری

۴۱ مراجع

فهرست تصاویر

۷	نمایشی از روش WSS a. فضای هدف محدب، b. فضای هدف نامحدب.	۱.۲
۸	تصویر هندسی روش EC	۲.۲
۱۱	تصویر هندسی روش BS	۳.۲
۱۳	تصویر هندسی روش WCS	۴.۲
۱۶	تصویر هندسی روش PSS	۵.۲
۱۸	تصویر هندسی ملاحظه ۳.۱.۲	۶.۲
۲۵	تصویر هندسی روش CS	۱.۳
۳۲	تصویر مجموعه $\mathbb{Y}_1$ در مثال ۱.۰.۴	۱.۴

فهرست جداول

۳۳	نتایج به دست آمده با روش WSS برای مثال ۱.۰.۴	۱.۴
	نتایج به دست آمده از حل مسئله $EC(\varepsilon, 2)$ (در مورد $\min f_2(x)$) برای مثال	۲.۴
۳۳	نتایج به دست آمده از حل مسئله $EC(\varepsilon, 1)$ (در مورد $\min f_1(x)$) برای مثال	۳.۴
۳۳	نتایج به دست آمده با روش BS برای مثال ۱.۰.۴	۴.۴
۳۴	نتایج به دست آمده با روش WCS برای مثال ۱.۰.۴	۵.۴
۳۵	نتایج به دست آمده با روش WCS برای مثال ۱.۰.۴	۶.۴
۳۶	نتایج به دست آمده با روش CS برای مثال ۱.۰.۴	۷.۴
۳۷	ویژگی های اصلی شش روش مقیاس زدایی	۱.۵
۴۰		

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

در این پایان‌نامه، شش روش عددی رایج که در بهینه‌سازی چندهدفه مورد استفاده قرار می‌گیرد را بررسی می‌کنیم. این روش‌ها عبارتند از: مجموع وزنی، ϵ - محدودیت، بنسون^۱، چپیشف^۲ وزنی، پاسکلاتی - سرافینی^۳ و روش‌های عددی مخروطی. این روش‌ها با استفاده از ویژگی‌های رایج مقایسه شده‌اند، و برای برخی از آن‌ها خواص جدید فرمول‌بندی و اثبات شده‌است. ویژگی این روش‌ها با توجه به ویژگی‌های اصلی مانند مخروط ترتیبی، تحذب و کران‌داری، توانایی جدولی نقاط مرجع که توسط تصمیم‌گیرنده به‌عنوان یک جواب مشخص می‌شوند و وزن‌دهی به ترجیحات تصمیم‌گیرنده، تعداد محدودیت‌ها و متغیرهای تصمیم‌اضافی در نظر گرفته‌شده مورد بررسی قرار می‌گیرند. این پایان‌نامه همچنین ویژگی‌های جدیدی برای این روش‌ها و روابط بین آن‌ها ارائه می‌دهد.

تأکید بر این‌است که تنها این شش روش عددی نمی‌توانند با ویژگی‌های ذکر شده در بالا مقایسه شود، بلکه بسیاری از روش‌های دیگری در مقالات وجود دارد. در این پایان‌نامه برای شروع این شش روش را انتخاب می‌کنیم و هدف ما تهیه یک مرجعی است که در آن ویژگی‌های

¹Benson

²Chebyshev

³Pascoletti-Serafini

اصلی روش‌های عددی را بتوان یافت.

برای مثال روش محدودیت انعطاف پذیر (در [۲، ۳] ببینید) که اصلاحی از روش ε - محدودیت است شرایطی برای کارایی و جواب‌های کارای سره ارائه می‌دهد. باید توجه داشت که مورد دیگری از روش ε - محدودیت در [۴] آورده شده است که در آن ε با یک مقدار مرتبط به ساختار مسئله جایگزین می‌شود. مسئله اسکالرسازی چپیشف وزنی افزوده با اضافه کردن یک $1 -$ نرم به تابع هدف مسئله چپیشف وزن دار که توسط استوئر^۴ و چو^۵ پیشنهاد شد ([۵] ببینید)، جواب‌های کارای سره برای مقادیر مناسب انتخاب شده از وزن‌ها و پارامترهای افزوده شده را تولید می‌کند. مایتینن^۶ تجزیه و تحلیل بسیاری از روش‌های عددی را بیان می‌کند [۶] (همچنین [۷] را ببینید). وایرزبیسکی^۷ چندین تابع اسکالرسازی را با استفاده از یک نقطه مرجع به عنوان اطلاعات ترجیحی پیشنهاد کرد [۸]. فلورس بازان^۸ و هرناندز^۹ یک مسئله بهینه‌سازی برداری اصلاح شده را با استفاده از یک تابع اسکالرسازی شناخته شده که قبلاً در مقالات استفاده شده است [۹] معرفی کردند و (برای مثال [۱۰] - [۱۲] ببینید)، بسیاری از ویژگی‌های مفید جواب‌های کارا برای این مسئله را مطالعه کردند. باید توجه داشت که مقایسه روش‌های مختلف یک مسئله مهم است زیرا تمام روش‌ها ممکن است یک ویژگی قابل مقایسه یکسان نداشته باشند. هرچند همه‌ی این روش‌ها به‌طور گسترده‌ای در مقالات مورد بحث قرار گرفته‌اند و مقایسه روش‌های بهینه‌سازی چندهدفه به روش‌های مختلفی مورد بررسی قرار گرفته، (به عنوان مثال کارهای [۱، ۲، ۶، ۸، ۱۳، ۱۷]، را ببینید) هدف ما این است که با استفاده از ویژگی‌ها و روابط جدید، تجزیه و تحلیل دقیق در مورد این روش‌ها ارائه دهیم. قبلاً ثابت شده است (در [۱۵] ببینید) که روش اسکالرسازی پاسکلاتی - سرافینی تعمیم روش اسکالرسازی مجموع وزنی، ε - محدودیت و روش‌های چپیشف وزنی است. در این پایان‌نامه روابط جدید بین روش اسکالرسازی مخروطی و روش اسکالرسازی بنسون و پاسکلاتی - سرافینی ایجاد می‌کنیم.

ادامه پایان‌نامه به شرح زیر است: بخش ۲.۱ مقدماتی را ارائه می‌دهد. ویژگی‌های اصلی شش روش عددی در شش زیر بخش در ۱.۲ ارائه می‌شود. در بخش ۵.۱.۲ علاوه بر ویژگی‌های موجود از روش پاسکلاتی - سرافینی، ویژگی جدیدی برای این روش ارائه شده است (به قضیه ۱۰.۱.۲ نگاه کنید). در بخش ۱۰.۰.۳ روش عددی مخروطی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته و ویژگی‌های اصلی این روش جامع و کامل توضیح داده می‌شود. دو رابطه جدید بین این روش‌های اسکالرسازی، پاسکلاتی - سرافینی و بنسون ایجاد شده است. و قضیه‌های مرتبط در بخش‌های بعد آورده شده است. در بخش ۴ با ذکر یک مثال ویژگی‌های تمام روش‌های ارائه

⁴Steuer

⁵Choo

⁶Miettinen

⁷Wierzbicki

⁸FloresBazan

⁹Hernandez

شده را توضیح می‌دهیم. در این بخش همه‌ی ویژگی‌های ذکر شده برای هر روش اسکالری سازی به‌طور جداگانه در همان مثال نشان داده می‌شود. در آخر، در فصل ۴ برخی از نتایج به‌دست آمده از پایان‌نامه آورده شده است.

۲.۱ مقدمات

این بخش را با تعاریف استاندارد از بهینه‌سازی چند هدفه آغاز می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه ناتهی باشد. $\mathbb{R}_+^n := \{y = (y_1, \dots, y_n) : y_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ به‌طور کلی در این پایان‌نامه $\mathbb{R}_+$ مجموعه‌ای از اعداد حقیقی نامنفی را نشان می‌دهد. یک زیرمجموعه ناتهی از $\mathbb{R}^n$ را یک مخروط گویند اگر $\forall y \in C, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda y \in C$ ، نوک‌تیز بودن یعنی $C \cap (-C) = \{0\}$. فرض می‌کنیم که $\mathbb{R}^n$ به‌وسیله یک مخروط نوک‌تیز بسته محدب $C \subset \mathbb{R}^n$ به‌طور جزئی مرتب است. یک مجموعه $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$ از پایین کران‌دار است (نسبت به مخروط ترتیبی C) اگر یک نقطه $y_0 \in \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به‌طوری که $\mathbb{Y} \subset \{y_0\} + C$.

تعریف ۱.۲.۱. یک رابطه باینری $\leq$ را روی $\mathbb{R}^n$ جزئی مرتب گویند هرگاه خواص بازتابی، تعدی و پادمتقارن داشته باشد.

تعریف ۲.۲.۱. مخروط محدب $C \subset \mathbb{R}^n$ یک مخروط ترتیبی نامیده می‌شود که یک ترتیب جزئی روی $\mathbb{R}^n$ به‌صورت زیر تعریف می‌کند. فرض می‌کنیم $y^1, y^2 \in Y$ در این صورت:

$$y^1 \leq_C y^2 \Leftrightarrow y^2 - y^1 \in C - \{0\} \Leftrightarrow y^1 \leq_C y^2, \quad y^1 \neq y^2$$

تعریف ۳.۲.۱. ۱. عنصر $y \in \mathbb{Y}$ یک عنصر مینیمال از $\mathbb{Y}$ است اگر $(\{y\} - C) \cap \mathbb{Y} = \{y\}$.

۲. یک $y \in \mathbb{Y}$ عنصر مینیمال ضعیف از $\mathbb{Y}$ نامیده می‌شود اگر $(\{y\} - \text{int}(C)) \cap \mathbb{Y} = \emptyset$ به‌شرط آنکه $\text{int}(C) \neq \emptyset$.

۳. اگر y یک عنصر مینیمال از $\mathbb{Y}$ و عنصر صفر $\mathbb{R}^n$ یک عنصر مینیمال از $\text{clcone}(\mathbb{Y} + C - \{y\})$ باشد که در آن $\text{cone}(\mathbb{Y}) := \{\lambda y : \lambda \geq 0, y \in \mathbb{Y}\}$ ، آن‌گاه به $y \in \mathbb{Y}$ عضو مینیمال سره از $\mathbb{Y}$ به مفهوم بنسون گویند [۱۸].

۴. اگر $y \in \mathbb{Y}$ یک عنصر مینیمال از $\mathbb{Y}$ نسبت به یک مخروط محدب بسته $\mathbb{K}$ با $\mathbb{C} \setminus \{0\} \subset \text{int}(\mathbb{K})$ باشد، آن‌گاه $\bar{y} \in \mathbb{Y}$ یک عضو مینیمال سره از $\mathbb{Y}$ به مفهوم هنیگ^{۱۰} نامیده می‌شود [۱۹].

¹⁰Henig

هنینگ ثابت کرد که در مواردی که فضای برداری به وسیله‌ی یک مخروط نوک تیز محدب بسته مرتب شده باشد، آن‌گاه دو مفهوم کارایی سره ارائه شده در تعریف ۳.۲.۱ برابر هستند. بنابراین در ادامه ما برای سادگی از اصطلاح کارایی سره استفاده خواهیم کرد. یک مسئله بهینه‌سازی چند هدفه (به طور خلاصه MOP) را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$\min_{x \in \mathbb{X}} [f_1(x), \dots, f_n(x)], \quad (1.1)$$

که در آن $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}^m$ یک مجموعه غیرتهی از جواب‌های شدنی و $f_i : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ توابع حقیقی هستند. برای هر $x \in \mathbb{X}$ فرض می‌کنیم $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ و $\mathbb{Y} := f(\mathbb{X})$.

تعریف ۴.۲.۱. اگر $y = f(x)$ به ترتیب یک عضو مینیمال، مینیمال ضعیف یا عضو مینیمال سره از $\mathbb{Y}$ باشد، آن‌گاه جواب شدنی $x \in \mathbb{X}$ کارا، کارای ضعیف یا کارای سره برای مسئله بهینه‌سازی چند هدفه (۱.۱) نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنیم $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ نمادهای $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^n |y_i|$ ، $\|y\|_2 = (y_1^2 + \dots + y_n^2)^{\frac{1}{2}}$ و $\|y\|_\infty = \max\{|y_1|, \dots, |y_n|\}$ و به ترتیب نرم‌های l_1 و l_2 (اقلیدسی)، و l_∞ از y را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم $\mathbb{C}$ یک مخروط در $\mathbb{R}^n$ باشد. یادآوری می‌شود که مخروط دوگان $\mathbb{C}^*$ از $\mathbb{C}$ و شبه درون آن یعنی $\mathbb{C}^\#$ به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\mathbb{C}^* = \{w \in \mathbb{R}^n : w^T y \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{C}\} \quad (2.1)$$

و

$$\mathbb{C}^\# = \{w \in \mathbb{R}^n : w^T y > 0, \quad \forall y \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\} \quad (3.1)$$

که در آن w^T ترانهاده بردار w و $w^T y = \sum_{i=1}^n w_i y_i$ ضرب اسکالر

$$y = (y_1, \dots, y_n), \quad w = (w_1, \dots, w_n)$$

می‌باشد. عناصر این مخروط‌ها تابعک‌های خطی یکنوا و اکیدا یکنوا را تعریف می‌کنند که مجموعه‌های سطح آن‌ها برای توصیف نقاط پشتیبانی مجموعه‌های محدب استفاده می‌شوند.

فصل ۲

روش‌های اسکالرسازی در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه

۱.۲ ویژگی‌های اصلی روش‌های اسکالرسازی

در این بخش یک مرور کوتاه به شش روش اسکالرسازی برای مسائل چندهدفه که که با استفاده از (۱.۱) تعریف شدند خواهیم داشت. فرض می‌کنیم که فضای هدف R^n به‌طور جزئی مرتب روی یک مخروط محدب و بسته C باشد. برای هر روش در نظر گرفته‌شده، ویژگی‌های اصلی و تفسیر هندسی با تأکید بر ویژگی‌های مهم داده خواهد شد.

۱.۱.۲ روش اسکالرسازی مجموع وزن‌دار (WSS)

روش مجموع وزن‌دار توسط گاس^۱ و ستی^۲ در ۱۹۹۵ بیان شد [۲۰] و شاید متداول‌ترین روش اسکالرسازی برای مسائل چندهدفه‌ها است. مسئله (۱.۱) را در نظر می‌گیریم. روش WSS^۳ به هر تابع هدف یک ضریب وزنی که به‌وسیله تصمیم‌گیرنده مشخص شده است مرتبط می‌کند و تابع حقیقی مقدار مجموع وزن‌دار اهداف را

^۱Gass

^۲Saaty

^۳Weighted sum scalarization

بهینه می‌کند. معمولاً، بردار وزن $1 = \sum_{i=1}^n w_i$ ، $w_i \geq 0$ ، $w^T = (w_1, \dots, w_n)$ از مخروط دوگان $\mathbb{C}^* \setminus \{0\}$ انتخاب می‌شود، که در آن مخروط مرتب را نشان می‌دهد، و هر w_i به یک تابع هدف $f_i(x)$ برای $i = 1, \dots, n$ مرتبط است. مسئله اسکالرسازی برای بردار وزنی داده شده w به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\min_{x \in \mathbb{X}} \sum_{i=1}^n w_i f_i(x) \quad (WSS(w))$$

مجموعه‌ی جواب‌های به دست آمده از مقدار دادن به w مسئله اسکالرسازی $WSS(w)$ با $\text{sol}(WSS(w))$ نشان داده می‌شود. نمایش هندسی جواب‌های $WSS(w)$ در شکل ۱.۲ آورده شده است. ویژگی‌های مهم داده شده در دو قضیه زیر که می‌توانید در [۱۴، ۱۵، ۲۱] ببینید آورده شده است.

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنید $w \in \mathbb{C}^* \setminus \{0\}$ یک بردار وزنی داده شده باشد و فرض کنید

$$\text{sol}(WSS(w)) \neq \emptyset$$

آن‌گاه داریم:

- (i) [۱۴] هر عضو از $\text{sol}(WSS(w))$ یک جواب کارای ضعیف برای MOP می‌باشد.
- (ii) [۱۴] اگر $\text{sol}(WSS(w))$ شامل یک عضو منحصربه‌فرد باشد، آن‌گاه این عضو یک جواب کارا برای MOP است.
- (iii) [۱۴] اگر $w \in \mathbb{C}^\#$ ، آن‌گاه حداقل یک عضو از $\text{sol}(WSS(w))$ یک جواب کارای سره برای MOP است.

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنید که (۱.۱) یک مسئله محدب باشد.

- (i) [۲۱] اگر $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف برای مسئله (۱.۱) باشد، آن‌گاه $w \in \mathbb{C}^*$ وجود دارد به طوری که $\bar{x}$ برای $WSS(w)$ بهینه است.
- (ii) [۲۱] اگر $\bar{x}$ یک جواب کارای سره از (۱.۱) باشد، آن‌گاه $w \in \mathbb{C}^*$ وجود دارد به طوری که $\bar{x}$ برای $WSS(w)$ بهینه باشد.

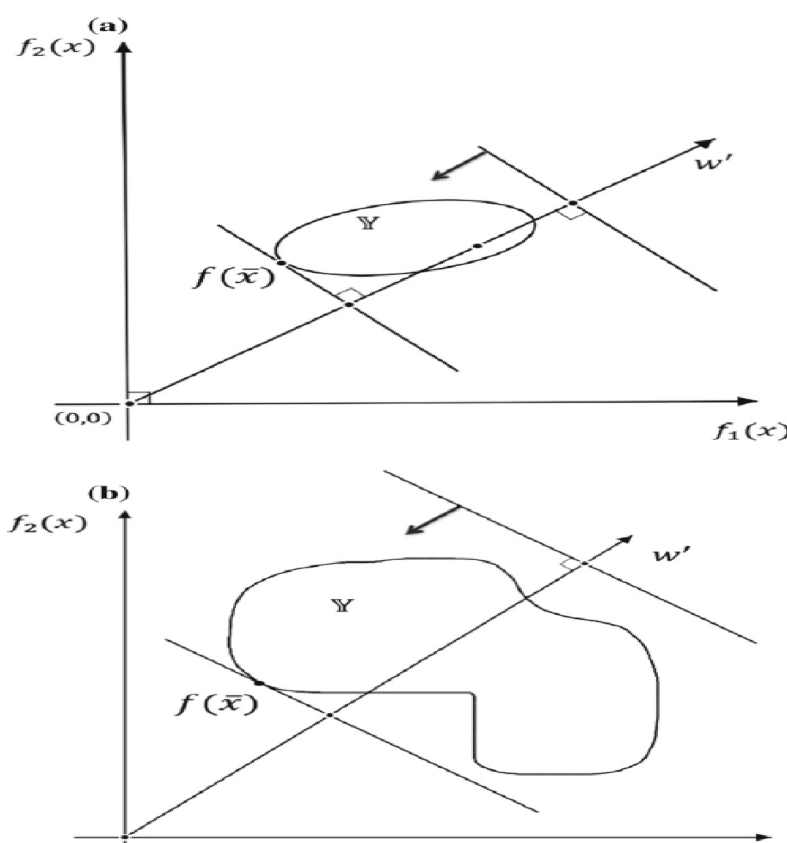
ویژگی‌های اساسی روش (WSS) عبارتند از:

- روش (WSS) می‌تواند برای هر مخروط محدب نوک‌تیز C به عنوان یک مخروط ترتیبی استفاده شود.
- از پایین کران دار بودن فضای هدف در هنگام استفاده از روش WSS شرط لازم نیست. با وجود این، برای برخی از وزن‌های w ، ممکن است مسئله $WSS(w)$ یک جواب بهینه متناهی نداشته باشد.

- شرط تحدب یک شرط اساسی است. در صورت محدب بودن مسئله (۱.۱)، روش WSS توصیف کاملی از جواب‌های کارای ضعیف و کارای سره ارائه می‌دهد.
- وزن‌هایی برای اهداف انتخاب می‌شوند. در حالی که اطلاعات مربوط به نقطه مرجع در این روش در نظر گرفته نمی‌شود (برای مثال شکل ۱.۲ را ببینید).
- در روش WSS قید اضافی استفاده نمی‌شود.

۲.۱.۲ روش ϵ - محدودیت (EC)

در این بخش ما، در مورد روش EC^۴ که به وسیله‌ی هایمس^۵ و همکاران در [۲۲] ارائه شده است بحث می‌کنیم (همچنین [۲۳] را ببینید).



شکل ۱.۲: نمایشی از روش WSS. a. فضای هدف محدب، b. فضای هدف نامحدب.

مسئله (۱.۱) را در نظر می‌گیریم. در متداول‌ترین نوع مسئله ϵ -محدودیت، یک هدف اولیه f_k برای بهینه‌شدن انتخاب شده و هدف‌های دیگر به محدودیت‌های نامساوی تبدیل

^۴ ϵ - constraint

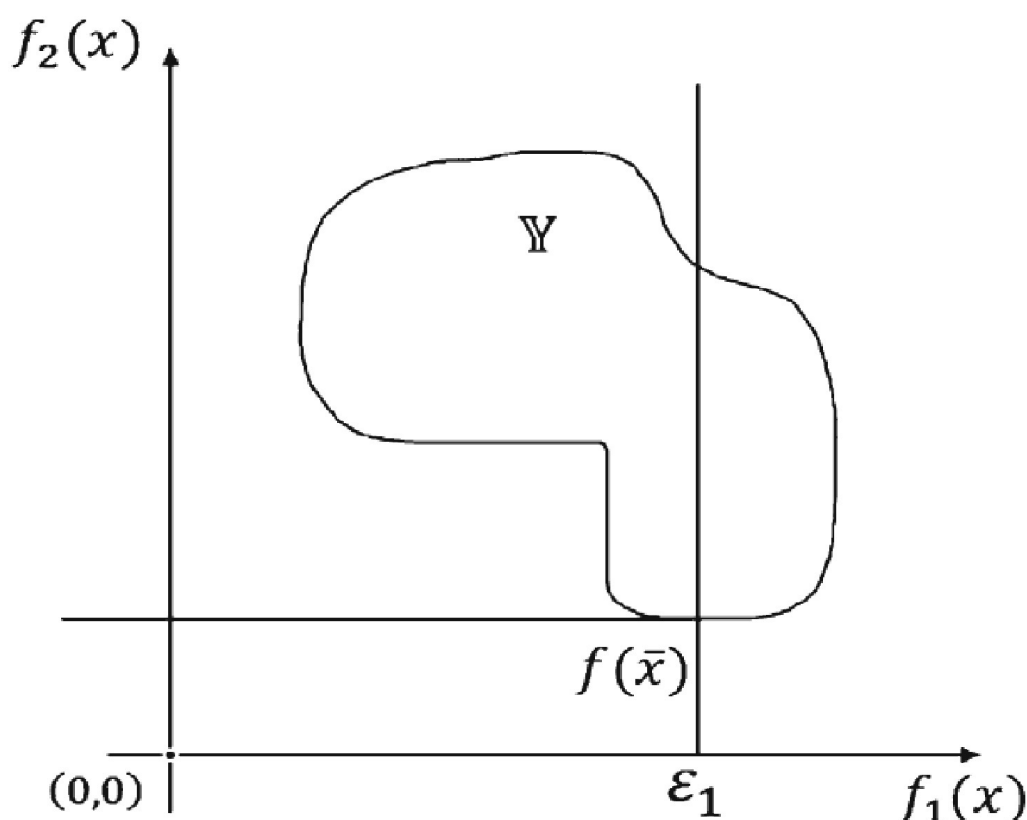
^۵ Haimes

می‌شوند.

فرض می‌کنیم $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in R^n$ ، که در آن هر ε_i به یک تابع هدف $f_i(x)$ برای $i = 1, \dots, n$ مربوط می‌شود. مسأله اسکالرسازی برای بردار داده‌شده ε و یک $k = 1, \dots, n$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\min_{x \in X} f_k(x) \quad (EC(\varepsilon, k))$$

$$f_i(x) \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, n, i \neq k.$$



شکل ۲.۲: تصویر هندسی روش EC

یک ترسیم هندسی از روش EC برای $n = 2$ و به صورت $\min f_2(x)$ تحت شرط $f_1(x) \leq \varepsilon_1$ ، در شکل ۲.۲ داده شده است.

دو قضیه زیر که از [۲۱، ۲۳] آورده شده است، جواب‌های کارای (۱.۱) را برحسب جواب‌های مسأله اسکالرسازی $(EC(\varepsilon, k))$ مشخص می‌کند.

قضیه ۳.۱.۲. (الف) [۲۱] هر جواب بهینه مسأله $(EC(\varepsilon, k))$ ، یک جواب کارای ضعیف برای مسأله (۱.۱) است و مجموعه‌ی همه جواب‌های بهینه $(EC(\varepsilon, k))$ شامل حداقل یک جواب کارا برای مسأله (۱.۱) می‌شود.

(ب) [۲۱] اگر $\bar{x}$ یک جواب کارا برای مسئله (۱.۱) باشد، آن‌گاه یک اندیس $k \in \{1, \dots, n\}$ و یک بردار ε وجود دارد به‌طوری‌که $\bar{x}$ یک جواب بهینه از $(EC(\varepsilon, k))$ است.

(ج) [۲۲] $\bar{x}$ یک جواب کارا برای مسئله (۱.۱) است اگر و تنها اگر $\bar{x}$ یک جواب برای مسئله $(EC(\varepsilon, k))$ برای هر $k \in \{1, \dots, n\}$ و $\varepsilon = f(\bar{x})$ باشد.

(ه) [۲۳] اگر $\bar{x}$ جواب منحصربه‌فرد برای مسئله $(EC(\varepsilon, k))$ با $\varepsilon = f(\bar{x})$ و برای یک $k \in \{1, \dots, n\}$ باشد، آن‌گاه $\bar{x}$ یک جواب کارا برای (۱.۱) است.

ملاحظه ۱.۱.۲. توجه کنید که قسمت ”... و مجموعه همه‌ی جواب‌های بهینه $(EC(\varepsilon, k))$ شامل حداقل یک جواب کارا از (۱.۱) است در قضیه ۳.۱.۲ در حالت کلی درست نیست. اگر شرایط کرانداری و بسته‌بودن برقرار باشد این قضیه درست است (مثال داده شده در بخش ۱.۰.۴ را ببینید).

قضیه زیر رابطه بین WSS و روش EC را بیان می‌کند.

قضیه ۴.۱.۲. فرض می‌کنیم که مخروط ترتیبی $\mathbb{C}$ مساوی $\mathbb{R}_+^n$ باشد.

(i) [۲۳] فرض می‌کنیم که (۱.۱) یک مسأله محدب باشد. اگر برای یک k داده‌شده، $\bar{x}$ جواب مسئله $(EC(\varepsilon, k))$ با $\varepsilon = f(\bar{x})$ باشد، آن‌گاه $w \in R_+^n$ وجود دارد به‌طوری‌که $\bar{x}$ جواب $(WSS(w))$ نیز می‌باشد.

(ii) [۲۳] اگر $w \in R_+^n$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که $w_k > 0$ و $\bar{x}$ جواب $(WSS(w))$ باشد آن‌گاه $\bar{x}$ جواب $(WSS(w))$ با $\varepsilon = f(\bar{x})$ می‌باشد.

(iii) [۲۳] اگر $\bar{x}$ یک جواب منحصر به فرد از $(WSS(w))$ باشد آن‌گاه $\bar{x}$ جواب $(EC(\varepsilon, k))$ برای هر $k \in \{1, \dots, n\}$ با $\varepsilon = f(\bar{x})$ می‌باشد.

ویژگی‌های اصلی این روش عبارتند از:

- روش EC را فقط در حالتی که مخروط ترتیبی برابر با R_+^n باشد می‌توان اعمال کرد.
- کرانداری از پایین یک شرط اصلی برای روش EC نمی‌باشد، با این وجود، پارامتر ε باید به‌درستی انتخاب شود. اگر مسأله از پایین کراندار نباشد برای یک ε مسأله $(EC(\varepsilon, k))$ ممکن است یک جواب بهینه متناهی نداشته باشد. از طرف دیگر، مسأله اسکالرسازی $(EC(\varepsilon, k))$ نشدنی می‌شود.
- اگر برای ε داده‌شده داشته باشیم $\{x : f_i(x) \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, n, i \neq k\} \cap \mathbb{X} = \emptyset$.
- روش EC به شرط محدب بودن روی مسئله بررسی‌شده نیازی ندارد.
- روش EC جواب‌های کارا ضعیف تولید می‌کند و شرایطی برای تولید جواب‌های کارای سره فراهم نمی‌کند.

• اولویت‌های تصمیم‌گیرنده از جمله وزن‌دهی توابع هدف و نقطه مرجع در این روش استفاده نمی‌شود.

• اندازه‌ی مسئله به‌دلیل اضافه‌کردن $f_i(x) \leq \varepsilon_i, i = 1, \dots, n, i \neq k$ افزایش می‌یابد.

۳.۱.۲ روش اسکالرسازی بنسون (BS)

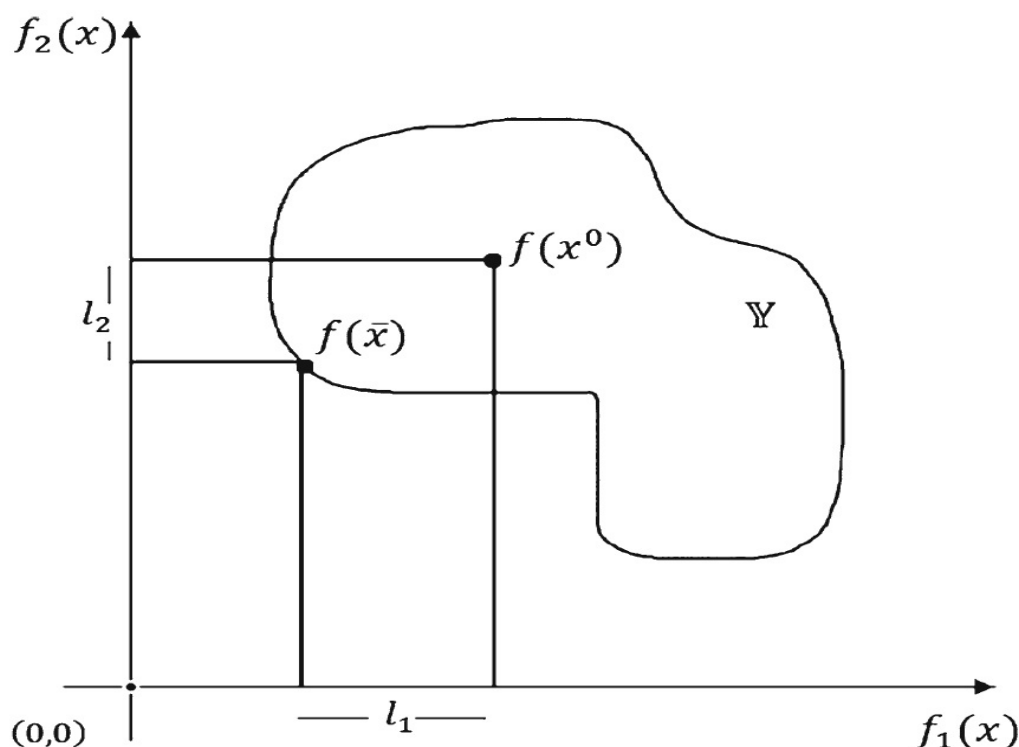
در این بخش ما در مورد روش اسکالرسازی ارائه‌شده توسط بنسون [۲۴] بحث می‌کنیم (همچنین [۲] را ببینید). ایده این روش به‌شرح زیر می‌باشد: یک جواب شدنی آغازین $x^\circ \in X$ انتخاب می‌کنیم و اگر آن کارا نباشد یک جواب غالب برای آن می‌یابیم که کارا باشد. برای این منظور متغیرهای نامنفی $l_i = f_i(x^\circ) - f_i(x)$ معرفی می‌شوند، و مجموع آن‌ها ماکزیمم می‌شود. این کار منجر به یافتن یک x غالب بر x° می‌شود و تابع هدف تضمین می‌کند که آن کارا است چون $f(x)$ را تا حد ممکن از $f(x^\circ)$ دور می‌کند. مسئله اسکالرسازی برای x° داده شده به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\max \sum_{i=1}^n l_i \quad (BS(x_i)) \quad (1.2)$$

$$f_i(x^\circ) - l_i - f_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$l \geq 0, x \in \mathbb{X}.$$

شکل ۳.۲ یک نمایش هندسی، این ایده را در فضای هدف نشان می‌دهد. نقطه‌شدنی اولیه، اما مغلوب و $f(x^\circ)$ مختصات بزرگتری نسبت به نقطه کارا $f(\bar{x})$ دارد.



شکل ۳.۲: تصویر هندسی روش BS

با ماکزیمم کردن مجموع $l_1 + l_2$ ، هدف این است که یک جواب غالب که کارا باشد را به دست آوریم.

دو قضیه زیر که روش BS را توصیف می‌کنند از [۲] بیان شده است.

قضیه ۵.۱.۲. [۲] فرض می‌کنیم که مخروط ترتیبی $\mathbb{C}$ برابر $\mathbb{R}_+^n$ باشد. نقطه $x^\circ \in \mathbb{X}$ یک جواب کارا از مسئله (۱.۱) است، اگر و فقط اگر مقدار هدف بهینه مسئله $(BS(x^\circ))$ صفر باشد.

نقطه قوت این روش در آن است که درواقع می‌توان گفت که هر زمان مسأله $(BS(x^\circ))$ یک جواب بهینه متناهی داشته باشد، آنگاه جواب بهینه، کارا است. قضیه زیر این ادعا را توضیح می‌دهد.

قضیه ۶.۱.۲. [۲] فرض کنید که مخروط ترتیبی $\mathbb{C}$ برابر $\mathbb{R}_+^n$ باشد. اگر مسأله $(BS(x^\circ))$ یک جواب بهینه $(\bar{x}, \bar{l})$ داشته باشد، آنگاه $\bar{x}$ جواب کارا برای مسئله MOP است.

ویژگی‌های اصلی این روش عبارتند از:

- روش BS می‌تواند در مواردی قابل استفاده باشد که مخروط ترتیبی $\mathbb{C}$ برابر $\mathbb{R}_+^n$ باشد.
- اگر چه کرانداری یک شرط اساسی برای روش BS نیست، اما در عمل ممکن است یافتن یک جواب اولیه ”خوب“ x° راحت نباشد به‌طوری که مسأله $(BS(x^\circ))$ دارای یک

جواب متناهی باشد. دلیل آن این است که مسئله اسکالرسازی $(BS(x^\circ))$ ممکن است هیچ جواب متناهی نداشته باشد اگر مجموعه $(f(x^\circ) - \mathbb{R}_+^n) \cap f(X)$ بی‌کران باشد. به مثال عددی داده شده در بخش ۴ نگاه کنید. سلیمانی دامنه و زمانی ثابت کردند که اگر مسأله BS کران‌دار نباشد، مجموعه‌ای جواب‌های کارای سره تهی است ([۲۵] را ببینید).

- روش BS نیازی به فرضیات تحدب ندارد.
- این روش شرایط لازم و کافی برای جواب‌های کارا را ارائه می‌دهد، اما برای جواب‌های کارای سره ارائه نمی‌دهد.
- ترجیحات اولیه تصمیم مانند وزن‌دهی به اهداف و نقاط مرجع در این روش مورد توجه قرار نمی‌گیرند.
- اندازه مسأله به دلیل اضافه کردن n متغیر تصمیم جدید، l_i و n محدودیت

$$f_i(x^\circ) - l_i - f_i(x) = 0, i = 1, \dots, n$$

و n محدودیت نامنفی $l \geq 0$ برای متغیرهای تصمیم جدید افزایش می‌یابد.

۴.۱.۲ روش اسکالرسازی چبیشف وزن‌دار WCS

روش WCS که ابتدا در [۲۶] پیشنهاد شد (همچنین [۲۱]–[۲۷] را ببینید)، از اطلاعات ترجیحی دریافت‌شده از تصمیم گیرنده برای یافتن مجموعه‌ای از جواب‌های کارا استفاده می‌کند. اطلاعات ترجیحی برای (۱.۱) شامل یک بردار وزن $w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}_+^n$ و یک نقطه ایده‌آل $Z^* = (z_1^*, \dots, z_n^*)$ که به شرح زیر تعریف شده است، می‌باشد:

$$z_i^* = \min_{x \in X} f_i(x).$$

سپس، می‌توان مسئله اسکالرسازی چبیشف وزن‌دار مربوط به (۱.۱) را به صورت زیر نوشت:

$$\min_{x \in X} \|f(x) - Z^*\|_\infty^w \quad (2.2)$$

که در آن $\|f(x) - z^*\|_\infty^w = \max_{i=1, \dots, n} \{w_i(f_i(x) - z_i^*)\}$ فاصله چبیشف وزن‌دار بین نقطه ایده‌آل Z^I و نقطه $f(x) \in Y$ است. توجه داشته باشید که با توجه به تعریف نقطه ایده‌آل داریم، $f_i(x) - z_i^* \geq 0$ و هر $x \in X$ و هر $i = 1, \dots, n$. با خطی‌سازی عبارت "max" در تابع هدف، می‌توان مسئله (۲.۲) را به شکل معادل زیر

بازنویسی کرد:

$$\min t \quad (WCS(w, z^I)) \quad (3.2)$$

$$w_i(f_i(x) - z_i^*) \leq t, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

$$x \in \mathbb{X} \quad (5.2)$$

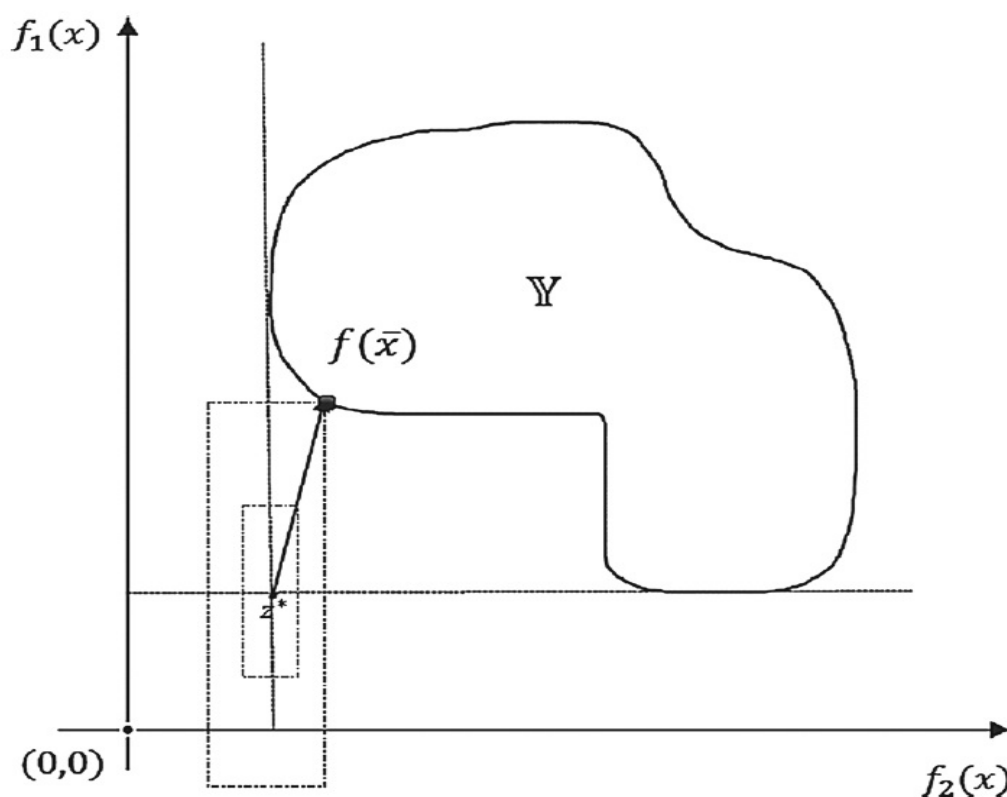
تصویر هندسی این روش در شکل ۴.۲ آورده شده است.

نتایج زیر در مورد مشخصات روش WCS به دست آمده اند (برای مثال [۲۱] را ببینید).

قضیه ۷.۱.۲. فرض می‌کنیم مخروط ترتیبی $\mathbb{C}$ برابر $\mathbb{R}_+^n$ باشد و از پایین کران دار باشد یا نقطه ایده‌آل وجود داشته باشد.

(الف) [۲۱] هر جواب بهینه $(WCS(w, z^*))$ برای (۱.۱) کارای ضعیف است و مجموعه تمام جواب‌های بهینه $(WCS(w, z^*))$ شامل حداقل یک جواب کارا برای مسئله (۱.۱) است. اگر جواب بهینه $(WCS(w, z^*))$ منحصر به فرد باشد آن گاه کارا است.

(ب) [۲۱] اگر $\bar{x}$ یک جواب کارا برای مسئله (۱.۱) باشد، آن گاه $w > 0$ وجود دارد به طوری که $\bar{x}$ برای $(WCS(w, z^*))$ بهینه است.



شکل ۴.۲: تصویر هندسی روش WCS

مشخصات اصلی این روش در زیر ذکر شده‌است. برای نشان دادن این خصوصیات، بخش ۴.۰.۴ را ببینید.

- روش WCS فقط در مواردی اعمال می‌شود که مخروط ترتیبی C برابر R_+^n باشد.
- برای استفاده از روش WCS، فضای هدف مسئله باید از پایین کران‌دار باشد. این شرایط وجود یک نقطه ایده‌آل برای مسئله را تضمین می‌کند. در قضیه ۷.۱.۲، از پایین کران‌دار بودن یا وجود نقطه ایده‌آل ضروری است. در غیر این صورت مجموعه جواب‌های $(WCS(w, z^*))$ ممکن است شامل یک جواب کارا نباشد (برای مثال به بخش ۴.۰.۴ مراجعه کنید). در عمل ممکن است یافتن نقطه ایده‌آل آسان نباشد.
- در این روش فرض تحدب نیاز نمی‌باشد.
- روش WCS جواب‌های کارای ضعیف (علاوه بر جواب‌های کارا) را تولید می‌کند، اما شرایطی را برای تضمین وجود جواب‌های کارای سره فراهم نمی‌کند.
- این روش ترجیحات تصمیم‌گیرنده را در وزن اهداف در نظر می‌گیرد.
- نقطه ایده‌آل مورد استفاده در این روش را می‌توان به عنوان یک نقطه ترجیحی در نظر گرفت. نقطه ایده‌آل و بردار وزن ممکن است با هم منجر به یک جواب کارا (یا کارای ضعیف) شوند که نزدیک (به تعبیری) به ”نقطه ایده‌آل” باشد، اما این به طور کلی تضمین نمی‌شود. این روش نقاط پشتیبانی فضای تصمیم را با توجه به مستطیل‌های n - بعدی محاسبه می‌کند که طول ضلع آنها متناسب با اجزای بردار وزن است. نقطه ایده‌آل نقش مرکز این مستطیل را بازی می‌کند. بنابراین، مستقل از اضلاع مستطیل به دست آمده، مسئله اسکالرسازی $(WCS(w, z^*))$ ممکن است منجر به نقاط پشتیبانی شود که خیلی به مرکز این مستطیل نزدیک نیستند.
- این روش از n محدودیت عملکردی اضافی $w_i(f_i(x) - z_i^*) \leq t, i = 1, \dots, n$ استفاده می‌کند که ممکن است روند حل را پیچیده کند.

۵.۱.۲ روش اسکالرسازی پاسکلاتی - سرافینی (PSS)

روش شناخته شده به عنوان روش اسکالرسازی پاسکلاتی - سرافینی مربوط به مسئله اسکالرسازی معرفی شده توسط گرشتویتس^۶ در [۲۸] است، که همچنین در [۲۹، ۱۱، ۱۰] توسط تامر^۷، ویدنر^۸، وینکلر^۹، پاسکلاتی و سرافینی مورد مطالعه قرار گرفت.

^۶Gerstewitz

^۷Tammer

^۸Weidner

^۹Winkler

مسئله اسکالرسازی روش PSS به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & a + tr - f(x) \in \mathbb{C} \\ & x \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

که در آن $a \in \mathbb{R}^n$ و $r \in \mathbb{C}$ پارامترهای مسئله $(PSS(a, r))$ می‌باشند. همچنین مسئله $(PSS(a, r))$ می‌تواند به فرم زیر نوشته شود (نگاه کنید [۱۵])

$$\begin{aligned} \min \quad & t \\ \text{s.t.} \quad & a + tr - \mathbb{C} \cap f(X) \neq \emptyset, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (۶.۲)$$

این مسئله را می‌توان به شکل زیر تفسیر کرد. مخروط ترتیبی $\mathbb{C}$ در جهت $-r$ در امتداد خط $a + tr$ حرکت می‌کند تا زمانی که مجموعه $(a + tr - \mathbb{C}) \cap f(X)$ به مجموعه تهی کاهش یابد. کوچکترین مقدار $\bar{t}$ که در آن $(a + \bar{t}r - \mathbb{C}) \cap f(X) \neq \emptyset$ جواب مسئله (۶.۲) است. اگر زوج مرتب $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب از $(PSS(a, r))$ باشد، عنصر $\bar{y} = f(\bar{x})$ با $\bar{y} \in (a + \bar{t}r - \mathbb{C}) \cap f(X)$ به عنوان یک جواب کارای ضعیف مسئله (۱.۱) مشخص می‌شود (شکل (۵.۱.۲) را ببینید). دو قضیه زیر به نقل از [۱۰] و [۱۵] خصوصیات اصلی روش PSS را توضیح می‌دهند.

قضیه ۸.۱.۲. فرض کنید $\text{int}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$.

(i) اگر $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف برای مسئله (۱.۱) باشد، آن‌گاه $(\circ, \bar{x})$ یک جواب بهینه $(PSS(a, r))$ برای پارامترهای $a = f(\bar{x})$ و $r \in \text{int}(\mathbb{C})$ دلخواه است.

(ii) اگر $\bar{x}$ یک جواب کارا برای مسئله (۱.۱) باشد، آن‌گاه $(\circ, \bar{x})$ یک جواب بهینه از $(PSS(a, r))$ برای پارامترهای $a = f(\bar{x})$ و $r \in \mathbb{C} \setminus \{\circ_n\}$ دلخواه می‌باشد.

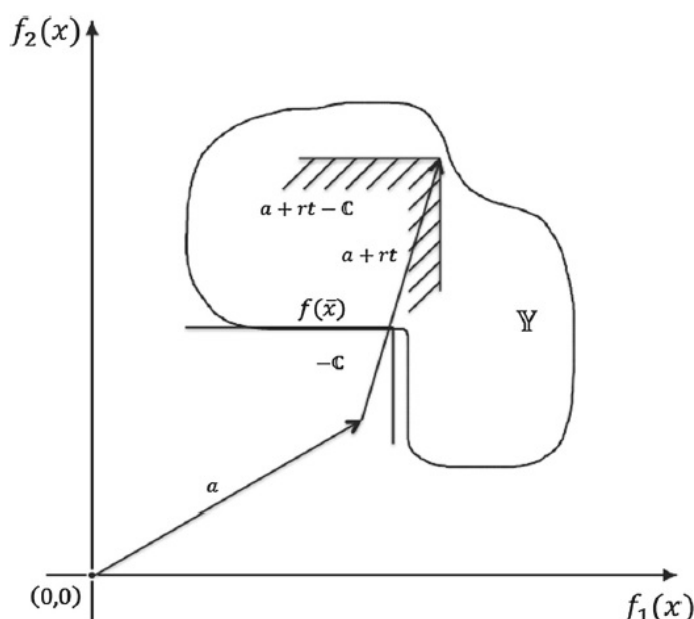
(iii) اگر $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب بهینه برای مسئله $(PSS(a, r))$ باشد، آن‌گاه $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف برای مسئله (۱.۱) است و $a + \bar{t}r - f(\bar{x}) \in \partial\mathbb{C}$ که در آن $\partial\mathbb{C}$ مرز $\mathbb{C}$ است.

اگر $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب بهینه برای مسئله $(PSS(a, r))$ باشد که $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف برای (۱.۱) باشد اما کارا نباشد، آن‌گاه ویژگی زیر را برای نقاط غالب بر نقطه $f(\bar{x})$ داریم.

قضیه ۹.۱.۲. [۱۱]، [۱۵] اگر نقطه $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب بهینه از $(PSS(a, r))$ با

$$\bar{K} = a + \bar{t}r - f(\bar{x})$$

باشد. اگر یک نقطه $y = f(x) \in f(\bar{x})$ غالب بر $f(\bar{x})$ نسبت به مخروط $\mathbb{C}$ وجود داشته باشد آن‌گاه $(\bar{t}, \bar{x})$ نیز یک جواب بهینه برای $(PSS(a, r))$ است و یک نقطه $k \in \partial\mathbb{C}$ که $k \neq \circ_{R^n}$ با $a + \bar{t}r - f(x) = \bar{k} + k$ وجود دارد.



شکل ۵.۲: تصویر هندسی روش PSS

از این قضیه می‌توان به دو نتیجه زیر دست یافت.

نتیجه ۱.۱.۲. [۱۵] اگر نقطه $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب بهینه با تصویر منحصر به فرد از مسئله اسکالرسازی $(PSS(a, r))$ نسبت به f باشد یعنی، هیچ جواب بهینه (t, x) دیگری با $f(x) = f(\bar{x})$ وجود نداشته باشد، آن‌گاه $\bar{x}$ یک جواب کارا از (۱.۱) است.

نتیجه ۲.۱.۲. [۱۱]، [۱۵] یک نقطه $\bar{x}$ یک جواب کارا از (۱.۱) است اگر

(الف) یک $t \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب برای $(PSS(a, r))$ ، برای یک پارامتر $a \in R$ و $r \in \text{int}(C)$ باشد. و

$$(b) \quad ((a + \bar{t}r) - \partial C) \cap (f(\bar{x}) - \partial C) \cap f(X) = \{f(\bar{x})\}$$

ملاحظه ۲.۱.۲. از قضایای ۸.۱.۲ و ۹.۱.۲ و نتایج ۱.۱.۲ و ۲.۱.۲ چنین برمی‌آید که تشخیص جواب‌های ضعیف و کارای تولیدشده توسط روش PSS بسیار دشوار است. به عنوان مثال، بررسی رابطه داده‌شده در نتیجه ۲.۱.۲ با بررسی تعریف مینیمم‌سازی برابر است. اگر $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب بهینه مسئله $(PSS(a, r))$ باشد، آن‌گاه نقطه $\bar{x}$ یک جواب کارای ضعیف برای (۱.۱)

است و با تغییر دادن پارامترهای $(a, r) \in \mathbb{R}^n \times \text{int}(\mathbb{C})$ می‌توان با حل $(PSS(a, r))$ جواب‌های مختلف کارای ضعیف برای (۱.۱) بدست آورد. با این حال، مجموعه جواب‌های کارای ضعیف به دست‌آمده از حل $(PSS(a, r))$ به شدت به پارامتر a بستگی دارد. قضیه ۱۰.۱.۲ این وضعیت را واضح‌تر بیان می‌کند.

قضیه ۱۰.۱.۲. فرض کنید $\text{int}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$. فرض کنید $a \in \mathbb{R}^n$ ، برای هر $r \in \text{int}(\mathbb{C})$ ، در خاصیت زیر صدق کند:

$$\{a + tr : t \in \mathbb{R}\} \cap f(X) = \emptyset \quad (۷.۲)$$

آن‌گاه، مجموعه جواب‌های کارای ضعیف به دست‌آمده از حل مسئله $(PSS(a, r))$ برای هر $r \in \text{int}(\mathbb{C})$ یکسان است.

برهان. فرض کنید $r_1 \in \text{int}(\mathbb{C})$ دلخواه باشد، و اگر $\{t_1\} \times X_1$ مجموعه‌ای از جواب‌های بهینه برای $(PSS(a, r_1))$ باشد. واضح است که $f(x)$ یک نقطه کارای ضعیف $f(X)$ برای هر $x \in X_1$ می‌باشد. فرض می‌کنیم $F(a, r_1) = \{f(x) : x \in X_1\}$. آن‌گاه بنابه فرض داریم $a + r_1 t_1 \notin f(X)$ و روابط زیر برقرارند:

$$(a + r_1 \tilde{t} - \mathbb{C}) \cap f(X) = \emptyset \quad \text{برای هر } \tilde{t} < t_1,$$

$$(a + r_1 t_1 - \mathbb{C}) \cap f(X) = F(a, r_1),$$

$$(a + r_1 t_1 - \text{int}(\mathbb{C})) \cap f(X) = \emptyset.$$

همچنین داریم $\{a + r_1 t : t \in \mathbb{R}\} \cap (f(x) + \mathbb{C}) = \{a + r_1 t : t \geq t_1\}$ ، برای هر $f(x) \in F(a, r_1)$. فرض کنیم $r_2 \in \text{int}(\mathbb{C})$ یک بردار دیگر با $r_2 \neq r_1$ باشد. بنابراین، از آنجا که $\text{int}(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ و $\mathbb{C}$ هم محدب است، $\mathbb{C}$ قابل باز تولید شدن است و بنابراین $\mathbb{R}^n = \mathbb{C} - \mathbb{C}$ ، بنابراین وجود دارد $t_2 \in \mathbb{R}$ به گونه‌ای که

$$(F(a, r_1) + \mathbb{C}) \cap \{a + r_2 t : t \in \mathbb{R}\} = \{a + r_2 t : t \geq t_2\} \notin f(X).$$

واضح است،

$$(\{a + r_2 t_2\} - \mathbb{C}) \cap f(X) = F(a, r_1).$$

اکنون نشان می‌دهیم $\{t_2\} \times X_1$ مجموعه جواب‌های بهینه مسئله $(PSS(a, r_2))$ است. با برهان خلف فرض کنیم که یک زوج مرتب $(\tilde{t}_2, \tilde{x}_2)$ به‌طوری که $\tilde{t}_2 < t_2$ و $\tilde{x}_2 \notin X_1$ وجود داشته باشد. لذا داریم، $a + \tilde{t}_2 r_2 < a + r_2 t_2$ و از این رو $f(\tilde{x}_2) \in \{a + r_2 t_2\} - \text{int}(\mathbb{C})$ را بدست می‌آوریم. بنابراین، $f(\tilde{x}_2) \in F(a, r_1) - \text{int}(\mathbb{C})$ که ایجاب می‌کند $f(\tilde{x}_2) + \text{int}(\mathbb{C}) \cap F(a, r_1) \neq \emptyset$. این یعنی $f(x_1) \in F(a, r_1)$ با $f(\tilde{x}_2) < f(x_1)$ وجود دارد از آن‌جا که $f(x_1)$ یک نقطه مینیمال ضعیف برای $f(X)$ است، این یک تناقض است، و قضیه اثبات می‌شود. $\square$

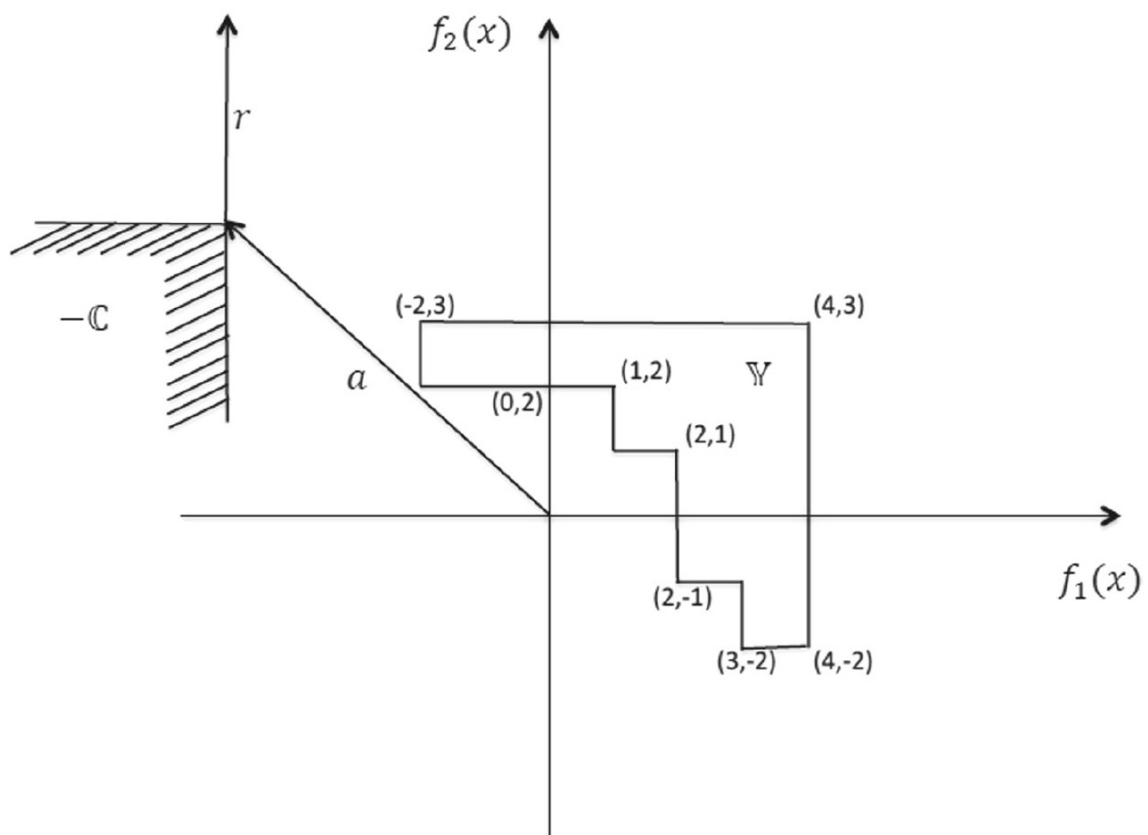
ملاحظه ۳.۱.۲. فرض کنید

$$\{a + tr : t \in \mathbb{R}\} \cap f(X) = \emptyset \quad (۸.۲)$$

برای یک $a \in \mathbb{R}^k$ و برای یک r از مرز $\mathbb{C}$ آن‌گاه، مسئله $(PSS(a, r))$ ممکن است جواب بهینه‌ای نداشته باشد. (به شکل ۶.۲ مراجعه کنید). علاوه بر این، برای چنین بردار a همان مجموعه از جواب‌های بهینه ممکن است برای هر $r \in \mathbb{C}$ بدست آید. این در شکل ۶.۲ نشان داده شده است، که در آن برای بردار a ، مجموعه جواب‌های قرار گرفته شده روی پاره‌خط متصل‌کننده نقاط $(-۲, ۲)$ و $(-۲, ۳)$ برای هر $r \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ بدست می‌آید. این وضعیت همچنین نشان می‌دهد که بردار r را نمی‌توان به عنوان یک نقطه مرجع در روش PSS در نظر گرفت.

قضیه زیر رابطه بین روش PSS و روش WSS را نشان می‌دهد.

قضیه ۱۱.۱.۲. [۱۵] یک نقطه $\bar{x}$ یک جواب بهینه برای مسئله $(WSS(w))$ برای پارامتر $w \in \mathbb{C}^* \setminus \{\circ_{\mathbb{R}^n}\}$ است اگر و فقط اگر یک $\bar{t}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب بهینه از $(PSS(a, r))$ با پارامتر دلخواه $a \in \mathbb{R}^n$ و مخروط $\mathbb{C}_w := \{y \in \mathbb{R}^n | w'y \geq \circ\}$ و $r \in \text{int}(\mathbb{C}_w)$ باشد.



شکل ۶.۲: تصویر هندسی ملاحظه ۳.۱.۲

ملاحظه ۴.۱.۲. تحت شرایط خاص نشان داده شده است که جواب‌های بدست‌آمده از حل مسئله اسکالرسازی ε - محدودیت $(E(\varepsilon, k))$ را می‌توان با حل مسئله اسکالرسازی پاسکلاتی - سرافینی $(PSS(a, r))$ به دست آورد و بالعکس، با $a_i = \varepsilon_i$ ، برای هر

$$i \in \{i = 1, \dots, n\} \setminus \{k\},$$

که در آن $r = e_k$ ، $a_k = 0$ ، k امین بردار واحد در $\mathbb{R}_+^n$ است و $\mathbb{C} = \mathbb{R}_+^n$ مخروط ترتیبی است. به عنوان مثال، [۱۵] را ببینید. از قضیه نتیجه می‌شود که روش ε - محدودیت حالت خاصی از روش PSS است که پارامتر a تنها از صفحه $H = \{y \in \mathbb{R}^n | y_k = 0\}$ انتخاب شده است و پارامتر ثابت $r = e_K$ انتخاب می‌شود.

قضیه زیر رابطه بین روش‌های PSS و WCS را بیان می‌کند.

قضیه ۱۲.۱.۲. [۱۵] یک نقطه $(\bar{t}, \bar{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{X}$ یک جواب بهینه برای $(PSS(a, r))$ با $\mathbb{C} = \mathbb{R}_+^n$ و پارامترهای $a \in \mathbb{R}^m$ ، $a_i < \min_{x \in \mathbb{X}} f_i(x)$ ، $i = 1, \dots, n$ ، $r \in \text{int}(\mathbb{R}_+^n)$ است اگر و فقط اگر $\bar{x}$ یک جواب برای مسئله $(WCS(w, a))$ با وزن‌های $w_i = \frac{1}{r_i} > 0$ ، $i = 1, \dots, n$ باشد. بنابراین، یک تغییر وزن در نرم متناظر است با یک تغییر جهت r و یک تغییر در نقطه مرجع مانند تغییر پارامتر a در روش PSS است.

ویژگی‌های اصلی این روش را می‌توان به صورت زیر بیان کرد

- روش PSS را می‌توان برای هر مخروط ترتیبی دلخواه C اعمال کرد.
- کران‌داربودن از پایین شرط اساسی برای روش PSS نیست.
- روش PSS به شرط محدب بودن در مسئله نیاز ندارد.
- هر جوابی از یک مسئله اسکالرسازی پاسکلاتی - سرافینی کارای ضعیف است. علاوه بر این، هر جواب کارای ضعیف را می‌توان به عنوان یک جواب از مسئله اسکالرسازی پاسکلاتی - سرافینی تحت شرط از پایین کران‌دار بودن یافت، یعنی $f(X) \subset \{a\} + C$ ، برای مثال [۳۰] را ببینید. این روش به درستی شرایطی را برای به دست آوردن (منحصراً) نقاط کارا و کارای سره به وجود نمی‌آورد.
- این روش اطلاعات مربوط به وزن‌ها را در نظر نمی‌گیرد.
- این روش از محدودیت‌های عملکردی اضافی به فرم $a + tr - f(x) \in \mathbb{C}$ استفاده می‌کند که ممکن است روند حل را پیچیده کند. در حالت خاص، اگر $C = \mathbb{R}_+^n$ ، آن گاه تعداد محدودیت‌های اضافی n می‌شود.

- اگر برای پارامتر داده شده $a \in \mathbb{R}^n$ ، خط مستقیم $\{a + tr : t \in \mathbb{R}\}$ فضای هدف $f(X)$ را برای یک $r \in \mathbb{C}$ قطع نکند، آن‌گاه همان مجموعه نقاط کارای ضعیف برای هر $r \in \text{int}(\mathbb{C})$ بدست می‌آید.
- تحت شرایط خاص، جواب‌های به‌دست‌آمده با حل مسئله اسکالرسازی پاسکلاتی-سرافینی را می‌توان با حل مسائل WSS، EC و WCS به دست آورد و بالعکس.
- روش BS را نمی‌توان تحت روش PSS قرار داد.
- برای تضمین وجود یک جواب بهینه برای $(PSS(a, r))$ ، مهم است که پارامتر r را از درون مخروط ترتیبی انتخاب می‌کنیم.

فصل ۳

روابط بین تعدادی از روش‌های عددی در مسائل بهینه‌سازی چندهدفه

۱.۰.۳ روش اسکالرسازی مخروطی (CS)

تاریخچه توسعه روش ^۱CS به مقاله [۳۱] برمی‌گردد، که در آن گاسیموف ^۲ کلاسی از توابع زیر خطی صعودی را روی فضاهاى نرم‌دار حقیقی به‌طور جزئی مرتب تعریف کرد و بدون پیش‌فرض‌های تحدب و کران‌داری نشان داد که مجموعه‌ای از نقاط پشتیبان که از آن توابع به‌دست می‌آیند، به‌جای کارای سره به مفهوم بنسون هستند [۱۸]. این سؤال که ”آیا می‌توان هر نقطه کارای سره را به روشی مشابه محاسبه کرد“ فقط در مواردی پاسخ داده شد که فضای هدف توسط یک مخروط اسقف ^۳ – فلپس ^۴ به‌طور جزئی مرتب شده باشد. از آن زمان، کاربردهای مختلف نظری و عملی با استفاده از کلاس پیشنهادی توابع زیرخطی تحقق یافته است (برای مثال، مراجعه کنید به [۱۲، ۳۲، ۳۴]). اصول نظری روش اسکالرسازی مخروطی به شکل کلی توضیح داده‌شد. شرح کامل روش در [۳۵] آورده شده است.

^۱cone scalarization

^۲Gasimov

^۳Bishop

^۴Phelps

تعاریف زیر از مخروط‌های دوگان افزوده معرفی شده در [۳۳] یادآوری می‌شود.

$$\mathbb{C}^{a*} = \{(y^*, \alpha) \in \mathbb{C}^\# \times \mathbb{R}_+ : y^{*T}y - \alpha\|y\| \geq 0, \quad \forall y \in \mathbb{C}\}, \quad (1.3)$$

$$\mathbb{C}^{a^\circ} = \{(y^*, \alpha) \in \mathbb{C}^\# \times \mathbb{R}_+ : y^{*T}y - \alpha\|y\| > 0, \quad \forall y \in \text{int}(\mathbb{C})\}, \quad (2.3)$$

و

$$\mathbb{C}^{a\#} = \{(y^*, \alpha) \in \mathbb{C}^\# \times \mathbb{R}_+ : y^{*T}y - \alpha\|y\| > 0, \quad \forall y \in (\mathbb{C}) \setminus \{0\}\}, \quad (3.3)$$

که در آن فرض می‌شود $\mathbb{C}$ در تعریف $\mathbb{C}^{a^\circ}$ یک درون ناتهی دارد. ایده روش CS بسیار ساده است: پارامترهای اولیه را انتخاب می‌کنیم که شامل یک بردار وزن $w \in \mathbb{C}^\#$ و یک نقطه مرجع $a \in \mathbb{R}^n$ می‌باشد، یک پارامتر افزوده $\alpha \in \mathbb{R}_+$ را تعیین می‌کنیم به گونه‌ای که $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a*}$ (یا $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a^\circ}$ یا $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a\#}$) که در آن برای راحتی از نرم l_1 استفاده می‌شود، و مسئله اسکالرسازی زیر را حل می‌کنیم:

$$\min_{x \in \mathbb{X}} \sum_{i=1}^n w_i |f_i(x) - a_i| + \alpha \sum_{i=1}^n |f_i(x) - a_i| \quad (CS(w, \alpha, a))$$

مجموعه جواب‌های بهینه این مسئله با $Sol(CS(w, \alpha, a))$ مشخص می‌شود. نقطه مرجع ممکن است توسط تصمیم‌گیرنده در مواردی که مایل به محاسبه نقاط مینیمال نزدیک به نقطه‌ای است، مشخص شود. روش CS هیچ محدودیتی را در تعیین نقاط مرجع اعمال نمی‌کند. نقطه مرجع را می‌توان دلخواه انتخاب کرد. قضیه زیر به نقل [۳۵] خصوصیات اصلی جواب‌های به دست آمده با روش اسکالرسازی مخروطی برای زمانی که $\mathbb{C} = \mathbb{R}_+^n$ است را بیان می‌کند. در مورد خاص برای مخروط مشخص کننده ترتیب جزئی به شما اجازه می‌دهد تا صریحاً مخروط‌های دوگان افزوده را که برای انتخاب پارامترهای عددی (w, α) استفاده می‌شود، تعیین کنید. برای حالت کلی این قضیه، [۳۳] را ببینید.

قضیه ۱.۰.۳. [۳۵] فرض می‌کنیم $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه ناتهی داده شده باشد، $a \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه مرجع مشخص باشد و فرض می‌کنیم $\mathbb{C} = \mathbb{R}_+^n$. فرض می‌کنیم که برای یک زوج مرتب داده شده $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a*}$ داشته باشیم $Sol(CS(w, \alpha, a)) \neq \emptyset$ آن‌گاه، نتایج زیر را نتیجه می‌گیریم:

(i) اگر

$$(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a^\circ} = \{((w_1, \dots, w_n), \alpha) : 0 \leq \alpha \leq w_i, w_i > 0, i = 1, \dots, n \\ \forall \exists k \in \{1, \dots, n\} \text{ s.t. } w_k > \alpha\},$$

آن‌گاه هر عنصر $Sol(CS(w, \alpha, a))$ یک جواب کارای ضعیف برای (۱.۱) است.

(ii) اگر $Sol(CS(w, \alpha, a))$ از یک عنصر تشکیل شده باشد، آن گاه آن عنصر یک جواب کارا برای (۱.۱) است.

(iii) اگر

$$(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a\#} = \{((w_1, \dots, w_n), \alpha) : 0 \leq \alpha \leq w_i, w_i > 0, i = 1, \dots, n\}$$

آن گاه هر جواب $Sol(CS(w, \alpha, a))$ یک جواب کارای سره برای (۱.۱) است، و برعکس، اگر $\bar{x}$ یک جواب کارای سره برای (۱.۱) باشد، آن گاه $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a\#}$ و یک نقطه مرجع $a \in \mathbb{R}^n$ وجود دارد به طوری که $\bar{x}$ یک جواب از $Sol(CS(w, \alpha, a))$ است.

قضیه زیر ویژگی های ساده عناصر مینیمال را به ما می دهد.

قضیه ۲.۰.۳. [۲۵] اگر $\mathbb{Y} \subset \mathbb{R}^n$ یک مجموعه ناتهی و $\mathbb{C} = \mathbb{R}_+^n$ داده شده باشد. اگر $\bar{y}$ یک عنصر مینیمال از $\mathbb{Y}$ باشد، آن گاه $\bar{y}$ یک جواب بهینه برای مسئله بهینه سازی اسکالر زیر است:

$$\min_{y \in \mathbb{Y}} \left\{ \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i) + \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y}_i| \right\}. \quad (4.3)$$

با استفاده از قضایای ۱.۰.۳ و ۲.۰.۳، به نتیجه زیر می رسیم.

با حل مسئله $(CS(w, \alpha, a))$ برای همه مقادیر ممکن پارامتر افزایش α بین 0 تا $\min\{w_1, \dots, w_n\}$ می توان تمام جواب های کارا را مطابق با ترجیحات تصمیم گیرنده (بردار وزنی $w = (w_1, \dots, w_n)$ و نقطه مرجع a) محاسبه کرد. دو نکته زیر هندسه روش CS را نشان می دهد.

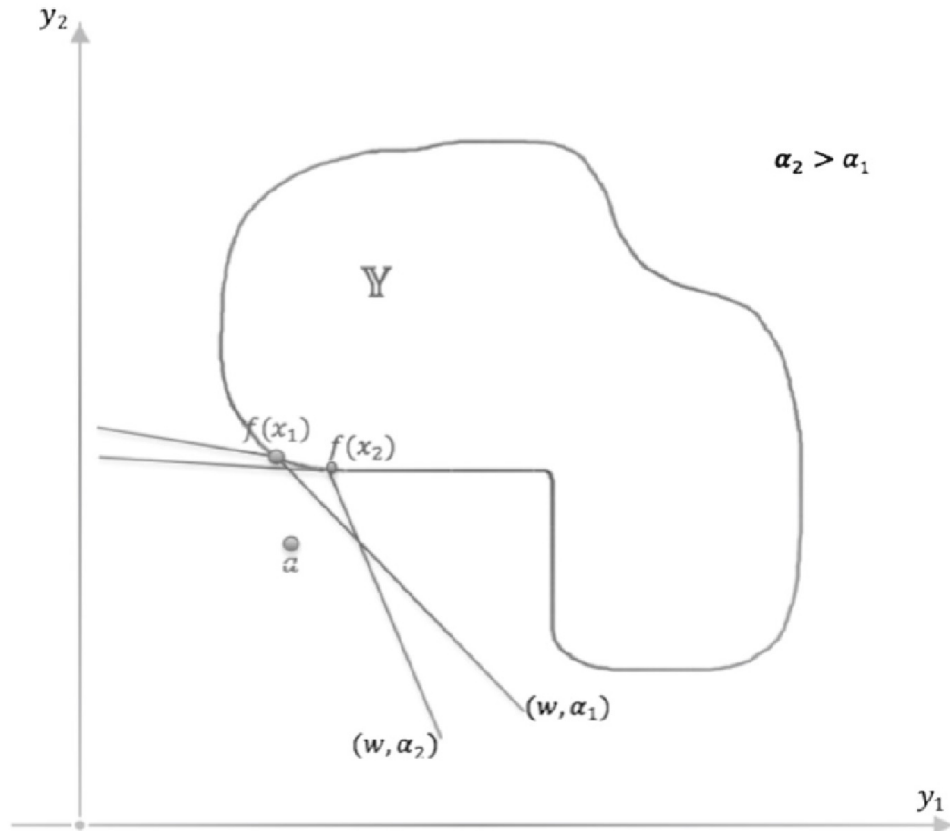
ملاحظه ۱.۰.۳. (یا $(f(\mathbb{X} \subseteq \{a\} \pm \mathbb{C}))$ ، آن گاه اگر $\alpha = 0$ تابع هدف مسئله مقیاس بهینه سازی $(CS(w, \alpha, a))$ همان تابع هدف روش عددی مجموع وزنی می شود. به حداقل رساندن چنین تابع هدفی در روی مجموعه شدنی امکان دستیابی به تنها جواب های کارا x را فراهم می کند (اگر مسئله اسکالر سازی مربوطه دارای جواب باشد)، بردار مینیمال $f(x)$ یک نقطه پشتیبان فضای هدف نسبت به ابر صفحه زیر باشد.

$$H(w) = \{y : w^T y = \beta\},$$

که در آن $\beta = w^T f(x)$ بدیهی است که نقاط مینیمال که نقاط پشتیبان فضای هدف نیستند، از این طریق قابل تشخیص نیستند. با افزودن قسمت خطی در $(CS(w, \alpha, a))$ با عبارت نرم (با استفاده از پارامتر افزوده مثبت α)، ابر صفحه ها $H(w)$ به یک سطح مخروطی تعریف شده توسط مخروط زیر تبدیل می شود:

$$S(w, a) = \{y \in \mathbb{R}^n : w^T y + \alpha \|y\| \leq 0\}, \quad (5.3)$$

و بنابراین مسئله اسکالر سازی مربوطه $(CS(w, \alpha, a))$ جواب x ، ای را محاسبه می‌کند که بردار $f(x)$ مربوط به آن یک نقطه پشتیبان از فضای هدف نسبت به این مخروط است. تغییر در α منجر به مخروط پشتیبان دیگری می‌شود. مخروط پشتیبان مربوط به برخی از بردارهای وزن با افزایش α باریک می‌شود، و کوچکترین مخروط (که همیشه حاوی مخروط ترتیبی است) به دست می‌آید وقتی α برابر با حداکثر مقدار قابل قبول آن باشد (به عنوان مثال، $\min\{w_1, \dots, w_n\}$ ، اگر $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a\#}$) این تجزیه و تحلیل نشان می‌دهد که با تغییر پارامتر α ، می‌توان نقاط مینیمم مختلف مربوط به بردار وزن یکسان را محاسبه کرد. و چون این روش نقاط پشتیبان فضای تصمیم رانسبت به مخروط‌ها محاسبه می‌کند (اگر $\alpha \neq 0$)، مشخص می‌شود که چرا این روش به شرایط تحذب و کران داری احتیاج ندارد و چرا می‌تواند نقاط بهینه را پیدا کند که توسط ابرصفحه‌ها قابل تشخیص نیست. از آن جا که موارد $f(\mathbb{X} \subseteq \{a\} \pm \mathbb{C})$ یا $\alpha = 0$ منجر به تابع هدف روش عددی مجموع وزنی می‌شود، می‌توان گفت که روش CS تعمیم روش اسکالر سازی مجموع وزنی است. تصویر هندسی روش CS در شکل ۱.۳ ارائه شده است، که در آن دو جواب مربوط به بردار وزن یکسان w و نقطه مرجع یکسان a با مقادیر مختلف پارامتر، به تصویر کشیده شده است. همانطور که از این شکل دیده می‌شود، این جواب‌ها نقاط پشتیبان فضای تصمیم‌گیری نسبت به مخروط‌های مربوط به توابع هدف مسائل اسکالر سازی $(CS(w, \alpha_i, a))$ ، $i = 1, 2$ ، که $\alpha_2 > \alpha_1$ می‌باشد. چون $\alpha_2 > \alpha_1$ مخروط مربوط به α_2 باریک‌تر از مخروط α_1 است و از تصویر گرافیکی مشخص است که حداقل نقطه $f(x_2)$ را نمی‌توان با استفاده از روش عددی مجموع وزن دار محاسبه کرد.



شکل ۱.۳: تصویر هندسی روش CS

ملاحظه ۲.۰.۳. از تعریف مخروط دوتایی افزوده نتیجه می‌شود که $w^T y - \alpha \|y\| \geq 0$ برای هر $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a*}$ و هر $\mathbb{C}$ از این رو،

$$\mathbb{C} \subset C(w, \alpha) = \{y \in \mathbb{R}^n : wy - \alpha \|y\| \geq 0\}, \quad (۶.۳)$$

که در آن $C(w, \alpha)$ به عنوان مخروط اسقف - فلیپس متناظر با یک جفت $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a*}$ می‌باشد. ثابت شده است که اگر $\mathbb{C}$ یک مخروط نوک تیز محدب بسته باشد که دارای یک پایه فشرده ضعیف است، آن گاه

$$\mathbb{C} = \bigcap_{(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a*}} C(w, \alpha)$$

به [۳۳] مراجعه کنید.

از طرف دیگر، چون $w^T y - \alpha \|y\| \geq 0$ برای هر $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a*}$ و هر $y \in \mathbb{C}$ ، آن گاه به وضوح $w^T y + \alpha \|y\| \leq 0$ برای هر $y \in -\mathbb{C}$ بنا براین، نتیجه می‌گیریم که همه مخروط‌های $S(w, \alpha) = \{y \in \mathbb{R}^n : w^T y + \alpha \|y\| \leq 0\}$ (ببینید ۵.۳) با $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a*}$ حاوی مخروط مرتب $-\mathbb{C}$ هستند. علاوه بر این، اگر $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a\#}$ آن گاه داریم [۳۳]:

$$-\mathbb{C} \setminus \{0\} \subseteq \text{int}(S(w, \alpha)) = \{y \in \mathbb{R}^n : w^T y + \alpha \|y\| < 0\}$$

با توجه به این ویژگی، روش CS تضمین می‌کند که ”همه” جواب‌های کارای سره متناظر با وزن‌های داده شده و نقطه مرجع داده شده محاسبه شوند. یعنی هر جواب از مسئله اسکالر سازی $(CS(w, \alpha, a))$ یک جواب کارای سره برای مسئله بهینه‌سازی چند هدفه (۱.۱) است، اگر $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{\#}$ به قضیه ۱.۰.۳ مراجعه کنید.

در بعضی موارد برای مخروط داده شده $\mathbb{C}$ و یک نرم معین، می‌توان یک زوج $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a*}$ پیدا کرد به طوری که $\mathbb{C} = C(w, \alpha)$ باشد، آن‌گاه . به عنوان مثال، اگر $\mathbb{C} = \mathbb{R}_+^n$ باشد، آن‌گاه

$$\mathbb{R}_+^n = C(w^1, \alpha^1) = \{y \in \mathbb{R}^n : w^1 y + \alpha^1 \|y\|_1 \geq 0\}, \quad (7.3)$$

که در آن $w^1 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n, \alpha^1 = 1$ و نرم l_1 در تعریف استفاده شده است به [۳۵] مراجعه کنید. به همین ترتیب، $\mathbb{R}_-^n$ می‌تواند به عنوان یک مجموعه سطح $S(w^1, \alpha^1)$ از تابع

$$g_{(w^1, \alpha^1)}(y) = y_1 + \dots + y_n + |y_1| + \dots + |y_n| \quad (8.3)$$

به فرم زیر نمایش داده شود:

$$\mathbb{R}_-^n = S(w^1, \alpha^1) = \{(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_1 + \dots + y_n + |y_1| + \dots + |y_n| \leq 0\}. \quad (9.3)$$

از این رو، مشخص می‌شود که روش اسکالر سازی ارائه شده به شما کمک می‌دهد تا عناصر مینیمال که از عناصر پشتیبان $f(\mathbb{X})$ هستند را با توجه به سطوح مخروطی مانند $S(w, \alpha)$ محاسبه کنید (نگاه کنید به (۵.۳)). در عمل می‌توان فاصله بین $\circ$ و $\min\{w_1, \dots, w_n\}$ را به چندین قسمت تقسیم کرد، و برای هر یک از این مقادیر پارامتر افزوده α می‌توان مسئله اسکالر سازی $(CS(w, \alpha, a))$ را برای همان وزن‌ها و همان نقطه مرجع انتخاب شده حل کرد. این تصمیم‌گیرنده را قادر می‌سازد تا جواب‌های کارای مختلف (در صورت وجود) را با توجه به مجموعه وزنی یکسان محاسبه کند.

۲.۰.۳ روابط بین اسکالر سازی مخروطی CS و روش اسکالر سازی پاسکلاتی-سرافینی

در این بخش ما یک قضیه برای ایجاد رابطه بین روش‌های CS و PSS را بیان می‌کنیم [۳۵]. این قضیه نشان می‌دهد که همان جواب‌های کارای به دست آمده با روش PSS یا بهترین آن‌ها می‌توانند با روش CS محاسبه شود.

قضیه ۳.۰.۳. فرض کنید که $\mathbb{C}$ یک مخروط محدب بسته و با درون غیرتهی است و $a \in \mathbb{R}^n, r \in \text{int}(\mathbb{C})$ و $(\bar{t}, \bar{x})$ یک جواب بهینه از $(PSS(a, r))$ است. آن‌گاه، یک بردار وزن $\bar{w} = (\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n) \in \mathbb{C}^{\#}$ و یک پارامتر افزوده $\bar{\alpha} \geq 0$ با $(\bar{w}, \bar{\alpha}) \in C^{a\circ}$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$\min_{x \in \mathbb{X}} \bar{w}^T(f(x) - a) + \bar{\alpha} \|f(x) - a\| \leq \bar{t}.$$

برهان. فرض می‌کنیم $(w, \alpha) \in C^{a^\circ}$ باشد. با توجه به تعریف C^{a° (همچنین ببینید ۶.۳)، داریم $\mathbb{C} \subset C(w, \alpha)$ لذا، مسئله $(PSS(a, r))$ را می‌توان به شکل زیر و احتمالا با یک مجموعه گسترده‌تری از جواب‌های شدنی نوشت:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && t && (PSS_{c(w, \alpha)}(a, r)) \\ & \text{s.t.} && a + tr - f(x) \in C(w, \alpha) \\ & && x \in \mathbb{X}, \end{aligned}$$

با توجه به تعریف $C(w, \alpha)$ ، رابطه $a + tr - f(x) \in C(w, \alpha)$ ایجاب می‌کند

$$w^T(a + tr - f(x)) - \alpha \|a + tr - f(x)\| \geq 0,$$

یا

$$w^T(f(x) - a - tr) + \alpha \|f(x) - a - tr\| \leq 0.$$

به‌طور واضح

$$\alpha(\|f(x) - a\| - \|tr\|) \leq \alpha \|f(x) - a - tr\|.$$

بنابراین، اگر عبارت نرم‌دار را در نامساوی قبلی، با سمت چپ نا مساوی فوق جایگزین کنیم مجموعه جواب‌های شدنی به‌دست‌آمده $(PSS_{c(w, \alpha)}(a, r))$ ممکن است دوباره گسترش یابد:

$$w^T(f(x) - a) + \alpha \|f(x) - a\| \leq tw^Tr + |t|\alpha \|r\|. \quad (10.3)$$

با در نظر گرفتن علامت $\bar{t}$ می‌توانیم فقط محدوده مثبت یا فقط منفی را برای t در رابطه (۱۰.۳) در نظر بگیریم. اگر فقط مقادیر منفی (یا فقط مثبت) t در نظر گرفته شود، آنگاه سمت راست (۱۰.۳) به $(t(w^Tr - \alpha\|r\|))$ (یا $(w^Tr + \alpha\|r\|)$) تبدیل می‌شود. از آنجا که $r \in \text{int}(C)$ و $(w, \alpha) \in C^{a^\circ}$ ما داریم $w^Tr - \alpha\|r\| > 0$ (یا $w^Tr + \alpha\|r\| > 0$). بنابراین، با تقسیم هر دو طرف (۱۰.۳) با $w^Tr - \alpha\|r\| > 0$ (یا $w^Tr + \alpha\|r\| > 0$) و تعریف $\bar{w} = w/(w^Tr - \alpha\|r\|)$ و $\bar{\alpha} = \alpha/(w^Tr - \alpha\|r\|)$ (یا $\bar{w} = w/(w^Tr + \alpha\|r\|)$ و $\bar{\alpha} = \alpha/(w^Tr + \alpha\|r\|)$) را می‌توان به فرم زیر نوشت (با یک مجموعه شدنی گسترده‌تر):

$$\text{minimize} \quad t \quad (11.3)$$

$$\text{s.t.} \quad \bar{w}^T(f(x) - a) + \bar{\alpha} \|f(x) - a\| \leq t \quad (12.3)$$

$$x \in \mathbb{X} \quad (13.3)$$

این مسئله معادل مسئله زیر است $(CS(\bar{w}, \bar{\alpha}, a))$:

$$\min_{x \in \mathbb{X}} [\bar{w}^T(f(x) - a) + \bar{\alpha} \|f(x) - a\|].$$

از آن جا که مجموعه جواب‌های شدنی مسئله (۱۱.۳) – (۱۳.۳) بزرگتر از مجموعه $(PSS(a, r))$ است، داریم:

$$\min_{x \in \mathbb{X}} [\bar{w}^T(f(x) - a) + \bar{\alpha} \|f(x) - a\|] \leq \bar{t},$$

□

که اثبات قضیه را کامل می‌کند.

در بخش بعدی ثابت می‌کنیم که روش اسکالر سازی مخروطی تعمیم روش بنسون است.

۳.۰.۳ رابطه بین اسکالر سازی مخروطی و روش بنسون

در این بخش رابطه بین روش BS و CS را توضیح می‌دهیم. نشان داده شده است که جواب‌های کارای محاسبه شده توسط روش BS را می‌توان با روش CS بدست آورد، و روش CS را می‌توان به عنوان یک تعمیم روش BS در نظر گرفت.

قضیه ۴.۰.۳. فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب بهینه از مسئله اسکالر سازی بنسون $(BS(x^\circ))$ برای یک جواب شدنی $x^\circ \in X$ باشد و $\bar{x}$ یک جواب کارا برای (۱.۱) باشد. آن گاه، $\bar{x}$ یک جواب بهینه از مسئله اسکالر سازی مخروطی $(CS(w^1, \alpha^1, f(x^\circ)))$ است، که در آن $w^1 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ ، $\alpha^1 = 1$ و نرم l_1 استفاده می‌شود:

$$\min_{x \in \mathbb{X}} \sum_{i=1}^n (f_i(x) - f_i(x^\circ)) + \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(x^\circ)|.$$

برهان. از آن جایی که $f(\bar{x}) \in f(x^\circ) - R_+^n$ ، $f(x^\circ) \in f(X)$ و (رابطه ۴.۰.۳ را ببینید).

$$-R_+^n = \{y : (w^1)^T y + \alpha^1 \|y\|_1 \leq 0\},$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\sum_{i=1}^n (f_i(x) - f_i(x^\circ)) + \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(x^\circ)| = 0$$

برای هر $x \in X_\circ = \{x \in X : f(x) \in f(x^\circ) - R_+^n\}$ و به ویژه برای $x = \bar{x}$.
به طور واضح

$$\sum_{i=1}^n (f_i(x) - f_i(x^\circ)) + \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(x^\circ)| > 0$$

□

برای هر $x \in X \setminus X_\circ$ که اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۵.۰.۳. فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب بهینه از مسئله اسکالر سازی بنسون ($BS(x^\circ)$) برای یک جواب شدنی $x^\circ \in X$ باشد و $\bar{x}$ یک جواب کارا برای (۱.۱) باشد. آن گاه، $\bar{\alpha} \in [0, 1)$ وجود دارد به طوری که $\bar{x}$ یک جواب بهینه از مسئله اسکالر سازی مخروطی $CS(w^1, \bar{\alpha}, f(\bar{x}))$ باشد که در آن $w^1 = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ با نرم l_1 است:

$$\min_{x \in X} \sum_{i=1}^n (f_i(x) - f_i(\bar{x})) + \bar{\alpha} \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(\bar{x})|.$$

برهان. داریم:

$$-R_+^n = \{y : (w^1)^T y + \alpha^1 \|y\|_1 \leq 0\},$$

و به طور واضح

$$-\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\} \subseteq \text{int}(\{y \in \mathbb{R}^n : (w^1)^T y + \alpha \|y\| \leq 0\}),$$

برای هر $\alpha \in [0, 1)$ علاوه بر این، واضح است که

$$\text{int}(\{y \in \mathbb{R}^n : (w^1)^T y + \alpha \|y\| \leq 0\}) = \{y \in \mathbb{R}^n : (w^1)^T y + \alpha \|y\| < 0\}$$

لذا، از آن جا که $\bar{x}$ یک جواب کارا برای (۱.۱) است، وجود دارد $\bar{\alpha} \in [0, 1)$ به طوری که

$$\{f(\bar{x})\} + \{y \in \mathbb{R}^n : (w^1)^T y + \bar{\alpha} \|y\| \leq 0\} \cap f(X) = \{f(\bar{x})\}.$$

این کار منجر به این می شود که:

$$\{y \in \mathbb{R}^n : (w^1)^T (y - f(\bar{x})) + \bar{\alpha} \|y - f(\bar{x})\| \leq 0\} \cap f(X) = \{f(\bar{x})\}.$$

آخرین رابطه به این معنی است که:

$$(w^1)^T (f(x) - f(\bar{x})) + \bar{\alpha} \|f(x) - f(\bar{x})\| \geq 0 \geq 0.$$

□

برای هر $x \in X$ ، که قضیه را اثبات می کند.

ویژگی های اصلی زیر در مورد روش اسکالر مخروطی صادق است:

- روش CS را می توان برای هر مخروط ترتیبی دلخواه C اعمال کرد.
- محدودیت از پایین کران دار بودن شرط اساسی روش CS نیست. با این حال، برای برخی از پارامترها، ممکن است مسئله اسکالر سازی مربوطه بی کران باشد.
- روش CS نیازی به شرایط تحدب روی مسئله ندارد.
- اگر مسئله اسکالر سازی مربوطه دارای یک جواب متناهی باشد، روش CS همیشه جواب های کارا، یا کارای ضعیف به همراه دارد. با انتخاب یک مجموعه پارامتر اسکالر سازی مناسب متشکل از یک بردار وزن، یک پارامتر افزایش و یک نقطه مرجع، تصمیم گیرنده

ممکن است بهترین جواب کارا یا جواب کارای سره را تضمین کند. این روش شرایطی را برای دستیابی به جواب‌های (فقط) کارای سره فراهم می‌کند و همه جواب‌های کارای سره با این روش قابل شناسایی هستند.

- اولویت و نقطه مرجع تصمیم‌گیرنده با استفاده از روش CS در نظر گرفته می‌شود.
- روش CS نه از محدودیت‌ها و نه از متغیرهای تصمیم اضافی استفاده می‌کند.
- روش اسکالر سازی مخروطی تعمیم روش مجموع وزن دار، روش اسکالر سازی بنسون و پاسکلاتی – سرافینی است.

فصل ۴

مقایسه عددی روش‌های مختلف اسکالر سازی

در ادامه، ما ویژگی‌های روش‌های اسکالر سازی را که در بخش‌های قبلی بحث شد، بر روی یک مثال که از [۳۵] نقل شده، بررسی می‌کنیم. این مثال به منظور نشان دادن توانایی‌های روش‌های ذکر شده و ویژگی‌های مورد بحث انتخاب شده است.

مثال ۱.۰.۴. یک مسئله دوهدفه را با $f_1(x_1, x_2) = x_1$ و $f_2(x_1, x_2) = x_2$ در نظر بگیرید، که در آن مجموعه جواب‌های شدنی به شکل زیر تعریف شده است. فرض کنید

$$\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}_{11} \cup \mathbb{X}_{12} \cup \mathbb{X}_{13} \cup \mathbb{X}_{14},$$

که در آن

$$\mathbb{X}_{11} = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq -2, x_2 \geq 2\},$$

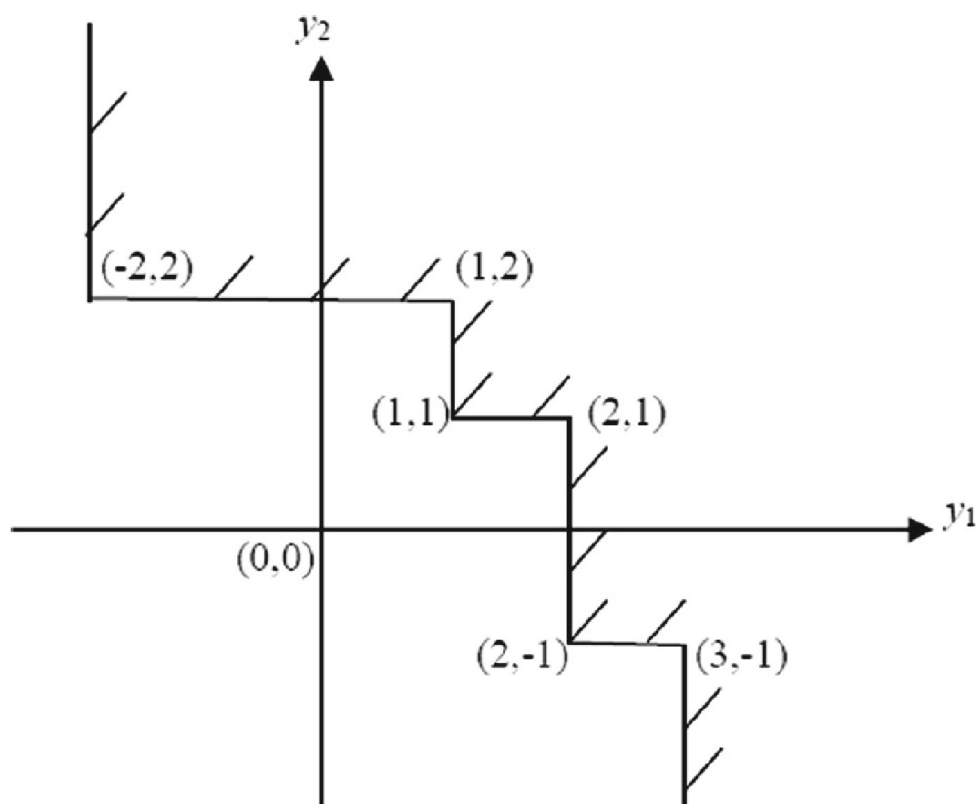
$$\mathbb{X}_{12} = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 1, x_2 \geq 1\},$$

$$\mathbb{X}_{13} = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 2, x_2 \geq -1\},$$

$$\mathbb{X}_{14} = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 3\}.$$

سپس، می‌توان با قرارداد $\mathbb{Y}_1 = \mathbb{X}_1$ فضای هدف را به روشی مشابه تعریف کرد (شکل ۱.۴ را ببینید). توجه داشته باشید که فضای هدف $\mathbb{Y}_1$ از پایین محدود نیست. نقاط $(-2, 2), (1, 1), (2, -1)$

نقاط مینیمم $\mathbb{Y}_1$ هستند که مینیمال سره نیستند و تمام نقاط مرزی $\mathbb{Y}_1$ نقاط مینیمال ضعیف هستند.



شکل ۱.۴: تصویر مجموعه $\mathbb{Y}_1$ در مثال ۱.۰.۴

۱.۰.۴ بررسی روش WSS

جواب‌های به‌دست‌آمده با روش WSS برای برخی مقادیر وزنی در جدول ۱.۴ ارائه شده‌است. همان‌طور که از این جدول مشاهده می‌شود، تابع هدف $(WSS(w))$ برای هر جفت وزن غیر صفر $w_1 > 0, w_2 > 0$ به $-\infty$ می‌رسد. دلیل آن این است که فضای هدف از پایین بی‌کران است. تنها مقدار متناهی $(WSS(w))$ برای وزن‌های $w_1 = 1, w_2 = 0$ به‌دست می‌آید که مجموعه جواب آن حاوی تعداد نامتناهی از عناصر کارای ضعیف است.

جدول ۱.۴: نتایج به دست آمده با روش WSS برای مثال ۱.۰.۴

جواب های بهینه	$w = (w_1, w_2)$	No.
$\min \rightarrow -\infty$	(۱, ۲۰)	۱
$\min \rightarrow -\infty$	(۲, ۱۹)	۲
$\min \rightarrow -\infty$	(۱۰, ۱۱)	۳
$\min \rightarrow -\infty$	(۱۹, ۲)	۴
$\min \rightarrow -\infty$	(۲۰, ۱)	۵
$\{(x_1, x_2) : x_1 = -۲, ۲ \leq x_2 < +\infty\}$	(۱, ۰)	۶

جدول ۲.۴: نتایج به دست آمده از حل مسئله $EC(\varepsilon, ۲)$ (در مورد $\min f_2(x)$) برای مثال ۱.۰.۴

جواب های بهینه	ε	No.
$\{(x_1, x_2) : x_2 = ۲, -۲ \leq x_1 \leq ۰\}$	۰	۱
$\{(۱, ۱)\}$	۱	۲
$\min \rightarrow -\infty$	۳	۳
مسئله اسکالر نشدنی است.	-۳	۴

جدول ۳.۴: نتایج به دست آمده از حل مسئله $EC(\varepsilon, ۱)$ (در مورد $\min f_1(x)$) برای مثال ۱.۰.۴

جواب های بهینه	ε	No.
$\{(x_1, x_2) : x_1 = ۳, -\infty < x_2 \leq -۲\}$	-۲	۱
$\{(۲, -۱)\}$	-۱	۲
$\{(x_1, x_2) : x_1 = ۲, -۱ \leq x_2 \leq ۰\}$	۰	۳

۲.۰.۴ بررسی روش EC

جواب‌های به‌دست‌آمده با روش EC برای مقادیر مختلف ε در جداول ۲.۴ و ۳.۴ ارائه شده است. همانطور که از این جداول مشاهده می‌شود، اعداد ε برای ساخت مسئله اسکالر سازی باید با دقت انتخاب شوند. وابسته به مقادیر این اعداد، مسئله اسکالر سازی مربوطه ممکن است نشدنی باشد، ممکن است از پایین بی‌کران باشد، یا ممکن است منجر به یک مجموعه نامتناهی از جواب‌های کارای ضعیف شود که فاقد هرگونه جواب کارا است (به عنوان مثال به خط ۱ جدول ۳.۴ نگاه کنید)

۳.۰.۴ بررسی روش BS

جواب‌های به‌دست‌آمده با روش BS برای جواب‌های آغازین متفاوت ε در جداول ۳.۴ ارائه شده است. این نتایج نشان می‌دهد که روش BS جواب کارایی را که ”دورترین“ (به تعبیری) نقطه از جواب اولیه است را به‌دست می‌آورد. و اگر جواب اولیه به طور مناسب انتخاب شود، روش BS به‌درستی جواب‌های کارا را محاسبه می‌کند. یک نکته دیگر که باید مورد تأکید قرار گیرد این است که جواب اولیه برای روش BS باید با دقت انتخاب شود، زیرا برای برخی از جواب‌های اولیه ممکن است مسئله اسکالر هیچ جواب متناهی نداشته باشد، همانطور که در مورد جواب اولیه $x^\circ = (3, 1)$ بود. واضح است که برای همه جواب‌های اولیه $(x_1^\circ, x_2^\circ) = x^\circ$ با $x_1^\circ \geq 3$ همان نتایج حاصل خواهد شد.

جدول ۴.۴: نتایج به‌دست‌آمده با روش BS برای مثال ۱.۰.۴

جواب‌های بهینه	$x^\circ = (x_1^\circ, x_2^\circ)$	No.
$max \rightarrow +\infty$	$(3, 1)$	۱
$\{(-2, 2)\}$	$(1, 2)$	۲
$\{(-2, 2)\}$	$(2, 2)$	۳
$\{(-2, 2)\}$	$(2, 3)$	۴
$\{(2, -1)\}$	$(2, 1)$	۵
$\{(1, 1)\}$	$(1, 1)$	۶

جدول ۵.۴: نتایج به دست آمده با روش WCS برای مثال ۱.۰.۴

جواب های بهینه	(Z_1^*, Z_2^*)	(w_1, w_2)
$\{(x_1, x_2) : x_1 = 2, -1 \leq x_2 \leq 1/1^0\}$	$(0, 0)$	$(1, 2^0)$
$\{(x_1, x_2) : x_2 = 1, 1 \leq x_1 \leq 2\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 2, -1 \leq x_2 \leq 1\}$	$(0, 0)$	$(1, 2)$
$\{(1, 1)\}$	$(0, 0)$	$(1, 1)$
$\{(x_1, x_2) : x_2 = 2, -2 \leq x_1 \leq 1/1^0\}$	$(0, 0)$	$(2^0, 1)$
$\{(x_1, x_2) : x_2 = 2, -2 \leq x_1 \leq 2\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 1, 1 \leq x_2 \leq 2\}$	$(0, 0)$	$(2, 1)$
$\{(x_1, x_2) : x_1 = 3, -\infty < x_2 \leq -18/1^0\}$	$(1, -2)$	$(1, 2^0)$
$\{(x_1, x_2) : x_2 = -1, 2 \leq x_1 \leq 3\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 3, -\infty < x_2 \leq -1\}$	$(1, -2)$	$(1, 2)$
$\{(3, -1)\}$	$(1, -2)$	$(1, 1)$
$\{(x_1, x_2) : x_1 = 2, -1 \leq x_2 \leq 0\}$	$(1, -2)$	$(2, 1)$
$\{(x_1, x_2) : x_2 = 1, 1 \leq x_1 \leq 23/2^0\}$	$(1, -2)$	$(2^0, 1)$

۴.۰.۴ بررسی روش WCS

نتایج به دست آمده با روش WCS برای مقادیر مختلف w و Z^* در جدول ۵.۴ ارائه شده است. مسئله از پایین کران دار نیست؛ از این رو، هیچ نقطه ایده آلی وجود ندارد. با این حال، ما نقاط مرجع و وزن های مختلف انتخاب کردیم و جواب های متناظر با مسئله اسکالر سازی را محاسبه کرده ایم. جواب های به دست آمده نشان می دهد که روش عمدتاً به جواب های کارایی ضعیف منجر می شود و می توان تعداد نامحدودی از جواب ها را به دست آورد. این روش همچنین ممکن است به یک مجموعه جواب منجر شود که حاوی یک جواب کارا نباشد (مورد $(w = (1, 2^0), Z^* = (1, -2))$). از طرف دیگر، برای همان نقطه مرجع $Z^* = (0, 0)$ دو جواب مختلف با استفاده از وزن های $w = (1, 2^0)$ و $w = (2^0, 1)$ به دست آمده است که به طور قابل توجهی دور از یکدیگر هستند. این وضعیت به این سؤال منجر می شود که آیا در روش WCS می توان نقطه ایده آل را به عنوان یک نقطه مرجع در نظر گرفت یا خیر.

۵.۰.۴ بررسی روش pps

نتایج به دست آمده با روش PSS برای مقادیر مختلف a و r در جدول ۶.۴ ارائه شده است، که در آن $r_1 > 0$ و $r_2 > 0$. جواب های به دست آمده نشان می دهد که این روش عمدتاً به جواب های کارایی ضعیف منجر می شود و تعداد نامتناهی از جواب ها ممکن است به دست آید.

جدول ۶.۴: نتایج به‌دست‌آمده با روش WCS برای مثال ۱.۰.۴

جواب‌های بهینه	(a_1, a_2)	(r_1, r_2)
$\{(x_1, x_2) : x_1 = 2, -1 \leq x_2 \leq 1/10\}$	$(0, 0)$	$(2, 0/1)$
$\{(x_1, x_2) : x_2 = 1, 1 \leq x_1 \leq 2\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 2, -1 \leq x_2 \leq 1\}$	$(0, 0)$	$(2r_2, r_2)$
$\{(x_1, x_2) : x_2 = 2, -2 \leq x_1 \leq 1\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 1, 1 \leq x_2 \leq 2\}$	$(0, 0)$	$(r_1, 2r_1)$
$\{(x_1, x_2) : x_2 = 2, -2 \leq x_1 \leq 2/3\}$	$(0, 0)$	$(r_1, 3r_1)$
$\{(1, 1)\}$	$(0, 0)$	(r_1, r_1)
$\{(x_1, x_2) : x_2 = -1, 2 \leq x_1 \leq 3\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 3, -\infty \leq x_2 \leq -1\}$	$(1, -2)$	$(2r_1, r_1)$
$\{(2, -1)\}$	$(1, -2)$	(r_1, r_1)
$\{(x_1, x_2) : x_2 = 1, 1 \leq x_1 \leq 2\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 2, 1 \leq x_2 \leq 1\}$	$(1, -2)$	$(r_1, 2r_1)$
$\{(x_1, x_2) : x_1 = 3, -\infty \leq x_2 \leq -1/5\}$	$(1, -2)$	$(4r_1, r_1)$

این روش همچنین ممکن است به مجموعه‌ای از جواب‌ها منجر شود که دارای جواب کارا نباشد (مورد $(r = (4r_1, r_1), a = (1, -2))$). پارامتر a را نمی‌توان به عنوان یک نقطه مرجع در نظر گرفت، زیرا جواب محاسبه‌شده نه تنها به a ، بلکه عمدتاً به r بستگی دارد.

۶.۰.۴ بررسی روش CS

بررسی نتایج به‌دست‌آمده با حل مسئله اسکالر $CS(w, \alpha, a)$ برای مقادیر مختلف پارامترهای اولیه (w, a) و پارامتر افزایشی α در جدول ۷.۴ ارائه شده است. چهار نقطه مرجع $(3, 1), (1, 2), (0, 0)$ و $(1, -2)$ برای بررسی انتخاب‌شده‌اند. نقاط $(3, 1)$ و $(1, 2)$ قبلاً با روش BS بررسی شدند، که در آن هیچ جوابی برای $(3, 1)$ پیدا نشد، و نقطه $(1, 2)$ منجر به جواب کارای $(-2, 2)$ شد (به جدول ۴.۴ مراجعه کنید). دو نقطه دیگر با استفاده از روش‌های WCS و PSS در نظر گرفته شد. نتایج محاسباتی ویژگی اصلی روش CS را نشان می‌دهد، که بیان می‌کند مسئله اسکالر سازی $CS(w, \alpha, a)$ جواب‌های کارای مسئله چندهدفه (۱.۱) را محاسبه می‌کند که متناظر با نقاط پشتیبانی فضای هدف نسبت به مخروط زیر هستند

$$S(w, \alpha) = \{y \in \mathbb{R}^n : w^T y + \alpha \|y\| \leq 0\}$$

(۵.۳) را ملاحظه نمایید). از نتایج به‌دست‌آمده در جدول ۷.۴ به راحتی می‌توان دریافت که با تغییر پارامترهای (w, α) در مسئله اسکالر سازی $CS(w, \alpha, a)$ می‌توان برای یک نقطه مرجع جواب‌های کارای مختلفی به دست آورد. به عنوان مثال، ردیف‌های سوم و چهارم جواب‌های

کارا محاسبه شده برای نقطه مرجع $(3, 1)$ و پارامترهای وزنی و افزوده مختلف (w, α) را ارائه می دهند. مخروط پشتیبان $S(w, \alpha)$ متناظر با پارامترهای $w = (2, 1)$ و $\alpha = 1$ بزرگتر از مخروطی است که مربوط به پارامترهای $w = (3, 2)$ و $\alpha = 2$ است. باتوجه به این ویژگی، جواب کارای $(1, 1)$ برای مجموعه پارامترهای دوم (یعنی برای پارامترهای $w = (3, 2)$ و $\alpha = 2$) یافت می شود. این بدان دلیل است که، نقطه $(1, 1)$ یک نقطه "درونی تر" از فضای هدف نسبت به نقطه $(-2, 2)$ است (نگاه کنید به شکل ۱.۴). به همین دلیل ما به مخروط باریک تری برای پشتیبانی آن نیاز داریم

جدول ۷.۴: نتایج به دست آمده با روش CS برای مثال ۱.۰.۴

No.	(w_1, w_2)	α	(a_1, a_2)	جواب های بهینه
۱	$(1, 1)$	۱	$(0, 0)$	$\{(x_1, 2) : -2 \leq x_1 \leq 0\} \cup \{(1, 1)\} \cup \{(2, x_2) : -1 \leq x_2 \leq 0\}$
۲	$(2, 1)$	۱	$(0, 0)$	$\{(-2, 2)\}$
۳	$(2, 1)$	۱	$(3, 1)$	$\{(-2, 2)\}$
۴	$(3, 2)$	۲	$(3, 1)$	$\{(1, 1)\}$
۵	$(2, 1)$	۱	$(1, 2)$	$\{(-2, 2)\}$
۶	$(4, 3)$	۳	$(1, 2)$	$\{(-2, 2), (1, 1)\}$
۷	$(10, 9)$	۹	$(1, 2)$	$\{(1, 1)\}$
۸	$(2, 1)$	۱	$(1, -2)$	$\{(-2, 2), (2, -1)\}$
۹	$(3, 2)$	۲	$(1, -2)$	$\{(2, -1)\}$

و واضح است که چرا این نقطه را نمی توان با روش WSS محاسبه کرد. توضیحات مشابه را می توان برای سطرهای ۵، ۶، ۷ و برای سطرهای ۸ و ۹ جدول ۷.۴ بیان کرد.

ملاحظه ۱.۰.۴. باید توجه داشت که تمام نتایج محاسباتی نشان داده شده در جدول ۷.۴ برای زوج مرتب (w, α) متعلق به $C^{a*} \setminus C^{a\#}$ به دست آمده است. این به این خاطر است که برای هر $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a\#}$ ، تابع هدف مسئله $CS(w, \alpha, a)$ از پایین بی کران خواهد شد. این یک شرح خوب از این حقیقت است که مسئله چند هدفه ای که در مثال ۱.۰.۴ در نظر گرفته شده هیچ جواب کارای سره ندارد، و با قضیه ۱.۰.۳ (همچنین به ملاحظه ۲.۰.۳ مراجعه کنید) برای هر زوج مرتب $(w, \alpha) \in \mathbb{C}^{a\#}$ هر جواب مسئله اسکالر سازی $CS(w, \alpha, a)$ باید کارای سره باشد. همه این ویژگی ها را می توان به راحتی در مجموعه مثال های جدید نشان داد (برای مثال، به [۳۳، ۳۵، ۳۶] مراجعه کنید). ما برای طولانی شدن غیر ضروری پایان نامه، تصاویر اضافی را در مورد نمونه های جدید ارائه نخواهیم کرد. فقط توجه داشته باشید که، با تغییر (کمی) مجموعه

$\mathbb{X}_{14}$ در مثال ۱.۰.۴، به مجموعه

$$\mathbb{X}_{14} = \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 3, x_2 \geq -5\},$$

تمام جواب‌های کارا مثال ۱.۰.۴، کارای سره خواهند شد (از جمله جواب جدید $(3, -5)$ ، و تمام ویژگی‌های مربوط به جواب‌های کارای سره را می‌توان با در نظر گرفتن پارامترهای استفاده شده برای همه روش‌های اسکالر سازی ذکر شده در مثال ۱.۰.۴ بررسی کرد.

در واقع ما از مقایسه روش‌های اسکالر سازی اینطور نتیجه می‌گیریم که فقط روش مجموع وزن دار و روش‌های اسکالر سازی مخروطی، جواب یا جواب‌های کارای سره را با انتخاب وزن‌های ترجیحی در یک روش درست به دست می‌آورند. با این وجود روش اسکالر سازی مجموع وزنی ممکن است تمام جواب‌های کارای سره را با فرض تحدب به دست آورد، در حالی که روش اسکالر سازی مخروطی به شرایط تحدب و کران دار بودن نیازی ندارد و همه‌ی جواب‌های کارای سره را نتیجه می‌دهد. از طرف دیگر، چون استفاده از هر ویژگی مفیدی ممکن است محدودیت‌هایی داشته باشد، باید توجه داشت که روش مخروطی از یک تابع اسکالر سازی ناهموار استفاده می‌کند.

فصل ۵

نتیجه‌گیری

در این پایان‌نامه، شش روش اسکالر معروف مورد بررسی قرار گرفتند و با توجه به شرایط زیر مقایسه شدند:

- این روش‌ها را می‌توان برای مخروط مرتب‌سازی شده C ، یا فقط برای R_+^n اعمال کرد.
 - کران‌داری از پایین شرط اساسی روش است.
 - این روش نیاز به شرایط تحدب در مسئله دارد.
 - این روش شرایطی را برای دستیابی به جواب‌های (فقط) کارای سره فراهم می‌کند.
 - اولویت و اطلاعات مربوط به نقطه مرجع ارائه شده توسط تصمیم‌گیرنده در نظر گرفته می‌شود.
 - این روش از محدودیت‌ها یا متغیرهای تصمیم‌گیری اضافی استفاده می‌کند.
- تمام این ویژگی‌ها در جدول ۱.۵ آورده شده است.

جدول ۱.۵: ویژگی‌های اصلی شش روش مقیاس‌زدایی

Add.Constr.	Ref.P.	Weights	Pr.Eff.	Conv.	Bound	Cone	Method
-	-	+	+	+	-	cone any	WSS
+	-	-	-	-	-	R_+^n	EC
+	-	-	-	-	-	R_+^n	BS
+	-	+	-	-	+	R_+^n	WCS
+	+	-	-	-	-	Any cone	PSS
-	+	+	+	-	-	Any cone	CS

در این پایان‌نامه همچنین روابط بین روش‌های مختلف اسکالر سازی مورد بحث قرار گرفت. پیش‌ازاین در مقالات اثبات شده بود که روش اسکالر سازی پاسکلاتی - سرافینی تعمیم اسکالر سازی مجموع وزنی، ε محدودیت و روش‌های اسکالر سازی چبیشف وزن دار است. در این پایان‌نامه، ویژگی‌های جدید برای روش اسکالر سازی پاسکلاتی - سرافینی ارائه شده است. علاوه بر این، نشان داده شده است که روش اسکالر سازی مخروطی تعمیم حاصل از مجموع وزنی، روش‌های اسکالر سازی بنسون و پاسکولتی - سرافینی است. این نتیجه همراه با ویژگی‌های تعمیم داده شده روش اسکالر سازی پاسکلاتی - سرافینی به این معنی است که روش اسکالر سازی مخروطی عمومی‌ترین روش است و تمام روش‌های در نظر گرفته شده در این پایان‌نامه تحت این روش قرار می‌گیرند. تمام ویژگی‌های مورد بحث در این پایان‌نامه با یک مثال نشان داده شده است.

در آخر توجه داشته باشید که در مطالعات آینده می‌توان مقاله‌ای جامع را با اضافه کردن مقایسه روش‌های دیگر از مقالات به‌طور مشابه تهیه کرد و تحولات جدید را در نظر گرفت.

مراجع

- [1] Kasimbeyli, R., Ozturk, Z.K., Kasimbeyli, N., Yalcin, G.D., Icmen, B.: Conic scalarization method in multiobjective optimization and relations with other scalarization methods. In: An, L.T.H., Tao, P.D., Thanh, N.N. (eds.) Proceedings of the 3rd International Conference on Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences-MCO 2015-Part I, Volume of Series: Advances in Intelligent Systems and Computing, vol. 359, pp. 319–329. Springer (2015).
- [2] Ehrgott, M.: Multicriteria Optimization. Springer, Berlin (2005)
- [3] Ehrgott, M., Ryan, D.: Constructing robust crewschedules with bicriteria optimization. J. Multi-Criteria Decis. Anal. 11(3), 139–150 (2002)
- [4] Burachik, R.S., Kaya, C.Y., Rizvi, M.M.: A new scalarization technique to approximate Pareto fronts of problems with disconnected feasible sets. J. Optim. Theory Appl. 162, 428–446 (2014)
- [5] Steuer, R.E., Choo, E.U.: An interactive weighted Tchebycheff procedure for multiple objective programming. Math. Program. 26, 326–344 (1983)
- [6] Miettinen, K.: Nonlinear Multiobjective Optimization. Kluwer, Boston (1999)
- [7] Miettinen, K., Mäkelä, M.: On scalarizing functions in multiobjective optimization. OR Spectr. 24, 193–213 (2002)
- [8] Wierzbicki, A.P.: The use of reference objectives in multiobjective optimization. In: Fandel, G., Gal, T. (eds.) Multiple Criteria Decision Making, Theory and Applications, pp. 468–486. Springer, Berlin (1980)
- [9] Bazán, F.F., Hernández, E.: A unified vector optimization problem: complete scalarizations and applications. Optimization 60(12), 1399–1419 (2011)

- [10] Gerth, C., Weidner, P.: Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization. *J. Optim. Theory Appl.* 67(2), 297–320 (1990)
- [11] Pascoletti, A., Serafini, P.: Scalarizing vector optimization problems. *J. Optim. Theory Appl.* 42, 499–524 (1984)
- [12] Rubinov, A.M., Gasimov, R.N.: Scalarization and nonlinear scalar duality for vector optimization with preferences that are not necessarily a pre-order relation. *J. Glob. Optim.* 29, 455–477 (2004)
- [13] Chinchuluun, A., Pardalos, P.M.: A survey of recent developments in multiobjective optimization. *Ann. Oper. Res.* 154(1), 29–50 (2007)
- [14] Ehrgott M, Wiecek M (2005) Multiobjective programming, in multicriteria decision analysis: state of the art surveys. In: Figueira, J., Greco, S., Ehrgott, M. (eds.) pp. 667–722. Springer, New York (2005)
- [15] Eichfelder, G.: Adaptive Scalarization Methods in Multiobjective Optimization. Springer, Berlin (2008)
- [16] Wierzbicki, A.P.: Reference Point Methods in Vector Optimization and Decision Support, Interim Report IR-98-017. International Institute for Applied Systems Analysis, Laxenburg, Austria (1998)
- [17] Zopounidis, C., Pardalos, P.M. (eds.) Handbook of Multicriteria Analysis, vol. XXV, pp. 455. ISBN 978-3-540-92827-0 (print), 978-3-540-92828-7 (2010)
- [18] Benson, H.P.: An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones. *J. Math. Anal. Appl.* 71, 232–241 (1979)
- [19] Henig, M.I.: Proper efficiency with respect to cones. *J. Optim. Theory Appl.* 36, 387–407 (1982)
- [20] Gass, S., Saaty, T.: The computational algorithm for the parametric objective function. *Naval Res. Logist. Quart.* 2, 39 (1955)
- [21] Klamroth, K., Tind, J.: Constrained optimization using multiple objective programming. *J. Glob. Optim.* 37(3), 325–355 (2007)
- [22] Haimes, Y.Y., Wismer, D.A., Lasdon, L.S.: On bicriterion formulation of the integrated systems identification and system optimization. In: *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC-1*, pp. 296–297 (1971)

- [23] Chankong, V., Haimes, Y.Y.: Multiobjective Decision Making: Theory and Methodology. Elsevier Science Publishing, New York (1983)
- [24] Benson, H.P.: Existence of efficient solutions for vector maximization problems. *J. Optim. Theory Appl.* 26, 569–580 (1978)
- [25] Soleimani-damaneh, M., Zamani, M.: On Benson's scalarization in multiobjective optimization. *Optim. Lett.* 10, 1757–1762 (2016)
- [26] Jr, V.J.: Bowman, on the relationship of the Tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple criteria objectives. *Lect. Notes Econ. Math. Syst.* 130, 76–86 (1976)
- [27] Kaliszewski, I.: A modified weighted Tchebycheff metric for multiple objective programming. *Comput. Oper. Res.* 14, 315–323 (1987)
- [28] Gerstewitz, C.: Nichtkonvexe Dualität in der Vektoroptimierung. *Wissensch. Zeitschr. TH Leuna-Merseburg* 25(3), 357–364 (1983)
- [29] Tammer, C., Winkler, K.: A new scalarization approach and applications in multicriteria d.c. optimization. *J. Nonlinear Convex Anal.* 4(3), 365–380 (2003)
- [30] Weidner, P.: Ein Trennungskonzept und seine Anwendung auf Vektoroptimierungsprobleme, Professorial dissertation. Univ. of Halle, Germany (1990)
- [31] Gasimov, R. N.: Characterization of the Benson proper efficiency and scalarization in non-convex vector optimization, In: Koksalan, M., Zions, S. (eds.) *Multiple Criteria Decision Making in the New Millennium*, Book Series: Lecture Notes in Economics and Mathematics Systems, vol. 507, pp. 189–198 (2001)
- [32] Ehrgott, M., Waters, C., Kasimbeyli, R., Ustun, O.: Multiobjective programming and multiattribute utility functions in Portfolio optimization. In: *INFOR: Information Systems and Operational Research*, 47, pp. 31–42 (2009)
- [33] Kasimbeyli, R.: A nonlinear cone separation theorem and scalarization in nonconvex vector optimization. *SIAM J. Optim.* 20, 1591–1619 (2010)
- [34] Rubinov, A.M., Gasimov, R.N.: Strictly increasing positively homogeneous functions with applications to exact penalization. *Optimization* 52, 1–28 (2003)
- [35] Kasimbeyli, R.: A conic scalarization method in multiobjective optimization. *J. Glob. Optim.* 56(2), 279–297 (2013)

- [36] Kasimbeyli, N. (2015). Existence and characterization theorems in nonconvex vector optimization. J. Glob. Optim.

Aabstract

The paper presents the analysis, characterizations and comparison on six commonly used scalarization methods in multiobjective optimization. The properties of these methods are investigated with respect to the basic characteristics such as ordering cone, convexity and boundedness, the ability of generating proper efficient solutions, the ability to consider reference points which is a choice of decision maker as a solution and weighting preferences of decision maker, the number of additional constraints and decision variables. The paper also presents new characteristics for these methods and relations between them. The main characteristics of these scalarization methods are illustrated a test example.

KEYWORDS : Conic scalarization method · Weighted sum method · ϵ -Constraint method · Benson's method · Weighted Chebyshev method · Pascoletti–Serafini method · Multiobjective optimization · Proper efficiency



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Thesis in Operations Research

Comparison of Some Scalarization Methods in Multiobjective Optimization

By: Roghaieh Estarami

Supervisor

Mehrdad Ghaznavi

Advisor

Somayeh Moghari

October 2021