

الحمد لله
الذي هدانا لهذا
الذي كنا لنهتدي لولا
هدايتنا



دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری آمار-احتمال

قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی

نگارنده: رضا قاسمی نجف آبادی

استادان راهنما

دکتر احمد نزاکتی
دکتر محمدرضا ربیعی

بهمن ۱۳۹۹

شماره: ۴۰۸-۲۱۲-۵

تاریخ: ۱۴۰۵/۲/۷

شماره:

تاریخ:

ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

پیوست شماره ۲

دانشکده: ریاضی

گروه: آمار

رساله دکتری: آقای رضا قاسمی نجف آبادی

تحت عنوان: قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی

در تاریخ ۱۳۹۹/۱۱/۲۱ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک رساله دکتری ارزیابی گردید و با

درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
-----	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر احمد نواکسی
-----	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر محمدرضا ربیعی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی: دکتر مهرداد غزنوی		نام و نام خانوادگی: دکتر نگار اقبال
			نام و نام خانوادگی: دکتر حامد احمدزاده
			نام و نام خانوادگی: دکتر محمد آرشی



تقدیم به
مولایم صاحب الزمان (عج)
که دعای خیر مادرشان، همیشه بدرقه راهم بوده است.

سپاس گزاری

به نام آفریدگار پاک که انسان را از خاک آفرید و به واسطه عقل بر تمام موجودات رحمان داد و آنگاه دانش را وسیله تکامل عقل قرار داد. بزرگ پروردگار را سپاس که به ما استعداد آموختن عطا کردی و برای آموختن معلم را آفریدی. بسی سزا است تا زبان به تقدیر از همه معلمان و اساتید خود بگشایم و خود را تا همیشه روزگار مدیون علم آموزی این عزیزان بدانم که اگر نبودند، امروز قادر نبودم تا لذت رسیدن به مقصد را لمس کنم. و سپاس ویژه خود را از صمیم قلب تقدیم اساتید بزرگوارم جناب آقایان دکتر احمد نزاکتی و دکتر محمدرضا ربیعی می دارم که صبورانه و دلسوزانه مرا تا سر منزل مقصود راهنمایی نمودند و همراهی ایشان مرا قوت قلب می بخشید. همچنین لازم است از اساتید عزیز جناب آقایان دکتر محمد آرشی و دکتر حامد احمدزاده و سرکار خانم دکتر نگار اقبال به پاس قبول زحمت داوری این رساله و بیان نکاتی ارزشمند پیرامون آن قدردانی نمایم.

بدون شک رو سفیدی امروزم را مدیون سفیدی موی و دستان پر مهر پدر و مادر عزیزم هستم که هر لحظه وجودم را از چشمه سار پر از عشق چشمانشان سیراب می کنم. پس خدایا توفیقم ده که هر لحظه شکر گزارشان باشم و ثانیه های عمرم را در عصای دست بودنشان بگذرانم.

و حال سپاس ویژه را تقدیم می کنم به همسر عزیز و همراه همیشگی روزهای سختم که با چشمان پر از مهرش در اوج ناامیدی مرا امید می بخشید و با قلبی آکنده از عشق و معرفت مرا تا رسیدن به اوج، بال پرواز بود. بار الهی مرا توان ده تا گوشه ای از مهربانی او را سپاس گزارم و این تلاش را تقدیم می دارم به ایشان و فرزند دلبندم، امید بخش جانم، که آسایش او آرامش من است.

تعهد نامه

اینجانب رضا قاسمی نجف آبادی دانشجوی دکتری رشته آمار علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی، تحت راهنمایی احمد نزاکی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

چکیده

در گذشته قانون قوی اعداد بزرگ و قضیه حد مرکزی برای مجموعه‌های فشرده و نیز متغیرهای تصادفی فازی مستقل و هم توزیع در فضای باناخ مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در سال‌های اخیر فضای متریک فازی و فضای نرم‌دار فازی معرفی شده است. وقتی عدم قطعیت فازی بیشتر از عدم قطعیت تصادفی باشد فضای متریک فازی مفیدتر از فضای متریک احتمالی می‌باشد. از این رو در این پژوهش به دنبال بررسی قضایای حدی در فضای نرم‌دار فازی در دو حالت کلی می‌باشیم. در حالت اول قانون اعداد بزرگ را برای مجموعه‌های تصادفی و مجموعه‌های تصادفی فشرده در فضای متریک فازی بررسی می‌کنیم سپس به بیان این قضیه در شرایطی که متغیرهای تصادفی ما فازی هستند می‌پردازیم. با توجه به کاربرد قانون قوی اعداد بزرگ در روش بازنمونه‌گیری بوت استرپ، بعنوان یک مثال کاربردی از قضایای قانون قوی اعداد بزرگ بیان شده برای مجموعه‌های تصادفی و متغیرهای تصادفی فازی در نمونه‌گیری بوت استرپ استفاده خواهد شد. همچنین بعنوان یک کاربرد دیگر، از متر فازی پیشنهادی و قانون قوی اعداد بزرگ در نمونه‌گیری بوت استرپ برای کاهش نویز در پردازش تصویر استفاده خواهیم نمود.

کلمات کلیدی: قضایای حدی، فضای متریک فازی، فضای نرم‌دار فازی، فضای باناخ فازی، بوت استرپ، پردازش تصویر

فهرست مطالب

س فهرست تصاویر

ف فهرست جداول

ق پیشگفتار

۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعاریف و مفاهیم آنالیز حقیقی

۱.۱.۱ تعاریف مقدماتی

۲.۱ مجموعه تصادفی و ویژگی‌های آن

۱.۲.۱ مجموعه تصادفی

۲.۲.۱ انتگرال توابع مجموعه مقدار

۳.۲.۱ امید ریاضی مجموعه تصادفی

۳.۱ تعاریف و مفاهیم فازی مورد استفاده

۱.۳.۱ متغیر تصادفی فازی

۲.۳.۱ امید ریاضی متغیر تصادفی فازی و خواص آن

۳.۳.۱ بررسی خواص امید ریاضی

۴.۳.۱ تعریف ساختاری متغیر تصادفی فازی

۵.۳.۱ مشخصه سازی متغیرهای تصادفی فازی

۶.۳.۱ مشخصه سازی متغیرهای تصادفی فازی به‌طور یکنواخت انتگرال پذیر

۳۱ کراندار

۲ فضای متریک فازی

۱.۲ فضای متریک احتمال

۲.۲ فضای متریک فازی کالوا و سیکالا

۳.۲ فضای متریک فازی کراموسیل و میشلک

۴.۲ فضای متریک فازی جورج و ورمانی

۴۴	۵.۲ کاربرد فضای متریک فازی
۴۴	۱.۵.۲ کاهش نویز تصویر با استفاده از رویکرد متر فازی
۴۶	۲.۵.۲ مثال کاربردی
۴۹	۶.۲ فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی
۵۳	۳ قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی ...
	۱.۳ قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی فشرده در فضای متریک فازی
۵۴	۱.۱.۳ قضیه نشان دادن رادسترم تعمیم یافته
۵۸	۲.۱.۳ تعمیم قضایای همگرایی مغلوب لبگ و شاپلی-فلکمن-استار
۶۰	۳.۱.۳ قانون قوی اعداد بزرگ
۶۲	۲.۳ قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی فشرده محدب ...
۶۵	۱.۲.۳ قضیه نشان دادن رادسترم تعمیم یافته
۶۸	۲.۲.۳ قضیه همگرایی مغلوب لبگ تعمیم یافته
۶۹	۳.۲.۳ قانون قوی اعداد بزرگ
۷۰	۳.۳ میانگین بوت استرپ در فضای متریک فازی
۷۲	۴.۳ بحث و نتیجه گیری
۷۵	
۷۷	۴ قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی
۷۸	۱.۴ مروری بر مفاهیم مقدماتی
۸۱	۱.۱.۴ فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی
۸۵	۲.۴ قضیه نشان دادن رادسترم تعمیم یافته
۸۶	۳.۴ تعمیم قضایای همگرایی مغلوب لبگ و شاپلی-فلکمن-استار
۸۹	۴.۴ قانون قوی اعداد بزرگ
۹۱	۵.۴ میانگین بوت استرپ در فضای متریک فازی
۹۵	۶.۴ بحث و نتیجه گیری
۹۷	۵ پردازش تصویر با استفاده از متر فازی
۹۸	۱.۵ تعاریف
۹۹	۱.۱.۵ مثال کاربردی
۱۰۱	۲.۵ ارائه یک روش برای محاسبه پیکسل ها با رنگ فازی
۱۰۲	۱.۲.۵ مثال کاربردی
۱۰۶	۲.۲.۵ مقایسه عملکرد الگوریتم های رفع نویز
	۳.۲.۵ افزایش دقت الگوریتم CFM' با استفاده از روش باز نمونه گیری
۱۰۷	بوت استرپ

۱۱۱ بحث و نتیجه گیری و پیشنهادات

۱۱۳ آشنایی با مفاهیم فازی

۱۱۳ ۱.آ مجموعه های فازی

۱۱۵ ۱.۱.آ α -برش

۱۱۵ ۲.۱.آ اصل توسیع

۱۱۷ ۳.۱.آ اعداد فازی

۱۱۸ ۴.۱.آ حساب اعداد فازی

۱۲۱ ب برخی مفاهیم و نتایج اساسی نظریه احتمال

۱۲۳ مراجع

فهرست تصاویر

۴۶	تصویر در مقیاس خاکستری و ماتریس مقادیر.	۱.۲
۴۶	همسایگی 3×3 عدد ۱۶۵.	۲.۲
۴۷	مقادیر ماتریس CFM .	۳.۲
۴۷	مقادیر ماتریس با وجود نویز.	۴.۲
۴۷	مقادیر ماتریس CFM .	۵.۲
۴۸	سی تی اسکن فرد مبتلا به ویروس کوید-۱۹.	۶.۲
۴۸	سی تی اسکن با وجود نویز.	۷.۲
۴۹	سی تی اسکن بعد از رفع نویز.	۸.۲
۷۴	رفتار M_{dH} وقتی $m(n) \rightarrow \infty$ و $t = 5$.	۱.۳
	رفتار M_{dH} وقتی $m(n) \rightarrow \infty$ برای مقادیر مختلف t ($t = 10, t = 20, t = 50$).	۲.۳
۷۵	$(50, t = 100)$.	
۹۴	رفتار M_{dH} وقتی $m(n) \rightarrow \infty$ و $t = 5$.	۱.۴
	رفتار M_{dH} وقتی $m(n) \rightarrow \infty$ برای مقادیر مختلف t ($t = 10, t = 20, t = 50$).	۲.۴
۹۵	$(50, t = 100)$.	
۱۰۰	همسایگی 3×3 عدد ۱۶۵.	۱.۵
۱۰۰	مقادیر ماتریس CFM' .	۲.۵
۱۰۰	مقادیر ماتریس با وجود نویز.	۳.۵
۱۰۱	مقادیر ماتریس CFM' .	۴.۵
۱۰۲	تصویر در مقیاس خاکستری و ماتریس مقادیر.	۵.۵
۱۰۲	پهنای چپ ماتریس فازی رنگ پیکسل ها.	۶.۵
۱۰۲	پهنای راست ماتریس فازی رنگ پیکسل ها.	۷.۵
۱۰۳	ماتریس رنگ پیکسل ها با نویز وارد شده.	۸.۵
۱۰۳	پهنای چپ ماتریس فازی رنگ پیکسل ها.	۹.۵
۱۰۳	پهنای راست ماتریس فازی رنگ پیکسل ها.	۱۰.۵

۱۰۴	۱۱.۵	ماتریس رفع نویز شده تصور.
۱۰۵	۱۲.۵	سی تی اسکن فرد مبتلا به ویروس کوید-۱۹
۱۰۶	۱۳.۵	سی تی اسکن با وجود نویز
۱۰۶	۱۴.۵	سی تی اسکن بعد از رفع نویز
۱۰۷	۱۵.۵	سی تی اسکن نویز ۰.۲
۱۰۸	۱۶.۵	سی تی اسکن بعد از رفع نویز
۱۱۷	۱.آ	نمودار تابع عضویت عدد فازی تقریباً صفر در مثال ۴.۱.آ

فهرست جداول

۱۰۶		مقایسه عملکرد الگوریتم های رفع نویز	۱.۵
۱۰۸		مقایسه عملکرد الگوریتم های رفع نویز	۲.۵

پیشگفتار

لزوم استفاده از قضایای حدی در مباحث پیشرفته آماری بر کسی پوشیده نیست و مطالعات زیادی در این زمینه صورت پذیرفته است. با معرفی نظریه مجموعه های فازی در سال ۱۹۶۵، محققین بسیاری تلاش خود را به استفاده از این مفاهیم در علوم مختلف، بخصوص آمار و احتمال معطوف کردند. استفاده از قضایای حدی نیز یکی از شاخه های مهم در استفاده از نظریه فازی در آمار و احتمال بود که مورد توجه پژوهشگران قرار گرفت. مطالعاتی که در این زمینه صورت گرفته با مقاله ی پوری و راسکو در [۶۰] برای مجموعه های تصادفی در فضای باناخ آغاز گردید (البته آرتستین^۱ و همکاران در [۷] و کریس^۲ در [۴۱] نیز مطالعاتی روی قانون قوی اعداد بزرگ در فضای p بعدی اقلیدسی انجام داده بودند). پوری و راسکو در [۶۲] تعریفی از متغیر تصادفی فازی ارائه کردند سپس با همکاری کلمت در [۳۹] قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیر تصادفی فازی را ارائه دادند. متغیرهای تصادفی فازی تحت متر هاسدورف تعمیم یافته d_∞ جداپذیر نمی باشد. از طرفی یکی از شرایط اساسی در قضیه قانون قوی اعداد بزرگ شرط جداپذیری است. همچنین همگرایی تحت متر d_∞ قوی تر از همگرایی تحت متر d_1 می باشد که مقالات قبل تحت این متر بیان و اثبات شدند. از این رو پروسکی و پوری در [۵۸] قانون قوی اعداد بزرگ را تحت متر d_∞ مورد مطالعه قرار دادند.

در سال ۱۹۹۸ با معرفی مجموعه های تصادفی محدب ساده توسط لویز [۴۷] یک رویکرد جدید برای بیان قضایای حدی آغاز گردید که در آن از قضایای نشاندن استفاده نمی شود. در سال ۱۹۹۹ کلوبی [۱۵] با استفاده از یک چارچوب از متغیرهای تصادفی فازی هم توزیع دو به دو مستقل قانون قوی را بیان و به کمک نتایج مطالعات لویز به اثبات قضیه پرداخت. مولچانو نیز در همان سال قانون قوی اعداد بزرگ را برای توابع نیم پیوسته بالایی با رویکردی ساده تر که استفاده از شرط انتگرال پذیری قوی را بکار می گرفت به اثبات قضیه قانون قوی پرداخت. شامو-لی [۴۴] در سال ۲۰۰۶ قانون قوی را برای متغیرهای تصادفی فازی مستقل و نه لزوما هم توزیع در یک فضای باناخ جداپذیر و یا یک فضای اقلیدسی بیان کرد. لی-گان و شامو-لی در [۳۰] قانون قوی را برای مجموع وزن دار از متغیرهای تصادفی مجموعه مقدار فازی بیان کردند که تعمیمی از مقاله شامو-لی در ۲۰۰۶ می باشد (که البته ابتدا مقاله ۲۰۰۶ آنها مورد مطالعه بوده است ولی با تاخیر به چاپ رسیده است). با استفاده از رویکرد مشابه

^۱Artstein

^۲kruse

مقالاتی در سال‌های بعد توسط کی- فوو همکاران [۲۶] و جو- کیم [۳۸] به چاپ رسیده است. در سال ۲۰۱۴ احمد زاده و همکاران قضایای حدی را برای متغیرهای تصادفی فاز [۳] بیان کردند. همچنین وی و همکاران در ۲۰۱۶ این قضایا را برای متغیر تصادفی فاز با وابستگی منفی [۴] مورد مطالعه قرار داد.

ما در این رساله با رویکردی متفاوت به بیان قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی فاز می‌خواهیم پرداخت. در حقیقت نوآوری‌های این پژوهش عبارتند از

- (۱) معرفی فضای متریک فاز برای متغیرهای تصادفی فاز.

- (۲) بیان قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه‌های تصادفی تحت متر فاز.

با توجه به اینکه متغیر تصادفی فاز (تعریف پوری و رالسکو) بر پایه مجموعه‌های تصادفی بیان شده است لذا ابتدا به بیان قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه‌های تصادفی پرداختیم. ابزار لازم برای رسیدن به این هدف تعمیم قضیه رادستریم، قضیه همگرایی مغلوب لبگ و قضیه شاپلی- فلکمن در فضای متریک فاز بود.

- (۳) بیان قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی فاز تحت متر فاز.
- (۴) استفاده کاربردی از قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه‌های تصادفی و متغیر تصادفی فاز در میانگین بوت استرپ.

- (۵) استفاده از متر فاز معرفی شده در این رساله در پردازش تصویر.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در این فصل به تعاریف و مفاهیم مورد استفاده در این پژوهش خواهیم پرداخت. در بخش اول مفاهیم آنالیز حقیقی را که از آن‌ها استفاده خواهیم نمود، بیان می‌کنیم. در بخش دوم به تعریف مجموعه تصادفی و ویژگی‌های آن خواهیم پرداخت. در بخش سوم مفاهیم فازی که در فصل سوم مورد استفاده قرار خواهند گرفت بیان می‌شود.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم آنالیز حقیقی

در این قسمت با برخی از تعاریف و مفاهیم اساسی آنالیز حقیقی که در ادامه فصل به آن‌ها نیاز داریم و تعاریف فازی آن‌ها را بیان و مورد استفاده قرار می‌دهیم، آشنا خواهیم شد. تعاریف بیان شده بر اساس کتاب آنالیز حقیقی رویدن^۱ [۶۶] می‌باشد.

۱.۱.۱ تعاریف مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای دلخواه و ناتهی و $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد که در اصول زیر صدق کند:

$$۱. \forall x, y \in X, d(x, y) \geq ۰$$

^۱Royden

$$x = y \iff d(x, y) = 0. \quad ۲.$$

$$\forall x, y \in X, \quad d(x, y) = d(y, x). \quad ۳.$$

$$\forall x, y, z \in X, \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y). \quad ۴.$$

در این صورت زوج (X, d) را فضای متریک، تابع d را متر یا تابع فاصله و $d(x, y)$ را فاصله x و y با این متر گویند.

از مهمترین فضاهای متریک می‌توان به فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ ، بویژه $\mathbb{R}^1$ اشاره کرد. فاصله در $\mathbb{R}^n$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d(x, y) = |x - y|, \quad (x, y \in \mathbb{R}^n).$$

یکی از مهمترین مترها یا توابع فاصله‌ای که در فصل‌های بعد از آن استفاده خواهیم کرد، متر هاسدورف^۲ است که می‌توان فاصله بین دو مجموعه را بوسیله آن محاسبه نمود.

تعریف ۲.۱.۱. اگر A و B دو مجموعه از X باشند آنگاه فاصله هاسدورف به صورت زیر تعیین می‌شود

$$d(A, B) = \max \{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b), \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} d(a, b) \}, \quad A, B \in X.$$

در ادامه به برخی از خواص متر هاسدورف اشاره می‌کنیم. فرض کنید A, B, C, D متعلق به مجموعه‌ای از زیر مجموعه‌های محدب و فشرده روی $\mathbb{R}^n$ باشند. در این صورت خواص زیر برقرارند:

$$d(\alpha A, \alpha B) = |\alpha| d(A, B). \quad ۱.$$

$$d(A + C, B + D) \leq d(A, B) + d(C, D). \quad ۲.$$

$$|d(A, C) - d(B, C)| \leq d(A, B). \quad ۳.$$

$$d(B, D) \leq d(A, C) \quad \text{اگر } A \subseteq B, C \subseteq D. \quad ۴.$$

۵. اگر مجموعه‌های A, B در $\mathbb{R}$ به ترتیب به صورت $[a, b]$ و $[c, d]$ باشند، آنگاه متر هاسدورف به صورت زیر است:

$$d(A, B) = \max\{|a - c|, |b - d|\}$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید (X, d) فضای متریک باشد. به ازای هر $x \in X$ و $r > 0$ ، مجموعه

$$\{y \in X | d(x, y) < r\}$$

را گوی باز به مرکز x و شعاع r می‌نامند و با نماد $B_x(r)$ نشان می‌دهند.

^۲Hausdorff

تعریف ۴.۱.۱. یک همسایگی نقطه a مجموعه ای است مثل $B_a(r)$ شامل تمام نقاطی چون a' که $d(a, a') < r$ می باشد.

تعریف ۵.۱.۱. نقطه a یک نقطه حدی مجموعه A در X است هرگاه هر همسایگی a شامل نقطه ای چون $a' \in X$ غیر از a باشد.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید (X, d) فضای متریک و $A \subset X$ ، در این صورت $x \in X$ را بست A گویند هرگاه اشتراک هر گوی باز به مرکز x با A ناتهی باشد. به عبارت دیگر به ازای هر $B_x(r) \cap A \neq \emptyset, r > 0$.

مجموعه نقاط بست A را با $\bar{A}$ (یا $cl(A)$) نمایش داده و آن را بستار A می نامند. به عنوان تعریفی دیگر از بستار می توان گفت با فرض اینکه (X, d) فضای متریک و $A \subset X$ و A' مجموعه تمام نقاط حدی A در X باشد، آنگاه بست A عبارت خواهد بود از مجموعه $\bar{A} = A \cup A'$.

تعریف ۷.۱.۱. در فضای متریک (X, d) ، A را چگال گویند هرگاه $cl(A) = X$.

تعریف ۸.۱.۱. فضای متریک (X, d) را جداپذیر گویند هرگاه X شامل مجموعه ای شمارا و چگال باشد. به عبارت دیگر می توان گفت فضای متریک (X, d) را جداپذیر نامیم هرگاه زیر مجموعه شمارایی چون D از X وجود داشته باشد به طوری که $\bar{D} = X$.

مثال ۱.۱.۱. فضای متریک $(\mathbb{R}, |.|)$ یک فضای متریک جداپذیر است زیرا مجموعه اعداد گویا Q یک مجموعه شمارا است و $\bar{Q} = \mathbb{R}$.

تعریف ۹.۱.۱. دنباله x_n در فضای متریک (X, d) به $l \in X$ همگراست هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند n_0 وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $n > n_0$ ، $d(x_n, l) < \varepsilon$.

تعریف ۱۰.۱.۱. دنباله x_n در فضای متریک (X, d) را دنباله کوشی گویند هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی طبیعی مانند n_0 وجود داشته باشد به قسمی که به ازای هر $n, m > n_0$ ، $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

مثال ۲.۱.۱. در فضای متریک $(\mathbb{R}, |.|)$ دنباله $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ کوشی است.

قضیه ۱.۱.۱. در فضای متریک (X, d)

۱. اگر دنباله ای همگرا باشد در شرط کوشی صدق می کند.

۲. اگر دنباله ای در شرط کوشی صدق کند و زیر دنباله ای همگرا داشته باشد، دنباله ای همگراست.

تعریف ۱۱.۱.۱. فضای متریک (X, d) را کامل گویند هرگاه هر دنباله کوشی در آن حد داشته باشد.

مثال ۳.۱.۱. فضای متریک $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ یک فضای متریک کامل است.

مثال ۴.۱.۱. فضای متریک $([0, 1], |\cdot|)$ کامل نیست زیرا یک دنباله کوشی مانند $\{\frac{1}{n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ وجود دارد به طوری که به هیچ نقطه‌ای در $[0, 1]$ همگرا نیست.

در ادامه این بخش به معرفی گروه، میدان، σ -میدان (سیگما میدان) و فضای توپولوژیک که در این فصل و فصل‌های بعد از آن‌ها استفاده خواهیم کرد می‌پردازیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. زوج $(S, *)$ شامل مجموعه ناتهی S و عمل دوتایی $*$ روی S را نیم گروه گوئیم هرگاه نسبت به عمل $*$ بسته و

$$(a * b) * c = a * (b * c) \quad , \quad \forall a, b, c \in S.$$

تعریف ۱۳.۱.۱. یک نیم گروه را مونوئید گوئیم هرگاه $e \in S$ وجود داشته باشد به طوری که

$$a * e = a = e * a \quad , \quad \forall a \in S.$$

تعریف ۱۴.۱.۱. یک مونوئید را گروه گوئیم هرگاه هر $a \in S$ دارای معکوس باشد یعنی $a^{-1} \in S$ به طوری که

$$a * a^{-1} = e = a^{-1} * a.$$

به عبارت ساده تر، گروه یک ساختار جبری شامل یک مجموعه به همراه یک عمل دوتایی، مانند جمع یا ضرب، است که بر روی اعضای گروه عمل می‌کند. برای اینکه ساختار تعریف شده یک گروه نامیده شود، عمل دوتایی باید شرایط زیر را داشته باشد:

۱. بسته باشد.

۲. شرکت پذیر باشد.

۳. دارای عضو خنثی باشد.

۴. دارای وارون باشد.

اگر عمل دوتایی علاوه بر خواص بالا دارای خاصیت جابه جایی باشد، به آن گروه جابه جایی یا گروه آبدی می‌گویند.

تعریف ۱۵.۱.۱. یک میدان، مجموعه‌ای است مانند F که حداقل شامل دو عضو می‌باشد و عملگرهای دوتایی $+$ و $*$ برای هر زوج آن تعریف می‌شود و برای هر $x, y, z \in F$ داریم:

$$1. \quad x + y = y + x$$

$$2. \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

۳. وجود دارد $\circ \in F$ به طوری که $x + \circ = x$

۴. برای هر $x \in F$ وجود دارد $-x \in F$ به طوری که $x + (-x) = \circ$

۵. $x.y = y.x$ و $(x.y).z = x.(y.z)$

۶. وجود دارد $1 \in F$ به طوری که $x.1 = x$

۷. اگر $x \neq \circ$ وجود دارد $x^{-1} \in F$ به طوری که $x.x^{-1} = 1$

تعریف ۱۶.۱.۱. مجموعه ناتهی X را فضای خطی (فضای برداری) روی میدان F گوئیم هرگاه اعمال $+$ و $\cdot$ که به ترتیب جمع و ضرب اسکالر نامیده می‌شوند با شرایط زیر موجود باشند: فرض کنید x, y, z اعضای دلخواه از X باشند و α و β اعضای دلخواه از F ، در این صورت الف) دو تایی $(+, \cdot)$ گروه آبلی (جابجایی) باشد. ب) ضرب اسکالر با هر عضو میدان F مانند α (که آن را اسکالر می‌نامیم) و هر بردار x عضو X ، عضوی با نماد $\alpha.x$ (یا αx) در X نسبت می‌دهد به قسمی که

$$1. \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$2. x + (y + z) = (x + y) + z$$

۳. وجود دارد $\circ \in X$ به طوری که $x + \circ = x$

۴. برای هر $x \in X$ وجود دارد $-x \in X$ به طوری که $x + (-x) = \circ$

$$5. \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$6. (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$7. 1.x = x$$

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید X فضای خطی (برداري) روی $\mathbb{R}$ و $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی باشد به طوری که

$$1. \forall x \in X \implies \varphi(x) \geq 0$$

$$2. x = \circ \implies \varphi(x) = 0$$

$$3. \forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R} \implies \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$$

$$4. \forall x, y \in X \implies \varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$$

در این صورت تابع φ یک نرم در X نامیده می‌شود و برای سهولت با نماد $\|.\|$ نشان داده می‌شود.

اگر در فضای خطی نرم تعریف شود آن را فضای خطی نرم‌دار گویند. در آنالیز، فضاهای برداری را ضمن در نظر گرفتن ساختار جبری موجود بر آن‌ها از نظر توپولوژیکی مورد مطالعه قرار می‌دهند. بهترین مطالعه زمانی است که به هر بردار عددی حقیقی اختصاص داده شود که نرم آن نام دارد. حال اگر متریک القا شده توسط یک نرم را در یک فضای برداری در نظر بگیریم اگر فضای برداری حاصل از این نرم کامل باشد (یعنی هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد) این فضا را فضای باناخ می‌نامند. فضاهای باناخ به فضاهای برداری نرم‌دار کامل گفته می‌شود.

تعریف ۱۸.۱.۱. اگر فضای نرم‌دار X کامل باشد، X را فضای باناخ گوئیم.

قضیه نشانیدن رادسترم^۳ یکی از مهمترین ابزار در اثبات قضیه قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه‌های تصادفی می‌باشد که برای بیان و آشنایی با آن نیازمند دو مفهوم مخروط خطی و مخروط محدب^۴ خطی خواهیم بود که در ادامه به تعریف آن‌ها خواهیم پرداخت.

تعریف ۱۹.۱.۱. زیر مجموعه C از فضای برداری V را مخروط (مخروط خطی) می‌نامند اگر به ازای هر $x \in C$ و مقدار اسکالر نامنفی a ، حاصلضرب ax نیز عضو C باشد.

تعریف ۲۰.۱.۱. مخروط C را محدب گویند هرگاه به ازای مقادیر اسکالر نامنفی a و b و برای هر $x, y \in C$ ، ترکیب خطی $ax + by$ نیز عضو C باشد.

در این قسمت تعاریف σ -میدان، تابع اندازه و توپولوژی را یادآور خواهیم شد.

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنید Ω یک مجموعه و $\mathcal{F}$ یک مجموعه ناتهی از زیر مجموعه‌های Ω باشد. $\mathcal{F}$ را یک σ -میدان گویند هرگاه

$$1. \quad A \in \mathcal{F} \text{ آنگاه } A^c \in \mathcal{F}$$

$$2. \quad \text{اگر } A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \text{ آنگاه } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که $\Omega, \emptyset \in \mathcal{F}$ و $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

تعریف ۲۲.۱.۱. تابع $\mu : A \rightarrow [0, \infty)$ یک اندازه رو σ -میدان $\mathcal{F}$ از زیر مجموعه‌های Ω است هرگاه

$$1. \quad \text{برای هر } A \in \mathcal{F}, \mu(A) \geq 0.$$

$$2. \quad A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \text{ و } A_i \text{ ها مجزا باشند}$$

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

^۳ Rådström

^۴ Convex cone

به هر تابعی که روی مجموعه ها تعریف می شود تابع مجموعه ای گوییم. از تعریف اندازه معلوم می شود که اندازه تابعی مجموعه ای است. اگر تابع مجموعه ای چنان باشد که مقدار آن روی اجتماع شمارایی از مجموعه ها - های دو به دو جدا از هم برابر باشد با مجموع مقادیر آن روی تک تک مجموعه ها، آنگاه گوییم یک تابع جمعی است. با این تعریف هر اندازه یک تابع جمعی روی $\mathcal{F}$ است.

تعریف ۲۳.۱.۱. اگر $\mathcal{F}$ یک σ -میدان از زیر مجموعه های Ω باشد آنگاه $(\Omega, \mathcal{F})$ را یک فضای اندازه پذیر و $A \in \mathcal{F}$ را اندازه پذیر گویند. همچنین اگر μ یک اندازه باشد که روی $(\Omega, \mathcal{F})$ تعریف شده باشد آنگاه سه تایی $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ را فضای اندازه گویند.

تعریف ۲۴.۱.۱. یک اندازه μ ، σ -متناهی نامیده می شود هرگاه مجموعه های $A_i \in \mathcal{F}$ ، $i = 1, 2, \dots$ موجود باشند به گونه ای که

$$1. \Omega = \bigcup_i A_i$$

$$2. \mu(A_i) < \infty$$

تعریف ۲۵.۱.۱. فرض کنید Ω مجموعه ای ناتهی باشد. خانواده τ از زیر مجموعه های Ω را توپولوژی روی Ω گویند هرگاه

$$1. \Omega, \emptyset \in \tau$$

$$2. \tau \text{ تحت اجتماع دلخواه از اعضای خود بسته باشد.}$$

$$3. \tau \text{ تحت اشتراک متناهی از اعضای خود بسته باشد.}$$

یکی از قضایای مورد استفاده در آینده پژوهش قضیه نشانیدن هارمندر می باشد که برای معرفی این قضیه نیازمند آشنایی با فضای توپولوژیک ضعیف ستاره می باشیم که در ادامه به معرفی آن می پردازیم.

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض Ω یک مجموعه و F خانواده ای از توابع از Ω به توی فضای توپولوژیک τ باشد. توپولوژی ضعیف بر Ω که توسط F القا می شود کوچکترین توپولوژی بر Ω است که هر عضو Ω را پیوسته می سازد.

برای تعریف فضای توپولوژیک ضعیف ستاره ابتدا به تعریف تابعک و دوگان یک مجموعه می پردازیم سپس به کمک آن ها فضای توپولوژیک ضعیف ستاره را معرفی می کنیم.

تعریف ۲۷.۱.۱. نگاشتی از یک فضای برداری به یک میدان اسکالر را تابعک گویند.

تعریف ۲۸.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرم دار باشد. مجموعه تمام تابعک های خطی و کراندار روی X را با X^* نشان می دهند و آن را دوگان X می نامند.

تعریف ۲۹.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار و X^* دوگان آن باشد. در این صورت ضعیف ترین توپولوژی روی X^* را توپولوژی ضعیف ستاره روی X^* گویند و آن را با $\sigma(X^*, X)$ نشان می‌دهند.

یکی دیگر از مفاهیمی که در تعریف متغیر تصادفی فازی در این فصل مورد استفاده قرار می‌گیرد تابع نیم پیوسته بالایی می‌باشد.

تعریف ۳۰.۱.۱. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $x_0 \in \mathbb{R}$. تابع f را نیم پیوسته بالایی^۵ در نقطه x_0 گویند هرگاه

$$f(x_0) \geq \limsup_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

و نیم پیوسته پایینی^۶ در نقطه x_0 گویند هرگاه

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

مثال ۵.۱.۱. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و داشته باشیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\frac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$$

در این صورت f نیم پیوسته بالایی است. ملاحظه می‌شود که اگر $x_t \rightarrow 0$ آنگاه $f(x_t) \rightarrow -\infty < 0 = f(0)$.

تعریف ۳۱.۱.۱. فرض کنید X و Y فضاهای متریک با مترهای d_X و d_Y باشند. یک تابع $f: X \rightarrow Y$ در صورتی ایزومتري تلقی می‌شود اگر برای هر $a, b \in X$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$d_Y(f(a), f(b)) = d_X(a, b).$$

با توجه به اینکه امید ریاضی مجموعه‌های تصادفی و متغیرهای تصادفی فازی به کمک انتگرال از مجموعه‌ها به دست می‌آید، در اینجا با انتگرال بوخنر^۷ که یک تعمیم از خانواده انتگرال لبگ با مقادیر برداری است آشنا خواهیم شد. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه‌پذیر σ -متناهی است.

تعریف ۳۲.۱.۱. [۵۳] تابع $f: \Omega \rightarrow E$ به‌طور قوی μ -اندازه‌پذیر است اگر دنباله‌ای از توابع ساده f_n همگرا به f ، $a.e$ وجود داشته باشد.

تعریف ۳۳.۱.۱. [۵۳] یک تابع $f: \Omega \rightarrow E$ انتگرال‌پذیر بوخنر است اگر دنباله‌ای از توابع ساده $f_n: \Omega \rightarrow E$ وجود داشته باشد به طوری که تقریباً مطمئن $(a.e)$

^۵Upper semicontinuous function ^۶Lower semicontinuous function ^۷bochner

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad ۱.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \|f_n - f\| d\mu = 0 \quad ۲.$$

برای هر تابع ساده $f = \sum_{n=1}^N I_{A_n} x_n$ داریم:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \sum_{n=1}^N \mu(A_n) x_n$$

که در آن I_{A_n} تابع مشخصه روی زیرمجموعه‌های A_n از Ω برای $n = 1, 2, \dots, N$ است.

۲.۱ مجموعه تصادفی و ویژگی‌های آن

ایده مجموعه‌های تصادفی از گذشته مورد توجه بوده است. به نظر می‌رسد که در سال ۱۹۴۴ روبین^۸ [۶۵] برای اولین بار مفهوم مجموعه‌های تصادفی را به صورت فرمول ریاضی بیان کرده و کاربردهای اولیه او رابطه بین مجموعه‌های تصادفی و احتمال‌های هندسی را مشخص نموده است. بعدها کندال^۹ [۳۷] مادرن^{۱۰} [۵۰] نظریه جامع مجموعه‌های تصادفی را به رشته تحریر درآورده اند که تا حد زیادی تحت تاثیر احتمال هندسی قرار داشته است. در ادامه این بخش به معرفی مجموعه تصادفی و برخی ویژگی‌های آن مانند هم توزیعی، استقلال و مقدار امید ریاضی خواهیم پرداخت.

۱.۲.۱ مجموعه تصادفی

تعریف ۱.۲.۱ [۵۳] فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ فضای احتمال و (E, ε) یک فضای اندازه‌پذیر باشد. یک عنصر تصادفی با مقادیر در E تابعی است به صورت $X: \Omega \rightarrow E$ که $\mathcal{A} - \varepsilon$ اندازه‌پذیر می‌باشد. گاهی اوقات عناصر تصادفی با مقادیر در E را متغیر تصادفی E -مقدار می‌گویند.

توجه کنید که اگر $(E, \varepsilon) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ که در آن $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی و $\mathcal{B}(\mathbb{R}), \sigma$ -میدان بورل باشد آنگاه تعریف عناصر تصادفی همان تعریف متغیر تصادفی کلاسیک خواهد بود.

از آنجایی که تعریف متغیر تصادفی فازی ارائه شده توسط پوری و رالسکو که در بخش بعد معرفی خواهد شد، تعمیمی از مجموعه تصادفی می‌باشد، لذا در این بخش به‌طور مختصر به تعریف مجموعه تصادفی خواهیم پرداخت.

فرض کنید E یک فضای باناخ با نرم $\|\cdot\|$ و coK مجموعه‌های فشرد و محدب E و K تمام زیر مجموعه‌های فشرد E باشد. برای هر $A_1, A_2 \in K$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ جمع مینکوفسکی و ضرب اسکالر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_1 + A_2 = \{a_1 + a_2 : a_i \in A_i, i = 1, 2\}$$

^۸Robbins

^۹Kendall

^{۱۰}Matheron

$$\lambda A_1 = \lambda a_1, a_1 \in A_1.$$

باید توجه داشت که هیچ کدام از مجموعه‌های K و coK فضای برداری نیستند حتی اگر $E = \mathbb{R}$. زیرا مثلاً $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = -1$ و $A = [0, 1]$ باشد آنگاه:

$$0 = 0A = (\lambda_1 + \lambda_2)A \neq \lambda_1 A + \lambda_2 A = [0, 1] + [-1, 0] = [-1, 1].$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فضای احتمال است. تابع $X : \Omega \rightarrow K$ اندازه‌پذیر بورل با متر d (متر هاسدورف) را یک مجموعه تصادفی در E گوییم یعنی برای هر مجموعه بورل $B \in \mathcal{B}(K)$ و $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ که در آن σ -میدان تولید شده به وسیله متر هاسدورف از زیر مجموعه‌های K است. اگر $X : \Omega \rightarrow coK \subset K$ باشد آنگاه X را مجموعه تصادفی در coK گوییم.

مثال ۱.۲.۱. یک عنصر تصادفی یک تابع اندازه‌پذیر بورل از $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ به توی فضای باناخ E است. مثلاً $X(\omega)$ یک عضو E است و یکتایی‌های $\{X(\omega)\}$ مجموعه‌های فشرده محدب در E هستند. بنابراین $X : \Omega \rightarrow E$ را می‌توان یک مجموعه تصادفی در coK یا K در نظر گرفت.

پس یک مجموعه تصادفی تعمیمی از یک عنصر تصادفی است که خود تعمیمی از یک متغیر تصادفی می‌باشد. بدیهی است که متغیرهای تصادفی و بردارهای تصادفی به عنوان حالت‌های خاص از مجموعه‌های تصادفی فشرده هستند ($E = \mathbb{R}$). پس طبیعی است که خواص معمول متغیرهای تصادفی و عناصر تصادفی را به مجموعه‌های تصادفی تعمیم دهیم. فرض کنید E فضای باناخ و $\{X_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های تصادفی در K باشد به قسمی که

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$$

آنگاه X یک مجموعه تصادفی است.

بیانی دیگر از تعریف مجموعه‌های تصادفی به صورت زیر می‌باشد. فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ فضای احتمال و $\mathcal{L}$ رده‌ای از زیر مجموعه‌های بسته در فضای توپولوژیک Z روی Ω باشد.

تعریف ۳.۲.۱. [۵۳] نگاشت $X : \Omega \rightarrow \mathcal{L}$ را یک مجموعه بسته تصادفی یا به طور خلاصه مجموعه تصادفی گوییم اگر برای هر مجموعه فشرده K در فضای توپولوژیک Z

$$\{\omega : X \cap K \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}$$

به عبارت دیگر $X : \Omega \rightarrow \mathcal{L}$ یعنی مقادیر X مجموعه‌هایی فشرده از $\mathcal{L}$ هستند.

مثال ۲.۲.۱. الف) فرض کنید ξ یک متغیر تصادفی باشد آنگاه $X = (-\infty, \xi]$ یک مجموعه بسته تصادفی روی $\mathbb{R}$ است.

ب) اگر $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ یک بردار تصادفی p بعدی از $\mathbb{R}^p$ باشد آنگاه

$$X = (-\infty, \xi_1] \times \dots \times (-\infty, \xi_p]$$

یک مجموعه بسته تصادفی در $\mathbb{R}^p$ خواهد بود.
(ج) اگر ξ_1 و ξ_2 و ξ_3 سه بردار تصادفی در $\mathbb{R}^p$ باشند آنگاه مثلث ایجاد شده بوسیله ξ_1 و ξ_2 و ξ_3 یک مجموعه تصادفی است.

نکته: یک مجموعه تصادفی یک عنصر مجموعه -مقدار است.

لم ۱.۲.۱. [۱] اگر E فضای باناخ جداپذیر باشد آنگاه coK و K جداپذیراند.

لم ۲.۲.۱. [۱] اگر X و Y دو مجموعه تصادفی در K باشند آنگاه $d(X, Y)$ یک متغیر تصادفی است اگر E جداپذیر باشد.

در ادامه با مجموعه‌های تصادفی هم توزیع و مستقل و نیز شرط انتگرال پذیری آن‌ها آشنا خواهیم شد.

تعریف ۴.۲.۱. [۱] مجموعه‌های تصادفی X و Y را هم توزیع گوییم اگر برای هر $B \in \mathcal{B}(E)$ داشته باشیم:

$$P(X \in B) = P(Y \in B)$$

مثال ۳.۲.۱. فرض کنید X و Y دو مجموعه تصادفی باشند. هم توزیعی این دو مجموعه تصادفی را بررسی می‌کنیم.

$$X(\omega) = \begin{cases} \{1, 3\} & \omega = T \\ \{2, 4\} & \omega = H \end{cases}$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} \{2, 4\} & \omega = T \\ \{1, 3\} & \omega = H \end{cases}$$

با معرفی $\Omega = \{T, H\}$ و $E = \{1, 2, 3, 4\}$ سیگما میدان روی Ω و E به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{T\}, \{H\}\}$$

$$\mathcal{B}(E) = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$$

ملاحظه می‌شود که

$$X : \Omega \rightarrow E$$

و

$$Y : \Omega \rightarrow E$$

برای بررسی هم توزیعی با فرض $B = \{1, 3\}$ باید نشان دهیم که

$$P(X(\omega) \in B) = P(Y(\omega) \in B)$$

ملاحظه می‌شود که

$$P(X(\omega) \in B) = P(X(\omega) = \{1, 3\}) = P(X^{-1}(\{1, 3\}) = \{T\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{4}$$

و

$$P(Y(\omega) \in B) = P(Y(\omega) = \{1, 3\}) = P(Y^{-1}(\{1, 3\}) = \{H\}) = P(\{H\}) = \frac{1}{4}$$

و به‌طریق مشابه برای سایر B های عضو $\mathcal{B}(E)$ بررسی می‌کنیم و اگر برای همه آن‌ها $P(X(\omega) \in B) = P(Y(\omega) \in B)$ باشد گوییم هم توزیع هستند.

تعریف ۵.۲.۱. [۱] تعداد متناهی از مجموعه‌های تصادفی $\{X_1, \dots, X_n\}$ را در K مستقل گوییم اگر برای هر $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(K)$ داشته باشیم:

$$P(X_1 \in B_1, \dots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \dots P(X_n \in B_n)$$

مثال ۴.۲.۱. فرض کنید سکه و تاسی را بطور مستقل پرتاب می‌کنیم. اگر دو مجموعه تصادفی X و Y به‌صورت زیر باشند به‌سادگی می‌توان نشان داد که این دو مجموعه تصادفی مستقل هستند.

$$X(\omega) = \begin{cases} \{1, 3\} & \omega = T \\ \{2, 4\} & \omega = H \end{cases}$$

$$Y(\omega) = \begin{cases} \{\circ, 5\} & \omega = \{2, 4, 6\} \\ \{6, 1\circ\} & \omega = \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

می‌دانیم که X و Y توابعی به‌صورت زیر هستند:

$$X : \Omega_X \rightarrow E_X$$

و

$$Y : \Omega_Y \rightarrow E_Y$$

که در آن

$$\Omega_X = \{T, H\}, E_X = \{1, 2, 3, 4\}$$

و

$$\Omega_Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, E_Y = \{\circ, 5, 6, 1\circ\}$$

سیگما میدان‌ها روی مجموعه‌های Ω و E به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{A}_X = \{\emptyset, \Omega_X, \{T\}, \{H\}\}$$

$$\mathcal{B}(E_X) = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$$

$$\mathcal{A}_Y = \{\emptyset, \Omega_Y, \{۲, ۴, ۶\}, \{۱, ۳, ۵\}\}$$

$$\mathcal{B}(E_Y) = \{\emptyset, \{\circ, ۵, ۶, ۱\circ\}, \{\circ, ۵\}, \{۶, ۱\circ\}\}$$

با معرفی $E = \{\circ, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۱\circ\}$ سیگما میدان بورل روی E به صورت زیر می باشد:

$$\mathcal{B}(E) = \{\emptyset, E, \{۱, ۳\}, \{۲, ۴\}, \{\circ, ۵\}, \dots\}$$

حال بنابر تعریف گوییم X و Y مستقل هستند اگر به ازای هر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(E)$

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1).P(Y \in B_2)$$

به عنوان یک نمونه فرض کنید که

$$B_1 = \{۱, ۳\}, B_2 = \{۶, ۱\circ\}$$

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in \{۱, ۳\}, Y \in \{۶, ۱\circ\})$$

$$= P(X^{-1}(\{۱, ۳\}) = \{T\}, Y^{-1}(\{۶, ۱\circ\}) = \{۱, ۳, ۵\})$$

$$= P(\{T\}, \{۱, ۳, ۵\}) = P(\{T\}).P(\{۱, ۳, ۵\})$$

$$= P(X^{-1}(\{۱, ۳\}) = \{T\}).P(Y^{-1}(\{۶, ۱\circ\}) = \{۱, ۳, ۵\})$$

$$= P(X \in \{۱, ۳\}).P(Y \in \{۶, ۱\circ\}) = P(X \in B_1).P(Y \in B_2)$$

و لذا به کمک استقلال پیشامدها استقلال مجموعه‌های تصادفی X و Y به ازای B_1 و B_2 نشان داده شد و حال باید به ازای همه B_1 و B_2 بررسی شود.

نتیجه ۱.۲.۱. [۱] اگر $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های تصادفی مستقل و $\{T_n, n \geq 1\}$ دنباله‌ای از توابع اندازه‌پذیر بورل از K به فضای تصادفی M باشد آنگاه $\{T(X_n), n \geq 1\}$ دنباله‌ای از عناصر تصادفی مستقل در M است.

تعریف ۶.۲.۱. [۵۳] فرض کنید X یک مجموعه بسته تصادفی در فضای جداپذیر باناخ E باشد. گوییم X به طور انتگرال‌پذیر کراندار است اگر

$$\|X\| = \sup \{\|x\| : x \in X\}$$

دارای امید متناهی باشد یعنی

$$E \|X\| < \infty.$$

۲.۲.۱ انتگرال توابع مجموعه مقدار

در این بخش فرض می‌کنیم $(\Omega, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر و $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فضای احتمال باشد. فرض کنید $F : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ یک تابع مجموعه مقدار باشد. مجموعه $S(F)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(F) = \{f \in L^1(P) : f(\omega) \in F(\omega), a.e\}$$

که در آن $L^1(P)$ فضای تمام توابع P -انتگرال‌پذیر $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ است.

گزاره ۱.۲.۱. مجموعه $S(F)$ زیر مجموعه بسته $L^1(P)$ است.

تعریف ۷.۲.۱. [۱۰] فرض کنید $F : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ یک تابع مجموعه مقدار باشد. انتگرال اومان^{۱۱} تابع F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int F dP = \left\{ \int f dP; f \in S(F) \right\}. \quad (2.1.1)$$

مثال ۵.۲.۱. [۲] فرض کنید $\Omega = \{T, H\}$ و $P(T) = P(H) = \frac{1}{2}$. با فرض اینکه تابع مجموعه مقدار $F : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف شود:

$$F(\omega) = \begin{cases} \{1, 3\} & \omega = T \\ \{2, 4\} & \omega = H \end{cases}$$

در این صورت $S(F)$ دارای چهار عضویت است زیرا: اگر $\omega = T$ و $f(\omega) = 1$ آنگاه برای $\omega = H$ دو حالت داریم: $f(\omega) = 2$ یا $f(\omega) = 4$. از طرف دیگر اگر $\omega = T$ و $f(\omega) = 3$ آنگاه برای $\omega = H$ دو حالت $f(\omega) = 2$ و $f(\omega) = 4$ را داریم. بنابراین اگر $\omega = T$ آنگاه

$$f_1(\omega) = f_2(\omega) = 1, f_3(\omega) = f_4(\omega) = 3$$

اگر $\omega = H$ آنگاه

$$f_1(\omega) = f_3(\omega) = 2, f_2(\omega) = f_4(\omega) = 4$$

در این صورت خواهیم داشت

$$\int_{\Omega} f_1(\omega) dP = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\int_{\Omega} f_2(\omega) dP = \frac{5}{2}, \int_{\Omega} f_3(\omega) dP = 3, \int_{\Omega} f_4(\omega) dP = \frac{7}{2}$$

پس داریم

$$\int F dP = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2} \right\}.$$

^{۱۱} Aumann

لازم است توجه داشت که انتگرال اومان یک تابع مجموعه مقدار است و ممکن است که تهی باشد. اومان شرایط لازم برای غیر تهی بودن این انتگرال را ارائه داده است که در ادامه در قالب یک قضیه به آن اشاره خواهیم کرد.

تعریف ۸.۲.۱. [۱۰] تابع $F : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ را به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار گوییم هرگاه $h \in L^1(P)$ وجود داشته باشد به‌طوری که

$$\|X\|_{x \in F(\omega)} \leq h(\omega), \forall \omega \in \Omega.$$

قضیه ۱.۲.۱. [۱۰] اگر $F : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ اندازه‌پذیر بول و به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار باشد آنگاه

$$\int F dP \neq \emptyset.$$

برخی دیگر از خواص انتگرال اومان توابع مجموعه مقدار را در گزاره زیر بیان می‌کنیم.

گزاره ۲.۲.۱. [۱۰] فرض کنید توابع $F, G : \Omega \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ مجموعه مقدار باشند. در این صورت

۱. $\int F$ زیر مجموعه محدب $\mathbb{R}^n$ است.

۲. اگر F نامنفی و اندازه‌پذیر بول باشد آنگاه $\int F = \int coF$ که در آن coF کوچکترین مجموعه محدب $F(\omega)$ است که اصطلاحاً آن را پوسته محدب $F(\omega)$ می‌گویند.

۳. اگر F بسته و به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار باشد آنگاه $\int F$ فشرده است.

۴. اگر برای هر $\omega \in \Omega$ ، $F(\omega) \in \mathbb{R}^n$ آنگاه $\int F = \mathbb{R}^n$.

۵. اگر برای هر $\omega \in \Omega$ ، $F(\omega) \subseteq G(\omega)$ آنگاه $\int F \subseteq \int G$.

قضیه ۲.۲.۱. [۱۰] فرض کنید $F_1, F_2 : \Omega \rightarrow coK(\mathbb{R}^n)$ دو مجموعه تصادفی باشند. در این صورت

$$d\left(\int F_1, \int F_2\right) = d\left(\int coF_1, \int coF_2\right) \leq \int d(coF_1, coF_2) \leq \int d(F_1, F_2).$$

۳.۲.۱ امید ریاضی مجموعه تصادفی

مقدار مورد انتظار از مجموعه تصادفی در ابتدا بوسیله اومان^{۱۲} [۱۰] در سال ۱۹۶۵ تعریف شده است. همچنین دبریو^{۱۳} [۱۸] در سال ۱۹۶۶ تعریف دیگری برای مقدار مورد انتظار مجموعه تصادفی ارائه کرد. بیرن^{۱۴} [۱۱] نیز در سال ۱۹۷۸ نشان داد که این دو تعریف معادل هستند. برای تعریف امید ریاضی مجموعه‌های تصادفی ابتدا توجه کنید که مجموعه‌های تصادفی را می‌توان به عنوان عناصر تصادفی در یک فضای متریک در نظر گرفت بنابراین انتگرال بوخنر

^{۱۲} Aumann

^{۱۴} Byrne

^{۱۳} Debreu

را که در حالت کلی برای فضاهای باناخ تعریف شده است، می‌توان به طور مشابه برای فضای coK تعریف کرد. بنابر قضیه رادسترم این تعمیم را می‌توان به راحتی انجام داد. همچنین توجه کنید که امید ریاضی یک مجموعه تصادفی به محدب بودن یک مجموعه نیاز دارد. برای یک مجموعه A ، پوسته محدب A که با coA نشان داده می‌شود عبارت است از کوچکترین مجموعه محدب که شامل A است. نگاشت یک مجموعه به پوسته محدب آن یک عملگر پیوسته از K به coK است [۱]. به عنوان مثال اگر $A = \{0, 1\} \in K$ آنگاه

$$\frac{A + \dots + A}{n} = \left\{ \frac{i}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n \right\} \rightarrow [0, 1] = coA$$

پس برای آنکه میانگین نمونه بنابر قانون اعداد بزرگ به امید ریاضی میل کند محدب بودن برای امید ریاضی مورد نیاز خواهد بود.

تعریف ۹.۲.۱. [۵۳] فرض کنید X یک مجموعه تصادفی بر $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ به توی K باشد در این صورت coX انتگرال‌پذیر است اگر دنباله‌ای از مجموعه تصادفی مانند $\{coX_n\}$ وجود داشته باشد به قسمی که

$$\int_{\Omega} \|coX - coX_n\| dP \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

برای هر مجموعه $A \in \mathcal{A}$ انتگرال X بر A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_A coX dP = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A coX_n dP$$

در نتیجه امید ریاضی مجموعه تصادفی X عبارت از

$$EX = EcoX = \int_{\Omega} coX dP.$$

در ادامه تعریف دبريو را با هم مرور خواهیم نمود.

در تعریف دبريو ابتدا فرض می‌کنیم که X مجموعه تصادفی ساده است. به عنوان مثال $X = \sum_{i=1}^k K_i I_{A_i}$ که در آن $K_i \in K$ و $A_i \in \mathcal{A}$ و I_{A_i} تابع مشخصه A_i است. در این صورت مقدار مورد انتظار برابر خواهد بود با

$$E(X) = \int_{\Omega} X dP = \sum_{i=1}^k K_i P(A_i).$$

فضای $\mathcal{L}$ از مجموعه‌های بسته (و همچنین فضای K از مجموعه‌های فشرد) غیر خطی می‌باشند بنابراین مفاهیم امید ریاضی در فضاهای خطی را نمی‌توان به طور مستقیم استفاده نمود. از این رو برای تعمیم امید ریاضی برای این فضاها از قضایای نشانندن (رادسترم، هارمندر) استفاده می‌شود.

با توجه به قضیه نشانندن رادسترم، coK (رده‌ای از مجموعه‌های فشرد محدب) می‌تواند در فضای باناخ حقیقی مقدار E نشانده شود که این نشانندن به صورت ایزومتری می‌باشد. یعنی جمع در E جمع در coK را القا می‌کند و ضرب یک اسکالر نامنفی در E نیز مطابق آن را در coK القا می‌کند. پس می‌توان گفت یک مجموعه فشرد محدب به طور کراندار انتگرال‌پذیر X مطابق با یک عنصر تصادفی در E می‌باشد که انتگرال‌پذیر بوخنر است [۵۳].

۳.۱ تعاریف و مفاهیم فازی مورد استفاده

در این بخش تعریف مجموعه فازی و α -برش را به صورتی که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار خواهیم داد بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۱. یک مجموعه فازی از مجموعه مرجع $\mathbb{R}^p$ تابعی به صورت $\tilde{u} : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$ است. تابعی مانند $\tilde{u} : \mathbb{R}^p \rightarrow \{0, 1\}$ عضویت در یک مجموعه را با اطمینان مشخص می‌کند و حال آنکه سایر توابع، عضویت را کمتر از یقین اجازه می‌دهند.

تعریف ۲.۳.۱. برای هر مجموعه فازی $\tilde{u}$ مجموعه‌های α -برش به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$L_\alpha(\tilde{u}) = \{x \in \mathbb{R}^p | \tilde{u}(x) \geq \alpha\}, 0 < \alpha \leq 1$$

مجموعه $\{x \in \mathbb{R}^p | \tilde{u}(x) \geq \alpha\}$ را تکیه گاه $\tilde{u}$ نامیده و با $\text{supp } \tilde{u}$ نشان می‌دهند.

۱.۳.۱ متغیر تصادفی فازی

مفهوم متغیر تصادفی فازی برای اولین بار توسط واکرناک^{۱۵} در سال ۱۹۷۸ و ۱۹۷۹ به عنوان یک تعمیم از متغیر تصادفی معرفی شد. به‌طور کلی متغیر تصادفی فازی یک تابع اندازه‌پذیر از فضای احتمال به مجموعه‌ای از مجموعه‌های فازی است. با توجه به نیازهای متفاوت از اندازه‌پذیری، محققین متغیرهای تصادفی فازی مختلفی را مورد بررسی و مطالعه قرار دادند که به عنوان نمونه‌هایی از تعاریف پرکاربرد می‌توان به پوری^{۱۶} و رالسکو^{۱۷}، نگویتا^{۱۸} و رالسکو^{۱۹}، کراس^{۲۰} و لیو^{۲۱} و لیو اشاره نمود. [۴۵]

در سیر مطالعاتی تا رسیدن به مفهوم متغیر تصادفی فازی مفاهیم مختلفی چون مجموعه تصادفی فازی، متغیر فازی، متغیر تصادفی فازی و مجموعه‌های احتمالاتی در اواخر ۱۹۷۰ بیان شدند که اغلب تعاریف آن‌ها با مشکلاتی همراه بود.

فرون^{۲۲} در [۲۴] مجموعه تصادفی فازی را به عنوان یک عنصر تصادفی با مجموعه‌های L -فازی مقدار در فضای توپولوژی معرفی کرد. هر چند او تعدادی از ویژگی‌های جبری را مورد مطالعه قرار داد ولی تعریفی از مقدار امید ارائه نکرد. نامیز^{۲۳} در [۵۵] تعریفی از متغیرهای فازی به عنوان متغیرهای تصادفی معمولی روی فضاهایی با دو اندازه احتمال و امکان بیان نمود. هیروتا^{۲۴} در [۳۱] با مطالعه‌ای در مورد ارتباط احتمال و فازی، تعریف مجموعه‌های احتمالاتی را بیان کرد ولی در مورد مفهوم مقدار امید در این مجموعه‌ها مطلبی را مطرح نکرد.

^{۱۵}Kwakernaak

^{۱۶}puri

^{۱۷}Ralescu

^{۱۸}Negoita

^{۱۹}Kruse

^{۲۰}Meyer

^{۲۱}Liu

^{۲۲}feron

^{۲۳}Nahmias

^{۲۴}Hirota, K

واکرناک در [۴۲] مفهوم متغیر تصادفی فازی که مقادیر آن مجموعه‌های فازی هستند را بیان کرد. این تعریف نمی‌تواند یک تعمیم از اعداد فازی در $\mathbb{R}$ باشد. در حقیقت مفهوم اندازه‌پذیری یک مفهوم مناسب مورد نیاز در این چارچوب نمی‌باشد. از سال ۱۹۸۰ پوری و رالسکو تعریفی از مفهوم متغیر تصادفی فازی که مقادیر آن زیر مجموعه‌های فازی از $\mathbb{R}^p$ (یا در حالت کلی تر از فضای باناخ) هستند را ارائه کردند. آن‌ها مفاهیم اندازه‌پذیری، انتگرال‌پذیری و متریک را نیز بیان نمودند و تعریف مقدار امید و ویژگی‌های حدی را در [۴۲] بیان کردند. مفاهیم ارائه شده توسط آن‌ها به مراتب کلی‌تر بود بگونه‌ای که [۴۲] را در بر می‌گرفت. در ادامه با تعریف متغیر تصادفی فازی که توسط پوری و رالسکو معرفی گردید و در این پژوهش از آن استفاده خواهیم نمود آشنا می‌شویم.

حال می‌خواهیم متغیر تصادفی فازی را به قسمی تعریف کنیم که تعمیمی برای مجموعه‌های تصادفی باشند. فرض کنید مجموعه $\mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ شامل مجموعه‌های فازی $\tilde{u} : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$ با ویژگی‌های زیر می‌باشد:

۱. $\tilde{u}$ نیم پیوسته بالایی باشد.
(این ویژگی باعث می‌شود که مجموعه‌های α -برش از $\tilde{u}$ برای همه $0 < \alpha \leq 1$ بسته باشند.)

۲. $\text{supp} \tilde{u}$ فشرده باشد.

۳. $\{x \in \mathbb{R}^p | u(X) = 1\} \neq \emptyset$.

یک ساختار خطی در $\mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ تعریف می‌شود که دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

$$(\tilde{u} + \tilde{v})(x) = \sup_{y+z=x} \min [\tilde{u}(y), \tilde{v}(z)]$$

$$(\lambda \tilde{u})(x) = \begin{cases} \tilde{u}(\lambda^{-1}x) & \lambda \neq 0 \\ I_{\{0\}} & \lambda = 0 \end{cases}$$

در آن $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ و $I_{\{0\}}$ تابع نشانگر باشد.

فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فضای احتمال باشد. متغیر تصادفی فازی تعمیمی از مفهوم مجموعه تصادفی است که توسط پوری و رالسکو [۴۲] معرفی شد. یک متغیر تصادفی فازی یک تابع اندازه‌پذیر بورل می‌باشد که به صورت زیر معرفی می‌گردد:

تعریف ۳.۳.۱. [۴۲] یک متغیر تصادفی فازی تابعی است به صورت

$$\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$$

(که در آن $\mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ مجموعه‌ای از همه اعداد فازی نرمال که مجموعه‌های α -برش آن‌ها زیر مجموعه‌های فشرده از $\mathbb{R}^p$ هستند) به‌طوری‌که

$$\{(\omega, x) : x \in L_\alpha \tilde{X}(\omega)\} \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$$

برای هر $\alpha \in (0, 1]$ و جایی که $L_\alpha \tilde{X}: \Omega \rightarrow K(\mathbb{R}^p)$ (که K کلاس همه زیرمجموعه‌های ناتهی فشرده از $\mathbb{R}^p$ می‌باشد) یک تابع مجموعه مقدار می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_\alpha \tilde{X}(\omega) = \left\{ X \in \mathbb{R}^p : \mu_{\tilde{X}(\omega)}(x) \geq \alpha \right\}$$

($L_\alpha \tilde{X}$ مجموعه α -برش و $\mu_{\tilde{X}(\omega)}$ مقدار تابع عضویت متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ را نشان می‌دهد).

قضیه ۱.۳.۱. [۳۹] اگر $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی باشد آنگاه $\text{supp } \tilde{X}$ یک مجموعه تصادفی است.

در ادامه متغیرهای تصادفی فازی هم توزیع و مستقل را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۳.۱. دو متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}, \tilde{Y}$ هم توزیع گفته می‌شوند اگر برای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، تحت اندازه μ تقریباً مطمئن داشته باشیم $L_\alpha \tilde{X}(\omega) = L_\alpha \tilde{Y}(\omega)$.

مثال ۱.۳.۱. فرض کنید $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ دو متغیر تصادفی فازی باشند. هم توزیعی این دو متغیر تصادفی فازی را بررسی می‌کنیم.

$$\tilde{X}(\omega) = \begin{cases} \left\{ \frac{1}{1}, \frac{0/8}{3} \right\} & \omega = T \\ \left\{ \frac{0/8}{2}, \frac{1}{4} \right\} & \omega = H \end{cases}$$

$$\tilde{Y}(\omega) = \begin{cases} \left\{ \frac{0/8}{2}, \frac{1}{4} \right\} & \omega = T \\ \left\{ \frac{1}{1}, \frac{0/8}{3} \right\} & \omega = H \end{cases}$$

بنا بر تعریف α -برش‌های مختلف برای این متغیرهای تصادفی فازی را به دست آورده سپس هم توزیعی آن‌ها را بررسی می‌کنیم. با فرض اینکه $\alpha \in (0, 0/8]$

$$L_\alpha \tilde{X}(\omega) = \begin{cases} \{1, 3\} & \omega = T \\ \{2, 4\} & \omega = H \end{cases}$$

و

$$L_\alpha \tilde{Y}(\omega) = \begin{cases} \{2, 4\} & \omega = T \\ \{1, 3\} & \omega = H \end{cases}$$

همچنین با فرض اینکه $\alpha \in (0/8, 1]$

$$L_\alpha \tilde{X}(\omega) = \begin{cases} \{1\} & \omega = T \\ \{4\} & \omega = H \end{cases}$$

و

$$L_\alpha \tilde{Y}(\omega) = \begin{cases} \{4\} & \omega = T \\ \{1\} & \omega = H \end{cases}$$

حال برای حالتی که $\alpha \in (0, 0/8]$ است نشان می دهیم که α -برش های آن هم توزیع هستند: با معرفی $\Omega = \{T, H\}$ و $E = \{1, 2, 3, 4\}$ کوچکترین سیگما میدان روی Ω و E به صورت زیر می باشد:

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{T\}, \{H\}\}$$

$$\mathcal{B}(E) = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$$

ملاحظه می شود که

$$L_\alpha \tilde{X} : \Omega \rightarrow E$$

و

$$L_\alpha \tilde{Y} : \Omega \rightarrow E$$

برای بررسی هم توزیعی با فرض $B = \{1, 3\}$ باید نشان دهیم که

$$P(L_\alpha \tilde{X}(\omega) \in B) = P(L_\alpha Y(\omega) \in B)$$

ملاحظه می شود که

$$\begin{aligned} P(L_\alpha X(\omega) \in B) &= P(L_\alpha \tilde{X}(\omega) = \{1, 3\}) \\ &= P((L_\alpha \tilde{X})^{-1}(\{1, 3\}) = \{T\}) = P(\{T\}) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} P(L_\alpha \tilde{Y}(\omega) \in B) &= P(L_\alpha \tilde{Y}(\omega) = \{1, 3\}) \\ &= P((L_\alpha \tilde{Y})^{-1}(\{1, 3\}) = \{H\}) = P(\{H\}) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

و به طریق مشابه برای سایر B های عضو $\mathcal{B}(E)$ بررسی می کنیم و اگر برای همه آن ها $P(L_\alpha \tilde{X}(\omega) \in B) = P(L_\alpha \tilde{Y}(\omega) \in B)$ باشد گوییم هم توزیع هستند.

در گام بعد برای $\alpha \in (0/8, 1]$ نیز هم توزیعی را بررسی می کنیم.

تعریف ۵.۳.۱. یک دنباله از متغیرهای تصادفی فازی $\{\tilde{x}^n : n \in \mathbb{N}\}$ را مستقل گوییم اگر برای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، دنباله ی مجموعه های تصادفی $\{L_\alpha \tilde{x}^n : n \in \mathbb{N}\}$ مستقل باشند.

مثال ۲.۳.۱. فرض کنید سکه و تاسی را بطور مستقل پرتاب می کنیم. اگر دو متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ و $\tilde{Y}$ به صورت زیر باشند به سادگی می توان نشان داد که این دو متغیر تصادفی فازی مستقل هستند.

$$\tilde{X}(\omega) = \begin{cases} \{\frac{1}{4}, \frac{0/8}{3}\} & \omega = T \\ \{\frac{0/8}{4}, \frac{1}{4}\} & \omega = H \end{cases}$$

$$\tilde{Y}(\omega) = \begin{cases} \{\frac{1}{\circ}, \frac{\circ}{\wedge}\} & \omega = \{2, 4, 6\} \\ \{\frac{\circ}{\wedge}, \frac{1}{\circ}\} & \omega = \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

حال برای حالتی که $\alpha \in (\circ, \circ/\wedge]$ است نشان می‌دهیم که α -برش‌های آن‌ها مستقل هستند. ملاحظه می‌شود که

$$L_{\alpha}\tilde{X}(\omega) = \begin{cases} \{1, 3\} & \omega = T \\ \{2, 4\} & \omega = H \end{cases}$$

$$L_{\alpha}\tilde{Y}(\omega) = \begin{cases} \{\circ, 5\} & \omega = \{2, 4, 6\} \\ \{6, 1\circ\} & \omega = \{1, 3, 5\} \end{cases}$$

می‌دانیم که $L_{\alpha}\tilde{X}$ و $L_{\alpha}\tilde{Y}$ توابعی به صورت زیر هستند:

$$L_{\alpha}\tilde{X} : \Omega_{L_{\alpha}\tilde{X}} \rightarrow E_{L_{\alpha}\tilde{X}}$$

و

$$L_{\alpha}\tilde{Y} : \Omega_{L_{\alpha}\tilde{Y}} \rightarrow E_{L_{\alpha}\tilde{Y}}$$

که در آن

$$\Omega_{L_{\alpha}\tilde{X}} = \{T, H\}, E_{L_{\alpha}\tilde{X}} = \{1, 2, 3, 4\}$$

و

$$\Omega_{L_{\alpha}\tilde{Y}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, E_{L_{\alpha}\tilde{Y}} = \{\circ, 5, 6, 1\circ\}$$

سیگما میدان‌ها روی مجموعه‌های Ω و E به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{A}_{L_{\alpha}\tilde{X}} = \{\emptyset, \Omega_{L_{\alpha}\tilde{X}}, \{T\}, \{H\}\}$$

$$\mathcal{B}(E_{L_{\alpha}\tilde{X}}) = \{\emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}\}$$

و

$$\mathcal{A}_{L_{\alpha}\tilde{Y}} = \{\emptyset, \Omega_{L_{\alpha}\tilde{Y}}, \{2, 4, 6\}, \{1, 3, 5\}\}$$

$$\mathcal{B}(E_{L_{\alpha}\tilde{Y}}) = \{\emptyset, \{\circ, 5, 6, 1\circ\}, \{\circ, 5\}, \{6, 1\circ\}\}$$

با معرفی $E = \{\circ, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 1\circ\}$ سیگما میدان بول روی E به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathcal{B}(E) = \{\emptyset, E, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \{\circ, 5\}, \dots\}$$

حالا بنابر تعریف گوییم $L_{\alpha}\tilde{X}$ و $L_{\alpha}\tilde{Y}$ مستقل هستند اگر به ازای هر $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(E)$

$$P(L_{\alpha}\tilde{X} \in B_1, L_{\alpha}\tilde{Y} \in B_2) = P(L_{\alpha}\tilde{X} \in B_1).P(L_{\alpha}\tilde{Y} \in B_2)$$

به عنوان یک نمونه فرض کنید که

$$B_1 = \{1, 3\}, B_2 = \{6, 10\}$$

$$P(L_\alpha \tilde{X} \in B_1, L_\alpha \tilde{Y} \in B_2) = P(L_\alpha \tilde{X} \in \{1, 3\}, L_\alpha \tilde{Y} \in \{6, 10\})$$

$$= P(L_\alpha \tilde{X}^{-1}(\{1, 3\}) = \{T\}, L_\alpha \tilde{Y}^{-1}(\{6, 10\}) = \{1, 3, 5\})$$

$$= P(\{T\}, \{1, 3, 5\}) = P(\{T\}).P(\{1, 3, 5\})$$

$$= P(L_\alpha \tilde{X}^{-1}(\{1, 3\}) = \{T\}).P(L_\alpha \tilde{Y}^{-1}(\{6, 10\}) = \{1, 3, 5\})$$

$$= P(L_\alpha \tilde{X} \in \{1, 3\}).P(L_\alpha \tilde{Y} \in \{6, 10\}) = P(L_\alpha \tilde{X} \in B_1).P(L_\alpha \tilde{Y} \in B_2)$$

و لذا به کمک استقلال پیشامدها استقلال مجموعه‌های تصادفی $L_\alpha \tilde{X}$ و $L_\alpha \tilde{Y}$ به ازای B_1 و B_2 نشان داده شد و حال باید به ازای همه B_1 و B_2 بررسی شود. در گام بعد به ازای حالتی که $\alpha \in (0/8, 1]$ استقلال بین α -برش‌ها را بررسی می‌کنیم.

مثال ۳.۳.۱. بازیکنی یک تاس را پرتاب می‌کند و با توجه به بزرگی عدد رو شده مبلغی برنده می‌شود که این مبلغ به‌طور دقیق مشخص نیست. مثلاً با رو شدن ۶ مبلغ خیلی زیاد و با رو شده ۱ مبلغ خیلی کم برنده می‌شود. این مساله را می‌توان با استفاده از متغیرهای تصادفی فازی صورت بندی کرد یعنی یک متغیر تصادفی فازی که به هر عضو فضای پیشامد $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ یک عدد فازی را نسبت می‌دهد. برای نمونه می‌توان این متغیر تصادفی فازی را به صورت زیر تعریف کرد.

$$\tilde{X}(\omega) = \begin{cases} \tilde{u}_1 & \omega = 1 \\ \tilde{u}_2 & \omega = 2 \\ \tilde{u}_3 & \omega = 3 \\ \tilde{u}_4 & \omega = 4 \\ \tilde{u}_5 & \omega = 5 \\ \tilde{u}_6 & \omega = 6 \end{cases}$$

که در آن $\tilde{u}_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ است و $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_6$ به ترتیب نشانگر مقادیر برد (خیلی کم)، (کم)، (نه زیاد)، (نه کم)، (زیاد) و (خیلی زیاد) به عنوان مجموعه‌های فازی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\tilde{u}_1 = \left\{ \frac{1}{0}, \frac{0.8}{1}, \frac{0.6}{2}, \frac{0.4}{3} \right\}$$

$$\tilde{u}_2 = \left\{ \frac{0.8}{0}, \frac{1}{1}, \frac{0.7}{2}, \frac{0.3}{4} \right\}$$

$$\tilde{u}_3 = \left\{ \frac{0.8}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0.6}{4}, \frac{0.3}{5}, \frac{0.1}{6} \right\}$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_4 &= \left\{ \frac{0.7}{3}, \frac{1}{4}, \frac{0.8}{5}, \frac{0.5}{6}, \frac{0.2}{7} \right\} \\ \tilde{u}_5 &= \left\{ \frac{0.5}{3}, \frac{0.8}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{0.7}{7}, \frac{0.5}{8}, \frac{0.2}{9} \right\} \\ \tilde{u}_6 &= \left\{ \frac{0.7}{5}, \frac{0.9}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{0.6}{9}, \frac{0.3}{10} \right\}.\end{aligned}$$

۲.۳.۱ امید ریاضی متغیر تصادفی فازی و خواص آن

برای تعریف امید ریاضی یک متغیر تصادفی فازی، نخست توجه می‌کنیم که به‌طور شهودی این مفهوم باید دارای چه ویژگی‌هایی باشد. پوری و راسکو [۶۲] بیان می‌کنند که به‌طور شهودی امید ریاضی متغیر تصادفی فازی $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ باید دارای ویژگی‌های زیر باشد:

الف) $E(\tilde{X})$ یک عدد فازی باشد.
 ب) بر حسب انتگرال اومان توابع مجموعه مقدار $L_\alpha \tilde{X}$ و $E(\tilde{X})$ در شرط زیر صدق کنند.
 با فرض اینکه $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی باشد، مقدار مورد انتظار $\tilde{X}$ که با $E(\tilde{X})$ نشان داده می‌شود یک مجموعه فازی $\tilde{dev} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ است به‌طوری‌که

$$\{x \in \mathbb{R}^p : \tilde{\nu}(x) \geq \alpha\} = \int L_\alpha \tilde{X}, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

به عبارت دیگر برای هر $0 < \alpha \leq 1$ ، برش امید ریاضی متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ مساوی امید ریاضی α -برش متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ باشد.
 در اینجا باید شرایطی را بر $\tilde{X}$ اعمال کنیم به‌طوری‌که برای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، $\int L_\alpha \tilde{X} dP \neq \emptyset$.
 اگر $\alpha_0 \in (0, 1]$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\int L_{\alpha_0} \tilde{X} dP = \emptyset$ ، آنگاه برای $\alpha \geq \alpha_0$ با توجه به اینکه $L_\alpha \tilde{X} \subseteq L_{\alpha_0} \tilde{X}$ خواهیم داشت:

$$\int L_\alpha \tilde{X} \subseteq \int L_{\alpha_0} \tilde{X}$$

و در نتیجه

$$\int L_\alpha \tilde{X} = \emptyset \quad \forall \alpha \geq \alpha_0.$$

در این صورت امید ریاضی متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ یک عدد فازی نیست. با این تفصیل شرایطی لازم است که تحت آن‌ها برای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، $\int L_\alpha \tilde{X}$ مخالف تهی باشد.
 در بخش‌های قبل با مفهوم به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار بودن یک تابع آشنا شدیم و نشان دادیم که انتگرال اومان یک تابع مجموعه مقدار به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار غیر تهی است. از این نکته استفاده کرده و برای تضمین اینکه امید ریاضی یک متغیر تصادفی فازی خود یک عدد فازی باشد، متغیر تصادفی فازی به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۶.۳.۱. متغیر تصادفی فازی $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ را به طور انتگرال پذیر کراندار گوییم هرگاه برای هر $\alpha \in (0, 1]$ تابع مجموعه مقدار $L_\alpha \tilde{X}$ به طور انتگرال پذیر کراندار باشد. به عبارت دیگر برای هر $\alpha \in (0, 1]$ تابع $h_\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ متعلق به فضای $L^1(P)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\|\tilde{X}\|_{x \in L_\alpha \tilde{X}(\omega)} \leq h_\alpha \quad \forall \omega \in \Omega.$$

قضیه ۲.۳.۱. اگر $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ یک متغیر تصادفی فازی به طور انتگرال پذیر کراندار باشد آنگاه مجموعه فازی یکتای $\tilde{\nu} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ وجود دارد به طوری که

$$\{x \in \mathbb{R}^p : \tilde{\nu}(x) \geq \alpha\} = \int L_\alpha \tilde{X}, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنید $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ یک متغیر تصادفی فازی به طور انتگرال پذیر کراندار باشد. امید ریاضی $\tilde{X}$ که با $E(\tilde{X})$ نمایش داده می شود یک مجموعه فازی یکتا با تابع عضویت زیر است:

$$E(\tilde{X})(x) = \sup\{\alpha \in [0, 1] : x \in \int L_\alpha \tilde{X}\}.$$

$E(\tilde{X})$ دارای خصوصیت زیر است:

$$\{x \in \mathbb{R}^p : E(\tilde{X})(x) \geq \alpha\} = \int L_\alpha \tilde{X}, \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

مثال ۴.۳.۱. فردی سبد سهام خود در بورس را به گونه ای انتخاب نموده است که در پایان سال با احتمال ۰.۷۵ بسیار نزدیک به ۵۰ درصد و نه بیشتر از آن سود کند (وضعیت A_1) و با احتمال ۰.۲۵ تقریباً ۱۵ درصد زیان کند (وضعیت A_2). اگر این شخص ۱۰ میلیون تومان سرمایه گذاری کرده باشد میزان سود و زیان او را می توان به صورت یک متغیر تصادفی فازی به شکل زیر در نظر گرفت:

$$\tilde{X}(\omega) = \begin{cases} \tilde{u}_1 = \left\{ \frac{0.5}{4,600,000}, \frac{0.8}{4,800,000}, \frac{1}{5,000,000} \right\} & P(A_1) = 0.75 \\ \tilde{u}_2 = \left\{ \frac{0.8}{-2,000,000}, \frac{1}{-1,500,000}, \frac{0.8}{-1,000,000} \right\} & P(A_2) = 0.25 \end{cases}$$

می خواهیم $E(\tilde{X})$ را بیابیم. برای محاسبه امید ریاضی $\tilde{X}$ ابتدا باید $L_\alpha \tilde{X}$ ، $S(L_\alpha \tilde{X})$ و $\int L_\alpha \tilde{X}$ را به دست آوریم.

چنانچه $0 \leq \alpha \leq 0.5$ آنگاه

$$L_\alpha \tilde{X}(\omega) = \begin{cases} \{4600000, 4950000, 5000000\} & P(A_1) = 0.75 \\ \{-2000000, -1500000, -1000000\} & P(A_2) = 0.25 \end{cases}$$

مجموعه $S(L_\alpha \tilde{X})$ شامل ۹ تابع به صورت زیر است.

اگر $\omega = A_1$

$$f_1(\omega) = f_2(\omega) = f_3(\omega) = 4,600,000$$

$$f_{\epsilon}(\omega) = f_{\delta}(\omega) = f_{\epsilon}(\omega) = 4,950,000$$

$$f_{\gamma}(\omega) = f_{\lambda}(\omega) = f_{\eta}(\omega) = 5,000,000$$

اگر $\omega = A_2$

$$f_1(\omega) = f_{\epsilon}(\omega) = f_{\gamma}(\omega) = -2,000,000$$

$$f_2(\omega) = f_{\delta}(\omega) = f_{\lambda}(\omega) = -1,500,000$$

$$f_3(\omega) = f_{\epsilon}(\omega) = f_{\eta}(\omega) = -1,000,000$$

برای به دست آوردن $L_{\alpha}\tilde{X}$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\int f_1(\omega)dP = (-2,000,000 \times 0/25) + (4,600,000 \times 0/75) = 2,950,000$$

و به‌طور مشابه

$$\int f_2(\omega)dP = 3,075,000, \quad \int f_3(\omega)dP = 3,200,000$$

$$\int f_{\epsilon}(\omega)dP = 3,212,500, \quad \int f_{\delta}(\omega)dP = 3,337,500$$

$$\int f_{\epsilon}(\omega)dP = 3,462,500, \quad \int f_{\gamma}(\omega)dP = 3,250,000$$

$$\int f_{\lambda}(\omega)dP = 3,375,000, \quad \int f_{\eta}(\omega)dP = 3,500,000.$$

پس به ازای هر $0.5 \leq \alpha \leq 0$

$$\int L_{\alpha}\tilde{X} = \{2950000, 3075000, 3200000, 3212500,$$

$$3337500, 3462500, 3250000, 3375000, 3500000\}.$$

حال فرض کنید $0.5 < \alpha \leq 0.8$ در این صورت

$$L_{\alpha}\tilde{X}(\omega) = \begin{cases} \{4950000, 5000000\} & P(A_1) = 0/75 \\ \{-2000000, -1500000, -1000000\} & P(A_2) = 0/25 \end{cases}$$

مجموعه $S(L_{\alpha}\tilde{X})$ شامل ۶ تابع به صورت زیر است.

اگر $\omega = A_1$

$$f_1(\omega) = f_2(\omega) = f_3(\omega) = ۴,۹۵۰,۰۰۰$$

$$f_۴(\omega) = f_۵(\omega) = f_۶(\omega) = ۵,۰۰۰,۰۰۰$$

اگر $\omega = A_2$

$$f_1(\omega) = f_۴(\omega) = -۲,۰۰۰,۰۰۰$$

$$f_2(\omega) = f_۵(\omega) = -۱,۵۰۰,۰۰۰$$

$$f_3(\omega) = f_۶(\omega) = -۱,۰۰۰,۰۰۰$$

مقادیر $\int L_\alpha \tilde{X}$ برابر خواهند بود با:

$$\int f_1(\omega)dP = ۳,۲۱۲,۵۰۰, \quad \int f_2(\omega)dP = ۳,۳۳۷,۵۰۰$$

$$\int f_3(\omega)dP = ۳,۴۶۲,۵۰۰, \quad \int f_۴(\omega)dP = ۳,۲۵۰,۰۰۰$$

$$\int f_۵(\omega)dP = ۳,۳۷۵,۰۰۰, \quad \int f_۶(\omega)dP = ۳,۵۰۰,۰۰۰$$

پس به ازای هر $۰/۵ < \alpha \leq ۰.۸$

$$\int L_\alpha \tilde{X} = \{۳۲۱۲۵۰۰, ۳۳۳۷۵۰۰, ۳۴۶۲۵۰۰, \\ ۳۲۵۰۰۰۰, ۳۳۷۵۰۰۰, ۳۵۰۰۰۰۰\}.$$

و بالاخره اگر $۰.۸ < \alpha \leq ۱$ خواهیم داشت:

$$L_\alpha \tilde{X}(\omega) = \begin{cases} \{۵,۰۰۰,۰۰۰\} & P(A_1) = ۰/۷۵ \\ \{-۱,۵۰۰,۰۰۰\} & P(A_2) = ۰/۲۵ \end{cases}$$

و بنابراین اگر $\omega = A_1$

$$f_1(\omega) = ۵,۰۰۰,۰۰۰$$

اگر $\omega = A_2$

$$f_1(\omega) = -۱,۵۰۰,۰۰۰$$

لذا

$$\int f_1(\omega)dP = (۵,۰۰۰,۰۰۰ \times ۰/۷۵) + (-۱,۵۰۰,۰۰۰ \times ۰/۲۵) = ۳,۳۷۵,۰۰۰$$

پس به ازای $۰.۸ < \alpha \leq ۱$ خواهیم داشت:

$$\int L_{\alpha} \tilde{X} = \{ ۳, ۳۷۵, ۰۰۰ \}.$$

سرانجام با توجه به تعریف داریم:

$$E(\tilde{X}) = \left\{ \left\{ \frac{۰.۵}{۲, ۹۵۰, ۰۰۰} \right\}, \left\{ \frac{۰.۵}{۳, ۰۷۵, ۰۰۰} \right\}, \left\{ \frac{۰.۵}{۳, ۲۰۰, ۰۰۰} \right\}, \left\{ \frac{۰.۸}{۳, ۲۱۲, ۵۰۰} \right\}, \left\{ \frac{۰.۸}{۳, ۲۵۰, ۰۰۰} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \frac{۰.۸}{۳, ۳۳۷, ۵۰۰} \right\}, \left\{ \frac{۱}{۳, ۳۷۵, ۰۰۰} \right\}, \left\{ \frac{۰.۸}{۳, ۴۶۲, ۵۰۰} \right\}, \left\{ \frac{۰.۸}{۳, ۵۰۰, ۰۰۰} \right\} \right\}.$$

گزاره زیر حالت کلی مثال فوق را بیان می‌کند.

نتیجه ۱.۳.۱. [۶۲] فرض کنید $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ یک متغیر تصادفی فازی باشد و

$$P(\tilde{X} = \tilde{u}_i) = p_i \quad i = ۱, ۲, \dots, r$$

که در آن $\sum_{i=1}^r p_i$ و $\tilde{u}_i : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ توابع پیوسته با تکیه گاه فشرده هستند، آنگاه

$$E(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^r p_i \tilde{u}_i$$

که در آن مجموع دو مجموعه فازی $\tilde{u}, \tilde{v}$ و نیز ضرب یک عدد حقیقی در یک مجموعه فازی در تعریف‌ها بیان شده است.

مثال ۵.۳.۱. [۲] برای متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ در مثال قبل با توجه به گزاره ۱.۳.۱ داریم:

$$E(\tilde{X})(x) = \sup_{\frac{1}{r}y_1 + \frac{1}{r}y_2 = x} \min\{\tilde{u}_1(y_1), \tilde{u}_2(y_2)\}$$

اگر $x = \frac{1}{r}$ باشد در این صورت

$$E(\tilde{X})\left(\frac{1}{r}\right) = \sup_{\frac{1}{r}y_1 + \frac{1}{r}y_2 = \frac{1}{r}} \min\{\tilde{u}_1(y_1), \tilde{u}_2(y_2)\} \\ = \sup(\min\{\tilde{u}_1(-۱۱), \tilde{u}_2(۱۲)\}, \min\{\tilde{u}_1(-۱۰), \tilde{u}_2(۱۱)\}, \min\{\tilde{u}_1(-۹), \tilde{u}_2(۱۰)\}) \\ = \sup(\min\{۰.۸, ۱\}, \min\{۱, ۰.۸\}, \min\{۰.۸, ۰.۵\}) \\ = \sup\{۰.۸, ۰.۸, ۰.۵\} = ۰.۸$$

۳.۳.۱ بررسی خواص امید ریاضی

در این بخش به بیان برخی خواص امید ریاضی می‌پردازیم ولی در ابتدا لازم است تا با مفهوم اتم آشنا شویم.

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنید P یک اندازهای احتمال روی فضای اندازه‌پذیر $(\Omega, \mathcal{A})$ باشد. پیشامد $A \in \mathcal{A}$ را یک اتم گوییم هرگاه

$$P(A) > 0. \quad ۱.$$

$$P(B) = 0 \text{ یا } P(A) = P(B), B \subseteq A \text{ برای هر } ۲.$$

P را اندازه احتمال غیر اتمی گوئیم هرگاه هیچ اتمی برای P وجود نداشته باشد.

قضیه ۳.۳.۱. اگر P یک اندازه احتمال غیر اتمی و $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ یک متغیر تصادفی فازی باشد آنگاه $E(\tilde{X})$ یک مجموعه فازی محدب است.

تعریف ۹.۳.۱. فرض کنید $\tilde{X}, \tilde{Y}$ دو متغیر تصادفی فازی باشند. نرم متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ و مجموع دو متغیر تصادفی فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|\tilde{X}\|(\omega) = \|\tilde{X}(\omega)\| = d(\tilde{X}(\omega), I_{\{0\}}) \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$(\tilde{X} + \tilde{Y})(\omega) = \tilde{X}(\omega) + \tilde{Y}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

که در آن $I_{\{0\}}$ مجموعه فازی با مقدار عضویت یک در نقطه صفر و صفر در بقیه نقاط است. لازم به ذکر است که نرم یک متغیر تصادفی فازی، خود یک متغیر تصادفی معمولی است و مجموع دو متغیر تصادفی فازی خود یک متغیر تصادفی فازی است.

قضیه ۴.۳.۱. فرض کنید $\tilde{X}, \tilde{Y}$ دو متغیر تصادفی فازی باشند به طوری که $E\|\tilde{X}\| < \infty$ و $E\|\tilde{Y}\| < \infty$ در این صورت

$$E(\tilde{X} + \tilde{Y}) = E(\tilde{X}) + E(\tilde{Y}) \quad ۱.$$

$$E(\lambda \tilde{X}) = \lambda E(\tilde{X}), \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ برای هر } ۲.$$

نکته: اگر $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی باشد به طوری که $E\|\tilde{X}\|_{supp} < \infty$ ، آنگاه مقدار امید ریاضی $\tilde{X}$ یک مجموعه فازی (یکتا) است که در آن

$$L_\alpha(E\tilde{X}) = E(L_\alpha \tilde{X}), \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

در حقیقت $E\tilde{X} : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$ ، نیم پیوسته بالا بوده و $L_1(E\tilde{X}) \neq \emptyset$. همچنین $supp \tilde{X}$ فشرده می‌باشد. نکته بالا بیان می‌کند که $supp \tilde{X}$ اندازه‌پذیر است یعنی یک مجموعه تصادفی است [۳۹].

قضیه همگرایی مغلوب (تسلطی) لبگ یکی از ابزار مهم در اثبات قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه‌های تصادفی و متغیر تصادفی فازی است که در فصل سوم از آن استفاده خواهیم کرد. در ادامه به بیان این قضیه می‌پردازیم.

قضیه ۵.۳.۱. [۶۲] فرض کنید دنباله $\{\tilde{X}_k; k \geq 1\}$ و همچنین $\tilde{X}$ متغیر تصادفی فازی به طور انتگرال‌پذیر کراندار باشد. به طوری که تقریباً مطمئن $\tilde{X}_k(\omega) \xrightarrow{d} \tilde{X}(\omega)$. چنانچه تابع $h \in L^1(P)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\sup_{\alpha \in (0, 1]} \sup_{x \in L_\alpha \tilde{X}_k(\omega)} \|\tilde{X}\| \leq h(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega, k \in \mathbb{N}$$

آنگاه تحت متر هاسدورف

$$E(\tilde{X}_k) \rightarrow E\tilde{X}.$$

با توجه به اینکه در بخشی از اثبات قضیه اصلی این پژوهش (قانون قوی اعداد بزرگ) از مفهوم متغیر تصادفی فازی بر اساس تعریف ساختاری استفاده می شود، در ادامه به بیان این مفهوم خواهیم پرداخت.

۴.۳.۱ تعریف ساختاری متغیر تصادفی فازی

در بخش قبل تعریف استاندارد متغیرهای تصادفی فازی و امید ریاضی آن‌ها مطرح شد. در بخش حاضر هدف ارائه تعریف ساختاری این نوع متغیر تصادفی است. در این شیوه ابتدا متغیر تصادفی فازی ساده تعریف می شوند و سپس با استفاده از حد دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی فازی در حالت کلی تعریف می شوند. ابتدا متغیر تصادفی ساده را تعریف می کنیم. در بخش بعد به مشخصه سازی متغیر تصادفی فازی می پردازیم و متغیر تصادفی فازی را به صورت حد دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی فازی ساده در متر هاسدورف تعریف می کنیم. در بخش سوم به مشخصه سازی متغیرهای تصادفی فازی به طور انتگرال پذیر کراندار می پردازیم و نشان می دهیم که برای هر متغیر تصادفی فازی دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی ساده وجود دارد به طوری که انتگرال اومان آن‌ها در هر سطح از متر هاسدورف به انتگرال اومان متغیر تصادفی فازی مورد نظر در همان سطح میل می کند. عمده مطالب از منابع [۱۴]، [۱۸]، [۲۰]، [۴۶] است. متغیر تصادفی فازی ساده مبنای تعریف ساختاری متغیرهای تصادفی فازی است. لذا در این بخش به معرفی و تشریح متغیرهای تصادفی فازی ساده می پردازیم.

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنید A و B متعلق به $co K(\mathbb{R}^n)$ باشند. جمع مینکوفسکی A و B و ضرب اسکالر λ در A به صورت زیر تعریف می شوند:

$$A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\}$$

$$\lambda A = \{\lambda a; a \in A\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

نکته: فضای $co K$ تحت عمل جمع مینکوفسکی و ضرب اسکالر بسته است. قبل از تعریف متغیر تصادفی فازی ساده با مجموعه تصادفی ساده آشنا می شویم.

تعریف ۱۱.۳.۱. نگاشت اندازه‌پذیر $L_\alpha \tilde{X} : \Omega \rightarrow co K$ را یک مجموعه تصادفی ساده می گوئیم هر گاه بتوان آن را به صورت زیر نوشت

$$L_\alpha \tilde{X} = \sum_{i=1}^m C_{\alpha,i} I_{A_i}$$

که در آن عمل جمع، جمع مینکوفسکی، $C_{\alpha,i}$ متعلق به فضای $co K$ و $\{A_i\}_{i=1}^m$ یک افراز Ω است.

حال به تعریف متغیر تصادفی فازی ساده می‌پردازیم.

تعریف ۱۲.۳.۱. تابع $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ را یک متغیر تصادفی فازی ساده گوییم هرگاه بتوان آن را به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i I_{A_i}$$

که در آن $\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m$ اعداد فازی متعلق به فضای $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ و $\{A_i\}_{i=1}^m$ یک افراز مجموعه ناتهی Ω و I_{A_i} تابع نشانگر مجموعه معمولی A_i است.

نتیجه ۲.۳.۱. تابع $X : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ یک متغیر تصادفی فازی ساده است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، $L_\alpha X$ یک مجموعه محدب فشرده تصادفی ساده باشد. به عبارت دیگر بتوان $L_\alpha X$ را به صورت زیر نوشت

$$L_\alpha X = \sum_{i=1}^m C_{\alpha,i} I_{A_i}$$

به طوری که برای هر $i = \{1, 2, \dots, m\}$ ، خانواده $\{C_{\alpha,i}; \alpha \in [0, 1]\}$ در شرایط لم زیر صدق کند.

لم ۱.۳.۱. اگر M یک مجموعه دلخواه و $\{M_\alpha; \alpha \in [0, 1]\}$ یک خانواده از زیر مجموعه‌های M باشند به طوری که

$$M_0 = M \quad ۱.$$

$$M_\beta \subseteq M_\alpha \quad \alpha \leq \beta \quad ۲.$$

$$۳. \text{ اگر } \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \text{ آنگاه } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \text{ آنگاه } M_\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_{\alpha_n}$$

آنگاه تابع $\phi : M \rightarrow [0, 1]$ که به صورت $\phi(X) = \sup\{\alpha \in [0, 1]; X \in M_\alpha\}$ تعریف می‌شود دارای خصوصیت زیر است

$$\{x \in M; \phi(x) \geq \alpha\} = M_\alpha \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

۵.۳.۱ مشخصه سازی متغیرهای تصادفی فازی

در این بخش بارهیافتی متفاوت از بخش قبل به تعریف و تشریح متغیر تصادفی فازی می‌پردازیم. تعریفی که در این بخش به آن اشاره می‌کنیم، تعریف ساختاری نامیده می‌شود. در واقع تعریف توصیفی متغیرهای تصادفی فازی که در بخش‌های قبل ارائه شده بر پایه اندازه پذیری توابع سطح α آن‌ها بود. ولی در رهیافت ساختاری یک متغیر تصادفی فازی به عنوان حد دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی فازی ساده تعریف می‌شود. مطالب را با قضیه زیر که یک قضیه کلیدی در این روش است آغاز می‌کنیم.

قضیه ۶.۳.۱. [۴۶] فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فضای احتمال باشد. تابع مجموعه مقدار $X : \Omega \rightarrow co K$ یک مجموعه محدب فشرده تصادفی است اگر و تنها اگر دنباله‌ای از مجموعه‌های محدب فشرده تصادفی ساده $\{X_m\}$ ، $X_m : \Omega \rightarrow co K$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(X_m(\omega), X(\omega)) = 0 \quad \forall \omega \in \Omega.$$

قضیه فوق ما را در اثبات قضیه زیر که قضیه اساسی درباره مشخصه سازی متغیرهای تصادفی فازی است کمک می‌کند. در این قضیه نشان می‌دهیم که تعریف استاندارد و تعریف متغیرهای تصادفی فازی معادل یکدیگرند.

قضیه ۷.۳.۱. [۴۶] فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فضای احتمال است. تابع $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ تعریف شده روی این فضا یک متغیر تصادفی فازی است اگر و تنها اگر دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی فازی ساده $\{\tilde{X}_m\}$ ، $\tilde{X}_m : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ روی این فضا وجود داشته باشد، به‌طوری‌که

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(L_\alpha \tilde{X}_m(\omega), L_\alpha \tilde{X}(\omega)) = 0, \forall \omega \in \Omega, \alpha \in (0, 1].$$

۶.۳.۱ مشخصه سازی متغیرهای تصادفی فازی به‌طور یکنواخت انتگرال‌پذیر کراندار

در بخش‌های قبل امید ریاضی یک متغیر تصادفی فازی بر حسب انتگرال اومان تعریف شد و نشان دادیم که شرط لازم برای وجود امید ریاضی یک متغیر تصادفی فازی به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار بودن متغیر مورد نظر است.

متغیرهای تصادفی فازی ساده انتگرال‌پذیر کراندار هستند. برای تعمیم انتگرال متغیرهای تصادفی فازی ساده در حالت کلی باید نتایج مشابه بخش قبل را برای متغیرهای تصادفی فازی به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار به دست آورد.

همانطور که از بخش قبل می‌دانیم هر متغیر تصادفی فازی حد یک دنباله از متغیرهای تصادفی فازی ساده در متر هاسدورف است. به عبارت دیگر کلاس همه متغیرهای تصادفی ساده از Ω به $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ در کلاس همه متغیرهای تصادفی از Ω به $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ چگال است.

با وجود این، اضافه کردن شرط به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار بودن به متغیرهای تصادفی در قضیه قبل برای مشخصه سازی متغیرهای تصادفی فازی به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار و در نتیجه تضمین وجود امید ریاضی کفایت نمی‌کند. در مثال زیر این مطلب نشان داده شده است.

مثال ۶.۳.۱. فرض کنید $\Omega = [1, \infty)$ و $\mathcal{A}$ کلاس همه زیر مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ Ω و μ اندازه لبگ روی $\mathcal{A}$ باشد. تابع اندازه‌پذیر $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ را به صورت $f(\omega) = \omega^{-2}$ را در نظر می‌گیریم. اندازه P روی $\mathcal{A}$ را به صورت $P(B) = \int_B f d\mu$ تعریف می‌کنیم. واضح است که $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فضای احتمال است.

تابع $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{X}(\omega)(x) = \begin{cases} \frac{2x-2}{\omega-1} & 1 \leq x \leq \frac{\omega+1}{2} \\ \frac{2x-\omega}{\omega-1} & \frac{\omega+1}{2} \leq x \leq \omega \end{cases}$$

α -برش‌های هر $\tilde{X}(\omega)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} L_\alpha \tilde{X}(\omega) &= [1 + (\frac{\omega+1}{2} - 1)\alpha, \omega - (\omega - \frac{\omega+1}{2})\alpha] \\ &= [I_\alpha^-, I_\alpha^+] , \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

حال تابع $h(\omega) = \sup_{x \in L_\alpha \tilde{X}(\omega)} |x| = \omega$ را در نظر بگیرید. این تابع انتگرال‌پذیر نیست زیرا

$$\int_1^\infty h(\omega) dP(\omega) = \int_1^\infty \omega \frac{1}{\omega^2} d\omega = +\infty$$

بنابراین $\tilde{X}$ یک متغیر تصادفی فازی است که به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار نیست. با وجود این نشان می‌دهیم که یک دنباله از متغیرهای تصادفی فازی ساده $\{\tilde{X}_m\}$ وجود دارد به‌طوری‌که در قضیه ۱.۳.۷ صدق می‌کند.

برای این منظور ابتدا تابع $\mathcal{A}$ -اندازه‌پذیر $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(\omega) = \omega - 1$$

بنابر [۴۶] یک دنباله $\{g_m\}$ از توابع ساده غیر نزولی $\mathcal{A}$ -اندازه‌پذیر از Ω به توی $\mathbb{R}^+$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(\omega) = g(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$$

حال متغیر تصادفی ساده $\tilde{X}_m : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ را بگونه‌ای تعریف می‌کنیم که α -برش‌های آن‌ها به صورت زیر باشند:

$$\begin{aligned} L_\alpha \tilde{X}_m(\omega) &= [1 + \frac{g_m(\omega)}{2}\alpha, g_m(\omega) + 1 - \frac{g_m(\omega)}{2}\alpha] \\ &= [J_{m,\alpha}^-, J_{m,\alpha}^+] , \quad 0 < \alpha \leq 1 \end{aligned}$$

در این صورت بنابر ویژگی‌های متر هاسدورف، برای مجموعه‌های $L_\alpha \tilde{X}$ و $L_\alpha \tilde{X}_m(\omega)$ داریم:

$$\begin{aligned} |I_\alpha^- - J_{m,\alpha}^-| &= \left| \left(1 + \frac{\omega-1}{2}\alpha\right) - \left(1 + \frac{g_m(\omega)}{2}\alpha\right) \right| \\ &= \left| (\omega - 1 - g_m(\omega)) \frac{\alpha}{2} \right| = |g(\omega) - g_m(\omega)| \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

و نیز

$$\begin{aligned} |I_\alpha^+ - J_{m,\alpha}^+| &= \left| \left(\omega - \frac{\omega-1}{2}\alpha\right) - \left(g_m(\omega) + 1 - \frac{g_m(\omega)}{2}\alpha\right) \right| \\ &= \left| \omega - 1 - g_m(\omega) + \frac{g_m(\omega) - (\omega-1)}{2}\alpha \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left| g(\omega) - g_m(\omega) + (g_m(\omega) - g(\omega)) \frac{\alpha}{\alpha} \right| \\ &= \left| (g(\omega) - g_m(\omega)) \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha} \right) \right| \end{aligned}$$

بنابراین

$$d(L_\alpha \tilde{X}_m(\omega), L_\alpha \tilde{X}(\omega)) = \max\left\{ |g(\omega) - g_m(\omega)| \frac{\alpha}{\alpha}, \left| (g(\omega) - g_m(\omega)) \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha} \right) \right| \right\}$$

از طرفی دنباله توابع $\{g_m\}$ غیر نزولی است. بنابراین چون $g_m(\omega) \leq g(\omega)$ نتیجه می‌شود که

$$|g(\omega) - g_m(\omega)| = g(\omega) - g_m(\omega)$$

بنابراین

$$d(L_\alpha \tilde{X}_m(\omega), L_\alpha \tilde{X}(\omega)) = (g(\omega) - g_m(\omega)) \left(1 - \frac{\alpha}{\alpha} \right)$$

اکنون به روشنی پیداست که

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(L_\alpha \tilde{X}_m(\omega), L_\alpha \tilde{X}(\omega)) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \alpha \in (0, 1].$$

در مثال فوق نشان داده شد که برای متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ که به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار نیست، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی فازی ساده وجود دارد به‌طوری‌که در هر سطح به $L_\alpha \tilde{X}$ میل می‌کند.

دو قضیه زیر یک شرط لازم و کافی برای اینکه متغیر تصادفی فازی $\tilde{X}$ به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار باشد را بیان می‌کند.

قضیه ۸.۳.۱. [۴۶] فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فضای احتمال باشد. متغیر تصادفی فازی $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار است اگر و تنها اگر دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی ساده $\{\tilde{X}_m\}$ ($\tilde{X}_m : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$) و تابع $h \in L^1(P)$ از Ω به $\mathbb{R}$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که برای هر $\omega \in \Omega$ داشته باشیم:

$$\sup_{x \in L_\alpha \tilde{X}_m(\omega)} |\tilde{X}| \leq h(\omega), \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

و

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(L_\alpha \tilde{X}_m(\omega), L_\alpha \tilde{X}(\omega)) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \alpha \in (0, 1].$$

همانطور که ملاحظه شد تعریف ساختاری انتگرال یک متغیر تصادفی فازی به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار را می‌توان بر پایه قضیه بالا بهبود بخشید. یعنی انتگرال یک متغیر تصادفی فازی به‌طور انتگرال‌پذیر کراندار را می‌توان در هر سطح (به ازای هر $0 < \alpha \leq 1$) به صورت حد دنباله‌ای از انتگرال‌های متغیرهای تصادفی فازی ساده در متر هاسدورف تعریف کرد. بر این مبنا می‌توان امید ریاضی یک متغیر تصادفی فازی مانند $\tilde{X}$ را در صورت وجود به صورت زیر بیان و اثبات کرد.

قضیه ۹.۳.۱. [۴۶] فرض کنید $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ یک فضای احتمال باشد. اگر $\tilde{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ یک متغیر تصادفی فازی به طور انتگرال پذیر کراندار باشد آنگاه یک دنباله از متغیرهای تصادفی فازی ساده $\{\tilde{X}_m\}$ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d(L_\alpha E(\tilde{X}_m), L_\alpha E(\tilde{X})) = 0, \quad \forall \omega \in \Omega, \alpha \in (0, 1].$$

آنچه در فصل آینده ارائه خواهد شد

۱. آشنایی با مفهوم فضای متریک فازی
۲. کاربرد متر فازی در پردازش تصویر
۳. ارائه پیشنهاد متر فازی برای مجموعه های فازی و فضای حاصل از آن

فصل ۲

فضای متریک فازی

یکی از اولین موضوعات که در تحقیقات ریاضیات فازی با آن مواجه می‌باشیم، توپولوژی فازی است. نخستین پژوهش در این زمینه در سال ۱۹۶۸ توسط چانگ^۱ [۱۳] انجام شد. با توجه به تعریف چانگ توپولوژی τ در X یک خانواده از مجموعه‌های فازی روی X می‌باشند که نسبت به اجتماع و اشتراک متناهی بسته است. این خانواده همچنین باید شامل توابع ثابت^۰ و ۱ باشد. این مفهوم بیشترین استفاده را در ادبیات موجود دارد ولی این تنها مفهوم نیست. لاون^۲ در [۴۸، ۴۹] بیان می‌کند که علاوه بر شروط بالا τ باید شامل همه توابع ثابت باشد. این توپولوژی همان اصطلاح توپولوژی لمینت^۳ است [۷۰]. بنابراین برخلاف توپولوژی چانگ توپولوژی لمینیت یک تعمیم از توپولوژی در حالت کلاسیک تشکیل نمی‌دهد. از طرف دیگر گوگن^۴ [۲۹] و هاتن^۵ [۳۴] مفهوم توپولوژی ارائه شده توسط چانگ را با جایگزینی محدوده فازی $I = [0, 1]$ توسط یک شبکه متمم دار^۶ تعمیم دادند و لذا این مفهوم را L -توپولوژی می‌نامند.

یکی از جالب‌ترین مسائل در توپولوژی فازی به دست آوردن مفهومی مناسب از فضای متریک فازی است. همانطور که میدانیم مطالعه فضای متریک بر اساس مفهوم فاصله بین دو نقطه می‌باشد، هرچند در بسیاری از موقعیت‌های واقعی این فاصله دقیقاً مشخص نیست. این موضوع متعلق به زمینه فازی است هرچند قبلاً از دیدگاه نظریه احتمال مورد بررسی قرار

^۱Chang

^۲Lowen

^۳laminated topology

^۴Goguen

^۵Hutton

^۶complemented lattice

گرفته است. در حقیقت منگر^۷ [۵۱] در سال ۱۹۴۲ برای اولین بار فضای متریک احتمال را معرفی کرد. در این فضا اگر $d(x, y)$ فاصله بین دو نقطه x و y باشد تابع $F_{xy}(t)$ احتمال اینکه فاصله بین x و y کمتر یا مساوی t باشند را نشان می دهد. بعدها شوایزر^۸ و اسکالر^۹ [۶۸، ۶۹] مطالعه این فضاها را دنبال کردند. همچنین مطالعات دیگری در این زمینه وجود دارد که می توان به [۱۲، ۵۶، ۵۷] اشاره کرد.

به سادگی می توان دریافت که مفهوم توپولوژی فازی از دیدگاه های مختلف مورد استفاده قرار گرفته و تقریباً در تمام مفاهیم فازی به طور یکسان استفاده شده است. با توجه به مترهای فازی، بسیاری از محققان از دیدگاه های مختلف مفهوم فضای متریک فازی را مورد بررسی قرار داده اند. در اینجا می توان بر اساس یک طبقه بندی این پژوهش ها را بر دو گروه بزرگ تقسیم کرد.

گروه اول شامل آن دسته از آثاری است که در آن ها از یک شبه متر روی X به صورت $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (که در آن $\Omega \subset I^X$ و $I = [0, 1]$) استفاده شده که برخی از اصول کلی همچون مترهای کلاسیک برقرار است. از جمله این پژوهش ها می توان به آثار دنگ زی^{۱۰} [۱۹]، ارسنگ^{۱۱} [۲۳]، هو^{۱۲} [۳۲] و آرتیکو^{۱۳} و موریسکو^{۱۴} [۶] اشاره کرد.

گروه دوم شامل پژوهش هایی می باشد که فاصله را فازی در نظر می گیرد. در این راستا می توان به کالوا^{۱۵} و سیکالا^{۱۶} [۳۵] و کراموسیل^{۱۷} و میشلک^{۱۸} [۴۰] اشاره کرد.

در اینجا ما از مفهوم متر فازی بیان شده توسط جورج^{۱۹} و ورمانی^{۲۰} [۲۷] استفاده می کنیم این مفهوم در حقیقت یک اصلاح مناسب از مفهوم متر فازی ارائه شده توسط کراموسایل و میشلک می باشد.

در این فصل با مفهوم متر فازی و ویژگی های آن آشنا خواهیم شد. این متر برای مجموعه های معمولی تعریف شده است از این رو با تعمیم آن، متر فازی برای مجموعه های فازی را پیشنهاد خواهیم کرد.

در ادامه به طور مختصر نتایج مرتبط با متر های فازی را بیان می کنیم.

^۷Menger^۸Schweizer^۹Sklar^{۱۰}Deng Zi^{۱۱}Erceg^{۱۲}Hu^{۱۳}Artico^{۱۴}Moresco^{۱۵}Kaleva^{۱۶}Seikkala^{۱۷}Kramosil^{۱۸}Michalek^{۱۹}George^{۲۰}Veeramani

۱.۲ فضای متریک احتمال

پیش از معرفی نظریه فازی در زمینه فضای متریک، مطالعه مترها وابسته به مفاهیم احتمال بود. در سال ۱۹۴۲ منگر [۵۱] مفهوم فضای متریک احتمال را به صورت زیر بیان کرد:

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی دلخواه باشد. همچنین فرض کنید F_{pq} یک خانواده از توابع توزیع با شرایط زیر باشد:

$$۱. \quad F_{pq}(\circ) = \circ$$

$$۲. \quad \text{اگر } p = q, \text{ آنگاه برای هر } x > \circ \text{ داریم } F_{pq}(x) = ۱$$

$$۳. \quad \text{اگر } p, \text{ آنگاه برای برخی } x > \circ \text{ داریم } F_{pq}(x) < ۱$$

$$۴. \quad F_{pq}(x) = F_{qp}(x)$$

۵. با فرض اینکه $T : [\circ, ۱] \times [\circ, ۱] \rightarrow [\circ, ۱]$ تابعی با ویژگی های زیر باشد:

$$(A) \quad T(a, b) = T(b, a)$$

$$(B) \quad T(a, b) \leq T(c, d) \text{ اگر } a \leq c \text{ و } b \leq d$$

$$(C) \quad T(a, b) > \circ \text{ اگر } a > \circ \text{ و } T(۱, ۱) = ۱$$

آنگاه برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و $p, q, r \in X$

$$F_{pr}(x + y) \geq T(F_{pq}(x), F_{qr}(y)).$$

باید توجه داشت که یک تابع توزیع $F : \mathbb{R} \rightarrow [\circ, ۱]$ یک تابع نانزولی پیوسته چپ است به طوری که $\inf_{x \in X} F(x) = \circ$ و $\sup_{x \in X} F(x) = ۱$. متر آماری F_{pq} را می توان به عنوان احتمال اینکه فاصله بین دو نقطه p و q کمتر یا مساوی x باشد تعبیر کرد.

شوايزر و اسکالر [۶۸] شرط پنجم را با شرط زیر جایگزین کردند:

$$\text{اگر } F_{pq}(x) = \circ \text{ و } F_{qr}(y) = ۱ \text{ آنگاه } F_{pr}(x + y) = ۱.$$

فضای حاصل را فضای متریک احتمال ضعیف می نامیم و در حقیقت تعمیمی از فضای متریک احتمال منگر می باشد. شوايزر و اسکالر همچنین مفهوم T -نرم پیوسته را معرفی کردند که دارای اهمیت زیادی در توسعه نظریه فضای متریک فازی است.

تعریف ۲.۱.۲. یک عمل دوتایی $[\circ, ۱] \times [\circ, ۱] \rightarrow [\circ, ۱]$: $*$ را یک T -نرم پیوسته گفته می شود، هرگاه $*$ در شرایط زیر صدق کند:

۱. شرکت پذیر و جابجایی باشد.

۲. پیوسته باشد.

۳. برای هر $a \in [0, 1]$ ، $a * 1 = a$.

۴. برای هر $a, b, c, d \in [0, 1]$ و اگر $a \leq c, b \leq d$ آنگاه $a * b \leq c * d$.

با استفاده از این تعریف، شوارتز و اسکالر یک فضای متریک احتمال به صورت زیر معرفی کردند:

تعریف ۳.۱.۲. زوج (X, F) یک فضای متریک احتمال است که در آن X یک مجموعه دلخواه و F یک عملگر روی $X \times X$ به توی مجموعه ای از همه توابع توزیع ممکن با ویژگی های زیر:

۱. برای هر $t > 0$ ، $F_{xy}(t) = 1$ اگر و تنها اگر $x = y$ ،

۲. $F_{xy}(0) = 0$.

۳. $F_{xy} = F_{yx}$.

۴. اگر $F_{xy}(t) = 1$ و $F_{yz}(s) = 1$ آنگاه $F_{xz}(t+s) = 1$.

یک فضای منگر $(X, F, *)$ یک فضای متریک احتمال همراه با یک T -نرم است که دارای شرط زیر می باشد:

$$F_{xz}(t+s) \geq F_{xy}(t) * F_{yz}(s).$$

۲.۲ فضای متریک فازی کالوا و سیکالا

از آنجایی که عدم قطعیت در مورد فاصله بین دو نقطه بیشتر مفهوم فازی دارد تا مفهوم تصادفی، کالوا و سیکالا [۳۵] مفهوم فضای متریک فازی را بر اساس فاصله دو نقطه بر اساس یک عدد فازی تعمیم دادند.

با فرض اینکه $\mathbb{G}$ یک مجموعه از همه اعداد فازی محدب نرمال نامنفی و نیم پیوسته بالایی باشد تعریف کالوا و سیکالا از فضای متریک فازی به صورت زیر است:

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنید X یک مجموعه دلخواه ناتهی و $d: X \times X \rightarrow \mathbb{G}$ یک عملگر باشد. با فرض اینکه $L, R: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ دو عملگر متقارن و نانزولی باشند و داشته باشیم $L(0, 0) = 0$ و $R(1, 1) = 1$ ، برای هر $x, y \in X$ و $0 < \alpha \leq 1$ داریم:

$$L_{\alpha}(d(x, y)) = [\lambda_{\alpha}(x, y), \rho_{\alpha}(x, y)]$$

که بردار (X, d, L, R) را فضای متریک فازی KS می نامیم و d یک متر فازی KS است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. $d(x, y) = \circ$ اگر و تنها اگر $x = y$

۲. برای هر $x, y \in X$ ، $d(x, y) = d(y, x)$

۳. برای هر $x, y, z \in X$

$$(A) \quad d(x, y)(s+t) \geq L(d(x, z)(s), d(z, y)(t)) \quad \text{اگر } s \leq \lambda_1(x, z) \text{ و } t \leq \lambda_1(z, y),$$

$$\lambda_1(x, y)$$

$$(B) \quad d(x, y)(s+t) \leq R(d(x, z)(s), d(z, y)(t)) \quad \text{اگر } s \geq \lambda_1(x, z) \text{ و } t \geq \lambda_1(z, y),$$

$$\lambda_1(x, y)$$

از انجایی که اعداد حقیقی نامنفی متعلق به $\mathbb{G}$ هستند، اگر فرض کنیم که $L(a, b) = \circ$ و

$$R(a, b) = \begin{cases} \circ & a = b = \circ, \\ 1 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

آنگاه فضای متریک معمولی ممکن است به عنوان یک فضای متریک KS در نظر گرفته شود. همچنین این تعریف، فضاها را نیز تعمیم می دهد (همانطور که در ادامه بیان می شود):

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید $(X, F, *)$ یک فضای منگر باشد. با فرض اینکه $d: X \times X \rightarrow \mathbb{G}$ به طوری که

$$d(x, y)(t) = \begin{cases} \circ & t < t_{x,y} = \sup\{t : F_{xy}(t) = \circ\}, \\ 1 - F_{xy}(t) & t > t_{x,y}, \end{cases}$$

حال اگر $R(a, b) = 1 - [(1-a) * (1-b)]$ و $L(a, b) = \circ$ آنگاه (X, d, L, R) یک فضای متریک KS است و همچنین یک فضای منگر می تواند به عنوان یک فضای متریک KS بررسی شود. در مواردی که این شرایط برآورده شوند، آنگاه $(X, F, *)$ یک فضای منگر است که در آن $a * b = 1 - R(1-a, 1-b)$ برای هر $a, b \in [\circ, 1]$ و $x, y \in X$ و $s \in \mathbb{R}$

$$F_{xy}(s) = \begin{cases} \circ & s \leq \lambda_1(x, y), \\ 1 - d(x, y)(s) & s \geq \lambda_1(x, y). \end{cases}$$

۳.۲ فضای متریک فازی کراموسیل و میشلک

کراموسیل و میشلک [۴۰] فضای متریک فازی را با استفاده از تعمیم فضای متریک احتمال به صورت زیر تعمیم دادند.

تعریف ۱.۳.۲. [۴۰] سه تایی $(X, M, *)$ یک فضای متریک فازی KM نامیده می شود اگر X یک مجموعه دلخواه، $*$ یک T -نرم پیوسته و M یک مجموعه فازی روی $X \times X \times [0, \infty)$ باشد و برای هر $x, y, z \in X$ و $t, s > 0$ داشته باشیم:

$$M(x, y, 0) = 0. \quad ۱.$$

$$x = y \text{ برای هر } t > 0, M(x, y, t) = 1 \text{ اگر و تنها اگر } x = y. \quad ۲.$$

$$M(x, y, t) = M(y, x, t). \quad ۳.$$

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s), \quad t, s > 0 \text{ برای هر } ۴.$$

$$M(x, y, \cdot) : [0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ نسبت به } t \text{ پیوسته است.} \quad ۵.$$

۴.۲ فضای متریک فازی جورج و ورمانی

در این بخش به بررسی مفهوم متر فازی معرفی شده توسط جورج و ورمانی [۲۷] و فضای نرمدار فازی می پردازیم. این تعریف در حقیقت یک اصلاح از تعریف کراموسیل و میشلک می باشد. که به صورت زیر بیان می شود:

تعریف ۱.۴.۲. [۲۷] سه تایی $(X, M, *)$ فضای متریک فازی گفته می شود اگر X یک مجموعه دلخواه، $*$ یک T -نرم پیوسته و M یک مجموعه فازی روی $X^2 \times (0, \infty)$ و برای همه $x, y, z \in X$ و $t, s > 0$ شرایط زیر برقرار باشد:

$$M(x, y, t) > 0. \quad ۱.$$

$$x = y \text{ برای همه } t > 0, M(x, y, t) = 1 \text{ اگر و تنها اگر } x = y. \quad ۲.$$

$$M(x, y, t) = M(y, x, t). \quad ۳.$$

$$M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s), \quad t, s > 0 \text{ برای همه } ۴.$$

$$M(x, y, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ نسبت به } t \text{ پیوسته است.} \quad ۵.$$

تعریف ۲.۴.۲. [۲۷] فرض کنید $(X, M, *)$ فضای متریک فازی و τ توپولوژی القا شده بوسیله متر فازی باشد. آنگاه برای هر دنباله $\{x_n\}$ در X ، اگر $x_n \rightarrow x$ و تنها اگر $M(x_n, x, t) \rightarrow 1$ هرگاه $n \rightarrow \infty$.

تعریف ۳.۴.۲. فرض کنید $M(x, y, t)$ یک متر فازی باشد. دنباله $\{x_n\}$ تحت متر فازی همگرا است به $a.e, x$ هرگاه

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} M(x_n, x, t) = 1\right) = 1.$$

تعریف ۴.۴.۲. [۲۷] دنباله $\{x_n\}$ در فضای متریک فازی $(X, M, *)$ ، دنباله کوشی است اگر و تنها اگر برای هر $0 < \epsilon < 1$ و $t > 0$ وجود داشته باشد $n_0 \in \mathbb{N}$ به طوری که برای همه $m, n \geq n_0$

$$M(x_n, x_m, t) > 1 - \epsilon.$$

تعریف ۵.۴.۲. یک فضای متریک فازی را کامل گوییم اگر و تنها اگر هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

سعادت و واعظ پور [۶۷] در سال ۲۰۰۵ مفهوم فضای باناخ فازی و برخی ویژگی‌های آن را با استفاده از مفاهیم بالا ارائه کردند که در ادامه به بیان آن می‌پردازیم.

تعریف ۶.۴.۲. [۶۷] سه تایی $(X, N, *)$ فضای نرم‌دار فازی گفته می‌شود اگر X یک فضای برداری، $*$ یک T -نرم پیوسته و N یک مجموعه فازی روی $X \times (0, \infty)$ و برای همه $x, y \in X$ و $t, s > 0$ شرایط زیر برقرار باشد:

$$1. \quad N(x, t) > 0.$$

$$2. \quad N(x, t) = 1 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0.$$

$$3. \quad \text{برای همه } 0 \neq \lambda, \quad N(\lambda x, t) = N(x, t/|\lambda|),$$

$$4. \quad N(x, t) * N(y, s) \leq N(x + y, t + s).$$

$$5. \quad N(x, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ نسبت به } t \text{ پیوسته است.}$$

$$6. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1.$$

لم ۱.۴.۲. [۶۷] با فرض اینکه N فضای نرم‌دار فازی باشد آنگاه

$$1. \quad N(x, t) \text{ یک تابع نانزولی با توجه به } t \text{ برای هر } x \in X \text{ می‌باشد.}$$

$$2. \quad N(x - y, t) = N(y - x, t).$$

تعریف ۷.۴.۲. [۶۷] با فرض اینکه $(X, N, *)$ یک فضای نرم‌دار باشد، اگر تعریف کنیم که

$$M(x, y, t) = N(x - y, t)$$

آنگاه M یک متر فازی روی X است که متر القا شده بوسیله نرم فازی N نامیده می‌شود.

لم ۲.۴.۲. [۶۷] متر فازی M القا شده به وسیله نرم فازی N روی فضای نرم‌دار فازی $(X, N, *)$ برای همه $x, y, z \in X$ و هر اسکالر $\lambda \neq 0$ دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

$$1. \quad M(x + z, y + z, t) = M(x, y, t).$$

$$۲. M(\lambda x, \lambda y, t) = M(x, y, t/|\lambda|).$$

مثال ۱.۴.۲. فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم‌دار باشد. با تعریف $a * b = ab$ یا $a * b = \min(a, b)$

$$N(x, t) = \frac{kt^n}{kt^n + m\|x\|}, \quad k, m, n \in \mathbb{R}^+$$

آنگاه $(X, N, *)$ یک فضای نرم‌دار فازی است. در حالت خاص اگر $k = n = m = 1$ خواهیم داشت:

$$N(x, t) = \frac{t}{t + \|x\|}$$

که نرم فازی استاندارد القا شده به وسیله نرم $\|\cdot\|$ نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۴.۲. [۶۷] فضای نرم‌دار فازی $(X, N, *)$ را فضای باناخ فازی گویند هرگاه X با توجه به متر القا شده توسط نرم فازی کامل باشد.

۵.۲ کاربرد فضای متریک فازی

در این بخش کاربرد فضای متریک فازی در حوزه پردازش تصویر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای نخستین بار ساموئل^{۲۱} [۵۴] از یک متر فازی به عنوان معیار فاصله در پنجره فیلتر برای کاهش نویز تصویر مورد استفاده قرار داد. متر فازی پیشنهادی برای مقایسه دو پیکسل از دو معیار استفاده می‌کند:

۱. مقدار شباهت بین بردارهای رنگ

۲. نزدیکی مکانی پیکسل‌ها در تصویر.

در روشهایی که قبلاً استفاده می‌شد از میانگین وزن دار فازی بهره می‌بردند ولی ساموئل متر فازی را برای تعیین بردارهای ورودی بکار برد لذا بردار خروجی بعد از فیلتر برداری است که بیشترین شباهت و نزدیکترین فاصله مکانی را در بین پیکس‌ها دارد. به بیان ساده تر وقتی در یک تصویر نویز وجود داشته باشد با استفاده از فیلترهای مختلفی می‌توانیم نویز موجود در یک پیکسل را با استفاده از پیکسل‌های کناری آن از بین ببریم. با استفاده از فیلتر متر فازی مقداری جایگزین پیکسل نویز دار می‌شود که بیشترین شباهت در رنگ و کمترین فاصله مکانی را با این پیکسل داشته باشد. در ادامه به شرح این رویکرد خواهیم پرداخت.

۱.۵.۲ کاهش نویز تصویر با استفاده از رویکرد متر فازی

فیلتر متر فازی با استفاده از دو عملگر به کاهش نویز تصویر می‌پردازد. به کمک یک عملگر مقدار شباهت پیکسل‌ها را سنجیده و با استفاده از عملگر دوم میزان نزدیکی مکانی پیکسل

^{۲۱}Samoel

ها را در تشخیص مقدار جایگزین پیکسل نویز دار بکار می گیرد. در ادامه به معرفی این دو عملگر می پردازیم.

مقدار شباهت

این عملگر مقدار شباهت فازی بین بردارهای رنگ را اندازه می گیرد. این تابع به صورت زیر تعریف می شود:

$$R(F_i, F_j) = \frac{c}{c + \|F_i - F_j\|}$$

که در آن $\|\cdot\|$ نرم بردار می باشد. همچنین c یک مقدار مثبت حقیقی است که برای کنترل انتشار تابع استفاده می شود. X مجموعه ای به صورت $\{0, 1, 2, \dots, 255\}$ و $F_k = (F_k^1, F_k^2, F_k^3)$ می باشد که بردار رنگ از پیکسل های تصویر را در موقعیت k (به صورت R, G, B) که مخفف قرمز، سبز و آبی هستند) نمایش می دهد. R توابع مختلفی دارد که می توان از آن ها استفاده کرد. همانطور که می دانیم مقادیر بزرگ c باعث می شود که R خیلی آهسته کاهش یابد و مقادیر کوچک c نتیجه عکس دارد. همچنین باید توجه داشت که متر R به دلیل ساختار غیر خطی که با فاصله (اقلیدسی) دارد در محدوده فاصله های کمتر که به شباهت های بیشتر مرتبط است، معقول تر می باشد. این رفتار مطلوب است زیرا باعث می شود که بردار خروجی از این روش پیشنهادی، پیکسل هایی از پنجره فیلتر باشد که بیشترین معیار تشابه را دارند.

نزدیکی مکانی

در مورد نزدیکی مکانی فازی بین پیکسل ها، فرض کنید پیکسل ها در یک پنجره $n \times n$ به نام W در مختصات دکارتی نمایش داده شوند. بنابراین موقعیت یک پیکسل F_i در پنجره W با $i = i_1, i_2 \in Y^2$ نمایش داده می شود که در آن $Y = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. در اینجا از متر فازی استاندارد القا شده بوسیله متر L_∞ استفاده می شود و آنرا با S نشان می دهند و برابر است با:

$$S(i, j, t) = \frac{t}{t + \|i - j\|_\infty},$$

که در آن $i, j \in Y^2$ و $t > 0$ و $\|i - j\|_\infty = \max\{|i_1 - j_1|, |i_2 - j_2|\}$. به راحتی می توان دید که پیکسل های دورتر از مرکز پنجره، دارای نزدیکی کمتری نسبت به سار پیکسل ها در پنجره می باشند. بطور تجربی نشان داده شده است که فاصله L_∞ نتیجه ای بهتر از فاصله اقلیدسی دارد. بنابراین $S(i, j, t)$ مقدار نزدیکی مکانی فازی بین پیکسل های رنگ F_i, F_j را با توجه به مقدار t بیان می کند. در اینجا نیز پارامتر t برای تنظیم اهمیت داده شده به معیار نزدیکی مکانی استفاده می شود.

حال از آنجایی که هر پیکسل به صورت یک بردار رنگ سه بعدی RGB و موقعیت مکانی نمایش

داده می شود. لذا برای رسیدن به هدف مورد بررسی از یک متر فازی ترکیبی به صورت زیر استفاده می شود:

$$CFM(F_i, F_j, t) = R(F_i, F_j) \cdot S(i, j, t) = \frac{c}{c + \|F_i - F_j\|} \cdot \frac{t}{t + \|i - j\|_\infty}. \quad (5.1.2)$$

اگر هر پیکسل F_i را به صورت $F_i = (F_i^1, F_i^2, F_i^3, i_1, i_2)$ نمایش دهیم می توان CFM را که یک متر فازی روی $X^3 \times Y^2$ است محاسبه کنیم. این متر فازی میزان شباهت رنگ و نزدیکی پیکسل ها را بیان می کند.

۲.۵.۲ مثال کاربردی

مثال ۱.۵.۲. فرض کنید ماتریس زیر معادل مقادیر پیکسل های تصویر روبرو در مقیاس خاکستری باشد:

40	45	47	50	47	45	45
40	50	49	60	48	45	50
45	45	44	45	159	50	50
45	51	161	165	159	155	45
45	152	157	162	154	155	150
159	154	156	153	151	150	155
155	155	153	156	151	150	155

[A]



شکل ۱.۲: تصویر در مقیاس خاکستری و ماتریس مقادیر.

می خواهیم با استفاده از الگوریتم شرح داده شده در بخش قبل مقدار عدد ۱۶۵ در ماتریس بالا را برآورد کنیم. برای این کار می توانیم همسایگی های 3×3 ، 5×5 و یا 7×7 استفاده کنیم. با فرض استفاده از همسایگی 3×3 داریم:

44	45	159
161	165	159
157	162	154

شکل ۲.۲: همسایگی 3×3 عدد ۱۶۵.

حال با استفاده از رابطه (۱.۱.۵) مقدار مقادیر هر پیکسل در همسایگی ۱۶۵ را حساب می کنیم و پیکسلی که داری بزرگترین CFM باشد را به عنوان بهترین جایگزین برای مقدار ۱۶۵ در نظر می گیریم. اگر تصویر رنگی باشد مقدار F_i به صورت $F_i = (F_i^1, F_i^2, F_i^3, i_1, i_2)$ نمایش داده می شود و یک بردار سه تایی برای رنگ های قرمز، سبز و آبی خواهیم داشت ولی از آنجایی که تصویر بالا در مقیاس خاکستری است لذا فقط یک رنگ داریم و آن عددی برای بیان شدت رنگ خاکستری است که بین ۰ تا ۲۵۵ متغیر خواهد بود. به عنوان مثال درایه اول در همسایگی 3×3 به صورت $F_1 = (44, 1, 1)$ نمایش داده می شود. حال بعد از محاسبه ماتریس حاصل از CFM برای تمام مقادیر همسایگی به صورت زیر عمل می کنیم.

در گام اول از اولین مقدار ماتریس یعنی ۴۴ شروع می کنیم و مقدار CFM را برای آن با تک تک درایه های ماتریس به دست آورده و سپس همه آن ها را با هم جمع می کنیم که مقدار آن برابر با ۳.۴۸۱۹ می باشد به همین ترتیب مقدار CFM را برای تمام مقادیر ماتریس همسایگی محاسبه می کنیم که حاصل برابر خواهد بود با

3.4819	3.6839	4.4412
4.6956	5.1206	4.7752
4.4905	4.8236	4.4491

شکل ۳.۲: مقادیر ماتریس CFM

همانطور که ملاحظه می شود بیشترین مقدار در ماتریس CFM برابر است با ۵.۱۲۰۶ که مربوط به پیکسل شماره (۲,۲) است. پس می توان مقدار این پیکسل یعنی ۱۶۵ را به عنوان بهترین جایگزین برای مرکز ماتریس همسایگی 3×3 در نظر گرفت. نکته با اهمیت اینجاست که اگر از الگوریتم پرکاربرد میانه در پردازش تصویر استفاده شود عدد ۱۶۲ را به عنوان بهترین برآورد برای پیکسل مرکزی ماتریس همسایگی در نظر می گیرد که این نتیجه نشان از دقت بالاتر الگوریتم متر فازی است. برای بیان دقت این روش فرض می کنیم که یک نویز به تصویر اضافه شود به گونه ای که ماتریس همسایگی به صورت زیر باشد:

44	45	159
161	0	159
157	162	154

شکل ۴.۲: مقادیر ماتریس با وجود نویز

حال با محاسبه مقادیر CFM داریم:

3.6138	3.8121	4.1555
4.4006	3.6750	4.4815
4.2141	4.5238	4.1862

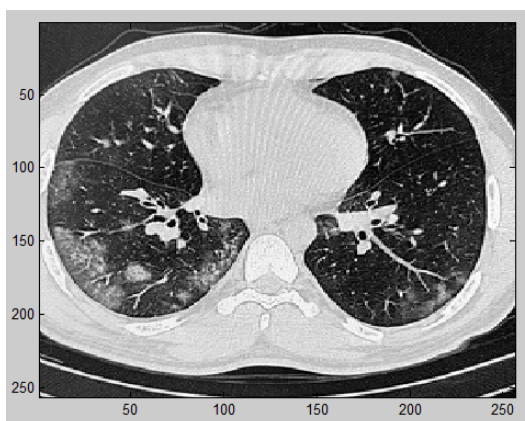
شکل ۵.۲: مقادیر ماتریس CFM

ملاحظه می شود که بیشترین مقدار در ماتریس CFM برابر است با ۴.۵۲۳۸ که مربوط به پیکسل شماره (۳,۲) است. پس می توان مقدار این پیکسل یعنی ۱۶۲ را به عنوان بهترین برآورد برای مرکز ماتریس همسایگی 3×3 در نظر گرفت. این درحالی است که با استفاده از الگوریتم میانه مقدار جایگزین برابر با ۱۵۷ خواهد بود. مشاهده می کنیم که با وجود نویز نیز الگوریتم متر فازی عملکرد بهتری نسبت به الگوریتم میانه دارد.

مثال ۲.۵.۲. سی تی اسکن قفسه سینه یک ابزار تصویربرداری رایج برای تشخیص ذات الریه است. در سی تی اسکن قفسه سینه، سرعت ایجاد تصاویر با کیفیت از بافت ریه بالا است و

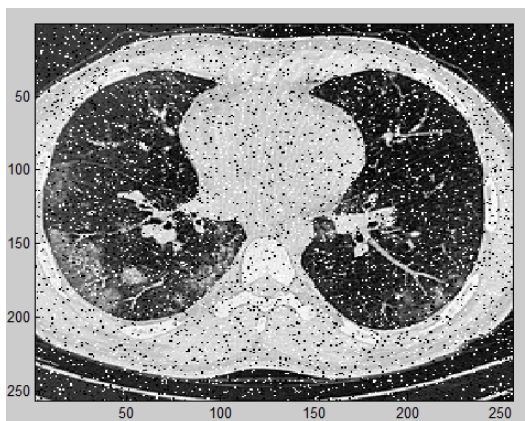
رادیولوژیست می‌تواند به سرعت میزان درگیری ریه با بیماری را مشخص کند. سی تی اسکن قفسه سینه ویژگی‌های رادیولوژیکی رایج در بیماران مبتلا به ذات‌الریه ناشی از کوید-۱۹ را مشخص می‌کند.

وجود نویز در تصاویر پزشکی می‌تواند پزشک را در تشخیص صحیح وجود یا عدم وجود بیماری کرونا دچار مشکل کند. در این بخش با استفاده از الگوریتم مترفازی به رفع نویز از تصویر سی تی اسکن ریه در یک بیمار دارای ویروس کوید-۱۹ خواهیم پرداخت. تصویر اولیه از سی تی اسکن ریه فرد بیمار به صورت زیر بوده است:



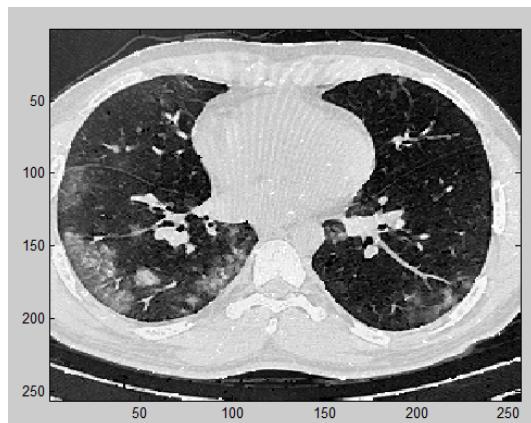
شکل ۶.۲: سی تی اسکن فرد مبتلا به ویروس کوید-۱۹

برای نشان دادن توان الگوریتم مترفازی در رفع نویز ابتدا با استفاده از نرم افزار متلب به تصویر اولیه نویز (فلفل و نمک ۰.۱٪) وارد می‌کنیم که تصویر زیر حاصل می‌شود:



شکل ۷.۲: سی تی اسکن با وجود نویز

بعد از استفاده از الگوریتم متر فازی و رفع نویز تصویر زیر به دست آمده است:



شکل ۸.۲: سی تی اسکن بعد از رفع نویز

۶.۲ فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی

یکی از مهمترین ابزار در داده کاوی، سنجش از راه دور، تشخیص الگو و بسیاری از زمینه های دیگر، اندازه گیری فاصله می باشد. روشهای مختلفی برای اندازه گیری فاصله دو عدد فازی بیان شده است. علی رغم وجود عدم قطعیت در این نوع داده ها ولی اندازه فاصله آن ها معمولا با یک عدد ثابت بیان شده است و نه بایک عدد فازی.

در ادامه با استفاده از تعریف فضای متریک فازی جرج و ورمانی [۲۷] و تعریف فضای نرم دار فازی سعادت و واعظ پور [۶۷]، تعاریف فضای متریک فازی و فضای نرم دار فازی برای مجموعه های فازی را ارائه خواهیم داد تا با رویکردی جدید به اندازه گیری فاصله دو عدد فازی بپردازیم. ویژگی های بیشتر این فضا در فصل چهارم بیان و اثبات خواهند شد.

تعریف ۱.۶.۲. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک مجموعه ناتهی دلخواه، $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ مجموعه ای از زیر مجموعه های فازی روی $\mathcal{X}$ و $*$ یک t -نرم پیوسته باشد. سه تایی $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), M', *)$ را یک فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی گوئیم هرگاه M' یک مجموعه فازی (یک متر فازی برای مجموعه های فازی) روی $(\mathcal{F}(\mathcal{X}) \times \mathcal{F}(\mathcal{X}) \times (\circ, \infty))$ باشد و شرایط زیر برای هر $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ و $t, s > \circ$ برقرار باشد:

$$1. \quad M'(\tilde{u}, \tilde{v}, \circ) > \circ$$

$$2. \quad M'(\tilde{u}, \tilde{v}, t) = 1 \quad \text{اگر و تنها اگر} \quad t > \circ$$

$$3. \quad M'(\tilde{u}, \tilde{v}, t) = M'(\tilde{v}, \tilde{u}, t)$$

$$4. \quad M'(\tilde{u}, \tilde{v}, t) * M'(\tilde{v}, \tilde{z}, s) \leq M'(\tilde{u}, \tilde{z}, t + s)$$

$$5. \quad M'(\tilde{u}, \tilde{v}, .) : (\circ, \infty) \rightarrow [\circ, 1]$$
 پیوسته است.

مثال ۱.۶.۲. فرض کنید $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), M', *)$ یک فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی باشد. با تعریف $a * b = ab$ یا $a * b = \min\{a, b\}$ و $\forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$

$$M'(\tilde{u}, \tilde{v}, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(\tilde{u}, \tilde{v})}, \quad k, m \in \mathbb{R}^+, n \geq 1.$$

به سادگی می توان نشان داد که $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), M', *)$ یک فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی است. در حالت خاص اگر داشته باشیم $k = n = m = 1$ آنگاه

$$M'(\tilde{u}, \tilde{v}, t) = \frac{t}{t + d(\tilde{u}, \tilde{v})}, \quad (۶.۱.۲)$$

آنچه متر فازی استاندارد برای مجموعه های فازی نامیده می شود.

تعریف ۲.۶.۲. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای برداری و $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ یک مجموعه از زیر مجموعه های فازی روی $\mathcal{X}$ باشد. سه تایی $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), N', *)$ را فضای نرم دار فازی برای مجموعه های فازی گوییم اگر $*$ یک t -نرم پیوسته و N' یک مجموعه فازی (یک نرم فازی برای مجموعه های فازی) روی $\mathcal{F}(\mathcal{X}) \times (0, \infty)$ و شرایط زیر برای هر $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ و $t, s > 0$ برقرار باشد:

$$۱. \quad N'(\tilde{u}, t) > 0.$$

$$۲. \quad N'(\tilde{u}, t) = 1 \text{ اگر و تنها اگر } \tilde{u} = I_{\{0\}}$$

$$۳. \quad N'(\alpha \tilde{u}, t) = N'(\tilde{u}, t/|\alpha|), \quad \alpha \neq 0$$

$$۴. \quad N'(\tilde{u}, t) * N'(\tilde{v}, s) \leq N'(\tilde{u} + \tilde{v}, t + s)$$

$$۵. \quad N'(\tilde{u}, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ پیوسته است}$$

$$۶. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N'(\tilde{u}, t) = 1.$$

مثال ۲.۶.۲. فرض کنید $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم دار باشد. با تعریف $a * b = ab$ و

$$N'(\tilde{u}, t) = \left(\exp \frac{\|\tilde{u}\|}{t}\right)^{-1},$$

برای $\tilde{u} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ و $t \in (0, \infty)$ ، آنگاه $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), N', *)$ یک فضای نرم دار فازی است.

تعریف ۳.۶.۲. فرض کنید $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), N', *)$ یک فضای نرم دار فازی برای مجموعه های فازی و $N'(\tilde{u}, t) = \varphi(\|\tilde{u}\|, t)$ یک نرم فازی برای مجموعه های فازی باشد که در آن $\varphi(\cdot, t)$ یک تابع نزولی و $\|\cdot\| = d(\cdot, I_{\{0\}})$ است، آنگاه آن را نرم فازی القا شده بوسیله d نامیده و به صورت N'_d نشان داده می شود.

مثال ۳.۶.۲. فرض کنید $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), N', *)$ یک فضای نرم دار فازی برای مجموعه های فازی باشد و همچنین داشته باشیم $a * b = ab$ یا $a * b = \min\{a, b\}$ و $\forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ در این حالت

$$N'(\tilde{u}, t) = \frac{kt^n}{kt^n + m\|\tilde{u}\|}, \quad k, m \in \mathbb{R}^+, n \geq 1,$$

یک نرم فازی برای مجموعه های فازی است. با توجه به اینکه $\|\tilde{u}\| = d(\tilde{u}, I_{\{\circ\}})$ می توان نوشت:

$$N'(\tilde{u}, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(\tilde{u}, I_{\{\circ\}})}.$$

شرایط تعریف ۲.۶.۲ برای $N'(\tilde{u}, t)$ برقرار هستند و $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), N', *)$ یک فضای نرم دار فازی برای مجموعه های فازی است. در حالت خاص اگر $k = n = m = 1$ آنگاه

$$N'(\tilde{u}, t) = \frac{t}{t + d(\tilde{u}, I_{\{\circ\}})},$$

آنچه نرم فازی استاندارد برای مجموعه های فازی نامیده می شود.

در فصل پنجم به عنوان یک کاربرد از فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی به بیان رویکردی جدید در رفع نویز تصویر خواهیم پرداخت.

آنچه در فصل آینده ارائه خواهد شد

۱. قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی فشرده تحت متر فازی
۲. قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی فشرده محدب تحت متر فازی
۳. مثال کاربردی از استفاده قانون قوی اعداد بزرگ (ارائه شده) در میانگین بوت استرپ

فصل ۳

قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی در فضای متریک فازی

مقدمه

مطالعه نظریه مجموعه های تصادفی با روبین^۱ [۶۴، ۶۵] آغاز شد. کندال^۲ [۳۶]، مادرون^۳ [۵۰]، فورت^۴ و کامبوزیا^۵ [۲۵] سایر افرادی بودند که مطالعات در این زمینه را ادامه دادند. انگیزه اصلی مطالعه مجموعه های تصادفی از نظر تئوری می تواند تعمیم متغیرهای تصادفی، تعمیم بردارهای تصادفی و استفاده از قضایای اثبات شده آن برای متغیرهای تصادفی فازی (بر اساس تعریف پوری و راسکو) باشد.

قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی و متغیرهای تصادفی فازی تحت متر هاسدورف-پمپئو و متر هاسدورف-پمپئو تعمیم یافته از سال ۱۹۸۲ مورد مطالعه قرار گرفت. این مطالعات بر پایه قضایای نشان دادن رادستر^۶ و هارمند^۶ قرار دارند. باید توجه داشت از آنجایی که زیرمجموعه های فشرده در فضای باناخ فضای برداری نیستند (با توجه به جمع مینکوفسکی) لذا بیان و اثبات قانون قوی اعداد بزرگ تحت متر هاسدورف در این فضا ساده نمی باشد ([۶۰] را ببینید).

^۱Robbins

^۲Kendall

^۳Matheron

^۴Fortet

^۵Kambouzia

^۶Rådström

پوری^۷ و رالسکو^۸ [۶۰] در ۱۹۸۳ قانون قوی اعداد بزرگ را برای مجموعه های تصادفی در فضای باناخ به شکل منسجم مورد مطالعه قرار دادند و می توان آن را سرآغاز پژوهش در این زمینه دانست. البته آرتستین^۹ [۷] در ۱۹۷۵ و کریس^{۱۰} [۱۶] در ۱۹۷۸ نیز مطالعاتی راجع به قانون قوی اعداد بزرگ در فضای p بعدی اقلیدسی انجام داده اند.

با معرفی مجموعه های تصادفی محدب ساده توسط لویز^{۱۱} و همکاران [۴۷] یک رویکرد جدید در بیان و اثبات قانون قوی اعداد بزرگ آغاز شد. در این رویکرد از قضایای نشانندن استفاده نمی شود. همچنین با توجه به اینکه فضای متریک برای مجموعه های فشرده در d_∞ جدا پذیر نمی باشد، برای حل این مشکل مجموعه های تصادفی ساده استفاده شد.

فضای متریک احتمالی توسط منگر^{۱۲} [۵۱] بیان شد، کسی که نظریه فضای متریک را تعمیم داد. در نظریه منگر مفهوم فاصله به صورت آماری یا احتمالی در نظر گرفته می شود یعنی او پیشنهاد کرد که یک تابع توزیع با هر جفت عنصر x و y به جای یک عدد مرتبط کنیم و برای هر عدد مثبت t این احتمال را که فاصله کمتر از t باشد را تعبیر کنیم. در سال های اخیر کارهای زیادی روی فضای متریک احتمالی انجام شده است. انگیزه معرفی فضای متریک احتمالی این حقیقت است که در بسیاری مواقع فاصله بین دو نقطه غیر دقیق می باشد. اما وقتی که عدم قطعیت فازی بیشتر از عدم قطعیت تصادفی باشد، همچون اندازه گیری طول به نظر می رسد که مفهوم فضای متریک فازی مناسب تر است. مفهوم فضای متریک فازی توسط کراموسیل^{۱۳} و میکالک^{۱۴} [۴۰] بیان شد و جورج^{۱۵} و ورمانی^{۱۶} [۲۷] این مفهوم را اصلاح کردند. در این فصل به بیان قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی در دو حالت کلی خواهیم پرداخت. در ابتدا این قضیه را برای مجموعه های تصادفی فشرده بیان و اثبات می کنیم. در گام بعد با بیان وجود برخی محدودیت ها در حالت اول قانون قوی را برای مجموعه های تصادفی فشرده محدب اثبات خواهیم کرد.

در همین راستا لازم است که برخی تعاریف، لم ها و قضایای مورد نیاز را بیان یا تعمیم دهیم. مهمترین ابزار ما در این فصل تعمیم قضیه نشانندن رادستر^{۱۷} و تعمیم قضیه همگرایی مغلوب لبگ می باشد که در بخش بعد به بیان واثبات آن ها خواهیم پرداخت.

۱.۳ قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی فشرده در فضای متریک فازی

در این بخش به دنبال بیان قانون قوی اعداد بزرگ ($SLLN$) برای مجموعه های تصادفی فشرده در فضای متریک فازی می باشیم.

^۷Puri

^۸Ralescu

^۹Artstein

^{۱۰}Cressie

^{۱۱}López's

^{۱۲}Menger

^{۱۳}Kramosil

^{۱۴}Michalek

^{۱۵}George

^{۱۶}Veeramani

^{۱۷}Rådström

فرض کنید $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم دار باشد که در آن $\|\cdot\|$ یک نرم در $\mathbb{R}^p$ است. در اینجا مجموعه ای از تمام زیر مجموعه های فشرده و فشرده محدب را به ترتیب با $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^p)$ و $\mathcal{H}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ نشان می دهیم.

می دانیم که جمع مینکوفسکی و ضرب اسکالر در $\mathbb{R}^p$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B\}, \quad \alpha A = \{\alpha a | a \in A\}, \quad (1.1.3)$$

که در آن $A, B \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^p)$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ می باشند. می دانیم که $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^p)$ تحت جمع مینکوفسکی یک فضای برداری نیست ولی تحت متر هاسدورف یک فضای متریک کامل می باشد. همانطور که در فصل اول بیان شد فاصله هاسدورف به صورت زیر تعریف می شود:

$$d_H(A, B) = \max \{ \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\| \}. \quad (1.2.3)$$

که در آن $A, B \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^p)$ [۶۰]. در ادامه $\|A\|$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\|A\| = d_H(A, \{0\}) = \sup \{ \|a\| \mid a \in A \}, \quad (1.3.3)$$

که در آن $A \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^p)$. از اینجا به بعد نماد d_H بیانگر فاصله هاسدورف می باشد. با فرض اینکه $\alpha = -1$ ، آنگاه خواهیم داشت $-A = (-1)A = \{-a \mid a \in A\}$ ، ولی در حالت کلی داریم $A + (-A) \neq \{0\}$ ، یعنی تحت جمع مینکوفسکی قرینه A برابر نیست با $-A$ (مگر حالتی که $A = \{a\}$). تفاضل مینکوفسکی برابر است با

$$A - B = A + (-1)B = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}.$$

در حالت کلی حتی اگر داشته باشیم

$$(A + C = B + C) \iff A = B$$

جمع یا تفریق ساده در اینجا معتبر نمی باشد یعنی $(A + B) - B \neq A$. برای حل این مشکل، هاکاهورا^{۱۸} در [۳۳] تفاضل هاکاهورا را معرفی کرد که با نماد $\ominus_H$ نمایش داده می شود و برابر است با:

$$A \ominus_H B = C \iff A = B + C, \quad (1.4.3)$$

و یکی از ویژگی های مهم $\ominus_H$ این است که $A \ominus_H A = \{0\}$. از دیدگاه جبر، تفاضل دو مجموعه A و B ممکن است به صورت رابطه جمع در (۱.۴.۳) یا یک جمع منفی تفسیر شود یعنی:

$$A \boxminus B = C \iff B = A + (-1)C, \quad (1.5.3)$$

که در آن $(-1)C$ یک مجموعه قرینه از C است. هر دو شرط (۱.۴.۳) و (۱.۵.۳) مکمل هم هستند و از این رو استفانینی^{۱۹} [۷۱] تفاضل تعمیم یافته هاکاهورا^{۲۰} را به صورت زیر پیشنهاد داد.

^{۱۸}Hukuhara
^{۱۹}Stefanini

^{۲۰}gH-difference

تعریف ۱.۱.۳. [۷۱] فرض کنید $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ باشد. تفاضل تعمیم یافته ها کاهورا (که با نماد $A \ominus_g B$ نشان داده می شود) بین دو مجموعه A و B به عنوان مجموعه $C \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ تعریف می شود به طوری که

$$A \ominus_g B = C \iff \begin{cases} (i) & A = B + C, \\ \text{or } (ii) & B = A + (-1)C. \end{cases} \quad (1.6.3)$$

گزاره ۱.۱.۳. [۷۱] تفاضل $\ominus_g$ دارای ویژگی های زیر است:

۱. $A \ominus_g A = \{0\}$.
۲. $(A + B) \ominus_g B = A$ ؛ $a)$ $A \ominus_g (A - B) = B$ ؛ $b)$ $A \ominus_g (A + B) = -B$ ؛ $c)$
۳. $A \ominus_g B$ وجود دارد اگر و تنها اگر $B \ominus_g A$ و $(-B) \ominus_g (-A)$ وجود دارد و $A \ominus_g B = (-B) \ominus_g (-A) = -(B \ominus_g A)$.
۴. در حالت کلی، $B \ominus_g A = A \ominus_g B$ به این معنی نیست که $A = B$ ؛ ولی $A \ominus_g B = C$ اگر و تنها اگر $B \ominus_g A = -C$ و در حالت خاص $C = \{0\}$ اگر و تنها اگر $A = B$.
۵. اگر $B \ominus_g A$ وجود داشته باشد آنگاه $A + (B \ominus_g A) = B$ یا $B - (B \ominus_g A) = A$ و هر دو برابر هستند اگر و تنها اگر $B \ominus_g A$ یک مجموعه تک عضوی باشد.
۶. اگر $B \ominus_g A = C$ وجود داشته باشد آنگاه برای همه $D \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^p)$ داریم $(B + D) \ominus_g A = C + D$ یا $B \ominus_g (A + D) = C - D$.

در فصل دوم به تعریف فضای متریک فازی و فضای نرم دار فازی به صورت کامل پرداختیم. در اینجا نیز برای پیوستگی مطالب و نیز استفاده از نمادهای متفاوت با فصل دوم یکبار دیگر بطور خلاصه این تعاریف را بیان خواهیم کرد.

تعریف ۲.۱.۳. [۲۸] فرض کنید $\mathcal{X}$ یک مجموعه دلخواه ناتهی و $*$ یک t -نرم پیوسته باشد. سه تایی $(\mathcal{X}, M, *)$ یک فضای متریک فازی است اگر M یک مجموعه فازی روی $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ و شرایط زیر برای هر $x, y, z \in \mathcal{X}$ و $t, s > 0$ برقرار باشد:

۱. $M(x, y, t) > 0$ ؛
۲. $M(x, y, t) = 1$ برای هر $t > 0$ ، اگر و تنها اگر $x = y$ ؛
۳. $M(x, y, t) = M(y, x, t)$ ؛
۴. $M(x, y, t) * M(y, z, s) \leq M(x, z, t + s)$ برای هر $t, s > 0$ ؛

۵. $M(x, y, \cdot) : (\circ, \infty) \rightarrow [\circ, 1]$ پیوسته باشد.

تعریف ۳.۱.۳ [۶۷] سه تایی $(\mathbb{R}^p, N, *)$ فضای نرم دار فازی گفته می شود اگر $*$ یک t -نرم پیوسته و N یک مجموعه فازی روی $\mathbb{R}^p \times (\circ, \infty)$ و شرایط زیر برای هر $x, y \in \mathbb{R}^p$ و $t, s > \circ$ برقرار باشد:

$$1. \quad N(x, t) > \circ.$$

$$2. \quad N(x, t) = 1 \text{ اگر و تنها اگر } x = \circ.$$

$$3. \quad N(\alpha x, t) = N(x, t/|\alpha|), \text{ برای هر } \alpha \neq \circ.$$

$$4. \quad N(x, t) * N(y, s) \leq N(x + y, t + s).$$

$$5. \quad N(x, \cdot) : (\circ, \infty) \rightarrow [\circ, 1] \text{ پیوسته است؛}$$

$$6. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1.$$

تعریف ۴.۱.۳ فرض کنید $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم دار باشد. همچنین جمع، ضرب، فاصله، نرم و تفاضل به ترتیب تعریف شده در روابط (۱.۱.۳)–(۱.۳.۳) و (۱.۶.۳) باشند. اگر $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ ، آنگاه $N_{d_H}(A, t)$ یک نرم فازی القا شده توسط $\|\cdot\|$ نامیده می شود.

مثال ۱.۱.۳ [۶۷] فرض کنید $(\mathbb{R}^p, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم دار باشد. ما تعریف می کنیم $a * b = ab$ یا $a * b = \min\{a, b\}$ و $\forall A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ آنگاه،

$$N_{d_H}(A, t) = \frac{kt^n}{kt^n + m\|A\|} = \frac{kt^n}{kt^n + md_H(A, \{\circ\})}, \quad k, m \in \mathbb{R}^+, n \geq 1.$$

در این حالت $(\mathbb{R}^p, N_{d_H}, *)$ یک فضای نرم دار فازی است.

لم ۱.۱.۳ فرض کنید $(\mathbb{R}^p, N_{d_H}, *)$ یک فضای نرم دار فازی باشد و $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$. اگر تعریف کنیم

$$M_{d_H}(A, B, t) = N_{d_H}(A \ominus_g B, t),$$

آنگاه M_{d_H} یک فضای متریک فازی روی $\mathbb{R}^p$ است که متر فازی القا شده بوسیله N_{d_H} نامیده می شود.

برهان. با توجه به گزاره ۱.۱.۳، تعریف ۴.۱.۳ و لم ۳ در [۶۷]، به سادگی می توان نشان داد لم ۱.۱.۳ برقرار است.

□

لم ۲.۱.۳ متر فازی M_{d_H} که القا شده بوسیله نرم فازی N_{d_H} است، برای هر $A, B, C \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ و هر مقدار اسکالر $\alpha \neq \circ$ دارای ویژگی های زیر می باشد:

$$1. \quad M_{d_H}(A + C, B + C, t) = M_{d_H}(A, B, t) ;$$

$$2. \quad M_{d_H}(\alpha A, \alpha B, t) = M_{d_H}(A, B, t/|\alpha|)$$

برهان. با استفاده از لم ۱.۱.۳، تعریف ۳.۱.۳ و لم ۴ در [۶۷]، به سادگی می توان نشان داد که نتیجه برقرار است. به عنوان نمونه بند ۲ را اثبات می کنیم:

$$M_{d_H}(\alpha A, \alpha B, t) = N_{d_H}(\alpha A \ominus_g \alpha B, t) = N_{d_H}(A \ominus_g B, t/|\alpha|) = M_{d_H}(A, B, t/|\alpha|).$$

□

۱.۱.۳ قضیه نشانیدن رادسترم تعمیم یافته

همانطور که می دانیم مجموعه های فشرده در فضای باناخ (با توجه به جمع مینکوفسکی) تحت متر هاسدورف، فضای برداری نیستند ([۶۰] را ببینید). قضیه نشانیدن رادسترم بیان می کند که مجموعه ای از زیر مجموعه های محدب و بسته کراندار از فضای باناخ را می توان در یک فضای نرم دار نشانید. این قضیه مارا قادر می سازد تا قانون قوی اعداد بزرگ را بیان واثبات نماییم.

در ادامه نشان خواهیم داد که $(\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p), M_{d_H}, *)$ یک فضای متریک فازی است سپس تعمیم قضیه نشانیدن رادسترم^{۲۱} را بیان خواهیم کرد.

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنید $(\mathbb{R}^p, N_{d_H}, *)$ یک فضای نرم دار فازی و M_{d_H} یک متر فازی القا شده بوسیله N_{d_H} باشد. با فرض اینکه $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ یک مجموعه از زیر مجموعه های فشرده عضو $\mathbb{R}^p$ باشند، آنگاه $(\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p), M_{d_H}, *)$ یک فضای متریک فازی است.

برهان. با استفاده از تعریف ۳.۱.۳ و تفاضل gH ، نشان می دهیم که برای هر $A, B, C \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ شرایط تعریف ۲.۱.۳ برقرار هستند:

$$1. \quad M_{d_H}(A, B, t) = N_{d_H}(A \ominus_g B, t) > 0.$$

$$2. \quad M_{d_H}(A, B, t) = N_{d_H}(A \ominus_g B, t) = N_{d_H}(\{0\}, t) = 1 \text{ اگر و تنها اگر } A = B$$

$$3. \quad M_{d_H}(A, B, t) = N_{d_H}(A \ominus_g B, t) = N_{d_H}(B \ominus_g A, t) = M_{d_H}(B, A, t)$$

$$4. \quad \text{برای هر } A, B, C \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p) \text{ و } t, s \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} M_{d_H}(A, B, t) * M_{d_H}(B, C, s) &= N_{d_H}(A \ominus_g B, t) * N_{d_H}(B \ominus_g C, s) \\ &\leq N_{d_H}(A \ominus_g C, t + s) \\ &= M_{d_H}(A, C, t + s); \end{aligned}$$

^{۲۱}Rådström

$$۵. \quad M_{d_H}(A, B, \cdot) = N_{d_H}(A \ominus_g B, \cdot) : (\circ, \infty) \rightarrow [\circ, 1] \text{ پیوسته است.}$$

□

رادسترم در [۶۳] نشان داد که $\mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ یک کلاس از مجموعه های محدب فشرده، می تواند بطور ایزومتری در فضای نرم دار نشانده شود. در ادامه نشان خواهیم داد که این ویژگی برای فضای نرم دار فازی نیز برقرار است.

فضای $\mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ نقش مهمی را در قضیه نشان دادن بازی می کند زیرا می تواند بطور ایزومتری در فضای نرم دار نشانده شود. در حقیقت قضیه زیر تعمیم یافته قضیه نشان دادن رادسترم از $\mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ به فضای نرم دار فازی می باشد.

قضیه ۲.۱.۳. یک فضای نرم دار فازی χ و یک تابع $j : \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \chi$ وجود دارد به طوری که

$$۱. \quad M_d(A, B, t) = M_d(j(A), j(B), t)$$

$$۲. \quad j(A + B) = j(A) + j(B)$$

$$۳. \quad j(\alpha A) = \alpha j(A), \quad \alpha \geq \circ$$

لازم است توجه داشته باشیم که فضای نرم دار فازی χ کامل نیست ولی همواره می توان کامل شده آن را به دست آورد. بنابراین $\mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ بوسیله تابع $j(\cdot)$ در فضای نرم دار فازی نشانده می شود.

برهان. از آنجایی که $\mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ یک کلاس از مجموعه های محدب و فشرده در فضای نرم دار است، برای هر $A, B, C \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ همه شرط های بجز ۳ و ۸-۱۰ قضیه نشان دادن رادسترم در [۶۳] برقرار هستند. حال شرط های ۳ و ۸-۱۰ را تحت M_{d_H} (بجای d_H) اثبات می کنیم. قضیه ۱.۱.۳، نشان داد که $\mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ تحت M_{d_H} متر پذیر است. بعلاوه، از لم ۲ در [۶۳]، داریم

$$\begin{aligned} M_{d_H}(A + C, B + C, t) &= N_{d_H}((A + C) \ominus_g (B + C), t) \\ &= N_{d_H}(A \ominus_g B, t) \\ &= M_{d_H}(A, B, t). \end{aligned}$$

از طرفی با توجه به اینکه M_{d_H} یک تابع نزولی و پیوسته از d_H است، از قضیه ۲ در [۶۳]، شرایط ۸-۱۰ نیز تحت M_{d_H} برقرار می باشند. بنابراین χ و $j : \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \chi$ وجود دارند. حال به اثبات ویژگی ۲ می پردازیم.

$$\begin{aligned} d(j(A + B), \{\circ\}) &= d(A + B, \{\circ\}) \\ &= d(j(A) + j(B), \{\circ\}). \end{aligned}$$

برای اثبات ویژگی ۳ داریم:

$$\begin{aligned} d(j(\alpha A), \{\circ\}) &= d(\alpha A, \{\circ\}) \\ &= \alpha d(A, \{\circ\}) \\ &= \alpha d(j(A), \{\circ\}) \\ &= d(\alpha j(A), \{\circ\}). \end{aligned}$$

□

۲.۱.۳ تعمیم قضایای همگرایی مغلوب لبگ و شاپلی-فلکمن-استار

دو ابزار بسیار مهم در اثبات قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی در فضای متریک فازی قضیه همگرایی مغلوب لبگ^{۲۲} و قضیه شاپلی-فلکمن-استار^{۲۳} می باشند که لازم است در این بخش تعمیمی از آن ها را در فضای متریک فازی بیان و اثبات کنیم. در ادامه تعمیم قضیه همگرایی مغلوب لبگ را برای مجموعه های تصادفی در فضای متریک فازی بیان خواهیم نمود.

همگرایی تقریباً مطمئن برای مجموعه های تصادفی فشرده تحت متر هاسدورف به صورت $d_H(X_n, X) \rightarrow \circ, a.s.$ بیان می شود [۵۳]. بطور معادل در فضای متریک فازی می توان گفت $X_n \rightarrow X, a.s.$ تحت متر فازی M_{d_H} برقرار است هرگاه

$$M_{d_H}(X_n, X, t) \rightarrow 1, a.s.$$

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنید $\{X_k | k \geq 1\}$ و X مجموعه های تصادفی در $\mathcal{H}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ باشند به طوری که $E\|X_k\| < \infty$ و $E\|X\| < \infty$. همچنین فرض کنید که X_k در فضای متریک فازی M_{d_H} به صورت $a.s.$ همگرا به X است و برای هر $k \geq 1$ داریم $d_H(X_k(\omega), \{\circ\}) < h(\omega)$ ، که در آن $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ انتگرال پذیر است. آنگاه تحت متر فازی M_{d_H}

$$EX_k \rightarrow EX. \quad (1.7.3)$$

برهان. با استفاده از نامساوی دبریو^{۲۴} [۱۸]، داریم

$$d_H(EX_k, EX) \leq E d_H(X_k, X), \quad (1.8.3)$$

^{۲۲}Lebesgue dominated convergence

^{۲۳}Shapley-Folkman- Starr

^{۲۴}Debreu

قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی فشرده در فضای متریک فازی ۶۱

می دانیم $d_H(X_k, X)$ یک متغیر تصادفی است، لذا $Ed_H(X_k, X)$ یک مقدار حقیقی خواهد بود. بنابر این با توجه به تعریف ۴.۱.۳ و لم ۱.۱.۳ داریم:

$$M_{d_H}(EX_k, EX, t) \geq M_{Ed_H}(X_k, X, t). \quad (۱.۹.۳)$$

از طرف دیگر، با توجه به فرض های قضیه، از آنجایی که $M_{d_H}(X_k, X, t) \rightarrow 1$ a.s.، پس $d_H(X_k, X) \rightarrow 0$ a.e. با استفاده از نامساوی مثلثی مشاهده می شود که

$$d_H(X_k, X) \leq d_H(X_k, \{\circ\}) + d_H(X, \{\circ\}) \leq h + d_H(X, \{\circ\}).$$

با توجه به انتگرال پذیری h و $X \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ ، $d_H(X_k, X)$ نیز انتگرال پذیر است. حال چون در قضیه همگرایی مغلوب لبگ (در حالت معمولی) داریم

$$Ed_H(X_k, X) \rightarrow 0,$$

بنابراین

$$M_{Ed_H}(X_k, X, t) \rightarrow 1.$$

بعلاوه از رابطه (۱.۸.۳) خواهیم داشت $d_H(EX_k, EX) \rightarrow 0$ a.e. همچنین با استفاده از (۱.۹.۳) داریم

$$M_{d_H}(EX_k, EX, t) \rightarrow 1.$$

□

که به معنای برقراری رابطه (۱.۷.۳) است.

اگر بعد فضا متناهی باشد، قضیه شاپلی-فلکمن-استار [۵] را ببینید) بیان می کند که برای هر $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ داریم

$$d\left[\sum_{k=1}^n X_k, \sum_{k=1}^n co X_k\right] \leq \sqrt{p} \max_{1 \leq k \leq n} \|X_k\|$$

که در آن p بعد X و $p < \infty$ [۶۱].

قضیه ۴.۱.۳. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ ، $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ در این حالت برای مجموعه های تصادفی تحت فضای متریک فازی داریم:

$$M_{d_H}\left(\sum_{k=1}^n X_k, \sum_{k=1}^n co X_k, t\right) \geq \min_{1 \leq k \leq n} M_{d_H}\left(X_k, \{\circ\}, \frac{t}{\sqrt{p}}\right), \quad (۱.۱۰.۳)$$

که در آن p بعد فضای $\mathbb{R}^p$ است.

برهان. با توجه به قضیه شاپلی-فلکمن در حالت معمولی [۵]، می دانیم که

$$d_H\left[\sum_{k=1}^n X_k, \sum_{k=1}^n co X_k\right] \leq \sqrt{p} \max_{1 \leq k \leq n} \|X_k\|.$$

برای تابع نزولی و پیوسته $\phi(d_H, t)$ (نسبت به d_H) و مقدار ثابت t و ویژگی های متر هاسدورف نیز داریم:

$$\begin{aligned}\phi(d_H[\sum_{k=1}^n X_k, \sum_{k=1}^n co X_k], t) &\geq \phi(\sqrt{p} \max_{1 \leq k \leq n} d_H(X_k, \{\circ\}), t) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n} \phi(d_H(\sqrt{p} X_k, \{\circ\}), t),\end{aligned}$$

آنگاه با توجه به لم های ۱.۱.۳ و ۲.۱.۳،

$$\begin{aligned}M_{d_H}(\sum_{k=1}^n X_k, \sum_{k=1}^n co X_k, t) &\geq \min_{1 \leq k \leq n} M_{d_H}(\sqrt{p} X_k, \{\circ\}, t) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n} M_{d_H}(X_k, \{\circ\}, \frac{t}{\sqrt{p}}).\end{aligned}$$

□

۳.۱.۳ قانون قوی اعداد بزرگ

در این بخش قانون قوی اعداد بزرگ را برای مجموعه های تصادفی در فضای متریک فازی بیان و اثبات خواهیم نمود.

در ادامه، ابتدا نشان می دهیم که $(\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p), M_{d_H}, *)$ یک فضای متریک فازی جداپذیر است سپس به قضیه قانون قوی اعداد بزرگ می پردازیم.

قضیه ۵.۱.۳. فضای متریک $(\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p), M_{d_H}, *)$ جداپذیر است.

برهان. می دانیم که $(\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p), d_H)$ فضای متریک جداپذیر است [۶۱] و با توجه به اینکه تصویر پیوسته از هر فضای متریک جداپذیر، جداپذیر است، لذا نتیجه برقرار می باشد. □

به سادگی می توان نشان داد که $(\mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p), M_{d_H}, *)$ نیز یک فضای متریک جداپذیر است.

قضیه ۶.۱.۳. فرض کنید $\{X_k | k \geq 1\}$ یک دنباله از مجموعه های تصادفی مستقل و هم توزیع و X_1 انتگرال پذیر باشد، آنگاه

$$\sum_{k=1}^n X_k / n \rightarrow E(co X_1), \text{ a.s.} \quad (۱.۱۱.۳)$$

که این همگرایی نسبت به متر فازی M_{d_H} می باشد.

برهان. فرض کنید $X_k : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ برای $k = 1, \dots, n$ مجموعه های تصادفی مستقل و هم توزیع باشند. همچنین، $co X_k : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ از انجایی که $\mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p) \subseteq \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ بنابراین $\{co X_k | k \geq 1\}$ نیز مستقل و هم توزیع هستند.

قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی فشرده در فضای متریک فازی ۶۳

در گام اول $\Omega \rightarrow \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ را برای $k = 1, \dots, n$ بررسی می کنیم. فرض کنید $j : \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \chi$ یک تابع ایزومتری بر اساس قضیه رادسترم باشد. از آنجایی که $(\mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p), M_{d_H}, *)$ جداپذیر (قضیه ۵.۱.۳) است، با توجه به لم ۱.۱.۳، به سادگی می توان نشان داد که فضای نرم دار فازی χ جداپذیر است.

پس $\{j(co X_k) | k \geq 1\}$ مجموعه های تصادفی χ -مقدار مستقل و هم توزیع هستند، که در آن j ایزومتری است. بوسیله فرم استاندارد قانون قوی اعداد بزرگ در $\mathbb{R}^p$ داریم

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n j(co X_k) \rightarrow E(j(co X_1)), \quad a.s.$$

حال نکته اصلی این است که نشان دهیم $E(j(co X_1)) = j(E(co X_1))$ ، اگر $co X_1$ انتگرال پذیر باشد.

ابتدا فرض کنید که $co X_1$ یک تابع ساده باشد، یعنی به ازای بعضی l داریم

$$co X_1 = \sum_{i=1}^l x_i I_{A_i}, \quad x_i \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p), \quad A_i \in \mathcal{A}.$$

به سادگی می توان نشان داد که $E(j(co X_1)) = j(E(co X_1))$. برای اثبات آن با توجه به قضیه ۲.۱.۳، داریم

$$\begin{aligned} E(j(co X_1)) &= E(j(\sum_{i=1}^l x_i I_{A_i})) \\ &= E(\sum_{i=1}^l j(x_i) I_{A_i}) \\ &= \sum_{i=1}^l j(x_i) P(A_i) \\ &= j(\sum_{i=1}^l x_i P(A_i)) \\ &= j(E(\sum_{i=1}^l x_i I_{A_i})) \\ &= j(E(co X_1)). \end{aligned}$$

از آنجایی که $co X_1$ اندازه پذیر است، یک دنباله از توابع ساده S_m وجود دارد که تحت متر فازی M_{d_H} تقریباً مطمئن $co X_1 \rightarrow S_m$. همچنین از پیوستگی M_{d_H} تقریباً مطمئن داریم

$$M_{d_H}(S_m, \{\circ\}, t) \rightarrow M_{d_H}(co X_1, \{\circ\}, t).$$

حال مجموعه تصادفی بریده شده t_m را برای $m \rightarrow \infty$ در نظر می گیریم

$$t_m(\omega) = \begin{cases} S_m(\omega) & M_{d_H}(S_m(\omega), \{\circ\}, t) \geq M_{d_H}(co X_1(\omega), \{\circ\}, \frac{t}{\gamma}) \\ \{\circ\} & \text{o.w} \end{cases}.$$

توجه داشته باشید که t_m توابع ساده هستند. به سادگی می توان دید که تحت متر فازی M_{d_H} ، تقریباً مطمئن داریم $t_m \rightarrow co X_1$ و

$$M_{d_H}(t_m(\omega), \{\circ\}, t) \geq M_{d_H}(co X_1(\omega), \{\circ\}, \frac{t}{p}).$$

در اینجا تمام فرضیه های قضیه ۳.۱.۳ برقرار هستند زیرا $t_m \rightarrow co X_1$ ، پس $Et_m \rightarrow E(co X_1)$. بنابراین در χ ،

$$j(Et_m) \rightarrow j(E(co X_1)).$$

به سادگی می توان ملاحظه کرد که $j(t_m) \rightarrow j(co X_1)$ و با استفاده از ویژگی های انتگرال بوخنر^{۲۵} داریم $E(j(t_m)) \rightarrow E(j(co X_1))$. که در آن $j(Et_m) = E(j(t_m))$ ، آنگاه نتیجه می شود که $j(E(co X_1)) = E(j(co X_1))$. بنابراین

$$M_{d_H}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (j(co X_k) \ominus_g j(E(co X_1))), \{\circ\}, t) \rightarrow 1, a.e$$

از ویژگی های تابع ایزومتري j ، نتیجه می شود که

$$M_{d_H}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n co X_k, E(co X_1), t) \rightarrow 1, a.s. \quad (1.12.3)$$

قضیه ۴.۱.۳ بیان می کند که

$$M_{d_H}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n co X_k, t) \geq \min_{1 \leq k \leq n} M_{d_H}(X_k, \{\circ\}, \frac{nt}{\sqrt{p}}).$$

از آنجایی که تقریباً مطمئن $\min_{1 \leq k \leq n} M_{d_H}(X_k, \{\circ\}, \frac{nt}{\sqrt{p}}) \rightarrow 1$ می توان نتیجه گرفت که تقریباً مطمئن

$$M_{d_H}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n co X_k, t) \rightarrow 1. \quad (1.13.3)$$

حال با توجه به چهارمین ویژگی در تعریف ۲.۱.۳، برای مجموعه های تصادفی داریم

$$M_{d_H}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, E(co X_1), t) \geq M_{d_H}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n co X_k, \frac{t}{p}) \\ * M_{d_H}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n co X_k, E(co X_1), \frac{t}{p}).$$

از آنجایی مقدار سمت راست به ۱ میل می کند (با توجه به روابط (۱.۱۲.۳) و (۱.۱۳.۳))، آنگاه تقریباً مطمئن داریم

$$M_{d_H}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, E(co X_1), t) \rightarrow 1$$

و اثبات کامل است.

□

۲.۳ قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی فشرده محدب در فضای متریک فازی

در بخش قبل قانون قوی اعداد بزرگ را برای مجموعه های تصادفی فشرده در فضای متریک فازی بیان کردیم و با توجه به معتبر نبودن جمع و تفاضل ساده در بین مجموعه ها از تفاضل تعمیم یافته ها کاهورا gH استفاده کردیم. یکی از محدودیت ها در راه استفاده از تفاضل gH برای مجموعه های فشرده این است که ممکن است همواره وجود نداشته باشد. برای رفع این مشکل استفانینی و بد^{۲۶} [۷۲] یک تفاضل تعمیم یافته برای مجموعه های فشرده محدب تعریف کردند که همواره وجود دارد. این تفاضل را با $\ominus_T$ نشان می دهند و تفاضل تعمیم یافته ها کاهورا کلی یا بطور خلاصه T -تفاضل^{۲۷} نامیده می شود. در ادامه برخی مفاهیم مقدماتی مجموعه های محدب فشرده که در بیان T -تفاضل مورد استفاده قرار می گیرند را بیان خواهیم کرد.

فرض کنید $\mathbb{S}^{n-1} = \{\mathcal{P} | \mathcal{P} \in \mathbb{R}^n, \|\mathcal{P}\| = 1\}$ یک کره واحد باشد. تابع تکیه گاه^{۲۸} برای $A \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ برابر است با $s_A : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف می شود

$$s_A(x) = \sup\{\langle x, a \rangle | a \in A\}, \quad \forall x \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad (2.1.3)$$

که در آن $(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ یک فضای هیلبرت^{۲۹} (حقیقی) با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ و نرم $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ است. تفاضل gH برای $A, B \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ بوسیله توابع تکیه گاه می تواند بیان شود [۷۲]. $A, B \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ را با $C = A \ominus_g B$ که در رابطه (۱.۶.۳) تعریف شد در نظر می گیریم. فرض کنید A, B, C و s_{-C} به ترتیب توابع تکیه گاه s_A, s_B, s_C و $(-1)C$ باشند. در حالت (i) داریم $s_A = s_B + s_C$ و در حالت (ii)، داریم $s_B = s_A + s_{-C}$. بنابراین برای هر $\mathcal{P} \in \mathbb{S}^{n-1}$ [۷۲]

$$s_C(\mathcal{P}) = \begin{cases} s_A(\mathcal{P}) - s_B(\mathcal{P}) & \text{در حالت (i),} \\ s_{-B}(\mathcal{P}) - s_{-A}(\mathcal{P}) & \text{در حالت (ii).} \end{cases} \quad (2.2.3)$$

اگر $A \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ ، آنگاه A می تواند به یک خانواده از فواصل فشرده که آن را مشخص می کند وابسته باشد. برای $x \in \mathbb{R}^n$ ، تابع تکیه گاه $s_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$s_A(x) = \max\{\langle a, x \rangle | a \in A\}. \quad (2.3.3)$$

به عنوان دوگان تابع تکیه گاه، $l_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$l_A(x) = \min\{\langle a, x \rangle | a \in A\}. \quad (2.4.3)$$

^{۲۶}Bede

^{۲۷}total gH-difference

^{۲۸}support function

^{۲۹}Hilbert space

همچنین، استفانینی و بد [۷۲] برای هر $\mathcal{P} \in \mathbb{R}^n$ ، فواصل فشرده زیر را تعریف کردند

$$I_A(\mathcal{P}) = [l_A(\mathcal{P}), s_A(\mathcal{P})]. \quad (۲.۵.۳)$$

تفاضل gH روی فواصل برای همه $\mathcal{P} \in \mathbb{S}^{n-1}$ به خوبی تعریف می شوند، یعنی داریم

$$\begin{aligned} I_{A,B}(\mathcal{P}) &= I_A(\mathcal{P}) \ominus_g I_B(\mathcal{P}), \\ I_{B,A}(\mathcal{P}) &= I_B(\mathcal{P}) \ominus_g I_A(\mathcal{P}) = -I_{A,B}(\mathcal{P}), \end{aligned}$$

و همچنین یک فاصله فشرده برای $I_{A,B}(\mathcal{P})$ به صورت زیر است:

$$I_{A,B}(\mathcal{P}) = [I_{A,B}^-(\mathcal{P}), I_{A,B}^+(\mathcal{P})], \forall \mathcal{P} \in \mathbb{S}^{n-1}, \quad (۲.۶.۳)$$

که در آن

$$\begin{aligned} I_{A,B}^-(\mathcal{P}) &= \min\{l_A(\mathcal{P}) - l_B(\mathcal{P}), s_A(\mathcal{P}) - s_B(\mathcal{P})\}, \\ I_{A,B}^+(\mathcal{P}) &= \max\{l_A(\mathcal{P}) - l_B(\mathcal{P}), s_A(\mathcal{P}) - s_B(\mathcal{P})\}. \end{aligned}$$

تعریف ۱.۲.۳. [۷۲] فرض کنید $A, B \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ و خانواده ای از مجموعه ها را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(A, B) &= \{C | C \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^n), A \subseteq B + C, B \subseteq A - C\} \\ &= \{C | C \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^n), I_{A,B} \subseteq I_C\}, \end{aligned} \quad (۲.۷.۳)$$

که در آن I_C و $I_{A,B}$ توابع مجموعه مقدار تعریف شده در روابط (۲.۶.۳) و (۲.۵.۳) می باشند. مجموعه $\mathbb{D}(A, B)$ را مجموعه تفاضل کلی از زوج (A, B) خواهیم نامید. می توان نتیجه گرفت که $\mathbb{D}(B, A) = -\mathbb{D}(A, B)$ ، یعنی $C \in \mathbb{D}(A, B)$ اگر و تنها اگر $-C \in \mathbb{D}(B, A)$.

تفاضل کلی جدید، به عنوان عنصری از خانواده $\mathbb{D}(A, B)$ ، با شرایط اضافی مورد نیاز تعریف می شود.

تعریف ۲.۲.۳. [۷۲] $C \in \mathbb{D}(A, B)$ را نرم-مینیمال می نامیم اگر $C' \in \mathbb{D}(A, B)$ وجود نداشته باشد که $\|C'\| < \|C\|$.

مجموعه از همه عناصر $\mathbb{D}(A, B)$ با ویژگی نرم-مینیمال بوسیله $\mathbb{D}_{norm}(A, B)$ نشان داده می شود.

بعلاوه، یک عدد حقیقی $\alpha(A, B) \geq 0$ وابسته به A و B وجود دارد به طوری که

$$\|C\| = \alpha(A, B) \quad \forall \quad C \in \mathbb{D}_{norm}(A, B); \quad (۲.۸.۳)$$

واضح است که $\alpha(A, B) \leq \|A - B\|$ ، زیرا $A - B \in \mathbb{D}(A, B)$.

تعریف ۳.۲.۳. [۷۲] فرض کنید $A, B \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^n)$. مجموعه محدب زیر همواره وجود دارد و یکتاست

$$A \ominus_T B = cl(conv \bigcup \{C \mid C \in \mathbb{D}_{norm}(A, B)\}), \quad (۲.۹.۳)$$

جایی که cl بستار $\mathbb{D}_{norm}(A, B)$ با توجه به اجتماع محدبی از عناصر آن است. $A \ominus_T B \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ دارای ویژگی های زیر می باشد:

$$۱. \quad A \subseteq B + A \ominus_T B$$

$$۲. \quad B \subseteq A - A \ominus_T B$$

$$۳. \quad A \ominus_T B \subseteq A - B$$

$$۴. \quad A \ominus_T B \text{ با توجه به } \mathbb{D}(A, B) \text{ نرم-مینیمال است؛}$$

$$۵. \quad A \ominus_T B = \{0\} \text{ اگر و تنها اگر } A = B$$

$$۶. \quad B \ominus_T A = -(A \ominus_T B)$$

$$۷. \quad \text{اگر تفاضل } gH \text{ وجود داشته باشد آنگاه } A \ominus_g B = A \ominus_T B$$

$$۸. \quad \text{تفاضل } A \ominus_T B \text{ منطبق است با فاصله هاسدرف، یعنی،}$$

$$\|A \ominus_T B\| = \alpha(A, B) = d_H(A, B).$$

مجموعه $A \ominus_T B \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ تفاضل کلی gH (بطور مخفف تفاضل T) برای دو مجموعه A و B نامیده می شود.

در بخش قبل دو لم ۱.۱.۳ و ۲.۱.۳ برای تفاضل gH بیان شد. در اینجا نیز لم هایی مشابه آن ها برای تفاضل T بیان می شود.

لم ۱.۲.۳. فرض کنید $(\mathcal{X}, N_{d_H}, *)$ یک فضای نرم دار فازی باشد و $A, B \in \mathcal{K}_{cc}(\mathcal{X})$. اگر تعریف کنیم که

$$M_{d_H}(A, B, t) = N_{d_H}(A \ominus_T B, t),$$

آنگاه M_{d_H} یک فضای متریک روی $\mathcal{X}$ است، که فضای متریک القا شده بوسیله نرم فازی N_{d_H} نامیده می شود.

برهان. با توجه به تعاریف ۳.۲.۳، ۴.۱.۳ و لم ۳ در [۶۷]، به سادگی می توان نشان داد که لم ۱.۲.۳ برقرار است. $\square$

لم ۲.۲.۳. متر فازی M_{d_H} که القا شده بوسیله N_{d_H} می باشد، برای همه $A, B, C \in \mathcal{K}_{cc}(\mathcal{X})$ و هر مقدار اسکالر $\lambda \neq 0$ دارای ویژگی های زیر است:

$$1. \quad M_{d_H}(A + C, B + C, t) = M_{d_H}(A, B, t) ;$$

$$2. \quad M_{d_H}(\lambda A, \lambda B, t) = M_{d_H}(A, B, t/|\lambda|)$$

برهان. با توجه به لم ۱.۲.۳، تعریف ۳.۱.۳ و لم ۴ در [۶۷]، به سادگی می توان نشان داد که نتیجه برقرار است، به عنوان بخشی از اثبات، شرط (۲) را بررسی می کنیم.

$$M_{d_H}(\lambda A, \lambda B, t) = N_{d_H}(\lambda A \ominus_T \lambda B, t) = N_{d_H}(A \ominus_T B, t/|\lambda|) = M_{d_H}(A, B, t/|\lambda|).$$

□

۱.۲.۳ قضیه نشان دادن رادسترم تعمیم یافته

همانطور که در بخش ۱.۲.۳ بیان شد مجموعه های فشرده در فضای باناخ (با توجه به جمع مینکوفسکی) تحت متر هاسدورف، فضای برداری نیستند ([۶۰] را ببینید). قضیه نشان دادن رادسترم بیان می کند که مجموعه ای از زیر مجموعه های محدب و بسته کراندار از فضای باناخ را می توان در یک فضای نرم دار نشان داد. در این بخش قضیه رادسترم را برای مجموعه های محدب فشرده تحت تفاضل T اثبات خواهیم کرد.

در ادامه نشان خواهیم داد که $(\mathcal{K}_{cc}(\mathcal{X}), M_{d_H}, *)$ یک فضای متریک فازی است سپس تعمیم قضیه نشان دادن رادسترم^{۳۰} را بیان خواهیم کرد.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید $(\mathcal{X}, N_{d_H}, *)$ یک فضای نرم دار فازی و M_{d_H} یک متر فازی القا شده بوسیله N_{d_H} باشد. با فرض اینکه $\mathcal{K}_{cc}(\mathcal{X})$ یک مجموعه از زیر مجموعه های محدب و فشرده عضو $\mathcal{X}$ باشند، آنگاه $(\mathcal{K}_{cc}(\mathcal{X}), M_{d_H}, *)$ یک فضای متریک فازی است.

برهان. با استفاده از تعریف ۳.۱.۳ و تفاضل T ، نشان می دهیم که برای هر $A, B, C \in \mathcal{K}_{cc}(\mathcal{X})$ شرایط تعریف ۲.۱.۳ برقرار هستند:

$$1. \quad M_{d_H}(A, B, t) = N_{d_H}(A \ominus_T B, t) > \circ, \forall t > \circ$$

$$2. \quad M_{d_H}(A, B, t) = N_{d_H}(A \ominus_T B, t) = N_{d_H}(\{\circ\}, t) = 1 \text{ اگر و تنها اگر } A = B$$

$$3. \quad M_{d_H}(A, B, t) = N_{d_H}(A \ominus_T B, t) = N_{d_H}(B \ominus_T A, t) = M_{d_H}(B, A, t)$$

$$4. \quad \forall A, B, C \in \mathcal{K}_{cc}(\mathcal{X}) \text{ و } t, s > \circ$$

$$\begin{aligned} M_{d_H}(A, B, t) * M_{d_H}(B, C, s) &= N_{d_H}(A \ominus_T B, t) * N_{d_H}(B \ominus_T C, s) \\ &\leq N_{d_H}(A \ominus_T B + B \ominus_T C, t + s) \\ &\leq N_{d_H}(A \ominus_T C, t + s) \\ &= M_{d_H}(A, C, t + s); \end{aligned}$$

۵. $M_{d_H}(A, B, \cdot) = N_{d_H}(A \ominus_T B, \cdot) : (\circ, \infty) \rightarrow [\circ, 1]$ پیوسته است.

□

در ادامه قضیه رادسترم را بیان می کنیم.

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای نرم دار جداپذیر است. یک فضای نرم دار χ و یک تابع ایزومتري $j : \mathcal{H}_{cc}(\mathcal{X}) \rightarrow \chi$ با شرایط زیر وجود دارد

$$1. \quad M_{d_H}(A, B, t) = M_{d_H}(j(A), j(B), t) ;$$

$$2. \quad j(A + B) = j(A) + j(B) ;$$

$$3. \quad j(\lambda A) = \lambda j(A), \quad \forall \lambda \geq \circ.$$

لازم است توجه داشته باشیم که فضای نرم دار فازی χ کامل نیست ولی همواره می توان کامل شده آن را ایجاد کرد. بنابراین $\mathcal{H}_{cc}(\mathcal{X})$ بوسیله تابع $j(\cdot)$ در فضای نرم دار فازی نشانده می شود.

برهان. اثبات قضیه مشابه قضیه ۲.۱.۳ می باشد.

□

۲.۲.۳ قضیه همگرایی مغلوب لبگ تعمیم یافته

در ادامه تعمیم قضیه همگرایی مغلوب لبگ را برای مجموعه های تصادفی در فضای متریک فازی بیان خواهیم نمود.

همگرایی تقریباً همه جا برای مجموعه های تصادفی فشرده محدب تحت متر هاسدورف به صورت $a.s., d_H(X_n, X) \rightarrow \circ$ بیان می شود [۵۳]. بطور معادل در فضای متریک فازی می توان گفت $a.s., X_n \rightarrow X$ برقرار است تحت متر فازی $M_{d_H}(2.9.3)$ هرگاه

$$M_{d_H}(X_n, X, t) \rightarrow 1, \quad a.s.$$

.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید $\{X_k | k \geq 1\}$ و X مجموعه های تصادفی در $\mathcal{H}_{cc}(\mathcal{X})$ باشند به طوری که $E\|X_k\| < \infty$ و $E\|X\| < \infty$. همچنین فرض کنید که X_k در فضای متریک فازی M_{d_H} به صورت $a.s.$ همگرا به X است و برای هر $k \geq 1$ داریم $d_H(X_k(\omega), \{\circ\}) < h(\omega)$ که در آن $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ انتگرال پذیر است. آنگاه تحت متر فازی M_{d_H}

$$EX_k \rightarrow EX. \quad (2.10.3)$$

برهان. اثبات قضیه مشابه قضیه ۲.۱.۳ می باشد.

□

۳.۲.۳ قانون قوی اعداد بزرگ

در این بخش با استفاده از قضیه رادسترم، قانون قوی اعداد بزرگ را برای مجموعه های تصادفی محدب فشرده در فضای باناخ فازی بیان می کنیم. در ادامه ابتدا به تعریفی از فضای باناخ فازی اشاره شده سپس نشان خواهیم داد که یک فضای متریک فازی جداپذیر است.

تعریف ۴.۲.۳ [۶۷] فضای نرم دار فازی $(\mathcal{F}, N, *)$ فضای باناخ فازی گفته می شود هرگاه $\mathcal{F}$ با توجه به متر فازی القا شده بوسیله نرم فازی، کامل باشد.

قضیه ۴.۲.۳. فضای نرم دار فازی $(\mathcal{H}_c(\mathcal{F}), M_{d_H}, *)$ جداپذیر است.

برهان. می دانیم که $(\mathcal{H}_c(\mathcal{F}), d_H)$ فضای متریک جداپذیر است [۶۱] و با توجه به اینکه تصویر پیوسته از یک فضای متریک جداپذیر، جداپذیر است لذا نتیجه برقرار می باشد.

□

نتیجه ۱.۲.۳. فضای متریک فازی $(\mathcal{H}_{cc}(\mathcal{F}), M_{d_H}, *)$ جداپذیر است.

قضیه ۵.۲.۳. فرض کنید $\{X_k | k \geq 1\}$ یک دنباله از مجموعه های تصادفی مستقل و هم توزیع در $\mathcal{H}_{cc}(\mathcal{F})$ باشند به طوری که X_1 انتگرال پذیر باشد، آنگاه

$$\frac{\sum_{k=1}^n X_k}{n} \rightarrow E(X_1), \text{ a.s.} \quad (2.11.3)$$

این همگرایی تحت متر فازی M_{d_H} می باشد.

برهان. فرض کنید $j : \mathcal{H}_{cc}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{X}$ یک تابع ایزومتری بر اساس قضیه رادسترم باشد. از آنجایی که $(\mathcal{H}_{cc}(\mathcal{F}), M_{d_H}, *)$ جداپذیر (نتیجه ۱.۲.۳) است، با توجه به لم، ۱.۲.۳ به سادگی می توان نشان داد که فضای نرم دار فازی $\mathcal{X}$ جداپذیر است.

پس $\{j(X_k) | k \geq 1\}$ مجموعه های تصادفی $\mathcal{X}$ -مقدار مستقل و هم توزیع هستند، که در آن j ایزومتری است. بوسیله فرم استاندارد قانون قوی اعداد بزرگ در فضای باناخ، داریم

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n j(X_k) \rightarrow E(j(X_1)), \text{ a.s.}$$

حال نکته اصلی این است که نشان دهیم $E(j(X_1)) = j(E(X_1))$ ، اگر X_1 انتگرال پذیر باشد.

ابتدا فرض کنید که X_1 یک تابع ساده باشد، یعنی به ازای بعضی l داریم

$$X_1 = \sum_{i=1}^l x_i I_{A_i}, x_i \in \mathcal{H}_{cc}(\mathcal{F}), A_i \in \mathcal{A}.$$

به سادگی می توان نشان داد که $E(j(X_1)) = j(E(X_1))$. برای اثبات آن با توجه به قضیه ۲.۲.۳، داریم

$$\begin{aligned} E(j(X_1)) &= E(j(\sum_{i=1}^l x_i I_{A_i})) \\ &= E(\sum_{i=1}^l j(x_i) I_{A_i}) \\ &= \sum_{i=1}^l j(x_i) P(A_i) \\ &= j(\sum_{i=1}^l x_i P(A_i)) \\ &= jE(\sum_{i=1}^l x_i I_{A_i}) \\ &= j(E(X_1)). \end{aligned}$$

از آنجایی که X_1 اندازه پذیر است، یک دنباله از توابع ساده S_m وجود دارد که تحت متر فازی M_{d_H} تقریباً مطمئن $S_m \rightarrow X_1$. همچنین از پیوستگی M_{d_H} تقریباً مطمئن داریم

$$M_{d_H}(S_m, \{\circ\}, t) \rightarrow M_{d_H}(X_1, \{\circ\}, t).$$

حال مجموعه تصادفی بریده شده t_m را برای $m \rightarrow \infty$ در نظر می گیریم

$$t_m(\omega) = \begin{cases} S_m(\omega) & M_{d_H}(S_m(\omega), \{\circ\}, t) \geq M_{d_H}(X_1(\omega), \{\circ\}, \frac{t}{\varphi}) \\ \{\circ\} & \text{o.w} \end{cases}.$$

توجه داشته باشید که t_m توابع ساده هستند. به سادگی می توان دید که تحت متر فازی M_{d_H} ، تقریباً مطمئن داریم $t_m \rightarrow X_1$ و

$$M_{d_H}(t_m(\omega), \{\circ\}, t) \geq M_{d_H}(X_1(\omega), \{\circ\}, \frac{t}{\varphi}).$$

در اینجا تمام فرضیه های قضیه ۲.۲.۳ برقرار هستند و چون $t_m \rightarrow X_1$ پس $Et_m \rightarrow E(X_1)$. بنابراین در χ ،

$$j(Et_m) \rightarrow j(E(X_1)).$$

به سادگی می توان ملاحظه کرد که $j(t_m) \rightarrow j(X_1)$ و با استفاده از ویژگی های انتگرال بوخنر^{۳۱} داریم $E(j(t_m)) \rightarrow E(j(X_1))$. که در آن $j(Et_m) = E(j(t_m))$ ، آنگاه نتیجه می شود که $j(E(X_1)) = E(j(X_1))$ بنابراین

$$M_{d_H}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (j(X_k) \ominus_T j(E(X_1))), \{\circ\}, t) \rightarrow 1, \text{ a.e}$$

^{۳۱}Bochner integral

از ویژگی های تابع ایزومتری j ، نتیجه می شود که

$$M_{d_H}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k, E(X_1), t) \rightarrow 1, \text{ a.s.} \quad (2.12.3)$$

□

۳.۳ میانگین بوت استرپ در فضای متریک فازی

روش بوت استرپ^{۳۲} که توسط افرون^{۳۳} [۲۲] معرفی شد، یک روش باز نمونه گیری برای برآورد توزیع های آماری بر اساس مشاهدات مستقل است. آسریا^{۳۴} [۸] قانون قوی بوت استرپ را بیان کرد. همچنین آسریا و همکاران در [۹] این قضیه را برای U -آماره های بوت استرپی ارائه کردند. سیاسگو^{۳۵} [۱۷] قانون قوی و قانون ضعیف اعداد بزرگ را برای میانگین نمونه بوت استرپ مورد مطالعه قرار داد.

در این بخش می خواهیم قانون قوی اعداد بزرگ در فضای متریک فازی را برای میانگین بوت استرپ تعمیم دهیم.

فرض کنید $\{X_k | k \geq 1\}$ یک دنباله نامتناهی از مجموعه های تصادفی مستقل و هم توزیع تعریف شده در فضای احتمال (Ω, A, P) و X_1 انتگرال پذیر باشد. برای هر $n = 1, 2, \dots$ ، فرض کنید $Y_{n,1}, Y_{n,2}, \dots, Y_{n,m(n)}$ یک نمونه بوت استرپ افرون به اندازه $m(n)$ باشد که در آن $\{m(n)\}$ یک عدد صحیح مثبت است. متغیرهای $Y_{n,1}, Y_{n,2}, \dots, Y_{n,m(n)}$ از m بار نمونه گیری با جایگذاری از دنباله $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ می باشد به طوری که در هر مرحله یک عضو با احتمال $\frac{1}{n}$ انتخاب می شود [۱۷].

فرض کنید که $\bar{X}_n^*$ میانگین نمونه بوت استرپ باشد که در آن

$$\bar{X}_n^* = \frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{m(n)} Y_{n,i}.$$

پوری و رالسکو [۶۱] قضایای حدی برای مجموعه های تصادفی در فضای باناخ را بیان کردند. در حقیقت، آن ها نشان دادند که

$$d_H(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, E(X_1)) \rightarrow 0, \text{ a.s.}$$

حال اگر این قضیه را برای میانگین بوت استرپ بکار ببریم خواهیم داشت:

$$d_H(\frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{m(n)} Y_{n,i}, E(X_1)) \rightarrow 0, \text{ a.s.}$$

^{۳۲}Bootstrap
^{۳۳}Efron

^{۳۴}Athreya

^{۳۵}Csörgö

گاهی اوقات ممکن است نظر کارشناس در تعیین بزرگی یا کوچک بودن فاصله اهمیت داشته باشد. در این حالت، استفاده از قانون قوی اعداد بزرگ در فضای متریک فازی (بیان شده در بخش ۳.۲.۳) مناسب تر است. در حقیقت کارشناس با تعیین مقدار t می تواند نظر خود را در دوری و نزدیکی فاصله تاثیر دهد. در ادامه با یک مثال قانون قوی اعداد بزرگ در فضای متریک فازی را برای میانگین بوت استرپ نشان خواهیم داد. به عبارت دیگر نشان می دهیم که

$$M_{dH}\left(\frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{m(n)} Y_{n,i}, E(X_1), t\right) \rightarrow 1, \text{ a.s.}$$

مثال ۱.۳.۳. فرض کنیم احتمال اینکه فردی در زمان A_1 قطعه زمینی را با سودی در بازه $[-1, -0.6]$ بفروشد برابر 0.2 باشد. همچنین احتمال اینکه در زمان A_2 با سود $[-0.5, 0.5]$ بفروشد 0.25 ، احتمال اینکه در زمان A_3 با سود $[1/25, 1/75]$ بفروشد برابر با 0.25 ، احتمال اینکه در زمان A_4 با سود $[1/25, 1/75]$ بفروشد برابر با 0.15 و احتمال اینکه در زمان A_5 با سود $[2/5, 3/5]$ بفروشد برابر با 0.15 است. سود مورد انتظار او چقدر خواهد بود؟ در اینجا مجموعه تصادفی را با $G(\omega)$ نشان می دهیم

$$G(\omega) = \begin{cases} [-1, -0.6] & \omega \in A_1, \\ [-0.5, 0.5] & \omega \in A_2, \\ [1/25, 1/75] & \omega \in A_3, \\ [1/8, 2/4] & \omega \in A_4, \\ [2/5, 3/5] & \omega \in A_5. \end{cases}$$

آنگاه برای هر مجموعه تصادفی انتگرال اومان با $E[G]$ نشان داده می شود و برابر است با

$$\begin{aligned} E(G) &= \int_{\Omega} G dP \\ &= \left\{ \int_{A_1} f dP + \dots + \int_{A_5} f dP; f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, P), f(\omega) \in G(\omega) \quad a.e \right\} \\ &= [0.6325, 1.3275]. \end{aligned}$$

فرض کنید که داده های زیر یک نمونه تصادفی از جامعه باشند:

$$\begin{aligned} &\{[1/25, 1/75], [-1, -0.6], [-0.5, 0.5], [1/8, 2/4], [-0.5, 0.5], \\ &[2/5, 3/5], [-0.5, 0.5], [1/25, 1/75], [2/5, 3/5], [-1, -0.6]\}. \end{aligned}$$

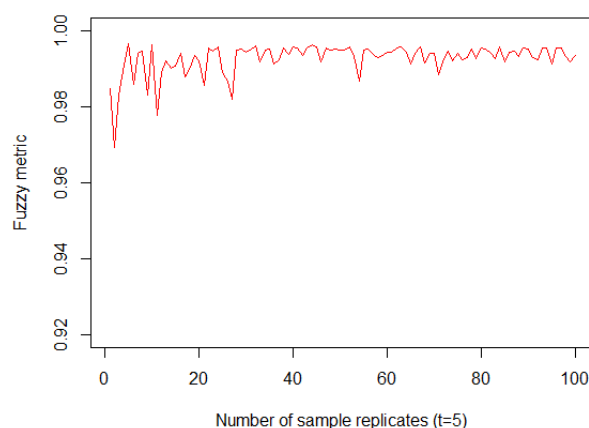
حال یک نمونه ۱۰۰۰ تایی با استفاده از روش بوت استرپ تولید می کنیم (در حقیقت ۱۰۰۰ نمونه ۱۰ تایی با جایگذاری تولید می کنیم). در گام بعد، میانگین هر ۱۰۰۰ نمونه را به دست

می آوریم. برای اینکه همگرایی را بهتر نشان دهیم میانگین بوت استرپ را برای تعداد تکرار متفاوت به دست می آوریم. به عبارت دیگر مقدار میانگین را در گام های $10^1, 10^2, \dots, 10^4$ به دست آورده سپس روی نمودار نشان می دهیم.

این مقادیر در شکل ۱.۳ نشان داده شده اند.

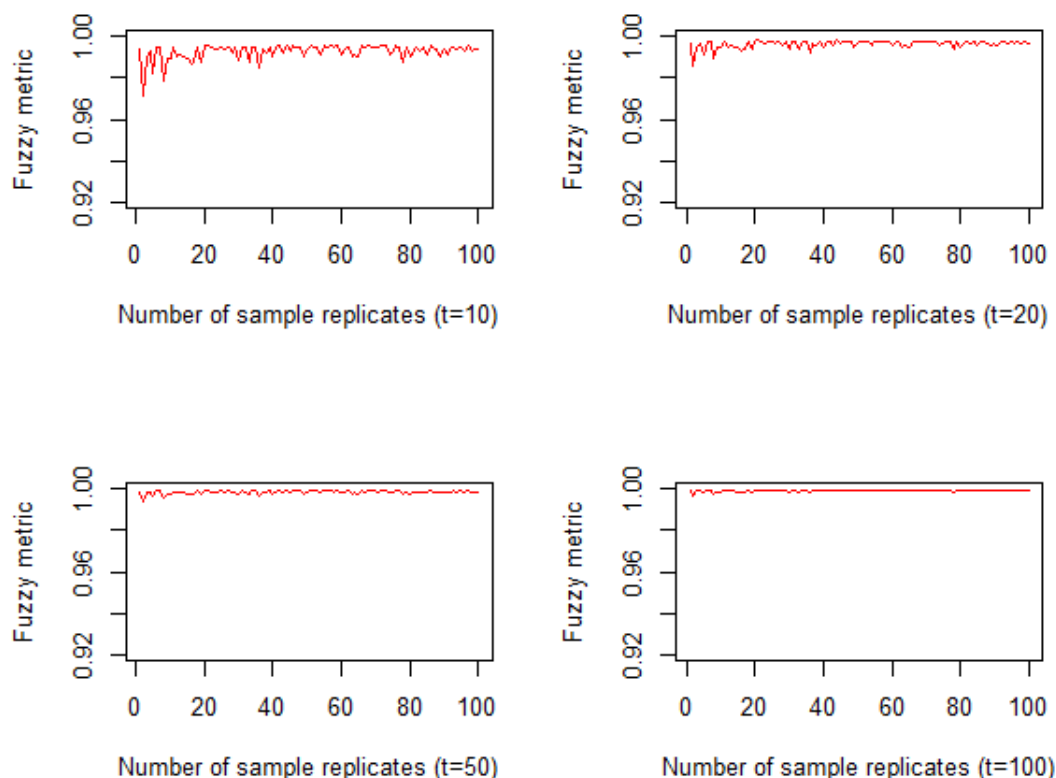
همانطور که در شکل ۱.۳ مشاهده می کنیم وقتی $m(n) \rightarrow \infty$ و $t = 5$ باشد، مقدار امید ریاضی مجموعه تصادفی به میانگین به دست آمده از روش بوت استرپ در فضای متریک فازی میل می کند. به عبارت دیگر

$$M_{d_H}\left(\frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{m(n)} Y_{n,i}, E(X_1), t\right) \rightarrow 1, \text{ a.s.}$$



شکل ۱.۳: رفتار M_{d_H} وقتی $m(n) \rightarrow \infty$ و $t = 5$.

همچنین، تاثیر مقدار t روی رفتار M_{d_H} و سرعت همگرایی را می توان در شکل ۲.۳ مشاهده کرد. در حقیقت استفاده از مقادیر کوچک t سرعت کاهش M_{d_H} به 1 را خیلی زیاد می کند. از طرف دیگر مقادیر بزرگ t سرعت میل کردن M_{d_H} به 1 را کاهش می دهد. نظر کارشناس در تعیین مقدار مناسب برای t اهمیت پیدا می کند.



شکل ۲.۳: رفتار M_{dH} وقتی $m(n) \rightarrow \infty$ برای مقادیر مختلف t ($t = 10, t = 20, t = 50, t = 100$).

۴.۳ بحث و نتیجه گیری

وقتی عدم قطعیت از نوع فازی باشد، همچون عدم قطعیت در اندازه گیری طول، مفهوم فضای متریک فازی مناسب تر می باشد.

از آنجایی که متغیر تصادفی فازی برپایه مجموعه های تصادفی تعریف شده است (تعریف پوری و رالسکو)، قانون قوی برای اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی در فضای متریک فازی ما را در بیان این قضیه برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی کمک می کند. بنابراین در این پژوهش قضیه قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های تصادفی در فضای متریک فازی را بیان و اثبات کردیم. نکته قابل اهیت این است که این قضیه ابتدا برای مجموعه های تصادفی فشرده بیان شد و با توجه به اینکه این فضا نمی تواند همواره موجود باشد در قسمت دوم فصل قانون قوی را برای مجموعه های تصادفی فشرده محدب در فضای متریک فازی بیان کردیم. در این پژوهش از تعریف فضای متریک فازی جرج و ورمانی [۲۸] استفاده کردیم. همچنین به عنوان یک کاربرد از قانون قوی اعداد بزرگ در فضای متریک فازی نشان دادیم که میانگین بوت استرپ، $\frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{m(n)} Y_{n,i}$ به $E(X_1)$ در فضای متریک فازی میل می کند.

آنچه در فصل آینده ارائه خواهد شد

۱. قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیر های تصادفی فازی تحت متر فازی
۲. مثال کاربردی از استفاده قانون قوی اعداد بزرگ (ارائه شده) در میانگین بوت استرپ

فصل ۴

قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی

مقدمه

پوری و رالسکو [۶۲] در ۱۹۸۶ تعریفی از متغیر تصادفی فازی ارائه کردند. در همین سال کلمنت^۱ [۳۹] قانون قوی اعداد بزرگ را برای متغیر تصادفی فازی بیان کرد. مجموعه های تصادفی و متغیر تصادفی فازی تحت متر هاسدورف-پمپئو و تعمیم یافته آن (d_∞) جدا پذیر نمی باشند. از طرف دیگر یکی از شرط های اساسی در قانون قوی اعداد بزرگ جدا پذیری می باشد. همچنین همگرایی تحت متر d_∞ قوی تر از همگرایی تحت متر d_1 است و این در حالی است که مطالعات پیشین تحت متر d_1 بیان شده اند. بنابراین در ۲۰۰۲ پروسک^۲ و همکاران [۵۸] قانون قوی اعداد بزرگ را تحت متر d_∞ مورد بررسی قرار دادند.

کلوبی^۳ و همکاران [۱۵] قانون قوی اعداد بزرگ را برای مجموعه های تصادفی فازی با استفاده از یک روش تقریبی که نتیجه ای از مطالعات لوپز در [۴۷] بود بیان کردند. همچنین، مولچانوف^۴ [۵۲] در همان سال قانون قوی اعداد بزرگ را برای توابع نیم پیوسته بالایی با یک رویکرد ساده بیان کرد. لی^۵ و وگارا^۶ [۴۴] قانون قوی اعداد بزرگ را برای متغیرهای تصادفی مجموعه مقدار فازی مستقل (و نه لزوما هم توزیع) بیان کردند که فضای پایه آن ها یک فضای

^۱Klement

^۲Proske

^۳Colubi

^۴Molchanov

^۵Li

^۶Ogura

باناخ جداپذیر یا یک فضای اقلیدسی است.

فو^۷ و ژانگ^۸ [۲۶] قانون قوی اعداد بزرگ را برای آراییه هایی از مجموعه های فشرده تصادفی و مجموعه های تصادفی فازی سطر-مستقل^۹ بیان کردند که زیر فضاهای آن ها فضای باناخ جدا پذیر است. کیم^{۱۰} [۳۸] و همکاران دو نوع از قانون قوی اعداد بزرگ را برای متغیرهای تصادفی فازی روی فضایی از مجموعه های فازی نرمال و نیم پیوسته بالایی با ساپورت فشرده در یک فضای باناخ جداپذیر بیان کردند.

در این فصل به بیان قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی فازی خواهیم پرداخت. رویکرد ما در اثبات این قضیه استفاده از تکنیک های احتمالی در فضای متریک فازی است ولی با توجه به اینکه فضاهای حاصل از مجموعه های فازی، فضای نرم دار فازی نمی باشند و درحقیقت باید گفت که (نسبت به جمع مینکوسکی) حتی فضای برداری نمی باشند، لذا از قضایای نشان دادن (همچون قضیه رادسترم) استفاده می کنیم. به عبارت دیگر فضای حاصل از مجموعه های فازی را که خود فضای برداری فازی نیستند به کمک قضیه نشان دادن رادسترم به فضای نرم دار فازی انتقال داده و سپس قضیه قانون قوی اعداد بزرگ را اثبات می کنیم. نکته با اهمیت دیگر اینکه جداپذیری و در نتیجه اندازه پذیری یک شرط مهم در قانون قوی اعداد بزرگ می باشد و لذا لازم است که فضای مورد استفاده جداپذیر باشد.

همچنین در اثبات قضیه با توجه به اینکه انتگرال مشابه با تعریف دبریو (که انتگرال روی مجموعه های تصادفی را تعریف می کند و در محاسبه امید ریاضی مورد استفاده قرار می گیرد) برای متغیرهای تصادفی فازی در دسترس نمی باشد لذا از فرم بریده شده و قضیه همگرایی مغلوب لبگ استفاده می کنیم.

در همین راستا لازم است که برخی تعاریف، لم ها و قضایای مورد نیاز را بیان یا تعمیم دهیم. مهمترین ابزار ما در این فصل ارائه متر فازی برای مجموعه های فازی، تعمیم قضیه نشان دادن رادسترم و تعمیم قضیه همگرایی مغلوب لبگ می باشد که در بخش بعد به بیان واثبات آن ها خواهیم پرداخت.

۱.۴ مروری بر مفاهیم مقدماتی

می دانیم که یک زیر مجموعه فازی (مجموعه فازی) از $\mathbb{R}^p$ برای هر $p \geq 1$ ، یک تابع به صورت $\tilde{u} : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$ تکیه گاه $\tilde{u}$ را که برابر است با $\{x \in \mathbb{R}^p | \tilde{u}(x) > 0\}$ ، بوسیله $\text{supp } \tilde{u}$ نشان می دهیم. برای هر مجموعه فازی $\tilde{u}$ ، مجموعه α -برش به وسیله رابطه زیر تعریف می شود

$$L_\alpha \tilde{u} = \{x \in \mathbb{R}^p | \tilde{u}(x) \geq \alpha\}, 0 < \alpha \leq 1.$$

^۷Fu
^۸Zhang

^۹Row-wise

^{۱۰}Kim

فرض کنید $\mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ یک مجموعه از زیر مجموعه های فازی روی $\mathbb{R}^p$ باشد. دو مجموعه فازی $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ برابر هستند (و می نویسیم $\tilde{u} = \tilde{v}$)، اگر و تنها اگر برای هر x در $\mathbb{R}^p$ داشته باشیم $\tilde{u}(x) = \tilde{v}(x)$. [۷۳]

در اینجا با استفاده از نماد $d(\tilde{u}, \tilde{v})$ یک متر در فضای $\mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ را نشان می دهیم. به عبارت دیگر برای هر $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$:

$$1. \quad d(\tilde{u}, \tilde{v}) \geq 0.$$

$$2. \quad d(\tilde{u}, \tilde{v}) = 0 \text{ اگر و تنها اگر } \tilde{u} = \tilde{v};$$

$$3. \quad d(\tilde{u}, \tilde{z}) \leq d(\tilde{u}, \tilde{v}) + d(\tilde{v}, \tilde{z}).$$

همچنین یک نرم مجموعه فازی $\tilde{u}$ به صورت $\|\tilde{u}\| = d(\tilde{u}, I_{\{0\}})$ تعریف می شود، که در آن $I_{\{0\}}$ یک تابع نشانگر است که در آن مجموعه فازی به ازای مقدار ۰ تابع عضویت عدد ۱ را می گیرد و به ازای $x \neq 0$ تابع عضویت عدد ۰ را نشان می دهد. فرض کنید $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ یک مجموعه از زیر مجموعه های فازی $\tilde{u} : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$ با ویژگی های زیر باشد:

$$1. \quad L_\alpha \tilde{u} \text{ برای هر } 0 < \alpha \leq 1 \text{ فشرده است؛}$$

$$2. \quad \text{supp } \tilde{u} \text{ فشرده است؛}$$

$$3. \quad \{x \in \mathbb{R}^p | \tilde{u}(x) = 1\} \neq \emptyset.$$

در این حالت

$$d_r(\tilde{u}, \tilde{v}) = \begin{cases} \left(\int_0^1 d_H^r(L_\alpha \tilde{u}, L_\alpha \tilde{v}) d\alpha \right)^{\frac{1}{r}} & r > 0, \\ \sup_{\alpha > 0} d_H(L_\alpha \tilde{u}, L_\alpha \tilde{v}) & r = \infty, \end{cases} \quad (1.1.4)$$

یک متر در $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ می باشد به طوری که d_H فاصله هاسدورف-پمپو است. با استفاده از نماد $\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ فضایی از مجموعه های فازی $\tilde{u} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ را نشان می دهیم که $L_\alpha \tilde{u}$ برای هر $\alpha \geq 0$ محدب است. به عبارت دیگر $\tilde{u} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ اگر $\tilde{u} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ و $\tilde{u}$ محدب فازی باشد، یعنی

$$\tilde{u}(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min\{\tilde{u}(x), \tilde{u}(y)\}, \quad x, y \in \mathbb{R}^p, \quad \lambda \in [0, 1].$$

با استفاده از اصل گسترش زاده ساختار خطی را در $\mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ با عملگرهای زیر در نظر می گیریم:

$$(\tilde{u} \pm \tilde{v})(x) = \sup_{y \pm z = x} \min\{\tilde{u}(y), \tilde{v}(z)\},$$

$$(\lambda \tilde{u})(x) = \begin{cases} \tilde{u}(\lambda^{-1}x) & \lambda \neq 0, \\ I_{\{0\}} & \lambda = 0, \end{cases}$$

که در آن $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ و $\lambda \in \mathbb{R}$.

گزاره های ۱.۱.۴-۳.۱.۴ ما را در اثبات قضیه ۱.۲.۴، که تعمیم قضیه نشانیدن رادسترم است کمک خواهند کرد.

گزاره ۱.۱.۴. [۵۹] اگر $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ آنگاه:

$$L_\alpha(\tilde{u} + \tilde{v}) = L_\alpha \tilde{u} + L_\alpha \tilde{v}.$$

گزاره ۲.۱.۴. [۵۹] اگر $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ آنگاه $\tilde{u} + \tilde{w} = \tilde{v} + \tilde{w}$.

گزاره ۳.۱.۴. [۵۹] اگر $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ آنگاه:

$$d_\infty(\tilde{u} + \tilde{w}, \tilde{v} + \tilde{w}) = d_\infty(\tilde{u}, \tilde{v}). \quad (1.2.4)$$

نتیجه ۱.۱.۴. رابطه ۱.۲.۴ برای d_r ، $r < \infty$ نیز برقرار است.

در اینجا نیز مشابه فصل قبل، $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^p)$ مجموعه ای از زیرمجموعه های فشرده روی $\mathbb{R}^p$ و $\mathcal{H}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ مجموعه ای از زیر مجموعه های فشرده محدب روی $\mathbb{R}^p$ می باشند. می دانیم که $\mathcal{H}_c(\mathbb{R}^p)$ تحت جمع مینکوفسکی یک فضای برداری نیست ولی تحت متر هاسدورف یک فضای متریک کامل می باشد.

همانطور که در فصل سوم اشاره شد، استفانینی^{۱۱} [۷۱] تفاضل تعمیم یافته ها کاهورا^{۱۲} را به صورت زیر پیشنهاد داد:

تعریف ۱.۱.۴. [۷۱] فرض کنید $A, B \in \mathcal{H}_c(\mathbb{R}^p)$ باشد. تفاضل تعمیم یافته ها کاهورا (که با نماد $A \ominus_g B$ نشان داده می شود) بین دو مجموعه A و B به عنوان مجموعه $C \in \mathcal{H}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ تعریف می شود به طوری که

$$A \ominus_g B = C \iff \begin{cases} (i) & A = B + C, \\ \text{or } (ii) & B = A + (-1)C. \end{cases} \quad (1.3.4)$$

برای مجموعه های فازی یا مفاهیم محاسبات بازه ای، رابطه $\tilde{u} = \tilde{v} + \tilde{w}$ برابر نیست با $\tilde{w} = \tilde{u} - \tilde{v} = \tilde{u} + (-1)\tilde{v}$ یا $\tilde{v} = \tilde{u} - \tilde{w} = \tilde{u} + (-1)\tilde{w}$ و این موضوع انگیزه ای برای تعریف تفاضل gH به صورت زیر روی مجموعه های فازی شده است [۲۱، ۴۳].

^{۱۱}Stefanini

^{۱۲}gH-difference

تعریف ۲.۱.۴. [۷۱] فرض کنید $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ باشند، تفاضل gH برابر است با عدد فازی $\tilde{w} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ (اگر وجود داشته باشد)، به طوری که

$$\tilde{u} \ominus_g \tilde{v} = \tilde{w} \iff \begin{cases} (i) & \tilde{u} = \tilde{v} + \tilde{w} \\ or (ii) & \tilde{v} = \tilde{u} + (-1)\tilde{w} \end{cases}. \quad (1.4.4)$$

گزاره ۴.۱.۴. [۷۱] فرض کنید $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$. تفاضل gH وجود دارد، یکتاست و دارای ویژگی های زیر است (که در آن $I_{\{\circ\}}$ تابه نشانگر برای مجموعه ثابت $\{\circ\}$ است):

$$1. \quad \tilde{u} \ominus_g \tilde{u} = I_{\{\circ\}}.$$

$$2. \quad \text{الف) } (\tilde{u} + \tilde{v}) \ominus_g \tilde{v} = \tilde{u} \quad \text{ب) } \tilde{u} \ominus_g (\tilde{u} - \tilde{v}) = \tilde{v}.$$

$$3. \quad \text{اگر } \tilde{u} \ominus_g \tilde{v} \text{ وجود داشته باشد آنگاه همچنین } (-\tilde{v}) \ominus_g (-\tilde{u}) \text{ وجود دارد و } I_{\{\circ\}} \ominus_g (\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}) = \tilde{v} \ominus_g (-\tilde{u}).$$

$$4. \quad \tilde{u} \ominus_g \tilde{v} = \tilde{v} \ominus_g \tilde{u} = \tilde{w} \quad \text{اگر و تنها اگر } \tilde{w} = -\tilde{w} \text{ (در حالت خاص } \tilde{w} = I_{\{\circ\}} \text{ اگر و تنها اگر } \tilde{u} = \tilde{v} \text{).}$$

$$5. \quad \text{اگر } \tilde{v} \ominus_g \tilde{u} \text{ وجود داشته باشد آنگاه } \tilde{u} + (\tilde{v} \ominus_g \tilde{u}) = \tilde{v} \text{ یا } \tilde{u} - (\tilde{v} \ominus_g \tilde{u}) = \tilde{v} \text{ و اگر هر دو برقرار باشند آنگاه } \tilde{v} \ominus_g \tilde{u} \text{ یک مجموعه ثابت است.}$$

۱.۱.۴ فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی

یکی از مهمترین ابزار در داده کاوی، سنجش از راه دور، تشخیص الگو و بسیاری از زمینه های دیگر، اندازه گیری فاصله می باشد. روشهای مختلفی برای اندازه گیری فاصله دو عدد فازی بیان شده است. علی رغم وجود عدم قطعیت در این نوع داده ها ولی اندازه فاصله آن ها معمولاً با یک عدد ثابت بیان شده است و نه با یک عدد فازی.

در ادامه با استفاده از تعریف فضای متریک فازی جرج و ورمانی [۲۸] و تعریف فضای نرم دار فازی سعادت و واعظ پور [۶۷]، تعاریف فضای متریک فازی و فضای نرم دار فازی برای مجموعه های فازی را ارائه خواهیم داد تا با رویکردی جدید به اندازه گیری فاصله دو عدد فازی بپردازیم.

تعریف ۳.۱.۴. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک مجموعه ناتهی دلخواه، $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ مجموعه ای از زیر مجموعه های فازی روی $\mathcal{X}$ و $*$ یک t -نرم پیوسته باشد. سه تایی $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), M', *)$ را یک فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی گوئیم هرگاه M' یک مجموعه فازی (یک متر فازی برای مجموعه های فازی) روی $(\mathcal{F}(\mathcal{X}) \times \mathcal{F}(\mathcal{X}) \times (\circ, \infty))$ باشد و شرایط زیر برای هر $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ و $t, s > \circ$ برقرار باشد:

$$1. \quad M'(\tilde{u}, \tilde{v}, t) > 0.$$

$$2. \quad M'(\tilde{u}, \tilde{v}, t) = 1 \text{ برای هر } t > 0 \text{ اگر و تنها اگر } \tilde{u} = \tilde{v};$$

$$3. \quad M'(\tilde{u}, \tilde{v}, t) = M'(\tilde{v}, \tilde{u}, t);$$

$$4. \quad M'(\tilde{u}, \tilde{v}, t) * M'(\tilde{v}, \tilde{z}, s) \leq M'(\tilde{u}, \tilde{z}, t + s);$$

$$5. \quad M'(\tilde{u}, \tilde{v}, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ پیوسته است.}$$

مثال ۱.۱.۴. فرض کنید $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), M', *)$ یک فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی باشد. با تعریف $a * b = ab$ یا $a * b = \min\{a, b\}$ و $\forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$

$$M'(\tilde{u}, \tilde{v}, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(\tilde{u}, \tilde{v})}, \quad k, m \in \mathbb{R}^+, n \geq 1.$$

به سادگی می توان نشان داد که $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), M', *)$ یک فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی است. در حالت خاص اگر داشته باشیم $k = n = m = 1$ آنگاه

$$M'(\tilde{u}, \tilde{v}, t) = \frac{t}{t + d(\tilde{u}, \tilde{v})}, \quad (1.5.4)$$

که به آن متر فازی استاندارد برای مجموعه های فازی می گویند.

تعریف ۴.۱.۴. فرض کنید $\mathcal{X}$ یک فضای برداری و $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ یک مجموعه از زیر مجموعه های فازی روی $\mathcal{X}$ باشد. سه تایی $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), N', *)$ را فضای نرم دار فازی برای مجموعه های فازی گوئیم اگر $*$ یک t -نرم پیوسته و N' یک مجموعه فازی (یک نرم فازی برای مجموعه های فازی) روی $\mathcal{F}(\mathcal{X}) \times (0, \infty)$ و شرایط زیر برای هر $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ و $t, s > 0$ برقرار باشد:

$$1. \quad N'(\tilde{u}, t) > 0.$$

$$2. \quad N'(\tilde{u}, t) = 1 \text{ اگر و تنها اگر } \tilde{u} = I_{\{0\}};$$

$$3. \quad N'(\alpha \tilde{u}, t) = N'(\tilde{u}, t/|\alpha|), \text{ برای هر } \alpha \neq 0;$$

$$4. \quad N'(\tilde{u}, t) * N'(\tilde{v}, s) \leq N'(\tilde{u} + \tilde{v}, t + s);$$

$$5. \quad N'(\tilde{u}, \cdot) : (0, \infty) \rightarrow [0, 1] \text{ پیوسته است};$$

$$6. \quad \lim_{t \rightarrow \infty} N'(\tilde{u}, t) = 1.$$

مثال ۲.۱.۴. فرض کنید $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ یک فضای نرم دار باشد. با تعریف $a * b = ab$ و

$$N'(\tilde{u}, t) = (\exp \frac{\|\tilde{u}\|}{t})^{-1},$$

برای $\tilde{u} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ و $t \in (0, \infty)$ ، آنگاه $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), N', *)$ یک فضای نرم دار فازی است.

تعریف ۵.۱.۴. فرض کنید $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), N', *)$ یک فضای نرم دار فازی برای مجموعه های فازی و $N'(\tilde{u}, t) = \varphi(\|\tilde{u}\|, t)$ یک نرم فازی برای مجموعه های فازی باشد که در آن $\varphi(., t)$ یک تابع نزولی و $\|\cdot\| = d(., I_{\{\circ\}})$ است، آنگاه آن را نرم فازی القا شده بوسیله d نامیده و به صورت N'_d نشان داده می شود.

مثال ۳.۱.۴. فرض کنید $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), N', *)$ یک فضای نرم دار فازی برای مجموعه های فازی باشد و همچنین داشته باشیم $a * b = ab$ یا $a * b = \min\{a, b\}$ و $\forall \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ ، در این حالت

$$N'(\tilde{u}, t) = \frac{kt^n}{kt^n + m\|\tilde{u}\|}, \quad k, m \in \mathbb{R}^+, n \geq 1,$$

یک نرم فازی برای مجموعه های فازی است. با توجه به اینکه $\|\tilde{u}\| = d(\tilde{u}, I_{\{\circ\}})$ ، می توان نوشت:

$$N'(\tilde{u}, t) = \frac{kt^n}{kt^n + md(\tilde{u}, I_{\{\circ\}})}.$$

شرایط تعریف ۴.۱.۴ برای $N'(\tilde{u}, t)$ برقرار هستند و $(\mathcal{F}(\mathcal{X}), N', *)$ یک فضای نرم دار فازی برای مجموعه های فازی است. در حالت خاص اگر $k = n = m = 1$ آنگاه

$$N'(\tilde{u}, t) = \frac{t}{t + d(\tilde{u}, I_{\{\circ\}})},$$

آنچه نرم فازی استاندارد برای مجموعه های فازی نامیده می شود.

لم ۱.۱.۴. فرض کنید N' یک نرم فازی برای مجموعه های فازی باشد، آنگاه

$$N'(\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}, t) = N'(\tilde{v} \ominus_g \tilde{u}, t). \quad (1.6.4)$$

برهان. با توجه به گزاره ۴.۱.۴ و تعریف ۴.۱.۴ داریم:

$$\begin{aligned} N'(\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}, t) &= N'((-1)(\tilde{v} \ominus_g \tilde{u}), t) \\ &= N'(\tilde{v} \ominus_g \tilde{u}, \frac{t}{|-1|}) \\ &= N'(\tilde{v} \ominus_g \tilde{u}, t). \end{aligned}$$

□

قضیه ۱.۱.۴. فرض کنید $(\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p), N', *)$ یک فضای نرم دار فازی برای مجموعه های فازی باشد. اگر تعریف کنیم که

$$M'_d(\tilde{u}, \tilde{v}, t) = N'_d(\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}, t),$$

که در آن $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ و $t > 0$ و $\ominus_g$ تفاضل تعمیم یافته ها کاهورا است، آنگاه M'_d یک متر فازی برای مجموعه های فازی روی $\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ ، آنچه متر فازی القا شده بوسیله نرم فازی N'_d نامیده می شود.

برهان. فرض کنید $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ ، آنگاه

$$L_\alpha \tilde{u}, L_\alpha \tilde{v}, L_\alpha \tilde{z} \in \mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p).$$

با استفاده از تفاضل تعمیم یافته ها کاهورا، نشان می دهیم که شرایط تعریف ۳.۱.۴ برقرار است.

$$۱. \quad M'_d(\tilde{u}, \tilde{v}, t) = N'_d(\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}, t) > \circ.$$

$$۲. \quad M'_d(\tilde{u}, \tilde{v}, t) = N'_d(\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}, t) = N'_d(I_{\{\circ\}}, t) = ۱ \text{ اگر و تنها اگر } \tilde{u} = \tilde{v}$$

۳.

$$\begin{aligned} M'_d(\tilde{u}, \tilde{v}, t) &= N'_d(\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}, t) \\ &= N'_d((-1)(\tilde{v} \ominus_g \tilde{u}), t) \\ &= N'_d(\tilde{v} \ominus_g \tilde{u}, \frac{t}{|-1|}) \\ &= M'_d(\tilde{v}, \tilde{u}, t); \end{aligned}$$

$$۴. \quad \text{برای هر } \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p) \text{ و } t, s \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} M'_d(\tilde{u}, \tilde{v}, t) * M'_d(\tilde{v}, \tilde{z}, s) &= N'_d(\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}, t) \\ &\quad * N'_d(\tilde{v} \ominus_g \tilde{z}, s) \\ &\leq N'_d(\tilde{u} \ominus_g \tilde{z}, t + s) \\ &= M'_d(\tilde{u}, \tilde{z}, t + s); \end{aligned}$$

$$۵. \quad M'_d(\tilde{u}, \tilde{v}, \cdot) = N'_d(\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}, \cdot) : (\circ, \infty) \rightarrow [\circ, ۱] \text{ پیوسته است.}$$

□

نتیجه ۲.۱.۴. فرض کنید $(\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p), N'_{d_1}, *)$ یک فضای نرم دار فازی برای مجموعه های فازی باشد و M'_{d_1} یک متر فازی القا شده بوسیله N'_{d_1} است، آنگاه $(\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p), M'_{d_1}, *)$ یک فضای متریک فازی است.

لم ۲.۱.۴. با فرض اینکه M'_d متر فازی برای مجموعه های فازی، القا شده بوسیله نرم فازی N'_d باشد، آنگاه برای هر $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{z} \in \mathcal{F}(\mathcal{X})$ و مقدار اسکالر $\alpha \neq \circ$ ویژگی های زیر برقرار است:

$$۱. \quad M'_d(\tilde{u} + \tilde{z}, \tilde{v} + \tilde{z}, t) = M'_d(\tilde{u}, \tilde{v}, t)$$

$$۲. \quad M'_d(\alpha \tilde{u}, \alpha \tilde{v}, t) = M'_d(\tilde{u}, \tilde{v}, t/|\alpha|)$$

برهان. با استفاده از لم ۴ در [۶۷] و تعریف ۴.۱.۴ به سادگی می توان نشان داد نتیجه برقرار است. برای مثال برقراری ویژگی دوم را نشان می دهیم.

$$\begin{aligned} M'_d(\alpha \tilde{u}, \alpha \tilde{v}, t) &= N'_d(\alpha \tilde{u} \ominus_g \alpha \tilde{v}, t) \\ &= N'_d(\tilde{u} \ominus_g \tilde{v}, t/|\alpha|) \\ &= M'_d(\tilde{u}, \tilde{v}, t/|\alpha|). \end{aligned}$$

□

در ادامه نشان می دهیم که $\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ در فضای متریک فازی $(\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p), M'_{d_r}, *)$ به ازای $r = 1$ جداپذیر است.

قضیه ۲.۱.۴. فضای متریک فازی $(\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p), M'_{d_1}, *)$ جداپذیر است.

برهان. می دانیم که $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p), d_1)$ فضای متریک جداپذیر است [۳۹]. به سادگی می توان نشان داد که $(\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p), d_1)$ نیز فضای متریک جداپذیر است و با توجه به اینکه تصویر پیوسته از هر فضای متریک جداپذیر، جداپذیر است، لذا نتیجه برقرار می باشد.

□

از آنجایی که مجموعه های فشرده در فضای باناخ (با توجه به جمع مینکوفسکی) تحت متر هاسدورف، فضای برداری نیستند ([۶۰] را ببینید)، رادسترم [۶۳] نشان داد که مجموعه ای از زیر مجموعه های محدب و بسته کراندار از فضای باناخ را که به صورت $co\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ یا $\mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ نشان داده می شوند را می توان در یک فضای نرم دار نشانید. همچنین، فضای حاصل از مجموعه های فازی فضای برداری نیستند. در بخش بعد تعمیمی از قضیه نشانیدن رادسترم برای مجموعه های فازی بیان خواهیم کرد.

۲.۴ قضیه نشانیدن رادسترم تعمیم یافته

کلمنت و همکاران [۳۹] نشان دادند که $\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ می تواند بطور ایزومتری در فضای نرم دار نشانیده شود. در اینجا نشان می دهیم که کلاسی از مجموعه های محدب فشرده فازی که با $\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ نشان داده می شوند را می توان بطور ایزومتری در فضای نرم دار فازی نشانید. در حقیقت یک قضیه نشانیدن جدید برای مجموعه های محدب فشرده فازی بیان خواهیم نمود. این قضیه ما را در بیان و اثبات قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی کمک می کند.

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$. یک فضای نرم دار فازی χ و یک تابع $j : \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \chi$ به طوری که وجود دارد:

$$1. \quad M'_{d_1}(j(\tilde{u}), j(\tilde{v}), t) = M'_{d_1}(\tilde{u}, \tilde{v}, t).$$

$$۲. j(\tilde{u} + \tilde{v}) = j(\tilde{u}) + j(\tilde{v}).$$

$$۳. j(\lambda \tilde{u}) = \lambda j(\tilde{u}) \quad \lambda \geq 0.$$

برهان. با استفاده از ۱.۱.۴ و ۲.۱.۴ و [۶۳]، شرط های ۷-۱ از قضیه رادسترم برقرار هستند. شرط های ۸ و ۹ نیز با توجه به گزاره ۳.۱.۴ تحت d_1 برقرار هستند. همچنین، با توجه به اینکه M'_{d_1} یک تابع نزولی و پیوسته از d_1 است، شرط های ۸ و ۹ در M'_{d_1} برقرار است. همچنین با توجه به قضیه ۲ [۵۹] و پیوستگی M'_{d_1} نسبت به d_1 ، شرط ۱۰ قضیه رادسترم [۶۳] نیز برقرار می باشد.

حال به اثبات ویژگی ۲ می پردازیم.

$$\begin{aligned} d_1(j(\tilde{u} + \tilde{v}), I_{\{\circ\}}) &= d_1(\tilde{u} + \tilde{v}, I_{\{\circ\}}) \\ &= \int_0^1 d_H(L_\alpha(\tilde{u} + \tilde{v}), \{\circ\}) d\alpha \\ &= \int_0^1 d_H(L_\alpha(\tilde{u}) + L_\alpha(\tilde{v}), \{\circ\}) d\alpha \\ &= \int_0^1 d_H(j(L_\alpha(\tilde{u})) + j(L_\alpha(\tilde{v})), \{\circ\}) d\alpha \\ &= d_1(j(\tilde{u}) + j(\tilde{v}), I_{\{\circ\}}). \end{aligned}$$

برای اثبات ویژگی ۳ داریم:

$$\begin{aligned} d_1(j(\lambda \tilde{u}), I_{\{\circ\}}) &= d_1(\lambda \tilde{u}, I_{\{\circ\}}) \\ &= \lambda d_1(\tilde{u}, I_{\{\circ\}}) \\ &= \lambda d_1(j(\tilde{u}), I_{\{\circ\}}) \\ &= d_1(\lambda j(\tilde{u}), I_{\{\circ\}}). \end{aligned}$$

□

۳.۴ تعمیم قضایای همگرایی مغلوب لبگ و شاپلی-فلکمن-استار

دو ابزار بسیار مهم در اثبات قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی قضیه همگرایی مغلوب لبگ^{۱۳} و قضیه شاپلی-فلکمن-استار^{۱۴} می باشند که

^{۱۳}Lebesgue dominated convergence

^{۱۴}Shapley-Folkman- Starr

لازم است در این بخش تعمیمی از آن ها را در فضای متریک فازی بیان و اثبات کنیم.
در ادامه تعمیم قضیه همگرایی مغلوب لبگ را برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی بیان خواهیم نمود.

همگرایی تقریباً مطمئن برای متغیرهای تصادفی فازی تحت متر هاسدورف به صورت $d_1(\tilde{X}_n, \tilde{X}) \rightarrow 0, a.s.$ بیان می شود [۶۲]. بطور معادل در فضای متریک فازی می توان گفت $\tilde{X}_n \rightarrow \tilde{X}, a.s.$ تحت متر فازی M_{d_1} برقرار است هرگاه $M_{d_1}(\tilde{X}_n, \tilde{X}, t) \rightarrow 1, a.s.$

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنید $\{\tilde{X}_k | k \geq 1\}$ و $\tilde{X}$ متغیرهای تصادفی فازی در $\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ باشند به طوری که $E\|supp\tilde{X}_k\| < \infty$ و $E\|supp\tilde{X}\| < \infty$. با فرض اینکه $\tilde{X}_k$ تحت M_{d_1} به صورت $a.e$ به $\tilde{X}$ همگرا باشد و داشته باشیم $d_1(\tilde{X}_k(\omega), I_{\{0\}}) \leq h(\omega)$ برای هر $k \geq 1$ ، که در آن $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ انتگرال پذیر باشد، آنگاه تحت متر فازی M'_{d_1} داریم

$$E\tilde{X}_k \rightarrow E\tilde{X}. \quad (۳.۱.۴)$$

برهان. با استفاده از نامساوی دبریو^{۱۵} [۱۸]، داریم

$$d_1(E\tilde{X}_k, E\tilde{X}) \leq E d_1(\tilde{X}_k, \tilde{X}), \quad (۳.۲.۴)$$

می دانیم $d_1(\tilde{X}_k, \tilde{X})$ یک متغیر تصادفی است، لذا $E d_1(\tilde{X}_k, \tilde{X})$ یک مقدار حقیقی خواهد بود. بنابراین با توجه به تعریف ۵.۱.۴ و قضیه ۱.۱.۴ داریم:

$$M'_{d_1}(E\tilde{X}_k, E\tilde{X}, t) \geq M'_{Ed_1}(\tilde{X}_k, \tilde{X}, t), \quad (۳.۳.۴)$$

از طرف دیگر، با توجه به فرض های قضیه، از آنجایی که $M'_{d_1}(\tilde{X}_k, \tilde{X}) \rightarrow 1, a.s.$ ، پس $d_1(\tilde{X}_k, \tilde{X}) \rightarrow 0, a.e.$ با استفاده از نامساوی مثلثی مشاهده می شود که

$$d_1(\tilde{X}_k, \tilde{X}) \leq d_1(\tilde{X}_k, I_{\{0\}}) + d_1(\tilde{X}, I_{\{0\}}) \leq h + d_1(\tilde{X}, I_{\{0\}}).$$

با توجه به انتگرال پذیری h و $\tilde{X} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ ، $d_1(\tilde{X}_k, \tilde{X})$ نیز انتگرال پذیر است. حال چون در قضیه همگرایی مغلوب لبگ (در حالت معمولی) داریم

$$E d_1(\tilde{X}_k, \tilde{X}) \rightarrow 0,$$

بنابراین

$$M'_{Ed_1}(\tilde{X}_k, \tilde{X}, t) \rightarrow 1.$$

بعلاوه از رابطه (۳.۲.۴) خواهیم داشت $d_1(E\tilde{X}_k, E\tilde{X}) \rightarrow 0, a.e.$ همچنین با استفاده از (۳.۳.۴) داریم

$$M'_{d_1}(E\tilde{X}_k, E\tilde{X}, t) \rightarrow 1.$$

□

که به معنای برقراری رابطه (۳.۱.۴) است.

می دانیم که اگر بعد فضا متناهی باشد، قضیه شاپلی-فلکمن-استار ([۵]) را ببینید) بیان می کند که برای هر $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ داریم

$$d\left[\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, \sum_{k=1}^n co \tilde{X}_k\right] \leq \sqrt{p} \max_{1 \leq k \leq n} \|\tilde{X}_k\|$$

که در آن p بعد $\tilde{X}$ و $p < \infty$ [۶۱].

در ادامه قضیه این قضیه را برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی تعمیم خواهیم داد.

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنید $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_n \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ و $n \in \mathbb{N}$. در این حالت برای متغیرهای تصادفی فازی تحت فضای متریک فازی داریم:

$$M'_{d_\infty}\left(\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, \sum_{k=1}^n co \tilde{X}_k, t\right) \geq \min_{1 \leq k \leq n} M'_{d_\infty}\left(\tilde{X}_k, I_{\{\circ\}}, \frac{t}{\sqrt{p}}\right),$$

که در آن $I_{\{\circ\}}$ یک تابع نشانگر است (به طوری که برای هر $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ داریم $I_{\{A\}} \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$) و p بعد فضای $\mathbb{R}^p$ است.

برهان. با توجه به قضیه شاپلی-فلکمن در حالت معمولی [۵]، می دانیم که

$$\begin{aligned} d_H\left[L_\alpha \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, L_\alpha \sum_{k=1}^n co \tilde{X}_k\right] &\leq \sqrt{p} \max_{1 \leq k \leq n} \|L_\alpha \tilde{X}_k\| \\ &= \sqrt{p} \max_{1 \leq k \leq n} d_H(L_\alpha \tilde{X}_k, \{\circ\}), \end{aligned}$$

برای هر $\alpha > 0$. بلافاصله نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} d_\infty\left[\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, \sum_{k=1}^n co \tilde{X}_k\right] &\leq \sqrt{p} \max_{1 \leq k \leq n} d_\infty(\tilde{X}_k, I_{\{\circ\}}) \\ &= \sqrt{p} \max_{1 \leq k \leq n} \|\text{supp} \tilde{X}_k\|. \end{aligned}$$

برای تابع نزولی و پیوسته $\varphi(d_\infty, t)$ (نسبت به d_∞) و مقدار ثابت t و ویژگی های متر هاسدورف نیز داریم:

$$\begin{aligned} \varphi\left(d_\infty\left[\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, \sum_{k=1}^n co \tilde{X}_k\right], t\right) &\geq \varphi\left(\sqrt{p} \max_{1 \leq k \leq n} d_\infty(\tilde{X}_k, I_{\{\circ\}}), t\right) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n} \varphi\left(\sqrt{p} d_\infty(\tilde{X}_k, I_{\{\circ\}}), t\right), \end{aligned}$$

آنگاه با توجه به قضیه ۱.۱.۴ و لم ۲.۱.۴ داریم:

$$\begin{aligned} M'_{d_\infty}\left(\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, \sum_{k=1}^n co \tilde{X}_k, t\right) &\geq \min_{1 \leq k \leq n} M'_{d_\infty}(\sqrt{p} \tilde{X}_k, \sqrt{p} I_{\{\circ\}}, t) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n} M'_{d_\infty}\left(\tilde{X}_k, I_{\{\circ\}}, \frac{t}{\sqrt{p}}\right). \end{aligned}$$

□

۴.۴ قانون قوی اعداد بزرگ

در این بخش قانون قوی اعداد بزرگ را برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی بیان و اثبات خواهیم نمود.

قضیه ۱.۴.۴. فرض کنید $\{\tilde{X}_k | k \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی فازی هم توزیع و مستقل باشند به طوری که $\tilde{X}_1$ انتگرال پذیر است. آنگاه

$$\left(\sum_{k=1}^n \tilde{X}_k\right)/n \rightarrow E\left(\text{co } \tilde{X}_1\right), \text{ a.e.} \quad (۴.۱.۴)$$

این همگرایی تحت متر فازی M'_{d_1} می باشد.

برهان. فرض کنید $\tilde{X}_k : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^p)$ برای $k = 1, \dots, n$ متغیرهای تصادفی فازی مستقل و هم توزیع باشند. همچنین، $\text{co } \tilde{X}_k : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ از آنجایی که $\mathcal{K}_{cc}(\mathbb{R}^p) \subseteq \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^p)$ و از تعریف استقلال متغیرهای تصافی فازی (۵.۳.۱)، بنابراین می توان گفت $\{\text{co } \tilde{X}_k | k \geq 1\}$ نیز مستقل و هم توزیع هستند.

در گام اول $\tilde{X}_k : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ بررسی می کنیم. فرض کنید $j : \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p) \rightarrow \chi$ تابع ایزومتری بر اساس قضیه رادسترم باشد. از آنجایی که $(\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p), M'_{d_1}, *)$ جداپذیر (قضیه ۲.۱.۴) است، به سادگی می توان نشان داد که فضای نرم دار فازی χ جداپذیر است.

پس $\{j(\tilde{X}_k) | k \geq 1\}$ عناصر تصادفی χ -مقدار مستقل و هم توزیع هستند، که در آن j ایزومتری است. بوسیله فرم استاندارد قانون قوی اعداد بزرگ در $\mathbb{R}^p$ داریم

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n j(\tilde{X}_k) \rightarrow E\left(j(\tilde{X}_1)\right), \text{ a.s.}$$

حال نکته اصلی این است که نشان دهیم

$$E(j(\text{co } \tilde{X}_1)) = j(E(\text{co } \tilde{X}_1)),$$

اگر $\text{co } \tilde{X}_1$ انتگرال پذیر باشد.

ابتدا فرض کنید که $\text{co } \tilde{X}_1$ یک تابع ساده باشد، یعنی به ازای بعضی l داریم $\text{co } \tilde{X}_1 = \sum_{i=1}^l \tilde{u}_i I_{A_i}$ که در آن $\tilde{u}_i \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^p)$ ، $A_i \in \mathcal{A}$.

به سادگی می توان نشان داد که $E(j(\text{co } \tilde{X}_1)) = j(E(\text{co } \tilde{X}_1))$. برای اثبات آن با توجه به

قضیه ۱.۲.۴، داریم

$$\begin{aligned}
 E(j(co \tilde{X}_1)) &= E(j(\sum_{i=1}^l \tilde{u}_i I_{A_i})) \\
 &= E(\sum_{i=1}^l j(\tilde{u}_i) I_{A_i}) \\
 &= \sum_{i=1}^l j(\tilde{u}_i) P(A_i) \\
 &= j(\sum_{i=1}^l \tilde{u}_i P(A_i)) \\
 &= jE(\sum_{i=1}^l \tilde{u}_i I_{A_i}) \\
 &= j(E(co \tilde{X}_1)).
 \end{aligned}$$

از آنجایی که $co \tilde{X}_1$ اندازه پذیر است، یک دنباله از توابع ساده S_m وجود دارد که تحت متر فازی M'_{d_1} تقریباً مطمئن $S_m \rightarrow co \tilde{X}_1$ همچنین از پیوستگی M'_{d_1} تقریباً مطمئن داریم

$$M'_{d_1}(S_m, I_{\{\circ\}}, t) \rightarrow M'_{d_1}(co \tilde{X}_1, I_{\{\circ\}}, t).$$

حال مجموعه تصادفی بریده شده t_m را برای $m \rightarrow \infty$ در نظر می گیریم

$$t_m(\omega) = \begin{cases} S_m(\omega) & M'_{d_1}(S_m(\omega), I_{\{\circ\}}, t) \geq M'_{d_1}(co \tilde{X}_1(\omega), I_{\{\circ\}}, \frac{t}{\chi}), \\ I_{\{\circ\}} & o.w. \end{cases}$$

توجه داشته باشید که t_m توابع ساده هستند. به سادگی می توان دید که تحت متر فازی M'_{d_1} ، تقریباً مطمئن داریم $t_m \rightarrow co \tilde{X}_1$ و

$$M'_{d_1}(t_m(\omega), I_{\{\circ\}}, t) \geq M'_{d_1}(co \tilde{X}_1(\omega), I_{\{\circ\}}, \frac{t}{\chi}).$$

در اینجا تمام فرضیه های قضیه ۱.۳.۴ برقرار هستند زیرا $t_m \rightarrow co \tilde{X}_1$ پس $Et_m \rightarrow E(co \tilde{X}_1)$ بنابراین در χ ،

$$j(Et_m) \rightarrow j(E(co \tilde{X}_1)).$$

به سادگی می توان ملاحظه کرد که $j(t_m) \rightarrow j(co \tilde{X}_1)$ و با استفاده از ویژگی های انتگرال بوخنر^{۱۶} داریم

$$E(j(t_m)) \rightarrow E(j(co \tilde{X}_1)).$$

که در آن $j(Et_m) = E(j(t_m))$ ، آنگاه نتیجه می شود که

$$j(E(co \tilde{X}_1)) = E(j(co \tilde{X}_1)).$$

^{۱۶}Bochner integral

بنابر این

$$M'_{d_1}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (j(co \tilde{X}_k) \ominus_g j(E(co \tilde{X}_1)), I_{\{\circ\}}, t) \rightarrow 1, \text{ a.e.}$$

از ویژگی های تابع ایزومتری j ، نتیجه می شود که

$$M'_{d_1}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n co \tilde{X}_k, E(co \tilde{X}_1), t) \rightarrow 1, \text{ a.e.} \quad (۴.۲.۴)$$

از قضیه ۲.۳.۴ بیان می کند که

$$M'_{d_\infty}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n co \tilde{X}_k, t) \geq \min_{1 \leq k \leq n} M'_{d_\infty}(\tilde{X}_k, I_{\{\circ\}}, \frac{nt}{\sqrt{p}}).$$

از آنجایی که تقریباً مطمئن $\min_{1 \leq k \leq n} M'_{d_\infty}(\tilde{X}_k, I_{\{\circ\}}, \frac{nt}{\sqrt{p}}) \rightarrow 1$ می توان نتیجه گرفت که تقریباً مطمئن

$$M'_{d_\infty}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n co \tilde{X}_k, t) \rightarrow 1,$$

و نیز خواهیم داشت

$$M'_{d_1}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n co \tilde{X}_k, t) \rightarrow 1. \quad (۴.۳.۴)$$

حال با توجه به چهارمین ویژگی در تعریف ۳.۱.۴، برای متغیرهای تصادفی فازی داریم

$$M'_{d_1}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, E(co \tilde{X}_1), t) \geq M'_{d_1}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n co \tilde{X}_k, \frac{t}{\sqrt{p}}) \\ * M'_{d_1}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n co \tilde{X}_k, E(co \tilde{X}_k), \frac{t}{\sqrt{p}}).$$

از آنجایی مقدار سمت راست به ۱ میل می کند (با توجه به روابط (۴.۲.۴) و (۴.۳.۴))، آنگاه تقریباً مطمئن داریم

$$M'_{d_1}(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \tilde{X}_k, E(co \tilde{X}_1), t) \rightarrow 1$$

و اثبات کامل است.

□

۵.۴ میانگین بوت استرپ در فضای متریک فازی

در این بخش می خواهیم قانون قوی اعداد بزرگ در فضای متریک فازی را برای میانگین بوت استرپ برای متغیرهای تصادفی فازی تعمیم دهیم.

۹۲ قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی

فرض کنید $\{\tilde{X}_k | k \geq 1\}$ یک دنباله نامتناهی از متغیرهای تصادفی فازی مستقل و هم توزیع تعریف شده در فضای احتمال (Ω, A, P) و $\tilde{X}_1$ انتگرال پذیر باشد. برای هر $n = 1, 2, \dots$ فرض کنید

$$\tilde{Y}_{n,1}, \tilde{Y}_{n,2}, \dots, \tilde{Y}_{n,m(n)}$$

یک نمونه بوت استرپ افرون به اندازه $m(n)$ باشد که در آن $\{m(n)\}$ یک عدد صحیح مثبت است. متغیرهای $\tilde{Y}_{n,1}, \tilde{Y}_{n,2}, \dots, \tilde{Y}_{n,m(n)}$ از m بار نمونه گیری با جایگذاری از دنباله $\{\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_n\}$ می باشد به طوری که در هر مرحله یک عضو با احتمال $\frac{1}{n}$ انتخاب می شود [۱۷]. فرض کنید که $\tilde{X}_n^*$ میانگین نمونه بوت استرپ باشد که در آن

$$\tilde{X}_n^* = \frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{m(n)} \tilde{Y}_{n,i}.$$

کلمنت و همکاران [۳۹] قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی فازی را بیان کردند. در حقیقت، آن ها نشان دادند که

$$d_H\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{X}_i, E(\text{co } \tilde{X}_1)\right) \rightarrow 0, \text{ a.s.}$$

حال اگر این قضیه را برای میانگین بوت استرپ بکار ببریم خواهیم داشت:

$$d_H\left(\frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{m(n)} \tilde{Y}_{n,i}, E(\tilde{X}_1)\right) \rightarrow 0, \text{ a.s.}$$

از آنجایی که ممکن است نظر کارشناس در تعیین بزرگی یا کوچک بودن فاصله اهمیت داشته باشد، استفاده از قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموعه های فازی در فضای متریک فازی (بیان شده در بخش ۴.۴) مناسب تر است. در حقیقت کارشناس با تعیین مقدار t می تواند نظر خود را در دوری و نزدیکی فاصله تاثیر دهد. در ادامه با یک مثال قانون قوی اعداد بزرگ در فضای متریک فازی را برای میانگین بوت استرپ نشان خواهیم داد. به عبارت دیگر نشان می دهیم که

$$M_{d_H}\left(\frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{m(n)} \tilde{Y}_{n,i}, E(\text{co } \tilde{X}_1), t\right) \rightarrow 1, \text{ a.s.}$$

مثال ۱.۵.۴. فرض کنید سود حاصل از فروش یک قطعه زمین به صورت یک عدد فازی مثلثی می باشد. اگر احتمال اینکه فردی در زمان A_1 قطعه زمینی را با سودی در حدود $(-\infty, \infty)_T$ دلار بفروشد برابر $\infty/2$ باشد. همچنین احتمال اینکه در زمان A_2 با سود $(\infty, \infty/5, \infty/5)_T$ بفروشد $\infty/25$ ، احتمال اینکه در زمان A_3 با سود $(1/5, \infty/25, \infty/25)_T$ بفروشد برابر با $\infty/25$ ، احتمال اینکه در زمان A_4 با سود $(2, \infty/2, \infty/4)_T$ بفروشد برابر با $\infty/15$ و احتمال اینکه در زمان A_5 با سود $(3, \infty/5, \infty/5)_T$ بفروشد برابر با $\infty/15$ است. سود مورد انتظار او چقدر خواهد بود؟

در اینجا متغیر تصادفی فازی را با $\tilde{G}(\omega)$ نشان می دهیم

$$\tilde{G}(\omega) = \begin{cases} (-\circ/7, \circ/3, \circ/1)_T & \omega \in A_1, \\ (\circ, \circ/5, \circ/5)_T & \omega \in A_2, \\ (1/5, \circ/25, \circ/25)_T & \omega \in A_3, \\ (2, \circ/2, \circ/4)_T & \omega \in A_4, \\ (3, \circ/5, \circ/5)_T & \omega \in A_5. \end{cases}$$

آنگاه برای هر متغیر تصادفی فازی امید ریاضی با $E[\tilde{G}]$ نشان داده می شود که بوسیله انتگرال اومان به صورت زیر محاسبه می شود:

$$E(\tilde{G}) = \int_{\Omega} \tilde{G} dP = (\circ/985, \circ/3525, \circ/3425)_T.$$

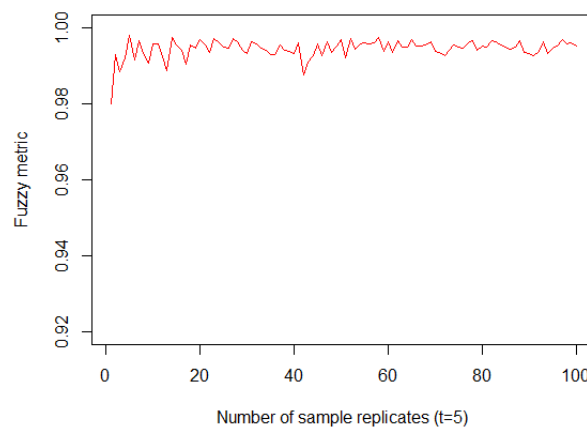
فرض کنید که داده های زیر یک نمونه تصادفی از جامعه باشند:

$$\begin{aligned} & \{(1/5, \circ/25, \circ/25)_T, (-\circ/7, \circ/3, \circ/1)_T, (\circ, \circ/5, \circ/5)_T, (2, \circ/2, \circ/4)_T, \\ & (\circ, \circ/5, \circ/5)_T, (3, \circ/5, \circ/5)_T, (\circ, \circ/5, \circ/5)_T, (1/5, \circ/25, \circ/25)_T, \\ & (3, \circ/5, \circ/5)_T, (-\circ/7, \circ/3, \circ/1)_T\}. \end{aligned}$$

حال یک نمونه ۱۰۰۰ تایی با استفاده از روش بوت استرپ تولید می کنیم (در حقیقت ۱۰۰۰ نمونه ۱۰ تایی با جایگذاری تولید می کنیم). در گام بعد، میانگین هر ۱۰۰۰ نمونه را به دست می آوریم. برای اینکه همگرایی را بهتر نشان دهیم میانگین بوت استرپ را برای تعداد تکرار متفاوت به دست می آوریم. به عبارت دیگر مقدار میانگین را در گام های ۱۰، ۲۰، ...، ۱۰۰۰ به دست آورده سپس روی نمودار نشان می دهیم. این مقادیر در شکل ۱.۴ نشان داده شده اند.

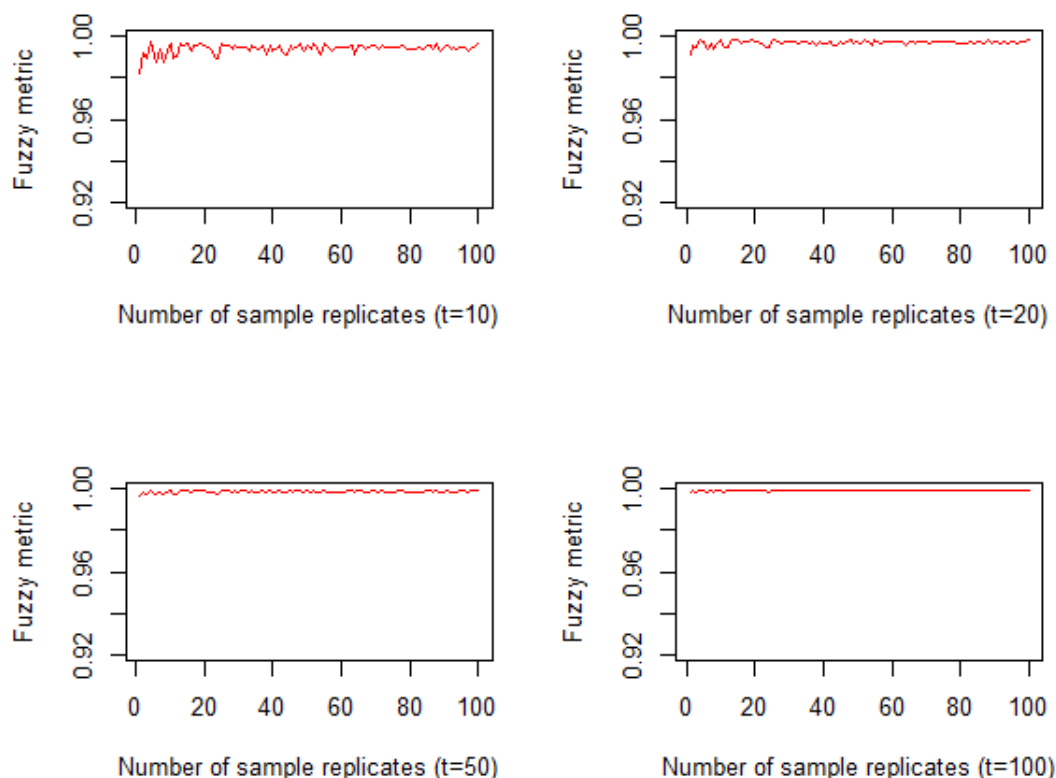
همانطور که در شکل ۱.۴ مشاهده می کنیم وقتی $m(n) \rightarrow \infty$ و $t = 5$ باشد، مقدار امید ریاضی متغیر تصادفی فازی به میانگین به دست آمده از روش بوت استرپ در فضای متریک فازی میل می کند. به عبارت دیگر

$$M_{dH}(\frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{m(n)} \tilde{Y}_{n,i}, E(co \tilde{X}_1), t) \rightarrow 1, \text{ a.s.}$$



شکل ۱.۴: رفتار M_{d_H} وقتی $m(n) \rightarrow \infty$ و $t = 5$.

همچنین، تاثیر مقدار t روی رفتار M_{d_H} و سرعت همگرایی را می توان در شکل ۲.۴ مشاهده کرد. در حقیقت استفاده از مقادیر کوچک t سرعت کاهش M_{d_H} به $\circ$ را خیلی زیاد می کند. از طرف دیگر مقادیر بزرگ t سرعت میل کردن M_{d_H} به $\circ$ را کاهش می دهد. نظر کارشناس در تعیین مقدار مناسب برای t اهمیت پیدا می کند.



شکل ۲.۴: رفتار M_{dH} وقتی $m(n) \rightarrow \infty$ برای مقادیر مختلف t ($t = 10, t = 20, t = 50, t = 100$).

۶.۴ بحث و نتیجه گیری

وقتی عدم قطعیت از نوع فازی باشد، همچون عدم قطعیت در اندازه گیری طول، مفهوم فضای متریک فازی مناسب تر می باشد.

در این پژوهش قضیه قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی را بیان و اثبات کردیم. در اینجا با تعمیم تعریف فضای متریک فازی جرج و ورمانی [۲۸]، تعریفی برای فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی ارائه شد و با کمک ابزار دیگری همچون تعمیم قضیه نشان دادن رادسترم، تعمیم قضیه همگرایی مغلوب لبگ و نیز تعمیم قضیه شاپلی-فلکمن-استار به اثبات قانون قوی اعداد بزرگ در این فضای جدید پرداختیم. همچنین به عنوان یک کاربرد از قانون قوی اعداد بزرگ در فضای متریک فازی نشان دادیم که میانگین بوت استرپ، $\frac{1}{m(n)} \sum_{i=1}^{m(n)} \tilde{Y}_{n,i}$ به $E(\tilde{X}_1)$ در فضای متریک فازی میل می کند.

آنچه در فصل آینده ارائه خواهد شد

۱. ارائه کاربرد مترفازی برای مجموعه های فازی در پردازش تصویر با عملکردی بهتر از روش های پیشین
۲. پیشنهاد استفاده از میانگین بوت استرپ در پردازش تصویر و مقایسه عملکرد آن با روش اول

فصل ۵

پردازش تصویر با استفاده از مترفازی

مقدمه

در فصل دوم مفهوم مترفازی بیان شده توسط جورج^۱ و ورمانی^۲ [۲۷] مورد بررسی قرار گرفت و به عنوان کاربردی از آن به رفع نویز تصویر با استفاده از این رویکرد اشاره شد.

همچنین در همان فصل تعریف مترفازی برای مجموعه های فازی ارائه شد و با فضای متریک فازی برای مجموعه های فازی آشنا شدیم. در این فصل می خواهیم از این مفاهیم در پردازش تصویر استفاده کنیم.

در حقیقت در این فصل می خواهیم نگاهی فازی به رنگ پیکسل ها داشته باشیم. به عبارت دیگر اگر فرض کنیم مقدار رنگ هر پیکسل به صورت فازی بیان شود نمی توان از روش های قبل برای رفع نویز تصویر استفاده کرد و عملاً نیاز به متری داریم که اختلاف رنگ پیکسل ها را برای اعداد فازی محاسبه کند. در ادامه به بیان تعاریف مورد نیاز و شرح رویکرد خواهیم پرداخت.

^۱George

^۲Veeramani

۱.۵ تعاریف

همان طور که در بخش ۱.۵.۲ شرح داده شد فیلتر متر فازی با استفاده از دو عملگر به کاهش نویز تصویر می پردازد. به کمک یک عملگر مقدار شباهت پیکسل ها را سنجیده و با استفاده از عملگر دوم میزان نزدیکی مکانی پیکسل ها را در تشخیص مقدار جایگزین پیکسل نویز دار بکار می گیرد.

در این بخش می خواهیم با استفاده از متر فازی برای مجموعه های فازی به رفع نویز در یک تصویر پردازیم. الگوریتم معرفی شده در این بخش عملکردی مشابه بخش ۱.۵.۲ دارد با این تفاوت که نوآوری ما استفاده از متر فازی برای مجموعه های فازی است. از این رو عملگر مقدار شباهت با استفاده از متر فازی برای مجموعه های فازی خواهد بود ولی عملگر دوم که برای اندازه گیری دوری یا نزدیکی پیکسل ها می باشد بدون تغییر و مشابه فیلتر قبل خواهد بود. در ادامه به تعریف عملگر مقدار شباهت می پردازیم.

مقدار شباهت

این عملگر مقدار شباهت فازی بین بردارهای رنگ، در حالتی که رنگ در هر پیکسل به صورت عدد فازی بیان شده است را اندازه می گیرد. این تابع به صورت زیر تعریف می شود. فرض کنید $\tilde{u}_k = (\tilde{u}_k^1, \tilde{u}_k^2, \tilde{u}_k^3)$ بردار رنگ از پیکسل های تصویر را در موقعیت k (به صورت R ، G و B که مخفف قرمز، سبز و آبی هستند) نمایش می دهد که در آن $\tilde{u}_k^i$ برای هر پیکسل یک عدد فازی باشد و هر رنگ قرمز، سبز و یا آبی را با یک عدد فازی نشان می دهد. همچنین c یک مقدار مثبت حقیقی است که برای کنترل انتشار تابع استفاده می شود. در این صورت عملگر مقدار شباهت برابر خواهد بود با

$$R(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) = \frac{c}{c + \|\tilde{u}_i - \tilde{u}_j\|}.$$

نزدیکی مکانی

در مورد نزدیکی مکانی فازی بین پیکسل ها دقیقاً مشابه بخش ۱.۵.۲ فرض کنید پیکسل ها در یک پنجره $n \times n$ به نام W در مختصات دکارتی نمایش داده شوند. بنابراین موقعیت یک پیکسل $\tilde{u}_i$ در پنجره W با $i = i_1, i_2 \in Y^2$ نمایش داده می شود که در آن $Y = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. در اینجا از متر فازی استاندارد القا شده بوسیله متر L_∞ استفاده می شود و آنرا با S نشان می دهند و برابر است با:

$$S(i, j, t) = \frac{t}{t + \|i - j\|_\infty},$$

که در آن $i, j \in Y^2$ و $t > 0$ و $\|i - j\|_\infty = \max\{|i_1 - j_1|, |i_2 - j_2|\}$. به راحتی می توان دید که پیکسل های دورتر از مرکز پنجره، دارای نزدیکی کمتری نسبت به سایر پیکسل ها در پنجره می باشند. بطور تجربی نشان داده شده است که فاصله L_∞ نتیجه ای بهتر از فاصله اقلیدسی دارد. بنابراین $S(i, j, t)$ مقدار نزدیکی مکانی فازای بین پیکسل های رنگ $\tilde{u}_i, \tilde{u}_j$ را با توجه به مقدار t بیان می کند. در اینجا نیز پارامتر t برای تنظیم اهمیت داده شده به معیار نزدیکی مکانی استفاده می شود.

حال از آنجایی که هر پیکسل به صورت یک بردار رنگ سه بعدی RGB و موقعیت مکانی نمایش داده می شود، لذا برای رسیدن به هدف مورد بررسی از یک متر فازای ترکیبی به صورت زیر استفاده می شود:

$$CFM'(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j, t) = R(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j) \cdot S(i, j, t) = \frac{c}{c + \|\tilde{u}_i - \tilde{u}_j\|} \cdot \frac{t}{t + \|i - j\|_\infty}. \quad (1.1.5)$$

اگر هر پیکسل $\tilde{u}_i$ را به صورت $(\tilde{u}_i^1, \tilde{u}_i^2, \tilde{u}_i^3, i_1, i_2)$ نمایش دهیم می توان CFM' را که یک متر فازای روی $X^3 \times Y^2$ است محاسبه کنیم. این متر فازای میزان شباهت رنگ و نزدیکی پیکسل ها را بیان می کند.
به عنوان مثال فرض کنید داشته باشیم

$$\|\tilde{u}_i - \tilde{u}_j\| = d_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\int_0^1 f(\alpha) d^2(L_\alpha \tilde{u}, L_\alpha \tilde{v}) d\alpha \right)^{\frac{1}{2}},$$

و $\tilde{u}, \tilde{v}$ دو عدد فازای مثلثی به صورت زیر باشند:

$$\tilde{u} = (a, s_a)_T,$$

$$\tilde{v} = (b, s_b)_T,$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$d_2(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\int_0^1 \alpha d^2(L_\alpha \tilde{u}, L_\alpha \tilde{v}) d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} = [(a - b)^2 + \frac{1}{\pi}(s_a - s_b)^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (1.2.5)$$

و لذا CFM' برابر خواهد بود با

$$CFM'(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j, t) = \frac{c}{c + [(a - b)^2 + \frac{1}{\pi}(s_a - s_b)^2]^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{t}{t + \|i - j\|_\infty}. \quad (1.3.5)$$

۱.۱.۵ مثال کاربردی

فرض کنید ماتریس زیر معادل مقادیر پیکسل های بخشی از یک تصویر در مقیاس خاکستری باشد که برای هر پیکسل مقدار رنگ خاکستری بر اساس یک عدد فازای مثلثی متقارن بیان شده باشد:

(44,0.5)	(45,0.3)	(159,0.7)
(161,0.8)	(165,0.4)	(159,0.6)
(157,0.7)	(162,0.1)	(154,0.4)

شکل ۱.۵: همسایگی 3×3 عدد ۱۶۵.

می خواهیم با استفاده از الگوریتم متر فازی برای مجموعه های فازی، مقدار عدد ۱۶۵ در ماتریس بالا را برآورد کنیم. حال با استفاده از رابطه (۱.۳.۵) مقدار مقادیر هر پیکسل در همسایگی ۱۶۵ را حساب می کنیم و پیکسلی که داری بزرگترین CFM' باشد را به عنوان بهترین جایگزین برای مقدار ۱۶۵ در نظر می گیریم. مقدار CFM' را برای تمام مقادیر ماتریس همسایگی محاسبه می کنیم که حاصل برابر خواهد بود با

1.6330	1.6375	3.7018
3.8509	3.8400	4.0105
3.7260	4.0756	3.7800

شکل ۲.۵: مقادیر ماتریس CFM'

همانطور که ملاحظه می شود بیشترین مقدار در ماتریس CFM' برابر است با ۴.۰۷۵۶ که مربوط به پیکسل شماره (۳,۲) است. پس می توان مقدار این پیکسل یعنی (۱۶۲, ۰/۱) را به عنوان بهترین جایگزین برای مرکز ماتریس همسایگی 3×3 در نظر گرفت. برای بیان دقت این روش فرض می کنیم که یک نویز به تصویر اضافه شود به گونه ای که ماتریس همسایگی به صورت زیر باشد:

(44,0.5)	(45,0.3)	(159,0.7)
(161,0.8)	(0,0.4)	(159,0.6)
(157,0.7)	(162,0.1)	(154,0.4)

شکل ۳.۵: مقادیر ماتریس با وجود نویز

حال با محاسبه مقادیر CFM' داریم:

1.6699	1.6726	3.2207
3.3116	1.1058	3.5294
3.3083	3.5130	3.0433

شکل ۴.۵: مقادیر ماتریس CFM'

ملاحظه می شود که بیشترین مقدار در ماتریس CFM' برابر است با ۳.۵۲۹۴ که مربوط به پیکسل شماره (۲,۳) است. پس می توان مقدار این پیکسل یعنی (۱۵۹,۰/۶) را به عنوان بهترین برآورد برای مرکز ماتریس همسایگی 3×3 در نظر گرفت.

۲.۵ ارائه یک روش برای محاسبه پیکسل ها با رنگ فازی

یکی از سوالات و مشکلاتی که در استفاده از الگوریتم ارائه شده در این فصل وجود دارد، نسبت دادن یا محاسبه یک عدد فازی برای رنگ هر پیکسل است. از آنجایی مقدار رنگ هر پیکسل به صورت یک عدد ثابت بیان می شود می توان رویکردهای مختلفی برای بیان فازی آن ها پیشنهاد داد که این موضوع می تواند یک زمینه مطالعاتی را برای آینده پژوهش فراهم کند. برای شرح بهتر موضوع باید گفت همانطور که نمی شود رنگ های یک رنگین کمان را به راحتی تفکیک کرد و به آهستگی رنگ ها به هم تبدیل شده اند قاعدتا تفاوت رنگ یک پیکسل با رنگ همسایگی های خود نمی تواند به صورت اعداد صحیح بیان شود در صورتی که در الگوریتم های موجود برای رنگ هر پیکسل یک عدد صحیح غیر منفی در نظر گرفته می شود. این موضوع زمانی نقش پر رنگ تری پیدا می کند که وضوح تصویر (رزولیشن) پایین تر باشد. رویکرد ما در این پژوهش استفاده از همسایگی های یک پیکسل برای بیان فازی رنگ پیکسل مورد نظر است. به عبارت دیگر ما فرض می کنیم رنگ هر پیکسل یک عدد فازی مثلثی نا متقارن است که رنگ هر پیکسل با درجه عضویت یک و پهنای آن به وسیله میانگین همسایگی های آن تعیین می شود. به عنوان مثال اگر تصویر خاکستری باشد که برای هر پیکسل فقط یک شماره رنگ داشته باشیم میانگین همسایگی های آن را در قالب یک پنجره 3×3 (بجز در پیکسهای حاشیه تصویر) به دست آورده سپس اختلاف رنگ اصلی پیکسل با میانگین همسایگی ها را پهنای چپ یا پهنای راست عدد فازی در نظر می گیریم. عدد فازی حاصل به صورت عدد فازی مثلثی یک طرفه (با پهنای راست یا چپ) می باشد. به عنوان مثال اگر رنگ پیکسل 50° و میانگین همسایگی ها 60° باشد رنگ پیکسل را به صورت عدد فازی $(50^\circ, 0, 10^\circ)$ در نظر می گیریم که پهنای چپ صفر (چون میانگین همسایگی ها بزرگتر از پیکسل مورد نظر است) و پهنای راست 10° (اختلاف پیکسل با میانگین همسایگی ها) است.

۱.۲.۵ مثال کاربردی

مثال ۱.۲.۵. فرض کنید ماتریس زیر معادل مقادیر پیکسل های تصویر روبرو در مقیاس خاکستری باشد:

40	45	47	50	47	45	45
40	50	49	60	48	45	50
45	45	44	45	159	50	50
45	51	161	165	159	155	45
45	152	157	162	154	155	150
159	154	156	153	151	150	155
155	155	153	156	151	150	155



شکل ۵.۵: تصویر در مقیاس خاکستری و ماتریس مقادیر. [ب]

با استفاده از رویکرد بیان شده در این بخش، ماتریس داده ها را به یک ماتریس فازی تبدیل می کنیم. با استفاده از میانگین همسایگی ها پهنای چپ ماتریس بالا به صورت:

0	0	0	0	0	0	0
0	4	0	0	0	0	0
0	0	0	0	55	0	0
0	0	44	27	30	42	0
0	20	15	15	6	22	17
12	8	6	2	0	1	9
2	3	1	4	0	0	4

شکل ۶.۵: پهنای چپ ماتریس فازی رنگ پیکسل ها.

و پهنای راست آن برابر با ماتریس زیر است.

4	2	3	1	3	6	6
5	0	1	6	20	12	6
2	16	37	54	0	29	17
19	42	0	0	0	0	53
59	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	2	0

شکل ۷.۵: پهنای راست ماتریس فازی رنگ پیکسل ها.

ارائه یک روش برای محاسبه پیکسل ها با رنگ فازی ۱۰۳

حال اگر به تصویر نویز وارد شود می توان با استفاده از رویکرد فازی به رفع نویز بپردازیم. فرض کنید پیکسل میانی تصویر که دارای رنگ ۱۶۵ می باشد را با مقدار ۰ جایگزین کنیم:

40	45	47	50	47	45	45
40	50	49	60	48	45	50
45	45	44	45	159	50	50
45	51	161	0	159	155	45
45	152	157	162	154	155	150
159	154	156	153	151	150	155
155	155	153	156	151	150	155

شکل ۸.۵: ماتریس رنگ پیکسل ها با نویز وارد شده.

در این صورت پهنای چپ به صورت زیر

0	0	0	0	0	0	0
0	4	0	0	0	0	0
0	0	0	0	61	0	0
0	0	64	0	37	44	0
0	20	35	22	11	24	18
12	8	8	6	2	2	10
2	3	2	5	1	0	5

شکل ۹.۵: پهنای چپ ماتریس فازی رنگ پیکسل ها.

و پهنای راست آن برابر با ماتریس زیر است.

4	2	3	1	3	5	5
5	0	1	4	17	11	6
2	16	18	31	0	27	16
19	42	0	110	0	0	52
59	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0

شکل ۱۰.۵: پهنای راست ماتریس فازی رنگ پیکسل ها.

حا با اجرای الگوریتم شرح داده شده در ابتدای این بخش به رفع نویز می پردازیم. همانطور که می دانیم

$$\|\tilde{u}_i - \tilde{u}_j\| = d_{\gamma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\int_0^1 f(\alpha) d^{\gamma}(L_{\alpha}\tilde{u}, L_{\alpha}\tilde{v}) d\alpha \right)^{\frac{1}{\gamma}},$$

و $\tilde{u}, \tilde{v}$ دو عدد فازی مثلثی نامتقارن به صورت زیر باشند:

$$\tilde{u} = (a, sl_a, sr_a)_T,$$

$$\tilde{v} = (b, sl_b, sr_b)_T,$$

که در آن sl پهنای چپ و sr پهنای راست عدد فازی مثلثی می باشد. آنگاه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d_{\gamma}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \left(\int_0^1 \alpha d^{\gamma}(L_{\alpha}\tilde{u}, L_{\alpha}\tilde{v}) d\alpha \right)^{\frac{1}{\gamma}} &= \left(\frac{1}{\gamma} (sl_b - sl_a)^{\gamma} + \frac{1}{\gamma} [(a - b) + (sl_b - sl_a)]^{\gamma} \right. \\ &- \frac{2}{\gamma} (sl_b - sl_a)[(a - b) + (sl_b - sl_a)] \\ &+ \frac{1}{\gamma} (sr_b - sr_a)^{\gamma} + \frac{1}{\gamma} [(a - b) - (sr_b - sr_a)]^{\gamma} \\ &\left. + \frac{2}{\gamma} (sr_b - sr_a)[(a - b) - (sr_b - sr_a)] \right)^{\frac{1}{\gamma}}. \end{aligned}$$

و لذا CFM' برابر خواهد بود با

$$CFM'(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j, t) = \frac{c}{c + d_{\gamma}(\tilde{u}, \tilde{v})} \cdot \frac{t}{t + \|i - j\|_{\infty}}. \quad (2.1.5)$$

حال با استفاده از الگوریتم شرح داده شده برآورد پیکسل نویز دار به صورت زیر می باشد:

40	45	49	50	47	45	45
40	50	49	60	48	45	45
45	45	44	45	159	50	50
45	51	161	159	159	155	155
152	152	157	162	154	155	155
154	154	156	153	151	150	155
155	155	156	153	151	150	150

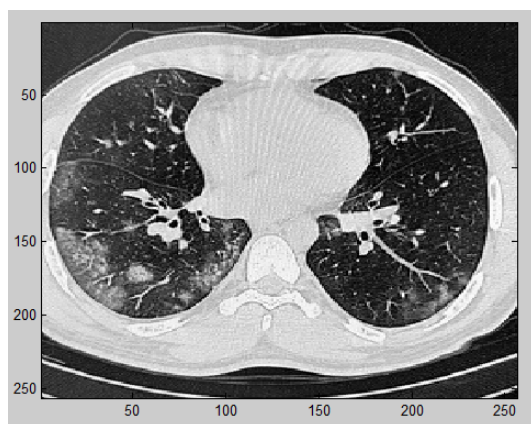
شکل ۱۱.۵: ماتریس رفع نویز شده تصور.

همانطور که مشاهده می شود می توان مقدار این پیکسل یعنی ۱۵۹ را به عنوان بهترین برآورد برای مرکز ماتریس در نظر گرفت که مقدار واقعی آن ۱۶۵ بوده است. این درحالی است که با استفاده از الگوریتم میانه مقدار جایگزین برابر با ۱۵۷ خواهد بود.

در ادامه به عنوان یک مثال واقعی به رفع نویز از تصویر اسکن ریه مربوط به بیماری کوید ۱۹ خواهیم پرداخت که در فصل ۲ نیز مورد استفاده قرار گرفت. سپس نتیجه حاصل از الگوریتم ارائه شده در این فصل را با استفاده از معیار میانگین قدر مطلق خطا با الگوریتم میانه و الگوریتم ارائه شده در فصل ۲ بررسی خواهیم کرد تا بهبود تصویر با استفاده از الگوریتم متر فازی برای مجموعه های فازی را نشان دهیم.

مثال ۲.۲.۵. همان طور که در فصل دوم اشاره شد سی تی اسکن قفسه سینه ویژگی های رادیولوژیکی رایج در بیماران مبتلا به ذات الریه ناشی از کوید-۱۹ را مشخص می کند. وجود نویز در تصاویر پزشکی می تواند پزشک را در تشخیص صحیح وجود یا عدم وجود بیماری کرونا دچار مشکل کند. در این بخش با استفاده از الگوریتم متر فازی برای مجموعه های فازی به رفع نویز از تصویر سی تی اسکن ریه در یک بیمار دارای ویروس کوید-۱۹ خواهیم پرداخت.

تصویر اولیه از سی تی اسکن ریه فرد بیمار به صورت زیر بوده است:



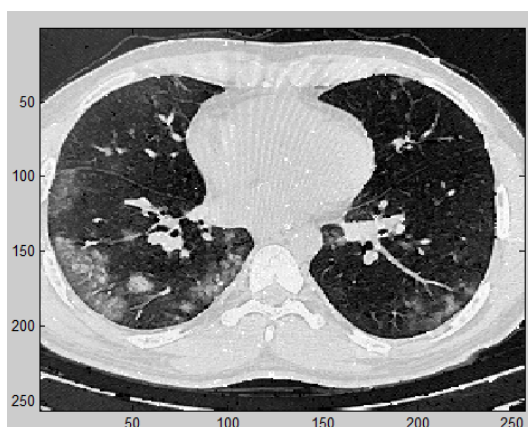
شکل ۱۲.۵: سی تی اسکن فرد مبتلا به ویروس کوید-۱۹

برای نشان دادن توان الگوریتم متر فازی برای مجموعه های فازی در رفع نویز ابتدا با استفاده از نرم افزار متلب به تصویر اولیه نویز (فلفل و نمک ۰.۱) وارد می کنیم که تصویر زیر حاصل می شود:



شکل ۱۳.۵: سی تی اسکن با وجود نویز

بعد از استفاده از الگوریتم متر فازی و رفع نویز تصویر زیر به دست آمده است:



شکل ۱۴.۵: سی تی اسکن بعد از رفع نویز

۲.۲.۵ مقایسه عملکرد الگوریتم های رفع نویز

در این بخش به مقایسه عملکرد الگوریتم های رفع نویز CFM ، CFM' و میانه می پردازیم. معیار مقایسه ای ما میانگین قدر مطلق خطا خواهد بود.

جدول ۱.۵: مقایسه عملکرد الگوریتم های رفع نویز

الگوریتم	میزان نویز	میانگین قدر مطلق خطا
$Median$	۰.۱	۵.۳۰۷۰
CFM	۰.۱	۱.۵۳۸۳
CFM'	۰.۱	۱.۴۰۴۲

همان طور که مشاهده می شود الگوریتم متر فازی برای مجموعه های فازی (CFM') کمترین مقدار میانگین قدر مطلق خطا را دارد و نشان از بهبود عملکرد این الگوریتم نسبت

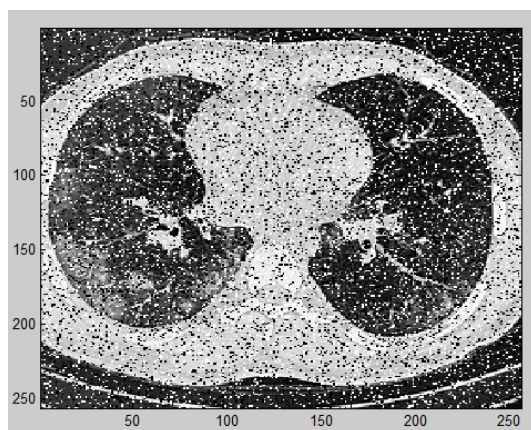
به الگوریتم مترفازی (CFM) که برای نخستین بار توسط ساموئل [۵۴] ارائه گردید (و شرح آن در فصل دوم بیان شد) دارد. در ادامه با استفاده از روش باز نمونه گیری بوت استرپ سعی خواهیم کرد تا عملکرد الگوریتم CFM' را بهبود ببخشیم.

۳.۲.۵ افزایش دقت الگوریتم CFM' با استفاده از روش باز نمونه گیری بوت استرپ

در این بخش می خواهیم با استفاده از قانون قوی اعداد بزرگ در فضای متریک فازی برای میانگین بوت استرپ متغیرهای تصادفی فازی که در فصل چهارم بیان شد به کاهش میزان میانگین قدر مطلق خطا در رفع نویز از تصویر بپردازیم.

همان طور که در الگوریتم CFM' شرح داده شد ما فرض می کنیم رنگ هر پیکسل یک عدد فازی مثلثی نا متقارن است که رنگ هر پیکسل با درجه عضویت یک و پهنای آن به وسیله میانگین همسایگی های آن تعیین می شود.

حال برای افزایش دقت می توانیم میانگین هر پنجره از همسایگی های پیکسل مورد نظر را با استفاده از روش باز نمونه گیری بوت استرپ به دست آوریم. در فصل چهارم مشاهده کردیم که با افزایش تعداد نمونه گیری بوت استرپ مقدار میانگین حاصل از این نمونه گیری تحت متر فازی همگرا به امید ریاضی متغیر تصادفی فازی است. با استفاده از نرم افزار متلب نتایج حاصل از رفع نویز تصویر سی تی اسکن ریه بیماری کوید ۱۹ در شرایطی که میزان نویز ۰/۲ است به صورت زیر می باشد:



شکل ۱۵.۵: سی تی اسکن نویز ۰.۲

الگوریتم با استفاده از روش باز نمونه گیری بوت استرپ را $BCFM'$ می نامیم که مقدار میانگین قدر مطلق خطای آن به ازای مقادیر مختلف تکرار $n=10, 20, 50$ در جدول زیر مشاهده شده است.

جدول ۲.۵: مقایسه عملکرد الگوریتم های رفع نویز

میانگین قدر مطلق خطا			میزان نویز	الگوریتم
$n=50$	$n=20$	$n=10$		
۲.۸۸۵۲	۲.۸۹۰۲	۲.۸۹۶۳	۰/۲	$BCFM'$

نتایج نشان می دهد که با افزایش حجم نمونه مقدار میانگین قدر مطلق خطا کاهش پیدا می کند و با تکرار زیاد مقدار میانگین قدر مطلق خطا به یک مقدار خاص همگرا می شود که این مقدار در حدود مقدار میانگین قدر مطلق خطا با الگوریتم CFM' و یا کمتر از آن است. در تصویر اسکن ریه با نویز ۰.۲ مقدار میانگین قدر مطلق خطا با الگوریتم CFM' برابر با ۲.۸۹۴۸ شده است و ملاحظه می کنیم که بیشتر از مقدار آن در الگوریتم $BCFM'$ با $n = 50$ می باشد. تصویر رفع نویز شده نیز به صورت زیر می باشد:



شکل ۱۶.۵: سی تی اسکن بعد از رفع نویز

اشکالی که می توان به الگوریتم $BCFM'$ گرفت مدت زمان اجرای آن می باشد. با توجه به اینکه دقت این روش زمانی بالا می رود که تعداد تکرار زیاد باشد، رسیدن به پاسخی مناسب و همگرا نیازمند مدت زمان اجرای طولانی با کامپیوتر های معمولی است.

بحث و نتیجه گیری

برای جمع بندی به این نکته اشاره می کنیم که در این فصل دو الگوریتم CFM' و $BCFM'$ برای از بین بردن اثر نویز موجود در تصویر بیان و استفاده شد که هر دو الگوریتم جدید کارکرد بهتری نسبت به الگوریتم بسیارخوب CFM (ارائه شده توسط ساموئل و همکاران [۵۴]) داشتند و دارای میانگین قدر مطلق خطای کمتری بودند.

بحث و نتیجه گیری و پیشنهادات

بحث و نتیجه گیری

در این پژوهش به دنبال بیان قانون قوی اعداد بزرگ برای متغیرهای تصادفی فازی در فضای متریک فازی بودیم. با توجه به اینکه تعریف متغیر تصادفی فازی ارائه شده توسط پوری و راسکو بر پایه مجموعه های تصادفی می باشد لذا در گام نخست به بیان و اثبات قانون قوی برای مجموعه های تصادفی در فضای متریک فازی پرداختیم و با ارائه یک مثال کاربردی از این قضیه برای میانگین بوت استرپ استفاده نمودیم. سپس قانون قوی را برای متغیرهای تصادفی فازی تحت متر فازی به همراه مثال کاربردی بیان و اثبات کردیم. در گام آخر از تعریف متر فازی برای مجموعه های فازی که در این رساله ارائه شده بود در پردازش تصویر به کار گرفته شد که نتیجه ای بهتر از موارد مشابه در کاهش نویز تصویر داشت.

پیشنهادهای و آینده تحقیق

با توجه به اهمیت مفهوم متغیر تصادفی فازی در اندازه گیری فاصله ها و همچنین جایگاه قانون قوی اعداد بزرگ در بحث احتمال می توان آینده پژوهش را در مباحث زیر دنبال نمود:

- ۱- بیان قضایای حدی بخصوص قانون قوی اعداد بزرگ با فرض وجود وابستگی، در فضای متریک فازی.

- ۲- استفاده از رویکرد متر فازی در پردازش تصویر برای تشخیص دقیق تر علائم بیماری در تصاویر سی تی اسکن.

- ۳- ارائه روشهایی دیگر در محاسبه پیکسل های فازی و استفاده از روابط و قضایای این پژوهش.

پیوست آ

آشنایی با مفاهیم فازی

در این قسمت بطور خلاصه با مفاهیم و تعاریف اولیه فازی آشنا خواهیم شد. مطالب این بخش برگرفته از کتاب مقدمه ای بر احتمال و آمار فازی نوشته دکتر طاهری و دکتر ماشین چی می باشند.

۱. آ مجموعه های فازی

یک مجموعه معمولی، با یک ویژگی دقیق و معین مشخص می شود. اگر یک عضو از مجموعه مرجع، آن ویژگی را دارا باشد، عضو مجموعه ی مورد نظر است و اگر فاقد آن ویژگی باشد در مجموعه عضو نیست. مثلاً اگر مجموعه مقادیر ممکن برای طول قد انسان ها $X = [0, 250]$ باشد، و P ویژگی بلندتر از 180 سانتی متر، آنگاه P یک ویژگی دقیق است که یک مجموعه مانند A را تعریف می کند که عبارت است از انسان های با قد بیشتر از 180 سانتی متر. اکنون اگر بخواهیم درباره ی انسان های بلند قد گفتگو کنیم، با یک ویژگی نادقیق و مبهم سر و کار داریم. این که چه انسان هایی بلند قد هستند و کدام ها نیستند، یک موضوع نادقیق و مبهم است. به عبارت دیگر عضویت یا عدم عضویت افراد در گردایه ی انسان های بلند قد قطعی و مشخص نیست. مثلاً آیا یک فرد با 170 سانتی متر قد بلند قد است؟ با 180 سانتی متر چطور؟ با 190 سانتی متر چطور؟

نکته‌ی مهم آن است که بیشتر مفاهیمی که در زندگی روزمره به کار می‌بریم و براساس آن‌ها استدلال انجام می‌دهیم و تصمیم‌گیری می‌کنیم، مفاهیمی نادقیق هستند و مجموعه‌هایی با کران‌های تقریبی می‌باشند. در ادامه با تعریف مجموعه فازی آشنا خواهیم شد.

تعریف ۱.۱.۱. یک مجموعه فازی از مجموعه مرجع X ، توسط یک تابع $\mu_A(x) : X \rightarrow [0, 1]$ به نام تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر x از X ، مقدار $\mu_A(x)$ میزان عضویت x در مجموعه فازی A را نشان می‌دهد.

مثال ۱.۱.۱. فرض کنید $X = \{1, 2, \dots, 7\}$. می‌خواهیم یک مجموعه فازی تعریف کنیم که اعضای آن ویژگی نادقیق کوچک را داشته باشند. برای مدل‌سازی این مجموعه کافی است تابع عضویت مجموعه فازی را مشخص کنیم. تعیین این تابع بستگی به نظر تصمیم‌گیرنده دارد. مثلاً یک تابع عضویت برای مدل‌سازی مفهوم فوق این گونه است

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0.9 & x = 2 \\ 0.7 & x = 3 \\ 0.5 & x = 4 \\ 0.3 & x = 5 \\ 0.1 & x = 6 \\ 0 & x = 7 \end{cases}$$

مجموعه فازی A را به صورت زیر نیز نمایش می‌دهیم

$$A = \{(1, 1), (2, 0.9), (3, 0.7), (4, 0.5), (5, 0.3), (6, 0.1), (7, 0)\}$$

$$A = \left\{ \frac{1}{1}, \frac{0.9}{2}, \frac{0.7}{3}, \frac{0.5}{4}, \frac{0.3}{5}, \frac{0.1}{6}, \frac{0}{7} \right\}$$

برای مثال $\mu_A(3) = 0.7$ بدین معنی است که از نظر تصمیم‌گیرنده عدد ۳ به اندازه ۰.۷ به مجموعه فازی اعداد کوچک تعلق دارد.

تعریف ۲.۱.۱. گوییم مجموعه فازی A ، زیرمجموعه‌ی مجموعه فازی B است و می‌نویسیم $A \subseteq B$ ، اگر برای هر $x \in X$ ، $A(x) \leq B(x)$. دو مجموعه فازی A و B را مساوی گوییم و می‌نویسیم $A = B$ ، اگر برای هر $x \in X$ ، $A(x) = B(x)$.

تعریف ۳.۱.۱. مجموعه فازی A^c ، متمم مجموعه فازی A ، توسط تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$A^c(x) = 1 - A(x), \quad \forall x \in X$$

تعریف ۴.۱.۱. الف) اشتراک دو مجموعه فازی A و B به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(A \cap B)(x) = \min[A(x), B(x)], \quad \forall x \in X$$

ب) اجتماع دو مجموعه فازی A و B به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود

$$(A \cup B)(x) = \max[A(x), B(x)], \quad \forall x \in X$$

۱.۱.۱. α -برش

تعریف ۵.۱.۱. مجموعه (معمولی) عناصری را از X که درجه عضویت آنها در مجموعه فازی A دست کم به بزرگی α ($0 < \alpha \leq 1$) باشد، α -برش A (مجموعه تراز α وابسته به A) گوییم و با A_α نشان می دهیم، یعنی

$$A_\alpha = \{x \in X | A(x) \geq \alpha\}$$

مثال ۲.۱.۱. فرض کنید $X = \{0, 1, 2, \dots\}$ مجموعه مقادیر یک متغیر تصادفی پواسن مربوط به تعداد تصادفات شبانه روزی در یک ناحیه باشد و فرض کنید مجموعه فازی A از X بیانگر تعداد تصادفات کم با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$A = \left\{ \frac{1}{0}, \frac{0.8}{1}, \frac{0.6}{2}, \frac{0.4}{3}, \frac{0.2}{4} \right\}$$

در این صورت چند α -برش A عبارت اند از

$$\begin{aligned} A_{0.2} &= \{0, 1, 2, 3, 4\} & A_{0.5} &= \{0, 1, 2\} \\ A_{0.6} &= \{0, 1, 2\} & A_{0.85} &= \{0\} \end{aligned}$$

به طور خلاصه می توان نوشت

$$A_\alpha = \begin{cases} \{0, 1, 2, 3, 4\} & 0 < \alpha \leq 0.2 \\ \{0, 1, 2, 3\} & 0.2 < \alpha \leq 0.4 \\ \{0, 1, 2\} & 0.4 < \alpha \leq 0.6 \\ \{0, 1\} & 0.6 < \alpha \leq 0.8 \\ \{0\} & 0.8 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

۲.۱.۱. اصل توسیع

فرض کنید f یک تابع از X به Y باشد، یعنی

$$y = f(x), \quad x \in X, y \in Y$$

این تابع به هر نقطه از X ، نقطه‌ای را از Y می‌نگارد. حال فرض کنید A زیرمجموعه‌ای معمولی از X باشد. با استفاده از f و A می‌توانیم نگاشت A تحت f ، یعنی $f(A)$ را به صورت زیر به دست آوریم

$$f(A) = \{f(a) \in Y | a \in A\}$$

اکنون می‌خواهیم f را طوری توسیع (گسترش) دهیم که به جای این که صرفاً به یک نقطه از X یا یک زیرمجموعه معمولی از X عمل کند، بتواند بر یک زیرمجموعه فازی از X نیز عمل کند. مسلماً انتظار داریم که $f(A)$ ، حاصل عمل f بر مجموعه فازی A از X ، دیگر یک مجموعه معمولی از Y نباشد، بلکه یک مجموعه فازی از Y مانند $B = f(A)$ باشد. در اینجا تعیین تابع عضویت $B(y)$ مهم است. واضح است که اگر f تابعی یک به یک باشد، آنگاه $B(y) = A(f^{-1}(y))$. اما در حالت کلی ممکن است $y \in Y$ تصویر چندین نقطه از X باشد. در این حالت اصل توسیع روش تعریف $B = f(A)$ را ارائه می‌دهد. نخست اصل توسیع را برای توابع یک متغیره بیان و تشریح می‌کنیم و سپس حالت کلی آن را مطرح می‌کنیم.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید XY : f یک تابع و A یک مجموعه فازی از X باشد. در این صورت $B = f(A)$ به صورت یک مجموعه فازی از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$B(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x); x \in X} A(x) & f^{-1}(\{y\}) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(\{y\}) = \phi \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(\{y\})$ نگاشت معکوس f است که گاهی آن را با $f^{-1}(y)$ نشان می‌دهند.

مثال ۳.۱.۱. فرض کنید $X = Y = Z$ و $f: XY$ با ضابطه $f(x) = 2x$ تعریف شود. اگر A مجموعه اعداد فرد مثبت باشد، یعنی $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} f(A) &= \{f(a) \in Y | a \in A\} \\ &= \{2, 6, 10, 14, \dots\} \end{aligned}$$

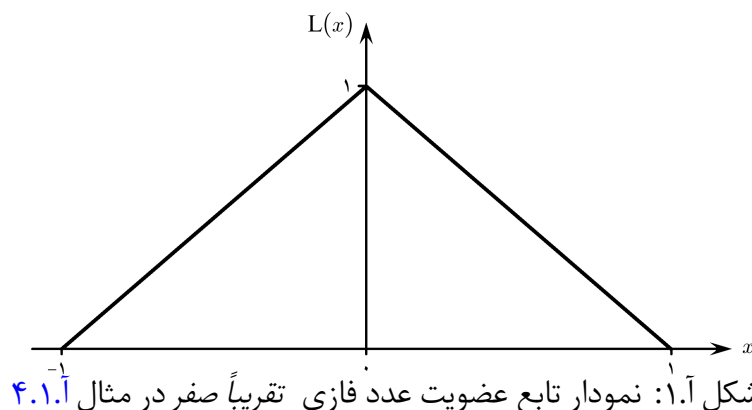
اکنون فرض کنید مجموعه فازی A از X بیانگر اعداد تقریباً ۵ به صورت زیر تعریف شده باشد

$$A = \left\{ \frac{0.4}{3}, \frac{0.7}{4}, \frac{1}{5}, \frac{0.7}{6}, \frac{0.4}{7} \right\}$$

آنگاه طبق اصل توسیع

$$B = f(A) = \left\{ \frac{0.4}{6}, \frac{0.7}{8}, \frac{1}{10}, \frac{0.7}{12}, \frac{0.4}{14} \right\}.$$

اکنون حالت کلی اصل توسیع (اصل گسترش) را بیان می‌کنیم.



تعریف آ.۷.۱. (اصل توسیع) فرض کنید $X_1, \dots, X_n$ ، مجموعه مرجع و $X = X_1 \times \dots \times X_n$ حاصل ضرب دکارتی آن‌ها باشد. همچنین $A_1, \dots, A_n$ ، مجموعه فازی به ترتیب از $X_1, \dots, X_n$ باشند. به علاوه $y = f(x_1, \dots, x_n)$ یک نگاشت از X به Y باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $A_1, \dots, A_n$ به صورت مجموعه فازی B از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$B(y) = f(A_1, \dots, A_n)(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x_1, \dots, x_n)} \min\{A_1(x_1), \dots, A_n(x_n)\} & f^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & f^{-1}(y) = \phi \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(y)$ نگاشت معکوس y تحت f است.

آ.۳.۱ اعداد فازی

در این بخش اعداد فازی و نوع ویژه‌ای از آن‌ها، موسوم به اعداد فازی LR را مرور می‌کنیم.

تعریف آ.۸.۱. مجموعه فازی N از $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) را یک عدد فازی (حقیقی) گوییم، اگر

- (۱) N نرمال و تک‌نمایی باشد. یعنی یک و دقیقاً یک $x_0 \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که $N(x_0) = 1$.
- (۲) α -برش‌های N ، به ازای هر $\alpha \in (0, 1]$ ، به صورت بازه‌های بسته باشند.

مجموعه همه‌ی اعداد فازی را با $F(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

مثال آ.۴.۱. مجموعه فازی L با تابع عضویت زیر یک عدد فازی است. می‌توان L را یک مدل سازی برای عدد فازی تقریباً صفر تعبیر کرد.

$$L(x) = 1 - |x| \quad -1 \leq x \leq 1$$

تعریف ۹.۱.۱. عدد فازی N را مثبت (منفی) گوییم اگر برای هر $x \leq 0$ ($x \geq 0$)، $N(x) = 0$.

مثال ۵.۱.۱. عدد فازی L در مثال ۴.۱.۱ نه عدد فازی مثبت و نه عدد فازی منفی می باشد. اما عدد فازی N با تابع عضویت زیر، یک عدد فازی مثبت است. این عدد فازی تعبیری برای تقریباً پنج است.

$$N(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{3} & 2 \leq x < 5 \\ \frac{7-x}{2} & 5 \leq x < 7. \end{cases}$$

اعداد فازی LR

اعداد فازی LR نوع خاصی از اعداد فازی هستند که علاوه بر آنکه ساختار ویژه‌ای دارند، اعمال حسابی بر آنها نیز از قواعد خاصی پیروی می‌کند. این ساختار و این قواعد باعث شده است که در عمل، عمدتاً از این نوع اعداد فازی استفاده شود.

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر ساختار تابع عضویت عدد فازی N به صورت زیر باشد

$$N(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}) & x \leq m \\ R(\frac{x-m}{\beta}) & x > m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیرصعودی از $\mathbb{R}^+$ (مجموعه اعداد حقیقی مثبت) به $[0, 1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$ ، آنگاه N را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $N = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. عدد m را مقدار نما (یا میانه) و اعداد مثبت α و β را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست N می‌نامیم. L و R توابع مرجع (یا توابع شکل) نامیده می‌شوند.

توابع رایج برای L (به طور مشابه برای R) عبارتند از:

$$L(x) = \max\{0, 1 - |x|^p\} \quad (L(x) = 1 - |x|^p \text{ به کوتاهی})$$

$$L(x) = e^{-|x|^p}$$

$$L(x) = \frac{1}{1 + |x|^p}$$

$$L(x) = \frac{1}{1 + p|x|}$$

که در آنها $p > 0$.

۴.۱.۱ حساب اعداد فازی

در این بخش، به کوتاهی، به موضوع حساب اعداد فازی می‌پردازیم.

تعریف ۱۱.۱.آ. فرض کنید M و N دو عدد فازی و $X : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم عملگر $*$ را برای اعداد فازی با $\otimes$ نشان دهیم، با استفاده از اصل توسعه، حاصل $M \otimes N$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می شود

$$(M \otimes N)(z) = \sup_{z=x*y} \min[M(x), N(y)]$$

تعمیم چهار عمل اصلی برای اعداد فازی

در حالت خاص برای چهار عمل اصلی، تعریف بالا به صورت های زیر در می آید

$$\begin{aligned} (M \oplus N)(z) &= \sup_{z=x+y} \min[M(x), N(y)] \\ (M \ominus N)(z) &= \sup_{z=x-y} \min[M(x), N(y)] \\ (M \otimes N)(z) &= \sup_{z=x \times y} \min[M(x), N(y)] \\ (M \oslash N)(z) &= \sup_{z=x/y} \min[M(x), N(y)] \end{aligned}$$

مثال ۶.۱.آ. دو عدد فازی مثلثی M به صورت تقریباً پنج و N به صورت تقریباً هفت را با توابع عضویت زیر در نظر بگیرید

$$M(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{4} & 3 \leq x < 5 \\ \frac{5-x}{4} & 5 \leq x < 7 \end{cases}, \quad N(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{4} & 5 \leq x < 7 \\ \frac{7-x}{4} & 7 \leq x < 9 \end{cases}$$

جمع و تفاضل دو عدد فازی بالا، اعداد فازی با توابع عضویت زیر هستند:

$$\begin{aligned} (M \oplus N)(x) &= \begin{cases} \frac{x-8}{4} & 8 \leq x < 12 \\ \frac{16-x}{4} & 12 \leq x < 16 \end{cases} \\ (M \ominus N)(x) &= \begin{cases} \frac{x+6}{4} & -6 \leq x < -2 \\ \frac{2-x}{4} & -2 \leq x < 2 \end{cases} \end{aligned}$$

پیوست ب

برخی مفاهیم و نتایج اساسی نظریه احتمال

در این بخش برای سهولت درک مطالب بیان شده در رساله به بیان برخی مفاهیم و قضایای آنالیز حقیقی و نظریه احتمال می پردازیم که تعمیم آنها در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفته است.

در این قسمت قضیه رادسترم را در حالت کلاسیک بیان می کنیم.

قضیه ب.۱.۰. فرض کنید M یک نیم گروه جمعی باشد. برای $A, B, C \in M$ داریم:

$$۱. (A + B) + C = A + (B + C)؛$$

$$۲. A + B = B + A؛$$

$$۳. A + C = B + C \Rightarrow A = B؛$$

آنگاه می توان M را در یک گروه N نشانده.

اگر λ یک ضریب نامنفی حقیقی باشد و

$$۴. \lambda(A + B) + C = \lambda A + \lambda B؛$$

$$۵. (\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A؛$$

$$۶. \lambda_1(\lambda_2 A) = \lambda_1 \lambda_2 A$$

$$۷. 1A = A$$

روی M تعریف شوند آنگاه یک ضریب بوسیله یک مقدار حقیقی روی N تعریف می شود بطوریکه N یک فضای برداری و به ازای $A \in M$ و $\lambda \geq 0$ ، λA یک مقدار معادل با آنچه در M است را می دهد.

حال اگر $d(A, B)$ یک متر در M باشد و داشته باشیم:

$$۸. d(A + C, B + C) = d(A, B)$$

$$۹. d(\lambda A, \lambda B) = \lambda d(A, B)$$

۱۰. $A + B$ و λA عملگرهای پیوسته در توپولوژی تعریف شده بوسیله d باشند

آنگاه یک متر روی N می توان تعریف کرد که N یک فضای نرمدار باشد.

در ادامه قضیه همگرایی مغلوب لبگ را در حالت کلاسیک بیان می کنیم.

قضیه ب.۲.۰. فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی و Y یک متغیر تصادفی با امید ریاضی متناهی باشد به قسمی که

$$|X_n| \leq Y \quad \forall n \geq 1.$$

اگر X_n بطور قریب به یقین به X همگرا باشد، آنگاه

$$E|X_n - X| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

به ویژه

$$EX_n \rightarrow EX, \quad n \rightarrow \infty.$$

مراجع

- [۱] امینی م. و بزرگنیا ا، ”از عناصر تصادفی تا مجموعه تصادفی فازی” سیستان و بلوچستان، سومین همایش مجموعه های فازی و کاربردهای آن، ص ۲۱-۱۱، ۱۳۸۱
- [۲] کمایی ص، پایان نامه ارشد: ”متغیر تصادفی فازی”، دانشکده ریاضی، دانشگاه اصفهان، ۱۳۸۳

- [3] Ahmadzade, Hamed and Amini, Mohammad and Taheri, S Mahmoud and Bozorgnia, Abolghasem. Some limit theorems for independent fuzzy random variables. *Thai Journal of Mathematics*, 12(3):537–548, 2014.
- [4] Ahmadzade, Hamed and Amini, Mohammad and Taheri, SM and Bozorgnia, Abolghasem. Negative dependence for fuzzy random variables: Basic definitions and some limit theorems. *Filomat*, 30(9):2535–2549, 2016.
- [5] KJ Arrow and FH Hahn. General competitive analysis. *San Francisco: Holder Day*, 1971.
- [6] Giuliano Artico and Roberto Moresco. On fuzzy metrizable. *Journal of mathematical analysis and applications*, 107(1):144–147, 1985.
- [7] Zvi Artstein and Richard A Vitale. A strong law of large numbers for random compact sets. *The Annals of Probability*, pages 879–882, 1975.
- [8] KB Athreya. Strong law for the bootstrap. *Statistics & Probability Letters*, 1(3):147–150, 1983.
- [9] Krishna B Athreya, Malay Ghosh, Leone Y Low, and Pranab K Sen. Laws of large numbers for bootstrapped statistics. *Journal of statistical planning and inference*, 9(2):185–194, 1984.
- [10] Robert J Aumann. Integrals of set-valued functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 12(1):1–12, 1965.

-
- [11] Charles L Byrne. Remarks on the set-valued integrals of debreu and aumann. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 62(2):243–246, 1978.
 - [12] GL Cain and RH Kasriel. Fixed and periodic points of local contraction mappings on probabilistic metric spaces. *Mathematical systems theory*, 9(3):289–297, 1975.
 - [13] Chin-Liang Chang. Fuzzy topological spaces. *Journal of mathematical Analysis and Applications*, 24(1):182–190, 1968.
 - [14] Ana Colubi, J Santos Domínguez-Menchero, Miguel López-Díaz, and Dan A Ralescu. On the formalization of fuzzy random variables. *Information Sciences*, 133(1):3–6, 2001.
 - [15] Ana Colubi, Miguel López-Díaz, J Santos Domínguez-Menchero, and M Angeles Gil. A generalized strong law of large numbers. *Probability Theory and Related Fields*, 114(3):401–417, 1999.
 - [16] Noel Cressie. A strong limit theorem for random sets. *Advances in Applied Probability*, 10:36–46, 1978.
 - [17] Sándor Csörgö. On the law of large numbers for the bootstrap mean. *Statistics & probability letters*, 14(1):1–7, 1992.
 - [18] Gerard Debreu et al. Integration of correspondences. In *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume 2: Contributions to Probability Theory, Part 1*. The Regents of the University of California, 1967.
 - [19] Zike Deng. Fuzzy pseudo-metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 86(1):74–95, 1982.
 - [20] Phil Diamond. Fuzzy least squares. *Information Sciences*, 46(3):141–157, 1988.
 - [21] Phil Diamond and Peter Kloeden. *Metric spaces of fuzzy sets: theory and applications*. World Scientific, 1994.
 - [22] Bradley Efron. Bootstrap methods: another look at the jackknife. pages 569–593, 1992.
 - [23] Michael A Erceg. Metric spaces in fuzzy set theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 69(1):205–230, 1979.

- [24] Robert Féron and Robert Fortet. *Théorie des probabilités: Ensembles aléatoires flous*. CR Acad Sc. Paris, 1976.
- [25] R Fortet et al. Ensembles aleatoires induits par une repartition ponctuelle aleatoire. 1975.
- [26] Ke-Ang Fu and Li-Xin Zhang. Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random compact sets and fuzzy random sets. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(24):3360–3368, 2008.
- [27] A George and P Veeramani. On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy sets and systems*, 64(3):395–399, 1994.
- [28] A. George and P. Veeramani. On some results in fuzzy metric spaces. *Fuzzy Sets and Systems*, 64(3):395 – 399, 1994.
- [29] Joseph A Goguen. L-fuzzy sets. *Journal of mathematical analysis and applications*, 18(1):145–174, 1967.
- [30] Guan, Li and Li, Shoumei. Laws of large numbers for weighted sums of fuzzy set-valued random variables. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12(6):811–825, 2004.
- [31] Kaoru Hirota. Concepts of probabilistic sets. *Fuzzy sets and systems*, 5(1):31–46, 1981.
- [32] Cheng-Ming Hu. Fuzzy topological-spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 110(1):141–178, 1985.
- [33] Masuo Hukuhara. Integration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. *Funkcialaj Ekvacioj*, 10(3):205–223, 1967.
- [34] Bruce Hutton. Products of fuzzy topological spaces. *Topology and its Applications*, 11(1):59–67, 1980.
- [35] Osmo Kaleva and Seppo Seikkala. On fuzzy metric spaces. *Fuzzy sets and systems*, 12(3):215–229, 1984.
- [36] DG Kendall. Foundation of a theory of random sets. *Stochastic geometry*, 1974.
- [37] DG Kendall. Foundations of a theory of random sets, stochastic geometry (harding ef and kendall dg, eds.), 1974.

-
- [38] Joo-mok Kim and Yun Kyong Kim. Some notes on strong law of large numbers for banach space valued fuzzy random variables. *The Korean Journal of Mathematics*, 21(4):383–399, 2013.
 - [39] EP Klement, ML Puri, and DA Ralescu. Limit theorems for fuzzy random variables. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 407, pages 171–182. The Royal Society, 1986.
 - [40] Ivan Kramosil and Jiří Michálek. Fuzzy metrics and statistical metric spaces. *Kybernetika*, 11(5):336–344, 1975.
 - [41] Kruse, Rudolf. On the variance of random sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 122(2):469–473, 1987.
 - [42] Huibert Kwakernaak. Fuzzy random variables—i. definitions and theorems. *Information sciences*, 15(1):1–29, 1978.
 - [43] Vangipuram Lakshmikantham and Ram N Mohapatra. *Theory of fuzzy differential equations and inclusions*. CRC press, 2003.
 - [44] Shoumei Li and Yukio Ogura. Strong laws of large numbers for independent fuzzy set-valued random variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(19):2569–2578, 2006.
 - [45] Xiang Li and Baoding Liu. New independence definition of fuzzy random variable and random fuzzy variable. *World Journal of Modelling and Simulation*, 2(5):338–342, 2006.
 - [46] Miguel López-Díaz and Maria Angeles Gil. Constructive definitions of fuzzy random variables. *Statistics & probability letters*, 36(2):135–143, 1997.
 - [47] Miguel López-Díaz and María Angeles Gil. Approximating integrably bounded fuzzy random variables in terms of the “generalized” hausdorff metric. *Information Sciences*, 104(3-4):279–291, 1998.
 - [48] R Lowen. Fuzzy topological spaces and fuzzy compactness. *Journal of Mathematical analysis and applications*, 56(3):621–633, 1976.
 - [49] Robert Lowen. Initial and final fuzzy topologies and the fuzzy tychonoff theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 58(1):11–21, 1977.
 - [50] Georges Matheron. Random sets and integral geometry. 1975.

- [51] Karl Menger. Statistical metrics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 28(12):535, 1942.
- [52] Ilya S Molchanov. On strong laws of large numbers for random upper semicontinuous functions. *Journal of mathematical analysis and applications*, 235(1):349–355, 1999.
- [53] Ilya S Molchanov et al. *Theory of random sets*, volume 19. Springer, 2005.
- [54] Samuel Morillas, Valentin Gregori, Guillermo Peris-Fajarnes, and Almanzor Sapena. New adaptive vector filter using fuzzy metrics. *Journal of Electronic Imaging*, 16(3):033007, 2007.
- [55] Steven Nahmias. Fuzzy variables. *Fuzzy sets and systems*, 1(2):97–110, 1978.
- [56] E Pap, O Hadžić, and R Mesiar. A fixed point theorem in probabilistic metric spaces and an application. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 202(2):433–449, 1996.
- [57] Emilian Parau and Viorel Radu. Some remarks on tardiff’s fixed point theorem on menger spaces. *Portugaliae Mathematica*, 54(4):431–440, 1997.
- [58] Frank N Proske and Madan L Puri. Strong law of large numbers for banach space valued fuzzy random variables. *Journal of Theoretical Probability*, 15(2):543–551, 2002.
- [59] Madan L Puri and Dan A Ralescu. Differentials of fuzzy functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 91(2):552–558, 1983.
- [60] Madan L Puri and Dan A Ralescu. Strong law of large numbers for banach space valued random sets. *The Annals of Probability*, pages 222–224, 1983.
- [61] Madan L. Puri and Dan A. Ralescu. Limit theorems for random compact sets in banach space. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 151(1):97, 1985.
- [62] Madan L Puri and Dan A Ralescu. Fuzzy random variables. *Journal of mathematical analysis and applications*, 114(2):409–422, 1986.
- [63] Hans Rådström. An embedding theorem for spaces of convex sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 3(1):165–169, 1952.

- [64] HE Robbins. On the measure of a random set. ii. *The Annals of Mathematical Statistics*, 16(4):342–347, 1945.
- [65] Herbert E Robbins. On the measure of a random set. *The Annals of Mathematical Statistics*, 15(1):70–74, 1944.
- [66] Halsey Lawrence Royden. *Real analysis*. Krishna Prakashan Media, 1968.
- [67] R Saadati and SM Vaezpour. Some results on fuzzy banach spaces. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 17(1):475–484, 2005.
- [68] Berthold Schweizer and Abe Sklar. *Probabilistic metric spaces*. Courier Corporation, 2011.
- [69] Berthold Schweizer, Abe Sklar, et al. Statistical metric spaces. *Pacific J. Math*, 10(1):313–334, 1960.
- [70] AP Shostak. Two decades of fuzzy topology: basic ideas, notions, and results. *Russian Mathematical Surveys*, 44(6):125, 1989.
- [71] Luciano Stefanini. A generalization of hukuhara difference and division for interval and fuzzy arithmetic. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(11):1564 – 1584, 2010. Theme: Decision Systems.
- [72] Luciano Stefanini and Barnabas Bede. A new gh-difference for multi-dimensional convex sets and convex fuzzy sets. *Axioms*, 8(2):48, 2019.
- [73] L.A. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338 – 353, 1965.

Aabstract

In the past, the strong law of large numbers and the central limit theorem for compact sets, as well as independent and identically distributed fuzzy random variables in Banach space have been studied. In recent years, fuzzy metric space and fuzzy normed space have been introduced. When fuzzy uncertainty is greater than random uncertainty, the fuzzy metric space is more useful than the probability metric space. Therefore, in this research, we seek to investigate limit theorems in fuzzy normed space in two general cases. In the first case, we examine the law of large numbers for random sets and compact random sets in fuzzy metric space, then express this theorem in situations where our random variables are fuzzy. Given the application of the strong law of large numbers in the bootstrap sampling method, as a practical example the strong law of large numbers theorem expressed for random sets and fuzzy random variables will be used in the bootstrap sampling. Also as another application, we will use the proposed fuzzy metric and the strong law of large numbers in bootstrap sampling to reduce noise in image processing.

Keywords: Limit theorems, Fuzzy metric space, Fuzzy normed space, Fuzzy Banach space, bootstrap mean, Image Processing.



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in probability

Limit theorems for fuzzy random variables in fuzzy metric space

By: Reza Ghasemi najaf abadi

Supervisors:

Dr. Ahmad nezakati

Dr. Mohammad reza rabie

February 2021