بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌ها بر پایه درخت عیب در شرایط نادقیق

نگارنده: مریم امینی مقدم

استاد راهنما

دکتر محمدرضا ربیعی

استاد مشاور

دکتر رضا زارعی

شهریور ۱۴۰۰

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **خانم مریم امینی مقدم** با شماره دانشجویی **۹۶۰۳۱۷۴** رشته **آمار ریاضی** گرایش — تحت عنوان **تحلیل قابلیت اعتماد سیستم ها بر پایه درخت عیب در شرایط نادقیق** که در تاریخ **۱۴۰۰/۰۶/۰۹** با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار شد به شرح ذیل اعلام می گردد:

الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ – ۱۸ ☑

ج) درجه خوب: نمره۱۷/۹۹– ۱۶ ☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۵/۹۹-۱۴ ☐

ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐

نوع تحقیق: نظری ■ عملی ☐

عضو هیأت داوران	نام ونام خانوادگی	مرتبهٔ علمی	امضاء
۱ـ استاد راهنمای اول	دکتر محمدرضا ربیعی	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم	------	------	------
۳- استاد مشاور	دکتر رضا زارعی	استادیار	
۴- استاد داور اول	دکتر داود شاهسونی	دانشیار	
۵- استاد داور دوم	دکتر بهروز فتحی	استاد	
۶- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدحیدر جعفری	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشکده ریاضی

اگر شایسته تقدیم باشد، در کمال افتخار
و امتنان تقدیم به ساحت مقدس
حضرت علی ابن موسی الرضا (ع)،
حضرت بقیه الله مهدی موعود (عج)
و
محضر ارزشمند پدر ومادر عزیزم به خاطر
همه تلاش‌های محبت‌آمیزی که در دوران
مختلف زندگی‌ام انجام داده‌اند
و
تقدیم به اساتید و دوستان عزیزم

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست.

پس از ارادت خاضعانه به درگاه خداوند بی‌همتا وظیفه خود می‌دانم از زحمات استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمدرضا ربیعی صمیمانه تشکر وقدردانی کنم.

از استاد محترم، جناب آقای دکتر رضا زارعی که زحمت مطالعه و مشاوره این پایان‌نامه را تقبل فرمودند و در آماده‌سازی این پایان‌نامه اینجانب را مورد راهنمایی خود قرار دادند کمال تشکر را دارم.

همچنین لازم می‌دانم از اساتید فرهیخته جناب آقای دکتر داود شاهسونی و جناب آقای دکتر بهروز فتحی که داوری این پایان‌نامه را به عهده گرفتند با تمام وجود تشکر وقدردانی نمایم.

در این‌جا جا دارد از اساتید گرامیم جناب آقای دکتر سیدمحمود طاهری، جناب آقای دکتر مهدی دوست‌پرست، جناب آقای دکتر مصطفی رزمخواه، جناب آقای دکتر مجید اسدی و دیگر اساتید گرانقدر به دلیل یاری‌ها و راهنمایی‌های بی‌چشم‌داشت‌شان که بسیاری از سختی‌ها را برایم آسانتر نموده‌اند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم.

همچنین لازم می‌دانم یادی کنم از اساتید پیشکسوت خود از مرحوم جناب آقای دکتر غلامحسین شاهکار که افتخار شاگردی ایشان در دروس کارشناسی و پایان نامه کارشناسی را داشتم و همینطور تقدیر از زحمات خالصانه و دلسوزانه، جناب آقای دکتر ابوالقاسم بزرگ‌نیا، جناب آقای دکتر حسن صادقی و دیگر اساتیدی که در محضر آنان شاگردی کردم.

در پایان بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگار مهر ومهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدشان را و تشکر می‌کنم از برادران و خواهران عزیزم به پاس عاطفه و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

مریم امینی مقدم

شهریور ۱۴۰۰

تعهد نامه

اینجانب **مریم امینی مقدم** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **آمار ریاضی** دانشکده **علوم ریاضی** دانشگاه **صنعتی شاهرود**، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌ها بر پایه درخت عیب در شرایط نادقیق** ، تحت راهنمایی **دکتر محمدرضا ربیعی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود’’ یا “ Shahrood University of Technology ” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم امینی مقدم
شهریور ۱۴۰۰

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

روش‌هایی برای ارزیابی قابلیت اعتماد و ایمنی سیستم‌های پیچیده وجود دارد. یکی از این روش‌ها، تحلیل درخت عیب به عنوان ابزاری برای ارزیابی و توصیه بهبود سیستم است. از تعمیم‌های این روش، مواقعی که رفتار شکست وابسته به زمان است، تحلیل درخت عیب زمانی پاندورا است. در تحلیل درخت عیب و درخت عیب زمانی پاندورا معمولاً از داده‌های دقیق شکست اجزای سیستم برای محاسبه احتمال وقوع رویداد برتر درخت استفاده می‌شود. با این حال، بدست آوردن این داده‌های دقیق به دلیل اطلاعات ناکافی و نادقیق در مورد اجزای یک سیستم می‌تواند مشکل‌ساز باشد. این پایان‌نامه، به تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌ها بر پایه درخت عیب در شرایط نادقیق می‌پردازد. پس از مروری بر مجموعه‌ها و حساب اعداد فازی و همچنین اشاره‌ای بر مفاهیم قابلیت اعتماد و درخت عیب، به تحلیل درخت عیب بر پایه $\alpha-$برش پرداخته می‌شود. تحلیل درخت عیب فازی زمانی پاندورا با استفاده از عملگرهای معمولی فازی برای جمع و ضرب و همچنین $T-$نرم دراستیک از دیگر مباحث مطرح شده در این مطالعه است. کارایی روش‌های مطرح شده، بر روی داده‌های واقعی نیز نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: قابلیت اعتماد، تحلیل درخت عیب، درخت عیب زمانی پاندورا، مجموعه‌های فازی، $T-$نرم دراستیک، $\alpha-$برش.

لیست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

۱. امینی مقدم، مریم؛ ربیعی، محمدرضا و زارعی، رضا. *مروری بر تحلیل درخت عیب در شرایط نایقینی*. در مجموعه مقالات همایش ملی مدیریت ریسک و تاب‌آوری در صنایع معدنی، شاهرود، تیرماه ۱۳۹۸، دانشگاه صنعتی شاهرود.

۲. امینی مقدم، مریم؛ ربیعی، محمدرضا و زارعی، رضا. *مروری بر تحلیل درخت عیب در شرایط نادقیق و برخی کاربردهای آن*. مقاله ارائه شده در چهارمین کنفرانس هوش جمعی و محاسبات تکاملی، اولین کنگره مشترک هوش محاسباتی، مشهد، اسفندماه ۱۳۹۸، دانشگاه فردوسی مشهد.

فهرست مطالب

فهرست تصاویر ف

فهرست جداول ش

پیشگفتار ث

۱ مروری بر مجموعه‌ها و حساب اعداد فازی ۱

۱.۱ آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی ۱

۲.۱ مروری بر حساب اعداد فازی ۸

۳.۱ T-نرم‌ها و S-نرم‌ها ۱۴

۴.۱ عملیات جبری روی اعداد فازی بر اساس T-نرم دراستیک ۱۹

۵.۱ غیرفازی‌سازی ۲۴

۲ مروری بر نظریه قابلیت اعتماد و تحلیل درخت عیب ۲۹

۱.۲ مروری بر نظریه قابلیت اعتماد ۲۹

۱.۱.۲ مقدمه ۲۹

۲.۱.۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی ۳۲

۲.۲ مروری بر تحلیل درخت عیب ۳۹

۱.۲.۲ مقدمه ۳۹

۲.۲.۲ ارزیابی کمی و کیفی درخت عیب ۴۱

۳.۲.۲ نگرش‌های شکست در برابر موفقیت ۴۱

۴.۲.۲ مراحل انجام تحلیل درخت عیب ۴۳

۵.۲.۲ مدل‌سازی درخت عیب ۴۴

۶.۲.۲ مباحث تکمیلی در تحلیل درخت عیب ۵۰

۷.۲.۲ جبر بولی و کاربرد آن در تحلیل درخت عیب ۵۳

۳.۲ گسترش‌های دینامیک درخت عیب استاتیک کلاسیک ۶۳

۱.۳.۲ درخت عیب دینامیک ۶۴

۳ تحلیل قابلیت اعتماد فازی بر پایه $\alpha-$برش ۶۷
۱.۳ مقدمه ۶۷
۲.۳ رویکرد حساب بازه‌ای در تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌ها ۶۹
۱.۲.۳ سیستم با مولفه‌های یکسان ۷۰
۲.۲.۳ سیستم با مولفه‌های متفاوت ۷۵

۴ تعیم قابلیت اعتماد سیستم‌های دینامیک بر پایه درخت عیب فازی زمانی پاندورا ۸۷
۱.۴ مقدمه ۸۸
۲.۴ درخت عیب زمانی پاندورا ۸۹
۱.۲.۴ اهداف و فرضیات درخت عیب زمانی پاندورا ۸۹
۲.۲.۴ دروازه‌های درخت عیب زمانی پاندورا ۹۰
۳.۲.۴ قوانین زمانی پاندورا ۹۲
۴.۲.۴ نمایش زمان در درخت عیب زمانی پاندورا ۹۳
۵.۲.۴ ارزیابی کیفی درخت عیب زمانی پاندورا ۹۴
۶.۲.۴ ارزیابی کمی درخت عیب زمانی پاندورا ۹۴
۷.۲.۴ عملگرهای فازی برای دروازه‌های درخت عیب زمانی پاندورا . . . ۹۶
۳.۴ مطالعه موردی و ارزیابی ۹۸
۱.۳.۴ تحلیل کیفی سیستم برای ایجاد درخت عیب زمانی پاندورا . . . ۱۰۰
۲.۳.۴ ارزیابی کمی قابلیت اعتماد سیستم ۱۰۲
۴.۴ تاثیر عملگرهای محاسباتی در تحلیل قابلیت اعتماد فازی سیستم ۱۰۸
۱.۴.۴ محاسبات مبتنی بر T-نرم دراستیک ۱۰۸
۵.۴ عملگرهای مبتنی بر T-نرم دراستیک برای دروازه‌های درخت عیب زمانی پاندورا ۱۱۲
۱.۵.۴ عملگر فازی T-نرم دراستیک برای دروازه AND ۱۱۲
۲.۵.۴ عملگر فازی T-نرم دراستیک برای دروازه OR ۱۱۳
۳.۵.۴ عملگر فازی T-نرم دراستیک برای دروازه PAND ۱۱۳
۴.۵.۴ عملگر فازی T-نرم دراستیک برای دروازه POR ۱۱۳
۶.۴ نتیجه‌گیری ۱۱۵
۷.۴ پیشنهادات برای آینده تحقیق ۱۱۶

مراجع ۱۱۹

فهرست تصاویر

۱.۱ نمودار تابع عضویت اعداد فازی $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ و جمع و تفاضل آن‌ها برای مثال ۱.۲.۱ . . . . . ۱۰

۲.۱ نمودار تابع عضویت فازی «تقریباً ۵» برای مثال ۲.۲.۱ . . . . . ۱۱

۳.۱ نمودار تابع عضویت اعداد فازی $\tilde{M}$ و $\tilde{N}_1$ و $\tilde{N}_2$ و جمع و تفاضل آن‌ها در مثال ۳.۲.۱ . . . . . ۱۲

۴.۱ نمودار تابع عضویت اعداد فازی و تابع عضویت تقریبی $\tilde{M} \otimes \tilde{N}$ در مثال ۴.۲.۱ . . . . . ۱۳

۵.۱ نمودار تقریبی اعمال چهارگانه روی اعداد فازی تحت $T-$نرم دارستیک در مثال ۱.۴.۱ . . . . . ۲۳

۶.۱ نمودار تقریبی اعمال جبری چهارگانه روی اعداد فازی معمولی در مثال ۱.۴.۱ . . . . . ۲۴

۷.۱ غیرفازی‌سازی با روش مرکز ثقل ۲۵

۸.۱ غیرفازی‌سازی با روش مرکز ارتفاع سطح ۲۶

۹.۱ غیرفازی‌سازی با روش مرکز میانگین سطح $x^* = ۳۴۵/۹۴$ ۲۶

۱۰.۱ غیرفازی‌سازی با روش اولین ماکزیمم و میانگین ماکزیمم ۲۷

۱.۲ سیستم سری ۳۵

۲.۲ سیستم موازی ۳۵

۳.۲ ساختار سیستم ۳۶

۴.۲ حالت خاصی از سیستم موازی–سری ۳۷

۵.۲ ساختار سیستم ۳۸

۶.۲ طیف شکست/موفقیت ۴۱

۷.۲ طیف شکست/موفقیت فردی از خانه تا اداره ۴۲

۸.۲ دروازه OR ۴۵

۹.۲ مدل درخت عیب خرابی یک دریچه با استفاده از دروازه OR ۴۵

۱۰.۲ دروازه AND ۴۵

۱۱.۲ مدل درخت عیب دستگاه موتور برق با استفاده از دروازه AND ۴۶
۱۲.۲ دروازه ترکیبی ۴۶
۱۳.۲ دروازه بازدارنده ۴۷
۱۴.۲ دروازه OR انحصاری ۴۷
۱۵.۲ دروازه AND اولویت‌دار ۴۷
۱۶.۲ دروازه وابستگی عملکردی ۴۸
۱۷.۲ دروازه اجرای توالی ۴۸
۱۸.۲ دروازه قطعات یدکی ۴۹
۱۹.۲ نماد رویدادهای درخت عیب ۵۰
۲۰.۲ حالت‌های شکست سیستم ۵۱
۲۱.۲ تفاوت بین خطا و خرابی ۵۱
۲۲.۲ نام‌گذاری رویدادها و دروازه‌ها ۵۲
۲۳.۲ ساختار درخت عیب ۵۲
۲۴.۲ نمودار درخت عیب دیر بیدار شدن فرد از خواب ۵۴
۲۵.۲ درخت عیب نام‌گذاری شده ۵۶
۲۶.۲ نرخ خطای مربوط به رویدادهای پایه ۵۸
۲۷.۲ دیاگرام ساده‌سازی شده برای سیستم تشخیص شرایط اضطراری ۶۰
۲۸.۲ درخت عیب سیستم تشخیص شرایط اضطراری ۶۱

۱.۳ $\alpha-$برش $\tilde{P}_i$ ۷۰
۲.۳ تحلیل درخت عیب برای مثال ۱.۲.۳ . . . . . ۷۲
۳.۳ نمودار تابع عضویت خرابی فازی سیستم آسیاب برای مثال ۱.۲.۳ . . . ۷۵
۴.۳ سیستم پمپ فاضلاب ۷۸
۵.۳ تحلیل درخت عیب برای جاری شدن سیل در زیرزمین ۷۸
۶.۳ تحلیل درخت عیب فازی برای مثال ۲.۲.۳ . . . . . ۷۹
۷.۳ تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}$ در مثال ۲.۲.۳ . . . . . ۸۰
۸.۳ تابع عضویت عدد فازی $\tilde{B}$ در مثال ۲.۲.۳ . . . . . ۸۰
۹.۳ تابع عضویت عدد فازی $\tilde{C}$ در مثال ۲.۲.۳ . . . . . ۸۱
۱۰.۳ تابع عضویت عدد فازی $\tilde{D}$ در مثال ۲.۲.۳ . . . . . ۸۱
۱۱.۳ تابع عضویت عدد فازی $\tilde{E}$ در مثال ۲.۲.۳ . . . . . ۸۲
۱۲.۳ تابع عضویت عدد فازی $\tilde{F}$ در مثال ۲.۲.۳ . . . . . ۸۲
۱۳.۳ تابع عضویت عدد فازی $\tilde{G}$ در مثال ۲.۲.۳ . . . . . ۸۳
۱۴.۳ تابع عضویت عدد فازی $\tilde{J}$ در مثال ۲.۲.۳ . . . . . ۸۳
۱۵.۳ مقدار احتمال نهایی برای جاری شدن سیل در زیرزمین ۸۶

۱.۴ دروازه‌های زمانی پاندورا ۹۲
۲.۴ سیستم توزیع سوخت مقاوم در برابر خرابی کشتی ۹۹
۳.۴ درخت عیب زمانی رفتار شکست موتور ۱ . . . . . ۱۰۲
۴.۴ قابلیت اعتماد فازی سیستم $\tilde{P}_X$ برای مثال ۱.۴.۴ با استفاده از $T-$نرم دراستیک ۱۱۱

فهرست جداول

۱.۲ برخی از قوانین جبر بولی ۵۳
۲.۲ رویدادهای درخت عیب دیر بیدار شدن فرد از خواب ۵۶

۱.۳ مهمترین عوامل امکان ایجاد آسیب به افراد از سمت دستگاه‌ها ۷۲
۲.۳ مقادیر $\alpha-$برش‌های قابلیت اعتماد سیستم آسیاب ۷۴
۳.۳ کمیت‌های فازی عوامل سیستم پمپ فاضلاب ۷۹
۴.۳ $\alpha-$برش مجموعه‌های فازی $\tilde{J}, \tilde{G}, \tilde{F}, \tilde{E}, \tilde{D}, \tilde{C}, \tilde{B}, \tilde{A}$ ۸۵
۵.۳ فاصله احتمال جاری شدن سیل در زیرزمین ۸۶

۱.۴ فهرست رویدادهای اساسی سیستم توزیع سوخت ۱۰۰
۲.۴ دنباله‌های قطع‌کننده مینیمال منجر به شکست موتور ۱ . . . . . ۱۰۲
۳.۴ امتیازات وزنی برای متخصصان مختلف [۴۷] ۱۰۴
۴.۴ فاکتورهای وزنی شش متخصص ۱۰۴
۵.۴ متغیرهای زبانی با مقیاس‌های تبدیل ۱۰۵
۶.۴ نظرات متخصصان در مورد رویدادهای اساسی ۱۰۵
۷.۴ تجمیع نظر متخصصان به شکل فازی مثلثی برای رویدادهای اساسی . . ۱۰۵
۸.۴ امکانات فازی دنباله‌های قطع‌کننده مینیمال برای حذف سوخت موتور ۱ ۱۰۶
۹.۴ مقادیر نرخ شکست ثابت بدست آمده در رویکردهای تحلیلی، رویکردهای مبتنی بر شبکه بیزین و رویکردهای مبتنی برشبکه پتری ۱۰۶
۱۰.۴ مقایسه عدم اطمینان سیستم برآورد شده توسط سایر رویکردها با عدم اطمینان برآورد شده توسط روش پیشنهادی ۱۰۶
۱۱.۴ رتبه بندی اهمیت فازی برای رویدادهای اساسی ۱۰۸

پیشگفتار

تجزیه و تحلیل درخت عیب یک روش قدرتمند است که به طور گسترده برای ارزیابی ایمنی و قابلیت اعتماد سیستم‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. می‌توان از آن برای ارزیابی اثرات ترکیب‌های شکست در رفتار سیستم استفاده کرد، اما قادر به ثبت رفتار دینامیکی وابسته به توالی نیست. تعدادی از پسوندهای درختان عیب برای غلبه بر این محدودیت پیشنهاد شده است. پاندورا، یکی از این پسوندها، دروازه‌های زمانی و قوانین زمانی را معرفی می‌کند تا امکان تجزیه و تحلیل پویا از درخت عیب زمانی فراهم شود.

با این حال پیچیدگی فزاینده سیستم‌های مهندسی، عدم‌قطعیت اساسی و نادقیق در ارتباط با داده‌ها در مسایل ارزیابی ریسک اعمال کرده است. بر این اساس برای بسیاری از سیستم‌های پیچیده، تخمین داده‌های شکست دقیق اجزا از حوادث گذشته به دلیل فقدان دانش، کمبود اطلاعات آماری و تغییرات در محیط‌های عملیاتی سیستم‌ها بسیار دشوار است. این وضعیت به خصوص در مراحل اولیه طراحی مرتبط است زیرا در آن زمان تحلیل‌گران باید مولفه‌های جدید یا نسبی را در نظر بگیرند و در نتیجه داده‌های شکست دقیق ممکن است شناخته‌شده نباشند. بدین‌ترتیب، در غیاب داده‌های شکست دقیق، ممکن است لازم باشد با تخمین‌های نادقیق احتمالات کار کنیم. روش‌های ارزیابی موجود برای درختان عیب زمانی پاندورا قادر به کار با داده‌های نامعلوم از این نوع نیستند. نظریه مجموعه فازی در حل مسایلی که داده‌های دقیق موجود نیستند و در تصمیم‌گیری از اطلاعات مبهم موثر هستند، اثبات شده است.

بنابراین، این پایان‌نامه راه‌حل‌های تحلیلی را تنها به صورتی که با رویکرد قاعده‌مند فازی سازگار است، در نظر می‌گیرد. ایده اصلی در پشت تحلیل درخت عیب فازی زمانی پاندورا استفاده از یک نمایش فازی از داده‌های شکست به جای مقادیر قطعی است و سپس رویداد برتر را به عنوان یک محدوده از مقادیر ممکن ارزیابی می‌کند. به این ترتیب، اطلاعات کمی مهم در مورد قابلیت اعتماد یک سیستم را می توان حتی اگر داده‌های دقیق در مورد اجزای سیستم مشخص نشده باشند به دست آورد. بنابراین مطالب این پایان‌نامه به‌صورت زیر تقسیم‌بندی شده‌اند.

- در فصل اول، مقدمات مورد نیاز سایر فصل‌ها را بیان خواهیم کرد.
- در فصل دوم، مفاهیم نظریه قابلت اعتماد، تکنیک تحلیل درخت عیب و گسترش‌های

دینامیک درخت عیب را ارائه می‌دهیم.

- در فصل سوم، تحلیل قابلیت اعتماد فازی سیستم بر پایه $\alpha-$برش با توابع عضویت یکسان و متفاوت اجزای سیستم را بررسی می‌کنیم.
- در فصل چهارم، تحلیل دینامیکی سیستم‌های پیچیده بر مبنای استنباط افراد متخصص و نظریه مجموعه فازی بر پایه درخت عیب زمانی پاندورا را ارائه می‌دهیم و به بررسی عملگرهای مبتنی بر $T-$نرم دراستیک در تحلیل قابلیت اعتماد فازی سیستم پرداخته و در پایان، عملگرهای مبتنی بر $T-$نرم دراستیک را برای تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌های دینامیک بر پایه درخت عیب فازی زمانی پاندورا پیشنهاد می‌دهیم.

فصل ۱

مروری بر مجموعه‌ها و حساب اعداد فازی

هدف از نظریه فازی، یافتن الگوهای ریاضی است که با تفکر و استنتاج انسانی و همچنین با الگوهای طبیعی و واقعی تطابق و سازگاری داشته باشد. هر چند این شاخه از علم بسیار جوان است اما هم از جنبه نظری و هم از جنبه کاربردی پیشرفت‌های شایانی در آن انجام گرفته است. این فصل به سه بخش آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی، مروری بر حساب اعداد فازی، $T-$نرم و $S-$نرم‌های فازی تقسیم می‌شود. عمده مطالب این فصل از مراجع [۲–۴] استفاده شده است.

۱.۱ آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی

نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفعلی عسگرزاده[1] دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی آمریکا ارائه شد [۲۱]. این نظریه از زمان ارائه آن تاکنون، گسترش و تعمیق زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است.
در نظریه مجموعه‌های معمولی، مجموعه‌ها به صورت گردآیه‌ای معین از اشیاء تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر، هر مجموعه با یک ویژگی خوش‌تعریف مشخص می‌شود که با توجه به آن

[1] Lotf.Ali.Asgarzadeh

ویژگی، با قاطعیت می‌توان گفت که یک شی مفروض متعلق به مجموعه مورد نظر هست یا نه. مثلاً اگر مجموعه مرجع X، مجموعه اعداد حقیقی و P ویژگی «بزرگ‌تر از ده بودن» فرض شود، آن‌گاه P یک ویژگی خوش‌تعریف است که یک مجموعه مثلاً A با آن متناظر می‌شود، زیرا برای هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی می‌توان با قاطعیت گفت که آیا آن عدد بزرگ‌تر از ده است یا خیر و بنابراین عضو A هست یا نه. حال فرض کنید بخواهیم درباره‌ی مجموعه‌ای از اعداد حقیقی صحبت کنیم که «بزرگ» باشند. این که چه اعدادی بزرگ هستند و چه اعدادی بزرگ نیستند بنا بر نظر افراد مختلف فرق می‌کند. مثلاً آیا ۱۰۰ عدد بزرگی است و عضو گردآیه اعداد حقیقی بزرگ است یا خیر؟ ۱۰۰۰ چطور؟ ۱۰۰۰۰۰۰ چطور؟ بنابراین ویژگی «بزرگ بودن» برای اعداد حقیقی یک ویژگی دقیق و معین و ترد[1] نیست. در نتیجه جامه‌ی نظریه مجموعه‌های معمولی بر تن این‌گونه مفاهیم راست نمی‌آید و این نظریه از صورت‌بندی این مفاهیم و ویژگی‌ها ناتوان است. در زبان محاوره امروزی کلمات مبهم بسیاری به‌کار گرفته می‌شوند، مثلاً «درخت سرو زیباست» و یا «قیمت نفت نسبتاً بالاست». مجموعه‌های فازی برای به‌کارگیری این نوع کلمات و گزاره‌های نادقیق ارائه شده است. نظریه مجموعه‌های فازی یک قالب جدید ریاضی برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این مفاهیم و ویژگی‌هاست. این نظریه یک تعمیم و گسترش طبیعی نظریه مجموعه‌های معمولی است که موافق با زبان و فهم طبیعی انسان‌ها نیز می‌باشد. قبل از معرفی ساختار ریاضی نظریه مجموعه‌های فازی، اساس کار پروفسور عسگرزاده را با پیگیری مثال فوق درباره اعداد حقیقی «بزرگ» شرح می‌دهیم. بنابه پیشنهاد عسگرزاده، مناسب است که به هر عدد از مجموعه اعداد حقیقی، عددی از بازه $[۰,۱]$ به‌عنوان درجه بزرگی آن عدد نسبت دهیم هر چه عدد بزرگ‌تر بود عدد متناظر برای عضویت آن در مجموعه «اعداد بزرگ» به یک نزدیک‌تر باشد و بالعکس هر چه عدد مورد نظر کوچک‌تر بود، عدد مربوط به عضویت آن در مجموعه‌ی «اعداد بزرگ» به صفر نزدیک‌ترباشد. به‌این ترتیب به‌جای آن‌که بگوییم عدد ۱۰۰۰ بزرگ است یا بزرگ نیست و یا اینکه در این باره ساکت باشیم می‌گوییم درجه بزرگی آن مثلاً ۰/۷ است. به‌عبارت دیگر به‌جای آن که بگوییم عدد ۱۰۰۰ عضو «اعداد بزرگ» هست یانه، می‌گوئیم عدد ۱۰۰۰ با درجه ۰/۷ عضو مجموعه «اعداد بزرگ» است. اساس کار تشریح شده در بالا چیزی جز گسترش مفهوم تابع نشانگر یک مجموعه که یک تابع با برد $\{۰,۱\}$ است، به یک تابع با برد $[۰,۱]$. به‌این‌ترتیب می‌توان بسیاری از مفاهیم بیگانه با ریاضیات فعلی را وارد دنیای ریاضیات کرد و تفکرات و زبان و منطق بشری را در یک ساختار ریاضی نظم و ترتیب داد.

فرض کنید X یک مجموعه مرجع دلخواه باشد. تابع نشانگر[2] هر زیر مجموعه معمولی A از X، یک تابع ازX به $\{۰,۱\}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A \end{cases}$$

[1] Crisp
[2] Indicator Function

حال اگر برد تابع نشانگر را از مجموعه دو عضوی $\{۰,۱\}$ به بازه $[۰,۱]$ توسعه دهیم، یک تابع خواهیم داشت که به هر x از X، عددی از بازه $[۰,۱]$ نسبت می‌دهد، این تابع را تابع عضویت[1] مجموعه فازی $\tilde{A}$ می‌نامیم. اکنون $\tilde{A}$ یک مجموعه معمولی نیست بلکه آن را یک مجموعه فازی یا به بیان دقیق‌تر، یک زیرمجموعه فازی از X می‌نامیم. بنابراین یک مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$، مجموعه‌ای است که درجات عضویت اعضای آن می‌تواند به‌طور پیوسته از $I = [۰,۱]$ اختیار شود. این مجموعه توسط یک تابع عضویت که آن را با $\mu_{\tilde{A}}(x)$ نمایش می‌دهیم مشخص می‌شود؛ تابعی که به هر عنصر از X، یک عدد از بازه $[۰,۱]$ به‌عنوان درجه عضویت آن عنصر در مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ نسبت می‌دهد. نزدیکی مقدار $\mu_{\tilde{A}}(x)$ به عدد یک نشان‌دهنده‌ی تعلق بیشتر x به مجموعه فازی $\tilde{A}$ است و نزدیکی آن به صفر نشان دهنده‌ی تعلق کمتر x به A است. به لحاظ شهودی $\mu_{\tilde{A}}$ را می‌توان درجه‌ی پذیرش ما در قبول x به عنوان عضوی از A در نظر گرفت. درحالت حدی اگر x کاملاً در $\tilde{A}$ عضو باشد $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۱$ و اگر x در $\tilde{A}$ عضو نباشد $\mu_{\tilde{A}}(x) = ۰$. پس مجموعه‌های معمولی و توابع نشانگر آن‌ها، حالت خاصی از مجموعه‌های فازی و توابع عضویت آن‌ها هستند.

مثال ۱.۱.۱. فرض کنید $X = \{۱,۲,۳,۴,۵\}$. یک زیرمجموعه معمولی از X شامل اعداد کوچک‌تر از چهار به‌صورت $A = \{۱,۲,۳\}$ است و تابع نشانگر آن به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱,۲,۳ \\ ۰ & x = ۴,۵ \end{cases}$$

در اینجا مثلاً $I_A(۲) = ۱$، یعنی عدد دو عضو مجموعه A است و $I_A(۴) = ۰$، یعنی عدد چهار عضو مجموعه A نیست. به‌عبارت دیگر، عدد دو ویژگی کوچک‌تر از چهار را دارد و عدد چهار ندارد. اکنون زیرمجموعه فازی $\tilde{B}$ از X که ویژگی «کوچک بودن» را نشان دهد می‌تواند توسط تابع عضویت زیر تعریف شود

$$\mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ ۰/۶ & x = ۲ \\ ۰/۳ & x = ۳ \\ ۰/۱ & x = ۴ \\ ۰ & x = ۵ \end{cases}$$

در این مثال برای نمونه $\mu_{\tilde{B}}(۲) = ۰/۶$ یعنی عدد دو با درجه‌ی ۰/۶ عضو مجموعه فازی $\tilde{B}$ است، $\mu_{\tilde{B}}(۵) = ۰$ یعنی عدد پنج اصلاً عضو مجموعه فازی $\tilde{B}$ نیست و $\mu_{\tilde{B}}(۱) = ۱$ یعنی عدد ۱ کاملاً عضو مجموعه فازی $\tilde{B}$ است. به‌عبارت دیگر، عدد دو ویژگی «کوچک بودن» (به بیان بالا) را با درجه‌ی ۰/۶ داراست و عدد پنج اصلاً دارا نیست و عدد یک کاملاً داراست.

[1] Member Function

تذکر ۱.۱.۱. قبل از ادامه‌ی بحث همین‌جا متذکر می‌شویم که افراد مختلف ممکن است نظرات متفاوتی درباره‌ی ویژگی‌هایی مانند «کوچک بودن» یا «نزدیک به هزار بودن» و مانند این‌ها داشته باشند و در نتیجه توابع عضویت مختلفی برای زیرمجموعه‌های فازی که بیانگر این ویژگی‌ها باشد، در نظر بگیرند. بنابراین در تعیین تابع عضویت یک زیرمجموعه فازی، جنبه‌های ذهنی و شخصی بسیار موثر هستند.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X یک مجموعه مرجع و $\tilde{A}$ یک زیرمجموعه فازی از آن باشد. مجموعه نقاطی از X که برای آن نقاط $\mu_{\tilde{A}}(x) > ۰$، تکیه‌گاه[1] $\tilde{A}$ نامیده شده و با $supp(\tilde{A})$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. مقدار $M = \sup_x \mu_{\tilde{A}}(x)$، ارتفاع مجموعه $\tilde{A}$ نامیده می‌شود. اگر ارتفاع مجموعه فازی $\tilde{A}$ برابر یک باشد آنگاه $\tilde{A}$ نرمال نامیده می‌شود و در غیر این‌صورت $\tilde{A}$ را زیر نرمال می‌گوییم.

مثال ۲.۱.۱. برای مجموعه فازی $\tilde{B}$ در مثال ۱.۱.۱ داریم $supp\tilde{B} = \{۱,۲,۳,۴\}$. هم‌چنین $M = \sup_X \mu_{\tilde{B}}(x) = ۱$ یعنی ارتفاع $\tilde{B}$ برابر ۱ است و بنابراین $\tilde{B}$ یک مجموعه‌ی فازی نرمال است .

برای نشان دادن یک مجموعه فازی روش‌های مختلفی رایج است. یک روش به‌کاربردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی است. روش متداول دیگر توصیف یک مجموعه فازی به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به صورت زیر است

$$\tilde{A} = \left\{ (x, \mu_{\tilde{A}}(x));\ x \in X \right\}$$

اصولاً برخی مولفین، یک مجموعه فازی را مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب به‌صورت فوق تعریف کرده‌اند. هنگامی که مجموعه مرجع X یک مجموعه متناهی (یا نامتناهی شمارا) به‌صورت $x_۱, x_۲, ..., x_n$ باشد، یک مجموعه فازی مانند $\tilde{A}$ از X به‌صورت زیر نشان داده می‌شود

$$\tilde{A} = \left\{ \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_۱)}{x_۱}, \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_۲)}{x_۲}, \cdots, \frac{\mu_{\tilde{A}}(x_n)}{x_n} \right\}$$

مثال ۳.۱.۱. فرض کنید $X = \{۱,۲,...,۱۰\}$. یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ از X را که نشان دهنده‌ی

[1] Support

ویژگی «نه خیلی کوچک و نه خیلی بزرگ» باشد، می‌توان توسط تابع عضویت زیر تعریف کرد

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}۰/۱ & x=۲\\ ۰/۳ & x=۳\\ ۰/۵ & x=۴\\ ۰/۸ & x=۵\\ ۰/۸ & x=۶\\ ۰/۵ & x=۷\\ ۰/۳ & x=۸\\ ۰/۱ & x=۹\\ ۰ & x=۱,۱۰\end{cases}$$

با استفاده از نمادی که در بالا اشاره شد، $\tilde{A}$ را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت

$$\tilde{A} \;=\; \Big\{(۱,۰),(۲,۰/۱),(۳,۰/۳),...,(۹,۰/۱),(۱۰,۰)\Big\}$$

مثال ۴.۱.۱. فرض کنید $X=[۰,۱۰۰]$ و $x\in X$ به عنوان سن تلقی شوند. مجموعه فازی $\tilde{B}$ که پیری را نشان می‌دهد می‌تواند این‌گونه تعریف شود

$$\tilde{A}=\begin{cases}۰ & x\le ۵۰\\ \frac{۱}{۱+(\frac{x-۵۰}{۵})^{-۲}} & ۵۰<x\le ۱۰۰\end{cases}$$

که با نماد اشاره شده در بالا به‌صورت زیر بیان می‌شود

$$\tilde{A}=\int_{۵۰}^{۱۰۰}\frac{۱}{۱+(\frac{x-۵۰}{۵})^{-۲}}\,dx$$

در این مثال $supp\tilde{A}=(۵۰,۱۰۰]$. هم‌چنین $\sup\mu_{\tilde{A}}(x)=۰/۹۹$، پس $\tilde{A}$ زیر نرمال است.

تعریف ۳.۱.۱. زیرمجموعه (معمولی) عناصری از X را که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی $\tilde{A}$ حداقل به بزرگی α ($۰<\alpha\le ۱$) باشد، $\alpha-$برش $\tilde{A}$ (یا مجموعه تراز α وابسته به $\tilde{A}$) گوییم و با $\tilde{A}_\alpha$ نشان می‌دهیم. یعنی

$$\tilde{A}_\alpha=\Big\{x\in X|\;\; \mu_{\tilde{A}}(x)\ge\alpha\Big\}$$

مثال ۵.۱.۱. فرض کنید $X=\{۱,۲,\dots,۱۰\}$ و زیرمجموعه فازی $\tilde{A}$ از X که نشان دهنده‌ی ویژگی «حدوداً سه» است، این‌گونه تعریف شود

$$\tilde{A}=\Big\{\frac{۰/۳}{۱},\frac{۰/۷}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۰/۷}{۴},\frac{۰/۳}{۵}\Big\}$$

در این‌صورت چند $\alpha-$برش $\tilde{A}$ عبارتند از

$\tilde{A}_{۰/۱} = \{۱,۲,۳,۴,۵\}, \tilde{A}_{۰/۳} = \{۱,۲,۳,۴,۵\}, \tilde{A}_{۰/۷} = \{۲,۳,۴\}, A_{۰/۸} = \{۳\}, \tilde{A}_{۱} = \{۳\}$
به‌طور خلاصه می‌توان نوشت

$$\tilde{A}_{\alpha} = \begin{cases} \{۱,۲,۳,۴,۵\} & ۰ < \alpha \leq ۰/۳ \\ \{۲,۳,۴\} & ۰/۳ < \alpha \leq ۰/۷ \\ \{۳\} & ۰/۷ < \alpha \leq ۱ \end{cases}$$

تعریف ۴.۱.۱. اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی باشد، آن‌گاه $\alpha\tilde{A}$ که در آن $\alpha \in [۰,۱]$ به‌صورت یک مجموعه‌ی فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{\alpha\tilde{A}}(x) = \alpha\mu_{\tilde{A}}(x)$$

قضیه ۱.۱.۱. (اتحاد تجزیه)[۱] [۶۶] فرض کنید $\tilde{A}$ مجموعه‌ای فازی از $\mathbb{R}$ با تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(.)$ باشد. در این‌صورت

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in [۰,۱]} \alpha . I_{\tilde{A}_{\alpha}}(x)$$

که در آن $I_{\tilde{A}_{\alpha}}(.)$ تابع مشخصه می‌باشد.

تعریف ۵.۱.۱. مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $X = \mathbb{R}$ را محدب[۲] گوییم، اگر هر $\alpha-$برش $\tilde{A}$ (برای تمامی $۰ < \alpha \leq ۱$) محدب باشد.

یک تعریف معادل برای تحدب در گزاره زیر داده شده است.

گزاره ۱.۱.۱. [۲۱] مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ از $X = \mathbb{R}$ محدب است اگر و تنها اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in X$ و هر $\lambda \in [۰,۱]$

$$\mu_{\tilde{A}}\Big(\lambda x_۱ + (۱-\lambda)x_۲\Big) \geq \min\Big\{\mu_{\tilde{A}}(x_۱), \mu_{\tilde{A}}(x_۲)\Big\}$$

مثال ۶.۱.۱. مجموعه‌ی فازی $\tilde{A}$ با تابع عضویت زیر را در نظر بگیرید

$$\mu_{\tilde{A}(x)} = e^{-\frac{x^۲}{۲}} \quad x \in \mathbb{R}$$

$\tilde{A}$ یک مجموعه‌ی فازی محدب است، زیرا برای هر $\alpha > ۰$ داریم

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{\alpha} &= \Big\{x \in \mathbb{R} | \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\Big\} = \Big\{x \in \mathbb{R} | e^{-\frac{x^۲}{۲}} \geq \alpha\Big\} \\ &= \Big\{x \in \mathbb{R} | -\sqrt{۲\ln\alpha} \leq x \leq \sqrt{۲\ln\alpha}\Big\} \end{aligned}$$

[1] Resolution Identity
[2] Convex

مثال ۱.۱.۷. فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{C}$، نشان‌دهنده‌ی ویژگی «قدر مطلق عدد، نزدیک به $\frac{۱}{۴}$»، با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$\mu_{\tilde{C}}(x)=\begin{cases}۰ & x\leq -۱\\ ۱-۴(x+\frac{۱}{۴})^۲ & -۱<x\leq ۰\\ ۱-۴(x-\frac{۱}{۴})^۲ & ۰<x\leq ۱\\ ۰ & x>۱\end{cases}$$

در این‌جا $\tilde{C}$ یک مجموعه فازی محدب نیست. زیرا $\alpha>۰$ وجود دارد که $\tilde{C}_\alpha$ یک مجموعه معمولی محدب نیست (بلکه در این‌جا برای تمام $\alpha>۰$، $\tilde{C}_\alpha$ها غیرمحدب‌اند). مانند حالت معمولی اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه فازی محدب باشند، اشتراک آن‌ها نیز مجموعه فازی محدب است. درباره‌ی اجتماع این نتیجه برقرار نیست.

تعریف ۶.۱.۱. [۵۰] فرض کنید $f(x)$ تابعی حقیقی مقدار بر $\mathbb{R}$ باشد. در این‌صورت f را نیم‌پیوسته بالایی[1] گوییم هرگاه

الف) برای هر $\alpha\in(۰,۱]$ مجموعه‌ی $\{x:f(x)\geq\alpha\}$ مجموعه‌ای بسته در $\mathbb{R}$ باشد.

یا به‌طور معادل

ب) $f(x)$ نیم‌پیوسته بالایی در y است هرگاه

$$\forall\varepsilon>۰,\exists\delta>۰\quad,\quad |x-y|<\delta\implies f(x)-f(y)<\varepsilon$$

تعریف ۷.۱.۱. [۵۰] مجموعه فازی $\tilde{A}$ از $\mathbb{R}$ را یک عددی فازی[2](حقیقی) گوییم هرگاه $\tilde{A}$ نرمال، تک‌نمایی و محدب و نیم‌پیوسته بالایی باشد.

تعریف ۸.۱.۱. (اصل توسیع)[3] [۱۶] فرض کنید $X_۱,...,X_n$، n مجموعه مرجع، و $X=X_۱\times ... \times X_n$ حاصل‌ضرب دکارتی آن‌ها باشد. هم‌چنین $\tilde{A}_۱,...,\tilde{A}_n$، n مجموعه فازی به‌ترتیب از $X_۱,...,X_n$ باشد. فرض کنید f یک نگاشت از X به Y باشد، یعنی $y=f(x_۱,...,x_n)$. در این‌صورت حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $\tilde{A}_۱,...,\tilde{A}_n$ به‌عنوان یک مجموعه فازی $\tilde{B}$ از Y و به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned}\tilde{B} &= f(\tilde{A}_۱,...,\tilde{A}_n)\\ &= \left\{(y,\mu_{\tilde{B}}(y))|y=f(x_۱,...,x_n),(x_۱,...,x_n)\in X)\right\}\end{aligned}$$

که در آن

$$\mu_{\tilde{B}}(y)=\begin{cases}\sup_{y=f(x_۱,...,x_n)} & \min\left\{\mu_{\tilde{A}_۱}(x_۱),...,\mu_{\tilde{A}_n}(x_n)\right\} \quad f^{-۱}(y)\neq\emptyset\\ ۰ & f^{-۱}(y)=\emptyset\end{cases}$$

[1] Upper Semicontinuous
[2] Fuzzy Number
[3] Extension Principle

مثال ۸.۱.۱. فرض کنید $X_۱ = X_۲ = \mathbb{Z}$ و $\tilde{A}_۱$ و $\tilde{B}_۱$ دو زیرمجموعه فازی از $\mathbb{Z}$ به‌ترتیب نمایشگر «تقریباً صفر» و «تقریباً یک» به‌صورت زیر باشند

$$\tilde{A}_۱ = \left\{ \frac{۰/۲}{-۲}, \frac{۰/۵}{-۱}, \frac{۱}{۰}, \frac{۰/۵}{۱}, \frac{۰/۲}{۲} \right\}$$
$$\tilde{A}_۲ = \left\{ \frac{۰/۲}{-۱}, \frac{۰/۵}{۰}, \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۵}{۲}, \frac{۰/۲}{۳} \right\}$$

فرض کنید تابع $f : X_۱ \times X_۲ \longrightarrow Y$ به‌صورت $y = f(x_۱, x_۲) = x_۱^۲ + x_۲^۲$ تعریف شده باشد. دراین صورت

$$\tilde{A}_۱ \otimes \tilde{A}_۲ = \left\{ \frac{۰/۲}{(-۲,-۱)}, \frac{۰/۲}{(-۲,۰)}, \cdots, \frac{۱}{(۰,۱)}, \frac{۰/۵}{(۰,۲)}, \cdots, \frac{۰/۲}{(۲,۳)} \right\}$$

و بنابر اصل توسیع

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}_۱, \tilde{A}_۲) = \left\{ \frac{۰/۵}{۰}, \frac{۱}{۱}, \frac{۰/۵}{۲}, \frac{۰/۵}{۴}, \frac{۰/۵}{۵}, \frac{۰/۲}{۸}, \frac{۰/۲}{۹}, \frac{۰/۲}{۱۰}, \frac{۰/۲}{۱۳} \right\}$$

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنید $\odot_{int}$، یک عملگر دوتایی $\oplus_{int}$ ، $\ominus_{int}$، $\otimes_{int}$ یا $\oslash_{int}$ بین دو بازه‌ی $\tilde{M}_\alpha = [M_\alpha^L, M_\alpha^U]$ و $\tilde{N}_\alpha = [N_\alpha^L, N_\alpha^U]$ باشد، در این‌صورت $\tilde{M}_\alpha \odot_{int} \tilde{N}_\alpha$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\tilde{M}_\alpha \odot_{int} \tilde{N}_\alpha = \left\{ z \in \mathbb{R} \quad | \quad z = x \circ y, \forall\, x \in \tilde{M}_\alpha, \forall\, y \in \tilde{N}_\alpha \right\}$$

که در آن $\circ$ یک عملگر دوتایی معمولی $+$، $-$، $\times$ یا $/$ می‌باشد.

قضیه ۲.۱.۱. (الف) اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی باشند، آن‌گاه

$$(\tilde{A} \oplus \tilde{B})_\alpha = [A_\alpha^L + B_\alpha^L, A_\alpha^U + B_\alpha^U], \quad (\tilde{A} \ominus \tilde{B})_\alpha = [A_\alpha^L - B_\alpha^U, A_\alpha^U + B_\alpha^L]$$

(ب) اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو عدد فازی باشند، آن‌گاه

$$(\tilde{A} \otimes \tilde{B})_\alpha = \left[\min\left\{A_\alpha^L B_\alpha^L, A_\alpha^L B_\alpha^U, A_\alpha^U B_\alpha^L, A_\alpha^U B_\alpha^U\right\}, \max\left\{A_\alpha^L B_\alpha^L, A_\alpha^L B_\alpha^U, A_\alpha^U B_\alpha^L, A_\alpha^U B_\alpha^U\right\} \right]$$

۲.۱ مروری بر حساب اعداد فازی

در این بخش اعمال چهارگانه جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم بین اعداد فازی مورد بررسی قرار می‌گیرند. در این راستا ابتدا رویکرد مستقیم برای این اعمال در حالتی‌که اعداد فازی را دارا هستیم بیان می‌شود. لازم به ذکر است که بیشتر مطالب ارائه شده در این بخش از مراجع [۴] و [۳۷] استخراج شده است.

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ دو عدد فازی با توابع عضویت پیوسته، و $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ یک عملگر دوتایی [۱] بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم $*$ را برای اعداد فازی با $\circledast$ نشان دهیم، با استفاده از اصل توسیع (تعریف [۱۷])، حاصل $\tilde{M} \circledast \tilde{N}$ به‌صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(\tilde{M} \circledast \tilde{N})(z) = sup_{z=x*y} min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)] \qquad (۱.۱)$$

برای چهار عمل اصلی جمع، تفاضل، ضرب و تقسیم رابطه (۱.۱) را می‌توان برای این اعمال به ترتیب به‌صورت زیر بازنویسی کرد

$$(\tilde{M} \oplus \tilde{N})(z) = sup_{z=x+y} min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)]$$
$$(\tilde{M} \ominus \tilde{N})(z) = sup_{z=x-y} min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)]$$
$$(\tilde{M} \otimes \tilde{N})(z) = sup_{z=x\times y} min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)]$$
$$(\tilde{M} \oslash \tilde{N})(z) = sup_{z=x/y} min[\tilde{M}(x), \tilde{N}(y)]$$

مثال ۱.۲.۱. دو عدد فازی $\tilde{M}$ «تقریباً سه» و $\tilde{N}$ «تقریباً پنج» را به‌صورت زیر درنظر بگیرید

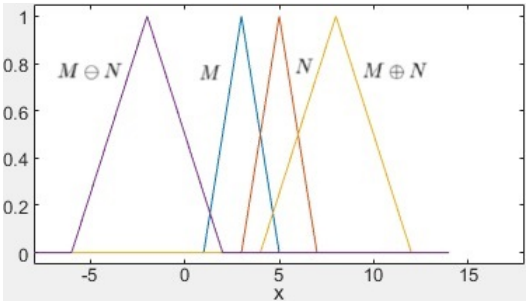
$$\tilde{M}(x) = \begin{cases} \frac{x-۱}{۲} & ۱ \le x < ۳ \\ \frac{۵-x}{۲} & ۳ \le x < ۵ \end{cases}$$
$$\tilde{N}(x) = \begin{cases} \frac{x-۳}{۲} & ۳ \le x < ۵ \\ \frac{۷-x}{۲} & ۵ \le x < ۷ \end{cases}$$

جمع و تفاضل دو عدد فازی فوق، اعداد فازی با توابع عضویت زیر هستند

$$(\tilde{M} \oplus \tilde{N})(x) = \begin{cases} \frac{x-۴}{۴} & ۴ \le x < ۸ \\ \frac{۱۲-x}{۴} & ۸ \le x < ۱۲ \end{cases}$$
$$(\tilde{M} \ominus \tilde{N})(x) = \begin{cases} \frac{x+۶}{۴} & -۶ \le x < -۲ \\ \frac{۲-x}{۴} & -۲ \le x < ۲ \end{cases}$$

با وجود انتخاب توابع عضویت نسبتاً ساده، تعیین توابع عضویت جمع و تفاضل اعداد فازی ارائه شده در مثال ۱.۲.۱ به لحاظ محاسباتی پیچیده است. بنابراین در شرایطی که توابع عضویت اعداد فازی تحت بررسی دارای صورت پیچیده‌تری باشند، استفاده از رویکرد اصل گسترش مستلزم محاسبات طولانی است. دبوآ و پراد [۲] با معرفی اعداد فازی LR به عنوان نوع خاصی از اعداد فازی تلاش کردند تا ضمن کاستن از این پیچیدگی‌ها و محاسبات طولانی، یک الگوی مشخص در محاسبات جبری، با این اعداد فازی را ارائه کنند [۱۷]. در ادامه ضمن

[1] Binary Operator
[2] Debuv,Prade



شکل ۱.۱: نمودار تابع عضویت اعداد فازی $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ و جمع و تفاضل آن‌ها برای مثال ۱.۲.۱

معرفی کوتاهی از اعداد فازی LR، عملگرهای جبری روی این اعداد را مطالعه و در هر مورد با ذکر مثالی آن را تشریح می‌کنیم.

تعریف ۲.۲.۱. (اعداد فازی LR) [۱۷] اگر عدد فازی $\tilde{A}$ دارای تابع عضویتی با تعریف زیر باشد

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{m-x}{\alpha}) & x \leq m \\ R(\frac{x-m}{\beta}) & x > m \end{cases}$$

که در آن L و R توابعی غیر صعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[۰,۱]$ هستند و $L(۰) = R(۰) = ۱$؛ آن‌گاه $\tilde{A}$ را یک عدد فازی LR [۱] نامیده و با نماد $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نمایش می‌دهیم. عدد m را مقدار نمایی (میانه) و اعداد مثبت α و β را به ترتیب پهنه چپ [۲] و پهنه راست [۳] $\tilde{A}$ می‌نامیم. L و R توابع مرجع (شکل) نامیده می‌شوند.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنید $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و

$$L(x) = \frac{۱}{۱ + |x|^۲}, \qquad R(x) = \frac{۱}{۱ + ۲|x|}$$

و $m = ۵$، $\alpha = ۲$ و $\beta = ۳$، آن‌گاه

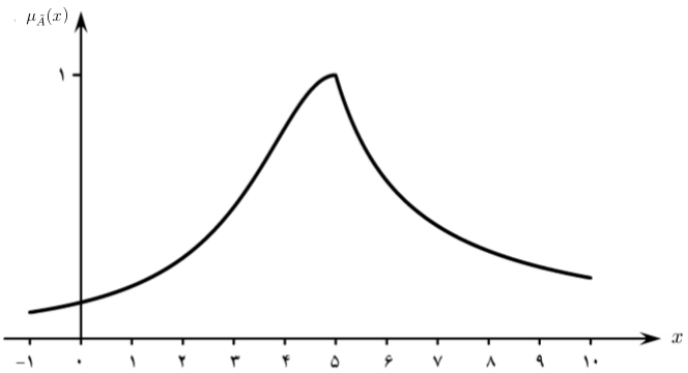
$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L(\frac{۵-x}{۲}) = \frac{۱}{۱+(\frac{۵-x}{۲})^۲} & x \leq ۵ \\ R(\frac{x-۵}{۳}) = \frac{۱}{۱+۲(\frac{x-۵}{۳})} & x > ۵ \end{cases}$$

$\tilde{A}$ را می‌توانیم عدد فازی «تقریباً ۵» تعبیر کنیم. نمودار تابع عضویت $\tilde{A}$ در شکل ۲.۱ رسم شده است.

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $L = R$. در این‌صورت
الف) $\tilde{A}$ را یک عدد فازی مثلثی [۴] نامیده و با $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_T$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x) = max\{۰, ۱ - x\} = \begin{cases} ۱ - x & ۰ \leq x \leq ۱ \\ ۰ & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

[1] LR fuzzy number
[2] left spread
[3] right spread
[4] Triangular



شکل ۲.۱: نمودار تابع عضویت فازی «تقریباً ۵» برای مثال ۲.۲.۱

ب) $\tilde{A}$ را یک عدد فازی نرمال[1] نامیده و با $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_N$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x) = e^{-x^2}$$

پ) $\tilde{A}$ را یک عدد فازی سهموی[2] نامیده و با $\tilde{A} = (m, \alpha, \beta)_P$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x) = max\{0, 1 - x^2\} = \begin{cases} 1 - x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

ت) $\tilde{A}$ را یک عدد فازی ذوزنقه‌ای[3] نامیده و با $\tilde{A} = (m_1, m_2, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. اگر

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_1 - x}{\alpha}\right) & x < m_1 \\ 1 & m_1 \leq x \leq m_2 \\ R\left(\frac{x - m_2}{\beta}\right) & m_2 < x \end{cases}$$

توجه ۱.۲.۱. عدد فازی $\tilde{A} = (m, \alpha, \alpha)_L$ را یک عدد فازی متقارن نامیده و با نماد $\tilde{A} = (m, \alpha)_L$ نشان می‌دهیم. اگر عدد فازی متقارن $\tilde{A}$ مثلثی، نرمال و سهموی باشد، به ترتیب از نمادهای $\tilde{A} = (m, \alpha)_T$ و $\tilde{A} = (m, \alpha)_N$ و $\tilde{A} = (m, \alpha)_P$ استفاده می‌کنیم.

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنید $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{N} = (n, \delta, \gamma)_{LR}$ اعداد فازی LR باشند.
الف) با فرض این‌که $\lambda \in \mathbb{R}$ یک عدد حقیقی باشد آن‌گاه

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{LR} \qquad \lambda > 0$$

$$\lambda \otimes (m, \alpha, \beta)_{LR} = (\lambda m, -\lambda\beta, -\lambda\alpha)_{RL} \qquad \lambda < 0$$

ب) $\tilde{M} \oplus \tilde{N}$ یک عدد فازی LR به‌صورت زیر است

$$\tilde{M} \oplus \tilde{N} = (m + n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$$

[1] Normal
[2] Parabolic
[3] Trapezoidal

پ) اگر $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)_{RL}$ ، آن‌گاه $\tilde{M} \ominus \tilde{N}$ یک عدد فازی LR به‌صورت زیر است

$$\tilde{M} \ominus \tilde{N} = (m - n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$$

مثال ۳.۲.۱. فرض کنید $\tilde{M} = (۵,۳,۸)_{LR}$ و $\tilde{N}_۱ = (۳,۲,۳)_{LR}$ و $\tilde{N}_۲ = (۳,۲,۳)_{RL}$ که در آن‌ها $L(x) = e^{-x^۲}$ و $R(x) = \max\{۰, ۱ - x^۲\}$. یعنی

$$\tilde{M}(x) = \begin{cases} L(\frac{۵-x}{۳}) & x \leq ۵ \\ R(\frac{x-۵}{۸}) & x > ۵ \end{cases}$$

$$\tilde{N}_۱(x) = \begin{cases} L(\frac{۳-x}{۲}) & x \leq ۳ \\ R(\frac{x-۳}{۳}) & x > ۳ \end{cases}$$

$$\tilde{N}_۲(x) = \begin{cases} L(\frac{۳-x}{۲}) & x \leq ۳ \\ R(\frac{x-۳}{۳}) & x > ۳ \end{cases}$$

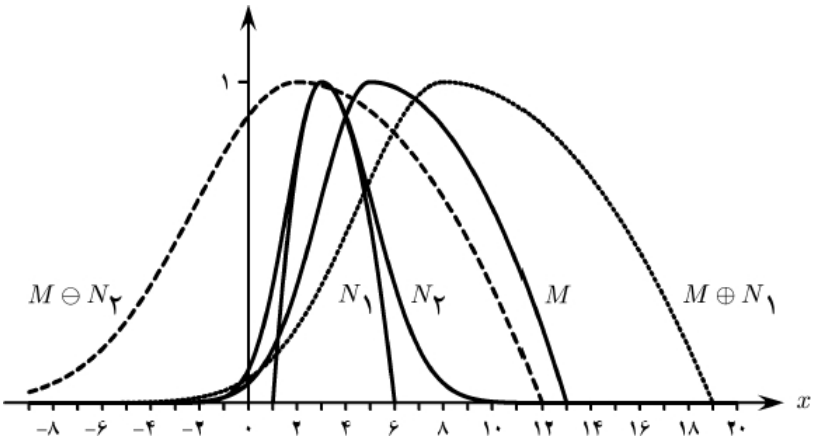
در این‌صورت

$$\tilde{M} \oplus \tilde{N}_۱ = (۸,۵,۱۱)_{LR} \ , \ \tilde{M} \ominus \tilde{N}_۲ = (۲,۶,۱۰)_{LR}$$

یعنی

$$(\tilde{M} \oplus \tilde{N}_۱) = \begin{cases} L(\frac{۸-x}{۵}) & x \leq ۸ \\ R(\frac{x-۸}{۱۱}) & x > ۸ \end{cases}$$

$$(\tilde{M} \ominus \tilde{N}_۲) = \begin{cases} L(\frac{۲-x}{۶}) & x \leq ۲ \\ R(\frac{x-۲}{۱۰}) & x > ۲ \end{cases}$$



شکل ۳.۱: نمودار تابع عضویت اعداد فازی $\tilde{M}$ و $\tilde{N}_۱$ و $\tilde{N}_۲$ و جمع و تفاضل آن‌ها در مثال ۳.۲.۱

اگرچه جمع و تفاضل دو عدد فازی LR یک عدد فازی LR است، با این وجود درمورد ضرب و تقسیم دو عدد فازی LR چنین نتیجه‌ای صادق نیست و تنها یک رابطه تقریبی برای این عملگرها وجود دارد که یکی از این روابط در ادامه ذکر می‌شود.

قضیه ۲.۲.۱. اگر $\tilde{M} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{N} = (n, \gamma, \delta)_{LR}$ آن‌گاه

$$(\tilde{M} \otimes \tilde{N}) \simeq \begin{cases} (mn, m\gamma + n\alpha, m\delta + n\beta)_{LR} & M > ۰, N > ۰ \\ (mn, m\gamma - n\beta, m\delta - n\alpha)_{LR} & M > ۰, N < ۰ \\ (mn, -n\beta - m\delta, -n\alpha - m\gamma)_{RL} & M < ۰, N < ۰ \end{cases}$$

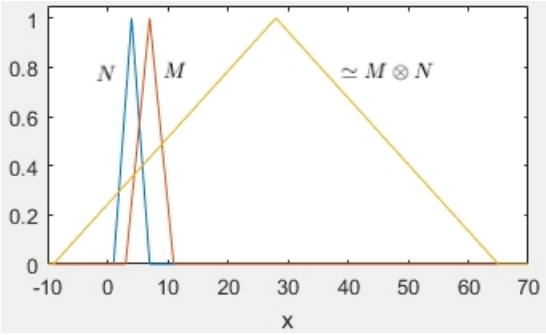
که $\simeq$ به معنی تقریباً مساوی است.
هر چه پهنای $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ نسبت به مقادیر نمای آن‌ها کوچک‌تر باشد تقریب‌های فوق دقیق‌تر است. هنگامی که پهناهای $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ نسبت به مقادیر نمای آن‌ها کوچک‌تر نیستند، فرمول‌های تقریب فوق را می‌توان اصلاح کرد.

مثال ۴.۲.۱. دو عدد فازی $\tilde{M} = (۷, ۴, ۴)_{LR}$ و $\tilde{N} = (۴, ۳, ۳)_{LR}$ هر دو مثبت‌اند. که در آن‌ها $L(x) = R(x) = ۱ - x$ بنابراین

$$(\tilde{M} \otimes \tilde{N}) \simeq (۲۸, ۲۱ + ۱۶, ۲۱ + ۱۶)_{LR} = (۲۸, ۳۷, ۳۷)_{LR}$$

یعنی

$$(\tilde{M} \otimes \tilde{N})(x) \simeq \begin{cases} L(\frac{۲۸ - x}{۳۷}) = \frac{x + ۹}{۳۷} & -۹ < x \leq ۲۸ \\ R(\frac{x - ۲۸}{۳۷}) = \frac{۶۵ - x}{۳۷} & ۲۸ < x \leq ۶۵ \end{cases}$$



شکل ۴.۱: نمودار تابع عضویت اعداد فازی و تابع عضویت تقریبی $\tilde{M} \otimes \tilde{N}$ در مثال ۴.۲.۱

ملاحظه می‌کنید که در اینجا $\tilde{M} \otimes \tilde{N}$ به‌دست آمده از روابط تقریبی، تفاوت‌های نسبتاً زیادی با مقدار واقعی $\tilde{M} \otimes \tilde{N}$ دارد. مثلاً به آسانی می‌توان تحقیق کرد که تابع عضویت واقعی $\tilde{M} \otimes \tilde{N}$ دارای تکیه گاه $(۲,۷۰)$ است اما تکیه‌گاه تابع عضویت فوق بازه $(-۹,۶۵)$ است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، این تفاوت ناشی از بزرگ بودن نسبی پهناهای $\tilde{M}$ و $\tilde{N}$ است.

۳.۱ T-نرم‌ها و S-نرم‌ها

$T-$نرم‌ها [۱] و $T-$همنرم‌ها (یا $S-$نرم‌ها) را نرم‌های مثلثی و همنرم‌های مثلثی نیز گویند. این دو رده از اندازه‌ها که نخستین بار توسط منجر[۲] ارائه شد و به خاطر نقشی که در نامسای‌های مثلثی دارند به این نام خوانده می‌شوند، به دلیل ویژگی‌های بسیار جالب اخیراً بیشتر مورد توجه واقع شده‌اند. دربین عملگرهای $T-$نرم، عملگر دراستیک خواص جالبی دارد و مورد توجه قرار گرفته است.لازم به ذکر است که مطالب ارائه شده در این بخش عمدتاً با استفاده از مرجع [۴] نوشته شده است.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $I = [۰, ۱]$. یک تابع دو متغیره به‌صورت $T : I \times I \to I$ را یک $T-$نرم گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند

الف) $T(x, ۱) = x$.

ب) یکنوایی $x_۱ \leqslant x_۲, y_۱ \leqslant y_۲ \Longrightarrow T(x_۱, y_۱) \leqslant T(x_۲, y_۲)$.

پ) جابه‌جایی $T(x, y) = T(y, x)$.

ت) شرکت‌پذیری $T[x, T(y, z)] = T[T(x, y), z]$.

روابط $T(x, y) = \min(x, y)$ و $T(x, y) = \max(۰, x + y - ۱)$ نمونه‌هایی از $T-$نرم هستند.

تعریف ۲.۳.۱. تابع دو متغیره $S(x, y) : I \times I \to I$ را یک $T-$همنرم یا $S-$نرم [۳] گویند اگر در شرایط ذیل صدق کند

الف) $S(x, ۰) = x$.

ب) یکنوایی $x_۱ \leqslant x_۲, y_۱ \leqslant y_۲ \Longrightarrow S(x_۱, y_۱) \leqslant S(x_۲, y_۲)$.

پ) جابه‌جایی $S(x, y) = S(y, x)$.

ت) شرکت‌پذیری $S[x, S(y, z)] = S[S(x, y), z]$.

همان‌طور که از تعاریف فوق بر می‌آید $T-$نرم‌ها و $S-$نرم‌ها دوگان یکدیگرند. به این بیان که برای هر $T-$نرم می‌توان یک و فقط یک $S-$نرم تعریف کرد به‌قسمی‌که

$$T(x, y) = ۱ - S(۱ - x, ۱ - y)$$

گزاره ۱.۳.۱. برای عملگر نفی $N(x) = ۱ - x$ زوج‌های $T-$نرم و $S-$نرم دوگان، در قوانین دمورگان تعمیم یافته صدق می‌کنند. یعنی

$$N[T(x, y)] = S[N(x), N(y)]$$

$$N[S(x, y)] = T[N(x), N(y)]$$

---

[1] T-Norm
[2] Menger
[3] S-Norm

از متداول‌ترین تعاریف اشتراک و اجتماع برای مجموعه‌های فازی که همگی بر حسب زوج‌های دوگان $T-$نرم و $S-$نرم ارائه شده‌اند، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد

الف) max و min

$$T_m(x,y) = min(x,y) \quad , \quad S_m(x,y) = max(x,y)$$

بر اساس نرم‌های بالا، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به‌صورت مجموعه‌های فازی با توابع عضویت زیر تعریف می‌شوند

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = min\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\}$$

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = max\{\tilde{A}(x), \tilde{B}(x)\}$$

ب)ضرب جبری و جمع احتمالی

$$T_p(x,y) = x.y \quad , \quad S_p(x,y) = x + y - x.y$$

بر اساس نرم‌های بالا، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = \tilde{A}(x).\tilde{B}(x)$$

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x) - \tilde{A}(x).\tilde{B}(x)$$

پ)تفاضل کراندار و جمع کراندار

$$T_b(x,y) = max(۰, x + y - ۱) \quad , \quad S_b(x,y) = min(۱, x + y)$$

بر اساس نرم‌های بالا، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B})(x) = max(۰, \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x) - ۱)$$

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})(x) = min(۱, \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x))$$

ت)عملگرهای دراستیک

$$T_W(x,y) = \begin{cases} x, & y = ۱ \\ y, & x = ۱ \\ ۰, & x, y \neq ۱ \end{cases} \qquad (۲.۱)$$

$$S_W(x,y) = \begin{cases} x, & y = ۰ \\ y, & x = ۰ \\ ۰, & x, y \neq ۱ \end{cases} \qquad (۳.۱)$$

بر پایه نرم‌های بالا، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(\tilde{A}\cap\tilde{B})(x)=\begin{cases} min(\tilde{A}(x),\tilde{B}(x)), & \tilde{A}(x)=۱ \text{ یا } \tilde{B}(x)=۱ \\ ۰, & \tilde{A}(x) \text{ و } \tilde{B}(x)\neq ۱ \end{cases} \quad (۴.۱)$$

$$(\tilde{A}\cup\tilde{B})(x)=\begin{cases} max(\tilde{A}(x),\tilde{B}(x)), & \tilde{A}(x)=۰ \text{ یا } \tilde{B}(x)=۰ \\ ۱, & \tilde{A}(x) \text{ و } \tilde{B}(x)\neq ۰ \end{cases} \quad (۵.۱)$$

خاطر نشان می‌شود که در برخی متون از نرم‌های دراستیک به عنوان ضعیف‌ترین $T-$نرم‌ها نام برده شده است. به ویژه $T-$نرم دراستیک را ضعیف‌ترین T نیز نامیده‌اند. $T-$نرم دراستیک را ضرب دراستیک و $S-$نرم دراستیک را جمع دراستیک نیز می‌گویند.

ث)عملگرهای هاماخر[۱]

$$T_\gamma(x,y)=\frac{x.y}{\gamma+۱(۱-\gamma)(x+y-x.y)}, S_\gamma(x,y)=\frac{x+y-(۲-\gamma)x.y}{۱-(۱-\gamma)x.y}$$

در هر دو مورد $\gamma\geqslant ۰$ فرض می‌شود.

بر اساس نرم‌های بالا اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند $(\gamma\geqslant ۰)$

$$(\tilde{A}\cap\tilde{B})(x)=\frac{\tilde{A}(x).\tilde{B}(x)}{\gamma+(۱-\gamma)(\tilde{A}(x)+\tilde{B}(x)-\tilde{A}(x).\tilde{B}(x))}$$

$$(\tilde{A}\cup\tilde{B})(x)=\frac{\tilde{A}(x)+\tilde{B}(x)-(۲-\gamma)\tilde{A}(x).\tilde{B}(x)}{۱-(۱-\gamma)\tilde{A}(x).\tilde{B}(x)}$$

ج)عملگرهای ییگر [۲]

$$T_\omega(x,y)=۱-min\{۱,[(۱-x)^\omega+(۱-y)^\omega]^{\frac{۱}{\omega}}\}, \qquad \omega\geqslant ۱$$

$$S_\omega(x,y)=min\{۱,(x^\omega,y^\omega)^{\frac{۱}{\omega}}\}. \qquad \omega\geqslant ۱$$

بر اساس نرم‌های بالا، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(\tilde{A}\cap\tilde{B})(x)=۱-min\{۱,[(۱-\tilde{A}(x))^\omega+(۱-\tilde{B}(x))^\omega]^{\frac{۱}{\omega}}\}$$

$$(\tilde{A}\cup\tilde{B})(x)=min\{۱,[(\tilde{A}(x))^\omega+(\tilde{B}(x))^\omega]^{\frac{۱}{\omega}}\}$$

[1] Hamakhr
[2] Yeger

چ)عملگرهای دبوآ و پراد [1]

$$T_\alpha(x,y)=\frac{x.y}{max\{x,y,\alpha\}}\ , \qquad \alpha\in[۰,۱]$$

$$S_\alpha(x,y)=\frac{x+y-x.y-min\{x,y,(۱-\alpha)\}}{max\{(۱-x),(۱-y),\alpha\}}\ . \qquad \alpha\in[۰,۱]$$

بر اساس نرم‌های بالا که توسط دوبوا و پراد پیشنهاد شده‌اند، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$(\tilde{A}\cap\tilde{B})(x)=\frac{\tilde{A}(x).\tilde{B}(x)}{max\{\tilde{A}(x),\tilde{B}(x),\alpha\}}$$

$$(\tilde{A}\cup\tilde{B})(x)=\frac{\tilde{A}(x)+\tilde{B}(x)-\tilde{A}(x).\tilde{B}(x)-min\{\tilde{A}(x),\tilde{B}(x),(۱-\alpha)\}}{max\{(۱-\tilde{A}(x)),(۱-\tilde{B}(x)),\alpha\}}$$

مثال ۱.۳.۱. فرض کنید $X=\{۰,۱,۲,...,۱۰\}$، و $\tilde{A}$ مجموعه فازی «اعداد کوچک » و $\tilde{B}$ مجموعه فازی «اعداد تقریبا ۳» با توابع عضویت زیر باشند

$$\tilde{A}=\{\frac{۱}{۱},\frac{۰/۸}{۲},\frac{۰/۶}{۳},\frac{۰/۴}{۴},\frac{۰/۲}{۵}\}$$

$$\tilde{B}=\{\frac{۰/۳}{۱},\frac{۰/۷}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۰/۷}{۴},\frac{۰/۳}{۵}\}$$

آن‌گاه $\tilde{A}\cap\tilde{B}$ که بیانگر مجموعه فازی اعداد کوچک و اعداد تقریباً ۳ است و $\tilde{A}\cup\tilde{B}$ که بیانگر مجموعه فازی اعداد کوچک یا اعداد تقریباً ۳ است، بر حسب تعاریف مختلف برای اشتراک و اجتماع، این‌گونه خواهند بود.

۱) بر اساس عملگرهای min و max

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\{\frac{۰/۳}{۱},\frac{۰/۷}{۲},\frac{۰/۶}{۳},\frac{۰/۴}{۴},\frac{۰/۲}{۵}\}$$

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{\frac{۱}{۱},\frac{۰/۸}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۰/۷}{۴},\frac{۰/۳}{۵}\}$$

۲) بر اساس عملگرهای ضرب جبری و جمع احتمالی

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\{\frac{۰/۳}{۱},\frac{۰/۵۶}{۲},\frac{۰/۶}{۳},\frac{۰/۲۸}{۴},\frac{۰/۰۶}{۵}\}$$

$$\tilde{A}\cup\tilde{B}=\{\frac{۱}{۱},\frac{۰/۹۴}{۲},\frac{۱}{۳},\frac{۰/۸۲}{۴},\frac{۰/۴۴}{۵}\}$$

۳) بر اساس عملگرهای تفاضل کراندار و جمع کراندار

$$\tilde{A}\cap\tilde{B}=\{\frac{۰/۳}{۱},\frac{۰/۵}{۲},\frac{۰/۶}{۳},\frac{۰/۱}{۴},\frac{۰}{۵}\}$$

[1] Debuv , Prade

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۰/۵}{۵}\}$$

۴) بر اساس عملگرهای دراستیک

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{\frac{۰/۳}{۱}, \frac{۰/۶}{۳}\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۵}\}$$

۵) بر اساس عملگرهای هاماخر (با $\gamma = ۰/۵$)

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{\frac{۰/۴۶۱}{۱}, \frac{۰/۵۷۷}{۲}, \frac{۰/۶}{۳}, \frac{۰/۳۰۷}{۴}, \frac{۰/۰۸۳}{۵}\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۰/۸۶}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۰/۷۹}{۴}, \frac{۰/۴۲}{۵}\}$$

۶) بر اساس عملگرهای ییگر(با $\omega = ۲$)

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{\frac{۰/۳}{۱}, \frac{۰/۶۴}{۲}, \frac{۰/۶}{۳}, \frac{۰/۳۳}{۴}, \frac{۰}{۵}\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{\frac{۱}{۱}, \frac{۱}{۲}, \frac{۱}{۳}, \frac{۰/۸۱}{۴}, \frac{۰/۳۶}{۵}\}$$

۷) بر اساس عملگرهای دوبوا و پراد ($\alpha = ۰/۸$)

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{\frac{۰/۳}{۱}, \frac{۰/۶۲۵}{۲}, \frac{۰/۶}{۳}, \frac{۰/۳۵}{۴}, \frac{۰/۰۷۵}{۵}\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{\frac{۱۰}{۱}, \frac{۰/۹۲۵}{۲}, \frac{۰۱}{۳}, \frac{۰/۷۷۵}{۴}, \frac{۰/۳}{۵}\}$$

تذکر ۱.۳.۱. این موضوع که مناسب‌ترین عملگرها برای اشتراك و اجتماع دو مجموعه فازی کدام عملگرها هستند، یکی از مسائل مورد توجه در تحقیقات نظری و کاربردی است. مسلماً انتخاب مناسب‌ترین عملگر به ملاک‌ها و معیارهای کاربر باز می‌گردد. از لحاظ ریاضی و منطقی، داشتن یک پایه‌ی اصل موضوعی حائز اهمیت است. اما از لحاظ عملی نیز باید نکاتی را مانند سرعت محاسباتی، سازگاری با مقتضیات مساله و برآورده‌شدن انتظارات کاربردی در نظر گرفت. برای مثال در طراحی یک سیستم کنترل فازی، یک نکته‌ی مهم موفقیت سیستم در آزمون‌های تجربی و عملی است. در این مورد مسلما به کارگیری $T-$نرم‌ها و $S-$نرم‌هایی ترجیح دارد که منجر به عملکرد مورد انتظار برای سیستم شود.

۴.۱ عملیات جبری روی اعداد فازی بر اساس T-نرم دراستیک

در این بخش عملیات جبری چهارگانه شامل جمع، تفاضل، ضرب، تقسیم بین اعداد فازی LR را بر اساس $T-$نرم دراستیک مورد مطالعه قرار می‌دهیم [۱۸].
فرض کنید $T = T_W$ ضعیف‌ترین $T-$نرم باشد و $\tilde{A} = (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$ و $\tilde{B} = (b, \alpha_B, \beta_B)_{LR}$ دو عدد فازی LR باشند. در این‌صورت جمع بین این دو عدد فازی تحت $T-$نرم دراستیک عبارت است از

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR} \oplus (b, \alpha_B, \beta_B)_{LR} = (a+b, max(\alpha_A, \alpha_B), max(\beta_A, \beta_B))_{LR} \quad (۶.۱)$$

در صورتی‌که $L = R$ باشد. تفاضل این دو عدد فازی تحت $T-$نرم دراستیک یک عدد فازی LR به‌صورت زیر است

$$\begin{aligned} \tilde{A} \ominus \tilde{B} &= (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR} \ominus (b, \alpha_B, \beta_B)_{LR} \quad (۷.۱) \\ &= (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR} \oplus (-b, \beta_B, \alpha_B)_{LR} = (a-b, max(\alpha_A, \beta_B), max(\beta_A, \alpha_B))_{LR} \end{aligned}$$

برای بررسی ضرب دو عدد فازی LR تحت $T-$نرم دراستیک بایستی حالت‌های مختلفی را برای مراکز دو عدد فازی تحت بررسی مورد مطالعه قرار دهیم که در ادامه به آن پرداخته شده است.
حالت اول:
فرض کنید $a, b > 0$ در این‌صورت برای مقادیر $z \leqslant ab$ داریم

$$\begin{aligned} (\tilde{A} \otimes \tilde{B})(z) &= \sup_{x.y=z} T_W(A(x), B(y)) \\ &= max(A(\frac{z}{b}), B(\frac{z}{a})) = max(L(\frac{a - \frac{z}{b}}{\alpha_A}), L(\frac{b - \frac{z}{a}}{\alpha_B})) \\ &= max(L(\frac{ab - z}{\alpha_A b}), L(\frac{ab - z}{\alpha_B a})) \end{aligned}$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$(\tilde{A} \otimes \tilde{B})(z) = \begin{cases} L[\frac{(ab-z)}{max(\alpha_A b, \alpha_B a)}] & z \geqslant ab - max(\alpha_A b, \alpha_B a) \\ 0 & O.W \end{cases} \quad (۸.۱)$$

به‌طور مشابه

$$(\tilde{A}\otimes\tilde{B})(z)=\begin{cases} R[\frac{(z-ab)}{max(\beta_A b,\beta_B a)}] & z\leqslant ab-max(\beta_A b,\beta_B a) \\ ۰ & O.W \end{cases} \qquad (۹.۱)$$

با جمع‌بندی دو عبارت به‌دست آمده در روابط (۸.۱)،(۹.۱) می‌توان ضرب دو عدد فازی LR را در حالت $a,b>۰$ به‌صورت یک عدد فازی LR با تعریف زیر ارائه نمود

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(ab,max(\alpha_A b,\alpha_B a),max(\beta_A b,\beta_B a))_{LR} \qquad (۱۰.۱)$$

به روش مشابه با آن‌چه که در حالت اول مورد بررسی قرار گرفت، حالت‌های ممکن دیگر برای a,b به عنوان مراکز دو عدد فازی تحت بررسی در ادامه آورده شده است.

حالت دوم:

اگر $a,b<۰$ آن گاه ضرب دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک عدد فازی LR با تعریف زیر می‌باشد

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(ab,max(\beta_A b,\beta_B a),max(\alpha_A b,\alpha_B a))_{R_L}$$

حالت سوم:

فرض کنید $a=۰$ و $b>۰$ در این‌صورت حاصل ضرب دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ عدد فازی LR با تعریف زیر است

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(۰,\alpha_A b,\beta_A b)_{LR}$$

حالت چهارم:

برای حالتی‌که $a=۰$ و $b<۰$ باشد، حاصل ضرب یک عدد فازی LR به‌صورت زیر است

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(۰,-\beta_A b,-\alpha_A b)_{R_L}$$

حالت پنجم:

در صورتی‌که $a=۰$ و $b=۰$ باشند آن‌گاه

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(۰,۰,۰)_{LR}=I_{\{۰\}}(x)$$

که در آن

$$I_{\{۰\}}(x)=\begin{cases} ۱ & x=۰ \\ ۰ & O.W \end{cases} \qquad (۱۱.۱)$$

حالت ششم:

در این حالت فرض می‌کنیم $a<۰$ و $b>۰$ باشند و علاوه بر آن $L=R$ باشد. در این‌صورت

$$\tilde{A}\otimes\tilde{B}=(ab,max(\alpha_A b,-\beta_B a),max(\beta_A b,-\alpha_B a))_{RR}$$

تذکر ۱.۴.۱. در صورتی‌که A و B اعداد فازی متقارن باشند آن‌گاه حاصل ضرب این دو عدد فازی متقارن یک عدد فازی LR با تعریف زیر می‌باشد

$$(\tilde{A}\otimes\tilde{B})(z)=(ab,max(\alpha_A\mid b\mid,\alpha_B\mid a\mid),max(\alpha_A\mid b\mid,\alpha_B\mid a\mid))_{LL}$$

در ادامه به بررسی عملگر تقسیم بین دو عدد فازی LR $\tilde{A}=(a,\alpha_A,\beta_A)_{LR}$ و $\tilde{B}=(b,\alpha_B,\beta_B)_{R_L}$ تحت $T-$نرم دراستیک می‌پردازیم. با توجه به این‌که روش بررسی عملگر تقسیم مشابه با ضرب می‌باشد، تنها حالت اول آن را مورد بررسی قرار داده و نتیجه بقیه حالت‌ها را بدون ذکر جزئیات بیان می‌کنیم.

حالت اول :

فرض کنید $a,b>\circ$ در این‌صورت برای حالتی‌که $z\neq\circ,z\leqslant\frac{a}{b}$ داریم

$$(\tilde{A}\oslash\tilde{B})(z)=\sup_{\frac{x}{y}=z}T_W(A(x),B(y))=\max((A(bz),B(\frac{a}{z}))$$
$$=\max(L(\frac{a-bz}{\alpha_A}),L(\frac{\frac{a}{z}-b}{\beta_B}))=\max(L(\frac{\frac{a}{b}-z}{\frac{\alpha_A}{b}}),L(\frac{\frac{a}{b}-z}{\frac{(z\beta_B)}{b}}))$$

بنابراین می‌توان نوشت

$$(\tilde{A}\oslash\tilde{B})(z)=\begin{cases}L[\frac{(\frac{a}{b}-z)}{((\frac{1}{b})\max(\alpha_A,z\beta_B))}] & z\geqslant\min\{\frac{(a-\alpha_a)}{b},\frac{a}{(b+\beta_B)}\}\\ \circ & O.W\end{cases}$$

در صورتی‌که $z=\circ$ ، برابر با تعریف زیر می‌باشد

$$(\tilde{A}\oslash\tilde{B})(\circ)=\begin{cases}T_W(A(\circ),B(b))=A(\circ)=L(\frac{a}{\alpha_a}) & a-\alpha_a\leqslant\circ\\ \circ & O.W\end{cases}$$

به‌طور مشابه فرض می‌کنیم $z>\frac{a}{b}$ علاوه بر آن $b-\alpha_A\neq\circ$ در این‌صورت تقسیم دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به‌صورت زیر است

$$(\tilde{A}\oslash\tilde{B})(z)=\begin{cases}R[\frac{(z-\frac{a}{b})}{((\frac{1}{b})\max(\beta_A,\alpha_Bz))}] & z\leqslant\max\{\frac{(a+\beta_A)}{b},\frac{a}{(b-\alpha_B)}\}\\ \circ & O.W\end{cases}$$

بنابراین در این حالت فرمول به‌صورت زیر قابل خلاصه نویسی است

$$(\tilde{A}\oslash\tilde{B})(z)=\begin{cases}L[\frac{(\frac{a}{b}-z)}{((\frac{1}{b})\max(\alpha_A,z\beta_B))}] & \min\{\frac{(a-\alpha_A)}{b},\frac{a}{(b+\beta_B)}\}\leqslant z\leqslant\frac{a}{b}\\ R[\frac{(z-\frac{a}{b})}{((\frac{1}{b})\max(\beta_A,\alpha_Bz))}] & \frac{a}{b}\leqslant z\leqslant\max\{\frac{(a+\beta_A)}{b},\frac{a}{(b-\alpha_B)}\}\\ \circ & O.W\end{cases}\qquad(۱۲.۱)$$

به روش مشابه در ادامه حالت‌های مختلف تقسیم دو عدد فازی تحت بررسی آورده شده است

حالت دوم:

در صورتی‌که $a, b < ۰$ آن گاه تقسیم دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک کمیت فازی با تابع عضویت به‌صورت زیر است

$$(\tilde{A} \oslash \tilde{B})(z) = \begin{cases} R[\frac{(\frac{a}{b} - z)}{((\frac{۱}{b}) \max(\beta_B, \alpha_a z))}] & \min\{\frac{(a-\beta_B)}{b}, \frac{a}{(\alpha_A + b)}\} \leqslant z \leqslant \frac{a}{b} \\ L[\frac{(z - \frac{a}{b})}{((\frac{۱}{b}) \max(\alpha_B, \beta_A z))}] & \max\{\frac{(a+\alpha_B)}{b}, \frac{a}{(b-\beta_A)}\} \geqslant z \geqslant \frac{a}{b} \\ ۰ & O.W \end{cases} \quad (۱۳.۱)$$

حالت سوم:

فرض کنید $a = ۰$ و $b > ۰$ در این‌صورت تقسیم دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک کمیت فازی با تابع عضویت با تعریف زیر می‌باشد

$$(\tilde{A} \oslash \tilde{B})(z) = (۰, \frac{\alpha_A}{b}, \frac{\beta_A}{b})_{LR}$$

حالت چهارم:

در صورتی‌که $a = ۰$ و $b < ۰$ آن‌گاه تقسیم دو عدد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ یک کمیت فازی با تابع عضویت به‌صورت زیر است

$$(\tilde{A} \oslash \tilde{B})(z) = (۰, \frac{-\beta_A}{b}, \frac{-\alpha_A}{b})_{R_L}$$

حالت پنجم:

فرض کنید $a < ۰$ و $b > ۰$ باشند و علاوه بر آن $L = R$ باشد. در این‌صورت

$$(\tilde{A} \oslash \tilde{B})(z) = \begin{cases} R[\frac{(\frac{a}{b-z})}{((\frac{۱}{b}) \max(\alpha_A, \alpha_B z))}] & \min\{\frac{(a-\alpha_A)}{b}, \frac{a}{(b+\alpha_B)}\} \leqslant z \leqslant \frac{a}{b} \\ R[\frac{(z - \frac{a}{b})}{((\frac{۱}{b}) \max(\beta_A, \beta_B z))}] & \max\{\frac{(a+\beta_A)}{b}, \frac{a}{(b-\beta_B)}\} \geqslant z \geqslant \frac{a}{b} \\ ۰ & O.W \end{cases} \quad (۱۴.۱)$$

حالت ششم:

برای حالتی‌که $a > ۰$ و $b < ۰$ باشند و علاوه بر آن $L = R$ باشد. در این‌صورت

$$(\tilde{A} \oslash \tilde{B})(z) = \begin{cases} R[\frac{(\frac{a}{b} - z)}{((\frac{۱}{b}) \max(\beta_A, \beta_B z))}] & \min\{\frac{(a-\beta_B)}{b}, \frac{a}{(b+\beta_A)}\} \leqslant z \leqslant \frac{a}{b} \\ R[\frac{(z - \frac{a}{b})}{((\frac{۱}{b}) \max(\alpha_A, \alpha_B z))}] & \max\{\frac{(a+\alpha_A)}{b}, \frac{a}{(b-\alpha_B)}\} \geqslant z \geqslant \frac{a}{b} \\ ۰ & O.W \end{cases} \quad (۱۵.۱)$$

مثال ۱.۴.۱. اعداد فازی $\tilde{A} = (۸, ۲, ۴)_{LR}$ و $\tilde{B} = (۴, ۳, ۱)_{LR}$ را با توابع زیر در نظر بگیرید

$$L(x) = ۱ - x^۲, \qquad R(x) = ۱ - \sqrt{x}$$

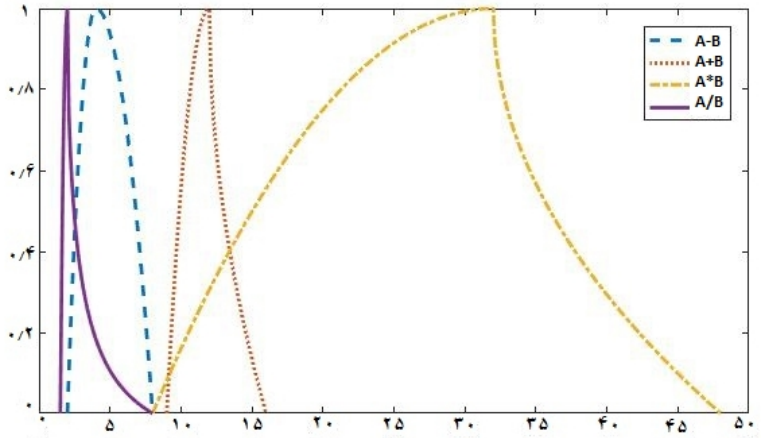
در این‌صورت طبق روابط (۶.۱) و (۱۰.۱)، جمع و ضرب این دو عدد فازی، اعداد فازی LR به ترتیب با تعاریف زیر می‌باشند

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (۸,۲,۴)_{LR} \oplus (۴,۳,۱)_{LR} = (۱۲,۳,۴)_{LR}$$
$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (۸,۲,۴)_{LR} \otimes (۴,۳,۱)_{LR} = (۳۲,۲۴,۱۶)_{LR}$$

علاوه بر آن فرض کنید $\tilde{A} = (۸,۲,۴)_{LL}$ و $\tilde{B} = (۴,۳,۱)_{LL}$ اعداد فازی LR با توابع $L(x) = R(x) = ۱ - x^۲$ باشند. در این‌صورت طبق رابطه (۷.۱) تفاضل این دو عدد فازی یک عدد فازی LR با تعریف زیر است

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (۸,۲,۴)_{LL} \ominus (۴,۳,۱)_{LL} = (۸,۲,۴)_{LL} \oplus (-۴,۱,۳)_{LL} = (۴,۲,۴)_{LL}$$

هم چنین با استفاده از رابطه (۱۲.۱) تقسیم نیز قابل محاسبه است.
نمودارهای مربوط به اعمال جبری چهارگانه روی اعداد فازی در شکل ۵.۱ نمایش داده شده است.



شکل ۵.۱: نمودار تقریبی اعمال چهارگانه روی اعداد فازی تحت $T-$نرم دارستیک در مثال ۱.۴.۱

حال می‌توان مثال بالا را با استفاده از فرمول‌های معمولی جمع، تفاضل، ضرب، تقسیم به‌صورت زیر محاسبه نمود

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = (۸,۲,۴)_{LR} \oplus (۴,۳,۱)_{LR} = (۱۲,۵,۵)_{LR}$$
$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (۸,۲,۴)_{LR} \otimes (۴,۳,۱)_{LR} = (۱۲,۳۲,۲۴)_{LR}$$

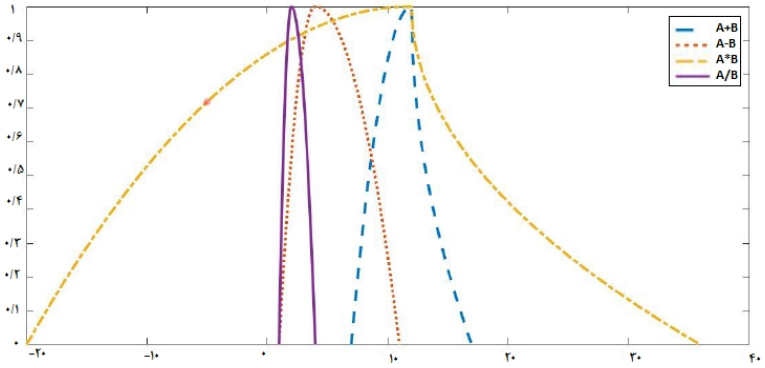
علاوه بر آن فرض کنید $\tilde{A} = (۸,۲,۴)_{LL}$ و $\tilde{B} = (۴,۳,۱)_{LL}$ اعداد فازی LR با توابع $L(x) = R(x) = ۱ - x^۲$ باشند. در این‌صورت تفاضل این دو عدد فازی یک عدد فازی LR با تعریف زیر است

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (۸,۲,۴)_{LL} \ominus (۴,۳,۱)_{LL} = (۸,۲,۴)_{LL} \oplus (-۴,۱,۳)_{LL} = (۴,۳,۷)_{LL}$$

هم چنین تقسیم نیز به‌صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\tilde{A} \oslash \tilde{B} = (۸,۲,۴)_{LL} \oslash (۴,۳,۱)_{LL} = (۸,۲,۴)_{LL} \oplus (\frac{۱}{۴}, \frac{۱}{۱۶}, \frac{۲}{۱۶})_{LL} = (۲,۱,۲)_{LL}$$

نمودارهای مربوط به اعمال جبری چهارگانه روی اعداد فازی معمولی در شکل ۶.۱ نمایش داده شده است.



شکل ۶.۱: نمودار تقریبی اعمال جبری چهارگانه روی اعداد فازی معمولی در مثال ۱.۴.۱

۵.۱ غیرفازی‌سازی

در اکثر موارد بعد از انجام عملیات جبری و توابع فازی لازم است که عدد فازی حاصل، به یک عدد حقیقی تبدیل شود تا بتوان مقایسه‌ای بین محاسبات معمولی و فازی انجام داد. فرآیند غیرفازی‌سازی یک عدد حقیقی معمولی را به دست می‌دهد که می‌توان آن را نماینده عدد فازی حاصل از محاسبات دانست. اگرچه غیرفازی نمودن پاسخ نهایی برای کاربردهایی مانند مدل‌سازی و کنترل سیستم‌ها ضروری می‌نماید، اما استفاده از آن برای جبر فازی باعث از بین رفتن اطلاعات مربوط به عدم‌قطعیت می‌شود. در هر حال، چگونگی استفاده از این اطلاعات هنوز به تحقیق و بررسی بیشتر نیاز دارد.

روش‌های مختلفی برای غیرفازی‌سازی وجود دارند. با وجود کثرت روش‌های غیرفازی‌سازی که تعداد آن‌ها به بیش از ۳۰ روش می‌رسد، هنوز یک شیوه سامان‌مند برای انتخاب نوع غیرفازی‌ساز وجود ندارد. انتخاب نوع غیرفازی‌ساز نیز می‌تواند بسته به دیدگاه کاربر آن متفاوت باشد. در این‌جا به متداول‌ترین روش‌های غیرفازی‌سازی از مرجع [۲] پرداخته می‌شود.

مرکز ثقل

در این روش مرکز ناحیه‌ای که به وسیله نمودار عدد فازی مورد نظر پوشانده شده است، محاسبه می‌شود. اگر $\tilde{A}$ یک عدد فازی و $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت آن باشد، آنگاه غیرفازی‌شده $\tilde{A}$

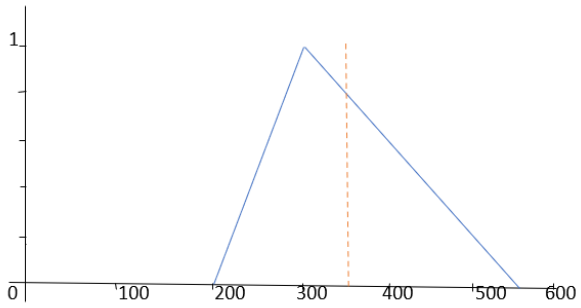
با این روش به وسیله رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$x^* = \frac{\int_a^b x\mu_{\tilde{A}}(x)dx}{\int_a^b \mu_{\tilde{A}}(x)dx} \qquad (۱۶.۱)$$

که در آن، $[a,b]$ بازه شامل تکیه‌گاه $\tilde{A}$ است.

مثال ۱.۵.۱. یک عدد فازی مثلثی را مطابق شکل ۷.۱ در نظر بگیرید. با استفاده از روش مرکزثقل داریم:

$$\int_{۲۰۰}^{۵۵۰} x\mu_{\tilde{A}}(x)dx = \int_{۲۰۰}^{۳۰۰} x(\frac{x-۲۰۰}{۱۰۰})dx + \int_{۳۰۰}^{۵۵۰} x(\frac{x-۲۰۰}{۱۰۰})dx$$
$$= ۱۳۳۳۳/۳۳ + ۴۷۹۱۶/۶۷ = ۶۱۲۵۰$$
$$\int_{۲۰۰}^{۵۵۰} \mu_{\tilde{A}}(x)dx = ۰/۵ \times ۱ \times (۵۵۰ - ۲۰۰) = ۱۷۵ \Rightarrow x^* = \frac{۶۱۲۵۰}{۱۷۵} = ۳۵۰$$



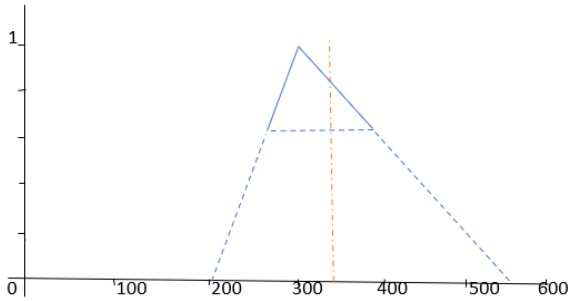
شکل ۷.۱: غیرفازی‌سازی با روش مرکز ثقل

روش مرکز ارتفاع سطح

در این روش، مقادیر کم‌تر از یک سطح α دلخواه نادیده گرفته و مرکز ثقل ناحیه بالای این سطح محاسبه می‌شود. در این‌جا نقاطی با درجات عضویت پایین یا مقادیر بالای x در نظرگرفته نمی‌شوند.

مثال ۲.۵.۱. عدد فازی مثلثی مثال قبل را در نظر بگیرید. اگر درجات عضویت بیش از ۰/۶ را با اهمیت بدانیم، با استفاده از روش مرکز ارتفاع سطح داریم (شکل ۸.۱ را ببینید):

$$\int_{۲۰۰}^{۵۵۰} x\mu_{\tilde{A}}(x)dx = \int_{۲۶۰}^{۳۰۰} x(\frac{x-۲۰۰}{۱۰۰})dx + \int_{۳۰۰}^{۴۰۰} x(\frac{۵۵۰-x}{۲۵۰})dx = ۲۳۴۶۱/۲$$
$$x^* = ۲۳۴۶۱ \times ۲/۷۰ = ۳۳۵/۱۶$$



شکل ۸.۱: غیرفازی‌سازی با روش مرکز ارتفاع سطح

میانگین وزنی

هنگامی که عدد فازی $\tilde{A}$ به صورت گسسته و منفک شده دردست است، می‌توان از روش میانگین وزنی که تخمینی از روش مرکز ثقل است، استفاده نمود:

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x\mu_{\tilde{A}}(x)}{\sum_{i=1}^{n} \mu_{\tilde{A}}(x)} \qquad (۱۷.۱)$$

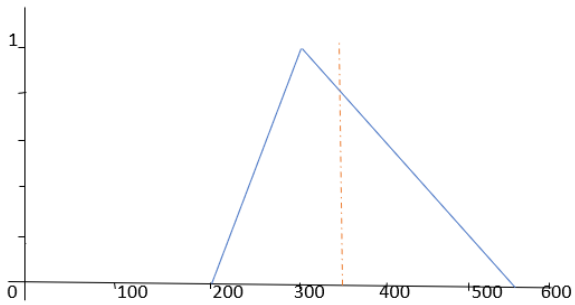
میانگین سطح

در این روش x^* سطح زیر نمودار پوشش داده شده به وسیله عدد فازی $\tilde{A}$ را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند. رابطه محاسبه x^*، بسته به شکل تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}$ متفاوت خواهد بود. به هر حال داریم:

$$\int_{-\infty}^{x^*} \mu_{\tilde{A}}(x) = \int_{x^*}^{\infty} \mu_{\tilde{A}}(x) \qquad (۱۸.۱)$$

این روش به نصف‌کننده سطح نیز معروف است.

مثال ۳.۵.۱. عدد فازی مثال قبل را در نظر بگیرید. این عدد با به‌دست آوردن مقداری که سطح تحت پوشش عدد فازی را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کند، غیرفازی می‌شود (شکل ۹.۱ را ببینید).



شکل ۹.۱: غیرفازی‌سازی با روش مرکز میانگین سطح $x^* = ۳۴۵/۹۴$

روش ماکزیمم

در این روش، نقطه‌ای که مقدار حداکثر عضویت را در عدد فازی $\tilde{A}$ دارد به عنوان نماینده آن انتخاب می‌شود.

روش اولین ماکزیمم

در برخی موارد، مقادیر عضویت حداکثر در بیش از یک نقطه رخ می‌دهند. با این روش، کوچک‌ترین مقداری که دارای حداکثر عضویت است، انتخاب خواهد شد.

میانگین ماکزیمم

اگر x_m مجموعه نقاطی باشد که مقدار حداکثر عضویت در آن‌ها رخ می‌دهد، آنگاه در حالت پیوسته، غیرفازی ساز میانگین ماکزیمم نقطه زیر را به دست می‌دهد:

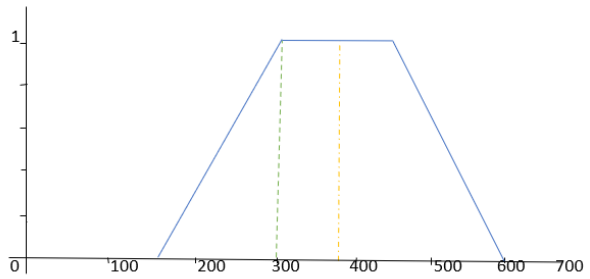
$$x^* = \frac{min\ x_m + max\ x_m}{۲} \qquad (۱۹.۱)$$

در حالت گسسته داریم:

$$x^* = \frac{\sum_{i=۱}^{n} x_i}{n} \qquad (۲۰.۱)$$

مثال ۴.۵.۱. تابع عضویت نشان داده شده در شکل ۱۰.۱ را درنظر بگیرید. ماکزیمم عضویت در بیش از یک نقطه و در یک بازه پیوسته رخ می‌دهد. با استفاده از روش اولین ماکزیمم مقدار $x^* = ۳۰۰$ و با استفاده از روش میانگین ماکزیمم داریم:

$$x^* = \frac{۳۰۰ + ۴۵۰}{۲} = ۳۷۵ \qquad (۲۱.۱)$$



شکل ۱۰.۱: غیرفازی‌سازی با روش اولین ماکزیمم و میانگین ماکزیمم

فصل ۲

مروری بر نظریه قابلیت اعتماد و تحلیل درخت عیب

با توجه به اینکه هدف این پایان‌نامه تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌ها بر پایه درخت عیب می‌باشد بنابراین در این فصل در ابتدا، اصول و مفاهیم اولیه قابلیت اعتماد مرور می‌شود و به تعریف و تشریح مفاهیم کلیدی و شاخص‌های قابلیت اعتماد و تعریف تابع ساختار و ویژگی‌های آن و معرفی انواع سیستم‌ها می‌پردازیم و در بخش بعد به تفصیل، روش تحلیل درخت عیب را بیان می‌کنیم. مفاهیم قابلیت اعتماد که در این فصل مورد استفاده قرار گرفته‌اند عمدتا از مرجع [۱] استخراج شده‌اند. خواننده‌گان علاقه‌مند می‌تواند برای اطلاع بیشتر به مرجع [۶] مراجعه نمایند. همچنین عمده مطالب روش تحلیل درخت عیب از مرجع [۵۸] ارائه شده است.

۱.۲ مروری بر نظریه قابلیت اعتماد

۱.۱.۲ مقدمه

محصولات مهندسی مدرن از تک تک قطعات تا سامانه‌های بزرگ باید به گونه‌ای طراحی و تولید شوند که در مدت زمان ماموریت از قابلیت اعتماد لازم برخوردار باشند. در هر

صنعت هنگامی که سیستمی از کار می‌افتد یا دچار اختلال می‌شود، از جنبه‌های مختلفی مانند جنبه‌های اقتصادی، انسانی، سیاسی و... خطرناک و زیان‌آور است. قابلیت اعتماد یکی از مهم‌ترین مشخصه‌های کیفی قطعات، محصولات و سیستم‌های پیچیده و بزرگ است که مشتریان از تولیدکنندگان محصولات انتظار دارند. از کارافتادن سیستم‌ها موجب وقوع اختلال در سطوح مختلفی می‌شود و می‌تواند به عنوان تهدیدی شدید برای جامعه و محیط زیست نیز تلقی شود. از این‌رو مصرف‌کنندگان و به طور کلی مردم جامعه انتظار دارند که سیستم‌ها و محصولات، اطمینان‌بخش و ایمن باشند.

مهندسی قابلیت اعتماد مانند سایر رشته‌های مهندسی، به سرعت در حال تکامل و تحول است، که هدف آن توسعه روش‌ها و ابزار مناسب برای مدل‌سازی، پیش بینی و ارزیابی برای نشان دادن قابل اعتماد بودن، تعمیرپذیری و دردسترس بودن قطعات، تجهیزات و سیستم‌ها است.

تئوری ریاضی قابلیت اعتماد در طی جنگ جهانی دوم برای پاسخگویی به مطالبات تکنولوژی‌های مدرن آن زمان به ویژه سیستم‌های پیچیده نظامی و حوزه تعمیر و نگهداری آن‌ها مطرح شد.

تاریخچه رشد مهندسی قابلیت اعتماد را می‌توان به دوره سال‌های قبل از سال ۱۹۳۰ ارجاع داد. در آن دوره به دلیل نگرانی از کارکرد صحیح تولیدات و وقوع حوادثی چون غرق شدن کشتی تایتانیک، مطالعه و تحقیقاتی در زمینه طراحی سیستم‌ها با اجزای موازی و یا ذخیره انجام گرفت. سپس در دهه ۱۹۳۰ هم‌زمان با اختراع صنعت حمل و نقل هوایی، مطالعه و تحقیقاتی در خصوص کمی کردن قابلیت اعتماد انجام شد. در سال ۱۹۳۹ برای حل مشکلات مربوط به تعمیر و بازرسی، آقای وایبل (استاد موسسه سلطنتی فناوری در سوئد)، توزیعی برای توصیف شکست مواد پیشنهاد نمود. در دهه ۱۹۴۰ با آغاز جنگ جهانی دوم و ساخت ابزارهای پیچیده نظامی، بحث مدل‌سازی قابلیت اعتماد توسط لوسر و مورفی انجام گرفت. در دهه ۱۹۵۰ با به‌کارگیری سیستم‌های الکترونیکی، گروه‌های مطالعاتی $Agree$ و $IEEE$، تشکیل شدند و به تهیه استانداردهایی برای تولید قطعات با قابلیت اعتماد بالا پرداختند. در سال ۱۹۵۱ اپستاین و سوبل شروع به‌کار بر روی توزیع نمایی به عنوان یک مدل احتمالی برای مطالعه و تخمین طول‌عمر یک قطعه نمودند. این مدل یک ابزار مناسب برای پیش‌بینی شکست قطعات ارائه می‌دهد که هنوز هم مورد توجه و استفاده قرار می‌گیرد. مهم‌ترین ویژگی آن سادگی صورت و کاربرد گسترده این مدل است. در دهه ۱۹۶۰ با پیشرفت صنایع هوایی و انگیزه ساختن آپولو، اولین کتاب در این زمینه توسط بازوفسکی به رشته تحریر درآمد. تحقیق بر روی عملکرد سیستم با ساختار منسجم و یا قابلیت اعتماد سیستم به طور کلی توسط آقایان بیربون، اساری و ساندرز در سال ۱۹۶۱ آغاز شد. آن‌ها مطالعات انجام شده بر روی رله‌های برقی با قابلیت اعتماد بالا را که توسط شانون و مور انجام شده بود را به صورت خلاصه‌تری ارائه نمودند. در دهه ۱۹۶۰ – ۱۹۷۰ با توجه به رشد سریع محصولات الکترونیکی و افزایش پیچیدگی آن‌ها، تکنیک‌های قابلیت اعتماد توسعه یافته و روش‌هایی نظیر شناسایی علت شکست، درنظر گرفتن افزونگی، برنامه تضمین قابلیت اعتماد و قابلیت اعتماد

نرم‌افزار معرفی شدند. همچنین استفاده از خرابی و اثرات آن‌ها در سیستم‌های مهندسی توسعه یافت. در دهه ۱۹۷۰ – ۱۹۸۰ با مطرح شدن تضمین کیفیت و رابطه آن با قابلیت اعتماد و همچنین جدی‌تر شدن مساله هزینه‌های قابلیت اعتماد، موضوعاتی نظیر وارانتی، چرخه‌عمر محصول و فیزیک شکست بیشتر مورد توجه قرار گرفت. در دهه ۱۹۸۰ – ۱۹۹۰ با گسترش سیستم‌های مهندسی به‌ویژه شبکه اینترنت جهانی، موضوعاتی نظیر قابلیت اعتماد شبکه و نرم‌افزارها توسعه یافت و موضوع تست‌های قابلیت اعتماد نیز در این دهه توسعه چشمگیری یافت. در آخر قرن بیستم، با استقرار نظام‌های جامع کیفیت در صنعت، موضوع برنامه قابلیت اعتماد مجددا توسعه یافت و تست‌های قابلیت اعتماد به‌ویژه تست‌های غربالگری و شرایط محیطی برای دستیابی به محصول با کیفیت بالاتر مورد توجه قرار گرفت. در دهه اخیر نیز استفاده از تکنیک‌های هوش محاسباتی در قابلیت اعتماد و سیستم‌های پیچیده چندمرحله‌ای و چندحالته مورد توجه محققین قرار گرفته است و تلاش برای طراحی و تولید مجموعه‌های فضایی با قابلیت اعتماد فوق‌العاده برای عمر بیش از بیست سال برای ماموریت‌های بین سیاره‌ای و سفر به سیاره‌های دوردست منظومه شمسی آغاز شده است.

شیوه‌های ارزیابی قابلیت اعتماد از نظر پیدایش، در ابتدا در ارتباط با صنایع هوافضا و کاربردهای نظامی شکل گرفت ولی سریعا توسط سایر صنایع مانند صنایع هسته‌ای که تحت فشار شدیدی جهت تضمین ایمنی و قابلیت اعتماد راکتورهای هسته‌ای در تامین انرژی الکتریکی می‌باشند و یا صنایع فرآیندهای پیوسته مانند صنایع فولاد و صنایع شیمیایی که هر ساعت از توقف آن‌ها بعلت وقوع معایب می‌تواند موجب تحمیل خسارت‌های بزرگ مالی، جانی و آلودگی محیط زیست شود، مورد توجه و کاربرد قرار گرفت. با وجود این لازم به ذکر است که در تمام این زمینه‌ها، شاهد وقوع مسائل و مشکلات شدیدی در سال‌های اخیر بوده‌ایم. از جمله در صنایع هوافضا در سال ۱۹۸۶ حادثه‌ای که برای فضاپیمای چلنجر پیش آمد و حوادث گوناگونی که تاکنون برای برخی هواپیماهای تجاری و مسافربری اتفاق افتاده است. در صنایع هسته‌ای، حادثه چرنوبیل در سال ۱۹۸۶، در تامین انرژی الکتریکی، خاموشی نیویورک در سال ۱۹۷۷، در صنایع شیمیایی، حادثه‌های فیکسبرو در سال ۱۹۷۴، سووسو در سال ۱۹۷۶، بوپال در سال ۱۹۸۴، در سال ۲۰۱۱، آسیب‌دیدن راکتور هسته‌ای فوکوشیمای ژاپن و بسیاری از حوادث دیگر، که در تمام این رخدادها، خسارت‌های چشمگیر و شدید بر جامعه و محیط زیست تحمیل شده است.

بسیاری از مثال‌های فوق ممکن است دلالت کند که خرابی و پیامدهای آن‌ها ناشی از سخت‌افزار است. بااین حال بسیاری از خرابی سیستم‌ها به دلیل خطاهای انسانی و خراب شدن نرم‌افزار است. به عنوان مثال، ۲۵$Therac$، یک دستگاه پرتودرمانی رایانه‌ای، بین ژوئن ۱۹۸۵ و ژانویه ۱۹۸۷، حداقل ۶ بار در بیماران بیش از حد تجویز شد. هر دوز بیش از حد، چند برابر دوز درمانی معمول بود و منجر به آسیب شدید یا حتی مرگ شد. نمونه دیگر، کاوشگر قطبی مریخ که در ژانویه ۱۹۹۹ راه‌اندازی شد و قرار بود در دسامبر همان سال در مریخ فرود آید که با شکست مواجه شد. مشخص شد که استقرار پایه‌های فرود، سیگنال‌های نادرست از

سنسور فرود را ایجاد کرده است. کاوشگر با سرعت ۵۰ مایل بر ساعت به سیاره سقوط کرد و نابود شد. هزینه‌های ماموریت از ۱۲۰ میلیون دلار فراتر رفته است (رجوع کنید به [۶]).

بنابراین این رخدادها فشار فزاینده‌ای برای لزوم توجه به ارزیابی قابلت اطمینان، ایمنی و احتمال خطر ایجاد کرده است. از این‌رو یکی از اهداف در صنایع امروزی به حداکثر رساندن قابلیت اعتماد و به حداقل رساندن اثرات شکست می‌باشد. جهت رسیدن به این هدف، روش‌های گوناگونی پیشنهاد و پیاده‌سازی شده است.

۲.۱.۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تحقیق در زمینه‌ی قابلیت اعتماد با مساله‌ی تعمیر و نگهداری ماشین‌ها در اواخر دهه‌ی ۱۹۳۰ و جایگزینی لامپ‌های روشنایی خیابان دراوایل دهه‌ی ۱۹۴۰ آغاز شد. جنگ جهانی دوم و ساخت ابزارهای پیچیده‌ی نظامی باعث شد تا مدل‌سازی قابلیت اعتماد سیستم‌ها مورد توجه قرار گیرد. دهه‌ی ۶۰ با آغاز عصر فضا و پیشرفت‌های صنایع فضایی، تحقیق و پژوهش در زمینه‌ی قابلیت اعتماد گسترش بیشتری یافت، در این میان نقش آماردانان نیز بسیار برجسته بود. در همین سال‌ها اولین کتاب در این زمینه توسط بازوفسکی [۸] و هم‌چنین اولین شماره‌ی نشریه‌ی "*IEEE Transaction on Reliability*" منتشر شد. در دهه‌های ۷۰ و ۸۰ میلادی هم‌زمان با پیشرفت صنایع پتروشیمی و تکنولوژی راه‌آهن، اتومبیل‌سازی و سدسازی از تکنیک‌های آماری به طور وسیعی در قابلیت اعتماد استفاده گردید. هم‌چنین در طراحی انواع سیستم‌های صنعتی، روش‌های قابلیت اعتماد به‌کار گرفته شد و در دهه‌ی ۹۰ با پیشرفت صنعت بیمه و مسائل رقابتی، مباحث قابلیت اعتماد به علوم پزشکی نیز وارد شد.
در ادامه تعاریف مقدماتی این نظریه را مرور می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۲. (موجود [۱]) هر آن‌چه که بررسی طول عمر و قابلیت اعتماد آن می‌تواند اهمیت داشته باشد را یک موجود می‌نامیم. یک موجود می‌تواند یک انسان یا یک سیستم پیچیده الکترونیکی و یا یک جزء کوچک از یک سیستم باشد.

تعریف ۲.۱.۲. (زمان بقا [۲]) زمان بقا یا طول عمر یک موجود که با T نمایش داده می‌شود، فاصله بین زمان شروع به کار موجود تا زمان خرابی آن می‌باشد و یک متغیر تصادفی نامنفی است.

تعریف ۳.۱.۲. (توزیع طول عمر [۳]) توزیع طول عمر یک توزیع پیوسته برای متغیر نامنفی T می‌باشد و کاربرد آن در مدل‌سازی داده‌های مربوط به زمان بقای موجودات است.

[1] Entity
[2] Survival Time or Life Time
[3] Life Time Distribution

تعریف ۴.۱.۲. (تابع قابلیت اعتماد [۱]) قابلیت اعتماد یک موجود برابر با احتمال آن است که موجود کار معینی را تحت شرایط مشخص در فاصله زمانی $(۰,t)$ به‌طور رضایت‌بخش انجام دهد. اگر متغیر تصادفی T نشانگر طول عمر موجود باشد در این‌صورت تابع قابلیت اعتماد یا تابع بقا[۲] به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$R(t)=P(T>t)=۱-P(T<t)=\int_t^{\infty} f(u)du=۱-F_T(t) \qquad (۱.۲)$$

که $f(t)$ تابع چگالی طول عمر موجود است. اگر $F(t)$ توزیع تجمعی مربوط به طول عمر این موجود باشد، قابلیت اعتماد یک موجود برابر با $۱-F(t)$ است. تابع $F(t)$، تابع عدم اطمینان[۳] نامیده می‌شود و معادل با احتمال آن است که موجود در فاصله زمانی $(۰,t)$ خراب شود.

واضح است که $R(۰)=۱$ و $R(\infty)=۰$ به عبارتی موجود در زمان صفر(شروع) حتماً سالم است و در زمان‌های خیلی بزرگ احتمال سالم بودن موجود به صفر می‌رسد. واضح است که تابع قابلیت اعتماد، تابعی غیرصعودی از زمان است.

تعریف ۵.۱.۲. (خرابی [۴]) خرابی یا شکست یک موجود معادل است با متوقف شدن توانایی موجود برای انجام کار معین تحت شرایط مشخص.

تعریف ۶.۱.۲. (نرخ خرابی [۵]) نرخ خرابی یا تابع شکست[۶] که با $h(t)$ نشان داده می‌شود، برابر است با احتمال آن‌که موجود در فاصله بسیار کوچک بعد از t خراب شود به شرط آن‌که تا زمان t سالم باشد. به بیان دیگر

$$h(t)=\lim_{\triangle t\to ۰}\frac{P(t<T<t+\triangle t|T>t)}{\triangle t}$$

$$=\lim_{\triangle t\to ۰}\frac{F(t+\triangle t)-F(t)}{\triangle t R(t)}=\frac{f(t)}{R(t)} \qquad (۲.۲)$$

هر تابع $h(t)$ که دارای شرایط زیر باشد یک تابع نرخ خرابی به حساب می‌آید [۸].

الف) به ازای هر t داشته باشیم، $h(t)\geq ۰$.

ب) $\lim_{x\to\infty}\int_{\infty}^{x}h(t)dt=۰$.

ج) $\lim_{x\to\infty}\int_{-\infty}^{x}h(t)dt=\infty$.

تعریف ۷.۱.۲. (متوسط زمان کارکرد تا خرابی [۷]) متوسط زمان کارکرد تاخرابی که با $MTTF$ نشان داده می‌شود، برابر با میانگین طول عمر موجود است و به زبان ریاضی به‌صورت زیر بیان

[1] Reliability Function
[2] Survival Function
[3] Unreliability
[4] Failure
[5] Failure Rate
[6] Failure Function
[7] Mean Time to Failure

می‌شود $MTTF = E(T) = \int_{\circ}^{\infty} t\ f(t)\ dt$. با توجه به مثبت بودن مقادیر مشاهدات مربوط به طول عمر T، رابطه زیر نتیجه می‌گردد

$$E(T) = \int_{\circ}^{\infty} P(T > t)dt = \int_{\circ}^{\infty} R(t)dt \qquad (۳.۲)$$

مثال ۱.۱.۲. فرض کنید طول عمر یک قطعه دارای توزیع وایبل با تابع چگالی زیر است

$$f_T(t;\alpha,\beta) = \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-۱} e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}}, \quad t \geq \circ,\ \alpha > \circ,\ \beta > \circ$$

در این‌صورت طبق تعاریف ۴.۱.۲ ، ۶.۱.۲ و ۷.۱.۲ داریم

$$\begin{aligned} R(t) &= \int_{t}^{\infty} f(u)\ du = e^{-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta}} \\ h(t) &= \frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-۱} \\ MTTF &= \int_{\circ}^{\infty} t\ f(t)\ dt = \alpha\Gamma\left(\frac{\beta+۱}{\beta}\right) \end{aligned}$$

تعریف ۸.۱.۲. یک سیستم شامل n مولفه را در نظر بگیرید. هر مولفه در یک سیستم می‌تواند دو وضعیت سالم و خرابی را دارا باشد. برای نشان دادن وضعیت $i-$امین مولفه سیستم، $i = ۱, ..., n$، در زمان t یک متغیر دو دویی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$x_i(t) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر مولفه } i \text{ در زمان } t \text{ کار کند} \\ \circ & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

به‌طور مشابه اگر متغیر دو دویی ϕ نمایان‌گر وضعیت سیستم درنظر گرفته شود و $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ باشد، در این‌صورت

$$\phi(\mathbf{x}(t)) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر سیستم در زمان } t \text{ کار کند} \\ \circ & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

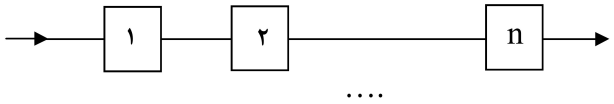
فرض کنید که وضعیت سیستم به‌طور کامل به‌وسیله وضعیت مولفه‌هایش تعیین شود، آن‌گاه تابع $\phi = \phi(\mathbf{x}(t))$ یک تابع ساختار[1] سیستم نامیده می‌شود.

تعریف ۹.۱.۲. فرض کنید سیستمی شامل n مولفه $x_۱, ..., x_n$ باشد.
الف) اگر کار کردن سیستم منوط به کار کردن تمام مولفه‌هایش باشد، گوییم مولفه‌های

[1] Structure Function

سیستم در ساختار سری[1] قرار گرفته‌اند. شکل ۱.۲ ساختار سیستم سری را نشان می‌دهد و تابع ساختار سیستم سری به‌صورت زیر تعریف می‌شود

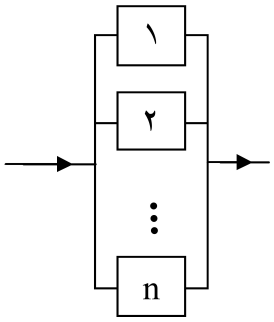
$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i$$



شکل ۱.۲: سیستم سری

ب) سیستم را موازی[2] گوییم، هرگاه سیستم در صورتی کار کند که حداقل یکی از مولفه‌هایش کار کند. شکل ۲.۲ ساختار سیستم موازی را نشان می‌دهد و تابع ساختار سیستم موازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi(\mathbf{x}) = \phi(x_1, ..., x_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$$



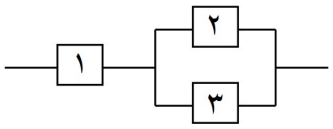
شکل ۲.۲: سیستم موازی

پ) در صورتی‌که برای کار کردن سیستم، کار کردن حداقل k جزء از n جزء الزامی باشد، سیستم را k از n می‌گوییم. تابع ساختار سیستم k از n به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant k \\ 0 & \sum_{i=1}^{n} x_i < k \end{cases}$$

مثال ۲.۱.۲. سیستمی را درنظر بگیرید که مولفه‌های دوم و سوم آن به‌صورت موازی با یکدیگر و حاصل آن با مولفه‌ی اول به‌صورت سری بسته شده است(شکل ۳.۲). حال تابع ساختار آن برابر است با

[1] Series
[2] Parallel



شکل ۳.۲: ساختار سیستم

$$\phi(\mathbf{x}) = x_1\,[1 - (1 - x_2)(1 - x_3)]$$

از آنجا که ساختار عموم سیستم‌ها به‌سادگی سیستم‌های سری یا موازی نیستند، برای مدل‌سازی و ارزیابی قابلیت اعتماد سیستم‌های پیچیده‌تر از طریق تابع ساختار نیازمند روش‌های دیگری می‌باشیم. یکی از این روش‌ها استفاده از مجموعه‌های قطع‌کننده مینیمال و مجموعه‌های مسیر مینیمال می‌باشد که سیستم‌های پیچیده را به سیستم‌های سری یا موازی تبدیل می‌کند. محاسبه قطع‌کننده‌های مینیمال و مسیر مینیمال و استفاده از آن‌ها در تعیین شاخص‌های قابلیت اعتماد، مناسب‌ترین روش برای مطالعات پیش‌بینی قابلیت اعتماد در شبکه‌های پیچیده مهندسی می‌باشد که در تعیین کیفیت کارکرد یک سیستم از اهمیت به‌سزایی برخوردار می‌باشد.

تعریف ۱۰.۱.۲. یک بردار وضعیت $\mathbf{x}$ را یک بردار قطع‌کننده گوییم، هرگاه $\phi(\mathbf{x}) = 0$ باشد. مجموعه‌ی $C(\mathbf{x}) = \{i, x_i = 0\}$ را یک مجموعه قطع‌کننده گوییم. علاوه‌برآن اگر برای هر $\mathbf{x} < \mathbf{y}$، داشته باشیم $\phi(\mathbf{y}) = 1$ ، آن‌گاه مجموعه قطع‌کننده متناظر را یک مجموعه قطع‌کننده مینیمال گوییم.

تعریف ۱۱.۱.۲. یک بردار وضعیت $\mathbf{x}$ را یک بردار مسیر گوییم، هرگاه $\phi(\mathbf{x}) = 1$ باشد. مجموعه‌ی $P(\mathbf{x}) = \{i, x_i = 1\}$ را یک مجموعه مسیر گوییم. علاوه‌برآن اگر برای هر $\mathbf{x} > \mathbf{y}$، داشته باشیم، $\phi(\mathbf{y}) = 0$ ، آن‌گاه مجموعه مسیر متناظر را یک مجموعه مسیر مینیمال گوییم.

قرارداد: $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ بدین معنی است که $x_i \leq y_i$ $i = 1, 2, ..., n$ اما حداقل برای یک i، $x_i < y_i$ یعنی نامساوی اکید است.

باتوجه به تعاریف بالا هر قطع‌کننده مینیمال مجموعه‌ای از المان‌های سیستم است که در صورت خرابی یا خروج همه‌ی آن‌ها، سیستم با وقفه مواجه می‌شود و درصورتی‌که خطای یکی از آن‌ها برطرف گردد ارتباط بین ورودی و خروجی نیز مجددا برقرار خواهد گردید. به‌عبارت دیگر، مجموعه‌ای از عضوهای سیستم که شکست هر یک از آن‌ها موجب شکست سیستم می‌شود اما موفقیت هریک از اعضای آن باعث عدم شکست قطع‌کننده‌ها می‌شود. قطع‌کننده‌های متعددی را می‌توان پیدا و انتخاب کرد، اما مهم آن است که قطع‌کننده‌های مینیمال تعیین شوند. هم‌چنین اگر در یک مجموعه مسیر همه‌ی اجزای مسیر روشن باشند باعث روشن بودن کل سیستم خواهد شد. مجموعه مسیر مینیمال مجموعه مینیمال با این خاصیت است.

فرض کنید یک سیستم دارای s مجموعه مسیر مینیمال $p_1, ..., p_s$ و دارای k مجموعه قطع‌کننده مینیمال $c_1, ..., c_k$ باشد، آن‌گاه تابع ساختار ϕ به‌صورت زیر می‌باشد [۸].

$$\phi(\mathbf{x}) = 1 - \prod_{j=1}^{s}(1 - \prod_{i \in p_j} x_i)$$

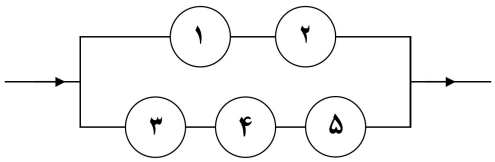
یا

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{k}(1 - \prod_{i \in c_j}(1 - x_i))$$

استفاده از روش مجموعه قطع‌کننده مینیمال و مجموعه مسیر مینیمال دارای دو مزیت اساسی می‌باشد. اول آن‌که این روش قابل استفاده در برنامه‌نویسی‌های کامپیوتری می‌باشد و دوم امکان بررسی تعیین راه‌های مختلف از کار افتادن سیستم را به‌خوبی فراهم می‌سازد.

حال برای روشن شدن مطلب به دو مثال زیر توجه کنید.

مثال ۳.۱.۲. سیستمی را درنظر بگیرید که به‌صورت شکل ۴.۲ بسته شده است. این نوع از سیستم‌ها که سیستم موازی–سری معروفند از دو سیستم سری که متشکل از ۲ واحد و دیگری متشکل از ۳ واحد است، به‌صورت موازی به‌هم وصل شده‌اند.



شکل ۴.۲: حالت خاصی از سیستم موازی–سری

مجموعه‌ی $\{1,2\}$ یک مجموعه مسیر مینیمال می‌باشد زیرا با خاموش شدن هر عضو از مجموعه، سیستم نیز خاموش خواهد شد. دیگر مجموعه مسیر مینیمال مجموعه $\{3,4,5\}$ می‌باشد. هم‌چنین با توجه به تعریف مجموعه قطع‌کننده‌ها می‌توان نشان داد که ۱۸ مجموعه قطع‌کننده و ۶ مجموعه قطع‌کننده مینیمال وجود دارند که در زیر آورده شده‌اند.

مجموعه قطع‌کننده: $\{1,3\}$، $\{1,3,4\}$، $\{1,4,5\}$، $\{1,3,5\}$، $\{2,3,4\}$، $\{2,3,5\}$، $\{1,3,4,5\}$ و ...

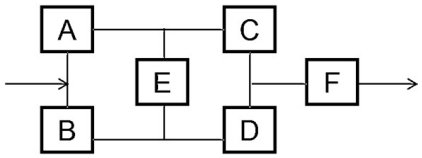
مجموعه قطع‌کننده مینیمال نیز به شکل مجموعه $\{i,j\}$ هستند که در آن $i = 1,2$ و $j = 3,4,5$ می‌باشند.

تابع ساختار آن نیز به صورت زیر است

$$\phi(\mathbf{x}) = [1 - (1 - x_1x_2)(1 - x_3x_4x_5)]$$

مثال ۴.۱.۲. ساختار سیستمی به شکل ۵.۲ بسته شده است. می‌خواهیم قطع‌کننده‌های مینمال و مجموعه مسیر مینیمال را پیدا کنیم.

مجموعه مسیر: $\{B,D,F\}$، $\{A,C,F\}$، $\{A,E,D,F\}$ و...



شکل ۵.۲: ساختار سیستم

مجموعه مسیر مینیمال: $\{B,D,F\}$، $\{A,C,F\}$

مجموعه قطع‌کننده: $\{C,D\}$، $\{A,B\}$، $\{F\}$، $\{A,E,D\}$، $\{B,E,C\}$، $\{A,C,F\}$، $\{A,E,D,F\}$ و...

مجموعه قطع‌کننده مینیمال: $\{C,D\}$، $\{A,B\}$، $\{F\}$، $\{A,E,D\}$ و $\{B,E,C\}$

همانطور که در مثال فوق ملاحظه می‌کنید بلوک دیاگرام، نمایشی از چیدمان فیزیکی اجزای یک سیستم است. برای این منظور یک سیستم به زیرسیستم‌های نرم‌افزاری و سخت‌افزاری تقسیم می‌گردد و سپس نمایش‌های بلوکی درون هر یک از این زیرسیستم‌ها ایجاد می‌شود. این بلوک‌ها به صورت سری یا موازی و یا پیچیده به یکدیگر رشته شده‌اند تا نشان دهند که چگونه هر جزء باید برای موفقیت در سیستم عمل کند. با توجه به نمودار بلوکی و تکنیک‌های متناسب با هر چیدمان می‌توان قابلیت اعتماد یک سیستم را محاسبه نمود.

برای تحلیل و همچنین محاسبه قابلیت اعتماد یک سیستم تکنیک‌های مختلفی اعم از روش‌های کلاسیک و مدرن وجود دارد. از جمله روش‌های کلاسیک می‌توان به روش‌های بلوک دیاگرام قابلیت اعتماد (RBD_s[۱])، تحلیل درخت عیب (FTA[۲])، تحلیل حالات بالقوه خرابی و آثار آن ($FMEA$[۳])، زنجیره مارکوف[۴] و ارزیابی احتمالی ریسک (PRA[۵]) (ترکیبی از دیاگرام‌های منطق اصلی (MLD_s[۶]) و درخت عیوب و تحلیل درخت عیب) اشاره نمود. از روش شبکه‌های بیزین نیز می‌توان به عنوان پرکاربردترین تکنیک مدرن محاسبه قابلیت اعتماد نام برد [۶].

برای یک سیستم، بلوک دیاگرام قابلیت اعتماد و تحلیل درخت عیب به نتایج یکسانی خواهند رسید و تفاوت این دو رویکرد در آن است که تحلیل درخت عیب بر خلاف بلوک دیاگرام، عدم اطمینان را حساب می‌کند، یا به عبارتی، در روش درخت عیب احتمالات شکست به جای احتمالات موفقیت محاسبه می‌شوند.

تحلیل درخت عیب تکنیکی است که برای تحلیل یک حالت مجزا مورد استفاده قرار می‌گیرد. زمانی که می‌خواهیم به این سوال پاسخ دهیم که «چه چیزی باعث ایجاد این شکست شده است؟» از تحلیل درخت عیب استفاده می‌کنیم. درخت عیب، روش مناسبی است که با

[1] Reliability Block Diagrams
[2] Fault Tree Analysis
[3] Failure Mode and Effects Analysis
[4] Markov chains
[5] Probabilistic Risk Assessment
[6] Master Logic Diagrams

استفاده از آن می‌توان ساختار یک سیستم را به نحو مطلوبی نمایش داد. درخت عیب رابطه منطقی بین خرابی‌هایی است که می‌توانند سیستم را از کار بیندازد. برای نمایش روابط بین خرابی‌ها در قالب درخت عیب از یک‌سری علایم و نمادها استفاده می‌گردد. نتیجه تحلیل مذکور مجموعه‌ای از ترکیبات اجزای ایجادکننده خرابی به همراه احتمال هر خرابی است که موجب خرابی کل ساختار می‌شوند. این دیاگرام خصوصا برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های پیچیده رایج می‌باشد که به تفصیل در بخش بعد به آن اشاره شده است.

۲.۲ مروری بر تحلیل درخت عیب

۱.۲.۲ مقدمه

تحلیل درخت عیب[1] برای اولین‌بار در سال‌های ۶۲ – ۱۹۶۱ در آزمایشگاه‌های تلفن بل توسط واتسون و سپس از آن در نیروی هوایی آمریکا جهت تامین و بهبود قابلیت اعتماد و ایمنی سیستم‌های موشک‌های بالیستیک بین‌قاره‌ای طرح‌ریزی شد. بعد از آن، شرکت هواپیمایی بوئینگ این روش را مورد بازنگری و توسعه قرار داد. اولین مقاله درباره‌ی تحلیل درخت عیب در سال ۱۹۶۵ در سمپوزیوم ایمنی سیستم که توسط دانشگاه واشنگتن و شرکت بوئینگ برپا شده بود، ارائه گردید [۵۹].

تحلیل درخت عیب امروزه به‌عنوان یکی از پرکاربردترین روش‌ها در حوزه مدل‌سازی حالات خرابی سیستم، ارزیابی، تشخیص و مکان‌یابی عیوبِ سیستم در سطح وسیعی از رشته‌های مهندسی، هوافضا و هم‌چنین آنالیز ایمنی سیستم‌ها به‌خصوص در سیستم‌های تولید انرژی هسته‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تحلیل درخت عیب زیرمجموعه‌ای از تحلیل احتمالی ریسک[2] می‌باشد. تحلیل احتمالی ریسک نه‌تنها رویدادهای تکی و با احتمال کم و شدت بالا را بررسی می‌کند، بلکه رویدادهای کم‌خطر که اغلب زیان‌بارتر از رویدادهای اصلی می‌باشند را نیز تحلیل می‌کند. هم‌چنین این روش به مدیران و مهندسین کمك می‌کند تا نقاط ضعف طراحی و عملیاتی را در سیستم‌های پیچیده پیدا کرده و به شکل مؤثرتری در جهت بهبود ایمنی سیستم تلاش کنند [۵۸]. امروزه روش تحلیل درخت عیب به‌عنوان یکی از قوی‌ترین ابزارهای تحلیل فرایند ایمنی سیستم به‌ویژه در هنگام ارزیابی سیستم‌های بسیار پیچیده و دقیق محسوب می‌شود. به‌دلیل استفاده از رویکرد قیاسی (رسیدن از کل به جزء) در این روش، بسیاری از تجزیه‌وتحلیل‌گرهای ایمنی سیستم، به‌کارگیری روش درخت عیب در بررسی حالات احتمالی مختلف که می‌توانند منجر به بروز رویدادهای مطلوب یا نامطلوب در سطح سیستم شوند را بسیار مفید می‌دانند.

تکنیك تحلیل درخت عیب را می‌توان خیلی ساده به‌عنوان یك روش تحلیلی در نظر گرفت

[1] Fault Tree Analysis
[2] probability Risk Analaysis

که در آن وضعیت نامطلوبی از سیستم مشخص شده و سیستم در زمینه محیطی و عملیاتی خود تحلیل می‌شود تا تمامی راه‌های واقعی که منجر به بروز این رویداد نامطلوب(رویداد رأس) می‌شود، کشف گردد. درخت عیب مدل گرافیکی از ترکیبات سری و موازی عیب‌هایی است که باعث وقوع رویداد ناخواسته ازپیش تعریف شده‌ای می‌گردد. عیب‌ها ممکن است رویدادهایی باشند که مرتبط با شکست سخت‌افزاری قطعات، خطاهای انسانی و یا هر رویداد دیگری باشند. بنابراین درخت عیب ارتباط منطقی رویدادهای پایه ای که منجر به رویداد رأس می‌شوند را ترسیم می‌کند. نکته قابل توجه این‌است‌که درخت عیب به‌تنهایی یك مدل کمی‌نیست، بلکه یك مدل کیفی است که می‌توان آن‌را به‌طور کمی نیز ارزیابی نمود. خروجی درخت عیب در اصل یك رویداد دودوئی است، یعنی به دو حالت شکست یا موفقیت، خلاصه می‌شود. شناسه‌های درخت عیب دروازه‌هایی هستند که منطق جاری در درخت را مشخص می‌کنند. دروازه‌ها ارتباط منطقی بین رویدادهای پایین‌دست (ورودی دروازه) و بالادست (یعنی خروجی دروازه) را معلوم می‌کنند که در بخش‌های بعدی به تعاریف و چگونگی کارکرد آن می‌پردازیم.

درخت عیب یک روش مدل‌سازی گرافیکی برای توصیف چگونگی انتشار شکست‌ها از طریق سیستم، یعنی، چگونگی تعامل اجزا برای ایجاد شکست‌های سرتاسرسیستم هستند. مدل‌های حاصله را می توان برای به دست آوردن معیارهای کیفی و کمی مختلف تحلیل کرد. چندین روش برای ارزیابی قابلیت اعتماد و ایمنی سیستم‌های دینامیک پیچیده موجود است در بین آن‌ها، تحلیل درخت عیب یکی از ابزارهای ارزیابی مهم برای اندازه‌گیری و توصیه بهبود ممکن در مرحله طراحی است.

شیوه درخت عیب از اولین شیوه‌های ارزیابی قابلیت اعتماد است که بویژه برای تحلیل سیستم با عضوهای آماده کار، سیستم‌های ایمنی و سیستم‌های ویژه ماموریت مورد استفاده بوده است. در این شیوه شرایط شکست مشخصی از سیستم به عنوان حادثه نهائی[1] در نظر گرفته می‌شود. ترکیب و توالی سایر شکست‌ها که منجر به وقوع حادثه نهائی می‌شود ساختار درخت عیب را بوجود می‌آورد. برای این منظور در ابتدا علل اصلی حادثه نهائی شناسایی شده و سپس گام به گام با تجزیه این علل به جزئیات بیشتر، وابستگی آن‌ها به عملکرد عضوهای سیستم مورد مکاشفه قرار می‌گیرد.

این شیوه در وحله نخست به عنوان ابزار ارزیابی کیفی برای یک طراح است تا به اهمیت رفتار تک تک عضوهای سیستم پی برده و تدابیر لازم را برای حذف عوامل اصلی شکست سیستم اعمال کند. در وحله دوم با استفاده از اطلاعات مربوط به قابلیت اعتماد عضوها، از پایین‌ترین سطح، الحاق منطقی رخدادها با استفاده از اتصالات بولی صورت می‌گیرد و نهایتا ارزیابی کمی قابلیت اعتماد سیستم حاصل خواهد شد.

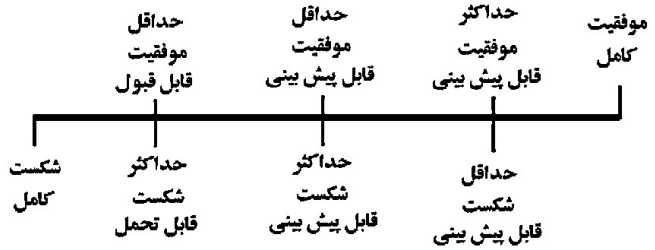
[1] Top Event

۲.۲.۲ ارزیابی کمی و کیفی درخت عیب

هر دو ارزیابی کمی[۱] و ارزیابی کیفی[۲] را می‌توان برروی درخت عیب انجام داد. با این حال درخت عیب به خودی خود یك ارزیابی کیفی از رویدادهایی است که منجر به رویداد رأس می‌شوند. به‌عبارت دیگر، بیشتر در ارزیابی‌های کیفی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ارزیابی‌های کمی، منطق حاکم بر درخت عیب به شکل منطق عددی در می‌آید که اطلاعات متمرکزتری را به ما می‌دهد. اما در ارزیابی‌های کیفی که بیشتر به بررسی کیفیت اطلاعات پرداخته می‌شود، درستی نتایج از اعتبار کمتری نسبت به ارزیابی کمی برخوردار است. نتایج نهایی در ارزیابی‌های کمی، با استفاده از مجموعه‌های قطع‌کننده مینیمال[۳] رویداد رأس [۴] حاصل می‌شود. یك مجموعه‌ی قطع‌کننده، ترکیبی از رویدادهای پایه[۵] است که منجر به وقوع رویداد رأس می‌شوند و یك مجموعه‌ی قطع‌کننده مینیمال، ترکیبی حداقل از این مجموعه است. رویدادهای پایه، رویدادهای انتهایی درخت هستند. بنابراین، مجموعه‌های قطع‌کننده مینیمال، تمامی مسیرهای منتهی به وقوع رویداد رأس را مشخص می‌کنند و هم‌چنین با استفاده از آن می‌توان عدم قطعیت‌ها را در هر یك از نتایج کمی حاصله به‌دست آورد [۵۸].

۳.۲.۲ نگرش‌های شکست در برابر موفقیت

عملیات یك سیستم را از دو منظر می‌توان بررسی نمود: راه‌های مختلف موفقیت سیستم و مسیرهای منتهی به شکست آن. البته برای همه مسیرها، چه شکست و چه موفقیت، باید حالت‌های بینابین را نیز درنظر گرفت. به عنوان مثال حداقل شکست یا حداکثر موفقیت، به ترتیب در ابتدای طیف شکست و انتهای طیف موفقیت قرار می‌گیرد [۵۸]. شکل ۶.۲ رابطه بین طیف شکست و موفقیت را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، حداقل موفقیت قابل پیش‌بینی هم‌زمان با حداکثر شکست قابل پیش‌بینی همراه خواهد بود. در واقع طیف موفقیت تعبیر خوش‌بینانه و طیف شکست تعبیر بدبینانه از سیستم می‌باشد.

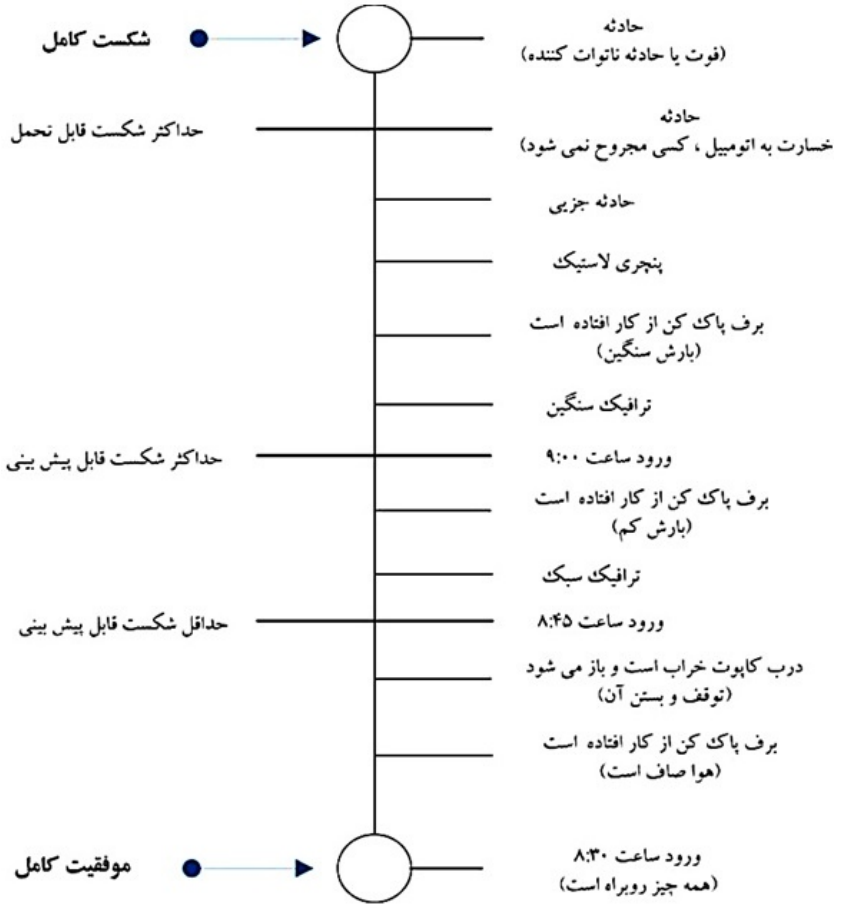


شکل ۶.۲: طیف شکست/موفقیت

[1] Quantitative Evaluation
[2] Quality Evaluation
[3] Minimal Cut Sets
[4] Top Event
[5] Basic Events

برای روشن تر شدن مطلب به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱.۲.۲. فردی را در نظر بگیرید که از خانه به سمت اداره حرکت می‌کند. ساعت ورود مطلوب او به اداره ۳۰ : ۸ است که دراین‌صورت با موفقیت کامل به اداره می‌رسد.



شکل ۷.۲: طیف شکست/موفقیت فردی از خانه تا اداره

حال فرض کنید که در بین راه با مشکلات جزیی هم‌چون باز بودن در کاپوت یا از کار افتادن برف‌پاک‌کن (به منظور تمیز کردن شیشه کثیف در حین رانندگی در هوای صاف و آفتابی) همراه می‌شود که این امر باعث می‌شود، فرد در ساعت ۴۵ : ۸ به محل کار برسد. در این‌صورت فرد در ابتدای حاشیه موفقیت (حداقل شکست پیش‌بینی) قرار دارد. به‌همین ترتیب فرد به‌دلیل مشکلاتی نظیر ترافیک سبک در مسیر موردنظر و هم‌چنین ازکارافتادن برف‌پاک‌کن (هوا کمی بارانی است) در ساعت ۰۰ : ۹ به محل کار می رسد. در این شرایط با حداکثر شکست قابل پیش بینی مواجه هستیم. همان‌طور که در شکل ۷.۲ نشان داده شده است، رویدادهایی که بعد از ورود در ساعت ۰۰ : ۹ قرار دارند مانند عدم کارایی برف پاک کن بسته به شرایط محیطی، پنچری لاستیک، ترافیک سنگین و حادثه بدون جراحت، با حداکثر شکست قابل تحمل (حداقل موفقیت قابل پیش‌بینی) همراه هستند که حتی ممکن است تا جراحت و مرگ فرد (شکست کامل)، ادامه یابد.

البته طیف شکست در بررسی سیستم، مرزهای تحلیل را به شکل واضح‌تری مشخص می‌کند و کمتر جای بحث و جدل باقی می‌گذارد. علی‌رغم وجود مسیرهای نامحدود منتهی به موفقیت یا شکست سیستم از نظر تئوری، مسیرهای موفقیت سیستم از نظر عملی بسیار بیشتر از مسیرهای شکست است. یعنی طیف شکست عملاً باریك‌تر از طیف موفقیت می‌باشد که این امر برای انجام محاسبات کمتر و ساده‌تر می‌باشد که بسیار ایده‌آل به‌نظر می‌رسد. به‌عبارت دیگر، طیف شکست به محاسبات احتمال وقوع رویدادها، برمی‌گردد. معمولا مقادیر احتمال شکست، بسیار کوچك هستند (کمتر از ۰/۱) که این مسئله به تقریب‌های کارآمد و دقیق در هنگام محاسبه احتمالات ترکیبی، کمك فراوانی می‌کند. در حالی‌که مقادیر احتمال رویدادهای موفقیت به عدد ۱ نزدیك‌تر بوده و این مسئله محاسبات تقریبی را بسیار پیچیده می‌کند.

تذکر ۱.۲.۲. درخت عیب یك روش جزءگرا می‌باشد. به این معنی که در روش‌های جزءگرا استدلال از کل به جزء است. در تحلیل سیستم با روش‌های جزءگرا و با فرض شکست سیستم (به هر طریقی)، سعی بر این است که زیرسیستم‌هایی که در این شکست، نقش داشته اند، شناسایی شوند.

۴.۲.۲ مراحل انجام تحلیل درخت عیب

۱. **شناخت سیستم:** در این مرحله سیستم تحت مطالعه به عنوان یك بلوك در نظر گرفته شده و در ابتدا ورودی‌ها و خروجی‌های آن مشخص می‌گردد.

۲. **انتخاب بخشی از سیستم:** در این مرحله بخشی از سیستم که بر اساس تجربه و سوابق دارای اشکال یا نقص است، انتخاب می‌گردد.

۳. **تعیین رویداد نامطلوب:** در بخش انتخاب شده یك رویداد نامطلوب که دارای عدد ریسك بالا بوده و وقوع آن آثار خسارت‌باری را بر روی سیستم می‌گذارد، به‌طور دقیق مشخص می‌گردد و رویداد رأس نامیده می‌شود.

۴. **رسم درخت عیب:** در این مرحله با استفاده از دروازه‌های منطقی و مجموعه‌ای از قواعد پایه، درخت عیب مرتبط با رویداد رأس تعیین شده در مرحله قبل، رسم می‌گردد.

۵. **مشخص نمودن مجموعه‌ی قطع‌کننده مینیمال** : بعد از رسم درخت عیب، با استفاده روش‌های ریاضی یا روش‌های گرافیکی، قطع‌کننده‌ی مینیمال مشخص شده و رویداد رأس بر حسب حاصل‌جمع این مجموعه‌های قطع‌کننده نوشته می‌شود.

۶. **محاسبه احتمال وقوع رویداد رأس** : در این مرحله با استفاده از اطلاعات و جداول مربوط به نرخ خرابی تجهیزات و نیز داده‌های مربوط به خطاهای انسانی، احتمال وقوع رویداد رأس محاسبه می‌گردد.

۷. **تعیین و رتبه‌بندی رویدادهای فرعی** : تمامی رویدادهایی که باعث رسیدن به رویداد راس می‌شوند را شناسایی می‌کنیم و درصورت لزوم این رویدادها را باتوجه به احتمال وقوع آن‌ها رتبه‌بندی می‌کنیم.

۸. **رتبه‌بندی قطع‌کننده‌های مینیمال** : رویدادهای فهرست شده در مرحله قبل، هریك شامل مجموعه ای از قطع‌کننده‌های مینیمال هستند که حاصل‌جمع عدد احتمال این قطع‌کننده‌ها، احتمال بروز رویداد فرعی موردنظر را به‌دست می‌دهد.

۹. **تحلیل سیستم** : در این مرحله با استفاده از جداول ثبت شده در مرحله قبل، با شروع از اولین قطع‌کننده‌ی مینیمال که در صدر جدول اولین رویداد فرعی قرار دارد، به بررسی رویداهای پایه آن قطع‌کننده می‌پردازیم.

۱۰. **بررسی اقدامات اصلاحی**: اقدامات اصلاحی برای کاهش نرخ خرابی تجهیزات، در این مرحله مورد بررسی قرار گرفته و دربرگه‌ای با عنوان '' اقدامات اصلاحی '' ثبت می‌گردد. در این برگه علاوه بر ثبت، اقدام، چگونگی پیگیری انجام آن نیز، مشخص می‌گردد.

۵.۲.۲ مدل‌سازی درخت عیب

به‌دلیل پیچیده بودن ساختار و عمل‌کرد درخت عیب برای راحتی و فهم مطلب از دروازه‌ها[1] استفاده می‌کنند که هر کدام از این دروازه‌ها می‌توانند با چند ورودی و فقط یک خروجی همراه باشند. این دروازه‌ها روابطی از رخدادهای مورد نیاز برای اتفاق افتادن را نشان می‌دهند.

دو نوع دروازه پایه و اصلی در درخت عیب، دروازه AND و دروازه OR می‌باشند. انواع دیگر دروازه‌ها حالت‌های خاصی از این دو نوع دروازه پایه هستند که در ادامه به بررسی این نوع دروازه‌ها می‌پردازیم.

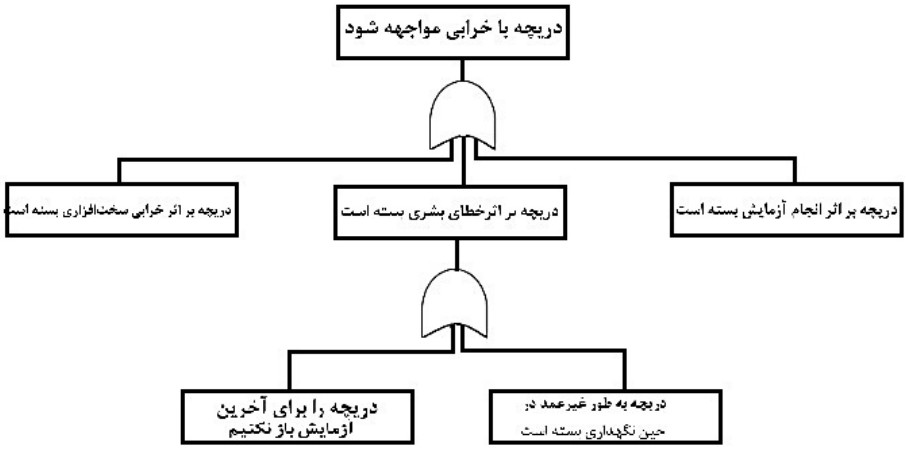
تعریف ۱.۲.۲. (دروازه OR) در صورتی‌که شرط وقوع رویداد خروجی دروازه، وقوع حداقل یکی از رویدادهای ورودی باشد، از دروازه OR استفاده می‌شود. این دروازه می‌تواند دارای تعداد ورودی‌های دلخواه باشد. به‌عبارت دیگر، اگر چندین رویداد ممکن را به‌عنوان چند ورودی دروازه درنظر بگیریم، آن‌گاه برای رسیدن به خروجی موردنظر، کافی است حداقل یکی از این رویدادها رخ بدهد. شکل دروازه OR به‌صورت شکل ۸.۲ می‌باشد.

مثال ۲.۲.۲. دریچه‌ای را در نظر بگیرد که به‌واسطه سه عامل عیب سخت‌افزاری سیستم، انجام آزمایش‌های مربوطه و خطاهای انسانی به‌درستی عمل نمی‌کند. علاوه برآن خطاهای انسانی نیز خود به دو صورت عمد و یا غیرعمد رخداد می‌کنند.

باتوجه به شکل ۹.۲ و شرایط ذکر شده، بر اساس خواص دروازه OR، دریچه در صورتی دچار خرابی خواهد شد، که حداقل یکی از دو عامل خرابی بسته شدن دریچه بر اثر آزمایش و

[1] Gates

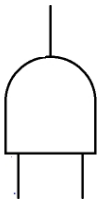
شکل ۸.۲: دروازه OR



شکل ۹.۲: مدل درخت عیب خرابی یک دریچه با استفاده از دروازه OR

عیب سخت‌افزاری رخ بدهد. هم‌چنین بسته شدن دریچه ناشی از خطای بشری خود دارای دو علت بسته شدن آن به‌صورت عمد و غیرعمد می‌باشد که رخ دادن هر یک از این دو خرابی نیز باعث خرابی کل سیستم (دریچه) می‌شود.

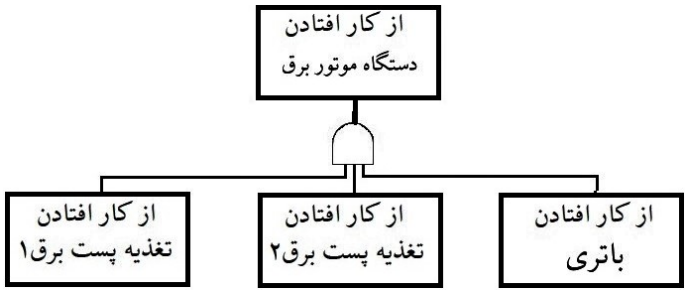
تعریف ۲.۲.۲. (دروازه AND) در این دروازه وقوع رویداد خروجی مشروط به وقوع هم‌زمان تمامی رویدادهای ورودی ممکن، می‌باشد. دروازه AND نیز همانند دروازه OR می‌تواند به اندازه دلخواه، ورودی داشته باشد. این دروازه برخلاف دروازه OR زمانی با خروجی همراه است که تمامی‌رویدادهای ورودی هم‌زمان رخ دهند. در این نوع دروازه‌ها معمولا وابستگی‌هایی بین ورودی‌ها وجود دارد. شکل دروازه AND به‌صورت شکل ۱۰.۲ می‌باشد.



شکل ۱۰.۲: دروازه AND

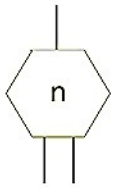
اگر بخواهیم وقوع رویدادی را با دروازه AND توصیف کنیم، باید تمامی وابستگی‌های بین ورودی‌ها به‌طور واضح بیان شود. چرا که این وابستگی‌ها در ارزیابی‌های بعدی درخت و بر منطق جاری سیستم، تاثیر خواهد داشت.

مثال ۳.۲.۲. فرض کنید که دستگاه موتور برق زمانی که از کار بیفتد، خروجی موردنظر را خواهیم داشت. همان‌طور که در شکل ۱۱.۲ نشان داده شده است، دستگاه موتور برق زمانی از کار می‌افتد که هر سه عامل باتری، تغذیه پست برق یک و تغذیه پست برق دو هم‌زمان از کار بیفتند. در این‌صورت با خرابی کل دستگاه روبه‌رو می‌شویم.



شکل ۱۱.۲: مدل درخت عیب دستگاه موتور برق با استفاده از دروازه AND

تعریف ۳.۲.۲. (دروازه ترکیبی [1]) این دروازه با یك شش ضلعی منتظم و یك عدد، نشان داده می‌شود (شکل ۱۲.۲). در مواقعی که ترکیب خاصی از چند رویداد باعث وقوع رویداد دیگری می‌شود، به جای استفاده از دروازه‌های AND و OR متعدد، به‌راحتی می‌توان تنها از یك دروازه ترکیبی استفاده نمود.

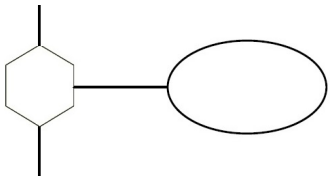


شکل ۱۲.۲: دروازه ترکیبی

تعریف ۴.۲.۲. (دروازه بازدارنده [2]) این دروازه حالت خاصی از دروازه AND است. خروجی دروازه تنها یك ورودی دارد؛ اما وقوع رویداد خروجی به‌صورت مشروط می‌باشد. یعنی رویداد خروجی وقتی رخ می‌دهد که رویداد ورودی تحت شرایطی، رخ دهد. رویدادی که به عنوان شرط در سمت راست نماد دروازه نوشته می‌شود را ورودی شرطی می‌نامند که به‌صورت بیضی نمایش می‌دهند. نمایش گرافیکی دروازه بازدارنده به‌صورت شکل ۱۳.۲ می‌باشد.

مثال ۴.۲.۲. بسیاری از واکنش‌های شیمیایی تنها زمانی انجام می‌پذیرند که کاتالیزورها نیز در آن واکنش حضور داشته باشند. حضور کاتالیزورها شرطی است که بعد از آماده شدن مواد برای انجام واکنش اضافه می‌شوند. در واقع کاتالیزورها ابتدا در واکنش شرکت داده نمی‌شوند، اما حضور آن‌ها برای کامل شدن واکنش‌های شیمیایی کاملا ضروری هستند. کاتالیزورها درواقع نقش ورودی شرطی را ایفا می‌کنند.

[1] Combination Gate
[2] Inhibit Gate

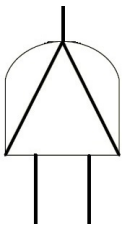


شکل ۱۳.۲: دروازه بازدارنده

تعریف ۵.۲.۲. (دروازه OR انحصاری [۱]) این دروازه حالت خاصی از دروازه OR می‌باشد. در درخت عیب معمولاً این دروازه دارای دو ورودی است. رویداد خروجی دروازه زمانی رخ می‌دهد که تنها یکی از رویدادهای ورودی رخ دهند. شکل ۱۴.۲ نمایی از دروازه OR انحصاری با دو رویداد ورودی را نشان می‌دهد. تفاوت این دروازه با دروازه OR در این است که رویدادها جمع‌پذیر نیستند. یعنی شرط وقوع رویداد خروجی Q، رخداد رویداد A یا B و نه هر دو است.

شکل ۱۴.۲: دروازه OR انحصاری

تعریف ۶.۲.۲. (دروازه AND اولویت‌دار [۲]) دروازه AND اولویت دار حالت خاصی از دروازه AND است با این تفاوت که رویدادهای ورودی بایستی با ترتیب معینی رخ دهند تا رویداد خروجی رخ دهد. نشان دادن این ترتیب در حالت معمولی با استفاده از رویداد شرطی در سمت راست گراف، می‌باشد. اما استفاده از دروازه AND اولویت‌دار کار را ساده‌تر می‌کند و ترتیب از چپ به راست به‌طور ضمنی درآن نهفته است. شکل ۱۵.۲ دروازه AND اولویت‌دار را نمایش می‌دهد.

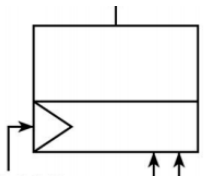


شکل ۱۵.۲: دروازه AND اولویت‌دار

تعریف ۷.۲.۲. (دروازه وابستگی عملکردی [۳]) این دروازه را با $FDEP$ نمایش می‌دهند و متشکل از یک رویداد ماشه / راه‌انداز (یک رویداد اساسی یا خروجی یک دروازه دیگر) و

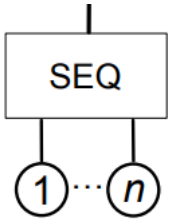
[1] Exclusive-OR Gate
[2] Priority-AND Gate
[3] Functional Dependency Gate

مجموعه‌ای از رویدادهای وابسته است. رویدادهای اساسی وابسته از لحاظ عملکردی به رویداد راه‌انداز وابسته هستند. هنگامی که رویداد ماشه اتفاق می‌افتد، رویدادهای اساسی وابسته مجبور به رخ دادن هستند. دروازه $FDEP$ به مدل سازی یک سناریو در زمانی که کارکردهای برخی از اجزا (مولفه ها) سیستم وابسته به عملیات یک جز (مولفه) هستند، کمک می‌کند. به عنوان مثال، اگر یک منبع تغذیه منفرد برای تامین برق بسیاری از اجزای سیستم مورد استفاده قرار گیرد، شکست تامین برق منجر به شکست همه اجزای وابسته خواهد شد. شکل ۱۶.۲ دروازه $FDEP$ را نمایش می‌دهد.



شکل ۱۶.۲: دروازه وابستگی عملکردی

تعریف ۸.۲.۲. (دروازه اجرای توالی[1]) این دروازه را با SEQ نمایش می‌دهند. دروازه SEQ ورودی‌های خود را مجبور به شکست در نظم خاصی (از نظر گرافیکی ، از چپ به راست) می‌کند. دروازه SEQ اجازه می‌دهد تا رویدادها فقط در یک ترتیب از پیش تعیین شده اتفاق بیفتند و در یک ترتیب شکست متفاوت رخ ندهد. شکل ۱۷.۲ دروازه SEQ را نمایش می‌دهد.

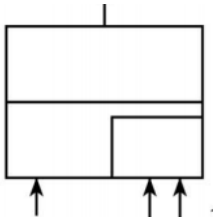


شکل ۱۷.۲: دروازه اجرای توالی

تعریف ۹.۲.۲. (دروازه قطعات یدکی[2]) این دروازه را با $SPARE$ نمایش می‌دهند. در دروازه $SPARE$ یکی از رویدادهای اساسی (چپ ترین) به عنوان مولفه اصلی عمل می‌کند و دیگر رویدادها به عنوان اجزای پشتیبان ثانویه عمل می‌کنند. این دروازه یک سناریو را مدل می‌کند که در آن قطعات یدکی در یک توالی فعال می‌شوند، یعنی اگر دو جز اضافی وجود داشته باشد، در صورتی که مولفه اصلی شکست بخورد، چپ‌ترین مولفه یدکی فعال می‌شود؛ اگر ذخیره اول شکست بخورد، ذخیره دوم فعال خواهد شد و غیره. دروازه $SPARE$ می تواند سه نوع قطعات یدکی را مدل کند: قطعات یدکی سرد ، قطعات یدکی گرم و قطعات یدکی داغ. در حالت یدکی سرد، قطعات یدکی غیرفعال می‌شوند تا زمانی که در هر نوع عملیات سیستم مورد نیاز باشد.

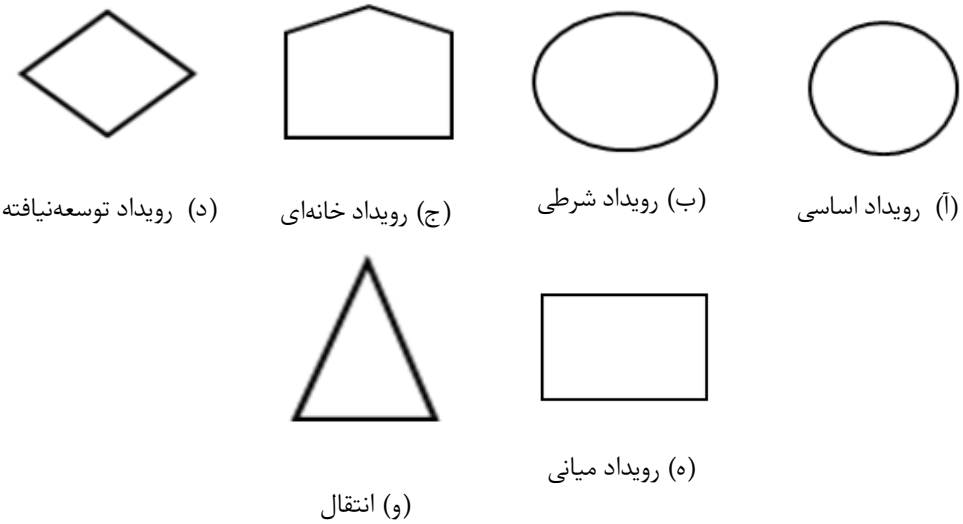
[1]Sequence Enforcing Gate
[2]Spare Gate

در مقابل، در حالت ذخیره داغ، قطعات یدکی همیشه فعال نگهداشته می‌شوند اما تنها زمانی عملکرد خود را اجرا می‌کنند که بخش اصلی شکست بخورد. در حالت یدکی گرم، قطعات یدکی نه روشن هستند و نه خاموش، در عوض بین این دو حالت نگهداری می‌شوند، یعنی اجزا در حالت آمادگی کاهش‌یافته تا زمانی که مورد نیاز باشد نگهداری می‌شوند. چندین دروازه $SPARE$ می‌توانند انبوهی از قطعات یدکی را به اشتراک بگذارند. در این حالت ، اگر مؤلفه اصلی هر یک از دروازه های $SPARE$ از کار بیفتد ، آن را با اولین مؤلفه یدکی موجود جایگزین می کند (یعنی، نه شکست خورده و نه قبلاً توسط یک دروازه $SPARE$ دیگر اشغال شده است). فرض کنید λ نرخ شکست یک مولفه است و سپس نرخ شکست به $\alpha\lambda$ تغییر می‌کند در حالی که به عنوان یک قطعه یدکی استفاده می‌شود. اگر $\alpha = ۰$ قطعه یدکی یک قطعه یدکی سرد است، اگر $\alpha = ۱$ قطعه یدکی یک قطعه یدکی داغ است درغیر اینصورت برای حالتی که $۰ < \alpha < ۱$ یک قطعه یدکی گرم است. شکل ۱۸.۲ دروازه $SPARE$ را نمایش می‌دهد.



شکل ۱۸.۲: دروازه قطعات یدکی

نمادهای منطقی درخت عیب (دروازه‌ها) به‌صورت گرافیکی در بخش ۵.۲.۲ نمایش داده شده‌اند. در ادامه رایج‌ترین نماد رویدادهای درخت عیب در شکل ۱۹.۲ نشان داده شده است.



(آ) رویداد اساسی (ب) رویداد شرطی (ج) رویداد خانه‌ای (د) رویداد توسعه‌نیافته

(ه) رویداد میانی

(و) انتقال

شکل ۱۹.۲: نماد رویدادهای درخت عیب

۶.۲.۲ مباحث تکمیلی در تحلیل درخت عیب

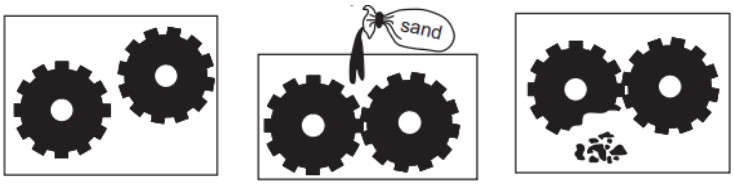
خطای یک جزء و خطای یک سیستم

خطای یک جزء عبارت است از خطایی که علت آن فقط یک جزء و یا یک قطعه باشد. خطای سیستمی بیان می‌کند که علت ایجاد این خطا از یک جزء بیشتر است. حالت خرابی یک شیر را می‌توان خرابی یک جزء نامید زیرا علت آن فقط مرتبط با خود شیر است نه جزء دیگری و حالت خرابی کار کردن بی‌موقع یک پمپ را خرابی سیستمی می‌توان در نظر گرفت. زیرا علت بی‌موقع کارکردن یک پمپ می‌تواند بخاطر خرابی پمپ یا خرابی در سیستم برقی فرمان یا دیگر سیستم‌های مرتبط باشد.

رویدادهایی با حالت خرابی یک جزء توسط یک دروازه OR و یا یک رویداد اولیه مدل می‌شوند. به عنوان مثال، خرابی شیر با استفاده از یک دروازه OR به خرابی شیر و خطا در فعال‌سازی شیر تقسیم می‌شود. رویدادهایی با حالت خرابی یک سیستم می‌تواند با تمامی دروازه‌ها مدل شود.

گروه‌بندی خطاها و خرابی‌ها: اولیه، ثانویه و فرمان

به آن دسته از خرابی و خطاهایی که در شرایط عادی و قابل تحمل سیستم رخ دهند خرابی اولیه گفته می‌شود. این خرابی و خطا در زمانی که سیستم در شرایط ساده‌تری نسبت به شرایط طراحی و بحرانی در حال کار است رخ می‌دهد. به عنوان مثال انفجار مخزن تحت فشار در فشار کمتری از فشار قابل تحمل آن (فشار طراحی شده آن) یک خرابی اولیه محسوب می‌شود $(P < P_0)$. خرابی ثانویه نیز عبارتست از خرابی یک جزء در شرایطی که سیستم برای آن طراحی نشده باشد $(P > P_0)$. خرابی ثانویه معمولا به علت شرایط خارجی نامناسب رخ



(آ) خطای اولیه (ب) خطای ثانویه (ج) خطای فرمان

شکل ۲۰.۲: حالت‌های شکست سیستم

می‌دهد. خطای فرمان نیز به خطاهایی گفته می‌شود که به علت خطا در سیستم‌های کنترلی و فرمان‌دهی رخ داده‌اند. شکل ۲۰.۲ شماتیکی از خطاهای مذکور را نشان می‌دهد.

تفاوت بین خطا و خرابی

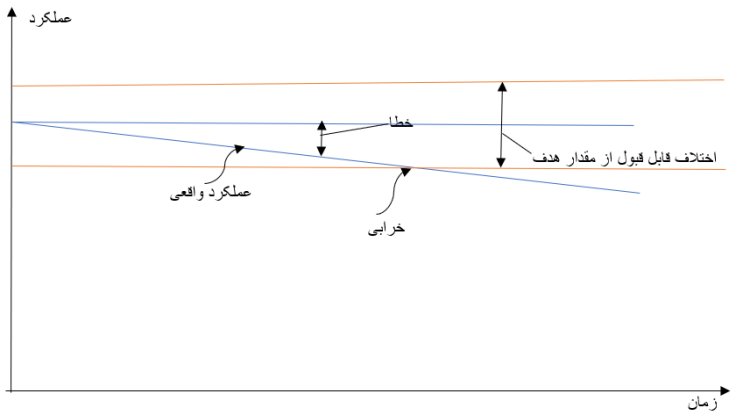
خرابی: عملکرد یک سیستم به صورت کمتر از حد مورد نیاز را خرابی می‌نامند. برخی مراجع نیز عدم (پایان) توانایی یک سیستم یا قطعه برای انجام تابع درخواست شده یا مورد انتظار را خرابی می‌نامند.

خطا: اختلاف در عملکرد واقعی یک سیستم با عملکرد مورد انتظار را خطا می‌نامند.

تفاوت بین این دو واژه در شکل ۲۱.۲ ارائه شده و برای درک بهتر اختلاف بین این دو واژه، مثال زیر را در نظر بگیرید.

یک پمپ را در نظر بگیرید که عملکرد مورد نیاز از این پمپ انتقال آب با دبی ۹۰ تا ۱۱۰ لیتر بر دقیقه بوده و عملکرد مورد انتظار آن ۱۰۰ لیتر بر دقیقه باشد. حال اگر پمپ آب را خارج از محدوده ۹۰ تا ۱۱۰ لیتر بر دقیقه انتقال دهد گفته می‌شود سیستم دچار خرابی شده است. خطا نیز بیان‌کننده اختلاف دبی آب انتقال یافته شده با دبی ۱۰۰ لیتر بر دقیقه در نظر گرفته می‌شود.

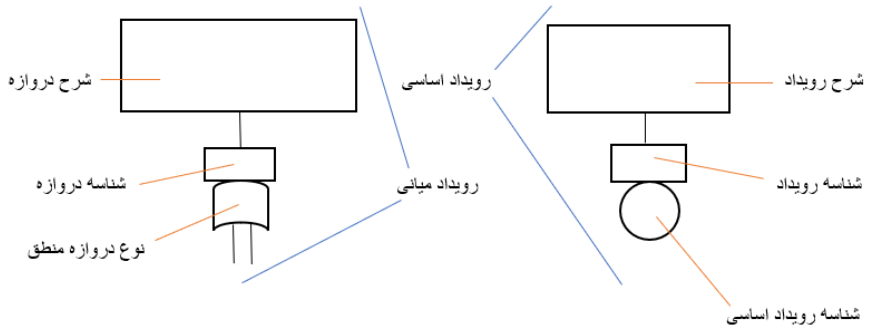
واژه ''خرابی'' مفهوم گسترده‌تری نسبت به واژه ''خطا'' دارد. به صورت کلی می‌توان بیان کرد که تمامی خرابی‌ها خطا می‌باشند اما یک خطا می‌تواند خرابی نباشد.



شکل ۲۱.۲: تفاوت بین خطا و خرابی

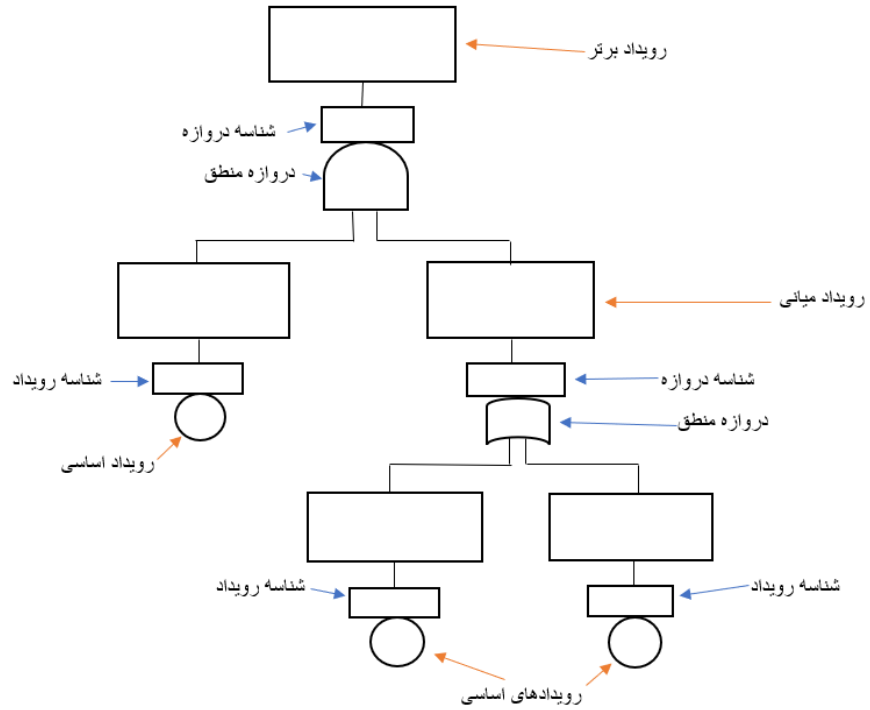
فرمت نام‌گذاری در درخت عیب

برای محاسبه کوچک‌ترین یا کوتاه‌ترین مسیر شکست و احتمالات موجود و سادگی درخت عیب ضروری است که دروازه‌ها و رویدادها اسم‌گذاری شوند. اسم‌گذاری به صورت ترکیب دو کلمه و یک عدد سه رقمی می‌باشد. (''عدد سه رقمی''+''کلمه سه رقمی''مثال REC۰۰۹).
در ادامه نمونه‌ای از نام‌گذاری رویداد و دروازه به‌صورت نمادین در شکل ۲۲.۲ آمده است.



شکل ۲۲.۲: نام‌گذاری رویدادها و دروازه‌ها

نمونه‌ای از ساختار درخت عیب به صورت نمادین در شکل ۲۳.۲ مشخص شده است.



شکل ۲۳.۲: ساختار درخت عیب

حال قبل از مثال تکمیلی که در این بخش تشریح خواهد شد، ابتدا به توضیح مختصری درباره عبارات جبربولی و کاربرد آن در تحلیل درخت عیب می‌پردازیم.

۷.۲.۲ جبر بولی و کاربرد آن در تحلیل درخت عیب

قوانین جبر بولی [۱] و قواعدی که در این بخش خواهد آمد، کاربرد وسیعی در ارزیابی کمی درخت عیب دارد. در حقیقت درخت عیب، تصویری از ارتباطات منطقی بین رویدادهایی است که به رویداد رأس می‌رسند و می‌توان این ارتباطات را به شکل معادلات جبری درآورد. بنابراین با تسلط بر قوانین جبر بولی می‌توان ارزیابی کیفی و کمی ریسك را به خوبی انجام داد و منطق حاکم بر درخت را تفسیر نمود. عمده‌ترین کاربرد جبر بولی در هنگام پیاده‌سازی کمی درخت عیب و نوشتن معادلات، مربوط به مجموعه قطع‌کننده‌ها و ساده‌سازی آن‌ها است. در واقع با ساده کردن این معادلات، مجموعه‌های قطع‌کننده مینیمال مشخص خواهند شد.

جدول ۱.۲: برخی از قوانین جبر بولی

شرح	نمایش مهندسی	نمایش ریاضی
قانون جابجایی	$X \cdot Y = Y \cdot X$	$X \cap Y = Y \cap X$
قانون جابجایی	$X + Y = Y + X$	$X \cup Y = Y \cup X$
قانون شرکت‌پذیری	$X \cdot (Y \cdot Z) = (X \cdot Y) \cdot Z$	$X \cap (Y \cap Z) = (X \cap Y) \cap Z$
قانون شرکت‌پذیری	$X + (Y + Z) = (X + Y) + Z$	$X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$
قانون توزیع‌پذیری	$X \cdot (Y + Z) = (X \cdot Y) + (X \cdot Z)$	$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$
قانون توزیع‌پذیری	$X + (Y \cdot Z) = (X + Y) \cdot (X + Z)$	$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$
قانون جذب	$X \cdot (X + Y) = X$	$X \cap (X \cup Y) = X$
قانون جذب	$X + (X \cdot Y) = X$	$X \cup (X \cap Y) = X$
قانون همانی	$X + X = X$	$X \cup X = X$
قانون همانی	$X \cdot X = X$	$X \cap X = X$

شرح مختصری از قوانین حاکم بر جبر بولی در این بخش آورده شده است. همان‌طورکه در جدول ۱.۲ می‌بینیم اشتراک دو مجموعه یا دو عضو به‌صورت ریاضی، متناظر با ضرب آن دو در نمایش مهندسی می‌باشد که در تحلیل درخت عیب، این ضرب نقش دروازه AND را ایفا می‌کند و هم‌چنین اجتماع دو مجموعه یا دو عضو نیز به‌صورت جمع آن دو است که در تحلیل درخت عیب همان دروازه OR می‌باشد. پرکاربردترین قانون جبر بولی در تحلیل درخت عیب قانون جابجایی[۲]، قانون جذب[۳] و قانون همانی می‌باشد. قوانین شرکت‌پذیری[۴] و توزیع‌پذیری[۵] نیز با توجه به نوع مساله موردنظر مورد استفاده قرار می‌گیرد. قوانین دیگر جبر بولی مانند متمم‌گیری، نظریه دمورگان، عملیات با تهی و مرجع و ... نیز وجود دارند که در درخت عیب کمتر از آن‌ها استفاده می‌شود.

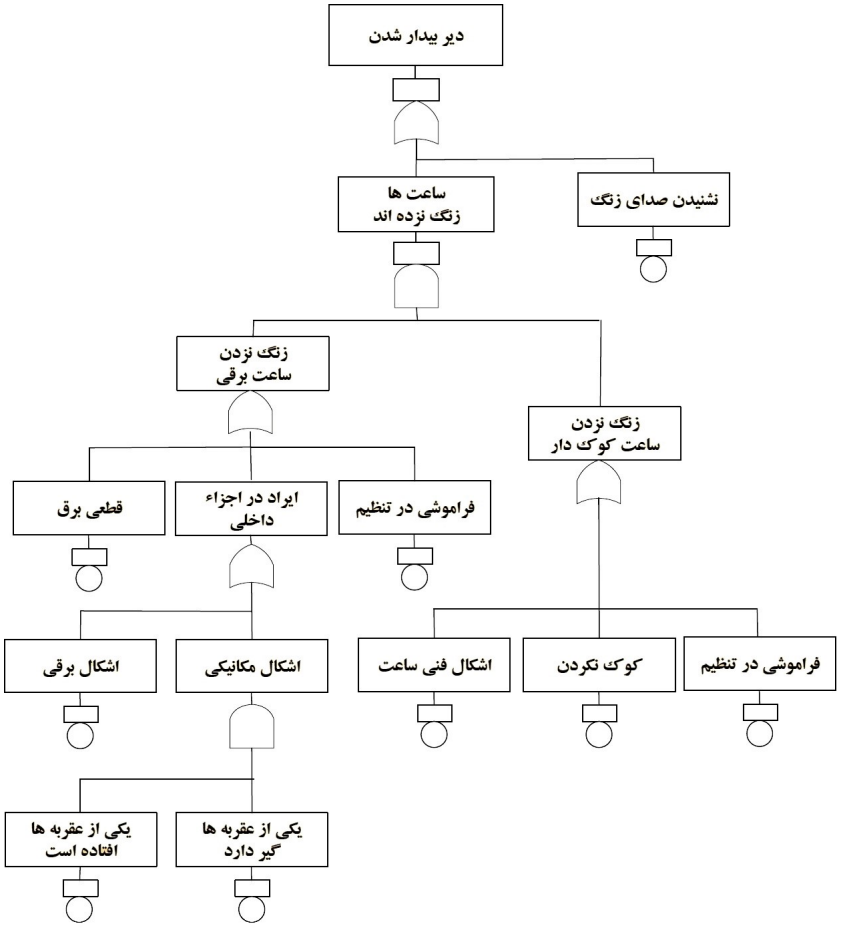
مثال ۵.۲.۲. فرض کنید فردی به جزء ایام تعطیل و مرخصی، بایستی هر روز ساعت ۶ صبح از خواب بیدار شود و بعد از آماده شدن و صرف صبحانه، منزل را ساعت ۳۰ : ۶ دقیقه ترك

[1] Boolean algebra Law
[2] Commutative Law
[3] Absorption Law
[4] Associative Law
[5] Distributive Law

کند تا به سرویس برسد. این فرد یك ساعت برقی عقربه‌دار دارد که هر شب زنگ بیدارباش آن را برای ساعت ۶ تنظیم می‌کند. او برای اطمینان ساعت دیگری را تهیه کرده که شماطه‌دار است و برای فعال کردن زنگ آن، بایستی تنظیم و کوك شود. این ساعت را نیز برای ساعت ۶:۰۵ دقیقه کوك می‌کند.

شرح درخت

دیر بیدار شدن فرد از خواب را به‌عنوان رویداد رأس انتخاب می‌کنیم. برای رسم درخت سعی می‌کنیم که از تمامی قواعد رسم، پیروی کنیم. به‌عنوان مثال در منطق درخت عیب نباید انتظار معجزه یا یك اتفاق عجیب و غریب را داشته باشیم. مثلاً تصور کنیم، فرد مزبور علی‌رغم کار نکردن ساعت‌ها، به‌دلیل وقوع آتش‌سوزی در ساختمان مجاور و سروصدای زیاد خودروهای آتش‌نشانی بیدار شده است. یا این‌که یکی دیگر از ساکنین خانه به‌دلیل این‌که گرفتار یك کابوس وحشتناك شده، درست سر ساعت ۶ با فریاد دلهره‌آوری از خواب بیدار می‌شود.



شکل ۲۴.۲: نمودار درخت عیب دیر بیدار شدن فرد از خواب

ارزیابی کیفی

نمایش گرافیکی نمودار درخت عیب در شکل ۲۴.۲ نشان داده شده است. برای ارزیابی بهتر و آسان‌تر و جلوگیری از اشتباه در درخت عیب نیاز به نام‌گذاری رویدادهای پایه و دروازه‌ها می‌باشیم. شکل ۲۵.۲ درخت عیب با علائم نام‌گذاری شده را نشان می‌دهد. رویدادها را در جدول ۲.۲ نام‌گذاری می‌کنیم.

حال رویداد رأس را برحسب رویدادهای پایه اش می‌نویسیم. در استفاده از روش دروازه، از طریق دو راه می‌توانیم به جواب برسیم. ابتدا بسط دروازه‌ها از پایین به بالا و سپس بسط دروازه‌ها از بالا به پایین. در اینجا هر دو راه را امتحان می‌کنیم.

بسط رویدادهای دروازه از پایین به بالا:

$$S = A.B$$

$$U = S + C = C + A.B$$

$$V = D + E_1 + U = D + E_1 + C + A.B$$

$$W = F + G + E_2$$

$$X = V.W = (D + E_1 + C + A.B).(F + G + E_2)$$

$$= E_1.F + E_1.G + E_1.E_2 + D.F + D.G + D.E_2$$

$$+C.F + C.G + C.E_2 + A.B.F + A.B.G + A.B.E_2$$

$$T = X + K = K + E_1.F + E_1.G + E_1.E_2 + D.F + D.G + D.E_2 + C.F + C.G + C.E_2$$

$$+A.B.F + A.B.G + A.B.E_2$$

بسط رویدادهای دروازه از بالا به پایین:

$$T = X + K$$

$$X = V.W$$

$$T = V.W + K$$

$$V = D + E_1 + U$$

$$W = F + G + E_2$$

$$T = (D + E_1 + U).(F + G + E_2) + K$$

$$T = K + E_1.F + E_1.G + E_1.E_2 + D.F + D.G + D.E_2 + U.F + U.G + U.E_2$$

$$U = S + C$$

$$T = K + E_1.F + E_1.G + E_1.E_2 + D.F + D.G + D.E_2 + S.F + S.G + S.E_2 + C.F + C.G + C.E_2$$

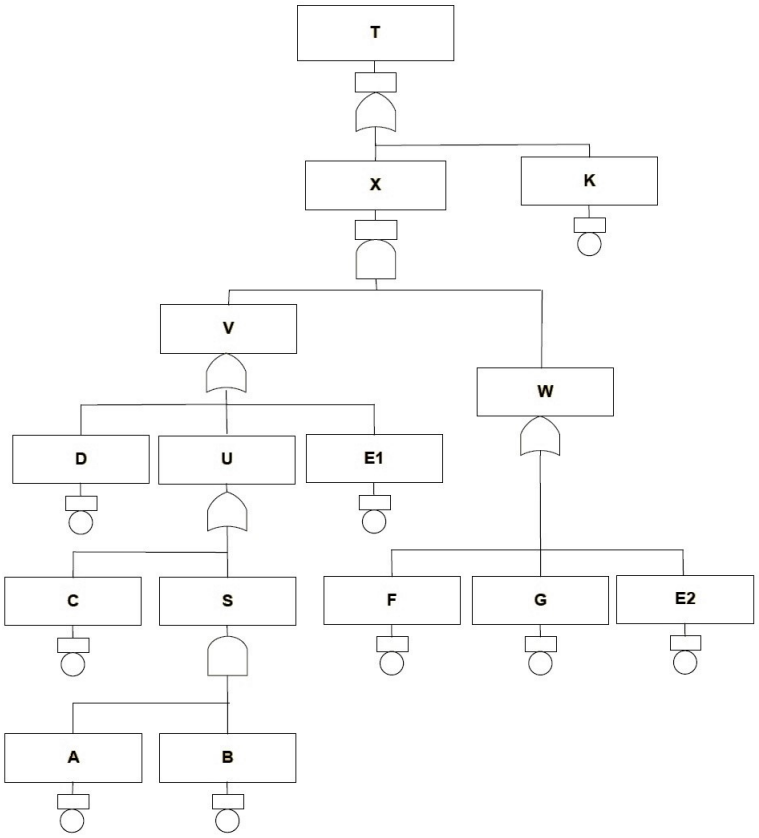
$$S = A.B$$

$$T = K + E_1.F + E_1.G + E_1.E_2 + D.F + D.G + D.E_2 + C.F + C.G + C.E_2 + A.B.F + A.B.G$$

$$+A.B.E_2$$

جدول ۲.۲: رویدادهای درخت عیب دیر بیدار شدن فرد از خواب

نام‌گذاری رویدادها	عوامل دیر بیدار شدن فرد از خواب
A	یکی از عقربه‌ها افتاده است
B	یکی از عقربه‌ها گیر دارد
C	اشکال برقی
D	قطعی برق
E_1	فراموشی در تنظیم ساعت برقی
E_2	فراموشی در تنظیم ساعت شماطه‌دار
F	اشکال فنی ساعت شماطه‌دار
G	کوك نکردن ساعت شماطه‌دار
K	نشنیدن صدای زنگ
S	اشکال مکانیکی ساعت برقی
U	ایراد در اجزاء داخلی
V	زنگ نزدن ساعت برقی
W	زنگ نزدن ساعت شماطه‌دار
X	ساعت‌ها زنگ نزده‌اند
T	دیر بیدار شدن



شکل ۲۵.۲: درخت عیب نام‌گذاری شده

همان‌طور که مشاهده می‌شود، نتیجه نهایی رویداد راس در هر دو روش، برابر است. برای ارزیابی کیفی باید رویداد رأس را بر حسب مجموعه قطع‌کننده‌های مینیمال نوشت و سپس قطع‌کننده‌ها را از نظر ترکیب و تعداد رویدادهای پایه، بررسی نمود. قطع‌کننده‌هایی که تنها یك رویداد پایه دارند (قطع‌کننده تکی) به‌خصوص اگر عدد احتمال وقوع آن‌ها در مقابل بقیه‌ی قطع‌کننده‌ها قابل قیاس باشند، اهمیت خاصی در ارزیابی کیفی را دارا می‌باشند.

در نتیجه بالا، تنها قطع‌کننده تکی، رویداد K است که از همان ابتدا جلب توجه می‌کند. اهمیت این رویداد در این است که اگر این رویداد در هر زمانی رخ بدهد، بدون واسطه سبب بروز رویداد رأس می‌شود. شرح این رویداد عبارت است از: K =نشنیدن صدای زنگ.

نشیدن صدای زنگ به علت کری شبانه ناشی از خواب عمیق است. فرض ما بر این است که فرد موردنظر، شب قبل به موقع خوابیده و به صدای زنگ حساس است. بنابراین، احتمال نشنیدن صدای زنگ خیلی کم است.

ارزیابی کمی

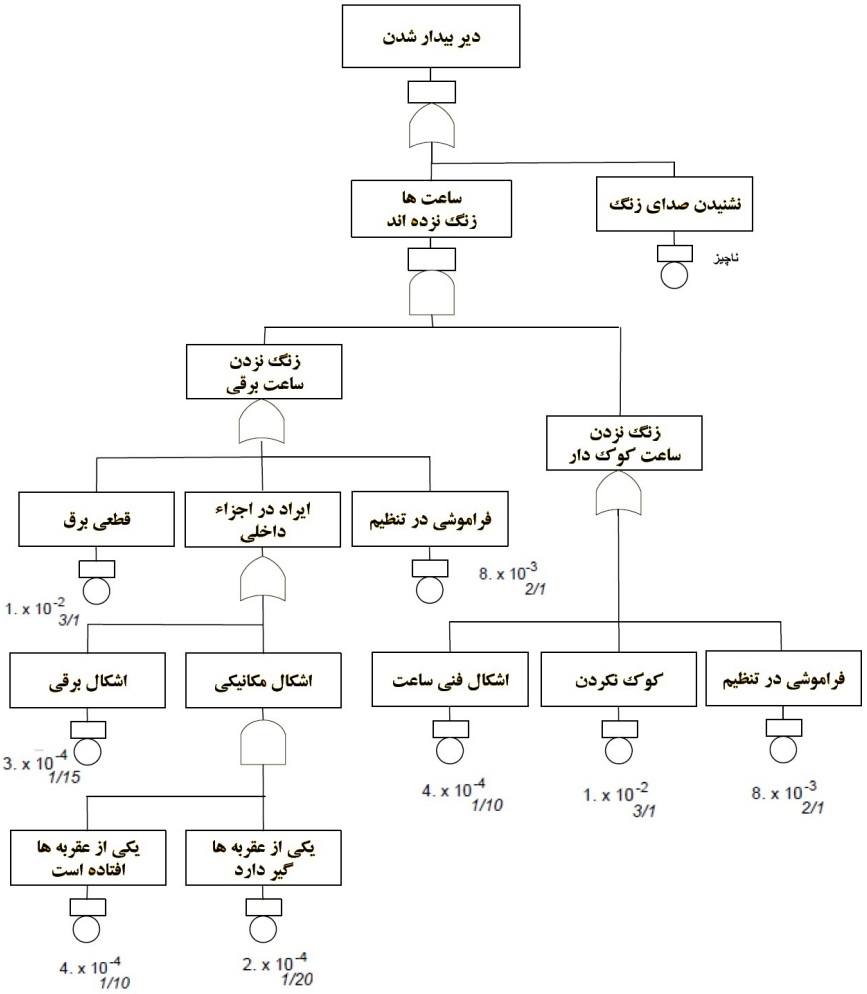
برای انجام ارزیابی کمی نیاز به اطلاعات نرخ خرابی رویدادهای پایه و تبدیل آن‌ها به احتمال خرابی می‌باشیم. در شکل ۲۶.۲ نرخ خرابی رویدادها در کنار شناسه آن‌ها، نوشته شده است. فرض بر این است که کارمند موردنظر ما در مدت یك سال، ۲۶۰ روز به محل کار می‌رود. در کنار هر رویداد دو عدد دیده می‌شود که عدد پایینی نرخ خرابی رویدادها است. مثلاً ۱/۲۰ به معنی یك بار شکست در ۲۰ سال است و عدد بالایی احتمال شکست رویداد بر حسب تعداد عیب در روز (یا در هربار استفاده) است. به‌عنوان مثال برای یك‌بار شکست در ۲۰ سال، این‌گونه محاسبه می‌شود:

$$۲۰ \times ۲۶۰ = ۵۲۰۰$$

تعداد روزهایی که در ۲۰ سال از ساعت استفاده می‌شود

$$\frac{۱}{۵۲۰۰} \simeq ۲ \times ۱۰^{-۴}$$

احتمال شکست بقیه رویدادها نیز به‌همین شکل محاسبه می‌شود. برای محاسبه احتمال وقوع رویداد رأس (یعنی دیر بیدار شدن فرد)، باید مقدار $P(T)$ را محاسبه کنیم. برای این‌کار باید احتمال T را که، مقدار T در ارزیابی کیفی به‌دست آورده بودیم، محاسبه کنیم.



شکل ۲۶.۲: نرخ خطای مربوط به رویدادهای پایه

همچنین براساس قانون جمع احتمالات و آن‌چه در بخش ۷.۲.۲ گفته شد، داریم

$$P(T) = P(K + E_۱.F + E_۱.G + E_۱.E_۲ + D.F + D.G + D.E_۲ + C.F + C.G + C.E_۲ + A.B.F + A.B.G + A.B.E_۲)$$

$$P(T) = P(K) + P(E_۱.F) + P(E_۱.G) + P(E_۱.E_۲) + P(D.F) + P(D.G) + P(D.E_۲) + P(CF) + P(C.G) + P(C.E_۲) + P(A.B.F) + P(A.B.G) + P(A.B.E_۲) - \theta$$

مقدار θ براساس قانون جمع احتمالات محاسبه می‌شود. به‌عنوان مثال، طبق این قانون اگر A و B دو رویداد دلخواه مستقل باشند داریم

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B)$$

بنابراین، برای احتمال جمع دو رویداد، مقدار θ برابر است با:

$$\theta = P(A).P(B)$$

با افزایش تعداد رویدادها، باید عبارت مفصل‌تری برای θ نوشت. در این حالت θ برابر با جمع احتمال ترکیبات دوتایی منهای احتمال ترکیبات سه‌تایی به‌علاوه احتمال ترکیبات چهارتایی منهای احتمال ترکیبات پنج‌تایی و به همین ترتیب تا آخر است. با استفاده از تقریب رویدادهای نادر[1] و با توجه به کوچك بودن احتمال ترکیبات سه‌تایی و بالاتر، می‌توان با یك تقریب خوب از آن‌ها صرف‌نظر کرد. از طرفی با توجه به مطالبی که در ارزیابی کیفی عنوان شد و ناچیز بودن احتمال وقوع رویداد K، می‌توان از احتمال وقوع آن و تمامی ترکیباتی که این رویداد را در خود دارند، صرف‌نظر کرد. با استفاده از این مفروضات تنها به ترکیبات سه‌تایی می‌پردازیم که عدد احتمال آن‌ها قابل توجه باشد.

$$\theta \simeq P(E_۱.D.G) + P(E_۲.D.G)$$

پس خواهیم داشت:

$$P(E_۱.D.G) = P(E_۱).P(D).P(G) = (۸ \times ۱۰^{-۳}) \times (۱ \times ۱۰^{-۲}) \times (۱ \times ۱۰^{-۲}) = ۸ \times ۱۰^{-۷}$$

$$P(E_۱.D.G) = P(E_۱).P(D).P(G) = (۸ \times ۱۰^{-۳}) \times (۱ \times ۱۰^{-۲}) \times (۱ \times ۱۰^{-۲}) = ۸ \times ۱۰^{-۷}$$

$$\theta = ۸ \times ۱۰^{-۷} + ۸ \times ۱۰^{-۷} = ۱/۶ \times ۱۰^{-۶}$$

$$P(A.B.G) = P(A).P(B).P(G) = (۴ \times ۱۰^{-۴}) \times (۲ \times ۱۰^{-۴}) \times (۱ \times ۱۰^{-۲}) = ۸ \times ۱۰^{-۷}$$

$$P(A.B.F) = P(A).P(B).P(F) = (۴ \times ۱۰^{-۴}) \times (۲ \times ۱۰^{-۴}) \times (۴ \times ۱۰^{-۴}) = ۳/۲ \times ۱۰^{-۱۱}$$

$$P(A.B.E_۲) = P(A).P(B).P(E_۲) = (۴ \times ۱۰^{-۴}) \times (۲ \times ۱۰^{-۴}) \times (۸ \times ۱۰^{-۳}) = ۶/۴ \times ۱۰^{-۱۰}$$

$$P(C.G) = P(C).P(G) = (۳ \times ۱۰^{-۴}) \times (۱ \times ۱۰^{-۲}) = ۸ \times ۱۰^{-۶}$$

$$P(C.F) = P(C).P(F) = (۳ \times ۱۰^{-۴}) \times (۴ \times ۱۰^{-۴}) = ۱/۲ \times ۱۰^{-۷}$$

$$P(C.E_۲) = P(C).P(E_۲) = (۳ \times ۱۰^{-۴}) \times (۸ \times ۱۰^{-۳}) = ۲/۴ \times ۱۰^{-۶}$$

$$P(D.G) = P(D).P(G) = (۱ \times ۱۰^{-۲}) \times (۱ \times ۱۰^{-۲}) = ۱ \times ۱۰^{-۴}$$

$$P(D.E_۲) = P(D).P(E_۲) = (۱ \times ۱۰^{-۲}) \times (۸ \times ۱۰^{-۳}) = ۸ \times ۱۰^{-۵}$$

$$P(D.F) = P(D).P(F) = (۱ \times ۱۰^{-۲}) \times (۴ \times ۱۰^{-۴}) = ۱ \times ۱۰^{-۶}$$

$$P(E_۱.F) = P(E_۱).P(F) = (۸ \times ۱۰^{-۳}) \times (۴ \times ۱۰^{-۴}) = ۳/۲ \times ۱۰^{-۶}$$

$$P(E_۱.G) = P(E_۱).P(G) = (۸ \times ۱۰^{-۳}) \times (۱ \times ۱۰^{-۲}) = ۸ \times ۱۰^{-۵}$$

$$P(E_۱.E_۲) = P(E_۱).P(E_۲) = (۸ \times ۱۰^{-۳}) \times (۸ \times ۱۰^{-۳}) = ۶/۴ \times ۱۰^{-۵}$$

$$P(T) = P(K) + P(E_۱.F) + P(E_۱.G) + P(E_۱.E_۲) + P(D.F) + P(D.G) + P(D.E_۲)$$
$$+P(C.F) + P(C.G) + P(C.E_۲) + P(A.B.F) + P(A.B.G) + P(A.B.E_۲) - \theta$$

$$P(T) = ۳/۲ \times ۱۰^{-۶} + ۸ \times ۱۰^{-۵} + ۶/۴ \times ۱۰^{-۵} + ۱ \times ۱۰^{-۶} + ۱ \times ۱۰^{-۴} + ۸ \times ۱۰^{-۵} + ۱/۲ \times ۱۰^{-۷}$$
$$+۸ \times ۱۰^{-۶} + ۲/۴ \times ۱۰^{-۶} + ۸ \times ۱۰^{-۱۰} + ۳/۲ \times ۱۰^{-۱۱} + ۶/۴ \times ۱۰^{-۱۰} - ۱/۶ \times ۱۰^{-۶}$$

$$P(T) = ۳/۳۷۱۳ \times ۱۰^{-۴}$$

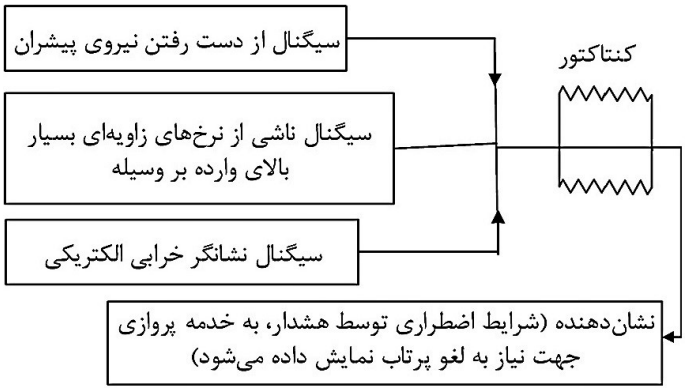
[1] Rare Event Approximation

که با حساب ۲۶۰ بار استفاده در سال، این مقدار احتمال تقریبا برابر با یك‌بار وقوع در هر ده سال می‌شود.

$$(۳/۳۷۱۳ \times ۱۰^{-۴}) \times ۲۶۰ = ۰/۰۹۶۲$$

مشاهده می‌کنید که احتمال وقوع رویداد رأس، بسیار پایین می‌باشد. شاید علت اصلی این مطلب استفاده هم‌زمان از دو ساعت زنگ‌دار باشد که ضریب اطمینان بیدار شدن فرد را بسیار بالا می‌برد.

مثال ۶.۲.۲. سیستم تشخیص شرایط اضطراری (EDS[1]) یک فضاپیما را درنظر بگیرید که به‌صورت ''اتوماتیک'' بر وضعیت اجزاء و متعلقات فضاپیما نظارت داشته و در شرایط بحرانی، سیگنال‌های هشدار و فرمان پرتاب سیستم فرار فضاپیما را صادر می‌کند. راه‌اندازی خودکار درصورتی وارد عمل می‌شود که یکی از حالت‌های: ازدست دادن نیروی پیشران اصلی، وارد شدن نرخ‌های زاویه‌ای بسیارزیاد و سیگنال ایراد الکتریکی تشخیص داده شود. دیاگرام ساده‌سازی شده برای EDS در شکل ۲۷.۲ نشان داده شده است. باتوجه به شکل، رویداد اصلی این‌طور تعریف می‌شود که سیستم قادر به تشخیص و انتقال سیگنال‌ها از بخش‌های مربوطه (از دست رفتن نیروی پیشران، خرابی الکتریکی، و نرخ‌های زاویه‌های بالا) به نشان‌دهنده داخل ماژول خدمه نباشد (به‌عبارت دیگر نشان‌دهنده $EDSI$[2] هشداری را نشان نمی‌دهد).



شکل ۲۷.۲: دیاگرام ساده‌سازی شده برای سیستم تشخیص شرایط اضطراری

رویدادهای پایه‌ای سیستم عبارتند از:

$X_۱$: سیگنال خرابی مربوط به ازدست دادن نیروی پیشران.

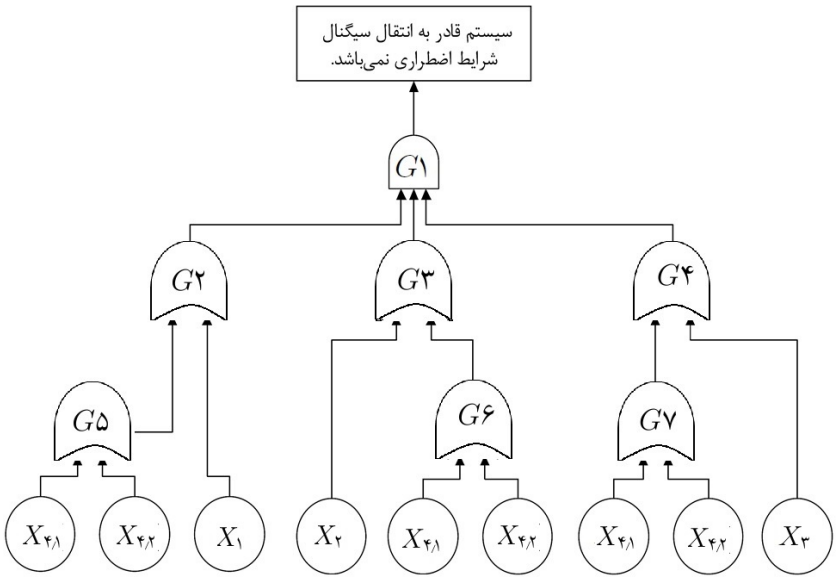
$X_۲$: سیگنال خرابی مربوط به خرابی الکتریکی.

$X_۳$: سیگنال خرابی مربوط به نرخ زاویه بالا برای کل سیستم.

$X_{۴/۱}$: خرابی سوییچ الکتریکی (کنتاکتور) که در حالت بالا بسته شود.

$X_{۴/۲}$: خرابی کنتاکتور که در حالت پایین بسته بماند.

[1] Emergency Detection System
[2] Emergency Detection System Instrument



شکل ۲۸.۲: درخت عیب سیستم تشخیص شرایط اضطراری

باتوجه به دیاگرام ساده‌سازی شده درخت عیب مربوط به آن را رسم می‌کنیم که در شکل ۲۸.۲ نشان داده شده است. هم‌چنین احتمال خرابی هر یک از این بخش‌ها برابر است با:

$$P(X_۱) = P(X_۲) = P(X_۳) = ۰/۰۲ \qquad P(X_{۴/۱}) = ۰/۰۰۸ \qquad P(X_{۴/۲}) = ۰/۰۰۲$$

حال می‌خواهیم احتمال خرابی کل سیستم را پیدا کنیم.(توجه: خراب شدن فقط یک کنتاکتور نمی‌تواند باعث ایجاد فعال شدن سیگنال هشدار شود).

برای به‌دست آوردن احتمال خرابی کل سیستم، ابتدا باید مجموعه قطع‌کننده‌های مینیمال را به‌دست آوریم زیرا با توجه به آنچه گفته شده بود، یك مجموعه‌ی قطع‌کننده، ترکیبی از رویدادهای پایه است که منجر به وقوع رویداد رأس (شکست کل سیستم) می‌شوند و یك مجموعه‌ی قطع‌کننده مینیمال، ترکیبی حداقل از این مجموعه است. هم‌چنین مجموعه قطع‌کننده‌های مینیمال، تمامی مسیرهای منتهی به وقوع رویداد رأس را مشخص می‌کنند که ما نیز به‌دنبال محاسبه احتمال وقوع رویداد راس می‌باشیم. بنابراین، با بهره‌گیری از دروازه‌های درخت عیب و هم‌چنین با کمک خواص جبر بولی به حل آن می‌پردازیم. همان‌طور که مشاهده می‌شود نزدیکترین دروازه به رویداد رأس (دروازه $G۱$) از نوع AND می‌باشد که خود از سه زیرمجموعه که شامل سه دروازه OR هستند تشکیل شده است. این به این معنی است که هر سه رویداد دروازه‌های $G۲$، $G۳$ و $G۴$ باید اتفاق بیفتند تا این فضاپیما سیگنال‌های هشدار را صادر نماید. به‌همین ترتیب سایر علل خرابی‌ها را با توجه به دروازه‌های موردنظر بررسی می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\begin{aligned} MCS &= (X_{۴/۱} + X_{۴/۲} + X_۱) \cdot (X_۲ + X_{۴/۱} + X_{۴/۲}) \cdot (X_{۴/۱} + X_{۴/۲} + X_۳) \\ &= X_{۴/۱} \cdot X_۲ \cdot X_{۴/۱} + X_{۴/۱} \cdot X_۲ \cdot X_{۴/۲} + X_{۴/۱} \cdot X_۲ \cdot X_۳ + X_{۴/۲} \cdot X_۲ \cdot X_{۴/۱} + X_{۴/۲} \cdot X_۲ \cdot X_{۴/۲} \\ &+ X_{۴/۲} \cdot X_۲ \cdot X_۳ + X_۱ \cdot X_۲ \cdot X_{۴/۱} + X_۱ \cdot X_۲ \cdot X_{۴/۲} + X_۱ \cdot X_۲ \cdot X_۳ + X_{۴/۱} \cdot X_{۴/۱} \cdot X_{۴/۱} \\ &+ X_{۴/۱} \cdot X_{۴/۱} \cdot X_{۴/۲} + X_{۴/۱} \cdot X_{۴/۱} \cdot X_۳ + X_{۴/۲} \cdot X_{۴/۱} \cdot X_{۴/۱} + X_{۴/۲} \cdot X_{۴/۱} \cdot X_{۴/۲} \end{aligned}$$

$$+X_{۴/۲}\cdot X_{۴/۱}\cdot X_{۳}$$
$$+X_{۱}\cdot X_{۴/۱}\cdot X_{۴/۱}+X_{۱}\cdot X_{۴/۱}\cdot X_{۴/۲}+X_{۱}\cdot X_{۴/۱}\cdot X_{۳}+X_{۴/۱}\cdot X_{۴/۲}\cdot X_{۴/۱}+X_{۱}\cdot X_{۴/۲}\cdot X_{۴/۲}$$
$$+X_{۴/۱}\cdot X_{۴/۲}\cdot X_{۳}+X_{۴/۲}\cdot X_{۴/۲}\cdot X_{۴/۱}+X_{۴/۲}\cdot X_{۴/۲}\cdot X_{۴/۲}+X_{۴/۲}\cdot X_{۴/۲}\cdot X_{۳}$$
$$+X_{۱}\cdot X_{۴/۲}\cdot X_{۴/۱}+X_{۱}\cdot X_{۴/۲}\cdot X_{۴/۲}+X_{۱}\cdot X_{۴/۲}\cdot X_{۳}$$

با توجه به خاصیت جابجایی جبر بولی $(A.B=B.A)$ و خاصیت همانی $(A.A=A)$ خواهیم داشت:

$$MCS=X_{۴/۱}\cdot X_{۲}\cdot X_{۳}+X_{۴/۱}\cdot X_{۲}\cdot X_{۴/۲}+X_{۴/۲}\cdot X_{۲}\cdot X_{۳}+X_{۱}\cdot X_{۲}\cdot X_{۴/۱}+X_{۱}\cdot X_{۲}\cdot X_{۴/۲}$$
$$+X_{۱}\cdot X_{۲}\cdot X_{۳}+X_{۱}\cdot X_{۴/۱}\cdot X_{۳}+X_{۴/۱}\cdot X_{۴/۲}\cdot X_{۱}+X_{۴/۲}\cdot X_{۴/۱}\cdot X_{۳}+X_{۱}\cdot X_{۴/۲}\cdot X_{۳}$$

در بالا ده مجموعه‌ی قطع‌کننده را مشاهده می‌کنیم که در این بین سه مجموعه‌ی $\{X_{۴/۱},X_{۴/۲},X_{۱}\}$، $\{X_{۴/۱},X_{۴/۲},X_{۲}\}$ و $\{X_{۴/۱},X_{۴/۲},X_{۳}\}$ جزء قطع‌کننده‌های مینیمال نمی‌باشند زیرا مجموعه‌ی مینیمال آن‌ها مجموعه‌ی $\{X_{۴/۱},X_{۴/۲}\}$ بنابراین داریم

$$MCS=X_{۴/۱}\cdot X_{۲}\cdot X_{۳}+X_{۴/۲}\cdot X_{۲}\cdot X_{۳}+X_{۱}\cdot X_{۲}\cdot X_{۴/۱}+X_{۱}\cdot X_{۲}\cdot X_{۴/۲}+X_{۱}\cdot X_{۲}\cdot X_{۳}$$
$$+X_{۱}\cdot X_{۴/۱}\cdot X_{۳}+X_{۱}\cdot X_{۴/۲}\cdot X_{۳}$$

بنابراین، هشت مجموعه‌ی قطع کننده مینیمال عبارتند از:

$$\{X_{۴/۱}X_{۲},X_{۳}\}\ ،\ \{X_{۴/۲},X_{۲},X_{۳}\}\ ،\ \{X_{۱},X_{۲},X_{۴/۱}\}\ ،\ \{X_{۱},X_{۲},X_{۴/۲}\}$$
$$\{X_{۱},X_{۲},X_{۳}\}\ ،\ \{X_{۱},X_{۴/۱},X_{۳}\}\ ،\ \{X_{۱},X_{۴/۲},X_{۳}\}\ \text{و}\ \{X_{۴/۱},X_{۴/۲}\}$$

حال برای بررسی احتمال کل خرابی سیستم دو حالت را درنظر می‌گیریم. ابتدا فرض می‌کنیم که رویدادهای موردنظر دوبه‌دو ناسازگار باشند و دوم فرض می‌کنیم رویدادها دوبه‌دو مشترک باشند. حال با فرض ناسازگار بودن رویدادها بنابراین احتمال ترکیبات دوتایی و سه‌تایی برابر با صفر می‌باشند و داریم

$$P(T)=\textstyle\sum_{i=۱}^{k}P(Y_i)=$$
$$P(X_{۱},X_{۲},X_{۳})+P(X_{۱},X_{۲},X_{۴/۱})+P(X_{۱},X_{۲},X_{۴/۲})+P(X_{۱},X_{۴/۱},X_{۳})$$
$$+P(X_{۱},X_{۴/۲},X_{۳})+P(X_{۴/۱},X_{۲},X_{۳})+P(X_{۲},X_{۳},X_{۴/۲})+P(X_{۱},X_{۴/۲})$$
$$=(۰/۸+۰/۳۲+۰/۰۸+۰/۳۲+۰/۰۸+۰/۳۲+۰/۰۸+۰/۰۲۵۶)\times۱۰^{-۵}=۲/۰۲۵۶\times۱۰^{-۵}$$

حال اگر فرض کنیم رویدادها دوبه‌دو مشترک باشند براساس قانون جمع احتمالات خواهیم داشت

$$P(T)=\sum_{i=۱}^{k}P(Y_i)-\sum_{i=۲}^{k}\sum_{j=۱}^{i-۱}P(Y_iY_j)+...+(-۱)^{n-۱}P(Y_۱,...,Y_k)\qquad(۴.۲)$$

که در آن Y_i، iـامین مجموعه‌ی قطع‌کننده مینیمال و k مجموع تعداد قطع‌کننده‌ی مینیمال می‌باشد. باتوجه به رابطه (۴.۲) برای این مثال داریم

$$P(T) = \sum_{i=۱}^{k} P(Y_i) - \sum_{i=۲}^{k} \sum_{j=۱}^{i-۱} P(Y_i Y_j) + \sum_{i=۳}^{k} \sum_{j=۲}^{i-۱} \sum_{n=۱}^{j-۱} P(Y_i Y_j Y_n)$$

ترکیبات دوتایی ممکن در این مثال برابر با ۲۸ مجموعه می‌باشد که با محاسبه آن، جمع احتمال ترکیبات دوتایی برابر با $(۱/۵۶۸۰ \times ۱۰^{-۵})$ و هم‌چنین ترکیبات سه‌تایی ممکن ۵۶ مجموعه است که جمع احتمال آن برابر با $(۰/۶۰۹۷ \times ۱۰^{-۵})$ می‌باشد. بنابراین داریم

$$P(T) = [(۲/۰۲۵۶) - (۱/۵۶۸۰) + (۰/۶۰۹۷)] \times ۱۰^{-۵} = ۱/۰۶۷۳ \times ۱۰^{-۵}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود اگر رویدادها با یکدیگر دوبه‌دو ناسازگار باشند، احتمال این‌که سیگنال‌های هشدار به صدا درنیایند و با خرابی مواجه شده باشند تقریبا برابر با ۰/۰۰۰۰۲ می‌باشد. به‌عبارت دیگر اگر این فضاپیما صدهزار بار مورد استفاد قرار گیرد تقریبا دوبار این سیگنال هشدار فعال خواهد شد. هم‌چنین اگر رویدادها دوبه‌دو مشترک باشند سیگنال هشدار، تقریبا در صدهزار بار استفاده، فقط یک‌بار به صدا در خواهد آمد.

۳.۲ گسترش‌های دینامیک درخت عیب استاتیک کلاسیک

به طور فزاینده، سیستم‌ها پیچیده‌تر می‌شوند و پیکربندی‌های آنها پویاتر می‌شود، به‌طوریکه سیستم می‌تواند در حالت‌های مختلف عملکردی فعالیت کند. با تغییر حالت، فعل و انفعالات و جریان داده‌ها بین مؤلفه‌ها در پیکربندی سیستم تغییر می‌کند و به همین ترتیب انتشار خطاها از طریق سیستم نیز انجام می‌شود. با توجه به ماهیت پویای رفتار سیستم، ارزیابی اثرات ترکیبی از رویدادهای شکست به تنهایی برای به‌دست آوردن کامل رفتار شکست سیستم کافی نیست به علاوه، درک و چگونگی نظم و ترتیبی که آن‌ها شکست می‌خورند نیز برای یک مدل شکست دقیق‌تر مورد نیاز است.

علی‌رغم کاربرد گسترده درخت عیب، این تکنیک قادر به تسخیر رفتار دینامیکی وابسته به توالی نیست. دو فرمالیسم معرفی شده، بلوک دیاگرام قابلیت اعتماد و درخت عیب، گرچه در مهندسی قابلیت اعتماد بسیار مرسوم و مورد استفاده قرار می‌گیرند، اما در قابلیت‌های مدل‌سازی محدود هستند و نمی‌توانند برای مدل‌سازی سیستم‌ها با تعاملات ، وابستگی‌های تصادفی یا روابط متوالی طراحی شوند. مثال‌ها عبارتند از: تقسیم بار، افزونگی آماده به کار، وابستگی، شکست‌های علل مشترک و غیره. وجود این کمبودها در مدل‌سازی قابلیت اعتماد سیستم، جامعه علمی را به لزوم فرمالیسم جدید بیدار کرده است. رویکردی که اتخاذ شده

است، گسترش فرمالیسم‌های موجود با عناصر جدید برای مدل‌سازی جنبه‌های کشف نشده است. برای غلبه بر این محدودیت، تعدادی از تکنیک‌های تحلیل دینامیکی، مانند درختان عیب دینامیک ($DFTs$[۱]) و درختان عیب زمانی پاندورا ($PandoraTFTs$[۲]) معرفی شده‌اند.

۱.۳.۲ درخت عیب دینامیک

در بخش ۲.۲ درباره درخت عیب بحث کردیم، که توضیح می‌دهند چگونه ترکیبات شکست مولفه‌ها (رویدادهای اساسی) منجر به شکست‌های زیرسیستم‌ها (دروازه‌ها) و در نهایت کل سیستم می‌شوند. درختان عیب استاتیک تنها می توانند سیستم‌هایی را مدل کنند که در آنها ترکیبی از اجزای شکست خورده منجر به شکست سیستم شود، صرف نظر از زمان وقوع هر یک از این مؤلفه‌ها. به عنوان مثال، اگر سیستمی حاوی سوئیچ به طور متناوب بین یک مولفه و لوازم یدکی آن باشد، شکست این سوئیچ پس از آن که قبلاً قطعات را فعال کرده است، باعث خرابی سیستم نمی‌شود. درختان عیب دینامیک توسط ناسا برای مدل سازی چنین وابستگی‌های زمانی در درختان عیب توسعه داده شدند.

درختان عیب دینامیک به اوایل دهه ۱۹۹۰ باز می گردد و هدف آن‌ها گسترش درختان عیب است. درختان عیب دینامیک همچنین در کتابچه راهنمای به روز شده درخت عیب [۵۳] به عنوان روشی برای تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیک درج شده‌اند.

درختان عیب دینامیک، شاخه‌ای از درختان عیب استاتیک هستند که یک درخت عیب را قادر می سازند تا رفتار دینامیکی وابسته به توالی را تسخیر کند. درختان عیب دینامیک امکان تجزیه و تحلیل سیستم‌ها با روابط متقابل پیچیده بیشتری بین رویدادها از جمله وابستگی‌های عملکردی، مؤلفه های آماده به کار و توالی های رویداد را امکان پذیر می‌سازند.

اهداف و فرضیات درخت عیب دینامیک

درخت عیب دینامیک یک مدل تصادفی برای ارزیابی قابلیت اعتماد است که روش‌هایی را تعریف می‌کند که چگونه یک رویداد ناخواسته وابسته به زمان می‌تواند رخ دهد. مانند یک درخت عیب، درخت عیب دینامیک توسط یک دروازه برتر تشکیل شده است که نمایانگر مهم‌ترین رویداد ناخواسته (رویداد برتر) و تعداد مشخصی از دروازه‌های سطح پایین‌تر و رویدادهای اساسی است که مطابق با منطق سناریوی خطا، باعث بروز رویداد برتر می شود.

فرضیه های اصلی استفاده از درخت عیب دینامیک عبارتند از : وقایع باینری هستند و اجزاء قابل ترمیم نیستند. بنابراین تفاوت اصلی با درخت عیب استاتیک این است که درخت عیب دینامیک برای ارزیابی دسترس‌پذیری به کار برده نمی‌شود بلکه برای ارزیابی قابلیت اعتماد مدل با وابستگی‌های تصادفی پیچیده مناسب است. مدل‌سازی تعاملات پیچیده با

[1] Dynamic Fault Trees
[2] Pandora Temporal Fault Trees

نمادهای گرافیکی درخت عیب، توسعه مدل‌های پویا را امکان‌پذیر کرده است.

دروازه‌های درخت عیب دینامیک

درخت عیب دینامیک با توجه به این واقعیت معرفی شد که درختان عیب استاتیک کلاسیک با دروازه های AND، OR و $(K-out-N)$ نمی‌توانند رفتار دینامیک مکانیزم های شکست سیستم را ضبط کنند. به منظور گنجاندن این نوع رفتارها در عبارات درخت عیب، دروازه های دینامیک معرفی شدند و فرمالیسم درخت عیب دینامیک را تولید کردند.

برای نشان دادن رفتار دینامیکی این سیستم ها، درخت عیب دینامیک به غیر از دروازه AND اولویت‌دار ، سه دروازه خاص: دروازه وابستگی عملکردی، دروازه قطعات یدکی و دروازه اجرای توالی را معرفی می‌کند که به تفصیل در بخش ۵.۲.۲ به آن پرداخته‌ایم. اما درخت عیب دینامیک دو دروازه دیگر که حالت خاص از دروازه وابستگی عملکردی می‌باشد را نیز ارائه می‌دهد:

- $One-shotPDEP$[1] : حالت خاص از دروازه $FDEP$، زمانی که وقوع رویداد راه‌انداز، احتمال بروز شکست رویدادهای وابسته را دارد.
- $PresistentPDEP$[2] : حالت خاص از دروازه $FDEP$، زمانی که وقوع رویداد راه‌انداز موجب افزایش نرخ شکست رویدادهای وابسته می‌شود.

ارزیابی کیفی و کمی درخت عیب دینامیک

یک شکل ساده از تحلیل کیفی درخت عیب دینامیک را می‌توان با استفاده از تکنیک‌های مشابه مورد استفاده برای درختان عیب استاتیک انجام داد؛ یعنی با تعویض دروازه‌های $PAND$ و $SPARE$ توسط دروازه‌های AND و دروازه‌های $FDEP$ توسط دروازه‌های OR.

روش‌های مختلفی برای بدست آوردن تحلیل کمی موجود است برخی از مهم‌ترین معیارهای محاسبه‌شده عبارتند از: تحلیل جبری، تحلیل‌های مبتنی بر زنجیرهای مارکوف، شبکه‌های دینامیک بیزین، نمودار تصمیم گیری چند حالته و شبیه سازی مونت کارلو.

مزایا و معایب درخت عیب دینامیک

درختان عیب دینامیک در درجه اول برای بدست آوردن رفتار دینامیکی پیچیده مکانیسم‌های شکست سیستم‌های تحمل نقص توسعه داده شدند. درختان عیب دینامیک با در نظر گرفتن نه تنها ترکیبات، بلکه ترتیب توالی بروز شکست قطعات که منجر به شکست سیستم می‌شوند، قابلیت مدل سازی درختان عیب استاتیک را افزایش می‌دهند.

[1] One-shot Probabilistic DEPendency gate
[2] Presistent Probabilistic DEPendency gate

با وجود قدرت تحلیلی رویکرد درخت عیب دینامیک، در عمل یک عیب شدید دارد: درختان عیب دینامیک به طور مرسوم با استفاده از تکنیک‌های تحلیل زنجیره مارکوف مبتنی بر ویژگی‌ها و مدل‌سازی تمام حالت‌های ممکن سیستم و گذار بین آن‌ها کمی‌سازی می‌شود. در نتیجه، فضای حالت تولید شده به صورت نمایی با تعداد مولفه‌ها در سیستم، با تأثیر همزمان در زمان محاسبه رشد می‌کند. علاوه بر این، رویکردهای زنجیره مارکوف، طول‌عمر مولفه‌های سیستم را محدود می‌کند تا به صورت متغیرهای توزیع نمایی مدل‌سازی شوند. تکنیک دیگر استفاده از روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو است که بسیار زمان‌بر می‌باشند. اخیراً، شبکه‌های بیزین (BNs[1]) و تعمیم آن‌ها برای مدل‌سازی وابسته به زمان که به شبکه‌های دینامیک بیزین معروف است ($DBNs$[2])، پیشنهاد شده‌اند که یک چارچوب یکپارچه برای مدل‌سازی قابلیت اعتماد و تحلیل سیستم‌های پیچیده پویا ارائه می‌دهد.

با این حال، رویکرد درخت عیب دینامیک دارای اشکالات دیگری نیز می‌باشد به‌طوریکه امکان تضاد یا افزونگی‌های ناشی از اطلاعات زمانی در درخت عیب را نشان نمی‌دهد و در مقابل به تحلیل کیفی زمانی و استاتیک به‌طور جداگانه می‌پردازد. بنابراین درخت عیب زمانی پاندورا بابت رفع چنین نقص‌هایی ایجاد شده است که در فصل آخر به تفصیل به معرفی آن می‌پردازیم.

[1] Bayesian Networks
[2] Dynamic Bayesian Networks

فصل ۳

تحلیل قابلیت اعتماد فازی بر پایه $\alpha-$برش

در این فصل مطالب مورد نیاز که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند مطرح می‌شوند. در بخش ۱.۳ تاریخچه مختصری از قابلیت اعتماد فازی ارائه می‌شود. در بخش ۲.۳ رویکرد حساب بازه‌ای در تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌ها بیان می‌شود. بعد از آن به معرفی تحلیل قابلیت اعتماد اجزای سیستم با توابع عضویت یکسان و متفاوت پرداخته می‌شود. مفاهیمی که در این فصل به‌کار برده می‌شوند عمدتا از مراجع [۵، ۱۷] ارائه گردیده‌اند.

۱.۳ مقدمه

تحلیل قابلیت اعتماد کلاسیک سیستم‌ها در حالت کلی بر دو فرض اصلی استوار است. نخست، فرض دودویی که بر اساس آن سیستم همواره در دو وضعیت کاملا فعال و کاملا غیرفعال مشغول فعالیت است. دوم فرض احتمالی است که بر اساس آن توزیع طول عمر اجزای سیستم بر اساس الگوهای احتمالی که عمدتا مبتنی بر فراوانی هستند، تعیین می‌شوند. بنابراین، برای برآورد دقیق قابلیت اعتماد سیستم و مفاهیم مرتبط با آن، نیازمند جمع آوری داده‌های زیاد از منابع مختلف می‌باشیم. اما گاهی جمع‌آوری داده‌ها و یا حتی مطالعه داده‌هایی که از قبل گردآوری شده‌اند به طور دقیق امکان‌پذیر نبوده و با عدم اطمینان همراه است. در چنین

وضعیت‌هایی، استفاده از نتایج به‌دست آمده که بر اساس فرض‌های کلاسیک ذکر شده به‌دست آمده‌اند، تحلیلی نادرست از وضعیت واقعی سیستم تحت مطالعه را ارائه خواهد کرد. بنابراین در چنین شرایطی نیازمند توسعه روش‌های کلاسیک جهت تجزیه و تحلیل سیستم‌های تحت بررسی می‌باشیم.

استفاده از روش‌های فازی برای تجزیه و تحلیل سیستم‌ها را اولین بار کافمن [۳۲] در سال ۱۹۷۵ پیشنهاد نمود. مطالعات اصلی در مورد به‌کارگیری روش‌های فازی در تحلیل قابلیت اعتماد از دهه‌ی ۸۰ میلادی به بعد شکل گرفت. تاناکا و همکاران [۵۴]، از مجموعه‌های فازی برای تقریب احتمال خرابی استفاده نمودند و آن را امکان خرابی نامیدند. کای و ون [۲۹]، مفهوم موفقیت و شکست فازی را پیشنهاد دادند که در آن تغییر بین وضعیت فازی به‌عنوان عددی فازی در نظر گرفته شده بود. چنگ و مون [۱۴]، از مفهوم فواصل اطمینان برای تحلیل قابلیت اعتماد فازی استفاده کردند. یوتکین [۵۵–۵۷]، تحلیل قابلیت اعتماد فازی را بر پایه‌ی فرض وضعیت دودویی و فرض امکانی پیشنهاد نمود. چن [۱۳] با بهره‌گیری از عملگرهای حسابی بین اعداد فازی، روشی جدید را در این زمینه پایه‌گذاری کرد. فیتل و گورکر [۴۴] ضمن بررسی داده‌های طول عمر فازی، روش‌هایی چند برای برآورد تابع قابلیت اعتماد سیستم بر پایه‌ی این داده‌ها ارائه کردند. آن‌ها همچنین مفهوم تابع قابلیت اعتماد تجربی و روش‌های برآورد قابلیت اعتماد بیزی را برای حالتی که داده‌های طول عمر فازی هستند، مورد مطالعه قرار دادند.

وو [۶۱]، از احتمال فازی برای مطالعه قابلیت اعتماد سیستم‌ها استفاده کرد. وی همچنین رهیافت بیزی برای قابلیت اعتماد سیستم‌ها را در محیط فازی پیشنهاد نمود [۶۲–۶۴]. در این رهیافت، پارامترهای فازی به عنوان متغیرهای تصادفی فازی با تابع توزیع‌های پیشین در نظر گرفته شده‌اند. به‌علاوه، هوانگ و همکاران [۲۶]، رهیافت بیزی را برای تحلیل داده‌های طول عمر فازی مورد مطالعه قرار دادند. اخیراً، شارما و همکاران [۵۲] ساختاری را برای پیش‌بینی رفتار مبهم سیستم‌های صنعتی با استفاده از روش‌های فازی پیشنهاد نموده‌اند.

تحلیل مدل‌های قابلیت اعتماد چند وضعیتی (وضعیت‌های گسسته نامتناهی، شمارای نامتناهی، پیوسته) مرتبط با وضعیت‌های فازی است. در حالت کلی بررسی چنین مدل‌هایی دشواری‌های خاص خود را دارا می‌باشد و در حال حاضر از موضوعاتی به‌شمار می‌آید که محققین بسیاری در جهت پیشبرد آن تلاش می‌کنند. علاقه‌مندان جهت مطالعه بیشتر می‌توانند به مراجع [۷، ۹، ۱۱] رجوع کنند. در زمینه قابلیت اعتماد انسانی در محیط‌های فازی، مراجع [۳۸، ۴۹] و استفاده از رهیافت منطق فازی برای مدل‌های قابلیت اعتماد، مراجع [۴۶، ۶۵] می‌تواند مفید باشد.

کای [۳۰] با مطالعات بسیاری که در این زمینه انجام داد، با توجه به ماهیت سیستم و شرایط حاکم بر آن فرض‌های حالت فازی را به‌صورت زیر مطرح نمود:

(۱) فرض وضعیت فازی[1]: خرابی سیستم را نمی‌توان به‌طور دقیق تعریف نمود و سیستم درهر

[1] Fuzzy State Assumption

لحظه از زمان می‌تواند هرکدام از حالات شکست فازی یا موفقیت فازی را دارا باشد.
(۲) فرض امکانی[۱]: به علت عدم برقراری شرایط اصول احتمال، رفتار سیستم بر اساس الگوهای امکانی مشخص می‌شود.
وی بر پایه فرض‌های فوق، قابلیت اعتماد فازی را در سه گروه زیر طبقه‌بندی کرد [۱۰، ۳۰، ۳۱]:
الف) نظریه‌ی قابلیت اعتماد بر اساس فرض‌های احتمالی[۲] و فرض وضعیت فازی که آن را به اختصار $PROFUST$[۳] می‌نامند.
ب) نظریه‌ی قابلیت اعتماد بر اساس فرض‌های امکانی و فرض وضعیت دودویی که آن را به اختصار $POSBIST$[۴] می‌نامند.
پ) نظریه‌ی قابلیت اعتماد بر اساس فرض‌های امکانی و فرض وضعیت فازی که آن را به اختصار $POSFUST$[۵] می‌نامند.
همانطور که اشاره شد در بسیاری از پژوهش‌های ارائه شده به دلیل ابهام موجود در مسئله احتمال کارکرد اجزای سیستم تحت بررسی کمیت‌هایی نادقیق بوده‌اند که محققین از اعداد فازی برای صورت‌بندی این کمیت‌ها استفاده نموده‌اند. از این رو بایستی روش‌هایی جدید برای تجزیه و تحلیل قابلیت اعتماد سیستم در شرایطی که احتمال کارکرد اجزای آن اعداد فازی هستند، توسعه می‌یافت.
یکی از مهمترین رویکردهای مورد استفاده در این مطالعات حساب بازه‌ای بوده است که بر مبنای مفهوم $\alpha-$برش‌های اعداد فازی، معرفی و توسعه داده شده است. به بیان دقیق‌تر، با استفاده از این تعریف می‌توان $\alpha-$برش تمام اعداد فازی تخصیص داده شده برای اجزا سیستم را به دست آورد و سپس با استفاده از مبانی حساب بازه‌ای به تحلیل قابلیت اعتماد کل سیستم پرداخت.
در ادامه فصل با تکیه بر این رویکرد به تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌هایی که احتمال کارکرد اجزای آنها اعداد فازی هستند خواهیم پرداخت.

۲.۳ رویکرد حساب بازه‌ای در تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌ها

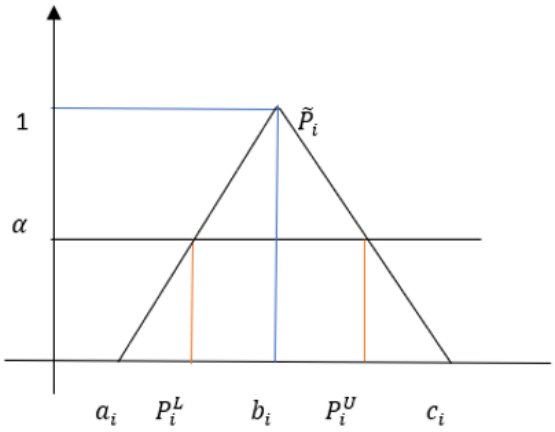
اعداد فازی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را در نظر بگیرید. در صورتی که $\alpha-$برش‌های این اعداد فازی را با $\tilde{A}_\alpha = [A_\alpha^L, A_\alpha^U]$ و $\tilde{B}_\alpha = [B_\alpha^L, B_\alpha^U]$ نشان دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت [۱۷].

[1] Possibility Assumption
[2] Probability Assumptions
[3] PROFUST reliability theory, based on the PRObability assumption and the FUzzy-STate assumption.
[4] POSBIST reliability theory, based on the POSsibility assumption and the Binary-STate assumption.
[5] POSFUST reliability theory, based on the POSsibility assumption and the FUzzy-STate assumption.

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_\alpha \oplus \tilde{B}_\alpha &= [A_\alpha^L + B_\alpha^L, A_\alpha^U + B_\alpha^U] \\
\tilde{A}_\alpha \ominus \tilde{B}_\alpha &= [A_\alpha^L - B_\alpha^U, A_\alpha^U - B_\alpha^L] \\
\tilde{A}_\alpha \otimes \tilde{B}_\alpha &= [A_\alpha^L B_\alpha^L, A_\alpha^U B_\alpha^U] \\
\tilde{A}_\alpha \oslash \tilde{B}_\alpha &= [A_\alpha^L / B_\alpha^U, A_\alpha^U / B_\alpha^L] \; ; \qquad (B_\alpha^L \neq \circ, B_\alpha^U \neq \circ)
\end{aligned}$$

۱.۲.۳ سیستم با مولفه‌های یکسان

در این بخش قصد داریم تا به تجزیه و تحلیل قابلیت اعتماد سیستمی متشکل از n مؤلفه بپردازیم که امکان کارکرد هر یک از اجزای آن به ترتیب اعداد فازی مثلثی $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \cdots, \tilde{P}_n$ در نظر گرفته شده‌اند. که به‌صورت $\tilde{P}_i = (a_i, b_i, c_i)_T$ به ازای $i = ۱,۲,...,n$ نمایش می‌دهیم. $\alpha-$برش $\tilde{P}_i$ به‌صورت $(\tilde{P}_i)_\alpha = [P_i^L, P_i^U]$ و در شکل ۱.۳ آمده است.



شکل ۱.۳: $\alpha-$برش $\tilde{P}_i$

که در آن

$$\begin{aligned}
P_i^L &= a_i + (b_i - a_i)\alpha \\
P_i^U &= c_i - (c_i - b_i)\alpha
\end{aligned}$$

به عبارت دیگر

$$(\tilde{P}_i)_\alpha = [P_i^L, P_i^U] = [a_i + (b_i - a_i)\alpha, c_i - (c_i - b_i)\alpha] \qquad (۱.۳)$$

در این صورت قابلیت اعتماد فازی کل سیستم که آن را با $\tilde{P}$ نشان می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tilde{P} = \phi(\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \cdots, \tilde{P}_n)$$

که در آن ϕ همان تابع ساختار سیستم است.

برای تحلیل قابلیت اعتماد کل سیستم براساس رویکرد حساب بازه‌ای، نخست $\alpha-$برش‌های اعداد فازی مثلثی تخصیص داده شده به هر یک از اجزا $(\tilde{P}_i)_\alpha$ رابدست می‌آوریم.

حال در صورتی که سیستم تحت بررسی در ساختار سری باشد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
(P_{ANDF})_\alpha &= AND\{(\tilde{P}_۱)_\alpha,\cdots,(\tilde{P}_n)_\alpha\} \qquad (۲.۳)\\
&= \prod_{i=۱}^{n}(\tilde{P}_i)_\alpha\\
&= (\tilde{P}_۱)_\alpha(\tilde{P}_۲)_\alpha\cdots(\tilde{P}_n)_\alpha\\
&= \left[P_۱^L,P_۱^U\right]\cdot\left[P_۲^L,P_۲^U\right]\cdot\cdots\cdot\left[P_n^L,P_n^U\right]\\
&= \left[(b_۱-a_۱)\alpha+a_۱,-(c_۱-b_۱)\alpha+c_۱\right]\\
&\quad\times\left[(b_۲-a_۲)\alpha+a_۲,-(c_۲-b_۲)\alpha+c_۲\right]\\
&\quad\times\cdots\times\left[(b_n-a_n)\alpha+a_n,-(c_n-b_n)\alpha+c_n\right]\\
&= \left[\prod_{i=۱}^{n}\left((b_i-a_i)\alpha+a_i\right),\prod_{i=۱}^{n}\left(-(c_i-b_i)\alpha+c_i\right)\right]
\end{aligned}$$

در صورتی که سیستم تحت بررسی در ساختار موازی قرار گرفته باشد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
(P_{ORF})_\alpha &= OR\{(\tilde{P}_۱)_\alpha,\cdots,(\tilde{P}_n)_\alpha\} \qquad (۳.۳)\\
&= ۱-\prod_{i=۱}^{n}(۱-(\tilde{P}_i)_\alpha)\\
&= [۱,۱]-\prod_{i=۱}^{n}\{[۱,۱]-\left[P_i^L,P_i^U\right]\}\\
&= [۱,۱]-\prod_{i=۱}^{n}\left[(c_i-b_i)\alpha+۱-c_i,-(b_i-a_i)\alpha+۱-a_i\right]\\
&= \left[۱-\prod_{i=۱}^{n}\left(-(b_i-a_i)\alpha+۱-a_i\right),۱-\prod_{i=۱}^{n}\left((c_i-b_i)\alpha+۱-c_i\right)\right]
\end{aligned}$$

در ادامه با استفاده از یک مثال عددی سعی می‌کنیم تا روش ارائه شده را بیشتر تشریح کنیم.

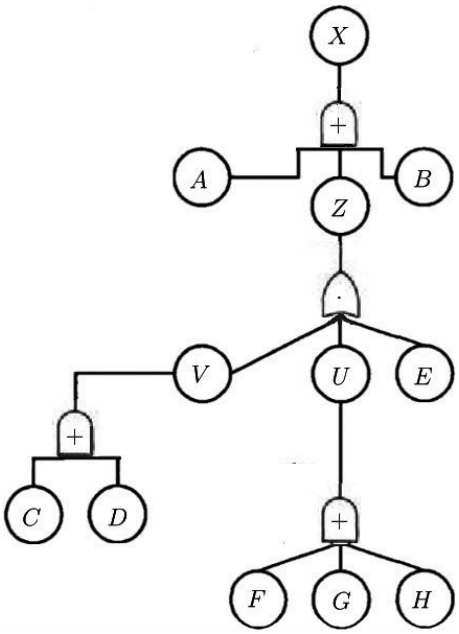
مثال ۱.۲.۳. فرض کنید دو دستگاه آسیاب به موازات همدیگر مشغول فعالیت هستند. براساس اطلاعات موجود و گزارش شده اپراتورهای دستگاه، مسئولین حمل و نقل مواد اولیه به نزدیکی دستگاه و دیگر افرادی که بنابه دلایلی وارد محوطه کارگاهی این دو دستگاه می‌شوند، در معرض آسیب پرت شدن تراشه از طرف دستگاه‌ها و آسیب دیدن چشم‌هایشان قرار دارند. در این مثال قصد داریم تا امکان آسیب دیدن افرادی که به هر دلیلی وارد محوطه کارگاهی دستگاه‌ها می‌شوند را بررسی کنیم. مهمترین عوامل ایجاد آسیب به افراد از سمت دستگاه‌ها در جدول ۱.۳ ارائه شده و نمودار درخت عیب آن نیز در شکل ۲.۳ رسم شده است.

با توجه به رویدادهای تعریف شده که اطلاعات کافی برای تعیین احتمال دقیق آنها فراهم

نیست، در ادامه فرض شده است که امکان رخداد هر یک از این رویدادها که مستقل از یکدیگر رخ می‌دهند یک عدد فازی مثلثی باشد که اطلاعات مربوط به هر یک از آن‌ها در همان جدول ۱.۳ گزارش شده است.

جدول ۱.۳: مهمترین عوامل امکان ایجاد آسیب به افراد از سمت دستگاه‌ها

امکان شکست اجزاء سیستم	نام‌گذاری رویدادها	عوامل ایجاد آسیب به افراد
$\tilde{P}_A = (۰/۰۲, ۰/۰۱۱۱۲)_T$	A	اپراتور۱از عینک ایمنی استفاده نمی‌کند
$\tilde{P}_B = (۰/۰۲, ۰/۰۱۱۱۲)_T$	B	اپراتور۲ از عینک ایمنی استفاده نمی‌کند.
$\tilde{P}_C = (۰/۸, ۰/۰۴۴۴۸)_T$	C	دستگاه ۱ کار می‌کند.
$\tilde{P}_D = (۰/۸, ۰/۰۴۴۴۸)_T$	D	دستگاه۲ کار می‌کند.
$\tilde{P}_E = (۱, ۰/۰۵۵۶۶)_T$	E	افرادی که بدون عینک ایمنی وارد محوطه کارگاهی می‌شوند.
$\tilde{P}_F = (۰/۰۵, ۰/۰۰۲۷۸)_T$	F	مسئولین حمل و نقل مواد اولیه
$\tilde{P}_G = (۰/۰۵, ۰/۰۰۲۷۸)_T$	G	مسئولین حمل و نقل مواد تولید شده
$\tilde{P}_H = (۰/۰۱, ۰/۰۰۰۵۶)_T$	H	افرادی که بنابه دلایلی وارد محوطه کارگاهی می‌شوند.



شکل ۲.۳: تحلیل درخت عیب برای مثال ۱.۲.۳

براساس تحلیل درخت عیب ارائه شده در شکل ۲.۳ می‌توان رخداد پیشامد اصلی تحت بررسی را به صورت زیر مدل‌بندی کرد.

$$\begin{aligned} U &= F + G + H \\ V &= C + D \\ Z &= E \times U \times V \\ X &= A + B + Z \end{aligned} \qquad (۴.۳)$$

با استفاده از روابط (۴.۳) مقادیر احتمال هر یک از پیشامدها در سطوح مختلف درخت عیب در قالب کمیت‌هایی فازی به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_U &= ۱ \ominus (۱ \ominus \tilde{P}_F)(۱ \ominus \tilde{P}_G)(۱ \ominus \tilde{P}_H) \\
\tilde{P}_V &= ۱ \ominus (۱ \ominus \tilde{P}_C)(۱ \ominus \tilde{P}_D) \\
\tilde{P}_Z &= \tilde{P}_E \otimes \tilde{P}_U \otimes \tilde{P}_V \\
\tilde{P}_X &= ۱ \ominus (۱ \ominus \tilde{P}_A)(۱ \ominus \tilde{P}_B)(۱ \ominus \tilde{P}_Z)
\end{aligned} \tag{۵.۳}$$

برای تحلیل نتایج، ابتدا $\alpha-$برش اعداد فازی ارائه شده در جدول ۱.۳ را به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_\alpha &= [۰/۰۰۸۸۸ + ۰/۰۱۱۱۲\alpha, ۰/۰۳۱۱۲ - ۰/۰۱۱۱۲\alpha] \\
\tilde{B}_\alpha &= [۰/۰۰۸۸۸ + ۰/۰۱۱۱۲\alpha, ۰/۰۳۱۱۲ - ۰/۰۱۱۱۲\alpha] \\
\tilde{C}_\alpha &= [۰/۷۵۵۵۲ + ۰/۰۴۴۴۸\alpha, ۰/۸۴۴۴۸ - ۰/۰۴۴۴۸\alpha] \\
\tilde{D}_\alpha &= [۰/۷۵۵۵۲ + ۰/۰۴۴۴۸\alpha, ۰/۸۴۴۴۸ - ۰/۰۴۴۴۸\alpha] \\
\tilde{E}_\alpha &= [۰/۹۴۴۳۴ + ۰/۰۵۵۶۶\alpha, ۱/۰۵۵۶۶ - ۰/۵۵۶۶\alpha] \\
\tilde{F}_\alpha &= [۰/۰۴۷۲۲ + ۰/۰۰۲۷۸\alpha, ۰/۰۵۲۷۸ - ۰/۰۰۲۷۸\alpha] \\
\tilde{G}_\alpha &= [۰/۰۴۷۲۲ + ۰/۰۰۲۷۸\alpha, ۰/۰۵۲۷۸ - ۰/۰۰۲۷۸\alpha] \\
\tilde{H}_\alpha &= [۰/۰۰۹۴۴ + ۰/۰۰۰۵۶\alpha, ۰/۰۱۰۵۶ - ۰/۰۰۰۵۶\alpha]
\end{aligned} \tag{۶.۳}$$

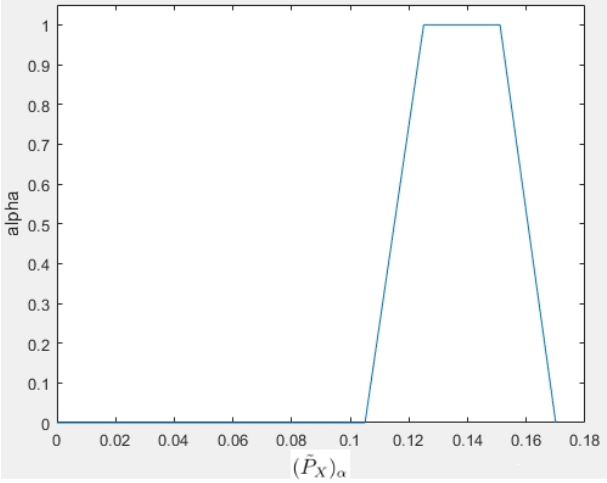
با جایگزاری عبارت‌های بدست آمده در رابطه (۶.۳) در رابطه (۵.۳) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
(\tilde{P}_Z)_\alpha &= [-۰/۰۰۰۲\alpha^۲ + ۰/۰۱۳۱\alpha + ۰/۰۸۸۷, -۰/۰۰۰۲۵\alpha^۲ + ۰/۰۱۴۵\alpha + ۰/۱۱۶] \\
(\tilde{P}_U)_\alpha &= [۰/۱۰۰ + ۰/۰۰۷\alpha, ۰/۱۱۳ - ۰/۰۰۷\alpha] \\
(\tilde{P}_V)_\alpha &= [۰/۹۴۰ + ۰/۰۲۱\alpha - ۰/۰۰۲\alpha^۲, ۰/۹۷۵ - ۰/۰۱۴\alpha - ۰/۰۰۲\alpha^۲] \\
(\tilde{P}_X)_\alpha &= [۰/۱۰۵ + ۰/۰۱۹۸\alpha, ۰/۱۷۰ - ۰/۰۱۸۸\alpha]
\end{aligned} \tag{۷.۳}$$

با در نظر گرفتن تقریب ۰/۰۵ و مقادیر $۰ \le \alpha \le ۱$، $\alpha-$برش‌های مربوط به احتمال آسیب سیستم به افراد محاسبه و در جدول ۲.۳ گزارش شده‌اند و نمودار آن در شکل ۳.۳ رسم شده است.

جدول ۲.۳: مقادیر $\alpha-$برش‌های قابلیت اعتماد سیستم آسیاب

α	حد پایین	حد بالایی	m	کران پایین	کران بالا
۰	۰/۱۰۵	۰/۱۷۰	۰/۱۳۸	۰/۰۳۳	۰/۰۳۳
۰/۰۵	۰/۱۰۶	۰/۱۶۹	۰/۱۳۸	۰/۰۳۲	۰/۰۳۲
۰/۱	۰/۱۰۷	۰/۱۶۸	۰/۱۳۸	۰/۰۳۱	۰/۰۳۱
۰/۱۵	۰/۱۰۸	۰/۱۶۷	۰/۱۳۸	۰/۰۳۰	۰/۰۳۰
۰/۲	۰/۱۰۹	۰/۱۶۶	۰/۱۳۸	۰/۰۲۹	۰/۰۲۹
۰/۲۵	۰/۱۱۰	۰/۱۶۵	۰/۱۳۸	۰/۰۲۸	۰/۰۲۸
۰/۳	۰/۱۱۱	۰/۱۶۴	۰/۱۳۸	۰/۰۲۷	۰/۰۲۷
۰/۳۵	۰/۱۱۲	۰/۱۶۳	۰/۱۳۸	۰/۰۲۶	۰/۰۲۶
۰/۴	۰/۱۱۳	۰/۱۶۲	۰/۱۳۸	۰/۰۲۵	۰/۰۲۵
۰/۴۵	۰/۱۱۴	۰/۱۶۱	۰/۱۳۸	۰/۰۲۴	۰/۰۲۴
۰/۵	۰/۱۱۵	۰/۱۶۱	۰/۱۳۸	۰/۰۲۳	۰/۰۲۳
۰/۵۵	۰/۱۱۶	۰/۱۶۰	۰/۱۳۸	۰/۰۲۲	۰/۰۲۲
۰/۶	۰/۱۱۷	۰/۱۵۹	۰/۱۳۸	۰/۰۲۱	۰/۰۲۱
۰/۶۵	۰/۱۱۸	۰/۱۵۸	۰/۱۳۸	۰/۰۲۰	۰/۰۲۰
۰/۷	۰/۱۱۹	۰/۱۵۷	۰/۱۳۸	۰/۰۱۹	۰/۰۱۹
۰/۷۵	۰/۱۲۰	۰/۱۵۶	۰/۱۳۸	۰/۰۱۸	۰/۰۱۸
۰/۸	۰/۱۲۱	۰/۱۵۵	۰/۱۳۸	۰/۰۱۷	۰/۰۱۷
۰/۸۵	۰/۱۲۲	۰/۱۵۴	۰/۱۳۸	۰/۰۱۶	۰/۰۱۶
۰/۹	۰/۱۲۳	۰/۱۵۳	۰/۱۳۸	۰/۰۱۵	۰/۰۱۵
۰/۹۵	۰/۱۲۴	۰/۱۵۲	۰/۱۳۸	۰/۰۱۴	۰/۰۱۴
۱	۰/۱۲۵	۰/۱۵۱	۰/۱۳۸	۰/۰۱۳	۰/۰۱۳



شکل ۳.۳: نمودار تابع عضویت خرابی فازی سیستم آسیاب برای مثال ۱.۲.۳

بر اساس نتایج گزارش شده در جدول ۲.۳ و شکل ۳.۳ می‌توان گفت که مجموعه مقادیر قابلیت اعتماد سیستم بین ۰/۱۰۵ تا ۰/۱۷۰ می‌باشد که به ازای $\alpha-$برش صفر به‌دست آمده است. همچنین، در صورتی‌که تمام داده‌های مسئله کمیت‌هایی دقیق گزارش شوند آن‌گاه قابلیت اعتماد سیستم برابر با ۰/۱۲۵ تا ۰/۱۵۱ است که در روش فعلی به ازای $\alpha = ۱$ به‌دست می‌آید. علاوه بر آن، محقق قادر است تا در سطوح اطمینان مختلف به‌بررسی قابلیت اعتماد سیستم بپردازد. برای نمونه با استفاده از اطلاعات جدول به ازای $\alpha = ۰/۷$ می‌توان گفت که قابلیت اعتماد سیستم حداقل ۰/۱۱۹ و حداکثر ۰/۱۵۷ می‌باشد.

۲.۲.۳ سیستم با مولفه‌های متفاوت

همانطورکه در مقدمه فصل و بخش ۱.۲.۳ گفته شد، در بسیاری از مطالعات انجام شده در زمینه قابلیت اعتماد فازی سیستم‌ها براساس رویکرد حساب بازه‌ای، فرض بر این است که اعداد فازی به‌کارگرفته شده همگی از یک نوع باشند. اگر چه این رویکرد در مورد برخی از سیستم‌ها کارآمد است اما نمونه‌های فراوانی می‌توان یافت که درآن‌ها احتمال‌های کارکرد مولفه‌ها متفاوت بوده و بنابراین ضروری است که از اعداد فازی متفاوت برای صورت‌بندی آن‌ها استفاده کرد.

در این بخش تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌ها در شرایطی که از اعداد فازی مختلف برای مدل‌بندی عدم اطمینان احتمال کارکرد مولفه‌های آن‌ها استفاده خواهیم کرد را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. در این راستا سیستمی متشکل از n مؤلفه را در نظر بگیرید که اطلاعات دقیقی راجع به احتمال کارکرد مؤلفه‌های آن در اختیار نداریم. با در نظرگرفتن کمیت‌های فازی $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \cdots \tilde{P}_n$ برای احتمال کارکرد نادقیق مؤلفه‌های سیستم که لزوماً دارای صورت یکسان

نیستند، قابلیت اعتماد کل سیستم از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\tilde{P} = \phi(\tilde{P}_۱, \tilde{P}_۲, \cdots \tilde{P}_n)$$

که در آن ϕ تابع ساختار سیستم است.

همانطورکه در بخش ۱.۲.۳ نیز گفته شده، در حالت سری و موازی تابع ساختار به ترتیب عبارتست از:

$$\begin{aligned} \phi(\tilde{P}_۱, \tilde{P}_۲, \cdots \tilde{P}_n) &= AND_F(\tilde{P}_۱, \tilde{P}_۲, \cdots \tilde{P}_n) = \prod_{i=۱}^{n} \tilde{P}_i \\ \phi(\tilde{P}_۱, \tilde{P}_۲, \cdots \tilde{P}_n) &= OR_F(\tilde{P}_۱, \tilde{P}_۲, \cdots \tilde{P}_n) = ۱ \ominus \prod_{i=۱}^{n} (۱ \ominus \tilde{P}_i) \end{aligned}$$

با توجه به این که رویکرد مورد استفاده در این فصل استفاده از حساب بازه‌ای برمبنای مفهوم $\alpha-$برش اعداد فازی درنظرگرفته شده برای قابلیت اعتماد هریک از مؤلفه‌ها می‌باشد، ابتدا بایستی $\alpha-$برش تمام اعداد فازی را محاسبه کرد و با توجه به ساختار سیستم یکی از روابط متناظر با سیستم‌های سری یا موازی را به‌کار برد.

برای نمونه فرض کنید سیستمی متشکل از n مؤلفه در ساختار سری قرار گرفته باشد. در این صورت

$$\tilde{P}_\alpha = [P_\alpha^L, P_\alpha^U]$$

که در آن P_α^L و P_α^U به ترتیب کران‌های پایین و بالای $\alpha-$برش قابلیت اعتماد فازی کل سیستم، $\tilde{P}$، می‌باشند. در این بخش با توجه به این‌که اعداد فازی تخصیص داده شده برای مؤلفه‌های سیستم متفاوت درنظر گرفته شده‌اند، به منظور جلوگیری از پیچیدگی محاسبات جبری از رویکرد برنامه‌ریزی غیرخطی استفاده می‌کنیم. به بیان دقیق‌تر، ابتدا $\alpha-$برش‌های هر یک از اعداد فازی را محاسبه می‌کنیم و سپس با توجه به ساختار سیستم نیازمند حل یک برنامه‌ریزی غیرخطی به صورت زیر خواهیم بود:

الف) حالت سری

$$\tilde{P}_\alpha = \prod_{i=۱}^{n} (\tilde{P}_i)_\alpha, \qquad \tilde{P}_\alpha = [P_\alpha^L, P_\alpha^U]$$

که در آن

$$P_\alpha^L = min \prod_{i=۱}^{n} p_i, \qquad P_\alpha^U = max \prod_{i=۱}^{n} p_i$$

$$s.t. \begin{cases} P_{۱\alpha}^L \le p_۱ \le P_{۱\alpha}^U \\ P_{۲\alpha}^L \le p_۲ \le P_{۲\alpha}^U \\ \vdots \\ P_{n\alpha}^L \le p_n \le P_{n\alpha}^U \end{cases} \qquad (۸.۳)$$

ب) حالت موازی

$$\tilde{P}_\alpha = ۱ - \prod_{i=۱}^{n}(۱ - (\tilde{P}_i)_\alpha), \qquad \tilde{P}_\alpha = [P_\alpha^L, P_\alpha^U]$$

که در آن

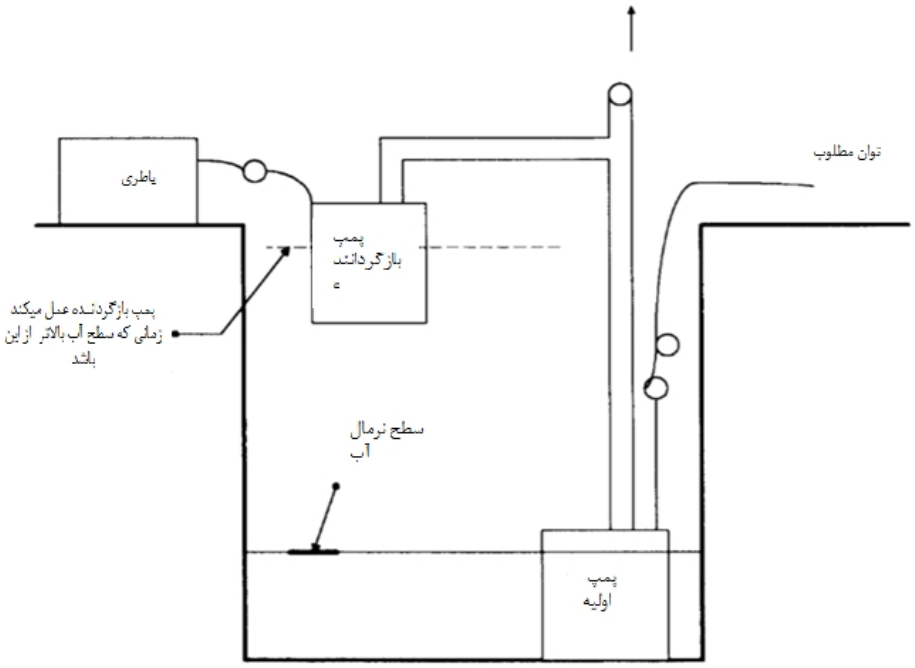
$$P_\alpha^L = min\{۱ - \prod_{i=۱}^{n}(۱ - p_i)\}, \qquad P_\alpha^U = max\{۱ - \prod_{i=۱}^{n}(۱ - p_i)\}$$

$$s.t. \begin{cases} P_{۱\alpha}^L \le p_۱ \le P_{۱\alpha}^U \\ P_{۲\alpha}^L \le p_۲ \le P_{۲\alpha}^U \\ \vdots \\ P_{n\alpha}^L \le p_n \le P_{n\alpha}^U \end{cases} \qquad (۹.۳)$$

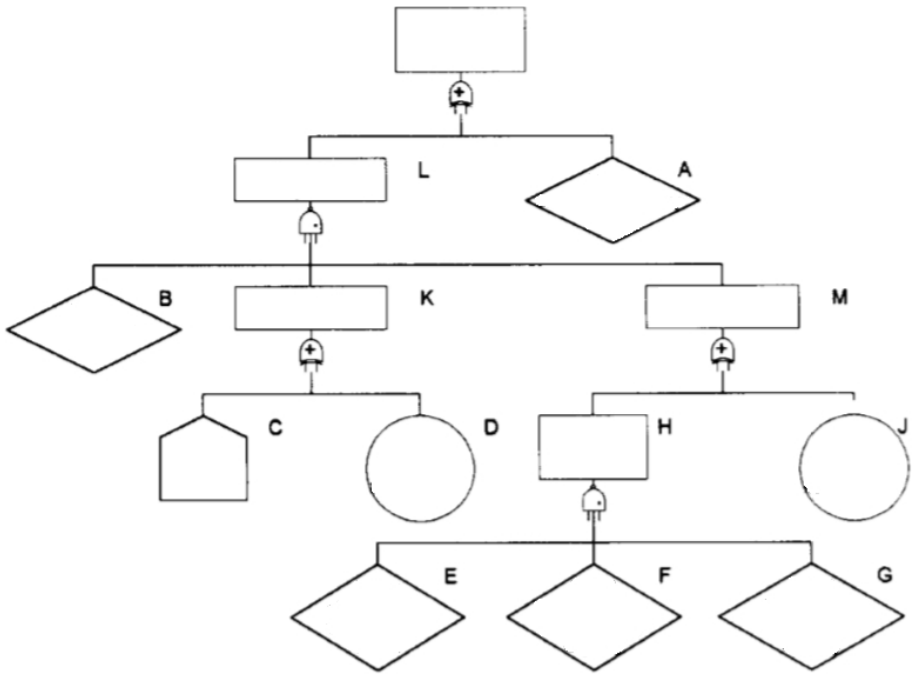
در ادامه با استفاده از یک مثال عددی سعی می کنیم تا روش ارائه شده را بیشتر تشریح کنیم.

مثال ۲.۲.۳. فرض کنید که زیرزمین یک ساختمان مجهز به یک سیستم پمپ فاضلاب است که اجزای تشکیل دهنده آن در شکل ۴.۳ نمایش داده شده‌اند. هنگام باران‌های شدید اگر میزان آب ورودی بیش از ظرفیت نرمال پمپ باشد، ممکن است آب‌گرفتگی صورت گیرد. با این وجود، اگر سیستم پمپ فاضلاب به درستی کار نکند حتی رگبارهای کوچک باران هم ممکن است باعث جاری شدن سیل در زیرزمین شود. فرض کنید سیستم با استفاده از دو پمپ فعالیت می‌کند: پمپ اولیه که با توان مطلوب مشغول به فعالیت هست و یک پمپ بازگرداننده که هر زمان توان پمپ اولیه کم شود با استفاده از باطری فعال خواهد شد. اگر هر دو پمپ در طول جریان آب‌گرفتگی فعالیت نکنند خرابی سیستم پمپ رخ خواهد داد. پمپ اولیه درصورتی از کار می‌افتد که شکسته شود یا برق آن قطع شود. خرابی پمپ بازگرداننده می‌تواند به علت اختلال در عملکرد اجزای آن یا خالی شدن باطری پمپ رخ دهد. حال با توجه به توضیحات ارائه شده راجع به روش عملکرد سیستم پمپ فاظلاب ساختمان و روش تحلیل درخت عیب قادر هستیم تا این روش عملکرد سیستم را در قالب درخت عیب ارائه شده در شکل ۵.۳ ارائه دهیم.

با توجه به این‌که احتمال خرابی هر یک از عوامل سیستم پمپ فاضلاب ساختمان را به طور دقیق نمی‌توان تعیین کرد، در ادامه با استفاده از کمیت‌های فازی مقادیر خرابی هر یک از این عوامل براساس نظرخبره ارائه شده است. از نمادگزاری جدول ۳.۳ برای مشخص کردن عوامل خرابی کل سیستم استفاده می‌شود.



شکل ۴.۳: سیستم پمپ فاضلاب

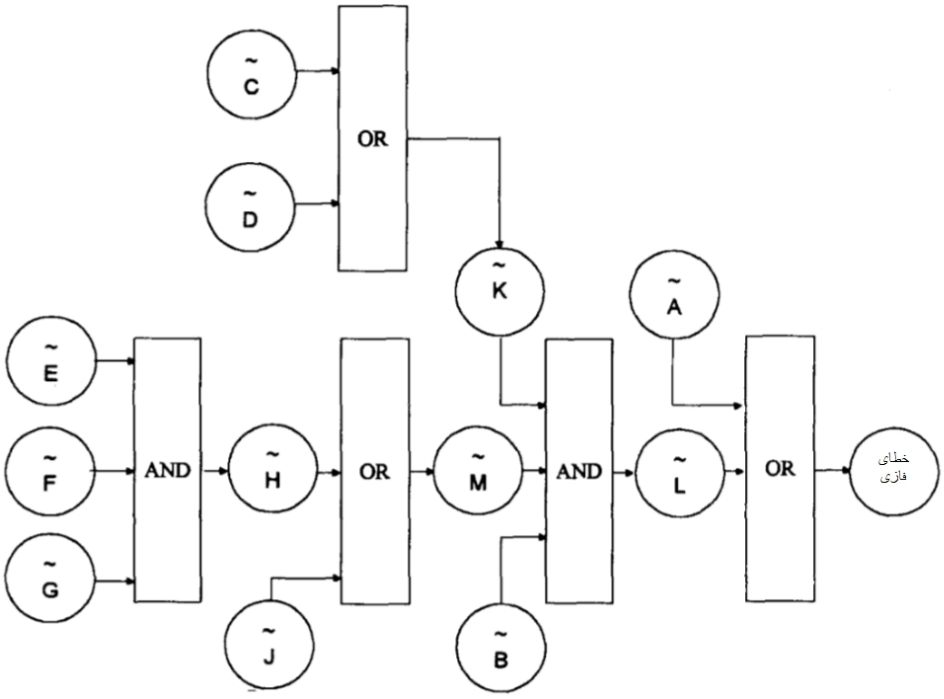


شکل ۵.۳: تحلیل درخت عیب برای جاری شدن سیل در زیرزمین

براساس نمادگزاری انجام شده، درخت عیب ارائه شده در شکل ۵.۳ را به صورت شکل ۶.۳ بازنویسی می‌کنیم.

جدول ۳.۳: کمیت‌های فازی عوامل سیستم پمپ فاضلاب

کمیت‌های فازی	عوامل خرابی کل سیستم
$\tilde{A}$	میزان آب ورودی بیش از ظرفیت پمپ
$\tilde{B}$	میزان آب ورودی به پمپ
$\tilde{C}$	قطعی برق
$\tilde{D}$	اختلال در عملکرد اجزای پمپ اولیه
$\tilde{E}$	چاره سازی
$\tilde{F}$	زمان قطعی برق بیش از ظرفیت باطری
$\tilde{G}$	دوره جریان ورودی بیش از ظرفیت باطری
$\tilde{H}$	تخلیه باطری
$\tilde{J}$	اختلال در عملکرد اجزای پمپ بازگرداننده
$\tilde{K}$	خرابی پمپ اولیه
$\tilde{L}$	خرابی کل سیستم پمپ
$\tilde{M}$	خرابی پمپ بازگرداننده

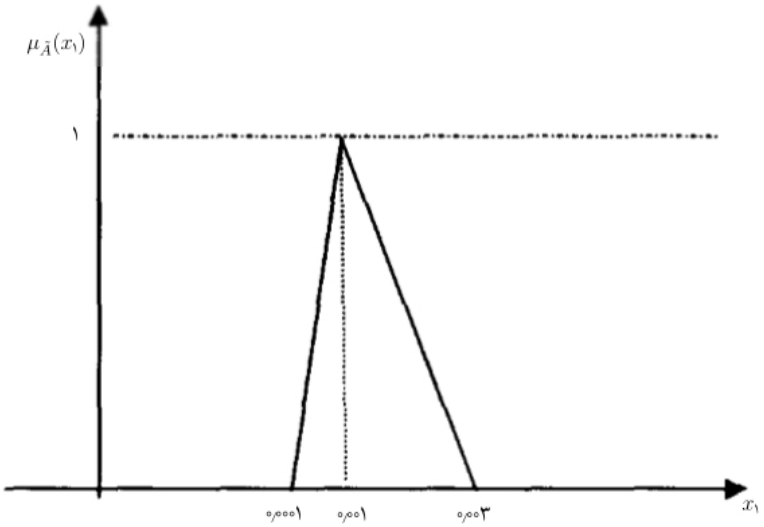


شکل ۶.۳: تحلیل درخت عیب فازی برای مثال ۲.۲.۳

علاوه بر آن تابع عضویت هریک از این کمیت‌های فازی تخصیص داده شده و نمودارهای

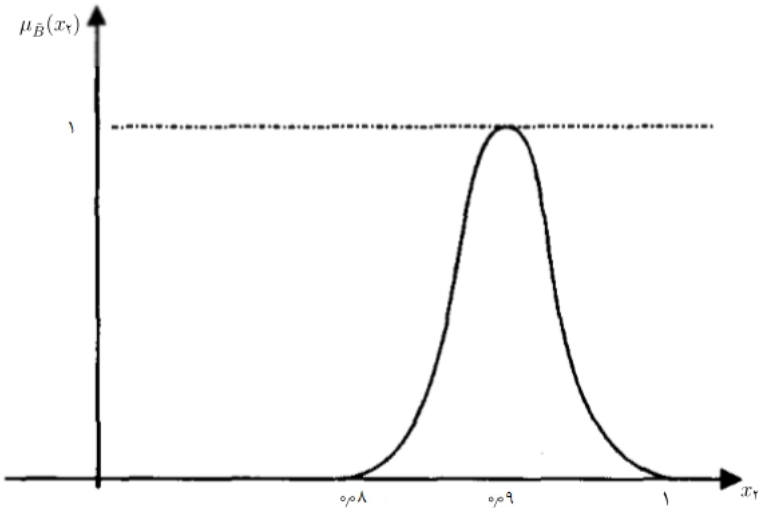
متناظر با آن‌ها به ترتیب درشکل‌های ۷.۳ تا ۱۴.۳ آورده شده‌اند.

$$\mu_{\tilde{A}}(x_۱) = \begin{cases} \frac{x_۱ - ۰/۰۰۰۱}{۰/۰۰۱ - ۰/۰۰۰۱}, & ۰/۰۰۰۱ < x_۱ \leq ۰/۰۰۱ \\ \frac{۰/۰۰۳ - x_۱}{۰/۰۰۳ - ۰/۰۰۱}, & ۰/۰۰۱ < x_۱ \leq ۰/۰۰۳ \end{cases}$$



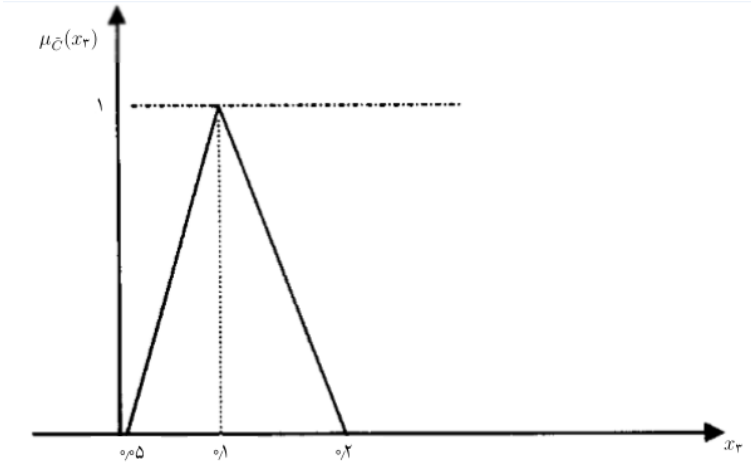
شکل ۷.۳: تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}$ در مثال ۲.۲.۳

$$\mu_{\tilde{B}}(x_۲) = exp[-۵۷۶(x_۲ - ۰/۹)^۲], \qquad ۰/۸ \leq x_۲ \leq ۱$$



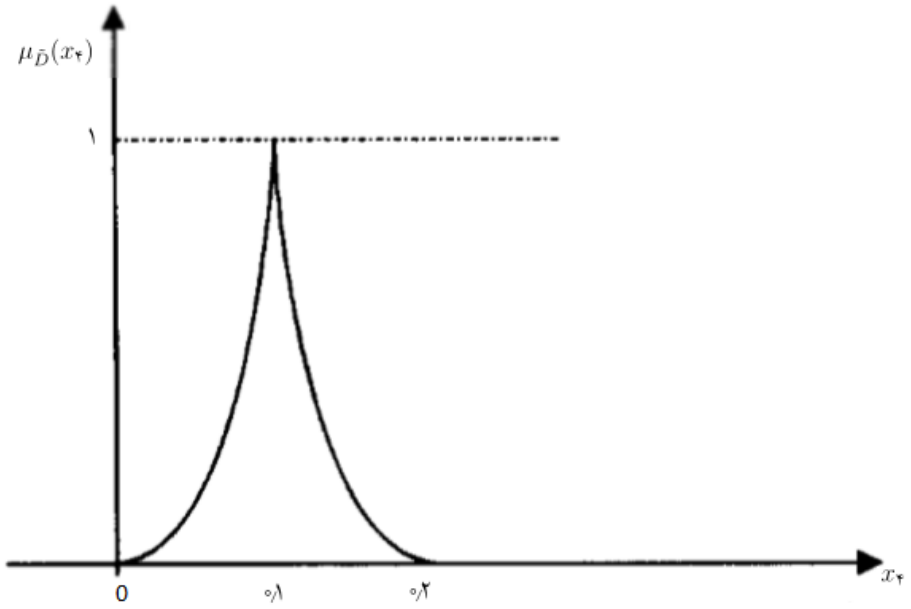
شکل ۸.۳: تابع عضویت عدد فازی $\tilde{B}$ در مثال ۲.۲.۳

$$\mu_{\tilde{C}}(x_۳) = \begin{cases} \frac{x_۳ - ۰/۰۵}{۰/۱ - ۰/۰۵}, & ۰/۰۵ < x_۳ \leq ۰/۱ \\ \frac{۰/۲ - x_۳}{۰/۲ - ۰/۱}, & ۰/۱ < x_۳ \leq ۰/۲ \end{cases}$$



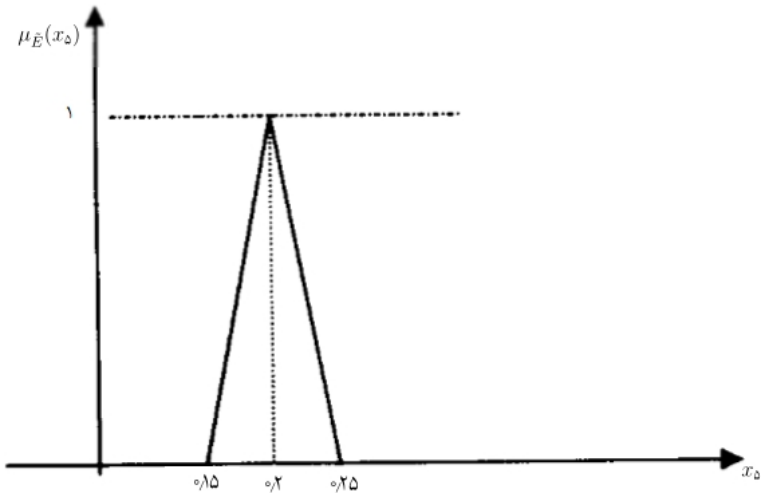
شکل ۹.۳: تابع عضویت عدد فازی $\tilde{C}$ در مثال ۲.۲.۳

$$\mu_{\tilde{D}}(x_۴) = \begin{cases} exp[۵۵(x_۴ - ۰/۱)], & ۰ \leq x_۴ \leq ۰/۱ \\ exp[-۵۵(x_۴ - ۰/۱)], & ۰/۱ < x_۴ \leq ۰/۲ \end{cases}$$



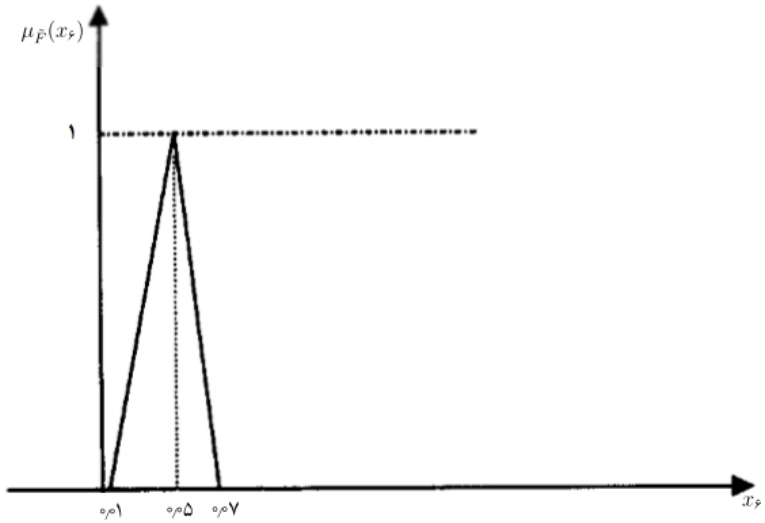
شکل ۱۰.۳: تابع عضویت عدد فازی $\tilde{D}$ در مثال ۲.۲.۳

$$\mu_{\tilde{E}}(x_{۵}) = \begin{cases} \frac{x_{۵}-۰/۱۵}{۰/۲-۰/۱۵}, & ۰/۱۵ < x_{۵} \leq ۰/۲ \\ \frac{۰/۲۵-x_{۵}}{۰/۲۵-۰/۲}, & ۰/۲ < x_{۵} \leq ۰/۲۵ \end{cases}$$



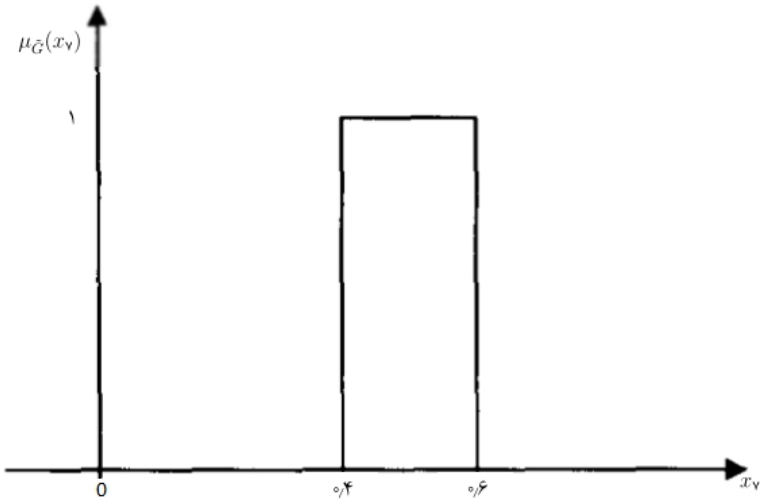
شکل ۱۱.۳: تابع عضویت عدد فازی $\tilde{E}$ در مثال ۲.۲.۳

$$\mu_{\tilde{F}}(x_{۶}) = \begin{cases} \frac{x_{۶}-۰/۰۱}{۰/۰۵-۰/۰۱}, & ۰/۰۱ < x_{۶} \leq ۰/۰۵ \\ \frac{۰/۰۷-x_{۶}}{۰/۰۷-۰/۰۵}, & ۰/۰۵ < x_{۶} \leq ۰/۰۷ \end{cases}$$



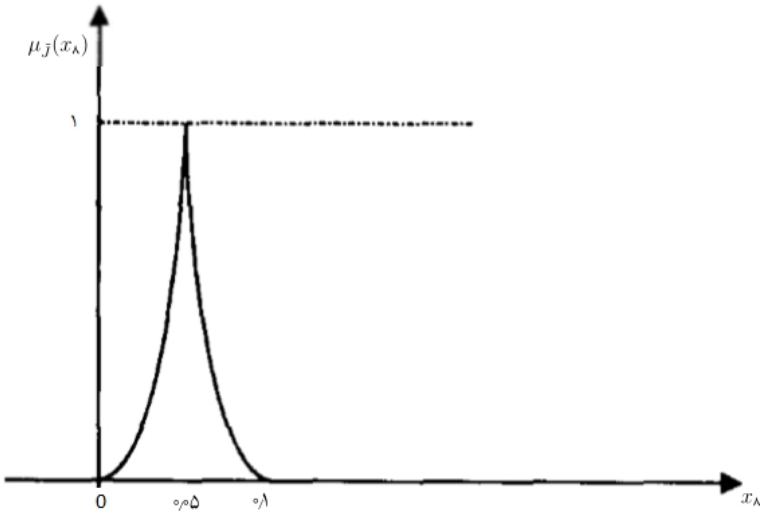
شکل ۱۲.۳: تابع عضویت عدد فازی $\tilde{F}$ در مثال ۲.۲.۳

$$\mu_{\tilde{G}}(x_{۷}) = \begin{cases} ۰, & ۰ \leq x_{۷} \leq ۰/۴ \\ ۱, & ۰/۴ < x_{۷} \leq ۰/۶ \\ ۰, & ۰/۶ < x_{۷} \leq ۱ \end{cases}$$



شکل ۱۳.۳: تابع عضویت عدد فازی $\tilde{G}$ در مثال ۲.۲.۳

$$\mu_{\tilde{J}}(x_۸) = \begin{cases} exp[۹۹(x_۸ - ۰/۰۵)], & ۰ \leq x_۸ \leq ۰/۰۵ \\ exp[-۹۹(x_۸ - ۰/۰۵)], & ۰/۰۵ < x_۸ \leq ۰/۱ \end{cases}$$



شکل ۱۴.۳: تابع عضویت عدد فازی $\tilde{J}$ در مثال ۲.۲.۳

با توجه به شکل ۶.۳ و استفاده از روش تحلیل درخت عیب داریم:

$$\tilde{H} = \tilde{E} \otimes \tilde{F} \otimes \tilde{G}, \qquad \tilde{M} = \tilde{H} \oplus \tilde{J}, \qquad \tilde{K} = \tilde{C} \oplus \tilde{D}$$

$$\tilde{L} = \tilde{B} \otimes \tilde{K} \otimes \tilde{M}, \qquad \tilde{\phi} = \tilde{A} \oplus \tilde{L} \qquad (۱۰.۳)$$

براساس شکل ۵.۳ و ۶.۳، احتمال فازی خرابی سیستم پمپ فاضلاب ساختمان همان عبارت ϕ می‌باشد که با توجه به نمادگزاری‌های انجام شده از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\tilde{\phi} = \tilde{A} \oplus \tilde{B} \otimes (\tilde{C} \oplus \tilde{D}) \otimes (\tilde{E} \otimes \tilde{F} \otimes \tilde{G} \oplus \tilde{J}) \qquad (۱۱.۳)$$

اکنون می‌توانیم روش حل عددی جهت رسیدن به جواب نهایی قابلیت اعتماد سیستم پمپ فاضلاب را در چهار مرحله زیر انجام دهیم.

گام اول: از رابطه (۱۱.۳) ، مدل حل مسئله را می‌توان با استفاده از $\alpha-$برش $\tilde{\phi}$ در قالب برنامه‌ریزی غیرخطی که در ادامه آورده شده است بیان کرد.

$$\phi_\alpha^L = min\{x_۱ + x_۲(x_۳ + x_۴)(x_۵ x_۶ x_۷ + x_۸)\}, \qquad \phi_\alpha^U = max\{x_۱ + x_۲(x_۳ + x_۴)(x_۵ x_۶ x_۷ + x_۸)\}$$

$$s.t. \begin{cases} x_۱ \in \tilde{A}_\alpha = [A_\alpha^L, A_\alpha^U] \\ x_۲ \in \tilde{B}_\alpha = [B_\alpha^L, B_\alpha^U] \\ x_۳ \in \tilde{C}_\alpha = [C_\alpha^L, C_\alpha^U] \\ x_۴ \in \tilde{D}_\alpha = [D_\alpha^L, D_\alpha^U] \\ x_۵ \in \tilde{E}_\alpha = [E_\alpha^L, E_\alpha^U] \\ x_۶ \in \tilde{F}_\alpha = [F_\alpha^L, F_\alpha^U] \\ x_۷ \in \tilde{G}_\alpha = [G_\alpha^L, G_\alpha^U] \\ x_۸ \in \tilde{J}_\alpha = [J_\alpha^L, J_\alpha^U] \end{cases} \qquad (۱۲.۳)$$

گام دوم: $\alpha-$برش‌های اعداد فازی تخصیص داده شده به هر یک از اجزای سیستم را با تقریب ۰/۱ محاسبه و در جدول ۴.۳ گزارش می‌کنیم.

گام سوم: اکنون $\alpha-$برش‌های به‌دست آمده در گام دوم را در برنامه‌ریزی غیرخطی گام اول جایگذاری و با استفاده از نرم افزار مناسب جواب آن را به‌دست می‌آوریم. در این صورت مجموعه فواصل به صورت $[\phi_\alpha^L, \phi_\alpha^U]$ به‌دست می‌آیند که با تقریب‌های ۰/۱ در جدول ۵.۳ گزارش شده‌اند.

گام چهارم: در پایان نمودار تابع عضویت خرابی فازی سیستم پمپ فاضلاب را با استفاده از فواصل گزارش شده در جدول ۵.۳ به‌صورت تقریبی رسم کرده و در شکل ۱۵.۳ آورده شده است.

براساس محاسبات انجام شده و شکل رسم شده می‌توانیم به تحلیل عملکرد پمپ بپردازیم. همان‌طور که انتظار می‌رفت با درنظرگرفتن $\alpha = ۱$، مقدار احتمال خرابی برابر با ۰/۰۱۰۹ خواهد بود که با مقدار به‌دست آمده برای حالت دقیق مطابقت دارد. در صورتی که بخواهیم مطمئن باشیم احتمال خرابی سیستم برابر با $\alpha-$برش حداقل ۰/۴ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. براین اساس حداقل و حداکثر مقدار برای ϕ به صورت زیر گزارش خواهند شد $\phi_\alpha^L \geq$ ۰/۰۰۶۰۹، $\phi_\alpha^U \leq$ ۰/۰۱۹۶۸.

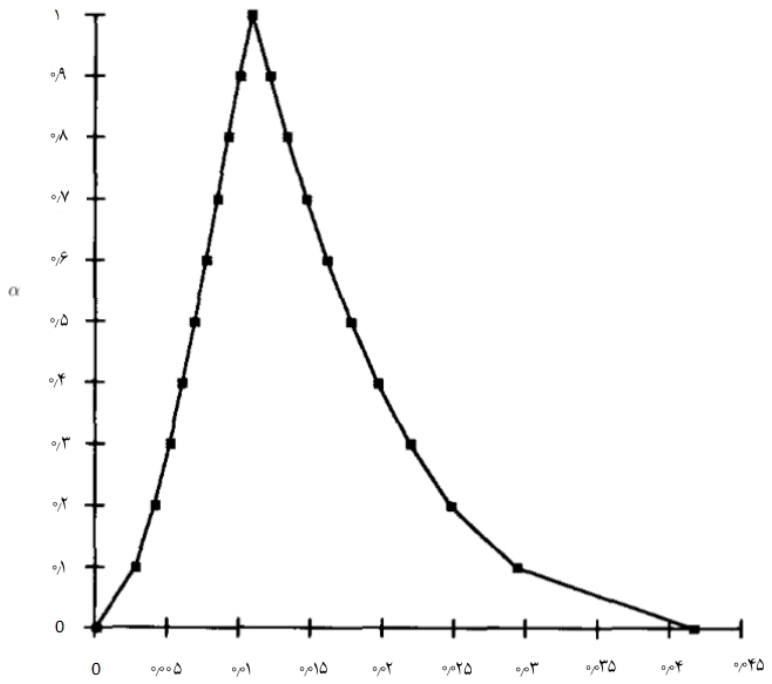
جدول ۴.۳: $\alpha-$برش مجموعه‌های فازی $\tilde{J}, \tilde{G}, \tilde{F}, \tilde{E}, \tilde{D}, \tilde{C}, \tilde{B}, \tilde{A}$

α	$\tilde{A}_\alpha$	$\tilde{B}_\alpha$	$\tilde{C}_\alpha$	$\tilde{D}_\alpha$
۰	[۰/۰۰۰۱ ،۰/۰۰۳]	[۰/۸،۱]	[۰/۰۵،۰/۲]	[۰،۰/۱۵]
۰/۱	[۰/۰۰۰۱۹،۰/۰۰۲۸]	[۰/۸۳۶۸،۰/۹۶۳۲]	[۰/۰۵۵،۰/۱۹]	[۰/۰۵۸۱،۰/۱۴۱۹]
۰/۲	[۰/۰۰۰۲۸،۰/۰۰۲۶]	[۰/۸۴۷۱،۰/۹۵۲۹]	[۰/۰۶،۰/۱۸]	[۰/۰۷۰۷،۰/۱۲۹۳]
۰/۳	[۰/۰۰۰۳۷،۰/۰۰۲۴]	[۰/۸۵۴۳،۰/۹۴۵۷]	[۰/۰۶۵،۰/۱۷]	[۰/۰۷۸۱،۰/۱۲۱۹]
۰/۴	[۰/۰۰۰۴۶،۰/۰۰۲۲]	[۰/۸۶۰۱،۰/۹۳۹۹]	[۰/۰۷،۰/۱۶]	[۰/۰۸۳۳،۰/۱۱۶۷]
۰/۵	[۰/۰۰۰۵۵،۰/۰۰۲۰]	[۰/۸۶۵۳،۰/۹۳۴۷]	[۰/۰۷۵،۰/۱۵]	[۰/۰۸۷۴،۰/۱۱۲۶]
۰/۶	[۰/۰۰۰۶۴،۰/۰۰۱۸]	[۰/۸۷۰۲،۰/۹۲۹۸]	[۰/۰۸،۰/۱۴]	[۰/۰۹۰۷،۰/۱۰۹۳]
۰/۷	[۰/۰۰۰۷۳،۰/۰۰۱۶]	[۰/۸۷۵۱،۰/۹۲۴۹]	[۰/۰۸۵،۰/۱۳]	[۰/۰۹۳۵،۰/۱۰۶۵]
۰/۸	[۰/۰۰۰۸۲،۰/۰۰۱۴]	[۰/۸۸۰۳،۰/۹۱۹۷]	[۰/۰۹،۰/۱۲]	[۰/۰۹۵۹،۰/۱۰۴۱]
۰/۹	[۰/۰۰۰۹۱،۰/۰۰۱۲]	[۰/۸۸۶۵،۰/۹۱۳۵]	[۰/۰۹۵،۰/۱۱]	[۰/۰۹۸۱،۰/۱۰۱۹]
۱	[۰/۰۰۱،۰/۰۰۱]	[۰/۹،۰/۹]	[۰/۱،۰/۱]	[۰/۱،۰/۱]

α	$\tilde{E}_\alpha$	$\tilde{F}_\alpha$	$\tilde{G}_\alpha$	$\tilde{J}_\alpha$
۰	[۰/۱۵ ،۰/۲۵]	[۰/۰۱،۰/۰۷]	[۰/۴،۰/۶]	[۰،۰/۱]
۰/۱	[۰/۱۵۵،۰/۲۴۵]	[۰/۰۱۴،۰/۰۶۸]	[۰/۴۱،۰/۵۹]	[۰/۰۲۶۷،۰/۰۷۳۳]
۰/۲	[۰/۱۶،۰/۲۴]	[۰/۰۱۸،۰/۰۶۶]	[۰/۴۲،۰/۵۸]	[۰/۰۳۳۷،۰/۰۶۶۳]
۰/۳	[۰/۱۶۵،۰/۲۳۵]	[۰/۰۲۲،۰/۰۶۴]	[۰/۴۳،۰/۵۷]	[۰/۰۳۷۸،۰/۰۶۲۲]
۰/۴	[۰/۱۷،۰/۲۳]	[۰/۰۲۶،۰/۰۶۲]	[۰/۴۴،۰/۵۶]	[۰/۰۴۰۷،۰/۰۵۹۳]
۰/۵	[۰/۱۵۵،۰/۲۲۵]	[۰/۰۳،۰/۰۶]	[۰/۴۵،۰/۵۵]	[۰/۰۴۳،۰/۰۵۷]
۰/۶	[۰/۱۸،۰/۲۲]	[۰/۰۳۴،۰/۰۵۸]	[۰/۴۶،۰/۵۴]	[۰/۰۴۴۸،۰/۰۵۵۲]
۰/۷	[۰/۱۸۵،۰/۲۱۵]	[۰/۰۳۸،۰/۰۵۶]	[۰/۴۷،۰/۵۳]	[۰/۰۴۶۴،۰/۰۵۳۶]
۰/۸	[۰/۱۹،۰/۲۱]	[۰/۰۴۲،۰/۰۵۴]	[۰/۴۸،۰/۵۲]	[۰/۰۴۷۷،۰/۰۵۲۳]
۰/۹	[۰/۱۹۵،۰/۲۰۵]	[۰/۰۴۶،۰/۰۵۲]	[۰/۴۹،۰/۵۱]	[۰/۰۴۸۹،۰/۰۵۱۱]
۱	[۰/۲،۰/۲]	[۰/۰۵،۰/۰۵]	[۰/۵،۰/۵]	[۰/۰۵،۰/۰۵]

جدول ۵.۳: فاصله احتمال جاری شدن سیل در زیرزمین

α	$\tilde{\phi}_\alpha$
۰	[۰/۰۰۰۱۲ ،۰/۰۴۱۶۸]
۰/۱	[۰/۰۰۲۸۱،۰/۰۲۹۳۶]
۰/۲	[۰/۰۰۴۱۵،۰/۰۲۴۸۳]
۰/۳	[۰/۰۰۵۱۹،۰/۲۱۹۳]
۰/۴	[۰/۰۰۶۰۹،۰/۰۱۹۶۸]
۰/۵	[۰/۰۰۶۹۲،۰/۰۱۷۸۱]
۰/۶	[۰/۰۰۷۷۲،۰/۰۱۶۱۸]
۰/۷	[۰/۰۰۸۴۹،۰/۰۱۴۷۲]
۰/۸	[۰/۰۰۹۲۶،۰/۰۱۳۳۸]
۰/۹	[۰/۰۱۰۰۴،۰/۰۱۲۱۴]
۱	[۰/۰۱۰۹،۰/۰۱۰۹]



شکل ۱۵.۳: مقدار احتمال نهایی برای جاری شدن سیل در زیرزمین

فصل ۴

تعیم قابلیت اعتماد سیستم‌های دینامیک بر پایه درخت عیب فازی زمانی پاندورا

در این فصل، روشی ارائه می‌کنیم که استنباط افراد متخصص و نظریه مجموعه فازی را با درخت عیب زمانی پاندورا ترکیب می‌کند تا تحلیل دینامیکی سیستم‌های پیچیده را با داده‌های نادقیق و یا ناکافی مورد بررسی قرار دهد. در بخش ۱.۴ به معرفی پاندورا می‌پردازیم. در بخش ۲.۴ درخت عیب زمانی پاندورا را تعریف می‌کنیم و در بخش‌های بعدی، اهداف و فرضیات، دروازه‌ها، قوانین زمانی، ارزیابی کیفی و کمی درخت عیب زمانی پاندورا را بیان می‌کنیم. با این حال، برای بسیاری از سیستم‌های پیچیده، تخمین داده‌های شکست دقیق اجزا از حوادث گذشته به دلیل فقدان دانش، کمبود اطلاعات آماری و تغییرات در محیط‌های عملیاتی سیستم‌ها بسیار دشوار است. بدین‌ترتیب، در غیاب داده‌های شکست دقیق، ممکن است لازم باشد با تخمین‌های نادقیق احتمالات کار کنیم. بنابراین به کمک نظریه مجموعه فازی، عملگرهای فازی را برای درخت عیب فازی زمانی پاندورا بیان می‌کنیم و در بخش ۳.۴ با استفاده از یک مطالعه موردی، فرآیند به‌کارگیری داده‌های شکست فازی برای اجزای سیستم و نهایتا فازی زدایی و محاسبه احتمال رویداد برتر سیستم را با استفاده از عملگرهای حسابی فازی بررسی می‌کنیم. در بخش ۴.۴ تاثیر عملگرهای محاسباتی در تحلیل قابلیت اعتماد

فازی سیستم را بیان کرده و به بررسی عملگرهای مبتنی بر $T-$نرم دراستیک و ویژگی‌هایشان روی مجموعه‌های فازی می‌پردازیم و در بخش ۵.۴ عملگرهای مبتنی بر $T-$نرم دراستیک را برای تحلیل قابلیت اعتماد سیستم‌های دینامیک بر پایه دروازه‌های درخت عیب زمانی پاندورا پیشنهاد می‌دهیم. عمده مطالب این فصل از مراجع [۱۹، ۲۷، ۲۸] استخراج شده‌اند.

۱.۴ مقدمه

در ادبیات درختان عیب اغلب به صورت کلاسیک یا پویا، براساس روابط وابستگی بین اجزا و رویدادهای مربوطه طبقه‌بندی می‌شوند. مثال‌هایی از این وابستگی‌ها می‌تواند اولویت رویداد، توالی، رفتار یدکی و غیره باشد. با معرفی دروازه‌های دینامیک، رابطه بین رخدادها و مولفه‌های یک درخت عیب به یک مدل دینامیک تبدیل شده‌است که براین اساس، نتیجه بستگی به ترتیب و تعداد پیشامدهای رویدادهای اساسی دارد.

توسعه بیشتر در دروازه‌های دینامیک منجر به توسعه درختان عیب با الزامات زمانی شده‌است. درختان عیب، دروازه‌های دینامیک را گسترش می‌دهند تا الزامات توالی سخت‌تر برای رویدادها را در بر داشته باشند. با این حال، گنجاندن محدودیت‌های زمانی در این رویکردها به شدت فرآیند تحلیل را محدود می‌سازد.

واضح است که در تحلیل درخت عیب کمبودی وجود دارد و هدف این پایان نامه ارائه راه حل بالقوه به نام پاندورا است که هدف آن حل مسئله با گسترش تحلیل درخت عیب با قابلیت‌های جدید است و بر اساس اصولی است که توسط دروازه AND اولویت‌دار ($PAND$[1]) ارائه می شود.

پاندورا نسخه به‌روزشده از دروازه دیرینه $PAND$ است که به دهه ۱۹۷۰ باز می‌گردد. مفاهیم مربوط به استفاده از دروازه $PAND$، مدل‌سازی رفتار شکست پویا را با توجه به بهینه‌سازی طراحی و تحلیل حساسیت مورد بحث قرار دادند. دروازه $PAND$ مفهوم توالی رویداد را به یک درخت عیب معرفی می‌کند، بنابراین ممکن است خرابی به برخی از وقایع موثر در نظم خاص بستگی داشته باشد. متأسفانه، دروازه $PAND$ اولیه از مشکلات مختلفی، از یک تعریف مبهم گرفته تا کمبود اطلاعات در مورد نحوه استفاده از آن در تجزیه و تحلیل رنج می‌برد.

هدف پاندورا غلبه بر این مسائل است. این مبنا بر پایه‌های گذاشته شده توسط دروازه $PAND$ اولیه، بنا شده و ایده را با معرفی دو دروازه زمانی جدید برای بیان کامل‌تر توالی رویدادها و معرفی مجموعه‌ای از قوانین و الگوریتم‌ها، بیشتر پیش می‌برد. درخت عیب زمانی پاندورا به روش‌های مشابه درختان عیب کلاسیک مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته، نتیجه یک روش درخت عیب قدرتمندتر و رساتر است که می‌تواند برای طیف وسیعی از سیستم‌ها اعمال شود و نتایج دقیق‌تری به‌دست آورد.

[1] Priority-AND

به طور خلاصه: تحلیل درخت عیب کلاسیک برای تحلیل سیستم‌های پیچیده پویا که در آن رفتار شکست به ترتیب وقایع بستگی دارد، کافی نیست. پاندورا با گسترش تحلیل درخت عیب با قابلیت‌های زمانی جدید این مسئله را حل می‌کند تا تحلیل توالی‌ها و همچنین ترکیبی از خرابی‌ها را فراهم کند.

۲.۴ درخت عیب زمانی پاندورا

همانند درختان عیب دینامیک، پاندورا قصد دارد تا تحلیلگران را قادر سازد تا به راحتی رفتار شکست مرتبط با توالی را در درختان عیب ثبت کنند. پاندورا درخت‌های عیب کلاسیک را با تعریف سه دروازه زمانی: AND اولویت‌دار ($PAND$)، OR اولویت‌دار (POR[1]) و AND هم‌زمان ($SAND$[2]) گسترش می‌دهد. این دروازه‌ها به تحلیلگران اجازه می‌دهند که نمایانگر توالی یا رخداد هم‌زمان رویدادها به عنوان بخشی از یک درخت عیب باشند.

تحلیل درخت عیب کلاسیک با استفاده از عملگرهای AND و OR امکان تعیین ترکیبات یا مجموعه‌ای از رویدادهای اساسی را فراهم می‌کند. پاندورا امکان تعیین توالی مجموعه‌ای از رویدادها را اضافه می‌کند. دنباله‌ای از رخدادها که یک ترتیب رویداد نامیده می‌شوند، برای منطق پاندورا اساسی است.

پاندورا، شاخه‌ای از درختان عیب کلاسیک است که درختان عیب کلاسیکی را می‌سازد که قادر به تحلیل پویا هستند. پاندورا، درختان عیب کلاسیک را با دروازه‌های زمانی جدید افزایش می‌دهد و قوانین زمانی را تعیین می‌کند تا بتواند تحلیل کیفی را انجام دهد و بدین ترتیب بر محدودیت‌های تحلیل درخت عیب در بیان رفتارهای وابسته به توالی غلبه کند.

۱.۲.۴ اهداف و فرضیات درخت عیب زمانی پاندورا

اساس پاندورا، تعریف مجدد دروازه AND اولویت‌دار مرسوم است. کتاب راهنمای درخت عیب بیان می‌کند که برای اهداف تحلیل درخت عیب، این وقوع عیب و ایرادهایی است که اهمیت دارد، به عنوان مثال انتقال یک جز به یک وضعیت خرابی در یک نقطه خاص در زمان، به جای وجود وضعیت خرابی. بنابراین، پاندورا با تمرکز تنها بر روی رویدادها و روابط زمانی آن‌ها، از پیچیدگی‌های زمانی رسمی اجتناب می‌کند و براساس یک اصل ساده است: مانند دروازه اولیه $PAND$ طراحی شده است که ترتیب زمانی رویدادها را به عنوان بخشی از ساختار درخت عیب خود به نمایش می‌گذارد.

پاندورا امکان معرفی کلی و تحلیل توالی‌های رویداد را بدون معرفی بسیاری از دروازه‌های جدید یا بیش از حد پیچیده کردن روند تحلیل درخت عیب با معانی جدید پیچیده فراهم

[1] Priority-OR
[2] Simultaneous-AND

می‌کند. برای رسیدن به این هدف، پاندورا بر مبنای تعریف مجدد از دروازه AND اولویت‌دار دیرینه است. هدف این است که تا حد ممکن نزدیک به فلسفه اصلی سادگی و انعطاف‌پذیری که تحلیل درخت عیب را محبوب می‌کند، باقی بماند و در عین حال ابهاماتی را که دروازه $PAND$ اولیه را گرفتار کرده است نیز حل کند. پاندورا فرمت جدیدی برای تحلیل درخت عیب است که به منظور فعال کردن درختان عیب در مدل‌سازی توالی رویدادها و ترتیب زمانی نسبی است، که امید می‌رود در تحلیل سیستم‌های پویا کمک کند. برای این منظور، پاندورا حول یک تعریف مجدد از دروازه $PAND$ ساخته شده‌است. تعاریف مورد استفاده در پاندورا برای حذف این ابهامات و ارائه چارچوبی برای تحلیل کیفی دروازه $PAND$ و دیگر دروازه‌های زمانی در نظر گرفته شده‌اند.

پاندورا فرض می‌کند که: وقوع رویدادها آنی است، یعنی از ''موفقیت'' تا ''شکست'' بدون هیچ تاخیری و به محض وقوع حوادث، آن‌ها نمی‌توانند بارفتن به حالت غیر رخداد تعمیر شوند بدین معنی که اجزا غیر قابل‌تعمیر هستند.

همانطور که ذکر شد، پاندورا فقط مربوط به ترتیب وقوع رویدادها است و نه با لحظه دقیق وقوع آن‌ها. برای مدل‌سازی این ترتیب از یک ویژگی به نام مقدار توالی یک رویداد استفاده می‌شود: یک عدد صحیح مثبت که موقعیت یک رویداد را در توالی سایر رویدادها مشخص می‌کند. به عنوان مثال $S(X)$ مقدار توالی رویداد X است. با توجه به مجموعه‌ای از رویدادها، $S(X) = ۱$ بدین معنی است که این رویداد برای اولین‌بار در مجموعه رخ می‌دهد، $S(X) = ۲$ به معنای وقوع دوم است و همچنین غیره. اگر دو رویداد از مقدار توالی یکسان برخوردار باشند، پس هم‌زمان اتفاق می‌افتند. اگر یک رویداد دارای مقدار توالی صفر باشد، به این معنی است که رخ نداده است. این مقادیر توالی را می‌توان برای ساخت یک جدول حقیقت زمانی (TTT[1]) استفاده کرد که با استفاده از آن می‌توان مقادیر عبارات زمانی را محاسبه کرد. جداول حقیقت زمانی مشابه جدول‌های حقیقت بولی کلاسیک هستند.

۲.۲.۴ دروازه‌های درخت عیب زمانی پاندورا

همان‌گونه که گفته شد پاندورا فرض می‌کند که وقوع رویدادها آنی است و غیر قابل‌تعمیر هستند. با توجه به این موضوع، سه رابطه زمانی ممکن بین دو رویداد X و Y وجود دارد:

- **پیشتر**: ابتدا X اتفاق می‌افتد ، سپس Y رخ می‌دهد.
- **مابعد**: ابتدا Y اتفاق می‌افتد ، سپس X رخ می‌دهد.
- **هم‌زمان**: X و Y به طور همزمان اتفاق می‌افتند.

برای نشان دادن این سه رابطه زمانی بین رویدادها، یعنی برای ثبت توالی بین وقوع رویدادها، پاندورا سه دروازه زمانی را به‌صورت زیر معرفی می‌کند:

[1] Temporal Truth Table

۱ـ دروازه AND اولویت‌دار

دروازه AND اولویت‌دار[1] یک دروازه جدید نیست و در تحلیل درخت عیب تا دهه ۱۹۷۰ مورد استفاده قرار گرفته است همچنین در روش درخت عیب دینامیک، همانطور که در فصل دوم ذکر شد، مورد استفاده قرار می‌گیرد. با این حال، معانی دروازه $PAND$ به طور کامل تعریف نشده‌اند، به خصوص با توجه به آنچه که رویدادهای ورودی به طور همزمان رخ می‌دهند یا زمانی که دنباله‌های متناقض استفاده می‌شوند و این ابهام کارآیی آن را در تحلیل کیفی محدود می‌کند. تکنیک‌های بعدی مانند پاندورا معانی خود را در عمق بیشتری تعریف کرده‌اند. بنابراین در پاندورا، از دروازه $PAND$ برای نمایش یک توالی خاص از رویدادها استفاده می‌شود. از نماد "$\triangleleft$" برای نمایش دروازه $PAND$ در عبارات منطقی به کار می‌رود، به‌طوریکه، $X \triangleleft Y$ به معنای $(X\ PAND\ Y)$ است که در آن X و Y هردو رویداد شکست هستند. دروازه $PAND$ در صورتی محقق می‌شود که:

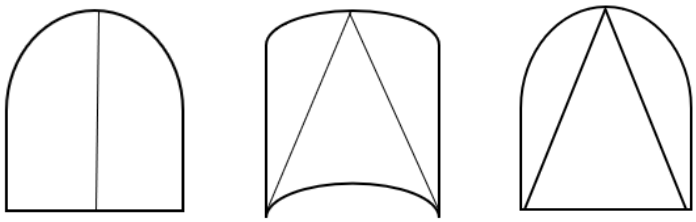
- همه رویداهای ورودی اتفاق افتند.
- رویدادهای ورودی در توالی از چپ به راست رخ دهند.
- هیچ یک از رویدادهای ورودی به طور همزمان رخ ندهند.

۲ـ دروازه OR اولویت‌دار

مانند دروازه AND اولویت‌دار، دروازه OR اولویت‌دار[2] نیز یک توالی را تعریف می‌کند، اما یک انفصال مرتب شده را به جای یک پیوند (اتصال) مرتب شده مشخص می‌کند. از آن برای نشان دادن این امر استفاده می‌شود که یک رویداد ورودی دارای اولویت است و باید ابتدا برای محقق شدن خروجی رخ دهد، اما به همه رویدادهای ورودی دیگر نیز نیازی ندارد. بنابراین می‌توان از دروازه POR (که می‌تواند با یک دروازه $PAND$ و یک دروازه $FDEP$ جایگزین شود.) برای نشان دادن شرایط ماشه (راه‌انداز) استفاده کرد که در آن وقوع رویداد اولویت به این معنی است که رویدادهای بعدی هیچ تاثیری ندارند. نماد "$\wr$" برای نمایش دروازه POR در عبارات منطقی استفاده می‌شود، بنابراین $X \wr Y$ به معنای $(X\ POR\ Y)$ است. دروازه POR در صورتی محقق می‌شود که:

- چپ ترین رویداد (اولویت) آن رخ دهد.
- هیچ رویداد ورودی دیگری قبل از رویداد اولویت رخ ندهد.
- هیچ رویداد ورودی دیگری همزمان با رویداد اولویت رخ ندهد.

[1] Priority-AND Gate
[2] Priority-OR Gate



(آ) دروازه $PAND$ (ب) دروازه POR (ج) دروازه $SAND$

شکل ۱.۴: دروازه‌های زمانی پاندورا

۳ـ دروازه AND هم‌زمان

از دروازه AND هم‌زمان[1] برای تعریف شرایطی استفاده می‌شود که در آن یک پیامد تنها در صورتی ایجاد می‌شود که دو یا چند رویداد به طور همزمان رخ دهد. مدل‌های دروازه $SAND$ وقوع همزمان وقایع را نشان می‌دهند. به عنوان مثال، این می‌تواند به دلیل یک علت مشترک اتفاق بیفتد، یا به این دلیل که رویدادها اثر متفاوتی دارند اگر آن‌ها تقریبا همزمان با هم در یک توالی رخ دهند. از نماد $\&$ برای نمایش دروازه $SAND$ در عبارات منطقی استفاده می‌شود. بنابراین $X\&Y$ به معنی $(X\ SAND\ Y)$ است. دروازه $SAND$ در صورتی محقق می‌شود که:

- تمام رویدادهای ورودی رخ دهند.
- همه رویدادهای ورودی هم‌زمان رخ دهند.

درختان عیب زمانی پاندورا نیز از دروازه بولی AND و OR استفاده می‌کنند. "$\wedge$" و "$\vee$" به ترتیب نشان‌دهنده دروازه AND و OR در عبارات منطقی هستند. اولویت دروازه‌های ورودی به صورت زیر است: $SAND$ بالاترین است، سپس $PAND$، POR، AND و OR.
معانی گفته شده در این‌جا فقط برای دو رویداد ورودی است ، اما می‌تواند برای هر نوع رویداد توسط دروازه‌های تودرتو افزایش یابد ، به‌طوریکه $X \lhd Y \lhd Z$ معادل است با $(X \lhd Y) \lhd Z$ و $X \wr Y \wr Z$ معادل است با $(X \wr Y) \wr Z$. شکل ۱.۴ دروازه‌های زمانی پاندورا را نمایش می‌دهد.

۳.۲.۴ قوانین زمانی پاندورا

علاوه بر سه دروازه زمانی، پاندورا مجموعه‌ای از قوانین زمانی را معرفی می‌کند که رفتار دروازه ها و نحوه ارتباط آن‌ها با یکدیگر و با دروازه‌های AND و OR بولین استاندارد را توصیف می‌کند. مهمترین این قوانین، قوانین اتمام است که دروازه‌های زمانی را به دروازه‌های بولی مرتبط می‌کند:

[1] Simultaneous-AND Gate

- قانون اتمام پیوسته [۱]:

$$X \wedge Y \quad \Leftrightarrow \quad (X \lhd Y) \vee (X \& Y) \vee (Y \lhd X)$$

- قانون اتمام گسسته [۲]:

$$X \vee Y \quad \Leftrightarrow \quad (X \wr Y) \vee (X \& Y) \vee (Y \wr X)$$

- قانون اتمام تقلیل دهنده [۳]:

$$X \quad \Leftrightarrow \quad (Y \lhd X) \vee (X \& Y) \vee (X \wr Y)$$

قانون اتمام پیوسته دروازه‌های $PAND$ و $SAND$ را به دروازه AND مرتبط می‌سازد، و قانون اتمام گسسته دروازه‌های POR و $SAND$ را به دروازه OR مرتبط می‌سازد.

۴.۲.۴ نمایش زمان در درخت عیب زمانی پاندورا

پاندورا درباره مدل زمانی که در هر سیستم خاص استفاده می‌شود، فرضیات کمی دارد. زمان می تواند از فاصله زمانی یا نقطه محور، گسسته یا پیوسته و یا ترکیبی از آن‌ها باشد. نتیجه رویکرد بسیار عالی است که می‌تواند هم در طراحی و هم در اکتشافات مربوط به شکست‌های احتمالی و هم برای تشخیص زمان اجرای عیب‌هایی که قبلاً اتفاق افتاده است سازگار شود. با این حال، پاندورا سه محدودیت اساسی را اعمال می‌کند:

- مدل زمان استفاده شده باید خطی باشد، نه انشعابی.
- وقایع پایدار هستند (یعنی، یک بار که اتفاق افتاد، آنها به طور نامحدود در همان وضعیت باقی می‌مانند).
- حوادث بلافاصله بدون تاخیر رخ می‌دهد.

تا زمانی که این محدودیت‌ها رعایت شود، فقط سه رابطه زمانی ممکن بین دو رویداد وجود دارد: قبل، همزمان و بعد. همه این‌ها توسط دروازه‌های زمانی $PAND$، $SAND$ و POR که در بالا معرفی شده‌اند پوشیده شده است.

بنابراین در پاندورا، زمان دقیقی که در آن رویداد رخ می‌دهد به اندازه ترتیبی که رویدادها رخ می‌دهند مهم نیست؛ تنها چیزی که اهمیت دارد این است که یک رویداد قبل، بعد، یا همزمان رویداد دیگری رخ می‌دهد، زیرا این همان چیزی است که توالی را تعریف می‌کند.

[1] Conjunctive Completion Law
[2] Disjunctive Completion Law
[3] Reductive Completion Law

۵.۲.۴ ارزیابی کیفی درخت عیب زمانی پاندورا

هر روش تحلیل کیفی زمانی باید الزامات اساسی خاصی را برآورده کند. در وهله اول، باید به گونه‌ای بتوان اطلاعات زمانی یا ترتیبی را در درخت عیب نشان داد. ثانیاً، باید منطق یا معناشناسی زیربنای این اطلاعات وجود داشته باشد تا بتواند تحلیل مفید واقع شود. در آخر، باید بتوان از این داده‌ها در یک تحلیل استفاده کرد تا بتوان نتیجه‌گیری دقیقی در مورد رفتار خرابی سیستم انجام داد. به این الزامات می توان سایر الزامات ذهنی‌تر را نیز اضافه کرد. تحلیل درخت عیب یک تکنیک کاملاً تثبیت شده و محبوب است و بنابراین هرگونه گسترش آن باید با حفظ ویژگی‌های موفقیت‌آمیز تحلیل درخت عیب و مطابق با ماهیت تحلیل درخت عیب باقی بماند. علاوه بر این، تحلیل کیفی، نتایج را به صورت مجموعه‌های برش مینیمال فراهم می‌کند، بنابراین روش تحلیل کیفی زمانی، باید با آنها سازگار بماند.

پاندورا درخت‌های عیب را با دروازه‌های زمانی گسترش می‌دهد و مجموعه‌ای از قوانین زمانی را برای تسهیل تحلیل کیفی فراهم می‌کند. این قوانین مبنایی را برای تحلیل کیفی درخت عیب زمانی پاندورا تشکیل می‌دهند. قوانین زمانی به کاهش و به حداقل رساندن حالت‌های شکست برای به دست آوردن توالی‌های برش مینیمال کمک می‌کنند.

پاندورا از قوانین زمانی برای تولید توالی‌های (دنباله‌های) برش مینیمال ($MCSQs$[1]) استفاده می‌کند که اساسا مجموعه‌های برش مینیمال ($MCSs$[2]) نسبتا مرتب شده هستند. از این رو توالی‌های برش مینیمال مشابه با مجموعه‌های برش مینیمال در درخت‌های عیب کلاسیک هستند: آن‌ها حاوی توالی‌های برشی هستند که لازم و کافی برای ایجاد رویداد برتر هستند.

۶.۲.۴ ارزیابی کمی درخت عیب زمانی پاندورا

تحلیل کمی درختان عیب زمانی پاندورا به تخمین احتمال وقوع یک رویداد برتر از نرخ‌های شکست داده‌شده در حالت‌های شکست اساسی (رویدادها) سیستم کمک می‌کند. کمی‌سازی درختان عیب زمانی به کمیت دروازه‌ها نیاز دارد و تکنیک‌های مختلفی برای ارزیابی احتمالی دروازه‌های درخت عیب زمانی در نظر گرفته شده‌است. این تکنیک‌ها عبارتند از راه‌حل‌های تحلیلی، راه‌حل مبتنی بر زنجیره مارکوف، راه‌حل‌های مبتنی بر شبکه بیزین و راه‌حل‌های مبتنی بر شبکه پتری [۱۹، ۲۷، ۲۸]. با استفاده از راه‌حل‌های تحلیلی به محاسبه احتمال شکست برای دروازه‌های زمانی پاندورا می‌پردازیم.

[1] Minimal Cut Sequences
[2] Minimal Cut Sets

احتمال شکست برای دروازه AND

احتمال دروازه AND با n رویداد مستقل آماری می‌تواند به صورت [۲۲] مورد ارزیابی قرار گیرد:

$$P_r\left\{E_۱ \wedge E_۲ \wedge \cdots \wedge E_{n-۱} \wedge E_n\right\}(t) = \prod_{i=۱}^{n} P_r\left\{E_i\right\}(t) \qquad (۱.۴)$$

به‌طوریکه $P_r\left\{E_i\right\}(t)$ احتمال شکست رویداد اساسی Ei در زمان ماموریت t است.

احتمال شکست برای دروازه OR

اگر یک دروازه OR دارای n رویداد ورودی باشد ، احتمال دروازه OR با استفاده از معادله زیر تقریب زده می شود [۲۰]:

$$P_r\left\{E_۱ \vee E_۲ \vee \cdots \vee E_{n-۱} \vee E_n\right\}(t) = ۱ - \prod_{i=۱}^{n}\left(۱ - P_r\left\{E_i\right\}(t)\right) \qquad (۲.۴)$$

احتمال شکست برای دروازه PAND

در یک توالی برش مینیمال، اگر n رویداد ورودی مستقل آماری از دروازه $PAND$ وجود داشته باشد و به طور پی‌درپی رخ دهد، به طور مثال ابتدا رویداد ۱، سپس رویداد ۲ و... و رویداد $n-۱$ و در نهایت رویداد n، آنگاه احتمال دروازه $PAND$ را می‌توان به صورت [۴۰] ارزیابی کرد:

$$P_r\left\{E_۱ \lhd E_۲ \lhd \cdots \lhd E_{n-۱} \lhd E_n\right\}(t) = \prod_{i=۱}^{n} \lambda_i \sum_{k=۰}^{n}\left[\frac{e^{(u_k t)}}{\prod_{\substack{j=۰ \\ j\neq k}}^{n}(u_k - u_j)}\right] \qquad (۳.۴)$$

به‌طوریکه برای $m > ۰$، $u_۰ = ۰$ و $u_m = -\sum_{j=۱}^{m} \lambda_j$.

احتمال شکست برای دروازه POR

برای هر توالی برش مینیمال از n رویداد مستقل آماری در یک دروازه POR، احتمال دروازه POR را می توان به صورت [۱۹] ارزیابی کرد:

$$P_r\left\{E_۱ \wr E_۲ \wr \cdots \wr E_{n-۱} \wr E_n\right\}(t) = \frac{\lambda_۱\left(۱ - \left(e^{-(\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i)t}\right)\right)}{\sum_{i=۱}^{n}\lambda_i} \qquad (۴.۴)$$

در یک بازه زمانی پیوسته، احتمال دو رخداد مستقل آماری توزیع شده به‌صورت نمایی که همزمان اتفاق می‌افتد را می توان صفر [۴۰] دانست. به همین دلیل، هر توالی برش مینیمال حاوی عملگر $SAND$ معمولا در طول ارزیابی کمی درختان عیب زمانی پاندورا نادیده گرفته

می‌شود. همانطور که توالی‌های برش مینیمال می‌تواند شامل هر تعداد دروازه از دروازه‌های AND، $PAND$، $SAND$ و POR باشد، اگرچه دروازه $SAND$ صفر است، آنها به طور احتمالی با استفاده از معادله‌های (۱.۴)، (۳.۴) و (۴.۴) بسته به ماهیت دروازه‌ها که حاوی توالی‌های برش مینیمال هستند، ارزیابی می‌شوند. رویداد برتر درختان عیب زمانی به عنوان انفصال توالی‌های برش مینیمال نشان داده می‌شود و بنابراین احتمال رویداد برتر را می توان با استفاده از معادله (۲.۴) تقریب زد.

توجه داشته باشید که راه‌حل‌های تحلیلی بالا بر روی مقدار ثابت داده‌های شکست اجزا عمل می‌کند و در نظر بگیرید که مولفه‌های سیستم به طور نمایی نرخ‌های شکست را توزیع می‌کنند. مشابه دیگر روش‌های ارزیابی قابلیت اعتماد احتمالی، مانند روش تحلیل درخت عیب کلاسیک، روش‌های کمی‌سازی برای درختان عیب زمانی پاندورا نیز فرض می‌کنند که اجزای یک سیستم غیرقابل‌تعمیر هستند، رویدادهای اساسی از نظر آماری مستقل هستند و رفتار شکست مولفه‌ها توسط توزیع‌های احتمالی دقیق توصیف می‌شوند، یعنی، این روش‌ها تضمین می‌کنند که داده‌های شکست احتمالی اجزا، همواره در دسترس هستند.

با این حال، برای بسیاری از سیستم‌های پیچیده، تخمین داده‌های شکست دقیق اجزا از حوادث گذشته به دلیل فقدان دانش، کمبود اطلاعات آماری و تغییرات در محیط‌های عملیاتی سیستم‌ها بسیار دشوار است. این وضعیت به خصوص در مراحل اولیه طراحی مرتبط است زیرا در آن زمان تحلیل‌گران باید مولفه‌های جدید یا نسبی را در نظر بگیرند و در نتیجه داده‌های شکست دقیق ممکن است شناخته‌شده نباشند.

بدین‌ترتیب، در غیاب داده‌های شکست دقیق، ممکن است لازم باشد با تخمین‌های نادقیق احتمالات کار کنیم. روش‌های ارزیابی موجود برای درختان عیب زمانی پاندورا قادر به کار با داده‌های نامعلوم از این نوع نیستند. تئوری مجموعه فازی در حل مسایلی که داده‌های دقیق موجود نیستند و در تصمیم‌گیری از اطلاعات مبهم موثر هستند، اثبات شده است.

بنابراین، این پایان‌نامه راه‌حل‌های تحلیلی را تنها به صورتی که با رویکرد قاعده‌مند فازی سازگار است، در نظر می‌گیرد. ایده اصلی در پشت تحلیل درخت عیب زمانی فازی استفاده از یک نمایش فازی از داده‌های شکست به جای مقادیر قطعی است و سپس رویداد برتر را به عنوان یک محدوده از مقادیر ممکن ارزیابی می‌کند. به این ترتیب، اطلاعات کمی مهم در مورد قابلیت اعتماد یک سیستم را می‌توان حتی اگر داده‌های دقیق در مورد اجزای سیستم مشخص نشده باشند به‌دست آورد. برای این که بتوانیم از نمایش فازی داده‌های شکست استفاده کنیم، باید عملگرهای فازی دروازه‌های درخت عیب زمانی پاندورا را تعریف کنیم.

۷.۲.۴ عملگرهای فازی برای دروازه‌های درخت عیب زمانی پاندورا

هنگامی که امکانات شکست فازی تمام رویدادهای اساسی بدست آمد، آنگاه می‌توانیم از این مقادیر برای کمی‌سازی امکان رویداد برتر استفاده کنیم. با این حال، ابتدا باید عملگرهای

فازی را برای تمام دروازه‌های ($PandoraTFT$[1]) تعریف کنیم. نکته‌ای که باید به آن توجه داشت این است که تمام عملگرهای فازی برای دروازه‌های درخت عیب زمانی برای یک دامنه زمانی پیوسته و برای توزیع نمایی از نرخ‌های شکست تعریف شده‌اند.

عملگر فازی برای دروازه AND

اگر امکان شکست یک رویداد i توسط یک عدد فازی مثلثی به‌صورت $\tilde{P}_i(t) = \left(a_i(t), b_i(t), c_i(t)\right)_T$ ارائه شده باشد، آنگاه عملگر فازی دروازه AND برای نمایش مثلثی امکانات شکست را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد [۲۲]:

$$\begin{aligned} P_{ANDF} &= AND_F\{P_1(t), P_2(t), \cdots, P_n(t)\} \\ &= \prod_{i=1}^{n} P_i(t) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i, \prod_{i=1}^{n} b_i, \prod_{i=1}^{n} c_i\right)_T \end{aligned}$$

عملگر فازی برای دروازه OR

در غیاب احتمال شکست، اگر امکان شکست یک رویداد i توسط یک عدد فازی مثلثی به‌صورت $\tilde{P}_i(t) = \left(a_i(t), b_i(t), c_i(t)\right)_T$ ارائه شده باشد آنگاه عملگر فازی دروازه OR برای نمایش مثلثی امکانات شکست را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد [۲۰]:

$$\begin{aligned} P_{ORF} &= OR_F\{P_1(t), P_2(t), \cdots, P_n(t)\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - P_i(t)) \\ &= \left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - a_i(t), 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - b_i(t), 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - c_i(t)\right)_T \end{aligned}$$

[1] Pandora Temporal Fualt Tree

عملگر فازی برای دروازه PAND

اگر نرخ شکست رویداد i توسط عدد فازی مثلثی به‌صورت $\tilde{\lambda}_i = (a_i, b_i, c_i)_T$ تعریف شده باشد سپس امکان فازی نتیجه دروازه $PAND$ را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد [۴۰]:

$$P_{PANDF} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{e^{(u_k t)}}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (u_k - u_j)} \right], \prod_{i=1}^{n} b_i \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{e^{(u_k t)}}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (u_k - u_j)} \right], \prod_{i=1}^{n} c_i \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{e^{(u_k t)}}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (u_k - u_j)} \right] \right)_T$$

عملگر فازی برای دروازه POR

اگر نرخ شکست رویداد i توسط عدد فازی مثلثی به‌صورت $\tilde{\lambda}_i = (a_i, b_i, c_i)_T$ تعریف شده باشد سپس امکان فازی نتیجه دروازه POR را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد [۱۹]:

$$P_{PORF} = \left(\frac{a_1 \left(1 - \left(e^{-(\sum_{i=1}^{n} a_i)t}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n} a_i}, \frac{b_1 \left(1 - \left(e^{-(\sum_{i=1}^{n} b_i)t}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n} b_i}, \frac{c_1 \left(1 - \left(e^{-(\sum_{i=1}^{n} c_i)t}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \right)_T$$

در ادامه با استفاده از یک مطالعه موردی، فرایند بکارگیری داده‌های شکست فازی برای اجزای سیستم و نهایتا فازی زدایی و محاسبه احتمال رویداد برتر سیستم را با استفاده از عملگرهای مرسوم عملیات حسابی فازی بررسی می‌کنیم.

۳.۴ مطالعه موردی و ارزیابی

برای نشان دادن این که چگونه درختان عیب زمانی فازی می‌تواند برای انجام تحلیل قابلیت اطمینان سیستم‌های دینامیکی مورد استفاده قرار گیرد، از مطالعه موردی سیستم توزیع سوخت تحمل خطا یک کشتی استفاده می‌کنیم که در شکل ۲.۴ نشان داده شده است. سیستم شامل موارد زیر است:

۱. دو مخزن سوخت یکسان برای ذخیره‌سازی سوخت و آن‌ها با استفاده از لوله‌کشی پلی اتیلن به دیگر اجزای سیستم متصل می‌شوند.

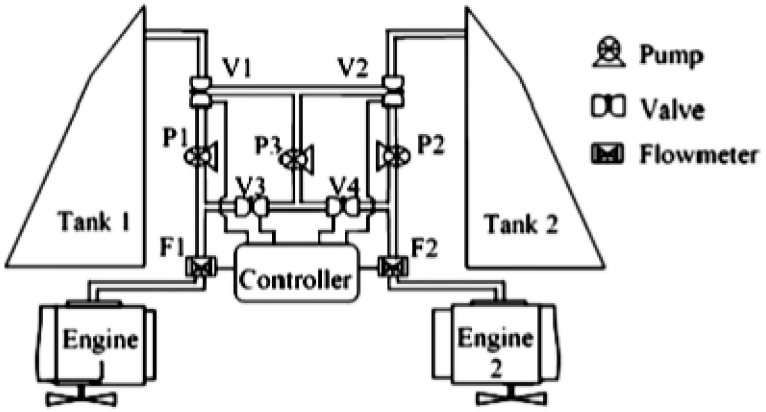
۲. سه پمپ سوخت یک جهته برای تامین سوخت موتور از مخازن.

۳. چهار دریچه که می‌توانند برخی مسیرها را فعال‌کرده یا برخی مسیرها را با توجه به الزامات سیستم در موقعیت‌های مختلف مسدود کنند. این دریچه‌ها تحت کنترل نرم‌افزاری هستند.

۴. از دو جریان‌سنج برای اندازه‌گیری میزان جریان سوخت از طریق لوله‌ها و این اندازه‌گیری‌ها در تصمیم‌گیری مسیرها برای فعال‌کردن و غیر فعال‌کردن برای حفظ جریان سوخت مناسب به موتورها مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۵. دو موتور برای ایجاد نیروی رانشی برای کشتی و مسئول کنترل کشتی هستند.

۶. یک کنترل‌کننده مرکزی که شیرهای مختلف را برای فعال‌کردن و غیرفعال‌کردن مسیرهای مختلف برای حفظ جریان سوخت مناسب به موتورها کنترل می‌کند.



شکل ۲.۴: سیستم توزیع سوخت مقاوم در برابر خرابی کشتی

تحت شرایط عملیاتی نرمال، دو جریان سوخت اولیه وجود دارد: موتور ۱ از طریق پمپ ۱ (P۱) سوخت را از مخزن ۱ دریافت می‌کند و موتور ۲ از طریق پمپ ۲ (P۲) سوخت را از مخزن ۲ دریافت می‌کند. پمپ ۳ (P۳) یک پمپ (آماده به کار) است که می‌تواند ماموریت P1 و یا P2 را در صورتی که یکی از آن‌ها ناموفق (شکست) باشد، انجام دهد. جریان‌سنج‌های F1 و F2 به ترتیب میزان جریان سوخت را به موتور ۱ و ۲ رصد می‌کنند و اطلاعات حسی را برای کنترل‌کننده ارائه می‌کنند. در صورت عدم‌موفقیت، اگر جریان سوخت ناکافی برای هر کدام از موتورها تشخیص داده شود، کنترل‌کننده، رفتار دینامیکی را به این سیستم با فعال کردن پمپ آماده‌به‌کار و تغییر مسیر جریان سوخت براساس دریچه‌های V1-V4 معرفی می‌کند. به عنوان مثال، اگر جریان سوخت ناکافی برای موتور ۱ تشخیص داده شود، کنترل‌کننده می‌تواند P3 و دریچه‌های باز V1 و V3 را فعال کند و در نتیجه جریان سوخت را به موتور ۱ از طریق P3 به جای P1 حفظ کند. بنابراین، ما می‌توانیم ببینیم که P3 می‌تواند ماموریت P1 یا P2 اما نه هر دو را انجام دهد. خرابی P1 و P2 منجر به کمبود سوخت حداقل یک موتور خواهد شد. به عنوان مثال، اگر P1 از کار بیفتد و P3 جایگزین آن شود، در صورت خراب شدن P2، P3 دیگر برای جایگزینی P2 در دسترس نیست. این امر منجر به کاهش عملکرد نیروی محرکه برای کشتی می‌شود، چون سرعت و مانور کاهش خواهند یافت و ممکن است منجر به غرق شدن یا برخورد شود.

جدول ۱.۴: فهرست رویدادهای اساسی سیستم توزیع سوخت

رویدادهای اساسی	شرح
P۱	خرابی پمپ ۱
P۲	خرابی پمپ ۲
P۳	خرابی پمپ ۳
V۱	خرابی دریچه ۱(به عنوان مثال، مسدود شده یا بسته شده است)
V۲	خرابی دریچه ۲(به عنوان مثال، مسدود شده یا بسته شده است)
V۳	خرابی دریچه ۳(به عنوان مثال، مسدود شده یا بسته شده است)
V۴	خرابی دریچه ۴(به عنوان مثال، مسدود شده یا بسته شده است)
E۱	حذف سوخت موتور ۱
E۲	حذف سوخت موتور ۲
S۱	خرابی سنسور جریان سنج ۱(به عنوان مثال قرائت سنسور بالا گیر کرده است)
S۲	خرابی سنسور جریان سنج ۲(به عنوان مثال قرائت سنسور بالا گیر کرده است)
CF	خرابی کنترل کننده

۱.۳.۴ تحلیل کیفی سیستم برای ایجاد درخت عیب زمانی پاندورا

برای قادر بودن به انجام تحلیل کمی، اطلاعات کیفی در مورد رفتار شکست سیستم باید بدست آید. دروازه‌های زمانی پاندورا را می‌توان برای مدل‌سازی رفتار دینامیکی سیستم ذکر شده در بالا به‌کار برد و به ثبت صحیح توالی وقایعی که می‌تواند منجر به شکست شود، کمک می‌کند. برای سادگی، شکست داخلی موتورها و شکست مخزن‌ها از محدوده این تحلیل خارج می‌شوند. درخت عیب زمانی پاندورا برای رفتار شکست سیستم توزیع سوخت تحمل خطا (عیب) از طریق سنتز مبتنی بر مدل از توصیف پاندورا، منطق شکست موضعی مولفه‌ها ساخته شده است. حالت‌های شکست اجزای مختلف سیستم به طور خلاصه و در جدول ۱.۴ نشان داده شده‌است. در سطح بالا (برتر)، دلایل حذف سوخت به موتور ۱ و ۲ را می‌توان با استفاده از دروازه‌های زمانی به شکل زیر نشان داد:

$$E1 = ((O-\text{Pump1} \wr O-\text{Pump2}) \wedge O-\text{Valve3}) \vee (O-\text{Pump2} \lhd O-\text{Pump1}) \vee (O-\text{Pump2} \ \ \& \ \ O-\text{Pump1})$$

$$E2 = ((O-\text{Pump2} \wr O-\text{Pump1}) \wedge O-\text{Valve4}) \vee (O-\text{Pump1} \lhd O-\text{Pump2}) \vee (O-\text{Pump1} \ \ \& \ \ O-\text{Pump2})$$

از آنجا که E1 و E2 ناشی از همان حوادث در توالی‌های مخالف هستند، ما بر روی عملکرد خرابی موتور ۱ تمرکز می‌کنیم. حذف سوخت به موتور ۱ (E1) بسته به توالی وقایع، سه دلیل محتمل دارد:

۱. اگر سوخت از پمپ ۱ حذف شود (O Pump1)، پمپ ۳ آن را جایگزین می‌کند، به شرطی که پمپ ۲ ابتدا خراب نشده باشد. این پیش شرط را می‌توان با استفاده از دروازه POR نشان داد. بنابراین در این شرایط، حذف سوخت می‌تواند به دلیل حذف سوخت از پمپ ۱ و پمپ ۳ (از طریق سوپاپ ۳) ایجاد شود.

۲. اگر پمپ ۲ در ابتدا شکست بخورد، آنگاه پمپ ۳ جایگزین آن خواهد شد و برای جایگزینی پمپ ۱ غیر قابل‌دسترس خواهد بود اگر پمپ ۱ نیز شکست خورد. بنابراین شکست متوالی پمپ ۲ و سپس پمپ ۱ منجر به حذف سوخت به موتور ۱ می‌شود (که با استفاده از دروازه PAND نشان داده می‌شود).

۳. اگر هر دو پمپ ۲ و پمپ ۱ همزمان شکست خورند (با دروازه SAND نمایش داده می‌شوند)، آنگاه پمپ ۳ تنها می‌تواند جایگزین یکی از آن‌ها شود. رفتار در این شرایط غیر قطعی است (به طوری که پمپ ۳ ممکن است جایگزین پمپ ۱ یا پمپ ۲، اما نه هر دو)، و در نتیجه به عنوان یک تخمین بدبینانه، شکست همزمان پمپ ۱ و پمپ ۲ به عنوان علت شکست هر دو موتور مشخص شده‌است.

به دنبال روشی که در [۶۰] شرح داده شده، می‌توان عبارات درخت عیب گسترش‌یافته برای خرابی موتور ۱ را بدین ترتیب استخراج کرد:

$$
\begin{aligned}
E1 = (&P1 \vee P1 \wr P2 \wr CF \wr V1) \\
&\wr (P2 \vee P2 \wr P1 \wr CF \wr V2) \wedge (V3 \vee P3 \vee (V1 \lhd P1 \wr P2 \wr CF) \\
&\vee (V1 \ \& \ P1 \wr P2 \wr CF) \vee (S1 \lhd P1 \wr P2) \vee (CF \lhd P1 \wr P2) \\
&\vee (S1 \ \& \ P1 \wr P2) \vee (CF \ \& \ P1 \wr P2) \vee (V2 \lhd P2 \wr P1 \wr CF) \\
&\vee (V2 \ \& \ P2 \wr P1 \wr CF) \vee (S2 \lhd P2 \wr P1) \vee (CF \lhd P2 \wr P1) \\
&\vee (S2 \ \& \ P2 \wr P1) \vee (CF \ \& \ P2 \wr P1)) \vee (P2 \vee P2 \wr P1 \wr CF \wr V2) \\
&\lhd (P1 \vee P1 \wr P2 \wr CF \wr V1) \\
&\vee (P2 \vee P2 \wr P1 \wr CF \wr V2) \ \& \ (P1 \vee P1 \wr P2 \wr CF \wr V1)
\end{aligned}
$$

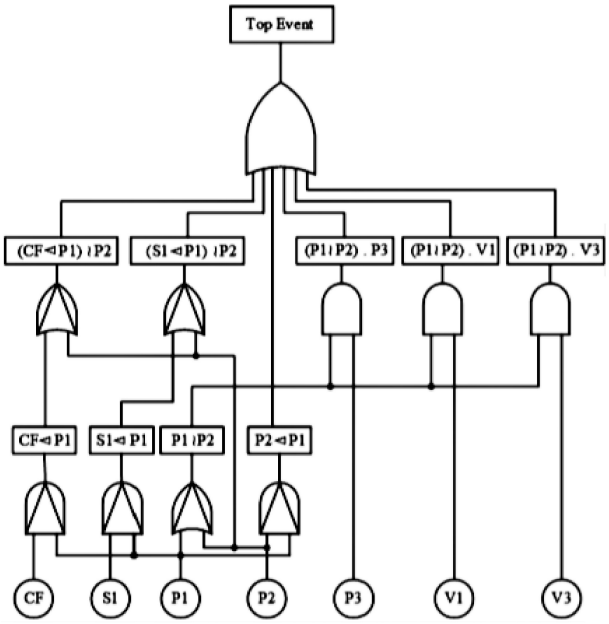
بعد از به حداقل رساندن عبارات بالا با استفاده از قوانین زمانی پاندورا، توالی‌های برش مینیمال حاصل‌شده که منجر به شکست موتور ۱ می‌شود در جدول ۲.۴ نشان‌داده شده‌است.

همانطور که قبلا ذکر شد، فرض می‌شود که همه رویدادها مستقل بوده و احتمال دو رویداد مستقل که همزمان رخ می‌دهد به طور موثر صفر است، بنابراین توالی‌های برش مینیمال شامل دروازه SAND در طول تحلیل کمی در نظر گرفته نمی‌شود. در نتیجه برای این نمونه سیستم، دنباله‌های برش مینیمال $P۲ \wr (S۱ \& P۱)$، $P۲ \wr (CF \& P۱)$ و $P۱ \& P۲$ بیشتر مورد توجه

قرار نمی‌گیرند. بدون این توالی‌های برش مینیمال، نمایش گرافیکی درخت عیب زمانی رفتار شکست موتور ۱ در شکل ۳.۴ نشان‌داده شده‌است.

جدول ۲.۴: دنباله‌های قطع‌کننده مینیمال منجر به شکست موتور ۱

دنباله قطع‌کننده مینیمال	شرح
$(P۱ \wr P۲) \wedge P۳$	خرابی پمپ ۱ قبل از پمپ ۲ (اگر پمپ ۲ به‌هیچ وجه خراب نشده باشد)و خرابی پمپ ۳
$(P۱ \wr P۲) \wedge V۱$	خرابی پمپ ۱ قبل از پمپ ۲ (اگر پمپ ۲ به‌هیچ وجه خراب نشده باشد)و خرابی دریچه ۱
$(P۱ \wr P۲) \wedge V۳$	خرابی پمپ ۱ قبل از پمپ ۲ (اگر پمپ ۲ به‌هیچ وجه خراب نشده باشد)و خرابی دریچه ۳
$(S۱ \lhd P۱) \wr P۲$	خرابی جریان سنج ۱ قبل از پمپ ۱ ، تا زمانی که پمپ ۲ هنوز خراب نشده باشد
$(S۱ \& P۱) \wr P۲$	خرابی همزمان جریان سنج ۱ و پمپ ۱ ، تا زمانی که پمپ ۲ هنوز خراب نشده باشد
$(CF \lhd P۱) \wr P۲$	خرابی کنترل‌کننده قبل از پمپ ۱ ، تا زمانی که پمپ ۲ هنوز خراب نشده باشد
$(CF \& P۱) \wr P۲$	خرابی همزمان کنترل‌کننده و پمپ ۱ ، تا زمانی که پمپ ۲ هنوز خراب نشده باشد
$P۲ \lhd P۱$	خرابی پمپ ۲ قبل از پمپ ۱
$P۱ \& P۲$	خرابی همزمان پمپ ۱ و پمپ ۲



شکل ۳.۴: درخت عیب زمانی رفتار شکست موتور ۱

۲.۳.۴ ارزیابی کمی قابلیت اعتماد سیستم

در این پایان‌نامه، برای نشان دادن ایده استفاده از تحلیل درخت عیب فازی زمانی، برای ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم، از اعداد فازی مثلثی برای نمایش امکان شکست رویدادهای اساسی استفاده شده است. زمان ماموریت سیستم ۱۰۰۰۰ ساعت در نظر گرفته می‌شود. این بدان معناست که در پایان تحلیل، امکان فازی و احتمال کلی شکست سیستم بعد از ۱۰۰۰۰ ساعت به دست خواهیم آورد. به دلیل ابهام داده‌های نرخ شکست رویدادهای اساسی، از قضاوت‌های زبانی متخصصان برای تعیین کمیت احتمال شکست رویدادهای اساسی استفاده

می‌شود. برای این مطالعه، یک گروه متشکل از شش متخصص برای ارائه نظر خود در مورد امکان شکست رویدادهای اساسی تشکیل شده است و آن‌ها با اطلاعات مرتبط با سیستم، به عنوان مثال زمان ماموریت و معماری سیستم ارائه می‌شوند. امتیاز وزنی و فاکتور وزنی متخصصان انتخابی با استفاده از جدول ۳.۴ محاسبه و در جدول ۴.۴ نشان داده شده است. توجه داشته باشید که این طرح برای اهداف تصویرسازی در اینجا مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ طرح‌های دیگر نیز امکان‌پذیر هستند و می‌توان آن را با توجه به نظراتی که دارای وزن‌های بالاتر هستند تنظیم کرد زیرا در صورت وجود بر اساس منطقی قوی‌تر، صریح‌تر و عینی‌تر استوار هستند. به عنوان مثال ممکن است یک متخصص از پایگاه‌های اطلاعاتی منتشر شده با قابلیت اطمینان از اجزای مشابه مشاوره کرده باشد.

برای بدست آوردن نظرات کارشناسان در مورد احتمال شکست رویدادهای اساسی به عنوان اصطلاحات زبانی، هفت سطح اصطلاحات زبانی کیفی، یعنی خیلی کم (VL)، کم (L)، نسبتاً کم (FL)، متوسط (M)، نسبتاً زیاد (FH)، زیاد (H) و بسیار زیاد (VH) تعریف شده است (جدول ۵.۴ را ببینید). مقیاس تبدیل جملات زبانی با اعداد فازی با استفاده از روش ارایه شده در [۴۷] بدست می‌آید. نظرات متخصصان مختلف در مورد امکان شکست رویدادهای اساسی در جدول ۶.۴ نشان‌داده شده‌است. از آنجا که خبرگان متفاوت هستند و پیشینه و تجارب متفاوتی دارند، نظرات آن‌ها می‌تواند به طور گسترده از یک رویداد اساسی به دیگری متفاوت باشد. این تغییرات توسط فرآیند وزن‌دهی به حساب می‌آیند بنابراین نیازی به تخفیف مقادیر خاص نیست. بنابراین جمع‌آوری نتایج برای دستیابی به توافق میان دیدگاه‌های متناقض کارشناسان ضروری است. نظرات کارشناسان جمع می‌شود تا در مورد احتمال شکست وقایع اساسی یک اجماع واحد بدست آورند. این نتایج جمع شده در جدول ۷.۴ نشان داده شده است.

اکنون، از تحلیل کیفی، توالی‌های برش مینیمال را داریم که برای ایجاد خرابی سیستم لازم و کافی هستند، یعنی در این حالت سوختی برای موتور ۱ نداریم. از نظرات کارشناسان، امکانات شکست فازی از رویدادهای اساسی به‌صورت فازی مثلثی تعریف می‌شود. بنابراین، می‌توان توالی‌های برش مینیمال را با استفاده از مقادیر جدول ۷.۴ و عملگرهای فازی، کمی کرد. نتایج کمی‌سازی توالی‌های برش مینیمال در جدول ۸.۴ نشان داده شده است.

جدول ۳.۴: امتیازات وزنی برای متخصصان مختلف [۴۷]

نظام‌نامه	رده‌بندی	امتیاز
مرتبه حرفه‌ای	استاد، مدیرکل/ معاون مدیرکل، مهندس ارشد، مقام ریاست	۵
	استادیار، مدیر، بازرس کارخانه	۴
	مهندس ، سرپرستان	۳
	متصدی، تکنسین، کارآموز فارغ التحصیل	۲
	اپراتور	۱
تجربه حرفه‌ای(سنوات)	$\geq$ ۲۰	۵
	۱۵ الی ۱۹	۴
	۱۰ الی ۱۴	۳
	۵ الی ۹	۲
	$<$ ۵	۱
مدرک تحصیلی یا فنی	دکتری یا مدیر فناوری	۵
	کارشناسی ارشد یا دانشیاب فناوری	۴
	دیپلم یا کارشناسی	۳
	موسسه آموزش صنعتی	۲
	مدرسه راهنمایی	۱

جدول ۴.۴: فاکتورهای وزنی شش متخصص

کارشناس	مرتبه حرفه‌ای	تجربه(سنوات)	مدرک تحصیلی	امتیاز وزنی	ضریب وزنی
E۱	استاد	$\geq$ ۲۰	دکتری	۱۵	۰/۲۴۱۹۳۵
E۲	استادیار	۱۰ الی ۱۴	دکتری	۱۲	۰/۱۹۳۵۴۸
E۳	مهندس	۵ الی ۹	مدیر فناوری	۱۰	۰/۱۶۱۲۹۰
E۴	مدیر	۱۵ الی ۱۹	کارشناسی ارشد	۱۲	۰/۱۹۳۵۴۸
E۵	اپراتور	$<$ ۵	دیپلم	۵	۰/۰۸۰۶۴۵
E۶	تکنسین	۵ الی ۹	دانشیاب فناوری	۸	۰/۱۲۹۰۳۲

جدول ۵.۴: متغیرهای زبانی با مقیاس‌های تبدیل

متغیرهای زبانی	اعداد فازی مثلثی		
	A	B	C
خیلی کم(VL)	۰	۰/۰۴	۰/۰۸
کم(L)	۰/۰۷	۰/۱۳	۰/۱۹
نسبتا کم(FL)	۰/۱۷	۰/۲۷	۰/۳۷
متوسط(M)	۰/۳۵	۰/۵۰	۰/۶۵
نسبتا زیاد(FH)	۰/۶۲	۰/۷۳	۰/۸۲
زیاد(H)	۰/۸۱	۰/۸۷	۰/۹۳
بسیار زیاد(VH)	۰/۹۲	۰/۹۶	۱/۰

جدول ۶.۴: نظرات متخصصان در مورد رویدادهای اساسی

رویدادهای اساسی	نظر کارشناسان					
	E۱	E۲	E۳	E۴	E۵	E۶
P۱	زیاد	نسبتا زیاد	زیاد	متوسط	زیاد	متوسط
P۲	زیاد	نسبتا زیاد	زیاد	متوسط	زیاد	متوسط
P۳	زیاد	زیاد	بسیار زیاد	زیاد	بسیار زیاد	زیاد
V۱	نسبتا زیاد	متوسط	نسبتا زیاد	زیاد	بسیار زیاد	متوسط
V۱	متوسط	نسبتا زیاد	زیاد	نسبتا کم	زیاد	متوسط
S۱	نسبتا زیاد	متوسط	زیاد	زیاد	متوسط	نسبتا زیاد
CF	نسبتا کم	نسبتا زیاد	نسبتا کم	نسبتا زیاد	متوسط	کم

جدول ۷.۴: تجمیع نظر متخصصان به شکل فازی مثلثی برای رویدادهای اساسی

رویدادهای اساسی	عدد فازی مثلثی		
	A	B	C
P۱	۰/۶۶۰	۰/۷۵۰	۰/۸۳۹
P۲	۰/۶۶۰	۰/۷۵۰	۰/۸۳۹
P۳	۰/۸۳۱	۰/۸۸۷	۰/۹۴۳
V۱	۰/۵۴۰	۰/۶۵۹	۰/۷۶۸
V۳	۰/۵۲۹	۰/۶۳۷	۰/۷۴۳
S۱	۰/۶۰۳	۰/۷۰۸	۰/۸۰۶
CF	۰/۳۶۹	۰/۴۷۳	۰/۵۶۸

جدول ۸.۴: امکانات فازی دنباله‌های قطع‌کننده مینیمال برای حذف سوخت موتور ۱

مجموعه	دنباله‌های قطع‌کننده مینیمال					
	$(P1 \wr P2) \wedge P3$	$(P1 \wr P2) \wedge V1$	$(P1 \wr P2) \wedge V3$	$(S1 \lhd P1) \wr P2$	$(CF \lhd P1) \wr P2$	$P2 \lhd P1$
A	۰/۵۴۸	۰/۳۵۶	۰/۳۴۹	۰/۱۴۶	۰/۰۹۴	۰/۱۶۱
B	۰/۶۶۳	۰/۴۹۳	۰/۴۷۶	۰/۲۰۵	۰/۱۳۴	۰/۲۲۲
C	۰/۷۸۸	۰/۶۴۲	۰/۶۲۱	۰/۲۹۶	۰/۱۸۹	۰/۳۲۱

جدول ۹.۴: مقادیر نرخ شکست ثابت بدست آمده در رویکردهای تحلیلی، رویکردهای مبتنی بر شبکه بیزین و رویکردهای مبتنی برشبکه پتری

رویدادهای اساسی	نرخ شکست/ ساعت (λ)
$P1$	۳/۲$E-5$
$P2$	۳/۲$E-5$
$P3$	۳/۲$E-5$
$V1$	۱/۰$E-5$
$V3$	۶/۰$E-6$
$S1$	۲/۵$E-6$
CF	۵/۰$E-7$

جدول ۱۰.۴: مقایسه عدم اطمینان سیستم برآورد شده توسط سایر رویکردها با عدم اطمینان برآورد شده توسط روش پیشنهادی

رویکردها	عدم اطمینان	برآورد عدم اطمینان با روش پیشنهادی	اختلاف
تحلیلی	۰/۱۳۵	۰/۱۱۹	پایین‌تر از ٪۱۱/۸۵
مبتنی بر شبکه پتری	۰/۱۱۷	۰/۱۱۹	بالاتر از ٪۱/۷۱
مبتنی بر شبکه بیزین	۰/۱۱۱ (با سه فاصله)	۰/۱۱۹	بالاتر از ٪۷/۲۱
مبتنی بر شبکه بیزین	۰/۱۱۶ (با چهار فاصله)	۰/۱۱۹	بالاتر از ٪۲/۵۹
مبتنی بر شبکه بیزین	۰/۱۱۹ (با پنج فاصله)	۰/۱۱۹	مشابه
مبتنی بر شبکه بیزین	۰/۱۲۱ (با شش فاصله)	۰/۱۱۹	پایین‌تر از ٪۱/۶۵
مبتنی بر شبکه بیزین	۰/۱۲۲ (با هفت فاصله)	۰/۱۱۹	پایین‌تر از ٪۲/۴۶
مبتنی بر شبکه بیزین	۰/۱۲۳ (با هشت فاصله)	۰/۱۱۹	پایین‌تر از ٪۳/۲۵
مبتنی بر شبکه بیزین	۰/۱۲۴ (با نه فاصله)	۰/۱۱۹	پایین‌تر از ٪۴/۰۳
مبتنی بر شبکه بیزین	۰/۱۲۴ (با ده فاصله)	۰/۱۱۹	پایین‌تر از ٪۴/۰۳

با استفاده از عملگرهای فازی برای دروازه OR و امکانات فازی توالی‌های برش مینیمال از جدول ۸.۴، امکان فازی رویداد برتر (حذف سوخت به موتور ۱) بدست می‌آید که همچنین یک عدد فازی مثلثی است (۰/۹۸۹, ۰/۹۵۲, ۰/۸۷۷). امکان فازی از رویداد برتر را می‌توان با استفاده از رابطه (۱۶.۱) به یک مقدار قطعی ترسیم کرد [۴۸] ، مقدار محاسبه شده ۰/۹۳۹

است. بنابراین، ۰/۹۳۹ نشان‌دهنده محتمل‌ترین امکان شکست سیستم پس از ۱۰۰۰۰ ساعت است. این مقدار به مجموعه بسیار بالا (VH) و با ٪۴۷/۵ عضویت تعلق دارد که بینش خوبی در مورد قابلیت اطمینان سیستم ارائه می‌دهد. برای این که بتوانیم این مقدار را با مقادیر تولید شده توسط سایر روش‌های کمی‌سازی درختان عیب زمانی مبتنی بر احتمال مقایسه کنیم، باید این مقدار را به مقدار احتمال تبدیل کنیم. این مقدار به یک مقدار احتمال تبدیل می‌شود [۴۳]، مقدار بدست آمده ۰/۱۱۹ است. بنابراین احتمال خرابی سیستم پس از ۱۰۰۰۰ ساعت ۰/۱۱۹ برآورد می‌شود. برای مقایسه، می‌توان این نتایج را در مقابل نتایج حاصل از رویکردهای مختلف تثبیت شده که از داده‌های شکست آماری استفاده می‌کنند، تقابل داد.

درخت عیب زمانی مطالعه موردی براساس نرخ‌های شکست ثابت اجزاء با استفاده از یک روش تحلیلی [۱۹]، روش مبتنی بر شبکه بیزین [۲۷] و روش مبتنی بر شبکه پتری [۲۸] با توجه به زمان ماموریت در نتیجه ۱۰۰۰۰ ساعت مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. مقادیر نرخ شکست قطعی که توسط رویکردهای فوق الذکر استفاده می‌شود در جدول ۹.۴ نشان داده شده‌اند [۱۹] و مقادیر عدم اطمینان سیستم که با استفاده از این رویکردها تخمین زده شده، در جدول ۱۰.۴ نشان داده شده است. همانطور که روش‌های تحلیلی و شبکه‌های پتری هر دو مدل زمان به صورت پیوسته، این رویکردها یک مقدار واحد تولید می‌کنند. از سوی دیگر، رویکرد شبکه بیزین زمان را به n فواصل مساوی تقسیم می‌کند و در نتیجه جدول مقادیر عدم اطمینان سیستم را برای تعداد فواصل مختلف نشان می‌دهد. مقدار n باید حداقل با حداکثر رتبه دنباله‌های برش مینیمال برابر باشد.

رتبه یک توالی برش مینیمال، تعداد رویدادهای اساسی است که در توالی برش مینیمال مشارکت دارند. ستون تفاوت جدول ۱۰.۴ نشان می‌دهد که چه درصدی مقدار برآورد شده توسط رویکرد فازی پیشنهادی از مقادیر برآورد شده توسط روش‌های دیگر، انحراف دارد. اگر چه برخی تفاوت‌های جزئی بین مقدار تخمین زده‌شده توسط روش فازی پیشنهادی و مقادیر برآورد شده توسط روش‌های مبتنی بر احتمال وجود دارد، نکته مهم این است که تحلیل درخت عیب زمانی فازی توجه تحلیلگران را قادر می‌سازد تا تحلیل قابلیت اطمینان سیستم‌های دینامیکی را در حضور داده‌های نرخ شکست نامشخص اجزای سیستم اجرا کنند در حالی که هنوز نتیجه مطلوب مفیدی را ارائه می‌دهند. به طور خاص، یک جنبه مهم از تحلیل کمی قابلیت اعتماد از طراحی سیستم، شناسایی مولفه‌های بحرانی است به‌طوریکه طراحان بتوانند تصمیم بگیرند که کجا تلاش‌های خود را بر روی آن بخش‌های سیستم متمرکز کنند که نیاز به بهبود شرایط برای تحقق الزامات، به عنوان مثال، با اعمال استراتژی‌های تحمل نقص دارند. معیارهای اهمیت فازی اجزای سیستم سوخت محاسبه می‌شوند [۱۵]. اجزا با توجه به سهم‌شان در وقوع رویداد برتر (شکست سیستم) رتبه‌بندی می‌شوند و نتایج در جدول ۱۱.۴ نشان داده شده است. همانطور که در جدول مشاهده شد، برای شرط حذف سوخت به موتور ۱، مهم‌ترین مولفه بحرانی (حیاتی) پمپ ۱ (P1) و کم‌ترین مولفه بحرانی، پمپ ۲ (P2) است. مهم‌ترین‌های بعدی ، پمپ ۳ (P3) و سوپاپ ۱ (V1) هستند.

جدول ۱۱.۴: رتبه بندی اهمیت فازی برای رویدادهای اساسی

رویدادهای اساسی	FIM	رتبه
$P۱$	۱/۷۲۲	۱
$P۲$	۰/۲۱۳	۲
$P۳$	۰/۱۴۷	۳
$V۱$	۰/۱۴۵	۴
$V۳$	۰/۱۰۳	۵
$S۱$	۰/۰۹۷	۶
CF	۰/۰۱۸	۷

۴.۴ تاثیر عملگرهای محاسباتی در تحلیل قابلیت اعتماد فازی سیستم

فرض کنید یک سیستم دارای n مولفه باشد که در ساختار سری و موازی قرار گرفته است و احتمال کارکرد هریک از مولفه‌ها به ترتیب $\tilde{P}_۱, \tilde{P}_۲, ..., \tilde{P}_n$ باشند. با توجه به اعداد فازی LR قابلیت اطمینان سیستم $\tilde{P}_i$ به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$\tilde{P}_i = (a_i, \alpha_i, \beta_i)_{LR} \ , \quad (۱ \leqslant i \leqslant n)$$

بدین منظور، قابلیت اطمینان فازی سیستم را بر اساس عملگرهای $T-$نرم دراستیک محاسبه می‌کنیم.لازم به ذکر است که بیشتر مطالب ارائه شده در این بخش از مراجع [۱۴] و [۱۸] و [۴۲] استخراج شده‌اند.

۱.۴.۴ محاسبات مبتنی بر T-نرم دراستیک

با در نظر گرفتن اعداد فازی $\tilde{P}_۱, \tilde{P}_۲, ..., \tilde{P}_n$ به عنوان احتمال کارکرد نادقیق این مولفه‌ها، قابلیت اطمینان فازی برای ساختار سری، بر اساس عملگرهای جبری مبتنی بر $T-$نرم دراستیک در

رابطه‌های (۶.۱) تا (۱۵.۱) که آن را با $\tilde{P}_i$ نشان می‌دهیم، از رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$
\begin{aligned}
P_{ANDF} &= AND_F\{\tilde{P}_1, \cdots, \tilde{P}_n\} \\
&= \bigotimes_{i=1}^{n} \tilde{P}_i \\
&= \bigotimes_{i=1}^{n} (a_i, \alpha_i, \beta_i)_{LR} \\
&= (a_1 a_2, max(\alpha_1 a_2, \alpha_2 a_1), max(\beta_1 a_2, \beta_2 a_1))_{LR} \otimes (a_3, \alpha_3, \beta_3)_{LR} \\
&\quad \otimes ... \otimes (a_n, \alpha_n, \beta_n)_{LR} \\
&= (a_1 a_2 a_3, max\{max(\alpha_1 a_2, \alpha_2 a_1)a_3, \alpha_3 a_1 a_2\}, max\{max(\beta_1 a_2, \beta_2 a_1)a_3, \beta_3 a_1 a_2\})_{LR} \\
&\quad \otimes \cdots \otimes (a_n, \alpha_n, \beta_n)_{LR} \\
&= (a_1 a_2 a_3, max\{\alpha_1 a_2 a_3, \alpha_2 a_1 a_3, \alpha_3 a_1 a_2\}, max\{\beta_1 a_2 a_3, \beta_2 a_1 a_3, \beta_3 a_1 a_2\})_{LR} \\
&\quad \otimes \cdots \otimes (a_n, \alpha_n, \beta_n)_{LR} \cdots \\
&= (\prod_{i=1}^{n} a_i, max\{\alpha_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j | i = 1, 2, ..., n\}, max\{\beta_j \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j | i = 1, 2, ..., n\})_{LR}
\end{aligned}
\tag{۵.۴}
$$

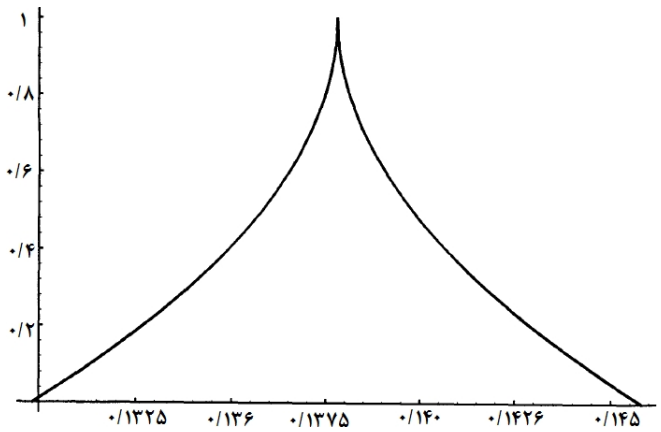
همچنین قابلیت اطمینان فازی سیستم برای ساختار موازی نیز به‌طور مشابه و به‌صورت زیر حاصل می‌شود

$$
\begin{aligned}
P_{ORF} &= OR_F\{\tilde{P}_1, \cdots, \tilde{P}_n\} \\
&= \mathbf{1} \ominus \bigotimes_{i=1}^{n} (1 \ominus \tilde{P}_i) \\
&= 1 \ominus \bigotimes_{i=1}^{n} [1 \ominus (a_i, \alpha_i, \beta_i)_{LR}] \\
&= \mathbf{1} \ominus \bigotimes_{i=1}^{n} [1 \oplus (-a_i, \beta_i, \alpha_i)_{LR}] \\
&= \mathbf{1} \ominus \bigotimes_{i=1}^{n} ((1 - a_i), \beta_i, \alpha_i)_{LR} \\
&= \mathbf{1} \ominus (\prod_{i=1}^{n} (1 - a_i), max\{\beta_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 - a_j) | i = 1, 2, .., n\}, \\
&\quad max\{\alpha_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 - a_j) | i = 1, 2, ..., n\})_{LR} \\
&= 1 \oplus (-\prod_{i=1}^{n} (1 - a_i), max\{\alpha_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 - a_j) | i = 1, 2, .., n\}, \\
&\quad max\{\beta_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 - a_j) | i = 1, 2, ..., n\})_{LR} \\
&= (1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i), max\{\alpha_i, \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 - a_j) | i = 1, 2, ..., n\}, \\
&\quad max\{\beta_j, \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (1 - a_j) | i = 1, 2, ..., n\})_{LR}
\end{aligned}
\tag{۶.۴}
$$

در ادامه با استفاده از یک مثال سعی می‌کنیم تا روش ارائه شده را بیشتر توضیح دهیم.

مثال ۱.۴.۴. در فصل سوم مثال ۱.۲.۳ را در نظر بگیرید. در این مثال قصد داریم تا احتمال آسیب افرادی که به هر دلیل وارد محوطه کارگاهی دستگاه‌ها می‌شوند را بررسی کنیم. مهم‌ترین عوامل ایجاد آسیب به افراد از سمت دستگاه‌ها در جدول ۱.۳ ارائه شده و نمودار درخت عیب آن نیز در شکل ۲.۳ رسم شده است. فرض می‌شود که احتمال رخداد هر یک از عوامل آسیب‌زا به افراد مستقل از هم و مقداری نادقیق بوده و به‌صورت اعداد فازی مثلثی متقارن در جدول ۱.۳ آمده است. قابلیت اطمینان فازی سیستم بر اساس $T-$نرم دراستیک به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
\tilde{P}_U &= ۱ \ominus [(۱ \ominus \tilde{P}_F) \otimes (۱ \ominus \tilde{P}_G) \otimes (۱ \ominus \tilde{P}_H)] \\
&= ۱ \ominus [\{۱ \ominus (۰/۰۵, ۰/۰۰۲۷۸)_T\} \otimes \{۱ \ominus (۰/۰۵, ۰/۰۰۲۷۸)_T\} \\
&\quad \otimes \{۱ \ominus (۰/۰۱, ۰/۰۰۵۶)_T\}] \\
&= (۰/۱۰۶۵۲۵, ۰/۰۰۲۶۴۱)_T \\
\tilde{P}_V &= ۱ \ominus [(۱ \ominus \tilde{P}_C) \otimes (۱ \ominus \tilde{P}_D)] \\
&= ۱ \ominus [\{۱ \ominus (۰/۸, ۰/۰۴۴۴۸)_T\} \otimes \{۱ \ominus (۰/۸, ۰/۰۴۴۴۸)_T\}] \\
&= (۰/۹۶, ۰/۰۰۸۸۹۶)_T \\
\tilde{P}_Z &= \tilde{P}_E \otimes \tilde{P}_U \otimes \tilde{P}_V \\
&= (۱, ۰/۰۵۵۶۶)_T \otimes (۰/۱۰۶۵۲۵, ۰/۰۰۲۶۴۱)_T \\
&\quad \otimes (۰/۹۶, ۰/۰۰۸۸۹۶)_T \\
&= (۰/۱۰۲۲۶۴, ۰/۰۰۵۶۹۲)_T \\
\tilde{P}_X &= ۱ \ominus [(۱ \ominus \tilde{P}_A) \otimes (۱ \ominus \tilde{P}_B) \otimes (۱ \ominus \tilde{P}_Z)] \\
&= ۱ \ominus [\{۱ \ominus (۰/۰۲, ۰/۰۱۱۱۲)_T\} \otimes \{۱ \ominus (۰/۰۲, ۰/۰۱۱۱۲)_T\} \\
&\quad \otimes \{۱ \ominus (۰/۱۰۲۲۶۴, ۰/۰۰۵۶۹۲)_T\}] \\
&= (۰/۱۳۷۸۱۴, ۰/۰۰۹۷۸۳)_T
\end{aligned}
$$



شکل ۴.۴: قابلیت اعتماد فازی سیستم $\tilde{P}_X$ برای مثال ۱.۴.۴ با استفاده از $T-$نرم دراستیک

بر اساس نتایج گزارش شده در روش فعلی و شکل ۴.۴ حداکثر مقدار قابلیت اطمینان سیستم ۰/۱۴۷ می‌باشد که به‌ازای $\alpha-$برش صفر به‌دست آمده است. همچنین به ازای $\alpha = ۱$ مقدار قابلیت اطمینان سیستم برابر ۰/۱۳۸ است. مقدار مرکزی روش فعلی با آنچه در روش محاسبات بازه‌ای به‌دست آمده، مشابه است. اگرچه در این روش راه حل پیشنهادی دقیق‌تر

و دارای محاسبات پیچیده کمتری است. نتایج به‌دست آمده نشان‌دهنده آن است که استفاده از عملگرهای مبتنی بر $T-$نرم دراستیک به ویژه در رابطه با عملگرهای ضرب و تقسیم در کاهش میزان ابهام ایجاد شده نادرست، بسیار تاثیرگذار می‌باشد و از این رو استفاده از این نوع عملگرها در محاسبات می‌تواند کمک شایانی در تحلیل دقیق‌تر دارا باشد.

۵.۴ عملگرهای مبتنی بر T-نرم دراستیک برای دروازه‌های درخت عیب زمانی پاندورا

عملیات حسابی مرسوم در اعداد فازی می‌تواند با استفاده از اصل گسترش زاده [۶۷] براساس $T-$نرم‌های مثلثی بسط یابد. کمی‌سازی تحلیل درخت عیب زمانی فازی بر مبنای عملیات ریاضی فازی است. عملیات حساب فازی مبتنی بر $T-$نرم دراستیک (T_W)[1] دارای مزایایی هستند؛ شکل اعداد فازی را حفظ می‌کند، به طور موثر عدم قطعیت در مورد قابلیت اطمینان (طول بازه قابلیت اطمینان) را کاهش می‌دهد و نتایج دقیق‌تری ارائه می‌دهد [۱۸، ۲۳، ۲۵، ۳۵، ۳۶، ۳۹]. برای تعاریف و مفاهیم مقدماتی از عملیات حسابی $T-$نرم دراستیک می‌توانید به [۱۶، ۱۸] مراجعه کنید. این عملکرد دقیق ممکن است به طور موفقیت‌آمیز پیچیدگی پدیده انباشت ابهام در سیستم‌های فازی را به طور موفقیت‌آمیز کاهش دهد [۱۸] . جمع، تفریق، ضرب و تقسیم حساب فازی T_W می‌تواند این تحقیقات را نشان دهد [۱۲، ۱۸، ۲۳–۲۵، ۳۳، ۳۴، ۴۱].

۱.۵.۴ عملگر فازی T-نرم دراستیک برای دروازه AND

اگر امکان شکست یک رویداد i توسط یک عدد فازی مثلثی به صورت $\tilde{P}_i(t) = (a_i(t), \alpha_i(t), \beta_i(t))_T$ ارائه شده باشد، آنگاه عملگر فازی دروازه AND برای نمایش مثلثی امکانات شکست را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۲۲]:

$$
\begin{aligned}
P_{ANDF} &= AND_F\{P_1(t), P_2(t), \cdots, P_n(t)\} \\
&= \prod_{i=1}^{n} P_i(t) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i, \max\left\{ \alpha_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j \,\middle|\, i = 1,2,\ldots,n \right\}, \max\left\{ \beta_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j \,\middle|\, i = 1,2,\ldots,n \right\} \right)_T
\end{aligned}
$$

[1] Weakest T-norm

۲.۵.۴ عملگر فازی T-نرم دراستیک برای دروازه OR

در غیاب احتمال شکست، اگر امکان شکست یک رویداد i توسط یک عدد فازی مثلثی به صورت $\tilde{P}_i(t) = (a_i(t), \alpha_i(t), \beta_i(t))_T$ ارائه شده باشد آنگاه عملگر فازی دروازه OR برای نمایش مثلثی امکانات شکست را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۲۰]:

$$\begin{aligned} P_{ORF} &= OR_F\{P_1(t), P_2(t), \cdots, P_n(t)\} \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - P_i(t)) \\ &= \left(1 - \prod_{i=1}^{n}(1-a_i), \max\left\{\alpha_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n}(1-a_j) \middle| \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. i = 1,2,\ldots,n\right\}, \max\left\{\beta_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n}(1-a_j) \middle| i = 1,2,\ldots,n\right\}\right)_T \end{aligned}$$

۳.۵.۴ عملگر فازی T-نرم دراستیک برای دروازه PAND

اگر نرخ شکست رویداد i توسط عدد فازی مثلثی به صورت $\tilde{\lambda}_i = (a_i, \alpha_i, \beta_i)_T$ ، سپس امکان فازی نتیجه دروازه $PAND$ را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۴۰]:

$$\begin{aligned} P_{PANDF} = \Bigg(&\prod_{i=1}^{n} a_i \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{e^{(u_k t)}}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(u_k - u_j)}\right], \max\left\{\alpha_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j \middle| i = 1,2,\ldots,n\right\} \\ &\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{e^{(u_k t)}}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(u_k - u_j)}\right], \max\left\{\beta_i \prod_{j=1, j\neq i}^{n} a_j \middle| i = 1,2,\ldots,n\right\} \\ &\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{e^{(u_k t)}}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(u_k - u_j)}\right]\Bigg)_T \end{aligned}$$

۴.۵.۴ عملگر فازی T-نرم دراستیک برای دروازه POR

اگر نرخ شکست رویداد i توسط عدد فازی مثلثی به صورت $\tilde{\lambda}_i = (a_i, \alpha_i, \beta_i)_T$ ، سپس امکان فازی نتیجه دروازه POR را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد [۱۹]:

$$P_{PORF} = \left(\frac{a_1\left(1 - \left(e^{-(\sum_{i=1}^{n} a_i)t}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n} a_i}, \frac{\alpha_1\left(1 - \left(e^{-(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i)t}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}, \frac{\beta_1\left(1 - \left(e^{-(\sum_{i=1}^{n} \beta_i)t}\right)\right)}{\sum_{i=1}^{n} \beta_i}\right)_T$$

نتیجه‌گیری و پیشنهادات برای آینده تحقیق

۶.۴ نتیجه‌گیری

تحلیل درخت عیب یک روش قدرتمند است که به طور گسترده برای ارزیابی ایمنی و قابلیت اطمینان سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد. می‌توان از آن برای ارزیابی اثرات ترکیب‌های شکست در رفتار سیستم استفاده کرد، اما قادر به ثبت رفتار دینامیکی وابسته به توالی نیست. تعدادی از پسوندهای درختان عیب برای غلبه بر این محدودیت پیشنهاد شده است. پاندورا، یکی از این پسوندها است که دروازه‌های زمانی و قوانین زمانی را معرفی می‌کند تا امکان تحلیل پویا از درختان عیب زمانی فراهم شود. روشهای مبتنی بر نظریه مجموعه فازی و روشهای مبتنی بر آمار و احتمال، برای مدل‌سازی و تحلیل پدیده‌ها و سیستم‌ها متضمن هر دو نوع عدم‌اطمینان (عدم‌اطمینان ناشی از تصادفی بودن و عدم‌اطمینان ناشی از ابهام و نادقیق بودن) توسط بسیاری از محققان مورد مطالعه قرار گرفته است. بنابراین تاکید بر این نکته ضروری است که اگر عدم‌اطمینان یا ابهام از نوع تصادفی یا احتمالی باشد می‌توان به واسطه توزیع‌های احتمال، ابهام موجود را حل نمود و تنها زمانی مجاز به کاربرد مجموعه‌های فازی هستیم که عدم‌اطمینان یا ابهام از نوع امکانی باشد در این صورت به‌واسطه مجموعه‌های فازی، ابهام از نوع معرفتی و عدم قطعیت امکانی را می‌توان با توزیع‌های امکان نمایش داد. واژه ''فازی'' در فرهنگ لغت آکسفورد بصورت ''مبهم، گنگ، نادقیق، گیج، مغشوش، درهم و نامشخص'' تعریف شده است. ما در متن از همان واژه ''فازی'' استفاده مي‌کنیم. اساسا گرچه سیستم‌های فازی پدیده‌های غیر قطعی را توصیف مي‌کنند، با این حال خود نظریه فازی یک نظریه دقیق است. در سیستم‌های عملی اطلاعات مهم از دو منبع سرچشمه می‌گیرند. یکي از منابع افراد خبره می‌باشند که دانش و آگاهی‌شان را در مورد سیستم با زبان طبیعی تعریف می‌کنند. منبع دیگر اندازه‌گیری‌ها و مدل‌های ریاضی هستند که از قواعد ریاضی مشتق شده‌اند. بنابراین یک مسئله مهم ترکیب این دو نوع اطلاعات در طراحي سیستم‌ها است. براي انجام این ترکیب سئوال کلیدی این است که چگونه می‌توان دانش بشری را در چهار چوبی مشابه مدل‌های ریاضی فرموله کرد. به عبارت دیگر سئوال اساسی این است که چگونه می‌توان دانش بشری را

به یک فرمول ریاضی تبدیل کرد. اساسًا آنچه که یک سیستم فازی انجام می‌دهد، همین تبدیل است. برای دانستن چگونگی تبدیل، ابتدا باید بدانیم سیستم‌های فازی، چگونه سیستم‌هایی هستند.

در این مطالعه، روشی برای ترکیب استنباط افراد متخصص و نظریه مجموعه فازی با تحلیل درخت عیب زمانی با استفاده از پاندورا برای فراهم کردن ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌های دینامیکی با داده‌های احتمال شکست نامشخص ارائه شده است. استفاده از نظریه مجموعه فازی و استنباط نظر متخصصان، که اغلب در زبان طبیعی ارائه می‌شود، می‌تواند صراحتا حوزه‌های عدم قطعیت را در داده‌ها مشخص کند. اثربخشی روش پیشنهادی با اعمال آن در یک مطالعه موردی و مقایسه نتایج با نتایج برآورد شده توسط سایر روش‌های کمی درخت عیب زمانی موجود، ارزیابی شده است. نتایج نشان می‌دهد که تحلیل درخت عیب فازی پیشنهادی روش مفیدی برای ارزیابی قابلیت اطمینان سیستم‌های دینامیکی، در مواقعی که داده‌های شکست کمی آماری موجود نباشند یا ناکافی باشند، ارائه می‌دهد. مهم است که تاکید کنیم که نتایج فقط می‌تواند به اندازه داده‌های ورودی قابل اعتماد باشد و درج داده‌های فازی نمی‌تواند در مواردی که قبلا هیچ کدام از آن‌ها وجود نداشته باشد، صحت ایجاد کند. تکنیک‌هایی مانند اندازه‌گیری اهمیت نیز به تحلیلگران اجازه می‌دهد بدون اتکا به برآورد دقیق احتمال خرابی سیستم، سهم نسبی عناصر مختلف سیستم را در شکست کلی مشاهده کنند. به‌این‌ترتیب، رویکرد فازی به ما این امکان را می‌دهد که در مورد رفتار شکست سیستم حتی در غیاب داده‌های شکست واقعی، نتیجه‌گیری مفیدی را به‌دست آوریم. علاوه‌براین، پاندورا بخشی از یک بدنه نوآورانه و بالغ بر روی تحلیل ایمنی مبتنی بر مدل است که به ابزارهای تجاری برای تحلیل و بهینه‌سازی سیستم‌ها از جمله ابزارهای $hip-hops$[1] [۴۵] و طراح ایمنی [۵۱] منجر شده‌است. در این حالت، این کار پتانسیل مشارکت در فعالیت‌های صنعتی در این حوزه را دارد. اگرچه رویکرد پیشنهادی می‌تواند مشکل عدم دسترسی به داده‌های شکست را حل کند اما کاربرد آن در حال حاضر شامل فرض احتمال شکست توزیع‌شده نمایی برای مولفه‌ها است.

۷.۴ پیشنهادات برای آینده تحقیق

بنابراین، در آینده ارزش این را دارد که گزینه‌های جایگزین را مورد بررسی قرار دهیم تا فرض دیگر توزیع‌های شکست در فرآیند سنجش امکان‌پذیر باشد. موارد زیر می‌تواند موضوعاتی مناسب جهت پژوهش‌های آتی باشد.

- یک گزینه بالقوه این است که این کار را با تعریف عملگرهای $T-$نرم دراستیک برای داده‌های توزیع‌شده نمایی و غیر نمایی در این پایان‌نامه، گسترش دهیم.

[1] Hierarchically Performed Hazard Origin and Propagation Studies

- گزینه دیگر می‌تواند با نگاه به این که چگونه قابل‌اعتماد بودن سیستم توسط رویکرد محاسبات بازه‌ای و رویکرد پیشنهادی مبتنی بر $T-$نرم دراستیک که تحت تاثیر انتخاب‌های مختلف توابع عضویت، امتیازات وزنی، نظرات متخصصان، و غیره قرار دارد، را گسترش دهیم.
- پیشنهاد دیگر می‌تواند این باشد که در مواجهه با ابهام بیشتر، به عنوان یک رویکرد مناسب و جایگزین در حالتی که اطلاعات موجود برای تعریف یک مفهوم نادقیق با استفاده از مجموعه فازی کلاسیک کافی نباشد، تعمیم‌های فازی از جمله مجموعه فازی شهودی، مجموعه فازی مردد و... را بنا به نیاز مسئله در نظر گرفت.
- در آینده، ما امیدواریم که این کار را به طور عملیاتی با شناخت از سیستم و در نظر گرفتن فیزیک سسیستم و انتخاب رویکردهای مختلف و انتخاب مناسب‌ترین عملگر بنا به سازگاری با مقتضیات مسئله و برآورده‌شدن انتظارات کاربردی مورد بررسی قرار دهیم.

مراجع

[۱] اسدی، م. *آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد*. مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۹۲.

[۲] خاتمی، ح رنجبر، م. *مبانی مدل‌سازی فازی*. انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۸۷.

[۳] طاهری، م ماشین‌چی، م. *مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی*. انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۸۷.

[۴] طاهری، م. *آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی*. ۱۳۷۵.

[5] Ang, Alfredo H-S and Tang, Wilson H. Probability concepts in engineering planning and design, vol. 2: Decision, risk, and reliability. *JOHN WILEY & SONS, INC., 605 THIRD AVE., NEW YORK, NY 10158, USA, 1984, 608*, 1984.

[6] Barlow, Richard E and Proschan, Frank. Statistical theory of reliability and life testing: probability models. Technical report, New York, 1975.

[7] Baxter, Laurence A. Continuum structures. ii. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 99(2):331–338, 1986.

[8] Bazovsky, I. *Reliability theory and practice*. Dover Publications, 2004.

[9] Block, H. W. and Savits, T. H. Continuous multistate structure functions. *Operations Research*, 32(3):703–714, 1984.

[10] Cai, Kai-Yuan, Wen, CY, and Zhang, ML. Fuzzy nature of human reliability behavior. *Probabilistic Safety Assessment and Management, Elsevier*, 1991.

[11] Cappelle, Bart and Kerre, Etienne E. Issues in possibilistic reliability theory. In *Reliability and Safety Analyses under Fuzziness*, pages 61–80. Physica-Verlag HD, 1995.

[12] Chang, Ping-Teng, Pai, Ping-Feng, Lin, Kuo-Ping, and Wu, Ming-Shiu. Applying fuzzy arithmetic to the system dynamics for the customer–producer–employment model. *International Journal of Systems Science*, 37(10):673–698, 2006.

[13] Chen, Shyi-Ming. Fuzzy system reliability analysis using fuzzy number arithmetic operations. *Fuzzy Sets and Systems*, 64(1):31–38, 1994.

[14] Cheng, Ching-Hsue and Mon, Don-Lin. Fuzzy system reliability analysis by interval of confidence. *Fuzzy Sets and Systems*, 56(1):29–35, 1993.

[15] Deza, Michel Marie and Deza, Elena. Encyclopedia of distances. In *Encyclopedia of Distances*, pages 1–583. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

[16] Dubois, D.J. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, volume 144. Elsevier Science, 1980.

[17] Dubois, D.J. *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, volume 144. Elsevier Science, 1980.

[18] Dug Hun Hong and Hae Young Do. Fuzzy system reliability analysis by the use of t (the weakest t-norm) on fuzzy number arithmetic operations. *Fuzzy Sets and Systems*, 90(3):307–316, 1997.

[19] Edifor, Ernest, Walker, Martin, and Gordon, Neil. Quantification of priority-or gates in temporal fault trees. In *International Conference on Computer Safety, Reliability, and Security*, pages 99–110. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

[20] Esary, James D and Proschan, Frank. Coherent structures of non-identical components. *Technometrics*, 5(2):191–209, 1963.

[21] Goguen, JA. Fuzzy sets. information and control, vol. 8 (1965), pp. 338–353.-la zadeh. similarity relations and fuzzy orderings. information sciences, vol. 3 (1971), pp. 177–200. *The Journal of Symbolic Logic*, 38(4):656–657, 1973.

[22] Henley, Ernest J and Kumamoto, Hiromitsu. *Reliability engineering and risk assessment*. Prentice Hall, 1981.

[23] Hong, Dug Hun. Shape preserving multiplications of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 123(1):81–84, 2001.

[24] Hong, Dug Hun. Some results on the addition of fuzzy intervals. *Fuzzy Sets and Systems*, 122(2):349–352, 2001.

[25] Hong, Dug Hun. On shape-preserving additions of fuzzy intervals. *Journal of Mathematical Analysis and applications*, 267(1):369–376, 2002.

[26] Huang, Hong-Zhong, Zuo, Ming J., and Sun, Zhan-Quan. Bayesian reliability analysis for fuzzy lifetime data. *Fuzzy Sets and Systems*, 157(12):1674–1686, 2006.

[27] Kabir, Sohag, Walker, Martin, and Papadopoulos, Yiannis. Reliability analysis of dynamic systems by translating temporal fault trees into bayesian networks. In *Model-Based Safety and Assessment*, pages 96–109. Springer International Publishing, 2014.

[28] Kabir, Sohag, Walker, Martin, and Papadopoulos, Yiannis. Quantitative evaluation of pandora temporal fault trees via petri nets. *IFAC-PapersOnLine*, 48(21):458–463, 2015.

[29] Kai-Yuan, Cai and Chuan-Yuan, Wen. Street-lighting lamps replacement: A fuzzy viewpoint. *Fuzzy Sets and Systems*, 37(2):161–172, 1990.

[30] Kai-Yuan, Cai, Chuan-Yuan, Wen, and Ming-Lian, Zhang. Fuzzy variables as a basis for a theory of fuzzy reliability in the possibility context. *Fuzzy Sets and Systems*, 42(2):145–172, 1991.

[31] Kai-Yuan, Cai, Chuan-Yuan, Wen, and Ming-Lian, Zhang. Posbist reliability behavior of typical systems with two types of failure. *Fuzzy Sets and Systems*, 43(1):17–32, 1991.

[32] Kaufmann, Arnold. *Introduction to the theory of fuzzy subsets*. Academic press, 1975.

[33] Koleárová, A. Additive preserving the linearity of fuzzy interval. *Tetra Mountains Math. Publ. v6*, pages 75–81, 1994.

[34] Kolesárová, Anna. Triangular norm-based addition of linear fuzzy numbers. *Tatra Mt. Math. Publ*, 6:75–81, 1995.

[35] Kumar, Mohit. Applying weakest t-norm based approximate intuitionistic fuzzy arithmetic operations on different types of intuitionistic fuzzy numbers to evaluate reliability of pcba fault. *Applied Soft Computing*, 23:387–406, 2014.

[36] Kumar, Mohit and Yadav, Shiv Prasad. The weakest t-norm based intuitionistic fuzzy fault-tree analysis to evaluate system reliability. *ISA Transactions*, 51(4):531–538, 2012.

[37] La, Zadeh. Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3):338–353, 1965.

[38] Liang, Gin-Shuh and Wang, Mao-Jiun J. Evaluating human reliability using fuzzy relation. *Microelectronics Reliability*, 33(1):63–80, 1993.

[39] Lin, Kuo-Ping, Wen, Wu, Chou, Chang-Chien, Jen, Chih-Hung, and Hung, Kuo-Chen. Applying fuzzy gert with approximate fuzzy arithmetic based on the weakest t-norm operations to evaluate repairable reliability. *Applied Mathematical Modelling*, 35(11):5314–5325, 2011.

[40] Merle, Guillaume, Roussel, Jean-Marc, Lesage, Jean-Jacques, and Bobbio, Andrea. Probabilistic algebraic analysis of fault trees with priority dynamic gates and repeated events. *IEEE Transactions on Reliability*, 59(1):250–261, 2010.

[41] Mesiar, Radko. Shape preserving additions of fuzzy intervals. *Fuzzy Sets and Systems*, 86(1):73–78, 1997.

[42] Mon, Don-Lin and Cheng, Ching-Hsue. Fuzzy system reliability analysis for components with different membership functions. *Fuzzy Sets and Systems*, 64(2):145–157, 1994.

[43] Onisawa, Takehisa. An approach to human reliability in man-machine systems using error possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 27(2):87–103, 1988.

[44] Onisawa, Takehisa and Kacprzyk, Janusz. Reliability estimation based on fuzzy life time data. In *Reliability and safety analyses under fuzziness*, pages 153–168. Physica-Verlag HD, 1995.

[45] Papadopoulos, Yiannis, Walker, Martin, Parker, David, Sharvia, Septavera, Bottaci, Leonardo, Kabir, Sohag, Azevedo, Luis, and Sorokos, Ioannis. A synthesis of logic and bio-inspired techniques in the design of dependable systems. *Annual Reviews in Control*, 41:170–182, 2016.

[46] Parchami, A. and Mashinchi, M. Fuzzy estimation for process capability indices. *Information Sciences*, 177(6):1452–1462, 2007.

[47] Rajakarunakaran, Sivaprakasam, Maniram Kumar., A., and Arumuga Prabhu, V. Applications of fuzzy faulty tree analysis and expert elicitation for evaluation of risks in lpg refuelling station. *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 33:109–123, 2015.

[48] Ross, Timothy J. Properties of membership functions, fuzzification, and defuzzification. *Fuzzy logic with engineering applications*, pages 89–116, 2010.

[49] Rotshtein, A. Fuzzy reliabilty analysis of labour (man-machine) systems. In *Reliability and Safety Analyses under Fuzziness*, pages 245–269. Physica-Verlag HD, 1995.

[50] Royden, Halsey Lawrence and Fitzpatrick, Patrick. *Real analysis*, volume 32. Macmillan New York, 1988.

[51] Ruede, Erich, Walker, Martin, Papadopoulos, Yiannis, Securius, Peter, and Parker, David. Experience from application of semi-automatic fault tree synthesis to reliability and availability analysis of ship systems. In *The Twenty-second International Offshore and Polar Engineering Conference*. OnePetro, 2012.

[52] Sharma, Rajiv Kumar, Kumar, Dinesh, and Kumar, Pradeep. Predicting uncertain behavior of industrial system using fm—a practical case. *Applied Soft Computing*, 8(1):96–109, 2008.

[53] Stamatelatos, Michael, Vesely, William, Dugan, Joanne, Fragola, Joseph, Minarick, Joseph, and Railsback, Jan. Fault tree handbook with aerospace applications. 2002.

[54] Tanaka, Hideo, Fan, L. T., Lai, F. S., and Toguchi, K. Fault-tree analysis by fuzzy probability. *IEEE Transactions on Reliability*, R-32(5):453–457, 1983.

[55] Utkin, Lev V. Fuzzy reliability of repairable systems in the possibility context. *Microelectronics Reliability*, 34(12):1865–1876, 1994.

[56] Utkin, Lev V. Redundancy optimization by fuzzy reliability and cost of system components. *Microelectronics Reliability*, 34(1):53–59, 1994.

[57] Utkin, L.V. Knowledge based fuzzy reliability assessment. *Microelectronics Reliability*, 34(5):863–874, 1994.

[58] Vesely, William E, Goldberg, Francine F, Roberts, Norman H, and Haasl, David F. Fault tree handbook. Technical report, Nuclear Regulatory Commission Washington DC, 1981.

[59] Viswanadham, Narayan, Sarma, V VS, and Singh, Madan G. Reliability of computer and control systems. 1987.

[60] Walker, Martin, Bottaci, Leonardo, and Papadopoulos, Yiannis. Compositional temporal fault tree analysis. In *International Conference on Computer Safety, Reliability, and Security*, pages 106–119. Springer Berlin Heidelberg, 2007.

[61] Wu, Hsien-Chung. Fuzzy reliability analysis based on closed fuzzy numbers. *Information Sciences*, 103(1-4):135–159, 1997.

[62] Wu, Hsien-Chung. Bayesian system reliability assessment under fuzzy environments. *Reliability Engineering System Safety*, 83(3):277–286, 2004.

[63] Wu, Hsien-Chung. Fuzzy reliability estimation using bayesian approach. *Computers Industrial Engineering*, 46(3):467–493, 2004.

[64] Wu, Hsien-Chung. Fuzzy bayesian system reliability assessment based on exponential distribution. *Applied Mathematical Modelling*, 30(6):509–530, 2006.

[65] Xu, K, Tang, L.C, Xie, M, Ho, S.L, and Zhu, M.L. Fuzzy assessment of fmea for engine systems. *Reliability Engineering System Safety*, 75(1):17–29, 2002.

[66] Zadeh, L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-iii. *Information Sciences*, 9(1):43–80, 1975.

[67] Zadeh, Lotfi Asker. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy sets and systems*, 1(1):3–28, 1978.

Aabstract

There are methods for assessing the reliability and safety of complex systems. One of these methods is fault tree analysis as a tool to evaluate and recommend system improvement. A generalization of this method, when the failure behavior is time dependent, is the Pandora temporal fault tree analysis. In the fault tree analysis and Pandora temporal fault tree analysis, accurate system component failure data is usually used to calculate the probability of a tree of top event occurring. However, obtaining this accurate data due to incorrect and inaccurate information about the components of a system can be problematic. This dissertation present the reliability of systems based on fault tree analysis in inaccurate conditions. After reviewing the sets and calculations of fuzzy numbers, as well as reviewing the concepts of reliability and fault tree, the fault tree analysis is presented on the basis of *alpha*-cut. Analysis of the Pandora temporal fuzzy fault tree using usual fuzzy operators for addition and multiplication as well as the drastic T-norm is another topic discussed in this study. The efficiency of the proposed methods is also shown on real data.

Keywords :
Reliability, Fault tree analysis, Pandora temporal fault tree, Fuzzy set, Drastic T-norm, *alpha*-cut.

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Mathematical Statistics

Systems reliability analysis based on fault tree in inaccurate conditions

By: Maryam Amini Moghaddam

Supervisor:

Dr. Mohammad Reza Rabiei

Advisor:

Dr. Reza Zarei

August 2021