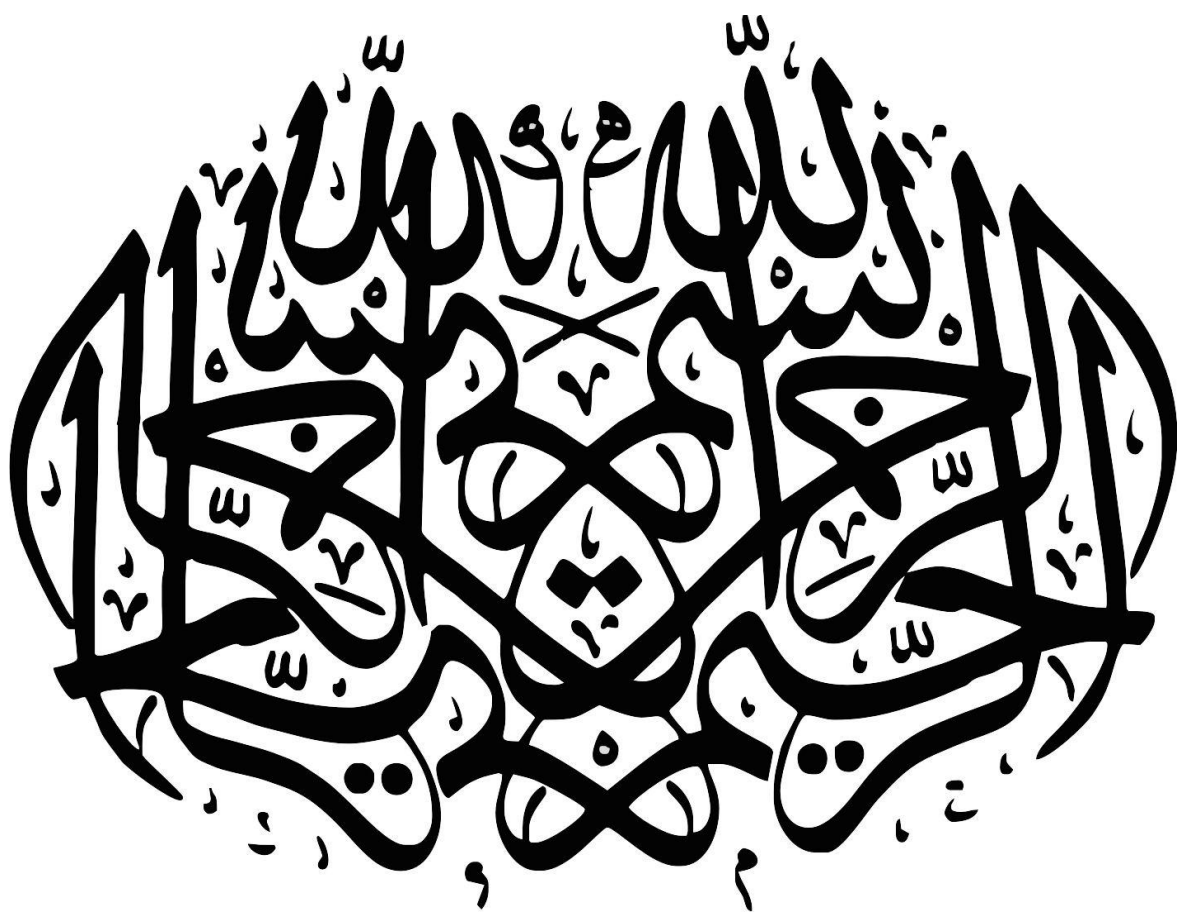
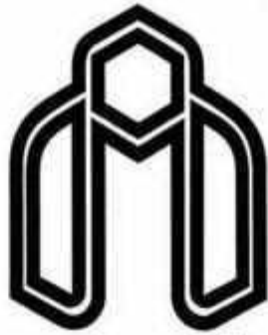






دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده: علوم ریاضی

گروه: ریاضی کاربردی

عنوان پایان نامه ارشد

حل رده ای از معادلات با مشتقات جزئی به روش تبدیل دیفرانسیل

دانشجو: سعیده حسام

اساتید راهنما:

دکتر جعفر فتحعلی

دکتر علیرضا ناظمی

استاد مشاور:

آقای فرخ فروهنده

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد

ماه و سال انتشار: شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به دو کوهر زندگی:

پدر عزیزم: به پاس سال ها تلاش تا بیاموزم.

مادر مهربانم: به پاس گذشت همدل سوزی ها تا بیایم.

به پاس تعبیر عظیم و انسانی شان از کلمه ایثار و از خودگذشتگی

به پاس عاطفه سرشار و کرمای امید بخش وجودشان که در این سردترین روزگار ان بهترین پشتیبان است،

به پاس قلب های بزرگشان که فریادس است و سرگردانی و ترس در پناهشان به شجاعت می گراید

به پاس محبت های بی دریغشان که هرگز فروکش نمی کند.

مشکرو قدردانی:

مشکرو سپاس خداوندی را که فراگیری علم و دانش را تا این مقطع برای اینجانب فراهم ساخت. هر چند واژه ها را یارای آن نیست که لطف و محبت کسانی را که در تمام دوران زندگیم جرعه نوش دریای مهر و محبتشان بوده ام به تصویر بکشم، اما به رسم ادب و احترام بوسه بردستان زده و بر خود واجب می دانم از زحمات مستمر و بی دریغ اساتید راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی و جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی که بارها راهنمایی های ارزنده خویش نقش مهمی در به ثمر رساندن این پایان نامه داشته اند صمیمانه تقدیر و تشکر نمایم، همچنین از استاد مشاورم آقای فرخ فروهنده کمال تشکر را دارم.

از اساتید داور آقایان دکتر علی مس فروش و دکتر حمید رضا ایک چي که زحمات داورى این پایان نامه را به عهده داشتند سپاسگزارم.

اما مراتب ارادت و تشکر ویژه خویش را به استاد عزیزم جناب آقای دکتر احمد حق بین به پاس همه راهنمایی های ارزنده و زحمات بسیاری که در این مدت متحمل شدند تقدیم می کنم.

در نهایت از زحمات تمامی اعضای خانواده ام خصوصاً پدر و مادرم که همواره راه‌کنشی مشکلاتم در تمام مراحل زندگی بوده اند ارج نهاده و مراتب تشکر قلبی و باطنی خویش را از الطاف و مهربانی آنها ابراز دارم.

همچنین از هم‌اتاقی‌های عزیز و مهربان و دوستان خوبم که محطاتی سرشار از شادی و محبت را در کنارشان تجربه کردم بسیار سپاسگزارم.

با احترام: سعیده حسام

تعهد نامه

اینجانب سعیده حسام دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم دانشگاه صنعتی شاهرود نویسنده

پایان نامه حل رده ای از معادلات با مشتقات جزئی به روش تبدیل دیفرانسیل تحت راهنمایی دکتر جعفر فتحعلی و

دکتر علیرضا ناظمی متعهد می شوم .

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است .
- در استفاده از نتایج پژوهشهای محققان دیگر به مرجع مورد استفاده استناد شده است .
- مطالب مندرج در پایان نامه تاکنون توسط خود یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارائه نشده است .
- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد و مقالات مستخرج با نام « دانشگاه صنعتی شاهرود » و یا « Shahrood University of Technology » به چاپ خواهد رسید .
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آمدن نتایج اصلی پایان نامه تأثیرگذار بوده اند در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه ، در مواردی که از موجود زنده (یا بافتهای آنها) استفاده شده است ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است .
- در کلیه مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته یا استفاده شده است اصل رازداری ، ضوابط و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است .

تاریخ

امضای دانشجو

مالکیت نتایج و حق نشر

- کلیه حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج ، کتاب ، برنامه های رایانه ای ، نرم افزار ها و تجهیزات ساخته شده است) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد . این مطلب باید به نحو مقتضی در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود .
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد

چکیده

در این پایان نامه ابتدا به بررسی معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پرداخته شده است سپس روش تبدیل دیفرانسیل را برای توابع خطی و غیرخطی یک بعدی و دو بعدی بیان نموده و کارایی روش را با چند مثال عددی نشان می دهیم. در انتها به حل معادلات فوکر- پلانک، زاخواروف-کازنتسوف و کوراماتو- سیواشینسکی به روش تبدیل دیفرانسیل و حل معادله فرنبرگ - ویتهم به روش کاهش تبدیل دیفرانسیل می پردازیم.

واژه های کلیدی: معادلات با مشتقات جزئی، روش تبدیل دیفرانسیل، تبدیل دیفرانسیل معکوس، جواب دقیق، فرم بسته.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1- Saeideh Hesam, Alireza Nazemi and Ahmad Haghbin, "Analytical solution for the Zakharov-Kuznetsov equations by differential transform method"

International Journal of Engineering and Natural Sciences 4:4 2010

2- Saeideh Hesam, Alireza Nazemi and Ahmad Haghbin, "Reduced Differential Transform Method for solving the Fornberg-Whitham equation" **The 4th**

Mathematics Annual National Conference of PNU, Payam Noor University, Ardabil, Iran.

3- Ahmad Haghbin, Saeideh Hesam and Alireza Nazemi, "Reduction Differential Transform Method for Solving the Laplace Equation" **The 4th Mathematics**

Annual National Conference of PNU, Payam Noor University, Ardabil, Iran.

فهرست مطالب

لیست جداول

ج

۱	مقدمه و مفاهیم اولیه	۱
۲	مقدمه	۱.۱
۲	معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی	۲.۱
۵	انواع معادلات با مشتقات جزئی	۳.۱
۵	۱.۳.۱ معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول	
۶	۲.۳.۱ معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم	
۷	۴.۱ بسط تیلور و سری مک لورن	
۸	۵.۱ بسط تیلور توابع خاص	

۲ کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات

۹	جزئی	
۱۰	مقدمه	۱.۲
۱۱	روش تبدیل دیفرانسیل یک بعدی	۲.۲
۱۴	مثال های عددی	۳.۲
۱۷	روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی	۴.۲
۲۶	مثال های عددی	۵.۲
۳۱	روش تبدیل دیفرانسیل سه بعدی	۶.۲
۳۶	مثال عددی	۷.۲
۳۹	محاسبه تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی یک بعدی	۸.۲
۳۹	۱.۸.۲ مقدمه	
۴۰	۲.۸.۲ توابع غیرخطی نمایی	
۴۱	۳.۸.۲ توابع غیرخطی لگاریتمی	
۴۲	۴.۸.۲ توابع غیرخطی مثلثاتی	
۴۳	۵.۸.۲ توابع غیرخطی هذلولوی	
۴۴	۶.۸.۲ توابع غیرخطی نمایی	
۴۵	۹.۲ مثال های عددی	

۴۸	محاسبه تبدیل دیفرانسیل توابع غیر خطی دو بعدی	۱۰.۲
۴۸	مقدمه	۱.۱۰.۲
۴۸	توابع غیرخطی چند جمله ای	۲.۱۰.۲
۵۰	تابع غیرخطی نمایی	۳.۱۰.۲
۵۱	تابع غیرخطی لگاریتمی	۴.۱۰.۲
۵۲	توابع غیرخطی مثلثاتی	۵.۱۰.۲
۵۴	توابع غیرخطی هذلولوی	۶.۱۰.۲
۵۴	توابع غیرخطی نمایی	۷.۱۰.۲
۵۵	مثال های عددی	۱۱.۲
۶۰	حل معادله فوکر-پلانک به روش تبدیل دیفرانسیل	۳
۶۱	مقدمه	۱.۳
۶۴	نتایج عددی از معادله	۲.۳
۷۲	حل معادله فرنبرگ- وایتهم به روش کاهش تبدیل دیفرانسیل	۴
۷۳	مقدمه	۱.۴
۷۴	ایده اصلی روش کاهش تبدیل دیفرانسیل	۲.۴
۷۶	مثال های عددی	۳.۴
۷۹	حل معادله زاخواروف- کازنتسوف به روش تبدیل دیفرانسیل	۵
۸۰	مقدمه	۱.۵
۸۱	مثال های عددی	۲.۵
۹۱	حل معادله کوراماتو-سیواشینسکی به روش تبدیل دیفرانسیل	۶
۹۲	مقدمه	۱.۶
۹۳	مثال های عددی	۲.۶
۹۸	نتیجه گیری	۷
۹۹	برنامه های کامپیوتری	
۱۰۵	مراجع	
۱۱۰	واژه نامه فارسی به انگلیسی	

لیست جداول

۱.۲	خطای مطلق برای ۵ تکرار روش تجزیه آدومیان، ۱ تکرار وردشی و ۱
۲۸	تکرار روش تبدیل دیفرانسیل به ازای $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0.001$
۲.۲	خطای مطلق برای ۵ تکرار روش تجزیه آدومیان، ۱ تکرار وردشی و ۱
۲۸	تکرار روش تبدیل دیفرانسیل به ازای $\gamma = \alpha = 0.1, \beta = 0.001$. .
۳.۲	خطای مطلق برای ۵ تکرار روش تجزیه آدومیان، ۱ تکرار وردشی و ۱
۲۹	تکرار روش تبدیل دیفرانسیل به ازای $\alpha = 0.01, \beta = \gamma = 0.0001$
۷۵	کاهش تبدیل دیفرانسیل

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

اکثر پدیده های فیزیکی در مکانیک سیالات، الکتریسیته، کوانتوم و ... با معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی^۱ توصیف می شوند، در واقع اکثر مطالب ریاضی فیزیک، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی هستند. در این فصل ما ابتدا خلاصه ای از تعاریف و کاربردهای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی و روش های حل آن ها و همچنین بحث کوتاهی از طرز رده بندی انواع مختلف آن ها را بیان می کنیم.

۲.۱ معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی، رابطه ای بین یک تابع چند متغیره و مشتقات آن نسبت به این متغیرها می باشد. تفاوت آن با معادله دیفرانسیل معمولی^۲ که در آنها تابع مجهول فقط به یک متغیر بستگی دارد، در این است که در این معادلات تابع مجهول به چندین متغیر بستگی دارد.

برای تسهیل در نمادگذاری فرض می شود:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

حال چند معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی معروف را بیان می کنیم.

$$u_t = u_{xx} \quad \text{معادله انتقال حرارت}$$

$$u_{tt} = u_{xx} \quad \text{معادله موج}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{معادله لاپلاس}$$

اکثر قوانین فیزیک نظیر معادلات ماکسول^۳، قانون تبرید نیوتن^۴، معادلات ناویر-

^۱Partial Differential Equation

^۲Ordinary Differential Equation

^۳Maxwell

استوکس^۵ و معادله شرودینگر^۶ در مکانیک کوانتوم بر حسب معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیان شده اند؛ این قوانین، پدیده های فیزیکی را به وسیله ارتباط فضا و مشتقات نسبت به زمان توضیح می دهند. وجود مشتق ها در این معادلات به این دلیل است که مشتقات، مقادیر فیزیکی مانند (سرعت، شتاب، نیرو، شار، شدت جریان) را نمایش می دهند.

هدف این است که معادلات مشتقات جزئی همراه با شرایط اولیه و مرزی را حل کنیم. روش های زیادی برای این کار وجود دارند، مهمترین آن ها روش هایی هستند که معادلات دیفرانسیل مشتقات جزئی را به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می کنند [۱]. برخی از تکنیک های مفید عبارتند از:

۱. جداسازی متغیر ها: این تکنیک یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با n متغیره را به دستگاه n معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می کند.

۲. تبدیل های انتگرال: این روند یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی با n متغیر مستقل را به یک معادله با مشتقات جزئی شامل $n - 1$ متغیر تبدیل می کند.

۳. تغییر مختصات: این روش با تغییر مختصات مسئله (دوران محور یا مشابه آن) معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک معادله دیفرانسیل معمولی یا معادله مشتقات جزئی آسانتر تغییر می دهد.

۴. تبدیل متغیر وابسته: این روش مجهول یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک مجهول جدید که آسانتر به دست می آید تبدیل می کند.

^۴Newton

^۵Navier-Stokes

^۶Schrodinger

۵. روش های عددی: تاکنون روش های متفاوتی برای حل معادلات با مشتقات جزئی ارائه شده است برخی از این روش ها عبارتند از: روش عناصر متناهی^۷ [۲]، روش مقدار متناهی^۸ [۳]، روش عناصر مرزی^۹ [۴]، روش تفاضلات متناهی^{۱۰} [۵]، روش های طیفی^{۱۱} [۶]، روش آدومیان^{۱۲} [۷]، روش آشفتگی هموتوپی^{۱۳} [۸] و روش تکرار وردشی [۹]۱۴.

۶. روش اختلال: این روش یک مسئله غیرخطی را به یک رشته مسائل خطی که مسئله غیرخطی را تقریب می زنند تغییر می دهد.

۷. تکنیک پاسخ - ضربه ای: این روند ناحیه حل را به ضربه های ساده تجزیه کرده و پاسخ مربوط به هر ضربه را پیدا می کند. سپس پاسخ کل با افزودن این پاسخ های ساده به دست می آید.

۸. معادلات انتگرال: این تکنیک یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را به یک معادله انتگرال تغییر می دهد سپس معادله انتگرال با تکنیک های مختلف حل می شود.

۹. روش های حساب تغییرات: این روش ها جواب معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی را با تنظیم مجدد معادله، به صورت یک مساله مینیمم سازی در می آورند.

۱۰. بسط تابع ویژه ای: این روش جواب یک معادله با مشتقات جزئی را به صورت یک

^۷Finite Element Method

^۸Finite Volume Method

^۹Boundary Element Method

^{۱۰}Finite Difference Method

^{۱۱}Spectral Method

^{۱۲}Adomian Method

^{۱۳}Homotopy Perturbation Method

^{۱۴}Variational Iteration Method

مجموع نامتناهی از توابع ویژه می یابد. این توابع ویژه با حل آنچه به عنوان یک مسئله مقدار ویژه نظیر مساله اصلی معروف است به دست می آیند.

۳.۱ انواع معادلات با مشتقات جزئی

معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی بر اساس معیارهای زیادی رده بندی می شود. رده بندی مفهوم مهمی است زیرا نظریه عمومی و روش های حل معمولاً فقط بر یک رده از معادلات داده شده اعمال می شود.

فرم کلی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی به صورت زیر است:

$$G(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_x^{(n)}, u_t, u_{tt}, \dots, u_t^{(m)}, u_{xt}, \dots) = 0. \quad (1.1)$$

تعریف ۱.۳.۱. مرتبه یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی برابر با بالاترین مرتبه مشتقی است که در معادله ظاهر می شود.

۱.۳.۱ معادلات با مشتقات جزئی مرتبه اول

فرض کنید u تابعی از دو متغیر مستقل x و t باشد. هر معادله مرتبه اول به صورت کلی زیر

$$P(x, t, u)u_x + Q(x, t, u)u_t = R(x, t, u), \quad (2.1)$$

را وقتی توابع P ، Q و R در حالت کلی به x ، t و u بستگی دارند شبه خطی^{۱۵} گوییم. توجه داشته باشید رابطه (۲.۱) نسبت به مشتقات u_x و u_t خطی^{۱۶} است.

هر معادله به صورت کلی

$$P(x, t)u_x + Q(x, t)u_t = H(x, t), \quad (3.1)$$

^{۱۵}Quasi-linear

^{۱۶}Linear

را وقتی P و Q به u بستگی نداشته باشند یک معادله نیمه خطی^{۱۷} نامیده می شود. بالآخره معادله کلی

$$P(x, t)u_x + Q(x, t)u_t + C(x, t)u = D(x, t), \quad (۴.۱)$$

را یک معادله مرتبه اول خطی می نامیم و طرف چپ نسبت به متغیرهای u_x ، u_t و u یک عبارت خطی است. هر معادله مرتبه اول که به صورت های فوق نباشد، غیرخطی^{۱۸} نامیده می شود.

۲.۳.۱ معادلات با مشتقات جزئی مرتبه دوم

فرض کنید u تابعی از دو متغیر مستقل x و t باشد. یک معادله با مشتقات جزئی مرتبه دوم رابطه ای است بین متغیرهای x ، t و u و مشتقات جزئی مرتبه اول و مرتبه دوم u نسبت به x و t یعنی

$$G(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}) = 0. \quad (۵.۱)$$

در حالت خاص یک معادله مرتبه دوم به صورت

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{tt} = F, \quad (۶.۱)$$

را که در آن ضرایب A ، B ، C و F هر یک تابعی از پنج متغیر x ، t ، u ، u_x و u_t هستند تقریباً خطی یا نیمه خطی گفته می شود زیرا این معادله نسبت به مشتقات مرتبه دوم خطی است. اگر در رابطه (۶.۱) ضرایب A ، B و C تابعی فقط از x و t و F تابعی خطی از u ، u_x و u_t باشد یعنی

$$F = a(x, t)u + b(x, t)u_x + c(x, t)u_t,$$

^{۱۷}Half-Linear

^{۱۸}Non-Linear

آنگاه (۶.۱) را خطی می نامیم. بنابراین صورت کلی یک معادله مرتبه دوم خطی به صورت زیر است:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Hu = 0 \quad (۷.۱)$$

که در آن ضرایب A, B, C, D, E, H هر یک تابعی فقط از x و t هستند.

معادلات خطی را به شکل زیر دسته بندی می کنیم:

الف) اگر به ازای مقادیری از x و t ، $B^2 - AC > 0$ ، آنگاه معادله را هذلولی^{۱۹} می نامیم.

ب) اگر به ازای مقادیری از x و t ، $B^2 - AC = 0$ ، آنگاه معادله را سهموی^{۲۰} می نامیم.

ج) اگر به ازای مقادیری از x و t ، $B^2 - AC < 0$ ، آنگاه معادله را بیضوی^{۲۱} می نامیم.

۴.۱ بسط تیلور و سری مک لورن

به وسیله بسط تیلور می توان توابع بی نهایت بار مشتق پذیر را به صورت توابع توانی نوشت و یا به عبارتی بسط داد.

تعریف ۱.۴.۱. گر f در همسایگی x_0 و $|x - x_0|$ بی نهایت بار مشتق پذیر باشد، آنگاه f را

می توان به صورت توان هایی از $(x - x_0)$ به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)f'(x)}{1!} + \frac{(x - x_0)^2 f''(x)}{2!} + \frac{(x - x_0)^3 f'''(x)}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x)}{n!} (x - x_0)^n,$$

که در اینجا $f^n(x)$ مشتق n ام تابع f است.

حالت خاص سری تیلور که حول نقطه $x_0 = 0$ می باشد را سری مک لورن می نامند.

^{۱۹}Hyperbolic

^{۲۰}Parabolic

^{۲۱}Elliptic

۵.۱ بسط تیلور توابع خاص

بسط تیلور چند تابع خاص به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \bullet e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
 \bullet \sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
 \bullet \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\
 \bullet \sinh(x) &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\
 \bullet \cosh(x) &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}
 \end{aligned}$$

قضیه ۱.۵.۱. (قضیه تیلور): فرض کنیم $f \in C^n[a, b]$ و $f^{(n+1)}$ بر $[a, b]$ موجود و همچنین

$x_0 \in [a, b]$ باشد. در این صورت به ازای هر $x \in [a, b]$ نقطه ای مانند $\xi(x) \in (a, b)$ وجود

دارد به طوری که :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

که در آن

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\
 R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}
 \end{aligned}$$

در اینجا P_n چندجمله ای تیلور درجه n ام f حول x_0 و R_n جمله باقی مانده یا خطای

برشی وابسته به $P_n(x)$ نامیده می شود.

فصل ۲

کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای
معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی

۱.۲ مقدمه

روش تبدیل دیفرانسیل^۱ روشی تحلیلی- عددی برای حل معادلات با مشتقات جزئی است. این روش اولین بار توسط ژو^۲ در سال ۱۹۸۶ برای کاربردهای مهندسی معرفی گردید و از آن برای حل مسائل مقدار اولیه خطی و غیرخطی در تحلیل مدارهای الکتریکی استفاده کرد[۱۰].

روش تبدیل دیفرانسیل از بسط سری تیلور برای جواب معادلات دیفرانسیل به صورت یک چندجمله ای استفاده می کند. در روش سری تیلور برای محاسبه ضرایب سری، باید مشتقات مراتب بالاتر مختلف تابع را در یک نقطه ی معین به دست آورد که این محاسبات در مراتب بالا بسیار پرهزینه است. روش تبدیل دیفرانسیل یک فرایند تکراری برای به دست آوردن جواب سری تیلور معادله دیفرانسیل مفروض است، اما در این روش مشتقات مستقیماً محاسبه نمی شوند بلکه برای محاسبه مشتقات از یک فرایند تکراری استفاده می شود. به همین دلیل در این روش حجم محاسبات بسیار کاهش می یابد و بدون نیاز به خطی سازی، گسسته سازی و ایجاد آشفتگی در مساله، به جوابی قابل قبول با دقت بالا می رسد.

پیشرفت های مهمی در کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای حل مسائل مقدار اولیه خطی و غیرخطی صورت گرفته است. چن^۳ و هو^۴ در سال ۱۹۹۶، این روش را برای مسائل مقدار ویژه به کار بردند[۱۱]، و در سال ۱۹۹۹ روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی را معرفی کرده و برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی به کار بردند[۱۲].

^۱Differential transform method(DTM)

^۲Zhou

^۳Chen

^۴Hou

در طول سال های اخیر بسیاری از پژوهشگران در این زمینه تحقیقات گسترده ای انجام داده اند. از آن جمله می توان به مومانی^۵، ادیبات^۶، ایاز^۷ و erturk^۸ اشاره کرد که در این زمینه به نتایج قابل توجهی دست یافته اند.

۲.۲ روش تبدیل دیفرانسیل یک بعدی

در این بخش، روش تبدیل دیفرانسیل یک بعدی^۹ را معرفی کرده و آن را برای معادلات دیفرانسیل معمولی به کار می بریم. تابع یک متغیره $w(x)$ مورد بررسی قرار می گیرد. فرض کنید $w(x)$ در دامنه ی k تحلیلی باشد و عدد معین x_0 در این دامنه قرار داشته باشد. در این حالت $w(x)$ به صورت یک سری به مرکز x_0 نمایش داده می شود. تبدیل دیفرانسیل تابع $w(x)$ برابر است با:

$$W(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k w(x)}{dx^k} \Big|_{x=x_0}, \quad k \geq 0, \quad (1.2)$$

که $w(x)$ تابع اصلی و $W(k)$ تابع تبدیل دیفرانسیل $w(x)$ است. $W(k)$ به صورت دنباله ای از اعداد حقیقی است.

تبدیل دیفرانسیل معکوس دنباله $\{W(k)\}_{k=0}^{\infty}$ برابر است با:

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W(k)(x - x_0)^k. \quad (2.2)$$

وقتی که $x_0 = 0$ ، رابطه (۲.۲) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$w(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W(k)x^k. \quad (3.2)$$

^۵Momani

^۶Adibat

^۷Ayaz

^۸Erturk

^۹One-dimensional differential transform method

فصل ۲. کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۱۲

در کاربردهای حقیقی $w(x)$ به صورت تقریب $n + 1$ جمله ای به صورت زیر در نظر گرفته می شود.

$$w(x) = \sum_{k=0}^n W(k)x^k. \quad (۴.۲)$$

قضایای اساسی تبدیل دیفرانسیل یک بعدی به صورت زیر بیان شده اند که با استفاده از تعاریف فوق اثبات می شوند [۱۵]-[۱۳].

در تمام قضایای زیر فرض می کنیم که $F(k)$ ، $G(k)$ و $H(k)$ تبدیل دیفرانسیل توابع $f(x)$ ، $g(x)$ و $h(x)$ هستند.

قضیه ۱.۲.۲. اگر $f(x) = g(x) \mp h(x)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $F(k) = G(k) \mp H(k)$.

قضیه ۲.۲.۲. اگر $f(x) = ag(x)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $F(k) = aG(k)$.

قضیه ۳.۲.۲. اگر $f(x) = \frac{d^m g(x)}{dx^m}$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $F(k) = \frac{(k+m)!}{k!} G(k+m)$.

اثبات. با استفاده از تعریف (۲.۲) داریم:

$$F(k) = \frac{1}{k!} \frac{d^k \left(\frac{d^m g(x)}{dx^m} \right)}{dx^k} \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{k!} \frac{d^{k+m} g(x)}{dx^{k+m}} \Big|_{x=x_0} = \frac{(k+m)!}{k!(k+m)!} \frac{d^{k+m} g(x)}{dx^{k+m}} \Big|_{x=x_0} = \frac{(k+m)!}{k!} G(k+m).$$

■

قضیه ۴.۲.۲. اگر $f(x) = g(x)h(x)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $F(k) = \sum_{i=0}^k G(i)H(k-i)$.

اثبات. با استفاده از تعریف (۲.۲) برای $k = 0, 1, 2, \dots$ داریم:

$$F(0) = \frac{d^0 g(x)h(x)}{dx^0} \Big|_{x=x_0} = g(x_0)h(x_0) = G(0)H(0),$$

فصل ۲. کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۱۳

$$F(۱) = \frac{d(g(x)h(x))}{dx} \Big|_{x=x_0} = \frac{dg(x)}{dx} h(x) \Big|_{x=x_0} + g(x) \frac{dh(x)}{dx} \Big|_{x=x_0} =$$

$$G(۱)h(x_0) + g(x_0)H(۱) = G(۱)H(0) + G(0)H(۱),$$

$$F(۲) = \frac{۱}{۲!} \frac{d^۲(g(x)h(x))}{dx^۲} \Big|_{x=x_0} = \frac{۱}{۲!} \left[\frac{d^۲g(x)}{dx^۲} h(x) + ۲ \frac{dg(x)}{dx} \frac{dh(x)}{dx} + g(x) \frac{d^۲h(x)}{dx^۲} \right] \Big|_{x=x_0} =$$

$$G(۲)h(x_0) + G(۱)H(۱) + g(x_0)H(۲) = G(۲)H(0) + G(۱)H(۱) + G(0)H(۲),$$

و در حالت کلی داریم:

$$F(k) = \sum_{i=0}^k G(i)H(k-i).$$

■

قضیه ۵.۲.۲. اگر $f(x) = (x - x_0)^n$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $F(k) = \delta(k - n)$ که در آن

$$F(k) = \delta(k - n) = \begin{cases} ۱ & k = n, \\ 0 & k \neq n. \end{cases}$$

اثبات . با استفاده از تعریف (۲.۲) داریم:

$$F(k) = \frac{۱}{k!} \frac{d^k(x - x_0)^n}{dx^k} \Big|_{x=x_0} = \begin{cases} ۱ & k = n, \\ 0 & k > n, \\ \frac{۱}{k!} n(n-1)\dots(n-k+1)(x - x_0)^{n-k} \Big|_{x=x_0} = 0 & k < n. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} ۱ & k = n, \\ 0 & k \neq n. \end{cases}$$

■

قضیه ۶.۲.۲. اگر $f(x) = g_1(x)g_2(x)\dots g_n(x)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ،

$$F(k) = \sum_{k_{n-1}=0}^k \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} \dots \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} G_1(k_1)G_2(k_2 - k_1)\dots G_{n-1}(k_{n-1} - k_{n-2})G_n(k - k_{n-1}).$$

قضیه ۷.۲.۲. اگر $f(x) = x$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $F(k) = \delta(k - 1)$.

قضیه ۸.۲.۲. اگر $f(x) = e^{\lambda x}$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$.

اثبات. با استفاده از بسط سری تیلور تابع $e^{\lambda x}$ در $x_0 = 0$ داریم:

$$e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k x^k, \quad |x| < \infty,$$

با توجه به رابطه (۳.۲) نتیجه می شود $F(k) = \frac{\lambda^k}{k!}$. ■

قضیه ۹.۲.۲. اگر $f(x) = \sin(\omega x + \alpha)$ آنگاه $F(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin(\frac{\pi k}{2} + \alpha)$.

اثبات. می دانیم $\sin(\omega x + \alpha) = \cos(\alpha) \sin(\omega x) + \sin(\alpha) \cos(\omega x)$ حال با استفاده از بسط

تیلور توابع $\sin(\omega x)$ و $\cos(\omega x)$ حول نقطه $x_0 = 0$ داریم:

$$\begin{aligned} \sin(\omega x + \alpha) &= \cos(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \omega^{(2k+1)} x^{(2k+1)} + \sin(\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \omega^{(2k)} x^{(2k)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2} + \alpha\right) x^k. \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۳.۲) نتیجه می شود $F(k) = \frac{\omega^k}{k!} \sin(\frac{\pi k}{2} + \alpha)$. ■

۳.۲ مثال های عددی

مثال ۱.۳.۲. با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل یک بعدی، معادله دیفرانسیل ریکاتی

درجه دوم^{۱۰} زیر مورد بررسی قرار می گیرد [۱۶].

$$\frac{dy}{dt} = -y^2(t) + 1, \quad (5.2)$$

^{۱۰} Quadratic Riccati Differential Equation

با شرط اولیه به صورت

$$y(0) = 0, \quad (6.2)$$

که جواب دقیق این معادله برابر است با $\frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}$.

تبدیل دیفرانسیل معادله (۵.۲) با استفاده از قضایای فوق به صورت زیر است:

$$(k+1)Y(k+1) = -\sum_{r=0}^k Y(r)Y(k-r) + \delta(k). \quad (7.2)$$

از شرط اولیه داده شده در رابطه (۶.۲) داریم:

$$Y(0) = 0, \quad (8.2)$$

با جایگذاری معادله (۸.۲) در رابطه بازگشتی (۷.۲) نتایج به صورت زیر بدست می آیند.

$$Y(1) = 1, \quad Y(2) = 0, \quad Y(3) = -\frac{1}{3}, \quad Y(4) = 0, \quad Y(5) = \frac{2}{15}, \dots$$

بنابراین با جایگذاری مقادیر $Y(k)$ در رابطه (۳.۲) داریم:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)t^k = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 + \dots = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1},$$

که این جواب دقیق مسئله است [۱۷].

مثال ۲.۳.۲. معادله دیفرانسیل لن-امدن^{۱۱} را که در زیر آمده در نظر بگیرید. [۱۸].

$$u''(x) + \frac{2}{x}u'(x) = 2(2x^2 + 3)u(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (9.2)$$

با شرایط اولیه به صورت

$$u(0) = 1, \quad u'(0) = 0. \quad (10.2)$$

^{۱۱}Lane- Emden equation

فصل ۲. کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۱۶

جواب دقیق مسئله برابر است با $u(x) = e^{x^2}$.

با ضرب طرفین معادله (۹.۲) در x داریم

$$xu''(x) + 2u'(x) = 4x^3u(x) + 6xu(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (11.2)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۱۱.۲) با استفاده از قضایای فوق به صورت رابطه بازگشتی زیر است:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^k \delta(l-1)(k-l+1)(k-l+2)U(k-l+2) + 2(k+1)U(k+1) = \\ 4 \sum_{l=0}^k \delta(l-3)U(k-l) + 6 \sum_{l=0}^k \delta(l-1)U(k-l) \end{aligned} \quad (12.2)$$

تبدیل دیفرانسیل شرایط اولیه عبارتست از

$$U(0) = u(0) = 1, \quad U(1) = u'(0) = 0. \quad (13.2)$$

با استفاده از رابطه بازگشتی (۱۲.۲) و تبدیل دیفرانسیل شرایط اولیه (۱۳.۲) تمام مقادیر $U(k)$ بصورت زیر محاسبه می شوند:

$$\begin{aligned} U(2) = 1, \quad U(3) = 0, \quad U(4) = \frac{1}{2}, \quad U(5) = 0, \\ U(6) = \frac{1}{6}, \quad U(7) = 0, \quad U(8) = \frac{1}{24}, \quad U(9) = 0, \dots \end{aligned}$$

بنابراین با جایگذاری مقادیر $U(k)$ در رابطه (۳.۲) داریم

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)x^k = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = e^{x^2}$$

که این جواب دقیق مسئله است [۱۹].

۴.۲ روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی

روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی^{۱۲}، اولین بار توسط چن و هو در سال ۱۹۹۹ معرفی شد و برای حل معادلات با مشتقات جزئی خطی و غیرخطی به کار گرفته شد [۱۲]. در این بخش روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی را معرفی می کنیم.

فرض کنید $w(x, y)$ در دامنه ی k تحلیلی باشد و (x_0, y_0) در این دامنه قرار داشته باشد، در این حالت $w(x, y)$ به صورت یک سری به مرکز (x_0, y_0) نمایش داده می شود. تبدیل دیفرانسیل تابع $w(x, y)$ برابر است با:

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} \Big|_{(x_0, y_0)}, \quad h \geq 0, k \geq 0, \quad (14.2)$$

که $w(x, y)$ تابع اصلی و $W(k, h)$ تابع تبدیل دیفرانسیل $w(x, y)$ است.

تبدیل دیفرانسیل معکوس دنباله $\{W(k, h)\}_{k,h=0}^{\infty}$ برابر است با:

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) (x - x_0)^k (y - y_0)^h. \quad (15.2)$$

از ترکیب دو رابطه فوق وقتی $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ، رابطه (۱۵.۲) به صورت زیر تبدیل می شود.

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \frac{\partial^{k+h} w(x, y)}{\partial x^k \partial y^h} x^k y^h = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h. \quad (16.2)$$

در کاربرد های حقیقی $w(x, y)$ به صورت سری متناهی زیر در نظر گرفته می شود.

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^m W(k, h) x^k y^h. \quad (17.2)$$

قضایای اساسی تبدیل دیفرانسیل دو بعدی به صورت زیر بیان و با استفاده از تعاریف اولیه (۱۴.۲)–(۱۷.۲) اثبات می شوند [۲۰]–[۲۲].

^{۱۲}Two-dimensional differential transform method

در ادامه فرض می کنیم $U(k, h)$ ، $V(k, h)$ و $H(k, h)$ تبدیل دیفرانسیل توابع $u(x, y)$ ، $v(x, y)$ و $h(x, y)$ باشند.

قضیه ۱.۴.۲. اگر $w(x, y) = u(x, y) \mp v(x, y)$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = U(k, h) \mp V(k, h).$$

قضیه ۲.۴.۲. اگر $w(x, y) = au(x, y)$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ (a عددی ثابت است)

$$W(k, h) = aU(k, h).$$

قضیه ۳.۴.۲. اگر $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = (k + 1)U(k + 1, h)$$

اثبات . با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+1+h} u(x, y)}{\partial x^{k+1} \partial y^h} \right]_{(x_0, y_0)} = \\ &= \frac{(k+1)}{(k+1)!h!} \left[\frac{\partial^{k+1+h} u(x, y)}{\partial x^{k+1} \partial y^h} \right]_{(x_0, y_0)} = (k+1)U(k+1, h). \end{aligned}$$

■

قضیه ۴.۴.۲. اگر $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$ ،

$$W(k, h) = (h + 1)U(k, h + 1).$$

اثبات . با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+1+h} u(x, y)}{\partial x^k \partial y^{h+1}} \right]_{(x_0, y_0)} =$$

$$\frac{(h+1)}{(h+1)!k!} \left[\frac{\partial^{k+1+h} u(x,y)}{\partial x^k \partial y^{h+1}} \right]_{(x_0, y_0)} = (h+1)U(k, h+1).$$

■

قضیه ۵.۴.۲. اگر $w(x, y) = \frac{\partial^{r+s} u(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$,

$$W(k, h) = (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)U(k+r, h+s).$$

اثبات. با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h} \left(\frac{\partial^{r+s} u(x,y)}{\partial x^r \partial y^s} \right)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(x_0, y_0)} = \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+r+h+s} u(x,y)}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s}} \right]_{(x_0, y_0)} = \\ &= \frac{(k+1)\dots(k+r)(h+1)\dots(h+s)}{(k+r)! (h+s)!} \left[\frac{\partial^{k+r+h+s} u(x,y)}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s}} \right]_{(x_0, y_0)} = \\ &= (k+1)\dots(k+r)(h+1)\dots(h+s)U(k+r, h+s). \end{aligned}$$

■

لم ۶.۴.۲. برای $h \geq 0$ و $k \geq 0$ رابطه زیر برقرار است [۲۳].

$$\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} (s(x, y)t(x, y)) = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^h \binom{k}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j} s(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{k+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{h-j}}.$$

اثبات. برای اثبات به استقراء روی مقادیر $k+h$ بحث می شود. در حالتی که $k+h=0$,

یا به طور معادل $k=0$ و $h=0$ ، درستی لم (۶.۴.۲) بدیهی است. فرض کنید لم (۶.۴.۲)

در حالت $k+h=m (\geq 0)$ ، صحیح باشد، لم برای حالت $k+h=m+1 (\geq 1)$ اثبات می

شود. در اینجا فقط حالتی که $k \geq 1$ ، در نظر گرفته شده است. برای حالت $h \geq 1$ ، به

طور مشابه اثبات می شود.

با استفاده از فرض استقرا داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [s(x, y)t(x, y)] &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^{(k-1)+h}}{\partial x^{k-1} \partial y^h} [s(x, y)t(x, y)] \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^h \binom{k-1}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j} s(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{(k-1)+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{(k-1)-i} \partial y^{h-j}} \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^h \binom{k-1}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j+1} s(x, y)}{\partial x^{i+1} \partial y^j} \frac{\partial^{(k-1)+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{(k-1)-i} \partial y^{h-j}} \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^h \binom{k-1}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j} s(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{k+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{h-j}}. \quad (18.2)
 \end{aligned}$$

ابتدا در معادله (۱۸.۲) قرار می دهیم $k = 1$ ، لذا داریم:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^{1+h}}{\partial x \partial y^h} [s(x, y)t(x, y)] &= \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{\partial^{1+j} s(x, y)}{\partial x \partial y^j} \frac{\partial^{h-j} t(x, y)}{\partial y^{h-j}} + \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{\partial^j s(x, y)}{\partial y^j} \frac{\partial^{1+h-j} t(x, y)}{\partial x \partial y^{h-j}} \\
 &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^h \binom{1}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j} s(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{1+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{1-i} \partial y^{h-j}}
 \end{aligned}$$

در معادله (۱۸.۲) فرض می کنیم $k \geq 2$.

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^h \binom{k-1}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j+1} s(x, y)}{\partial x^{i+1} \partial y^j} \frac{\partial^{(k-1)+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{(k-1)-i} \partial y^{h-j}} = \\
 &\sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{\partial^{1+j} s(x, y)}{\partial x \partial y^j} \frac{\partial^{(k-1)+h-j} t(x, y)}{\partial x^{k-1} \partial y^{h-j}} + \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{\partial^{k+j} s(x, y)}{\partial x^k \partial y^j} \frac{\partial^{h-j} t(x, y)}{\partial y^{h-j}} \\
 &\quad + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=0}^h \binom{k-1}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j+1} s(x, y)}{\partial x^{i+1} \partial y^j} \frac{\partial^{(k-1)+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{(k-1)-i} \partial y^{h-j}} \\
 &= \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{\partial^{1+j} s(x, y)}{\partial x \partial y^j} \frac{\partial^{(k-1)+h-j} t(x, y)}{\partial x^{k-1} \partial y^{h-j}} + \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{\partial^{k+j} s(x, y)}{\partial x^k \partial y^j} \frac{\partial^{h-j} t(x, y)}{\partial y^{h-j}} \\
 &\quad + \sum_{i=2}^{k-1} \sum_{j=0}^h \binom{k-1}{i-1} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j} s(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{k+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{h-j}} \quad (19.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=0}^h \binom{k-1}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j} s(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{k+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{h-j}} = \\
 & \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{\partial^j s(x, y)}{\partial y^j} \frac{\partial^{k+h-j} t(x, y)}{\partial x^k \partial y^{h-j}} + (k-1) \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{\partial^{1+j} s(x, y)}{\partial x \partial y^j} \frac{\partial^{k+h-1-j} t(x, y)}{\partial x^{k-1} \partial y^{h-j}} \\
 & + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^h \binom{k-1}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j} s(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{k+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{h-j}} \quad (20.2)
 \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از رابطه $\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} = \binom{k}{i}$ و قراردادن معادله های (۱۹.۲) و (۲۰.۲) در معادله (۱۸.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [s(x, y)t(x, y)] = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{\partial^j s(x, y)}{\partial y^j} \frac{\partial^{k+h-j} t(x, y)}{\partial x^k \partial y^{h-j}} \\
 & + k \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{\partial^{1+j} s(x, y)}{\partial x \partial y^j} \frac{\partial^{k+h-1-j} t(x, y)}{\partial x^{k-1} \partial y^{h-j}} + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^h \binom{k}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j} s(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{k+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{h-j}} \\
 & \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \frac{\partial^{k+j} s(x, y)}{\partial x^k \partial y^j} \frac{\partial^{h-j} t(x, y)}{\partial y^{h-j}} = \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^h \binom{k}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+j} s(x, y)}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial^{k+h-i-j} t(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^{h-j}}.
 \end{aligned}$$

■

قضیه ۷.۴.۲. اگر $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s) V(k-r, s).$$

اثبات . با استفاده از لم (۶.۴.۲) و رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
 W(k, h) &= \frac{1}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} (u(x, y)v(x, y)) \right]_{(x_0, y_0)} \\
 &= \frac{1}{k!h!} \left[\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^h \binom{k}{i} \binom{h}{j} \frac{\partial^{i+h-j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^{h-j}} \frac{\partial^{k-i+j} v(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^j} \right]_{(x_0, y_0)} \\
 &= \frac{1}{k!h!} \left[\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^h \frac{k!}{i!(k-i)!} \frac{h!}{j!(h-j)!} \frac{\partial^{i+h-j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^{h-j}} \frac{\partial^{k-i+j} v(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^j} \right]_{(x_0, y_0)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=\circ}^k \sum_{j=\circ}^h \left[\frac{1}{i!(h-j)!} \frac{\partial^{i+h-j} u(x, y)}{\partial x^i \partial y^{h-j}} \Big|_{(x_\circ, y_\circ)} \right] \left[\frac{1}{j!(k-i)!} \frac{\partial^{k-i+j} v(x, y)}{\partial x^{k-i} \partial y^j} \Big|_{(x_\circ, y_\circ)} \right] \\
 &= \sum_{i=\circ}^k \sum_{j=\circ}^h U(i, h-j) V(k-i, j).
 \end{aligned}$$

■

قضیه ۸.۴.۲. اگر $w(x, y) = u(x, y)v(x, y)h(x, y)$ آنگاه برای $k \geq \circ$ و $h \geq \circ$,

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} U(r, h-s-p) V(t, s) H(k-r-t, p).$$

اثبات. با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$W(\circ, \circ) = [u(x, y)v(x, y)h(x, y)]_{(x_\circ, y_\circ)} = U(\circ, \circ)V(\circ, \circ)H(\circ, \circ),$$

$$W(1, \circ) = \frac{1}{\circ!1!} \frac{\partial}{\partial x} [u(x, y)v(x, y)h(x, y)]_{(x_\circ, y_\circ)} = U(\circ, \circ)V(\circ, \circ)H(1, \circ)$$

$$+ U(\circ, \circ)V(1, \circ)H(\circ, \circ) + U(1, \circ)V(\circ, \circ)H(\circ, \circ),$$

$$W(2, \circ) = \frac{1}{\circ!2!} \frac{\partial}{\partial x^2} [u(x, y)v(x, y)h(x, y)]_{(x_\circ, y_\circ)} =$$

$$U(\circ, \circ)V(\circ, \circ)H(2, \circ) + U(\circ, \circ)V(2, \circ)H(\circ, \circ) + U(2, \circ)V(\circ, \circ)H(\circ, \circ)$$

$$+ U(\circ, \circ)V(1, \circ)H(1, \circ) + U(1, \circ)V(\circ, \circ)H(1, \circ) + U(1, \circ)V(1, \circ)H(\circ, \circ),$$

$$W(\circ, 1) = \frac{1}{\circ!1!} \frac{\partial}{\partial y} [u(x, y)v(x, y)h(x, y)]_{(x_\circ, y_\circ)} =$$

$$U(\circ, \circ)V(\circ, \circ)H(\circ, 1) + U(\circ, \circ)V(\circ, 1)H(\circ, \circ) + U(\circ, 1)V(\circ, \circ)H(\circ, \circ),$$

$$W(2, \circ) = \frac{1}{\circ!2!} \frac{\partial}{\partial y^2} [u(x, y)v(x, y)h(x, y)]_{(x_\circ, y_\circ)} =$$

$$U(\circ, \circ)V(\circ, \circ)H(\circ, 2) + U(\circ, \circ)V(\circ, 2)H(\circ, \circ) + U(\circ, 2)V(\circ, \circ)H(\circ, \circ)$$

فصل ۲. کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۲۳

$$+U(\circ, \circ)V(\circ, \mathfrak{I})H(\circ, \mathfrak{I}) + U(\circ, \mathfrak{I})V(\circ, \circ)H(\circ, \mathfrak{I}) + U(\circ, \mathfrak{I})V(\circ, \mathfrak{I})H(\circ, \circ),$$

در حالت کلی داریم:

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} U(r, h-s-p)V(t, s)H(k-r-t, p).$$

■

قضیه ۹.۴.۲. اگر $w(x, y) = x^m y^n$ آنگاه برای $k \geq \circ$ و $h \geq \circ$ ،

$$W(k, h) = \delta(k-m, h-n) = \delta(k-m)\delta(h-n),$$

که

$$\delta(k-m, h-n) = \begin{cases} \mathfrak{I} & k=m, h=n, \\ \circ & k \neq m, h \neq n. \end{cases}$$

اثبات. با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$W(k, h) = \frac{\mathfrak{I}}{k!h!} \left[\frac{\partial^{k+h}(x^m y^n)}{\partial x^k \partial y^h} \right]_{(\circ, \circ)} = \begin{cases} \mathfrak{I} & k=m, h=n, \\ \circ & k > m, h > n, \\ \frac{\mathfrak{I}}{k!} m(m-\mathfrak{I}) \dots (m-k+\mathfrak{I}) x^{m-k} = \circ & k < m, h=n, \\ \frac{\mathfrak{I}}{k!h!} m \dots (m-k+\mathfrak{I}) n \dots (n-h+\mathfrak{I}) x^{m-k} y^{n-h} = \circ & k < m, h < n, \\ \frac{\mathfrak{I}}{h!} n(n-\mathfrak{I}) \dots (n-h+\mathfrak{I}) y^{n-h} = \circ & k=m, h < n. \end{cases}$$

■

قضیه ۱۰.۴.۲. اگر $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}$ آنگاه برای $k \geq \circ$ و $h \geq \circ$ ،

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (r+\mathfrak{I})(k-r+\mathfrak{I})U(r+\mathfrak{I}, h-s)V(k-r+\mathfrak{I}, s).$$

اثبات. با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$W(\circ, \circ) = \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{(\circ, \circ)} = U(\mathfrak{I}, \circ)V(\mathfrak{I}, \circ),$$

فصل ۲. کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۲۴

$$\begin{aligned}
 W(1, \circ) &= \frac{1}{1! \circ!} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{(\circ, \circ)} = \\
 \frac{1}{1! \circ!} \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial^2 v(x, y)}{\partial x^2} \right]_{(\circ, \circ)} &= 2U(2, \circ)V(1, \circ) + 2U(1, \circ)V(2, \circ), \\
 W(2, \circ) &= \frac{1}{2! \circ!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{(\circ, \circ)} = \\
 3U(3, \circ)V(1, \circ) + 4U(2, \circ)V(2, \circ) + 3U(1, \circ)V(3, \circ) \\
 W(\circ, 1) &= U(1, 1)V(1, \circ) + U(1, \circ)V(1, 1), \\
 W(1, 1) &= 2U(2, 1)V(1, \circ) + 2U(2, \circ)V(1, 1) + 2U(1, 1)V(2, \circ) + 2U(1, \circ)V(2, 1), \\
 W(2, 2) &= 3U(3, 2)V(1, \circ) + 3U(3, 1)V(1, 1) + 3U(3, \circ)V(1, 2) \\
 &+ 4U(2, 2)V(2, \circ) + 4U(2, 1)V(2, 1) + 4U(2, \circ)V(2, 2) \\
 &+ 3U(1, 2)V(3, \circ) + 3U(1, 1)V(3, 1) + 3U(1, \circ)V(3, 2),
 \end{aligned}$$

در حالت کلی به استقراء می توان ثابت کرد:

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (r+1)(k-r+1)U(r+1, h-s)V(k-r+1, s).$$

■

قضیه ۱۱.۴.۲. اگر $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$ آنگاه برای $k \geq \circ$ و $h \geq \circ$,

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (s+1)(h-s+1)U(r, h-s+1)V(k-r, s+1).$$

قضیه ۱۲.۴.۲. اگر $w(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}$ آنگاه برای $k \geq \circ$ و $h \geq \circ$,

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s)V(r, h-s+1).$$

اثبات . با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
 W(\circ, \circ) &= \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{(\circ, \circ)} = U(\mathbf{1}, \circ) V(\circ, \mathbf{1}), \\
 W(\mathbf{1}, \circ) &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}! \circ!} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \right]_{(\circ, \circ)} = \\
 &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}! \circ!} \left[\frac{\partial^{\mathbf{1}} u(x, y)}{\partial x^{\mathbf{1}}} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \frac{\partial^{\mathbf{1}} v(x, y)}{\partial x \partial y} \right]_{(\circ, \circ)} = \mathbf{2} U(\mathbf{2}, \circ) V(\circ, \mathbf{1}) + U(\mathbf{1}, \circ) V(\mathbf{1}, \mathbf{1}), \\
 W(\mathbf{2}, \circ) &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}! \circ!} \frac{\partial^{\mathbf{2}}}{\partial x^{\mathbf{2}}} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \right]_{(\circ, \circ)} = \\
 &= \mathbf{3} U(\mathbf{3}, \circ) V(\mathbf{1}, \circ) + \mathbf{2} U(\mathbf{2}, \circ) V(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + U(\mathbf{1}, \circ) V(\mathbf{2}, \mathbf{1}) \\
 W(\circ, \mathbf{1}) &= \mathbf{2} U(\mathbf{1}, \circ) V(\circ, \mathbf{2}) + U(\mathbf{1}, \mathbf{1}) V(\circ, \mathbf{1}), \\
 W(\mathbf{1}, \mathbf{1}) &= \mathbf{4} U(\mathbf{2}, \circ) V(\circ, \mathbf{2}) + \mathbf{2} U(\mathbf{2}, \mathbf{1}) V(\circ, \mathbf{1}) + \mathbf{2} U(\mathbf{1}, \circ) V(\mathbf{1}, \mathbf{2}) + U(\mathbf{1}, \mathbf{1}) V(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \\
 W(\mathbf{2}, \mathbf{2}) &= \mathbf{9} U(\mathbf{3}, \circ) V(\circ, \mathbf{3}) + \mathbf{6} U(\mathbf{3}, \mathbf{1}) V(\circ, \mathbf{2}) + \mathbf{3} U(\mathbf{3}, \mathbf{2}) V(\circ, \mathbf{1}) \\
 &+ \mathbf{6} U(\mathbf{2}, \circ) V(\mathbf{1}, \mathbf{3}) + \mathbf{4} U(\mathbf{2}, \mathbf{1}) V(\mathbf{1}, \mathbf{2}) + \mathbf{2} U(\mathbf{2}, \mathbf{2}) V(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \\
 &+ \mathbf{3} U(\mathbf{1}, \circ) V(\mathbf{2}, \mathbf{3}) + \mathbf{2} U(\mathbf{1}, \mathbf{1}) V(\mathbf{2}, \mathbf{2}) + U(\mathbf{1}, \mathbf{2}) V(\mathbf{2}, \mathbf{1}),
 \end{aligned}$$

در حالت کلی به استقراء داریم:

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (k-r+\mathbf{1})(h-s+\mathbf{1}) U(k-r+\mathbf{1}, s) V(r, h-s+\mathbf{1}).$$

■

قضیه ۱۳.۴.۲. اگر $w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial^{\mathbf{2}} v(x, y)}{\partial x^{\mathbf{2}}}$ آنگاه برای $k \geq \circ$ و $h \geq \circ$,

$$W(k, h) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (k-r+\mathbf{2})(k-r+\mathbf{1}) U(r, h-s) V(k-r+\mathbf{2}, p).$$

قضیه ۱۴.۴.۲. اگر $w(x, y) = u(x, y) \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (t+1)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)V(t+1, s)Z(k-r-t+1, p).$$

قضیه ۱۵.۴.۲. اگر $W(x, y) = u(x, y)v(x, y) \frac{\partial^2 z(x, y)}{\partial x^2}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$,

$$W(k, h) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} (k-r+t+2)(k-r-t+1)U(r, h-s-p)V(t, s)Z(k-r-t+2, p).$$

قضیه ۱۶.۴.۲. اگر $w(x, y) = e^{ax+by}$ آنگاه برای $k \geq 0$ و $h \geq 0$

$$W(k, h) = \frac{a^k b^h}{k! h!}.$$

قضیه ۱۷.۴.۲. اگر $w(x, y) = x^m \sin(at + b)$ آنگاه $W(k, h) = \frac{a^h}{h!} \delta(k-m) \sin(\frac{h\pi}{2} + b)$

قضیه ۱۸.۴.۲. اگر $w(x, y) = x^m \cos(at + b)$ آنگاه $W(k, h) = \frac{a^h}{h!} \delta(k-m) \cos(\frac{h\pi}{2} + b)$

قضیه ۱۹.۴.۲. اگر $w(x, y) = x^m e^{at}$ آنگاه $W(k, h) = \frac{a^h}{h!} \delta(k-m)$

۵.۲ مثال های عددی

مثال ۱.۵.۲. فرم کلی معادله برگرز-هاکسلی^{۱۳} به صورت زیر است [۲۴].

$$u_t + \alpha u^\delta u_x - u_{xx} = \beta u(1 - u^\delta)(u^\delta - \gamma), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0. \quad (21.2)$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = \left[\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \tanh(\sigma \gamma x) \right]^{\frac{1}{\delta}}, \quad (22.2)$$

این معادله را برای $\delta = 1$ حل می کنیم.

^{۱۳}Burger-Huxley

تبدیل دیفرانسیل معادله (۲۱.۲) با استفاده از قضایای بیان شده برابر است با:

$$\begin{aligned} (h+1)U(k, h+1) + \alpha \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)(k+1-r)U(k-r+1, s) - (k+1)(k+2) \\ U(k+2, h) = (\beta + \beta\gamma) \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)U(k-r, s) - \beta \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} U(r, h-s-p) \\ U(t, s)U(k-r-t, p) - \beta\gamma U(k, h) \end{aligned} \quad (23.2)$$

با استفاده از تعریف (۱۵.۲) و شرط اولیه داریم:

$$u(x, 0) = \sum_{k=0}^{\infty} U(k, 0)x^k \quad (24.2)$$

با مساوی قرار دادن معادله (۲۲.۲) و رابطه (۲۴.۲) ضرایب $U(k, 0)$ بصورت زیر بدست می آیند.

$$U(k, 0) = 0, \quad k = 2, 4, 6, \dots,$$

$$U(0, 0) = \frac{\gamma}{2}, \quad U(1, 0) = \frac{\gamma^2 \sigma}{2}, \quad U(3, 0) = -\frac{\gamma^4 \sigma^3}{6}, \dots$$

با قراردادن ضرایب تبدیل اولیه در معادله (۲۳.۲) و با استفاده از روش بازگشتی بقیه مقادیر $U(k, h)$ بصورت زیر محاسبه می شوند.

$$U(0, 1) = -\frac{\beta\gamma^2}{4} + \frac{\beta\gamma^3}{8} - \frac{\alpha\gamma^3\sigma}{4},$$

$$U(2, 1) = \frac{\beta\gamma^4\sigma^2}{4} - \frac{\beta\gamma^5\sigma^2}{8} + \frac{\alpha\gamma^5\sigma^3}{4},$$

$$U(4, 1) = -\frac{31\beta\gamma^{10}\sigma^8}{630} + \frac{31\beta\gamma^{11}\sigma^8}{1260} - \frac{31\alpha\gamma^{11}\sigma^9}{630}, \dots$$

با جایگذاری همه مقادیر $U(k, h)$ در معادله (۲۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned} u(x, t) = \left\{ \frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma^2 \sigma}{2}x - \frac{\gamma^4 \sigma^3}{6}x^3 + \dots \right\} + \left\{ \left(-\frac{\beta\gamma^2}{4} + \frac{\beta\gamma^3}{8} - \frac{\alpha\gamma^3\sigma}{4} \right) + \left(\frac{\beta\gamma^4\sigma}{8} - \gamma^4\sigma^3 \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\alpha\gamma^4\sigma^2}{4} \right)x + \dots \right\} t + \dots = \left[\frac{\gamma}{2} + \frac{\gamma}{2} \tanh\{\sigma\gamma(x - \{\frac{\gamma\alpha}{2} - \frac{(2-\gamma)(\rho-\alpha)}{4}\}t)\} \right] \end{aligned} \quad (25.2)$$

که این جواب دقیق مسئله است که در آن $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \lambda\beta}$, $\sigma = \frac{(\rho - \alpha)}{\lambda}$.

در جداول زیر خطای مطلق این روش با روش آدومیان و روش تکرار وردشی به ازای مقادیر مختلف α, β, γ مقایسه شده است، نتایج نشان می دهد که روش تبدیل دیفرانسیل با محاسبات کمتر و ساده تر دقتی مشابه روش های مقایسه شده دارد [۲۴].

جدول ۱.۲: خطای مطلق برای ۵ تکرار روش تجزیه آدومیان، ۱ تکرار وردشی و ۱ تکرار روش تبدیل دیفرانسیل به ازای $\alpha = \beta = 1, \gamma = 0.001$

x	t	ADM	VIM	DTM
۰/۱	۰/۰۵	$1/87406 \times 10^{-8}$	$1/87405 \times 10^{-8}$	$1/87406 \times 10^{-8}$
	۰/۱	$3/74812 \times 10^{-8}$	$3/74813 \times 10^{-8}$	$3/74813 \times 10^{-8}$
	۱	$3/74812 \times 10^{-7}$	$3/74812 \times 10^{-7}$	$3/748125 \times 10^{-7}$
۰/۵	۰/۰۵	$1/87406 \times 10^{-8}$	$1/87405 \times 10^{-8}$	$1/87406 \times 10^{-8}$
	۰/۱	$3/74812 \times 10^{-8}$	$3/74813 \times 10^{-8}$	$3/74813 \times 10^{-8}$
	۱	$3/74812 \times 10^{-7}$	$3/74813 \times 10^{-7}$	$3/748125 \times 10^{-7}$
۰/۹	۰/۰۵	$1/87406 \times 10^{-8}$	$1/87405 \times 10^{-8}$	$1/87406 \times 10^{-8}$
	۰/۱	$3/74812 \times 10^{-8}$	$3/74813 \times 10^{-8}$	$3/74813 \times 10^{-8}$
	۱	$3/74812 \times 10^{-7}$	$3/74813 \times 10^{-7}$	$3/748125 \times 10^{-7}$

جدول ۲.۲: خطای مطلق برای ۵ تکرار روش تجزیه آدومیان، ۱ تکرار وردشی و ۱ تکرار روش تبدیل دیفرانسیل به ازای $\gamma = \alpha = 0.1, \beta = 0.001$

x	t	ADM	VIM	DTM
۰/۱	۰/۰۵	$1/3634 \times 10^{-7}$	$1/3608 \times 10^{-7}$	$1/3608 \times 10^{-7}$
	۰/۱	$2/7243 \times 10^{-7}$	$2/7216 \times 10^{-7}$	$2/7216 \times 10^{-7}$
	۱	$2/72200 \times 10^{-6}$	$2/72151 \times 10^{-6}$	$2/72151 \times 10^{-6}$
۰/۵	۰/۰۵	$1/3736 \times 10^{-7}$	$1/3608 \times 10^{-7}$	$1/3608 \times 10^{-7}$
	۰/۱	$2/7345 \times 10^{-7}$	$2/7216 \times 10^{-7}$	$2/7216 \times 10^{-7}$
	۱	$2/72302 \times 10^{-6}$	$2/72151 \times 10^{-6}$	$2/72151 \times 10^{-6}$
۰/۹	۰/۰۵	$1/3838 \times 10^{-7}$	$1/3608 \times 10^{-7}$	$1/3608 \times 10^{-7}$
	۰/۱	$2/7447 \times 10^{-7}$	$2/7216 \times 10^{-7}$	$2/7216 \times 10^{-7}$
	۱	$2/72404 \times 10^{-6}$	$2/72151 \times 10^{-6}$	$2/72151 \times 10^{-6}$

جدول ۳.۲: خطای مطلق برای ۵ تکرار روش تجزیه آدومیان، ۱ تکرار وردشی و ۱ تکرار روش تبدیل دیفرانسیل به ازای $\alpha = 0.01, \beta = \gamma = 0.0001$

x	t	ADM	VIM	DTM
0.1	0.05	2×10^{-14}	2×10^{-14}	2×10^{-14}
	0.1	4×10^{-14}	3×10^{-14}	3×10^{-14}
	1	3.7×10^{-13}	3.7×10^{-13}	3.7×10^{-13}
0.5	0.05	2×10^{-14}	2×10^{-14}	2×10^{-14}
	0.1	4×10^{-14}	3×10^{-14}	3×10^{-14}
	1	3.7×10^{-13}	3.7×10^{-13}	3.7×10^{-13}
0.9	0.05	2×10^{-14}	2×10^{-14}	2×10^{-14}
	0.1	4×10^{-14}	3×10^{-14}	3×10^{-14}
	1	3.7×10^{-13}	3.7×10^{-13}	3.7×10^{-13}

مثال ۲.۵.۲. با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی، معادله دیفرانسیل هلم هولتز^{۱۴} را که به صورت زیر است مورد بررسی قرار می دهیم [۲۵].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + xu = 2 + x^3 + xy, \quad (26.2)$$

با شرایط اولیه

$$u(0, y) = y,$$

$$u_x(0, y) = 0. \quad (27.2)$$

با استفاده از قضایای تبدیل دیفرانسیل دو بعدی، تبدیل دیفرانسیل معادله (۲۶.۲) برابر است با:

$$\begin{aligned} & (k+1)(k+2)U(k+2, h) + (h+1)(h+2)U(k, h+2) + \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \delta(r-1)\delta(h-s)U(k-r, s) \\ & = 2\delta(k)\delta(h) + \delta(k-3)\delta(h) + \delta(k-1)\delta(h-1). \end{aligned} \quad (28.2)$$

^{۱۴}Helmholtz

فصل ۲. کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۳۰

از شرایط اولیه داده شده در تعریف (۲۷.۲) داریم:

$$U(0, h) = \begin{cases} 1 & h = 1, \\ 0 & h = 0, 2, 3, \dots \end{cases}, \quad U(1, h) = 0, \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (29.2)$$

با جایگزین کردن معادلات (۲۹.۲) در معادله (۲۸.۲) همه $U(k, h)$ ها به صورت زیر بدست می آیند.

$$U(k, h) = \begin{cases} 1 & k = 2, h = 0, \\ 1 & k = 0, h = 1, \\ 0 & \text{در غیر این صورت.} \end{cases}$$

با قراردادن همه $U(k, h)$ ها در رابطه (۱۶.۲) فرم بسته از جواب سری به صورت زیر حاصل می شود.

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k y^h = y + x^2.$$

که جواب دقیق مسئله است.

مثال ۳.۵.۲. معادله تلگراف^{۱۵} را به صورت زیر در نظر بگیرید [۲۶].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial u}{\partial t} + 4u, \quad (30.2)$$

با شرایط اولیه

$$u(x, 0) = 1 + e^{2x},$$

$$u_t(x, 0) = -2. \quad (31.2)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۳۰.۲) برابر است با:

$$(k+1)(k+2)U(k+2, h) = (h+1)(h+2)U(k, h+2) + 4(h+1)U(k, h+1) + 4U(k, h) \quad (32.2)$$

^{۱۵}Telegraph equation

فصل ۲. کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۳۱

از شرایط اولیه داده شده در تعریف (۳۱.۲) داریم:

$$U(k, 0) = \delta(k) + \frac{2^k}{k!},$$

$$U(k, 1) = -2\delta(k). \quad (33.2)$$

با جایگزین کردن معادلات (۳۳.۲) در معادله (۳۲.۲) مقادیر $U(k, h)$ به صورت زیر بدست می آیند.

$$U(k, h) = \begin{cases} \frac{2^k}{k!} & k = 0, 1, \dots, \quad h = 0, \\ \frac{(-2)^h}{h!} & h = 0, 1, \dots, \quad k = 0, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با قراردادن همه $U(k, h)$ ها در رابطه (۱۶.۲) فرم بسته از جواب سری^{۱۶} به صورت زیر حاصل می شود.

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-2)^h t^h}{h!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^k}{k!} = e^{-2t} + e^{2x}$$

که این جواب دقیق مسئله است.

۶.۲ روش تبدیل دیفرانسیل سه بعدی

در این بخش روش تبدیل دیفرانسیل سه بعدی^{۱۷} را معرفی کرده و برای حل معادلات با مشتقات جزئی به کار می بریم [۲۷].

فرض کنید $w(x, y, t)$ در دامنه k تحلیلی باشد و (x_0, y_0, t_0) در این دامنه قرار داشته باشد در این حالت $w(x, y, t)$ به صورت یک سری به مرکز (x_0, y_0, t_0) نمایش داده می شود.

تبدیل دیفرانسیل تابع $w(x, y, t)$ برابر است با:

$$W(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \frac{\partial^{k+h+m} w(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \Big|_{(x_0, y_0, t_0)}, \quad h \geq 0, k \geq 0, t \geq 0 \quad (34.2)$$

^{۱۶}Closed Form Series Solution

^{۱۷}Three-dimensional differential transform method

فصل ۲. کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۳۲

که $w(x, y, t)$ تابع اصلی و $W(k, h, m)$ تابع تبدیل دیفرانسیل $w(x, y, t)$ است.

تبدیل دیفرانسیل معکوس دنباله $\{W(k, h, m)\}_{k, h, m=0}^{\infty}$ برابر است با:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} W(k, h, m) (x - x_0)^k (y - y_0)^h (t - t_0)^m \quad (35.2)$$

از ترکیب دو رابطه فوق وقتی $(x_0, y_0, t_0) = (0, 0, 0)$ رابطه (۳۵.۲) به صورت زیر حاصل می شود.

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!m!} \frac{\partial^{k+h+m} w(x, y, t)}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} x^k y^h t^m = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} W(k, h, m) x^k y^h t^m \quad (36.2)$$

در کاربردهای حقیقی $w(x, y, t)$ به صورت سری متناهی زیر در نظر گرفته می شود.

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^n \sum_{h=0}^s \sum_{p=0}^r W(k, h, m) x^k y^h t^m \quad (37.2)$$

قضایای اساسی تبدیل دیفرانسیل سه بعدی به صورت زیر بیان و با استفاده از تعاریف اولیه اثبات می شوند [۲۷].

فرض می کنیم $U(k, h, m)$ ، $V(k, h, m)$ و $H(k, h, m)$ تبدیل دیفرانسیل توابع $u(x, y, t)$ ، $v(x, y, t)$ و $h(x, y, t)$ باشند.

قضیه ۱.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = u(x, y, t) \mp v(x, y, t)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $h \geq 0$ و $m \geq 0$

$$W(k, h, m) = U(k, h, m) \mp V(k, h, m).$$

قضیه ۲.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = au(x, y, t)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $h \geq 0$ و $m \geq 0$

$$W(k, h, m) = aU(k, h, m).$$

قضیه ۳.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x}$ آنگاه برای $m \geq 0$ و $h \geq 0$ ، $k \geq 0$

$$W(k, h, m) = (k + 1)U(k + 1, h, m).$$

اثبات . با استفاده از رابطه (۳۴.۲) داریم:

$$U(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \left[\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \right] \right]_{(0,0,0)},$$

$$W(k, h, m) = \frac{k+1}{(k+1)!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+1+h+m} u(x, y, t)}{\partial x^{k+1} \partial y^h \partial t^m} \right]_{(0,0,0)},$$

آنگاه

$$W(k, h, m) = (k + 1)U(k + 1, h, m).$$

■

قضیه ۴.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y}$ آنگاه برای $m \geq 0$ و $h \geq 0$ ، $k \geq 0$

$$W(k, h, m) = (h + 1)U(k, h + 1, m).$$

قضیه ۵.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}$ آنگاه برای $m \geq 0$ و $h \geq 0$ ، $k \geq 0$

$$W(k, h, m) = (m + 1)U(k, h, m + 1).$$

قضیه ۶.۶.۲. اگر $W(x, y, t) = \frac{\partial^{r+s+p} u(x, y, t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p}$ آنگاه برای $m \geq 0$ و $h \geq 0$ ، $k \geq 0$

$$W(k, h, m) = (k + 1) \dots (k + r)(h + 1) \dots (h + s)(m + 1) \dots (m + p)U(k + r, h + s, m + p).$$

اثبات . با استفاده از رابطه (۳۴.۲) داریم:

$$W(k, h, m) = \frac{1}{k!h!m!} \left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial t^m} \left[\frac{\partial^{r+s+p} u(x, y, t)}{\partial x^r \partial y^s \partial t^p} \right] \right]_{(0,0,0)}$$

فصل ۲. کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۳۴

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(k+1)\dots(k+r)(h+1)\dots(h+s)(m+1)\dots(m+p)}{(k+r)!(h+s)!(m+p)!} \left[\frac{\partial^{k+r+h+s+m+p} u(x, y, t)}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s} \partial t^{m+p}} \right]_{(\bullet, \bullet, \bullet)} \\
 &= (k+1)(k+2)\dots(k+r)(h+1)(h+2)\dots(h+s)(m+1)(m+2)\dots(m+p) U(k+r, h+s, m+p).
 \end{aligned}$$

■

قضیه ۷.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = u(x, y, t)v(x, y, t)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $h \geq 0$ و $m \geq 0$

$$W(k, h, m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m U(r, h-s, m-p) V(k-r, s, p).$$

اثبات. با استفاده از رابطه (۳۴.۲) داریم:

$$W(0, 0, 0) = [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(\bullet, \bullet, \bullet)} = U(0, 0, 0)V(0, 0, 0),$$

$$\begin{aligned}
 W(1, 0, 0) &= \frac{1}{1!0!0!} \frac{\partial}{\partial x} [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(\bullet, \bullet, \bullet)} = \frac{1}{1!0!0!} \left[\frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial v}{\partial x} u \right]_{(\bullet, \bullet, \bullet)} \\
 &= U(1, 0, 0)V(0, 0, 0) + V(1, 0, 0)U(0, 0, 0)
 \end{aligned}$$

$$W(1, 1, 0) = \frac{1}{1!1!0!} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(\bullet, \bullet, \bullet)} =$$

$$U(1, 1, 0)V(0, 0, 0) + U(1, 0, 0)V(0, 1, 0) + U(0, 0, 0)V(1, 1, 0) + U(0, 1, 0)V(1, 0, 0)$$

$$W(1, 1, 1) = \frac{1}{1!1!1!} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial t} [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(\bullet, \bullet, \bullet)} =$$

$$U(1, 1, 1)V(0, 0, 0) + U(1, 1, 0)V(0, 0, 1) + U(1, 0, 1)V(0, 1, 0) + U(1, 0, 0)V(0, 1, 1)$$

$$+ U(0, 1, 1)V(0, 0, 0) + U(0, 0, 1)V(1, 1, 0) + U(0, 0, 1)V(0, 1, 0) + U(0, 0, 0)V(0, 1, 1)$$

$$W(2, 0, 0) = \frac{1}{2!0!0!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u(x, y, t)v(x, y, t)]_{(\bullet, \bullet, \bullet)} =$$

$$U(2, 0, 0)V(0, 0, 0) + U(1, 0, 0)V(1, 0, 0) + U(0, 0, 0)V(2, 0, 0)$$

$$W(2, 1, 0) = U(2, 1, 0)V(0, 0, 0) + U(2, 0, 0)V(0, 1, 0) + U(1, 1, 0)V(1, 0, 0) +$$

$$U(۱, \circ, \circ)V(۱, ۱, \circ) + U(\circ, ۱, \circ)V(۲, \circ, \circ) + U(\circ, \circ, \circ)V(۲, ۱, \circ)$$

$$W(۱, \circ, ۲) = U(۱, \circ, ۲)V(\circ, \circ, \circ) + U(\circ, \circ, ۲)V(۱, \circ, \circ) + U(۱, \circ, ۱)V(\circ, \circ, ۱) +$$

$$U(\circ, \circ, ۱)V(۱, \circ, ۱) + U(\circ, \circ, \circ)V(۱, \circ, ۲) + U(۱, \circ, \circ)V(\circ, \circ, ۲)$$

و در حالت کلی به استقراء داریم:

$$W(k, h, m) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m U(r, h-s, m-p)V(k-r, s, p).$$

■

قضیه ۸.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y}$ آنگاه برای $k \geq \circ$ ، $h \geq \circ$ و $m \geq \circ$

$$W(k, h, m) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m (k-r+۱)(h-s+۱)U(k-r+۱, s, p)V(r, h-s+۱, m-p).$$

اثبات . با استفاده از رابطه (۳۴.۲) داریم:

$$W(\circ, \circ, \circ) = \left[\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right]_{(\circ, \circ, \circ)} = U(۱, \circ, \circ)V(\circ, ۱, \circ),$$

$$W(۱, \circ, \circ) = \frac{۱}{۱! \circ! \circ!} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right]_{(\circ, \circ, \circ)} =$$

$$U(۲, \circ, \circ)V(\circ, ۱, \circ) + V(۱, \circ, \circ)U(۱, ۱, \circ)$$

$$W(۱, ۱, \circ) = \frac{۱}{۱! ۱! \circ!} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right]_{(\circ, \circ, \circ)} =$$

$$۲U(۲, ۱, \circ)V(\circ, ۱, \circ) + ۴U(۲, \circ, \circ)V(\circ, ۲, \circ) + U(۱, ۱, \circ)V(۱, ۱, \circ) + U(۱, ۱, \circ)V(۱, ۲, \circ)$$

$$W(۱, ۱, ۱) = \frac{۱}{۱! ۱! ۱!} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial t} \left[\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \right]_{(\circ, \circ, \circ)} =$$

$$۴U(۲, \circ, \circ)V(\circ, ۲, ۱) + ۴U(۲, \circ, ۱)V(\circ, ۲, \circ) + ۲U(۲, ۱, \circ)V(\circ, ۱, ۱)$$

$$+ ۲U(۲, ۱, ۱)V(\circ, ۱, \circ) + ۲U(۱, \circ, \circ)V(۱, ۲, ۱) + ۲U(۱, \circ, ۱)V(۱, ۲, \circ)$$

$$\begin{aligned}
 & +U(1, 1, 0)V(1, 1, 1) + U(1, 1, 1)V(1, 1, 0) \\
 W(2, 0, 1) &= 3U(3, 0, 0)V(0, 1, 1) + 3U(3, 0, 1)V(0, 1, 0) + 2U(2, 0, 0)V(1, 1, 1) \\
 & + 2U(2, 0, 1)V(1, 1, 0) + U(1, 0, 0)V(2, 1, 1) + U(1, 0, 1)V(2, 1, 0) \\
 W(1, 0, 2) &= 2U(2, 0, 0)V(0, 1, 2) + 2U(2, 0, 1)V(0, 1, 1) + 2U(2, 0, 2)V(0, 1, 0) \\
 & + U(1, 0, 0)V(1, 1, 2) + U(1, 0, 1)V(1, 1, 1) + U(1, 0, 2)V(1, 1, 0).
 \end{aligned}$$

از تعمیم روابط بالا در حالت کلی به رابطه زیر می‌رسیم.

$$W(k, h, m) = \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s, p)V(r, h-s+1, m-p).$$

■

قضیه ۹.۶.۲. اگر $w(x, y, t) = u(x, y, t)v(x, y, t)z(x, y, t)$ آنگاه برای $k \geq 0$ ، $h \geq 0$ و

$$m \geq 0$$

$$W(k, h, m) = \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^m \sum_{n=0}^{m-q} U(r, h-s-p, m-q-n)V(t, s, q)Z(k-r-t, p, n).$$

۷.۲ مثال عددی

مثال ۱.۷.۲. معادله دیفرانسیل جزئی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید [۲۷].

$$u_t + v_x w_y - v_y w_x = -u, \quad (38.2)$$

$$v_t + w_x u_y + w_y u_x = v, \quad (39.2)$$

$$w_t + u_x v_y + u_y v_x = w. \quad (40.2)$$

با شرایط اولیه

$$u(x, y, \circ) = e^{x+y}, \quad (۴۱.۲)$$

$$v(x, y, \circ) = e^{x-y}, \quad (۴۲.۲)$$

$$w(x, y, \circ) = e^{-x+y} \quad (۴۳.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل معادلات (۳۷.۲) تا (۴۰.۲) برابر است با:

$$\begin{aligned} (m+1)U(k, h, m+1) &= - \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m (k-r+1)(h-s+1)V(k-r+1, s, p) \\ W(r, h-s+1, m-p) &+ \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m (k-r+1)(h-s+1)V(r, h-s+1, m-p) \\ W(k-r+1, s, p) - U(k, h, m) & \quad (۴۴.۲) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m+1)V(k, h, m+1) &= - \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m (k-r+1)(h-s+1)W(k-r+1, s, p) \\ U(r, h-s+1, m-p) - \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m (k-r+1)(h-s+1)W(r, h-s+1, m-p) \\ U(k-r+1, s, p) - V(k, h, m) & \quad (۴۵.۲) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m+1)w(k, h, m+1) &= - \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1, s, p) \\ V(r, h-s+1, m-p) - \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m (k-r+1)(h-s+1) \\ V(r, h-s+1, m-p)U(k-r+1, s, p) - W(k, h, m) & \quad (۴۶.۲) \end{aligned}$$

با بکار بردن تبدیل دیفرانسیل روی شرایط اولیه، معادلات (۴۰.۲) تا (۴۳.۲) و جایگذاری در معادله (۳۶.۲) روابط زیر حاصل می شوند.

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} U(k, h, \circ) x^r y^h = (1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots)(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots), \quad (47.2)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} V(k, h, \circ) x^r y^h = (1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots)(1 - \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} - \frac{y^3}{3!} + \dots), \quad (48.2)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} W(k, h, \circ) x^r y^h = (1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots)(1 + \frac{y}{1!} + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots). \quad (49.2)$$

بنابراین از معادلات (۴۶.۲) تا (۴۹.۲) مقادیر زیر به دست می آیند.

$$U(\circ, \circ, \circ) = 1, \quad U(1, \circ, \circ) = 1, \quad U(2, \circ, \circ) = \frac{1}{1!}, \quad U(3, \circ, \circ) = \frac{1}{3!}, \dots$$

$$V(\circ, \circ, \circ) = 1, \quad V(1, \circ, \circ) = -1, \quad V(2, \circ, \circ) = \frac{1}{2!}, \quad V(3, \circ, \circ) = \frac{1}{3!}, \dots$$

$$W(\circ, \circ, \circ) = 1, \quad W(1, \circ, \circ) = -1, \quad W(2, \circ, \circ) = \frac{1}{2!}, \quad W(3, \circ, \circ) = -\frac{1}{3!}, \dots$$

در حالت کلی داریم:

$$U(k, h, \circ) = \frac{1}{k!h!}, \quad k, h = \circ, 1, 2, \dots \quad (50.2)$$

$$V(k, h, \circ) = \frac{(-1)^h}{k!h!}, \quad k, h = \circ, 1, 2, \dots \quad (51.2)$$

$$W(k, h, \circ) = \frac{(-1)^k}{k!h!}, \quad k, h = \circ, 1, 2, \dots \quad (52.2)$$

با جایگزینی معادلات (۴۹-۲) تا (۵۲.۲) در روابط بازگشتی (۴۳-۲) تا (۴۶.۲) داریم:

$$U(1, \circ, 1) = -1, \quad U(1, 1, 1) = -1, \quad U(1, \circ, 2) = \frac{1}{1! \circ! 2!}, \quad U(2, 2, 2) = \frac{1}{2! 2! 2!}, \dots$$

$$V(1, \circ, 1) = 1, \quad V(1, 1, 1) = -1, \quad V(1, \circ, 2) = \frac{1}{1! \circ! 2!}, \quad V(2, 2, 2) = \frac{1}{2! 2! 2!}, \dots$$

$$W(1, \circ, 1) = -1, \quad W(1, 1, 1) = -1, \quad W(1, \circ, 2) = -\frac{1}{1! \circ! 2!}, \quad W(2, 2, 2) = \frac{1}{2! 2! 2!}, \dots$$

و بنابراین حالت کلی این ضرایب به صورت زیر است.

$$U(k, h, m) = \frac{(-1)^m}{k!h!m!}, \quad k, h, m = 0, 1, 2, \dots \quad (53.2)$$

$$V(k, h, m) = \frac{(-1)^h}{k!h!m!}, \quad k, h, m = 0, 1, 2, \dots \quad (54.2)$$

$$W(k, h, 0) = \frac{(-1)^k}{k!h!m!}, \quad k, h, m = 0, 1, 2, \dots \quad (55.2)$$

با جایگزینی همه مقادیر $U(k, h, m)$ ، $V(k, h, m)$ و $W(k, h, m)$ در معادله (۳۶.۲) داریم:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{k!h!m!} x^k y^h t^m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} y^h \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} t^m \right) = e^{x+y-t},$$

$$v(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{k!h!m!} x^k y^h t^m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{h!} y^h \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m \right) = e^{x-y+t},$$

$$w(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!h!m!} x^k y^h t^m = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^k \right) \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!} y^h \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} t^m \right) = e^{-x+y+t}.$$

در نتیجه جواب دقیق (u, v, w) به صورت زیر است [۲۸].

$$(u, v, w) = (e^{x+y-t}, e^{x-y+t}, e^{-x+y+t}).$$

۸.۲ محاسبه تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی یک بعدی

۱.۸.۲ مقدمه

در این بخش یک الگوریتم مؤثر و کارا برای محاسبه تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی معرفی شده است. این الگوریتم توسط چانگ^{۱۸} و همکارانش در سال ۲۰۰۸ ارائه شد و بر خاصیت مشتق گیری و قضایای اساسی (۱.۲.۲) تا (۵.۲.۲) پایه گذاری شده است [۲۹]. بنابراین تابع تبدیل دیفرانسیل به آسانی از طریق روابط بازگشتی تعیین می شود. در این

^{۱۸}Shih-Hsiang Chang

فصل ۲. کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۴۰

بخش الگوریتم روی توابع یک بعدی اعمال می شود و تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی یک بعدی محاسبه خواهد شد. در تمام موارد که در ادامه خواهد آمد a و b ثابت فرض شده اند.

۲.۸.۲ توابع غیرخطی نمایی

تابع غیرخطی نمایی $f(y) = e^{ay}$ را در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه (۱.۲) داریم:

$$F(\circ) = [e^{ay(x)}]_{x=\circ} = e^{ay(\circ)} = e^{aY(\circ)} \quad (۵۶.۲)$$

حال با مشتق گیری از تابع $f(y) = e^{ay}$ نسبت به x داریم:

$$\frac{df(y)}{dx} = ae^{ay} \frac{dy(x)}{dx} = af(y) \frac{dy(x)}{dx} \quad (۵۷.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۵۷.۲) با استفاده از قضایای (۲.۲.۲)، (۳.۲.۲) و (۴.۲.۲) به صورت زیر است.

$$(k+1)F(k+1) = a \sum_{m=\circ}^k (m+1)Y(m+1)F(k-m) \quad (۵۸.۲)$$

با قراردادن $(k-1)$ به جای k در رابطه فوق داریم:

$$F(k) = a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(m+1)}{k} Y(m+1)F(k-1-m), \quad k \geq 1. \quad (۵۹.۲)$$

از ترکیب معادلات (۵۶.۲) و (۵۹.۲) یک رابطه بازگشتی به صورت زیر برای محاسبه تبدیل دیفرانسیل $f(y) = e^{ay}$ بدست می آید.

$$F(k) = \begin{cases} e^{aY(\circ)} & k = \circ, \\ a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(m+1)}{k} Y(m+1)F(k-1-m) & k \geq 1 \end{cases} \quad (۶۰.۲)$$

۳.۸.۲ توابع غیرخطی لگاریتمی

تابع غیرخطی لگاریتمی $f(y) = \ln(a + by)$ را در نظر بگیرید. با توجه به دامنه توابع لگاریتمی $\{y \mid a + by > 0\}$ و با استفاده از رابطه (۱.۲) داریم:

$$F(0) = [\ln(a + by(x))]_{x=0} = \ln(a + by(0)) = \ln(a + bY(0)), \quad (61.2)$$

با مشتق گیری از تابع $f(y) = \ln(a + by)$ نسبت به x ، خواهیم داشت:

$$\frac{df(y(x))}{dx} = \frac{b}{a + by} \frac{dy(x)}{dx}, \quad (62.2)$$

یا معادل با آن

$$a \frac{df(y)}{dx} = b \left(\frac{dy(x)}{dx} - y \frac{df(y)}{dx} \right), \quad (63.2)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۶۳.۲) با استفاده از قضایای (۲.۲.۲)، (۳.۲.۲) و (۴.۲.۲) به صورت زیر است:

$$aF(k+1) = b[Y(k+1) - \sum_{m=0}^k \frac{(m+1)}{k+1} F(m+1)Y(k-m)], \quad (64.2)$$

با قراردادن $(k-1)$ به جای k در رابطه فوق داریم:

$$aF(k) = b[Y(k) - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(m+1)}{k} F(m+1)Y(k-1-m)], \quad k \geq 1. \quad (65.2)$$

با قرار دادن $k=1$ در معادله (۶۵.۲) داریم:

$$F(1) = \frac{b}{a + bY(0)} Y(1), \quad (66.2)$$

معادله (۶۵.۲) به ازای $k \geq 2$ به صورت زیر نوشته می شود.

$$F(k) = \frac{b}{a + bY(0)} [Y(k) - \sum_{m=0}^{k-2} \frac{(m+1)}{k} F(m+1)Y(k-1-m)], \quad k \geq 2. \quad (67.2)$$

بنابراین از ترکیب معادلات (۶۱.۲)، (۶۶.۲) و (۶۷.۲) رابطه بازگشتی برای محاسبه تبدیل

دیفرانسیل تابع $f(y) = \ln(a + by)$ ، به ازای $a + by > 0$ به صورت زیر حاصل می شود.

$$F(k) = \begin{cases} \ln(a + bY(\circ)) & k = 0, \\ \frac{b}{a + bY(\circ)} Y(1) & k = 1, \\ \frac{b}{a + bY(\circ)} [Y(k) - \sum_{m=0}^{k-2} \frac{(m+1)}{k} F(m+1)Y(k-1-m)] & k \geq 2. \end{cases} \quad (68.2)$$

۴.۸.۲ توابع غیرخطی مثلثاتی

توابع غیرخطی مثلثاتی $f(y) = \sin(ay)$ و $g(y) = \cos(ay)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از

رابطه (۱.۲) داریم:

$$\begin{cases} F(\circ) = [\sin(ay(x))]_{x=\circ} = \sin(ay(\circ)) = \sin(aY(\circ)), \\ G(\circ) = [\cos(ay(x))]_{x=\circ} = \cos(ay(\circ)) = \cos(aY(\circ)), \end{cases} \quad (69.2)$$

حال با مشتق گیری از طرفین توابع $f(y) = \sin(ay)$ و $g(y) = \cos(ay)$ نسبت به x داریم:

$$\begin{cases} \frac{df(y)}{dx} = a \cos(ay) \frac{dy(x)}{dx} = ag(y) \frac{dy(x)}{dx}, \\ \frac{dg(y)}{dx} = -a \sin(ay) \frac{dy(x)}{dx} = -af(y) \frac{dy(x)}{dx}, \end{cases} \quad (70.2)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۷۰.۲) با استفاده از قضایای (۲.۲.۲) تا (۴.۲.۲) به صورت زیر

است.

$$\begin{cases} (k+1)F(k+1) = a \sum_{m=0}^k (k+1-m)G(m)Y(k+1-m), \\ (k+1)G(k+1) = -a \sum_{m=0}^k (k+1-m)F(m)Y(k+1-m), \end{cases} \quad (71.2)$$

با قراردادن $(k-1)$ به جای k در رابطه فوق رابطه زیر حاصل می شود.

$$\begin{cases} F(k) = a \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} G(m)Y(k-m), & k \geq 1, \\ G(k) = -a \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} F(m)Y(k-m), & k \geq 1, \end{cases} \quad (72.2)$$

بنابراین از ترکیب معادلات (۶۹.۲) و (۷۲.۲) روابط بازگشتی به صورت زیر بدست می آیند.

$$F(k) = \begin{cases} \sin(aY(\circ)) & k = \circ, \\ a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} G(m)Y(k-m) & k \geq 1, \end{cases} \quad (۷۳.۲)$$

و

$$G(k) = \begin{cases} \cos(aY(\circ)) & k = \circ, \\ -a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} F(m)Y(k-m) & k \geq 1. \end{cases} \quad (۷۴.۲)$$

۵.۸.۲ توابع غیرخطی هذلولوی

توابع غیرخطی مثلثاتی $f(y) = \sinh(ay)$ و $g(y) = \cosh(ay)$ را در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه (۱.۲) داریم:

$$\begin{cases} F(\circ) = [\sinh(ay(x))]_{x=\circ} = \sinh(ay(\circ)) = \sinh(aY(\circ)), \\ G(\circ) = [\cosh(ay(x))]_{x=\circ} = \cosh(ay(\circ)) = \cosh(aY(\circ)), \end{cases} \quad (۷۵.۲)$$

حال با مشتق گیری از طرفین توابع $f(y) = \sinh(ay)$ و $g(y) = \cosh(ay)$ نسبت به x داریم:

$$\begin{cases} \frac{df(y)}{dx} = a \cosh(ay) \frac{dy(x)}{dx} = ag(y) \frac{dy(x)}{dx}, \\ \frac{dg(y)}{dx} = a \sinh(ay) \frac{dy(x)}{dx} = af(y) \frac{dy(x)}{dx}, \end{cases} \quad (۷۶.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۷۶.۲) به صورت زیر است.

$$\begin{cases} (k+1)F(k+1) = a \sum_{m=\circ}^k (k+1-m)G(m)Y(k+1-m), \\ (k+1)G(k+1) = a \sum_{m=\circ}^k (k+1-m)F(m)Y(k+1-m) \end{cases} \quad (۷۷.۲)$$

با قراردادن $(k-1)$ به جای k در رابطه فوق رابطه زیر حاصل می شود.

$$\begin{cases} F(k) = a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} G(m)Y(k-m), & k \geq 1, \\ G(k) = a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} F(m)Y(k-m), & k \geq 1. \end{cases} \quad (۷۸.۲)$$

بنابراین از ترکیب معادلات (۷۵.۲) و (۷۸.۲) روابط بازگشتی به صورت زیر بدست می آیند.

$$F(k) = \begin{cases} \sinh(aY(\circ)) & k = \circ, \\ a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} G(m) Y(k-m) & k \geq 1. \end{cases} \quad (۷۹.۲)$$

و

$$G(k) = \begin{cases} \cosh(aY(\circ)) & k = \circ, \\ a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(k-m)}{k} F(m) Y(k-m) & k \geq 1. \end{cases} \quad (۸۰.۲)$$

۶.۸.۲ توابع غیرخطی نمایی

می توان تابع غیر خطی نمایی $f(y) = e^{ay^b}$ را به صورت زیر در نظر گرفت.

$$z(x) = y^b(x), \quad f(z) = e^{az}$$

واضح است که این همان حالت (۲.۵.۲) است. بنابراین تبدیل دیفرانسیل تابع

$f(y) = e^{ay^b}$ با استفاده از قضایای (۲.۲.۲) تا (۵.۲.۲) به صورت زیر بدست می آید.

$$F(k) = \begin{cases} e^{aZ(\circ)} & k = \circ, \\ a \sum_{m=\circ}^{k-1} \frac{(m+1)}{k} Z(m+1) F(k-1-m) & k \neq 1 \end{cases} \quad (۸۱.۲)$$

که در آن

$$Y(\circ)Z(k) = \begin{cases} [Y(\circ)]^{1+b} & k = \circ, \\ \sum_{m=1}^k \frac{(1+b)m-k}{k} Y(m)Z(k-m) & k \neq 1 \end{cases} \quad (۸۲.۲)$$

رابطه فوق نشان می دهد که تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی پیچیده به طریق مشابه به دست می آیند.

۹.۲ مثال های عددی

مثال ۱.۹.۲. مسئله مقدار اولیه غیر خطی زیر را در نظر بگیرید [۲۹].

$$y''(x) = 2y(x) + 4y(x) \ln y(x), \quad y(x) > 0, \quad (83.2)$$

با شرایط اولیه

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (84.2)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۸۳.۲) به صورت زیر است.

$$(k+1)(k+2)Y(k+2) = 2Y(k) + 4 \sum_{m=0}^k Y(m)F(k-m), \quad (85.2)$$

از شرط اولیه (۸۴.۲) داریم:

$$Y(0) = 1, \quad Y(1) = 0. \quad (86.2)$$

$F(k)$ تبدیل دیفرانسیل $\ln(y(x))$ است و با استفاده از رابطه (۶۸.۲) داریم:

$$F(k) = \begin{cases} \ln(Y(0)), & k = 0, \\ \frac{Y(1)}{Y(0)}, & k = 1, \\ \frac{Y(k)}{Y(0)} - \sum_{m=0}^{k-2} \frac{m+1}{kY(0)} F(m+1)Y(k-1-m), & k \geq 2. \end{cases} \quad (87.2)$$

حال با جایگزین کردن رابطه (۸۶.۲) و $k = 0$ در روابط (۸۵.۲) و (۸۷.۲) ما بدست می آوریم:

$$F(0) = 0, \quad Y(2) = 1, \quad (88.2)$$

همچنین با جایگزین کردن رابطه (۸۶.۲) و (۸۸.۲) و $k = ۱$ در معادلات (۸۵.۲) و (۸۷.۲) داریم:

$$F(۱) = ۰, \quad Y(۳) = ۰,$$

و با استفاده از رابطه بازگشتی بقیه مقادیر $Y(k)$ به صورت زیر بدست می آیند.

$$Y(۴) = \frac{1}{۲!}, \quad Y(۵) = ۰, \quad Y(۶) = \frac{1}{۳!}, \quad Y(۷) = ۰, \quad Y(۸) = \frac{1}{۴!}, \quad Y(۹) = ۰, \dots$$

و در حالت کلی داریم:

$$Y(۲k) = \frac{1}{k!}, \quad Y(۲k + ۱) = ۰, \quad k = ۰, ۱, ۲, \dots$$

با جایگزین کردن همه مقادیر $Y(k)$ در (۳.۲) جواب معادله به صورت زیر بدست می آید.

$$y(x) = ۱ + x^۲ + \frac{1}{۲!}x^۴ + \frac{1}{۳!}x^۶ + \frac{1}{۴!}x^۸ + \dots = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{1}{k!}(x^۲)^k = e^{x^۲} \quad (۸۹.۲)$$

مثال ۲.۹.۲. مسئله مقدار اولیه از نوع براتو^{۱۹} را در نظر بگیرید [۲۹].

$$y''(x) - ۲e^{y(x)} = ۰, \quad ۰ < x < ۱, \quad (۹۰.۲)$$

با شرایط اولیه

$$y(۰) = y'(۰) = ۰, \quad (۹۱.۲)$$

با تبدیل دیفرانسیل گرفتن از معادله (۹۰.۲) و شرایط اولیه بدست می آوریم:

$$(k + ۱)(k + ۲)Y(k + ۲) = ۲F(k), \quad (۹۲.۲)$$

$$Y(۰) = Y(۱) = ۰. \quad (۹۳.۲)$$

^{۱۹}Bratu-type

فصل ۲. کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۴۷

که $F(k)$ تبدیل دیفرانسیل e^y است و با استفاده از رابطه (۶۰.۲) داریم:

$$F(k) = \begin{cases} e^{Y(0)}, & k = 0, \\ \sum_{m=0}^{k-1} \frac{m+1}{k} Y(m+1) F(k-m-1), & k \geq 1. \end{cases} \quad (94.2)$$

حال با جایگزین کردن معادله (۹۳.۲) و $k = 0$ در روابط (۹۱.۲) و (۹۴.۲) ما بدست می آوریم:

$$F(0) = 1, \quad Y(2) = 1,$$

حال با استفاده از رابطه بازگشتی مقادیر $Y(k)$ به صورت زیر بدست می آیند.

$$Y(3) = 0, \quad Y(4) = \frac{1}{6}, \quad Y(5) = 0, \quad Y(6) = \frac{2}{45}, \quad Y(7) = 0,$$

$$Y(8) = \frac{17}{1260}, \quad Y(9) = 0, \quad Y(10) = \frac{62}{14175}, \quad Y(11) = 0, \quad Y(12) = \frac{691}{467775} \dots$$

با جایگزین کردن همه مقادیر $Y(k)$ در (۳.۲) جواب سری به صورت زیر بدست می آید.

$$y(x) = x^2 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \frac{17}{1260}x^8 + \frac{62}{14175}x^{10} + \frac{691}{467775}x^{12} + \dots \quad (95.2)$$

که این همان نتیجه بدست آمده با روش تجزیه آدومیان است که فرم بسته جواب توسط وازواز^{۲۰} ارائه شده است [۳۰].

$$y(x) = -2 \ln(\cos x) \quad (96.2)$$

۱۰.۲ محاسبه تبدیل دیفرانسیل توابع غیر خطی دو بعدی

۱.۱۰.۲ مقدمه

در این بخش یک الگوریتم مؤثر و کارا برای محاسبه تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی دو بعدی معرفی شده است [۳۱]. این الگوریتم در سال ۲۰۰۹ توسط چانگ و همکارانش پیشنهاد شد که بر خاصیت مشتق گیری و قضایای اساسی (۱.۴.۲)، (۲.۴.۲)، (۵.۴.۲)، (۷.۴.۲)، (۹.۴.۲) پایه گذاری شده است. بنابراین تابع تبدیل دیفرانسیل به آسانی از طریق روابط بازگشتی تعیین می شود. در این بخش الگوریتم روی توابع دو بعدی اعمال می شود و تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی دو بعدی محاسبه خواهد شد. در تمام موارد که در ادامه خواهد آمد a و b ثابت فرض شده اند.

۲.۱۰.۲ توابع غیرخطی چند جمله ای

تابع غیرخطی چند جمله ای $f(u) = u^a$ را در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$F(\circ, \circ) = [u^a(x, y)]_{(x=\circ, y=\circ)} = u^a(\circ, \circ) = U^a(\circ, \circ). \quad (۹۷.۲)$$

حال با مشتق گیری از تابع $f(u) = u^a(x, y)$ نسبت به x و y داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= au^{a-1} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= au^{a-1} \frac{\partial u}{\partial y}, \end{aligned} \quad (۹۸.۲)$$

که با ضرب طرفین رابطه در u داریم:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial f}{\partial x} &= a f \frac{\partial u}{\partial x}, \\ u \frac{\partial f}{\partial y} &= a f \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (۹۹.۲)$$

با بکار بردن روش تبدیل دیفرانسیل روی معادله (۹۷-۲) و استفاده از قضایای بیان شده داریم:

$$\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h U(r, h-s)(k-r+1)F(k-r+1, s) = a \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (r+1)U(r+1, h-s)F(k-r, s). \quad (۱۰۰.۲)$$

از رابطه بالا داریم:

$$\begin{aligned} (k+1) \sum_{s=0}^h U(0, h-s)F(k+1, s) &= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h [(r+1)a - (k-r)]U(r+1, h-s) \\ F(k-r, s) &= \sum_{r=1}^{k+1} \sum_{s=0}^h [ra - (k-r+1)]U(r, h-s)F(k-r+1, s), \end{aligned} \quad (۱۰۱.۲)$$

با قراردادن $(k-1)$ به جای k در رابطه فوق داریم:

$$\sum_{s=0}^h U(0, h-s)F(k, s) = \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^h \frac{(a+1)r-k}{k} U(r, h-s)F(k-r, s), \quad k \geq 1. \quad (۱۰۲.۲)$$

به طور مشابه با تبدیل دیفرانسیل گرفتن از معادله (۹۹.۲) و تکرار فرایند قبل داریم:

$$\sum_{r=0}^k U(k-r, 0)F(r, h) = \sum_{s=1}^h \sum_{r=0}^k \frac{(a+1)s-h}{h} U(k-r, s)F(r, h-s), \quad h \geq 1. \quad (۱۰۳.۲)$$

از ترکیب روابط (۹۷.۲)، (۱۰۲.۲) و (۱۰۳.۲) رابطه بازگشتی به صورت زیر برای تابع $f(u) = u^a$ بدست می آید.

$$\left\{ \begin{aligned} F(0, 0) &= U^a(0, 0) \\ \sum_{s=0}^h U(0, h-s)F(k, s) &= \sum_{r=1}^k \sum_{s=0}^h \frac{(a+1)r-k}{k} U(r, h-s)F(k-r, s), \quad k \geq 1 \\ \sum_{r=0}^k U(k-r, 0)F(r, h) &= \sum_{s=1}^h \sum_{r=0}^k \frac{(a+1)s-h}{h} U(k-r, s)F(r, h-s), \quad h \geq 1 \end{aligned} \right. \quad (۱۰۴.۲)$$

۳.۱۰.۲ تابع غیرخطی نمایی

تابع غیر خطی نمایی $f(u) = e^{au}$ را در نظر بگیرید. از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$F(\circ, \circ) = [e^{au(x,y)}]_{(x=\circ, y=\circ)} = e^{aU(\circ, \circ)} = e^{aU(\circ, \circ)}, \quad (۱۰.۵.۲)$$

حال با مشتق گیری از طرفین تابع $f(u) = e^{au}$ نسبت به x و y داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(u)}{\partial x} = af(u) \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \\ \frac{\partial f(u)}{\partial y} = af(u) \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}. \end{cases} \quad (۱۰.۶.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۱۰.۶.۲) به صورت زیر است.

$$\begin{cases} (k+1)F(k+1, h) = a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (k-r+1)U(k-r+1, s)F(r, h-s), \\ (h+1)F(k, h+1) = a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (h-s+1)U(r, h-s+1)F(k-r, s). \end{cases} \quad (۱۰.۷.۲)$$

در رابطه فوق در اولی به جای k ، $(k-1)$ و در دومی به جای h ، $(h-1)$ قرار می دهیم و داریم:

$$\begin{cases} F(k, h) = a \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} U(k-r, s)F(r, h-s), & k \geq 1, \\ F(k, h) = a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^{h-1} \frac{h-s}{h} U(r, h-s)F(k-r, s), & h \geq 1, \end{cases} \quad (۱۰.۸.۲)$$

حال از ترکیب روابط (۱۰.۵.۲) و (۱۰.۸.۲)، تبدیل دیفرانسیل تابع غیرخطی نمایی

$f(u) = e^{au}$ به صورت رابطه بازگشتی زیر بدست می آید.

$$F(k, h) = \begin{cases} e^{aU(\circ, \circ)}, & k = \circ, h = \circ, \\ a \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} U(k-r, s)F(r, h-s), & k \geq 1, \\ a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^{h-1} \frac{h-s}{h} U(r, h-s)F(k-r, s), & h \geq 1. \end{cases} \quad (۱۰.۹.۲)$$

۴.۱۰.۲ تابع غیرخطی لگاریتمی

تابع غیر خطی لگاریتمی $f(u) = \ln(a + bu)$ را در نظر بگیرید. با توجه به دامنه تابع لگاریتمی f ، $\{u \mid a + bu > 0\}$ و از رابطه (۱۴.۲) داریم:

$$F(0, 0) = [\ln(a + bu(x, y))]_{(x=0, y=0)} = \ln(a + bu(0, 0)) = \ln(a + bU(0, 0)). \quad (۱۱۰.۲)$$

حال از طرفین تابع $f(u) = \ln(a + bu)$ نسبت به x و y مشتق می گیریم و داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{b}{a + bu} \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{b}{a + bu} \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (۱۱۱.۲)$$

یا به طور معادل

$$\begin{cases} a \frac{\partial f}{\partial x} = b \left(\frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial f}{\partial x} \right), \\ a \frac{\partial f}{\partial y} = b \left(\frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial f}{\partial y} \right). \end{cases} \quad (۱۱۲.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل معادلات (۱۱۲.۲) به صورت زیر است:

$$\begin{cases} aF(k+1, h) = b \left[U(k+1, h) - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \frac{r+1}{k+1} U(k-r, s) F(r+1, h-s) \right], \\ aF(k, h+1) = b \left[U(k, h+1) - \sum_{s=0}^h \sum_{r=0}^k \frac{s+1}{h+1} U(r, h-s) F(k-r, s+1) \right]. \end{cases} \quad (۱۱۳.۲)$$

در رابطه فوق در اولی به جای k ، $(k-1)$ و در دومی به جای h ، $(h-1)$ قرار می دهیم

و داریم:

$$\begin{cases} aF(k, h) = b \left[U(k, h) - \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^h \frac{r+1}{k} U(k-1-r, s) F(r+1, h-s) \right], & k \geq 1, \\ aF(k, h) = b \left[U(k, h) - \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{r=0}^k \frac{s+1}{h} U(r, h-1-s) F(k-r, s+1) \right], & h \geq 1. \end{cases} \quad (۱۱۴.۲)$$

حال از ترکیب روابط (۱۱۰.۲) و (۱۱۴.۲)، رابطه بازگشتی زیر بدست می آید.

$$aF(k, h) = \begin{cases} aLn(a + bU(\circ, \circ)), & k = \circ, h = \circ, \\ b \left[U(k, h) - \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{r+1}{k} U(k-1-r, s) F(r+1, h-s) \right], & k \geq 1, \\ b \left[U(k, h) - \sum_{s=\circ}^{h-1} \sum_{r=\circ}^k \frac{s+1}{h} U(r, h-1-s) F(k-r, s+1) \right], & h \geq 1 \end{cases} \quad (115.2)$$

۵.۱۰.۲ توابع غیرخطی مثلثاتی

توابع غیرخطی مثلثاتی $f(u) = \sin(au)$ و $g(u) = \cos(au)$ را در نظر بگیرید. از رابطه (۱۴.۲)

داریم:

$$\begin{cases} F(\circ, \circ) = [\sin(au(x, y))]_{(x=\circ, y=\circ)} = \sin(au(\circ, \circ)) = \sin(aU(\circ, \circ)), \\ G(\circ, \circ) = [\cos(au(x, y))]_{(x=\circ, y=\circ)} = \cos(au(\circ, \circ)) = \cos(aU(\circ, \circ)) \end{cases} \quad (116.2)$$

حال برای یافتن توابع تبدیل، از طرفین توابع $f(u) = \sin(au)$ و $g(u) = \cos(au)$ نسبت به

x مشتق گرفته و داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = a \cos(au) \frac{\partial u}{\partial x} = ag(u) \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial g}{\partial x} = -a \sin(au) \frac{\partial u}{\partial x} = -af(u) \frac{\partial u}{\partial x} \end{cases} \quad (117.2)$$

تبدیل دیفرانسیل دستگاه (۱۱۷.۲) به صورت زیر است.

$$\begin{cases} (k+1)F(k+1, h) = a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (k-r+1)G(r, h-s)U(k-r+1, s), \\ (k+1)G(k+1, h) = -a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h (k-r+1)F(r, h-s)U(k-r+1, s). \end{cases} \quad (118.2)$$

با جایگزین کردن $(k-1)$ به جای k در دستگاه فوق داریم:

$$\begin{cases} F(k, h) = a \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} G(r, h-s)U(k-r, s), & k \geq 1 \\ G(k, h) = -a \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} F(r, h-s)U(k-r, s), & k \geq 1 \end{cases} \quad (119.2)$$

حال از طرفین توابع $f(u) = \sin(au)$ و $g(u) = \cos(au)$ نسبت به y مشتق گرفته و داریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y} = a \cos(au) \frac{\partial u}{\partial y} = ag(u) \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -a \sin(au) \frac{\partial u}{\partial y} = -af(u) \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (۱۲۰.۲)$$

تبدیل دیفرانسیل دستگاه (۱۲۰.۲) برابر است با:

$$\begin{cases} (h+1)F(k, h+1) = a \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (h-s+1)G(k-r, s)U(r, h-s+1), \\ (h+1)G(k, h+1) = -a \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (h-s+1)F(k-r, s)U(r, h-s+1). \end{cases} \quad (۱۲۱.۲)$$

با جایگزین کردن $(h-1)$ به جای h در دستگاه فوق داریم:

$$\begin{cases} F(k, h) = a \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{r=0}^k \frac{h-s}{h} G(k-r, s)U(r, h-s), & h \geq 1, \\ G(k, h) = -a \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{r=0}^k \frac{h-s}{h} F(k-r, s)U(r, h-s), & h \geq 1. \end{cases} \quad (۱۲۲.۲)$$

بنابراین از ترکیب روابط (۱۱۶.۲)، (۱۱۹.۲) و (۱۲۲.۲) روابط بازگشتی زیر بدست می آیند

که تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی مثلثاتی $f(u) = \sin(au)$ و $g(u) = \cos(au)$ هستند.

$$F(k, h) = \begin{cases} \sin(aU(\bullet, \bullet)), & k=0, h=0, \\ a \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^h \frac{k-r}{k} G(r, h-s)U(k-r, s), & k \geq 1, \\ a \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{r=0}^k \frac{h-s}{h} G(k-r, s)U(r, h-s), & h \geq 1. \end{cases} \quad (۱۲۳.۲)$$

۹

$$G(k, h) = \begin{cases} \cos(aU(\bullet, \bullet)), & k=0, h=0, \\ -a \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^h \frac{k-r}{k} F(r, h-s)U(k-r, s), & k \geq 1, \\ -a \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{r=0}^k \frac{h-s}{h} F(k-r, s)U(r, h-s), & h \geq 1. \end{cases} \quad (۱۲۴.۲)$$

۶.۱۰.۲ توابع غیرخطی هذلولوی

روند بدست آوردن تبدیل دیفرانسیل توابع غیر خطی هذلولوی $f(u) = \sinh(au)$ و $g(u) = \cosh(au)$ دقیقاً مشابه تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی مثلثاتی است بنابراین تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی هذلولوی به صورت زیر است:

$$F(k, h) = \begin{cases} \sinh(aU(\circ, \circ)), & k = \circ, h = \circ, \\ a \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} G(r, h-s) U(k-r, s), & k \geq 1, \\ a \sum_{s=\circ}^{h-1} \sum_{r=\circ}^k \frac{h-s}{h} G(k-r, s) U(r, h-s), & h \geq 1. \end{cases} \quad (125.2)$$

9

$$G(k, h) = \begin{cases} \cosh(aU(\circ, \circ)), & k = \circ, h = \circ, \\ a \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} F(r, h-s) U(k-r, s), & k \geq 1, \\ a \sum_{s=\circ}^{h-1} \sum_{r=\circ}^k \frac{h-s}{h} F(k-r, s) U(r, h-s), & h \geq 1. \end{cases} \quad (126.2)$$

۷.۱۰.۲ توابع غیرخطی نمایی

تابع غیرخطی نمایی $f(u) = e^{au}$ را می توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$z(u) = u^b(x, y), \quad f(z) = e^{az}$$

واضح است که این همان تابع غیرخطی نمایی e^{au} است بنابراین تبدیل دیفرانسیل این تابع

از معادله (۱۰۹.۲) به صورت زیر بدست می آید.

$$F(k, h) = \begin{cases} e^{aZ(\circ, \circ)}, & k = \circ, h = \circ \\ a \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{k-r}{k} Z(k-r, s) F(r, h-s), & k \geq 1 \\ a \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^{h-1} \frac{h-s}{h} Z(r, h-s) F(k-r, s), & h \geq 1. \end{cases} \quad (127.2)$$

که در آن

$$\begin{cases} Z(\circ, \circ) = U^b(\circ, \circ), \\ \sum_{s=\circ}^h U(\circ, h-s)Z(k, s) = \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \frac{(b+1)r-k}{k} U(r, h-s)Z(k-r, s), \quad k \geq 1, \\ \sum_{r=\circ}^k U(k-r, \circ)Z(r, h) = \sum_{s=\circ}^h \sum_{r=\circ}^k \frac{(b+1)s-h}{h} U(k-r, s)Z(r, h-s), \quad h \geq 1. \end{cases} \quad (128.2)$$

روابط آخر نشان می دهند که تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی پیچیده به راحتی از ترکیب تبدیل دیفرانسیل توابع غیرخطی ذکر شده در این بخش به دست می آید.

۱۱.۲ مثال های عددی

مثال ۱.۱۱.۲. مسئله مقدار اولیه غیر خطی زیر را در نظر بگیرید [۳۱].

$$u_x(x, y) + u_y(x, y) = \mathfrak{V}(x+y)u^{\mathfrak{V}}(x, y), \quad (129.2)$$

با شرایط اولیه

$$u(x, \circ) = 1, \quad u(\circ, y) = 1. \quad (130.2)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله (۱۲۹.۲) با استفاده از قضایای تبدیل دیفرانسیل دو بعدی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} (k+1)U(k+1, h) + (h+1)U(k, h+1) &= \mathfrak{V} \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \delta(r-1, h-s)F(k-r, s) + \\ &\mathfrak{V} \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \delta(r, h-s-1)F(k-r, s) \end{aligned} \quad (131.2)$$

که رابطه (۱۳۱.۲) با استفاده از شرایط اولیه معادل است با:

$$(k+1)U(k+1, h) + (h+1)U(k, h+1) = \mathfrak{V} \left[\sum_{r=\circ}^k F(k-r, h)\delta(r-1) + \sum_{s=\circ}^h F(k, h-s)\delta(s-1) \right] \quad (132.2)$$

با استفاده از رابطه (۱۳۱.۲) و از شرایط اولیه (۱۳۰.۲) داریم:

$$U(k, \circ) = \delta(k), \quad U(\circ, h) = \delta(h) \quad (۱۳۳.۲)$$

که $F(k, h)$ تبدیل دیفرانسیل تابع $u^{\frac{1}{2}}$ است. با استفاده از رابطه (۱۰۴.۲)، $F(k, h)$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$F(k, h) = \begin{cases} F(\circ, \circ) = U^{\frac{1}{2}}(\circ, \circ), \\ \sum_{s=\circ}^h U(\circ, h-s)F(k, s) = \sum_{r=1}^k \sum_{s=\circ}^h \frac{\omega r - \mathfrak{z}k}{\mathfrak{z}k} U(r, h-s)F(k-r, s), \quad k \geq 1, \\ \sum_{r=\circ}^k U(k-r, \circ)F(r, h) = \sum_{s=1}^h \sum_{r=\circ}^k \frac{\omega s - \mathfrak{z}h}{\mathfrak{z}h} U(k-r, s)F(r, h-s), \quad h \geq 1, \end{cases} \quad (۱۳۴.۲)$$

با قرار دادن مقادیر (۱۳۳.۲) در رابطه بازگشتی (۱۳۴.۲) داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{s=\circ}^h U(\circ, h-s)F(k, s) &= \sum_{s=\circ}^h \delta(h-s)F(k, s) = F(k, h), \\ \sum_{r=\circ}^k U(k-r, \circ)F(r, h) &= \sum_{r=\circ}^k \delta(k-r)F(r, h) = F(k, h). \end{aligned} \quad (۱۳۵.۲)$$

همچنین رابطه (۱۳۴.۲) می تواند به صورت زیر ساده شود.

$$F(\circ, \circ) = 1,$$

$$F(k, h) = \sum_{r=1}^k \sum_{s=\circ}^h \frac{\omega r - \mathfrak{z}k}{\mathfrak{z}k} U(r, h-s)F(k-r, s), \quad k \geq 1, \quad (۱۳۶.۲)$$

$$F(k, h) = \sum_{s=1}^h \sum_{r=\circ}^k \frac{\omega s - \mathfrak{z}h}{\mathfrak{z}h} U(k-r, s)F(r, h-s), \quad h \geq 1,$$

با جایگزین کردن مقادیر $U(k, \circ) = \delta(k)$ و $h = \circ$ در رابطه دوم (۱۳۶.۲) داریم:

$$F(k, \circ) = \sum_{r=1}^k \frac{\omega r - \mathfrak{z}k}{\mathfrak{z}k} U(r, \circ)F(k-r, \circ) = \circ, \quad k \geq 1. \quad (۱۳۷.۲)$$

از $F(\circ, \circ) = 1$ داریم: $F(k, \circ) = \delta(k)$.

حال مقادیر $U(k, \circ) = \delta(k)$ ، $F(k, \circ) = \delta(k)$ و $h = \circ$ را در رابطه (۱۳۲.۲) قرار می

دهیم و داریم:

$$U(k, 1) = \mathfrak{z} \sum_{r=\circ}^k \delta(k-r)\delta(r-1) = \mathfrak{z}\delta(k-1). \quad (۱۳۸.۲)$$

فصل ۲. کاربرد روش تبدیل دیفرانسیل برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ۵۷

با جایگزین کردن مقادیر $U(k, 1) = 3\delta(k-1)$ ، $F(k, 0) = \delta(k)$ ، $U(k, 0) = \delta(k)$ و $h = 1$ در روابط (۱۳۲.۲) و رابطه سوم (۱۳۶.۲) داریم:

$$F(k, 1) = 2\delta(k-1), \quad U(k, 2) = 3\delta(k-2). \quad (139.2)$$

و به طور مشابه با استفاده از روابط بازگشتی داریم:

$$F(k, 2) = \delta(k-2), \quad U(k, 3) = \delta(k-3),$$

$$F(k, 3) = 0, \quad U(k, 4) = 0$$

$$F(k, 4) = 0, \quad U(k, 5) = 0$$

$$F(k, 5) = 0, \quad U(k, 6) = 0, \dots$$

و در حالت کلی

$$U(k, h) = \begin{cases} 1, & k=0, h=0, \\ 3, & k=1, h=1, \\ 3, & k=2, h=2, \\ 1, & k=3, h=3, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (140.2)$$

با قرار دادن مقادیر (۱۴۰.۲) در رابطه (۱۵.۲) خواهیم داشت:

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k y^h = 1 + 3xy + 3x^2y^2 + x^3y^3 = (1 + xy)^3$$

که این جواب دقیق معادله است.

مثال ۲.۱۱.۲. مسئله مقدار اولیه غیر خطی زیر را در نظر بگیرید [۳۱].

$$u_{xy}(x, y) = u(x, y)(1 + Lnu(x, y)) \quad (141.2)$$

با شرایط اولیه

$$u(x, \circ) = 1, \quad u(\circ, y) = 1. \quad (142.2)$$

تبدیل دیفرانسیل روابط (۱۴۱.۲) و (۱۴۲.۲) به صورت زیر است.

$$(k+1)(h+1)U(k+1, h+1) = U(k, h) + \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h U(r, h-s)F(k-r, s) \quad (143.2)$$

$$U(k, \circ) = \delta(k), \quad U(\circ, h) = \delta(h) \quad (144.2)$$

که $F(k, h)$ تبدیل دیفرانسیل تابع $Ln(u)$ است. با استفاده از روابط (۱۴۲.۲) ، (۱۴۴.۲) و با کمک رابطه (۱۱۵.۲) ، $F(k, h)$ به صورت زیر محاسبه می شود.

$$F(\circ, \circ) = LnU(\circ, \circ) \quad (145.2)$$

$$U(k, h) = \sum_{r=\circ}^{k-1} \sum_{s=\circ}^h \frac{r+1}{k} U(k-1-r, s) F(r+1, h-s), \quad k \geq 1, \quad (146.2)$$

$$U(k, h) = \sum_{s=\circ}^{h-1} \sum_{r=\circ}^k \frac{s+1}{h} U(r, h-1-s) F(k-r, s+1), \quad h \geq 1. \quad (147.2)$$

با جایگزین کردن مقادیر $U(k, \circ) = \delta(k)$ و $h = \circ$ در معادلات (۱۴۴.۲) ، (۱۴۵.۲) و (۱۴۲.۲) روابط زیر حاصل می شوند.

$$F(k, \circ) = \circ, \quad U(k, 1) = \delta(k-1), \quad (148.2)$$

با جایگزین کردن $U(k, \circ) = \delta(k)$ در معادله (۱۴۸.۲) و $h = 1$ در روابط (۱۴۷.۲) و (۱۴۲.۲) داریم:

$$F(k, 1) = \delta(k-1), \quad U(k, 2) = \frac{1}{2!} \delta(k-2), \quad (149.2)$$

و به طور مشابه با استفاده از روابط بازگشتی داریم:

$$F(k, 2) = \circ, \quad U(k, 3) = \frac{1}{3!} \delta(k-3),$$

$$\begin{aligned} F(k, ۳) &= ۰, & U(k, ۴) &= \frac{1}{۴!} \delta(k - ۴), \\ F(k, ۴) &= ۰, & U(k, ۵) &= \frac{1}{۵!} \delta(k - ۵), \\ F(k, ۵) &= ۰, & U(k, ۶) &= \frac{1}{۶!} \delta(k - ۶), \dots \end{aligned}$$

و در حالت کلی

$$U(k, h) = \frac{1}{h!} \delta(k - h). \quad (۱۵۰.۲)$$

با قرار دادن همه مقادیر $U(k, h)$ در رابطه (۱۵.۲) داریم:

$$u(x, y) = \sum_{k=۰}^{\infty} \sum_{h=۰}^{\infty} \frac{1}{h!} \delta(k - h) x^k y^h = \sum_{k=۰}^{\infty} \frac{1}{k!} (xy)^k = e^{xy}.$$

که این جواب دقیق معادله است.

فصل ۳

حل معادله فوکر-پلانک به روش تبدیل دیفرانسیل

۱.۳ مقدمه

معادله فوکر-پلانک^۱ در بیشتر زمینه های مختلف علوم طبیعی شامل فیزیک حالت جامد^۲، کوانتوم اپتیک^۳، شیمی فیزیک^۴، بیولوژی نظری^۵ و نظریه گردش^۶ وجود دارد. معادله فوکر-پلانک ابتدا توسط فوکر و پلانک برای شرح دادن حرکت براونی^۷ یک ذره بکار برده شد [۳۲]. اگر یک ذره کوچک به جرم m در یک مایع غوطه ور شود، معادله حرکت برای تابع توزیع^۸ $W(x, t)$ به صورت زیر داده می شود.

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v W}{\partial v} + \lambda \frac{KT}{m} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}, \quad (۱.۳)$$

که ν شتاب سرعت حرکت براونی از یک ذره کوچک در زمان t است، λ ثابت کسر، K ثابت بولتزمن^۹ و T درجه حرارت مایع نامیده می شود [۳۲].

معادله (۱.۳) ساده ترین نوع معادله فوکر-پلانک است. با حل معادله (۱.۳) با تابع توزیع $W(x, t)$ برای $t = 0$ و قرار دادن شرایط مرزی مناسب می توان تابع توزیع $W(x, t)$ را برای $t > 0$ بدست آورد.

حالت کلی معادله فوکر-پلانک برای متغیر x به فرم زیر است [۳۲].

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} A(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x) \right] u, \quad (۲.۳)$$

^۱Fokker-Planck equation

^۲solid-state physics

^۳quantum optics

^۴chemical physics

^۵theoretical biology

^۶circuit theory

^۷Brownian motion

^۸distribution function

^۹Boltzmanns

با شرط اولیه داده شده به صورت

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in R, \quad (3.3)$$

که در آن $u(x, t)$ تابع مجهول است. در معادله (۲.۳)، $B(x) > 0$ ضریب انتشار^{۱۰} و $A(x)$ ضریب رانش^{۱۱} نامیده می شود. ضرایب انتشار و رانش ممکن است به زمان هم وابسته باشند.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} A(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, t) \right] u, \quad (4.3)$$

معادله (۱.۳) حالت خاصی از معادله فوکر-پلانک است که در آن ضریب انتشار و ضریب رانش ثابت هستند. معادله (۲.۳) یک معادله حرکت برای تابع توزیع $u(x, t)$ است که در ادبیات ریاضی معادله کولموگروو پیشرو^{۱۲} نامیده می شود. شبیه معادله دیفرانسیل جزئی معادله کولموگروو پسرو^{۱۳} معادله به فرم زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-A(x, t) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u, \quad (5.3)$$

حالت کلی معادله (۲.۳) برای N متغیر $x_N, \dots, x_2, x_1$ به فرم زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} B_{i,j}(x) \right] u, \quad (6.3)$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in R^N, \quad (7.3)$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ است.

بردار رانش^{۱۴} A_i و تانسور انتشار^{۱۵} $B_{i,j}$ در حالت کلی وابسته به N متغیر $x_N, \dots, x_2, x_1$

^{۱۰} diffusion coefficient

^{۱۱} drift coefficient

^{۱۲} Forward Kolmogorov equation

^{۱۳} Forward Kolmogorov equation

^{۱۴} drift vector

است.

یافتن جواب تحلیلی معادله فوکر-پلانک ممکن است اما بطور کلی بدست آوردن جواب مشکل است، خصوصا اگر متغیرها تفکیک پذیر نباشند یا تعداد متغیرها زیاد باشد. روش های متنوعی برای یافتن جواب وجود دارد مانند روش های شبیه سازی، تبدیل معادله فوکر-پلانک به معادله شرویدینگر^{۱۶}، روش های انتگرال گیری عددی و غیره.

یک فرم کلی از معادله فوکر-پلانک وجود دارد که معادله فوکر-پلانک غیرخطی نامیده می شود و کاربردهای مهمی در زمینه های مختلف مثل فیزیک پلاسما^{۱۷}، فیزیک سطح^{۱۸}، جمعیت پویا^{۱۹}، بیولوژی^{۲۰}، مهندسی^{۲۱}، هیدرودینامیک غیرخطی^{۲۲}، فیزیک پلیمر^{۲۳}، فیزیک لیزر^{۲۴}، الگوی ساختمان^{۲۵}، فیزیولوژی^{۲۶} و بازاریابی^{۲۷} دارد [۳۳]. درحالت یک متغیره معادله فوکر-پلانک غیرخطی به فرم زیر نوشته می شود.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} A(x, t, u) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} B(x, t, u) \right] u, \quad (۸.۳)$$

برای N متغیر $x_1, x_2, \dots, x_N$ ، معادله فوکر-پلانک غیر خطی به صورت زیر است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x, t, u) + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} B_{i,j}(x, t, u) \right] u, \quad (۹.۳)$$

که در آن $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ است

^{۱۵}diffusion tensor

^{۱۶}Schrodinger equation

^{۱۷}plasma physics

^{۱۸}surface physics

^{۱۹}population dynamics

^{۲۰}biophysics

^{۲۱}engineering

^{۲۲}nonlinear hydrodynamics

^{۲۳}polymer physics

^{۲۴}laser physics

^{۲۵}pattern formation

^{۲۶}psychology

^{۲۷}marketing

در حالت خاص دیگر $A_i(x, t, u) = A_i(x)$ و $B_{i,j}(x, t, u) = B_{i,j}(x)$ معادله فوکر-پلانک غیرخطی (۹.۳) به معادله خطی (۶.۳) کاهش می یابد. به همین دلیل تحقیقات زیادی روی معادله فوکر-پلانک به منظور یافتن حل عددی این معادله انجام شده است [۷]–[۳۴، ۳۵]. با توجه به مباحث فوق، در این فصل به کاربردهایی از روش تبدیل دیفرانسیل برای حل معادله فوکر-پلانک خطی و غیرخطی و معادله کولموگرو می پردازیم.

۲.۳ نتایج عددی از معادله

مثال ۱.۲.۳. معادله (۲.۳) را با شرط اولیه زیر در نظر بگیرید.

$$f(x) = x, \quad x \in R \quad (۱۰.۳)$$

در معادله (۲.۳)، قرار می دهیم $A(x) = -1$ و $B(x) = 1$ لذا داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] u \quad (۱۱.۳)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله فوق همراه با شرط اولیه اش به صورت زیر است.

$$(h+1)U(k, h+1) = (k+1)U(k+1, h) + (k+1)(k+2)U(k+2, h), \quad (۱۲.۳)$$

$$U(k, 0) = \delta[k-1] = \begin{cases} 1 & k=1, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad U(k, 1) = \begin{cases} 1 & k=0, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱۳.۳)$$

حال در معادله (۱۲.۳)، h را به $(h-1)$ تبدیل کرده و مقادیر معادله (۱۳.۳) را در آن جایگذاری کرده تا مقادیر $U(k, h)$ به صورت زیر بدست آیند.

$$U(k, h) = \begin{cases} 1 & k, h = 0, 1, \quad k \neq h, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با جایگزینی همه $U(k, h)$ در معادله (۱۵.۲) فرم بسته از جواب را به صورت زیر بدست می آوریم [۷].

$$u(x, t) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \sum_{h=\circ}^{\infty} U(k, h) x^k t^h = x + t$$

مثال ۲.۲.۳. در این مثال حالتی را که ضرایب A و B وابسته به x و t هستند بررسی می کنیم. بدین منظور معادله (۴.۳) را با شرط اولیه و مقادیر داده شده A و B به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$u(x, \circ) = f(x) = \sinh(x), \quad x \in R \quad (۱۴.۳)$$

$$A(x, t) = e^t \coth(x) \cosh(x) + e^t \sinh(x) - \coth(x),$$

$$B(x, t) = e^t \cosh(x).$$

با جایگذاری مقادیر A و B داده شده در معادله (۴.۳) داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} (e^t \coth(x) \cosh(x) + e^t \sinh(x) - \coth(x)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (e^t \cosh(x)) \right] u. \quad (۱۵.۳)$$

تبدیل دیفرانسیل معادله فوق با استفاده از قضایای بیان شده در بخش (۴.۲) به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} & \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \left(-\mathfrak{Z} \delta(k-r) + \frac{(-\mathfrak{Z})^{k-r}}{(k-r)!} + \frac{(\mathfrak{Z})^{k-r}}{(k-r)!} \right) (h-s+\mathfrak{I}) U(r, h-s+\mathfrak{I}) = \\ & \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \left(-\mathfrak{F} \delta(r) + \frac{\mathfrak{H}}{\mathfrak{Z} r! (h-s)!} - \frac{(-\mathfrak{Z})^r}{\mathfrak{Z} r! (h-s)!} + \frac{\mathfrak{H}(-\mathfrak{I})^r}{\mathfrak{Z} r! (h-s)!} - \frac{\mathfrak{Z}^r}{\mathfrak{Z} r! (h-s)!} \right) U(k-r, s) \\ & + \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \left(-\frac{(-\mathfrak{Z})^r}{r!} + \frac{\mathfrak{Z}^r}{r!} - \frac{\mathfrak{Z}}{r! (h-s)!} + \frac{\mathfrak{Z}(-\mathfrak{I})^r}{r! (h-s)!} \right) (k+\mathfrak{I}-r) U(k+\mathfrak{I}-r, s) + \\ & \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \left(-\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{Z} r! (h-s)!} + \frac{(-\mathfrak{Z})^r}{\mathfrak{Z} r! (h-s)!} - \frac{(-\mathfrak{I})^r}{\mathfrak{Z} r! (h-s)!} + \frac{\mathfrak{Z}^r}{\mathfrak{Z} r! (h-s)!} \right) (k+\mathfrak{Z}-r) \\ & (k+\mathfrak{I}-r) U(k+\mathfrak{Z}-r, s). \end{aligned} \quad (۱۶.۳)$$

از شرط اولیه (۱۴.۳) داریم:

$$U(k, 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k!} - \frac{(-1)^k}{k!} \right) \quad (17.3)$$

حال معادله (۱۷.۳) را در معادله (۱۶.۳) قرار داده و به نتایج زیر می‌رسیم.

$$U(k, 1) = 0, k = 0, 2, 4, \dots$$

$$U(1, 1) = 1, U(3, 1) = \frac{1}{6}, U(5, 1) = \frac{1}{120} \dots$$

$$U(k, 2) = 0, k = 0, 2, 4, \dots$$

$$U(1, 2) = \frac{1}{2}, U(3, 2) = \frac{1}{12}, U(5, 2) = \frac{1}{240} \dots$$

$$U(k, 3) = 0, k = 0, 2, 4, \dots$$

$$U(1, 3) = \frac{1}{6}, U(3, 3) = \frac{1}{36}, U(5, 3) = \frac{1}{720} \dots$$

⋮

$$U(k, h) = \frac{1}{2h!} \left(\frac{1}{k!} - \frac{(-1)^k}{k!} \right).$$

با جایگزینی همه مقادیر $U(k, h)$ در معادله (۱۵.۲) فرم بسته جواب دقیق مسئله به صورت

زیر بدست می‌آید. [۷].

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h = e^t \sinh(x).$$

مثال ۳.۲.۳. در این مثال روش تبدیل دیفرانسیل را روی معادله کولموگرو پسر (۵.۳)

با ضرایب انتشار و رانش داده شده در زیر بکار می‌بریم.

$$A(x, t) = -(x + 1), \quad B(x, t) = e^t x^2.$$

فرض کنید شرط اولیه به صورت زیر باشد.

$$u(x, \circ) = f(x) = x + ۱, \quad x \in R \quad (۱۸.۳)$$

با قرار دادن مقادیر A و B در معادله (۵.۳) داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x + ۱) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(e^t x^2) \right] u. \quad (۱۹.۳)$$

از طرفین رابطه فوق تبدیل دیفرانسیل می گیریم.

$$\begin{aligned} (h + ۱)U(k, h + ۱) &= (k + ۱)U(k + ۱, h) + \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \delta(r - ۱, h - s)(k - r + ۱) \\ U(k - r + ۱, s) &+ \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \frac{1}{s!} \delta(r - ۲, h - s - p)(k - r - t + ۲) \\ &(k - r - t + ۱)U(k - r - t + ۲, p). \end{aligned} \quad (۲۰.۳)$$

در رابطه فوق h را به $(h - ۱)$ تبدیل کرده و داریم:

$$\begin{aligned} U(k, h) &= \frac{1}{h} [(۱ + k)U(۱ + k, -۱ + h) + \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^{h-1} \delta(r - ۱, h - ۱ - s)(k - r + ۱) \\ U(k - r + ۱, s) &+ \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^{h-1} \sum_{p=\circ}^{h-s-1} \frac{1}{(s)!} \delta(r - ۲, h - ۱ - s - p)(k - r - t + ۲)] \end{aligned} \quad (۲۱.۳)$$

از شرط اولیه داریم:

$$U(k, \circ) = \delta(k - ۱) + \delta(k), \quad (۲۲.۳)$$

با جایگزین کردن رابطه (۲۲.۳) در معادله (۲۱.۳) و با استفاده از رابطه بازگشتی به نتایج

زیر می رسیم.

$$U(\circ, \circ) = ۱, \quad U(۱, \circ) = ۱, \quad U(۲, \circ) = \circ, \quad U(۳, \circ) = \circ, \quad U(۴, \circ) = \circ, \dots$$

$$U(0, 1) = 1, \quad U(1, 1) = 1, \quad U(2, 1) = 0, \quad U(3, 1) = 0, \quad U(4, 1) = 0, \dots$$

$$U(0, 2) = \frac{1}{2}, \quad U(1, 2) = \frac{1}{2}, \quad U(2, 2) = 0, \quad U(3, 2) = 0, \quad U(4, 2) = 0, \dots$$

$$U(0, 3) = \frac{1}{6}, \quad U(1, 3) = \frac{1}{2}, \quad U(2, 3) = 0, \quad U(3, 3) = 0, \quad U(4, 3) = 0, \dots$$

$$U(0, 4) = \frac{1}{24}, \quad U(1, 4) = \frac{1}{24}, \quad U(2, 4) = 0, \quad U(3, 4) = 0, \quad U(4, 4) = 0, \dots$$

⋮

$$U(k, h) = \begin{cases} \frac{1}{h!} & k = 0, 1, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با قرار دادن همه $U(k, h)$ در معادله (۱۵.۲) جواب مسئله به صورت زیر بدست می آید.

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h = (1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \dots)(x + 1) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{t^h}{h!} (x + 1) = e^t (x + 1)$$

که فرم بسته جواب تحلیلی مسئله است [۷].

مثال ۴.۲.۳. در این مثال معادله (۶.۳) را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$A_1(x, y) = x, \quad A_2(x, y) = 5y,$$

$$B_{1,1}(x, y) = x^2, \quad B_{2,1}(x, y) = 1, \quad B_{3,1}(x, y) = 1, \quad B_{2,2}(x, y) = y^2.$$

با شرط اولیه به صورت زیر

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = x, \quad x, y \in R. \quad (23.3)$$

با استفاده از قضایای تبدیل دیفرانسیل سه بعدی در بخش (۶.۲) از طرفین معادله (۶.۳)

تبدیل دیفرانسیل می گیریم و داریم:

$$\begin{aligned}
 (m+1)U(k, h, m+1) &= -2U(k, h, m) - \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m \delta(k-r, s-1, p)(h-s+1) \\
 &U(r, h-s+1, m-p) + \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m \delta(k-r, s-2, p)(h-s+1)(h-s+2) \\
 &U(r, h-s+2, m-p) + 3 \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m \delta(k-r-1, s, p)(r+1)U(r+1, h-s, m-p) \\
 &+ 2(k+1)(h+1)U(k+1, h+1, m) + \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^m \delta(k-r-2, s, p)(r+1)(r+2) \\
 &U(r+2, h-s, m-p)
 \end{aligned} \tag{۲۴.۳}$$

در رابطه فوق m را به $(m-1)$ تبدیل کرده و داریم:

$$\begin{aligned}
 U(k, h, m) &= \frac{1}{m} [(-2U(k, h, m-1) - \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{m-1} \delta(k-r, s-1, p)(h-s+1) \\
 &U(r, h-s+1, m-1-p) + \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{m-1} \delta(k-r, s-2, p)(h-s+1)(h-s+2) \\
 &U(r, h-s+2, m-1-p) + 3 \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{m-1} \delta(k-r-1, s, p)(r+1) \\
 &U(r+1, h-s, m-1-p) + 2(k+1)(h+1)U(k+1, h+1, m-1) + \\
 &\sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{m-1} \delta(k-r-2, s, p)(r+1)(r+2)U(r+2, h-s, m-1-p)]. \tag{۲۵.۳}
 \end{aligned}$$

از شرط اولیه (۲۳.۳) داریم:

$$U(k, h, \circ) = \delta(k-1)\delta(h) \tag{۲۶.۳}$$

با جایگذاری معادله (۲۶.۳) در رابطه بازگشتی (۲۵.۳) نتایج به صورت زیر بدست می آیند.

$$U(k, h, \circ) = \begin{cases} 1 & k=1, h=\circ \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, U(k, \circ, m) = \begin{cases} \frac{1}{m!} & k=1, \\ \circ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

$$U(\circ, h, m) = \circ, \quad \forall h, \forall m.$$

با جایگزینی همه $U(k, h)$ در معادله (۳۶.۲) جواب سری به صورت زیر حاصل می شود.

$$u(x, y, t) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \sum_{h=\circ}^{\infty} \sum_{p=\circ}^{\infty} U(k, h, m) x^k y^h t^m = (1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots) x = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{t^n}{n!} x = x e^t.$$

که فرم بسته جواب مسئله است [۷].

مثال ۵.۲.۳. در این مثال روش تبدیل دیفرانسیل را روی معادله فوکر-پلانک غیرخطی

بکار می بریم. معادله (۸.۳) را با مقادیر داده شده A و B به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$A(x, t, u) = 4 \frac{u}{x} - \frac{x}{3}, \quad B(x, t, u) = u,$$

با شرط اولیه زیر

$$u(x, \circ) = f(x) = x^2, \quad x \in R. \quad (27.3)$$

مقادیر داده شده A و B را در معادله (۸.۳) قرار می دهیم و داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(4 \frac{u}{x} - \frac{x}{3} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u) \right] u \quad (28.3)$$

از طرفین رابطه فوق تبدیل دیفرانسیل می گیریم و داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \delta(r-2, h-s)(s+1)U(k-r, s+1) &= \frac{1}{3} \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \delta(r-2, h-s)U(k-r, s) + \\ 4 \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h U(r, h-s)U(k-r, s) &+ \frac{1}{3} \sum_{r=\circ}^k \sum_{s=\circ}^h \delta(r-3, h-s)(k-r+1)U(k-r+1, s) \\ - 8 \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \delta(r-1, h-s-p)U(t, s)(k-r-t+1) &U(k-r-t+1, p) + \\ 2 \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \delta(r-2, h-s-p)(t+1) &U(t+1, s)(k-r-t+1)U(k-r-t+1, p) \end{aligned}$$

$$+ \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \delta(r-2, h-s-p) U(t, s) (k-r-t+1)(k-r-t+2) \\ U(k-r-t+2, p). \quad (29.3)$$

از رابطه (27.3) داریم:

$$U(k, 0) = \delta(k-2). \quad (30.3)$$

با جایگذاری معادله (30.3) در معادله (29.3) و با استفاده از رابطه بازگشتی نتایج به صورت زیر بدست می آیند.

$$U(k, 0) = \begin{cases} 1 & k=2, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, U(k, 1) = \begin{cases} 1 & k=2, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}, \dots$$

$$U(k, h) = \begin{cases} \frac{1}{h!} & k=2, \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

با جایگزینی همه $U(k, h)$ در معادله (36.2) جواب به صورت زیر بدست می آید.

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} U(k, h) x^k t^h = (1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots) x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} x^2 = e^t x^2$$

که جواب دقیق مسئله است [۷].

فصل ۴

حل معادله فرنبرگ - وایتهام به روش
کاهش تبدیل دیفرانسیل

در این فصل یک چارچوب کلی از روش کاهش تبدیل دیفرانسیل^۱ برای حل معادلات از نوع فرنبرگ- وایتهام^۲ را که در ریاضی فیزیک مورد بحث قرار می گیرد ارائه می شود. در این روش جواب ها به فرم یک سری همگرا بدست می آیند.

۱.۴ مقدمه

معادله فرنبرگ- وایتهام [۳۶] به صورت زیر داده شده است.

$$u_t - u_{xxt} + u_x + uu_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \quad (1.4)$$

در سال ۱۹۷۸ ، فرنبرگ و وایتهام یک جواب پیک^۳ $u(x, t) = Ae^{-\frac{1}{2}|x-\frac{t}{2}|}$ با ثابت اختیاری A بدست آوردند. اخیرا کارهای زیادی برای یافتن جواب های موج سیار در معادله (۱.۴) متمرکز شده است. تبدیل جمله غیرخطی uu_x در معادله (۱.۴) به $u^2 u_x$ توسط هی و دیگران^۴ پیشنهاد شد که به معادله فرنبرگ- وایتهام تعمیم یافته مشهور است [۳۷].

$$u_t - u_{xxt} + u_x + u^2 u_x = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx}, \quad (2.4)$$

بر خلاف وجود روش های تحلیلی مثل روش تجزیه آد미ان [۳۸]، روش آشفنگی هموتویی [۳۸، ۳۹] و روش تکرار وردشی، [۹] روش کاهش تبدیل دیفرانسیل [۴۰، ۴۲] می تواند جواب دقیقی برای معادله فرنبرگ- وایتهام ارائه دهد و جواب های تقریبی همگرا را بدون خطی سازی، گسسته سازی، آشفنگی یا محاسبه پیچیده چند جمله ای آد미ان فراهم سازد که مدیون مزیت بالا و اجرای ساده روش کاهش تبدیل دیفرانسیل است .

^۱Reduce Differential transform method(RDTM)

^۲Fornberg-Whitham

^۳peak

^۴He et al

۲.۴ ایده اصلی روش کاهش تبدیل دیفرانسیل

تعریف ۱.۲.۴. اگر تابع $u(x, t)$ تحلیلی و مشتقاتش نسبت به t پیوسته و x یک نقطه دلخواه از دامنه تعریف باشد آنگاه

$$U_k(x) = \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t) \right]_{t=0}, \quad (3.4)$$

که t بعد طیف، $u(x, t)$ تابع اصلی و $U_k(x)$ تابع تبدیل است.

تعریف ۲.۲.۴. تبدیل دیفرانسیل معکوس $U_k(x)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k. \quad (4.4)$$

از ترکیب معادلات (۳.۴) و (۴.۴) رابطه زیر بدست می آید.

$$U_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t) \right]_{t=0} t^k. \quad (5.4)$$

معادله فرنبرگ- وایتهام در حالت عملگر استاندارد به صورت زیر می باشد:

$$L(u(x, t)) + R(u(x, t)) + N(u(x, t)) = g(x, t) \quad (6.4)$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = f(x) \quad (7.4)$$

که در آن $L = \frac{\partial}{\partial t}$ ، $R = \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}$ عملگرهای خطی هستند که مشتقات جزئی

$N(u(x, t)) = uu_x$ یک جمله غیر خطی است و $g(x, t)$ عبارت غیر همگن است. با استفاده از

جدول ۱.۴: کاهش تبدیل دیفرانسیل

تابع اصلی	تابع تبدیل
$u(x, t)$	$U_k(x) = \frac{1}{k!} [\frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t)]_{t=0}$
$w(x, t) = u(x, t) \mp v(x, t)$	$W_k(x) = U_k(x) \mp V_k(x)$
$w(x, t) = \alpha u(x, t)$	$W_k(x) = \alpha U_k(x)$
$w(x, y) = x^m t^n$	$W_k(x) = x^m \delta(k - n)$
$w(x, y) = x^m t^n u(x, t)$	$W_k(x) = x^m U(k - n)$
$w(x, t) = u(x, t) v(x, t)$	$W_k(x) = \sum_{r=0}^k V_r(x) U_{k-r}(x) = \sum_{r=0}^k U_r(x) V_{k-r}(x)$
$w(x, t) = \frac{\partial^r}{\partial t^r} u(x, t)$	$W_k(x) = (k+1) \dots (k+r) U_{k+r}(x) = \frac{(k+r)!}{k!} U_{k+r}(x)$
$w(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)$	$W_k(x) = \frac{\partial}{\partial x} U_k(x)$

روش کاهش تبدیل دیفرانسیل و جدول (۱.۴) فرمول بازگشتی را بصورت زیر می نویسیم:

$$(k+1)U_{k+1}(x) = G_k(x) - N(U_k(x)) - R(U_k(x)), \quad (۸.۴)$$

که $g(x, t)$ و $N(u(x, y))$ ، $R(u(x, y))$ به ترتیب تبدیلات توابع $G_k(x)$ و $N(U_k(x))$ ، $R(U_k(x))$ هستند.

از شرط اولیه (۷.۴) داریم:

$$U_0(x) = f(x), \quad (۹.۴)$$

با جایگزین کردن معادله (۹.۴) در معادله (۸.۴) و بوسیله محاسبات تکراری پیشرو مقادیر $U_k(x)$ بصورت زیر بدست می آیند. سپس تبدیل معکوس از مجموعه مقادیر $\{U_k(x)\}_{k=0}^n$ جواب تقریبی به فرم زیر ارائه می دهند.

$$\tilde{u}_n(x, t) = \sum_{k=0}^n U_k(x) t^k \quad (۱۰.۴)$$

که n مرتبه جواب تقریبی است. بنابراین جواب دقیق مسئله به صورت زیر داده می شود.

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{u}_n(x, t), \quad i = 1, \dots, n. \quad (۱۱.۴)$$

۳.۴ مثال های عددی

مثال ۱.۳.۴. معادله (۱.۴) را با شرط اولیه زیر در نظر بگیرید.

$$u(x, 0) = e^{\frac{1}{3}x}. \quad (12.4)$$

با بکاربردن روش کاهش تبدیل دیفرانسیل روی معادله (۱.۴) داریم:

$$\begin{aligned} (k+1)U_{k+1}(x) - (k+1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_{k+1}(x) &= -\frac{\partial}{\partial x}U_k(x) - \sum_{r=0}^k U_{k-r}(x)\frac{\partial}{\partial x}U_r(x) + \\ &\sum_{r=0}^k U_{k-r}(x)\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_r(x) + 3\sum_{r=0}^k U_{k-r}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_r(x). \end{aligned} \quad (13.4)$$

در معادله فوق k را به $(k-1)$ تبدیل کرده و داریم:

$$\begin{aligned} U_k(x) - (k)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_k(x) &= -\frac{\partial}{\partial x}U_{k-1}(x) - \sum_{r=0}^{k-1} U_{k-1-r}(x)\frac{\partial}{\partial x}U_r(x) + \\ &\sum_{r=0}^{k-1} U_{k-1-r}(x)\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_r(x) + 3\sum_{r=0}^{k-1} U_{k-1-r}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_r(x). \end{aligned} \quad (14.4)$$

از شرط اولیه داریم:

$$U_0(x) = e^{\frac{1}{3}x}. \quad (15.4)$$

این واضح است که معادله (۱۴.۴) یک معادله دیفرانسیل جزئی خطی از مرتبه ۲ است. با حل معادله (۱۴.۴) و شرط اولیه (۱۵.۴) مقادیر $U_k(x)$ را به صورت زیر بدست می آوریم.

$$U_1(x) = -\frac{2}{3}e^{\frac{1}{3}x},$$

$$U_2(x) = \frac{2}{9}e^{\frac{1}{3}x},$$

$$U_3(x) = -\frac{4}{81}e^{\frac{1}{3}x},$$

$\vdots$

سرانجام با استفاده از تبدیل دیفرانسیل معکوس $U_k(x)$ و با استفاده از رابطه (۴.۴) جواب دقیق مساله به صورت زیر بدست می آید [۴۳].

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x) t^k = e^{\frac{1}{\sqrt{5}}x - \frac{\sqrt{5}}{5}t},$$

مثال ۲.۳.۴. معادله (۲.۴) را با شرط اولیه زیر در نظر بگیرید.

$$u(x, 0) = \frac{\sqrt{5}}{5}(\sqrt{15} - 5) \operatorname{sech}^2(cx), \quad (16.4)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{5}} \sqrt{10(5 - \sqrt{15})}$$

با بکاربردن روش کاهش تبدیل دیفرانسیل روی معادله (۱.۴) داریم:

$$\begin{aligned} (k+1)U_{k+1}(x) - (k+1)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_{k+1}(x) &= -\frac{\partial}{\partial x}U_k(x) - \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^r U_{k-r}(x)U_{r-s}(x)\frac{\partial}{\partial x}U_s(x) \\ &+ \sum_{r=0}^k U_{k-r}(x)\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_r(x) + \sqrt{5} \sum_{r=0}^k U_{k-r}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_r(x) \end{aligned} \quad (17.4)$$

در معادله فوق k را به $(k-1)$ تبدیل کرده و داریم:

$$\begin{aligned} kU_k(x) - (k)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_k(x) &= -\frac{\partial}{\partial x}U_{k-1}(x) - \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{s=0}^r U_{k-1-r}(x)U_{r-s}(x)\frac{\partial}{\partial x}U_s(x) \\ &+ \sum_{r=0}^{k-1} U_{k-1-r}(x)\frac{\partial^3}{\partial x^3}U_r(x) + \sqrt{5} \sum_{r=0}^{k-1} U_{k-1-r}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}U_r(x). \end{aligned} \quad (18.4)$$

از شرط اولیه داریم:

$$U_0(x) = \frac{\sqrt{5}}{5}(\sqrt{15} - 5) \operatorname{sech}^2(cx). \quad (19.4)$$

با حل معادله (۱۸.۴) و شرط اولیه (۱۹.۴) مقادیر $U_k(x)$ را به صورت زیر بدست می آوریم.

$$\begin{aligned} U_1(x) &= -\frac{105}{8}x + \frac{27\sqrt{15}}{8}x + \frac{31}{8}x^3 - \sqrt{15}x^3 \dots, \\ U_2(x) &= \frac{465}{8} - 15\sqrt{15} - \frac{825}{16}x^2 + \frac{213\sqrt{15}}{16}x^2 + \dots, \\ U_3(x) &= 305x - \frac{315\sqrt{15}}{4}x - \frac{36805}{192}x^3 + \frac{9503}{64}\sqrt{\frac{5}{3}}x^3 \dots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

سرانجام تبدیل دیفرانسیل معکوس $U_k(x)$ با استفاده از رابطه (۲.۲.۴) بصورت زیر بدست می آید.

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)t^k = \frac{3}{4}(\sqrt{15} - 5)\operatorname{sech}^2(c(x - (5 - \sqrt{15})t)).$$

که این جواب دقیق مسئله است [۳۷].

فصل ۵

حل معادله زاخواروف – کازنتسوف به
روش تبدیل دیفرانسیل

۱.۵ مقدمه

در این فصل ابتدا معادله زاخواروف-کازنتسوف^۱ را به صورت زیر معرفی می کنیم.

$$u_t + a(u^m)_x + b(u^n)_{xxx} + c(u^k)_{yyx} = 0, \quad m, n, k \neq 0 \quad (1.5)$$

که در آن a ، b و c ثابت های اختیاری و m ، n و k اعداد صحیح هستند. این معادله رفتار امواج یون- صوتی^۲ غیرخطی ضعیف را در پلاسما توصیف می کند که شامل یون های سرد و الکترون های هم دمای گرم در حضور یک میدان مغناطیسی یکنواخت است. این معادله اولین بار در توصیف امواج یون- صوتی غیرخطی ضعیف در پلاسمای به شدت مغناطیس شده بدست آمده بود.

وازواز [۴۵] روش توسعه یافته $\tanh$ را برای حل تحلیلی معادله زاخواروف-کازنتسوف بکار برد. هانگ^۳ [۴۶] روش بسط چندجمله ای را برای حل دو تا از معادلات زاخواروف-کازنتسوف بکار برد. ژو و دیگران [۴۷] تعدادی از موج های منحصر بفرد، موج های متناوب و موج های پیچشی را با استفاده از نظریه شکاف در دستگاه های پویا برای معادله زاخواروف-کازنتسوف اصلاح شده بدست آوردند. [۴۸] معادلات زاخواروف-کازنتسوف با پراکندگی غیرخطی و با استفاده از روش تجزیه آد미ان حل شده است. بی آزار و دیگران^۴ [۸] روش آشفستگی هموتوبی را برای حل معادلات زاخواروف-کازنتسوف بکار بردند.

حال ما در اینجا با ارائه چند مثال روی دو حالت خاص $Zk(2, 2, 2)$ و $ZK(3, 3, 3)$ کارایی روش تبدیل دیفرانسیل را برای حل معادلات زاخواروف-کازنتسوف نشان می دهیم.

^۱Zakharov-Kuznetsov equation

^۲ion-acoustic

^۳Huang

^۴Biazar et al

۲.۵ مثال های عددی

مثال ۱.۲.۵. معادله $ZK(۲, ۲, ۲)$ را که در زیر آمده در نظر بگیرید.

$$u_t - (u^۲)_x + \frac{1}{\lambda}(u^۲)_{xxx} + \frac{1}{\lambda}(u^۲)_{yyx} = ۰, \quad (۲.۵)$$

$$u(x, y, ۰) = \frac{۴}{۳}\lambda \sinh^۲\left(\frac{1}{۲}(x+y)\right). \quad (۳.۵)$$

که در آن λ یک ثابت اختیاری است.

روش تبدیل دیفرانسیل سه بعدی را روی معادله (۲.۵) به صورت زیر انجام می دهیم.

$$\begin{aligned} & (m+۱)U(k, h, m+۱) + ۲ \sum_{r=۰}^k \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^m (k-r+۱)U(r, h-s, m-p) \\ & U(k-r+۱, s, p) + \frac{۳}{۴} \sum_{r=۰}^k \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^m (r+۱)U(r+۱, h-s, m-p)(k-r+۱) \\ & (k-r+۲)U(k-r+۲, s, p) + \frac{1}{۴} \sum_{r=۰}^k \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^m U(r, h-s, m-p)(k-r+۱) \\ & (k-r+۲)(k-r+۳)U(k-r+۳, s, p) + \frac{1}{۲} \sum_{r=۰}^k \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^m (h-s+۱) \\ & U(r, h-s+۱, m-p)(s+۱)(k-r+۱)U(k-r+۱, s+۱, p) + \\ & \frac{1}{۴} \sum_{r=۰}^k \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^m (r+۱)U(r+۱, h-s, m-p)(s+۱)(s+۲)U(k-r, s+۲, p) + \\ & \frac{1}{۴} \sum_{r=۰}^k \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^m U(r, h-s, m-p)(k-r+۱)(s+۱)(s+۲) \\ & U(k-r+۱, s+۲, p) = ۰. \end{aligned} \quad (۴.۵)$$

در رابطه فوق m را به $m-۱$ تبدیل کرده و به رابطه بازگشتی زیر می رسیم.

$$\begin{aligned} U(k, h, m) &= \frac{1}{m} \left(۲ \sum_{r=۰}^k \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^{m-۱} (k-r+۱)U(r, h-s, m-۱-p)U(k-r+۱, s, p) - \right. \\ & \left. \frac{۳}{۴} \sum_{r=۰}^k \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^{m-۱} (r+۱)U(r+۱, h-s, m-۱-p)(k-r+۱)(k-r+۲)U(k-r+۲, s, p) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (k-r+1)(k-r+2)(k-r+3)U(r, h-s, m-1-p) \\
 & U(k-r+3, s, p) - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (h-s+1)U(r, h-s+1, m-1-p)(s+1) \\
 & (k-r+1)U(k-r+1, s+1, p) - \frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (r+1)U(r+1, h-s, m-1-p) \\
 & (s+1)(s+2)U(k-r, s+2, p) - \frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (k-r+1)(s+1)(s+2) \\
 & U(r, h-s, m-1-p)U(k-r+1, s+2, p)) \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

از رابطه (۲.۵) داریم:

$$U(k, h, 0) = -\frac{2}{3}\lambda\delta(k)\delta(h) + \frac{1}{3}\frac{(-1)^k(-1)^h}{k!h!}\lambda + \frac{1}{3}\frac{1}{k!h!}\lambda \quad (6.5)$$

با جایگزین کردن رابطه (۶.۵) در رابطه بازگشتی (۵.۵) نتایج به صورت زیر بدست می آیند.

$U(k, h, m) = 0, U(0, 0, 0) = 0$ وقتی $k+h+m$ فرد باشد در غیر این صورت

$$\begin{aligned}
 U(2, 0, 0) &= \frac{\lambda}{3}, U(1, 1, 0) = \frac{2\lambda}{3}, U(0, 2, 0) = \frac{\lambda}{3}, U(2, 2, 0) = \frac{\lambda}{6}, \dots \\
 U(1, 0, 1) &= -\frac{2\lambda^2}{3}, U(0, 1, 1) = -\frac{2\lambda^2}{3}, U(2, 1, 1) = -\frac{\lambda^2}{3}, U(1, 2, 1) = -\frac{\lambda^2}{3}, \dots \\
 U(0, 0, 2) &= \frac{\lambda^3}{3}, U(2, 0, 2) = \frac{\lambda^3}{6}, U(1, 1, 2) = \frac{\lambda^3}{3}, U(0, 2, 2) = \frac{\lambda^3}{6}, U(2, 2, 2) = \frac{\lambda^3}{12}, \dots
 \end{aligned}$$

سرانجام با جایگزین کردن همه $U(k, h, m)$ ها در معادله (۳۶.۲) و ساده کردن، فرم بسته ای از جواب سری به صورت زیر بدست می آید.

$$u(x, y, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} U(k, h, m)x^k y^h t^m = \frac{4}{3}\lambda \sinh^2 \left(\frac{1}{2}(x+y-\lambda t) \right) \quad (7.5)$$

مثال ۲.۲.۵. معادله مثال ۴-۲-۱ را با شرط اولیه متفاوت به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$u_t - (u^2)_x + \frac{1}{\lambda}(u^2)_{xxx} + \frac{1}{\lambda}(u^2)_{yyx} = 0, \quad (۸.۵)$$

$$u(x, y, 0) = \frac{4}{3}\lambda \cosh^2\left(\frac{1}{2}(x+y)\right). \quad (۹.۵)$$

که در آن λ یک ثابت اختیاری است.

روش تبدیل دیفرانسیل سه بعدی را روی معادله (۸.۵) به صورت زیر انجام می دهیم.

$$\begin{aligned} & (m+1)U(k, h, m+1) + 2 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (k-r+1)U(r, h-s, m-p)U(k-r+1, s, p) \\ & + \frac{3}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (r+1)U(r+1, h-s, m-p)(k-r+1)(k-r+2)U(k-r+2, s, p) \\ & + \frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m U(r, h-s, m-p)(k-r+1)(k-r+2)(k-r+3)U(k-r+3, s, p) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (h-s+1)U(r, h-s+1, m-p)(s+1)(k-r+1) \\ & U(k-r+1, s+1, p) + \frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m (r+1)U((r+1, h-s, m-p)(s+1)(s+2) \\ & U(k-r, s+2, p) + \frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^m U(r, h-s, m-p)(k-r+1)(s+1)(s+2) \\ & U(k-r+1, s+2, p) = 0 \end{aligned} \quad (۱۰.۵)$$

در رابطه فوق m را به $(m-1)$ تبدیل کرده و به رابطه بازگشتی زیر می رسیم.

$$\begin{aligned} U(k, h, m) &= \frac{1}{m} \left[2 \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (k-r+1)U(r, h-s, m-1-p)U(k-r+1, s, p) - \right. \\ & \left. \frac{3}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (r+1)U(r+1, h-s, m-1-p)(k-r+1)(k-r+2) \right. \\ & \left. U(k-r+2, s, p) + \frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} U(r, h-s, m-1-p)(k-r+1)(k-r+2)(k-r+3) \right. \\ & \left. U(k-r+3, s, p) + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (h-s+1)U(r, h-s+1, m-1-p)(s+1)(k-r+1) \right. \\ & \left. U(k-r+1, s+1, p) + \frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (r+1)U(r+1, h-s, m-1-p)(s+1)(s+2) \right. \\ & \left. U(k-r, s+2, p) + \frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} U(r, h-s, m-1-p)(k-r+1)(s+1)(s+2) \right. \\ & \left. U(k-r+1, s+2, p) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & U(k-r+2, s, p) - \frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (k-r+1)(k-r+2)(k-r+3) \\
 & U(r, h-s, m-1-p) U(k-r+3, s, p) - \frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (h-s+1) \\
 & U(r, h-s+1, m-1-p)(s+1)(k-r+1) U(k-r+1, s+1, p) - \\
 & \frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (r+1) U(r+1, h-s, m-1-p)(s+1)(s+2) - \\
 & \frac{1}{4} \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (k-r+1)(s+1)(s+2) U(r, h-s, m-1-p) \\
 & U(k-r+1, s+2, p)] \tag{11.5}
 \end{aligned}$$

از شرط اولیه داریم:

$$U(k, h, 0) = -\frac{2}{3} \lambda \delta(k) \delta(h) - \frac{1}{3} \frac{(-1)^k (-1)^h}{k! h!} \lambda - \frac{1}{3} \frac{1}{k! h!} \lambda \tag{12.5}$$

با جایگزین کردن رابطه (12.5) در رابطه بازگشتی (11.5) نتایج به صورت زیر بدست می آیند.

$U(k, h, m) = 0$ وقتی $k+h+m$ فرد باشد، در غیر این صورت داریم

$$\begin{aligned}
 U(0, 0, 0) &= -\frac{4\lambda}{3}, \quad U(2, 0, 0) = -\frac{\lambda}{3}, \quad U(1, 1, 0) = -\frac{2\lambda}{3}, \quad U(0, 2, 0) = -\frac{\lambda}{3}, \dots \\
 U(1, 0, 1) &= \frac{2\lambda^2}{3}, \quad U(0, 1, 1) = \frac{2\lambda^2}{3}, \quad U(2, 1, 1) = \frac{\lambda^2}{3}, \quad U(1, 2, 1) = \frac{\lambda^2}{3}, \dots \\
 U(0, 0, 2) &= -\frac{\lambda^3}{3}, \quad U(2, 0, 2) = -\frac{\lambda^3}{6}, \quad U(1, 1, 2) = -\frac{\lambda^3}{3}, \quad U(0, 2, 2) = -\frac{\lambda^3}{6}, \dots
 \end{aligned}$$

حال با قرار دادن همه $U(k, h, m)$ ها در معادله (36.2) و ساده کردن، فرم بسته جواب سری به صورت زیر بدست می آید.

$$u(x, y, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} U(k, h, m) x^k y^h t^m = -\frac{4}{3} \lambda \cosh^2 \left(\frac{1}{4} (x + y - \lambda t) \right) \tag{13.5}$$

مثال ۳.۲.۵. معادله $ZK(۳, ۳, ۳)$ را که در زیر آمده در نظر بگیرید.

$$u_t - (u^۳)_x + ۲(u^۳)_{xxx} + ۲(u^۳)_{yyx} = ۰, \quad (۱۴.۵)$$

$$u(x, y, ۰) = \sqrt{\frac{۳\lambda}{۲}} \sinh \left[\frac{۱}{۶}(x + y) \right]. \quad (۱۵.۵)$$

که در آن λ یک ثابت اختیاری است.

روش تبدیل دیفرانسیل سه بعدی را روی معادله (۱۴.۵) به صورت زیر انجام می دهیم.

$$\begin{aligned} & (m + ۱)U(k, h, m + ۱) - ۳ \sum_{r=۰}^k \sum_{t=۰}^{k-r} \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^{h-s} \sum_{q=۰}^m \sum_{n=۰}^{m-q} (k - r - t + ۱)U(t, s, q) \\ & U(r, h - s - p, m - q - n)U(k - r - t + ۱, p, n) + ۱۲ \sum_{r=۰}^k \sum_{t=۰}^{k-r} \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^{h-s} \sum_{q=۰}^m \sum_{n=۰}^{m-q} (r + ۱) \\ & U(r + ۱, h - s - p, m - q - n)(t + ۱)U(t + ۱, s, q)(k - r - t + ۱) \\ & U(k - r - t + ۱, p, n) + ۳۶ \sum_{r=۰}^k \sum_{t=۰}^{k-r} \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^{h-s} \sum_{q=۰}^m \sum_{n=۰}^{m-q} U(r, h - s - p, m - q - n) \\ & (t + ۱)U(t + ۱, s, q)(k - r - t + ۲)(k - r - t + ۱)U(k - r - t + ۲, p, n) + \\ & ۶ \sum_{r=۰}^k \sum_{t=۰}^{k-r} \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^{h-s} \sum_{q=۰}^m \sum_{n=۰}^{m-q} U(r, h - s - p, m - q - n)U(t, s, q)(k - r - t + ۳) \\ & (k - r - t + ۲)(k - r - t + ۱)U(k - r - t + ۳, p, n) + \\ & ۱۲ \sum_{r=۰}^k \sum_{t=۰}^{k-r} \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^{h-s} \sum_{q=۰}^m \sum_{n=۰}^{m-q} U(r + ۱, h - s - p, m - q - n)(s + ۱)U(t, s + ۱, q)(p + ۱) \\ & U(k - r - t, p + ۱, n) + ۲۴ \sum_{r=۰}^k \sum_{t=۰}^{k-r} \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^{h-s} \sum_{q=۰}^m \sum_{n=۰}^{m-q} U(r, h - s - p, m - q - n)(s + ۱) \\ & U(t, s + ۱, q)(k - r - t + ۱)(p + ۱)U(k - r - t + ۱, p + ۱, n) + \\ & ۱۲ \sum_{r=۰}^k \sum_{t=۰}^{k-r} \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^{h-s} \sum_{q=۰}^m \sum_{n=۰}^{m-q} (t + ۱)U(t + ۱, s, q)(p + ۲)(p + ۱)U(k - r - t, p + ۲, n) \\ & U(r, h - s - p, m - q - n) + ۶ \sum_{r=۰}^k \sum_{t=۰}^{k-r} \sum_{s=۰}^h \sum_{p=۰}^{h-s} \sum_{q=۰}^m \sum_{n=۰}^{m-q} U(r, h - s - p, m - q - n) \\ & U(t, s, q)(p + ۳)(p + ۲)(p + ۱)U(k - r - t, p + ۳, n) = ۰, \end{aligned} \quad (۱۶.۵)$$

در رابطه فوق m را به $(m-1)$ تبدیل کرده و به رابطه بازگشتی زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned}
 U(k, h, m) &= \frac{1}{m} [\mathfrak{I} \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^{m-1} \sum_{n=\circ}^{m-1-q} (k-r-t+1) U(r, h-s-p, m-1 \\
 &\quad -q-n) U(t, s, q) U(k-r-t+1, p, n) - \mathfrak{I}^2 \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^{m-1} \sum_{n=\circ}^{m-1-q} (r+1) \\
 &\quad U(r+1, h-s-p, m-1-q-n)(t+1) U(t+1, s, q)(k-r-t+1) \\
 &\quad U(k-r-t+1, p, n) - \mathfrak{I}^6 \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^{m-1} \sum_{n=\circ}^{m-1-q} U(r, h-s-p, m-1-q-n) \\
 &\quad (t+1) U(t+1, s, q)(k-r-t+\mathfrak{I})(k-r-t+1) U(k-r-t+\mathfrak{I}, p, n) \\
 &\quad - \mathfrak{I}^6 \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^{m-1} \sum_{n=\circ}^{m-1-q} U(r, h-s-p, m-1-q-n) U(t, s, q)(k-r-t+\mathfrak{I}) \\
 &\quad (k-r-t+\mathfrak{I})(k-r-t+1) U(k-r-t+\mathfrak{I}, p, n) \\
 &\quad - \mathfrak{I}^2 \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^{m-1} \sum_{n=\circ}^{m-1-q} (r+1) U(r+1, h-s-p, m-1-q-n)(s+1) \\
 &\quad U(t, s+1, q)(p+1) U(k-r-t, p+1, n) \\
 &\quad - \mathfrak{I}^4 \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^{m-1} \sum_{n=\circ}^{m-1-q} U(r, h-s-p, m-1-q-n)(s+1) U(t, s+1, q) \\
 &\quad (k-r-t+1)(p+1) U(k-r-t+1, p+1, n) \\
 &\quad - \mathfrak{I}^2 \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^{m-1} \sum_{n=\circ}^{m-1-q} U(r, h-s-p, m-1-q-n)(t+1) U(t+1, s, q) \\
 &\quad (p+\mathfrak{I})(p+1) U(k-r-t, p+\mathfrak{I}, n) \\
 &\quad - \mathfrak{I}^6 \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^{m-1} \sum_{n=\circ}^{m-1-q} U(r, h-s-p, m-1-q-n) U(t, s, q)(p+\mathfrak{I})(p+\mathfrak{I}) \\
 &\quad (p+1) U(k-r-t, p+\mathfrak{I}, n)], \tag{۱۷.۵}
 \end{aligned}$$

همچنین از شرط اولیه داریم:

$$U(k, h, \circ) = -\frac{1}{\mathfrak{I}} \sqrt{\frac{\mathfrak{I}}{\mathfrak{I}}} \sqrt{\lambda} \left(\frac{(\frac{-1}{\mathfrak{I}})^k (\frac{-1}{\mathfrak{I}})^h}{k!h!} - \frac{(\frac{1}{\mathfrak{I}})^k (\frac{1}{\mathfrak{I}})^h}{k!h!} \right) \tag{۱۸.۵}$$

با جایگزین کردن رابطه (۱۸.۵) در رابطه بازگشتی (۱۷.۵) نتایج به صورت زیر بدست می آیند.

• وقتی $U(k, h, m) = 0$ زوج باشد، در غیر این صورت داریم

$$\begin{aligned} U(1, 0, 0) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{6}}, & U(0, 1, 0) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{6}}, \\ U(2, 1, 0) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{144\sqrt{6}}, & U(1, 2, 0) &= \frac{\sqrt{\lambda}}{144\sqrt{6}}, \dots \\ U(0, 0, 1) &= -\frac{\lambda^{\frac{2}{3}}}{2\sqrt{6}}, & U(2, 0, 1) &= -\frac{\lambda^{\frac{2}{3}}}{144\sqrt{6}}, & U(1, 1, 1) &= -\frac{\lambda^{\frac{2}{3}}}{72\sqrt{6}}, \\ U(0, 2, 1) &= -\frac{\lambda^{\frac{2}{3}}}{144\sqrt{6}}, & U(2, 2, 1) &= -\frac{\lambda^{\frac{2}{3}}}{10368\sqrt{6}}, \dots \\ U(1, 0, 2) &= \frac{\lambda^{\frac{5}{3}}}{144\sqrt{6}}, & U(0, 1, 2) &= \frac{\lambda^{\frac{5}{3}}}{144\sqrt{6}}, \\ U(2, 1, 2) &= \frac{\lambda^{\frac{5}{3}}}{10368\sqrt{6}}, & U(1, 2, 2) &= \frac{\lambda^{\frac{5}{3}}}{10368\sqrt{6}}, \dots \end{aligned}$$

حال با قرار دادن همه $U(k, h, m)$ ها در معادله (۳۶.۲)، فرم بسته جواب سری به صورت زیر بدست می آید.

$$u(x, y, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} U(k, h, m) x^k y^h t^m = \sqrt{\frac{3\lambda}{2}} \sinh \left[\frac{1}{6}(x + y - \lambda t) \right] \quad (19.5)$$

مثال ۴.۲.۵. معادله مثال ۳.۲.۴ را با شرط اولیه متفاوت به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$u_t - (u^3)_x + 2(u^3)_{xxx} + 2(u^3)_{yyx} = 0, \quad (20.5)$$

$$u(x, y, 0) = \sqrt{-\frac{3\lambda}{2}} \cosh \left[\frac{1}{6}(x + y) \right]. \quad (21.5)$$

که در آن λ یک ثابت اختیاری است.

روش تبدیل دیفرانسیل سه بعدی را روی معادله (۲۰.۵) انجام می دهیم.

$$\begin{aligned}
& (m+1)U(k, h, m+1) - \Im \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^m \sum_{n=\circ}^{m-q} U(r, h-s-p, m-q-n)U(t, s, q) \\
& (k-r-t+1)U(k-r-t+1, p, n) + \Im \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^m \sum_{n=\circ}^{m-q} (t+1)U(t+1, s, q) \\
& (r+1)U(r+1, h-s-p, m-q-n)(k-r-t+1)U(k-r-t+1, p, n) \\
& + \Im \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^m \sum_{n=\circ}^{m-q} U(r, h-s-p, m-q-n)(t+1)U(t+1, s, q) \\
& (k-r-t+2)(k-r-t+1)U(k-r-t+2, p, n) + \Im \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^m \sum_{n=\circ}^{m-q} \\
& U(t, s, q)U(r, h-s-p, m-q-n)(k-r-t+3)(k-r-t+2)(k-r-t+1) \\
& U(k-r-t+3, p, n) + \Im \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^m \sum_{n=\circ}^{m-q} (s+1)U(t, s+1, q) \\
& (r+1)U(r+1, h-s-p, m-q-n)(p+1)U(t, s, q)(k-r-t+3)(k-r-t+2) \\
& (k-r-t+1)U(k-r-t+3, p, n) + \Im \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^m \sum_{n=\circ}^{m-q} (s+1)U(t, s+1, q) \\
& (p+1)U(k-r-t, p+1, n)(r+1)U(r+1, h-s-p, m-q-n) + \\
& \Im \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^m \sum_{n=\circ}^{m-q} U(r, h-s-p, m-q-n)(s+1)U(t, s+1, q) \\
& (k-r-t+1)(p+1)U(k-r-t+1, p+1, n) + \Im \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^m \sum_{n=\circ}^{m-q} \\
& U(r, h-s-p, m-q-n)(t+1)U(t+1, s, q)(p+2)(p+1)U(k-r-t, p+2, n) \\
& + \Im \sum_{r=\circ}^k \sum_{t=\circ}^{k-r} \sum_{s=\circ}^h \sum_{p=\circ}^{h-s} \sum_{q=\circ}^m \sum_{n=\circ}^{m-q} U(r, h-s-p, m-q-n)U(t, s, q)(p+3)(p+2) \\
& (p+1)U(k-r-t, p+3, n) = \circ, \tag{۲۲.۵}
\end{aligned}$$

در رابطه فوق m را به $(m-1)$ تبدیل کرده و به رابطه بازگشتی زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned}
 U(k, h, m) = & \frac{1}{m} \left[\sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} U(t, s, q) U(k-r-t+1, p, n) (k-r-t+1) \right. \\
 & U(r, h-s-p, m-1-q-n) - \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} (r+1)(t+1) \\
 & U(r+1, h-s-p, m-1-q-n) U(t+1, s, q) (k-r-t+1) U(k-r-t+1, p, n) - \\
 & \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} U(r, h-s-p, m-1-q-n) (t+1) U(t+1, s, q) \\
 & (k-r-t+2)(k-r-t+1) U(k-r-t+2, p, n) - \\
 & \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} U(r, h-s-p, m-1-q-n) U(t, s, q) (k-r-t+3) \\
 & (k-r-t+2)(k-r-t+1) U(k-r-t+3, p, n) - \\
 & \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} (r+1) U(r+1, h-s-p, m-1-q-n) (s+1) \\
 & U(t, s+1, q) (p+1) U(k-r-t, p+1, n) - \\
 & \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} U(r, h-s-p, m-1-q-n) (s+1) U(t, s+1, q) \\
 & (k-r-t+1)(p+1) U(k-r-t+1, p+1, n) - \\
 & \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} U(r, h-s-p, m-1-q-n) (t+1) U(t+1, s, q) (p+2) \\
 & (p+1) U(k-r-t, p+2, n) - \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} U(t, s, q) \\
 & \left. U(r, h-s-p, m-1-q-n) (p+3)(p+2)(p+1) U(k-r-t, p+3, n) \right]. \quad (23.5)
 \end{aligned}$$

از شرط اولیه داریم:

$$U(k, h, 0) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \sqrt{-\frac{3}{2}} \sqrt{\lambda} \left(\frac{\left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}\right)^k \left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}\right)^h}{k!h!} + \frac{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^h}{k!h!} \right). \quad (24.5)$$

با جایگزین کردن رابطه (24.5) در رابطه بازگشتی (23.5) نتایج به صورت زیر بدست می

آیند.

$U(k, h, m) = 0$ وقتی $k + h + m$ فرد باشد، در غیر این صورت داریم

$$\begin{aligned} U(0, 0, 0) &= \sqrt{\frac{-3\lambda}{2}}, \quad U(2, 0, 0) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{24\sqrt{6}}, \quad U(1, 1, 0) = -\frac{\sqrt{-\lambda}}{12\sqrt{6}}, \\ U(0, 2, 0) &= \frac{\sqrt{-\lambda}}{24\sqrt{6}}, \quad U(2, 2, 0) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{1728\sqrt{6}}, \dots \\ U(1, 0, 1) &= \frac{(-\lambda)^{3/2}}{12\sqrt{6}}, \quad U(0, 1, 1) = \frac{(-\lambda)^{3/2}}{12\sqrt{6}}, \quad U(2, 1, 1) = \frac{(-\lambda)^{3/2}}{864\sqrt{6}}, \\ U(1, 2, 1) &= \frac{(-\lambda)^{3/2}}{864\sqrt{6}}, \dots \\ U(0, 0, 2) &= \frac{(-\lambda)^{5/2}}{24\sqrt{6}}, \quad U(2, 0, 2) = \frac{(-\lambda)^{5/2}}{1728\sqrt{6}}, \quad U(1, 1, 2) = \frac{(-\lambda)^{5/2}}{864\sqrt{6}}, \\ U(0, 2, 2) &= \frac{(-\lambda)^{5/2}}{1728\sqrt{6}}, \quad U(2, 2, 2) = \frac{(-\lambda)^{5/2}}{124416\sqrt{6}}, \dots \end{aligned}$$

حال با قرار دادن همه $U(k, h, m)$ ها در معادله (۳۶.۲) و انجام ساده سازی هایی، فرم بسته

جواب سری به صورت زیر بدست می آید.

$$u(x, y, t) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} U(k, h, m) x^k y^h t^m = \sqrt{-\frac{3\lambda}{2}} \cosh \left[\frac{1}{6}(x + y - \lambda t) \right] \quad (25.5)$$

فصل ۶

حل معادله کوراماتو-سیواشینسکی به
روش تبدیل دیفرانسیل

۱.۶ مقدمه

در این فصل ابتدا معادله کوراماتو-سیواشینسکی تعمیم یافته^۱ را به صورت زیر معرفی می کنیم [۴۹]-[۵۰].

$$u_t + uu_x + \alpha u_{xx} + \beta u_{xxx} + \gamma u_{xxxx} = 0 \quad (۱.۶)$$

که در آن α ، β و γ ثابت های حقیقی هستند. همچنین معادله (۱.۶) معادله کا دی وی-برگرز-کوراماتو^۲ نیز نامیده می شود. معادله کوراماتو-سیواشینسکی تعمیم یافته یکی از مهمترین معادلات دیفرانسیل جرئی غیر خطی است که جایگاه ویژه ای در میان معادلاتی که فرایندهای فیزیکی مربوط به حرکات آشفته و سایر سیستم های ناپایدار را توصیف می کنند، دارا می باشد. این معادلات می توانند برای توصیف امواج به کار روند برای مثال امواج طولانی حاصل از حرکت سیال ویسکوز^۳ در طول یک سطح شیب دار، امواج آهسته ناپایدار در پلاسما و امواج حاصل از تنش در یک محیط متخلخل.

برای $\beta = 0$ معادله (۱.۶) معادله کوراماتو-سیواشینسکی نامیده می شود که یک معادله چرخشی غیر خطی استاندارد است که در زمینه های گوناگون فیزیکی و دیگر امواج طولانی در فیلم های باریک، امواج طولانی که بین دو سیال چسبناک وصل می شوند بوجود می آید. برای $\alpha = \gamma = 0$ و $\beta = 0$ مدل هایی از ساختمان الگو ها روی ناپایداری تابش در مقابل فیلم های هیدرودینامیکی نازک نمایش داده می شود.

معادله کوراماتو-سیواشینسکی به صورت عددی توسط نویسندگان زیادی مورد مطالعه قرار گرفته است [۵۱]-[۵۴]. در سال های اخیر روش های گوناگونی برای ایجاد کردن

^۱Kuramoto-Sivashinsky equation

^۲KdV-Burgers-Kuramoto equation(KBK)

^۳viscous Fluid

جواب های دقیق معادله کوراماتو-سیواشینسکی ارائه شده است. همچنین روش های زیادی برای یافتن جواب های دقیق بعضی از معادلات حرکت غیرخطی ایجاد شدند. اخیرا جستجوی مستقیمی برای راه حل های دقیق از معادلات دیفرانسیل غیرخطی بیشتر مورد توجه قرار گرفته است که البته این روش ها بیشتر مدیون دسترسی به نرم افزارهای کامپیوتری مانند متمتیکاست که به ما اجازه می دهد بعضی از محاسبات جبری پیچیده را انجام دهیم. این روش ها به خوبی به ما کمک می کنند که با بکارگیری راه حل های دقیق و جدید به حل این دسته از معادلات بپردازیم.

۲.۶ مثال های عددی

در این بخش روش تبدیل دیفرانسیل برای حل دو معادله خاص به نام کوراماتو-سیواشینسکی و کوراماتو-سیواشینسکی تعمیم یافته با شرایط اولیه خاص بررسی می شود. نتایج بدست آمده سادگی و کارایی این روش را آشکار می سازد.

مثال ۱.۲.۶. معادله کوراماتو-سیواشینسکی تعمیم یافته را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$u_t + uu_x + u_{xx} + 4u_{xxx} + u_{xxxx} = 0, \quad (2.6)$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = 15 - 15 \left[\tanh\left(\frac{1}{4}(x + 10)\right) + \tanh^2\left(\frac{1}{4}(x + 10)\right) - \tanh^3\left(\frac{1}{4}(x + 10)\right) \right] \quad (3.6)$$

با بکاربردن روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی روی معادله (۲.۶) داریم:

$$\begin{aligned} & (h+1)U(k, h+1) + \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)U(k-r+1, s)U(r, h-s) + \\ & (k+1)(k+2)U(k+2, h) + 4(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3, h) + \\ & (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)U(k+4, h) = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

در معادله فوق h را به $(h-1)$ تبدیل کرده و به رابطه بازگشتی زیر می‌رسیم.

$$U(k, h) = \frac{1}{h} \left[- \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^{h-1} (k-r+1) U(k-r+1, s) U(r, h-1-s) - (k+1)(k+2) \right. \\ \left. U(k+2, h-1) - 4(k+1)(k+2)(k+3) U(k+3, h-1) - \right. \\ \left. (k+1)(k+2)(k+3)(k+4) U(k+4, h-1) \right]. \quad (5.6)$$

با جایگزین کردن رابطه (۳.۶) در رابطه بازگشتی (۵.۶) نتایج به صورت زیر حاصل می‌شوند.

$$U(0, 0) = 2/47305 \times 10^{-7}, \quad U(1, 0) = -4/94576 \times 10^{-7}, \\ U(2, 0) = 4/94525 \times 10^{-7}, \quad U(3, 0) = -3/29633 \times 10^{-7}, \dots \\ U(0, 1) = 2/96745 \times 10^{-6}, \quad U(1, 1) = -5/9343 \times 10^{-6}, \\ U(2, 1) = 5/93339 \times 10^{-6}, \quad U(3, 1) = -3/95469 \times 10^{-6}, \dots \\ U(0, 2) = 0/00000178029, \quad U(1, 2) = -0/00000356004, \\ U(2, 2) = 0/00000355922, \quad U(3, 2) = -0/00000237199, \dots$$

حال با جایگزین کردن مقادیر $U(k, h)$ در رابطه (۱۵.۲) فرم بسته از جواب سری به صورت زیر بدست می‌آید.

$$u(x, t) = 15 - 15 \left[\tanh\left(\frac{1}{\sqrt{}}(x - 6t + 10)\right) + \tanh^2\left(\frac{1}{\sqrt{}}(x - 6t + 10)\right) - \right. \\ \left. \tanh^3\left(\frac{1}{\sqrt{}}(x - 6t + 10)\right) \right]$$

که این جواب دقیق مسئله است [۵۵].

مثال ۲.۲.۶. در این مثال معادله (۱.۶) را به ازای $\alpha = \gamma = 1$ و $\beta = 0$ در نظر می‌گیریم.

$$u_t + uu_x + u_{xx} + u_{xxx} = 0, \quad (6.6)$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = 5 + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} \left[-9 \tanh\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{19}}(x + 12)\right) + 11 \tanh^3\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{19}}(x + 12)\right) \right] \quad (7.6)$$

با بکاربردن روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی روی معادله (۶.۶) داریم:

$$(h+1)U(k, h+1) + \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)U(k-r+1, s)U(r, h-s) + \\ (k+1)(k+2)U(k+2, h) + (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)U(k+4, h) = 0 \quad (8.6)$$

در معادله فوق h را به $(h-1)$ تبدیل کرده و به رابطه بازگشتی زیر می‌رسیم.

$$U(k, h) = \frac{1}{h} \left[- \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^{h-1} (k-r+1)U(k-r+1, s)U(r, h-1-s) - (k+1)(k+2) \right. \\ \left. U(k+2, h-1) - (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)U(k+4, h-1) \right] \quad (9.6)$$

باجایگزینی رابطه (۷.۶) در رابطه بازگشتی (۹.۶) نتایج به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$U(0, 0) = 6/19828, U(1, 0) = 0/00237401, U(2, 0) = -0/000902442,$$

$$U(3, 0) = 0/000228513, \dots$$

$$U(0, 1) = -0/0118701, U(1, 1) = 0/00902442, U(2, 1) = -0/0034277,$$

$$U(3, 1) = 0/000866533, \dots$$

$$U(0, 2) = -0/022561, U(1, 2) = 0/0171385, U(2, 2) = -0/006499,$$

$$U(3, 2) = 0/00163758, \dots$$

حال با جایگزین کردن مقادیر $U(k, h)$ در رابطه (۱۵.۲) فرم بسته از جواب سری به صورت

زیر بدست می آید.

$$u(x, t) = 5 + \frac{15}{19} \sqrt{\frac{11}{19}} [-9 \tanh(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{19}}(x - 5t + 12)) + 11 \tanh^3(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{11}{19}}(x - 5t + 12))]$$

که این جواب دقیق مسئله است [۵۸]-[۵۶].

مثال ۳.۲.۶. در این مثال معادله (۱.۶) را به ازای $\alpha = -1$ ، $\beta = 0$ و $\gamma = 1$ به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$u_t + uu_x - u_{xx} + u_{xxx} = 0 \quad (10.6)$$

با شرط اولیه

$$u(x, 0) = 5 + \frac{15}{19\sqrt{19}} \left[-3 \tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{19}}(x + 25)\right) + \tanh^3\left(\frac{1}{2\sqrt{19}}(x + 25)\right) \right] \quad (11.6)$$

حال روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی را روی معادله (۱۰.۶) بکاربرده و داریم:

$$(h+1)U(k, h+1) + \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h (k-r+1)U(k-r+1, s)U(r, h-s) - (k+1)(k+2)U(k+2, h) + (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)U(k+4, h) = 0 \quad (12.6)$$

در معادله فوق h را به $(h-1)$ تبدیل کرده و به رابطه بازگشتی زیر می رسیم.

$$U(k, h) = \frac{1}{h} \left[- \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^{h-1} (k-r+1)U(k-r+1, s)U(r, h-1-s) + (k+1)(k+2)U(k+2, h-1) - (k+1)(k+2)(k+3)(k+4)U(k+4, h-1) \right] \quad (13.6)$$

رابطه (۱۱.۶) را در رابطه بازگشتی (۱۳.۶) جایگزین کرده و لذا مقادیر زیر بدست می آیند.

$$U(0, 0) = 4/63779, \quad U(1, 0) = -0/0000102682,$$

$$U(2, 0) = 2/34052 \times 10^{-6}, \quad U(3, 0) = -3/54507 \times 10^{-7}, \dots$$

$$U(0, 1) = 0/000051341, \quad U(1, 1) = -0/0000234052,$$

$$U(2, 1) = 5/31761 \times 10^{-6}, \quad U(3, 1) = -8/01471 \times 10^{-7}, \dots$$

$$U(0, 2) = 0/000058513, \quad U(1, 2) = -0/0000265881,$$

$$U(2, 2) = 6/01103 \times 10^{-6}, \quad U(3, 2) = -8/991 \times 10^{-7}, \dots$$

با جایگزین کردن مقادیر $U(k, h)$ در رابطه (۱۵.۲) فرم بسته از جواب سری به صورت زیر بدست می آید.

$$u(x, t) = 5 + \frac{15}{19\sqrt{19}} \left[-3 \tanh\left(\frac{1}{2\sqrt{19}}(x - 5t + 25)\right) + \tanh^3\left(\frac{1}{2\sqrt{19}}(x - 5t + 25)\right) \right]$$

که این جواب دقیق مسئله است [۵۵].

فصل ۷

نتیجه گیری

در این پایان نامه روش تبدیل دیفرانسیل برای حل معادلات با مشتقات جزئی خطی و غیر خطی یک و دو بعدی استفاده شده است. چون این روش یک فرایند تکراری برای بدست آوردن جواب سری تیلور معادله دیفرانسیل مفروض است مشتقات مستقیماً محاسبه نمی شوند به همین دلیل در مقایسه با روش های آدومیان، هموتویی و تکرار وردشی حجم محاسبات بسیار کاهش می یابد و بدون نیاز به خطی سازی، گسسته سازی و ایجاد آشفتگی در مسئله به جوابی قابل قبول با دقت بالا می رسد. در این پایان نامه برای نوشتن برنامه کامپیوتری روش تبدیل دیفرانسیل از نرم افزار *Mathematica* استفاده شده است.

پیوست

برنامه های کامپیوتری نوشته شده با نرم افزار Mathematica

معادله فوکر-پلانک
مثال ۳.۲.۳:

$$\begin{aligned}\delta[k_{-}/;k == 0] &:= 1; \delta[k_{-}/;k \neq 0] := 0; \\ \delta[h_{-}/;h == 0] &:= 1; \delta[h_{-}/;h \neq 0] := 0; \\ \delta[k_{-}, h_{-}] &:= \delta[k] \delta[h]\end{aligned}$$

$$U[k_{-}, 0] := \delta[k] + \delta[k - 1]$$

$$U[k_{-}, h_{-}] :=$$

$$\begin{aligned}& \frac{1}{h} * ((1 + k)U[1 + k, -1 + h] + \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^{h-1} \delta[r - 1, h - 1 - s] * (k - r + 1)U[k - r + 1, s] + \\ & \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^{h-1} \sum_{p=0}^{h-s-1} \frac{1}{(s)!} * \delta[r - 2, h - 1 - s - p] * (k - r - t + 2) * (k - r - t + \\ & 1) * U[k - r - t + 2, p])\end{aligned}$$

$$\text{Collect}[\text{Sum}[U[m, n]x^m t^n, \{n, 0, 4\}, \{m, 0, 4\}], x]$$

$$\text{Collect}[\text{Series}[e^t * (1 + x), \{x, 0, 4\}, \{t, 0, 4\}], x]$$

مثال ۴.۲.۳:

$$\begin{aligned}\delta[k_{-}/;k == 0] &:= 1; \delta[k_{-}/;k \neq 0] := 0; \\ \delta[k_{-}, h_{-}, m_{-}] &:= \delta[k] \delta[h] \delta[m]\end{aligned}$$

$$U[k_{-}, h_{-}, 0] := \delta[h] \delta[k - 1];$$

$$\{U[0, 0, 0], U[1, 0, 0], U[2, 0, 0], U[3, 0, 0], U[4, 0, 0], U[5, 0, 0], U[6, 0, 0]\}$$

$$\begin{aligned}
& U[k-,h-,m-]:= \\
& \frac{1}{m}(-2U[k,h,m-1]-\sum_{r=0}^k\sum_{s=0}^h\sum_{p=0}^{m-1}\delta[k-r,s-1,p](h-s+1)U[r,h-s+1,m-1-p]+ \\
& \sum_{r=0}^k\sum_{s=0}^h\sum_{p=0}^{m-1}\delta[k-r,s-2,p](h-s+1)(h-s+2)U[r,h-s+2,m-1-p]+ \\
& 3\sum_{r=0}^k\sum_{s=0}^h\sum_{p=0}^{m-1}\delta[k-r-1,s,p](r+1)U[r+1,h-s,m-1-p]+2(k+1)(h+ \\
& 1)U[k+1,h+1,m-1]+ \\
& \sum_{r=0}^k\sum_{s=0}^h\sum_{p=0}^{m-1}\delta[k-r-2,s,p](r+1)(r+2)U[r+2,h-s,m-1-p])
\end{aligned}$$

$$\text{Sum}[U[m,n,z]x^my^nt^z,\{m,0,3\},\{n,0,3\},\{z,0,3\}]$$

$$\text{Series}[x * e^t, \{x, 0, 4\}, \{t, 0, 4\}]$$

معادله فرنبرگ - ویتهم:
مثال ۱.۳.۴:

$$\begin{aligned}
& \text{Clear}[f,g,U,x,k,r]; \\
& g[k-,x-]:g[k,x]= \\
& (-D[U[k-1,x],x]-\text{Sum}[U[k-r-1,x]D[U[r,x],x],\{r,0,k-1\}]+\text{Sum}[U[k-1-r,x] \\
& D[U[r,x],\{x,3\}],\{r,0,k-1\}]+3\text{Sum}[D[U[k-1-r,x],x]D[U[r,x],x],\{r,0,k- \\
& 1\}])//\text{Simplify}
\end{aligned}$$

$$U[0,x-]=\text{Exp}\left[\frac{1}{2}*x\right]$$

$$U[k-,0]:= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$$

$$\{U[0,0],U[1,0],U[2,0],U[3,0],U[4,0]\}$$

$$eq:=U[k,x]-D[U[k,x],x,x]==1/k\ g[k,x];$$

$$g\ [1,x]$$

$$m[k-]:=DSolve[y[x]-y''[x]==1/k\ g[k,x],y[x],x]$$

$$m[1]$$

$$U[1,x]:=-\frac{2e^{x/2}}{3}$$

$$U[k-,1]:=\frac{-2}{3}*\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$$

$$U[0,1],\ U[1,1],\ U[2,1],\ U[3,1]$$

$$\frac{-2}{3} * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!} / .k \rightarrow 0$$

$$m[2]$$

$$U[2,x] := \frac{2e^{x/2}}{9}$$

$$U[k-,2] := \frac{2}{9} * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$$

$$\{U[0,2], U[1,2], U[2,2], U[3,2]\}$$

$$m[3]$$

$$U[3,x] := -\frac{4e^{x/2}}{81}$$

$$U[k-,3] := -\frac{4}{81} * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$$

$$\{U[0,3], U[1,3], U[2,3], U[3,3]\}$$

$$m[4]$$

$$U[4,x] := \frac{2e^{x/2}}{243}$$

$$U[k-,4] := -\frac{4}{81} * \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$$

$$\{U[0,4], U[1,4], U[2,4], U[3,4]\}$$

$$s = \text{Collect} \left[\text{Sum} \left[U[k, h] x^k t^h, \{k, 0, 3\}, \{h, 0, 3\} \right], t \right]$$

$$k = \text{Normal} \left[\text{Series} \left[\text{Exp} \left[\frac{1}{2} * x - \frac{2}{3} * t \right], \{x, 0, 3\}, \{t, 0, 3\} \right] \right]$$

معادله زاخوارزف - کازنتسوف:
مثال ۱.۲.۵:

$$\text{TrigToExp} \left[\text{TrigExpand} \left[\frac{4}{3} * \lambda * \text{Sinh}[1/2(x + y)]^2 \right] \right]$$

$$\delta[k-; k == 0] := 1; \delta[k-; k \neq 0] := 0;$$

$$U[k-, h-, 0] = -\frac{2}{3} * \lambda * \delta[k] \delta[h] + \frac{1}{3} * \frac{(-1)^k (-1)^h}{k! h!} * \lambda + \frac{1}{3} * \frac{1}{k! h!} * \lambda$$

$$\text{Collect}[\text{Sum}[U[m, n, 0]x^m y^n, \{m, 0, 3\}, \{n, 0, 3\}], \lambda]$$

$$\text{Series}\left[\frac{4}{3} * \lambda * \text{Sinh}[1/2(x+y)]^2, \{x, 0, 3\}, \{y, 0, 3\}\right] // \text{Normal} // \text{Collect}[\#, \lambda] \&$$

$$\begin{aligned} U[k_{-}, h_{-}, m_{-}] := & \frac{1}{m} * (2 * \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (k-r+1)U[r, h-s, m-1-p]U[k-r+1, s, p] - \\ & \frac{3}{4} * \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (r+1)U[r+1, h-s, m-1-p](k-r+1)(k-r+2)U[k-r+2, s, p] - \\ & \frac{1}{4} * \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (k-r+1)(k-r+2)(k-r+3)U[r, h-s, m-1-p]U[k-r+3, s, p] \\ & - \frac{1}{2} * \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (h-s+1)U[r, h-s+1, m-1-p](s+1)(k-r+1)U[k-r+1, s+1, p] - \\ & \frac{1}{4} * \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (r+1)U[r+1, h-s, m-1-p](s+1)(s+2)U[k-r, s+2, p] - \\ & \frac{1}{4} * \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{m-1} (k-r+1)(s+1)(s+2)U[r, h-s, m-1-p]U[k-r+1, s+2, p]) \end{aligned}$$

$$\text{Collect}[\text{Sum}[U[m, n, 1]x^m y^n t, \{m, 0, 3\}, \{n, 0, 3\}], \lambda]$$

$$\text{Collect}[\text{Sum}[U[m, n, 2]x^m y^n t^2, \{m, 0, 3\}, \{n, 0, 3\}], \lambda]$$

$$\text{Collect}[\text{Series}\left[\frac{4}{3} * \lambda * \text{Sinh}[1/2(x+y-\lambda * t)]^2, \{x, 0, 3\}, \{y, 0, 3\}, \{t, 0, 3\}\right], \{\lambda, t\}]$$

مثال ۳.۲.۵ :

$$\text{TrigToExp}\left[\text{TrigExpand}\left[\sqrt{\frac{3\lambda}{2}} \text{Sinh}\left[\frac{1}{6}(x+y)\right]\right]\right]$$

$$U[k_{-}, h_{-}, 0] := -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \sqrt{\lambda} \left(\frac{\left(\frac{-1}{6}\right)^k \left(\frac{-1}{6}\right)^h}{k!h!} - \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{6}\right)^h}{k!h!} \right)$$

$$\text{Collect}[\text{Sum}[U[m, n, 0]x^m y^n, \{m, 0, 3\}, \{n, 0, 3\}], \lambda]$$

$$\text{Series}\left[\sqrt{\frac{3\lambda}{2}} \text{Sinh}\left[\frac{1}{6}(x+y)\right], \{x, 0, 3\}, \{y, 0, 3\}\right] // \text{Normal} // \text{Collect}[\#, \lambda] \&$$

$$\begin{aligned} U[k_{-}, h_{-}, m_{-}] := & \frac{1}{m} * (3 * \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} (k-r-t+1) \\ & U[r, h-s-p, m-1-q-n]U[t, s, q]U[k-r-t+1, p, n] - 12 * \\ & \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} (r+1) \\ & U[r+1, h-s-p, m-1-q-n](t+1)U[t+1, s, q](k-r-t+1)U[k-r-t+1, p, n] - 36 * \\ & \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} U[r, h-s-p, m-1-q-n](t+1)U[t+1, s, q] \\ & (k-r-t+2)(k-r-t+1)U[k-r-t+2, p, n] - 6 * \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} \\ & U[r, h-s-p, m-1-q-n]U[t, s, q](k-r-t+3)(k-r-t+2)(k-r-t+1)U[k-r-t+3, p, n] \\ & - 12 * \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} (r+1)U[r+1, h-s-p, m-1-q-n](s+1) \\ & U[t, s+1, q](p+1)U[k-r-t, p+1, n] - 24 * \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} \\ & U[r, h-s-p, m-1-q-n](s+1)U[t, s+1, q](k-r-t+1)(p+1)U[k-r-t+1, p+1, n]) \end{aligned}$$

$$-12 * \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} U[r, h-s-p, m-1-q-n](t+1)U[t+1, s, q] \\ (p+2)(p+1)U[k-r-t, p+2, n] - 6 * \sum_{r=0}^k \sum_{t=0}^{k-r} \sum_{s=0}^h \sum_{p=0}^{h-s} \sum_{q=0}^{m-1} \sum_{n=0}^{m-1-q} U[r, h-s-p, m-1-q-n]U[t, s, q](p+3)(p+2)(p+1)U[k-r-t, p+3, n]$$

$$\text{Collect}[\text{Sum}[U[m, n, 1]x^m y^n t, \{m, 0, 3\}, \{n, 0, 3\}], \lambda]$$

$$\text{Collect}[\text{Sum}[U[m, n, 2]x^m y^n t^2, \{m, 0, 3\}, \{n, 0, 3\}], \lambda]$$

$$\text{Collect}\left[\text{Series}\left[\sqrt{\frac{3\lambda}{2}}\text{Sinh}\left[\frac{1}{6}(x+y-\lambda t)\right], \{x, 0, 3\}, \{y, 0, 3\}, \{t, 0, 3\}\right], \{\lambda, t\}\right]$$

معادله کوراماتو- سیواشینسکی:
مثال ۱.۲.۶:

$$l = \text{Series}\left[5 + \frac{15}{19} * \sqrt{\frac{11}{19}} \left(-9 * \text{Tanh}\left[\frac{1}{2} * \sqrt{\frac{11}{19}} * (x+12)\right] + 11 * \text{Tanh}\left[\frac{1}{2} * \sqrt{\frac{11}{19}} * (x+12)\right]^3\right), \{x, 0, 20\} // N\right]$$

$$U[k_, 0] := \text{SeriesCoefficient}[l, k]$$

$$N[\{U[0, 0], U[1, 0], U[2, 0], U[3, 0], U[4, 0]\}]$$

$$U[k_, h_] :=$$

$$\frac{1}{h} \left(- \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^{-1+h} (1+k-r)U[1+k-r, s]U[r, -1+h-s] - (1+k)(2+k)U[2+k, -1+h] \right. \\ \left. - (1+k)(2+k)(3+k)(4+k)U[4+k, -1+h] \right).$$

$$N[\{U[0, 1], U[1, 1], U[2, 1], U[3, 1], U[4, 1]\}]$$

$$N[\{U[0, 2], U[1, 2], U[2, 2], U[3, 2], U[4, 2]\}]$$

$$N[\text{Collect}[\text{Sum}[U[m, n]x^m t^n, \{m, 0, 6\}, \{n, 0, 3\}], t]]$$

$$\text{Collect}[\text{Series}\left[5 + \frac{15}{19} * \sqrt{\frac{11}{19}} \left(-9 * \text{Tanh}\left[\frac{1}{2} * \sqrt{\frac{11}{19}} * (x-5t+12)\right] + 11 * \text{Tanh}\left[\frac{1}{2} * \sqrt{\frac{11}{19}} * (x-5t+12)\right]^3\right), \{t, 0, 5\}, \{x, 0, 5\}, t\} // N\right]$$

مثال ۳.۲.۶:

$$l = \text{Series}\left[15 - 15 \left(\text{Tanh}\left[\frac{1}{2} * (x+10)\right] + \text{Tanh}\left[\frac{1}{2} * (x+10)\right]^2 - \text{Tanh}\left[\frac{1}{2} * (x+10)\right]^3\right), \{x, 0, 20\} // N\right]$$

$$U[k,0]:=SeriesCoefficient[l,k]$$

$$N[\{U[0,0],U[1,0],U[2,0],U[3,0],U[4,0]\}]$$

$$U[k,h]:= \frac{1}{h}(-\sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^{-1+h} (1+k-r)U[1+k-r,s]U[r,-1+h-s] - (1+k)(2+k)U[2+k,-1+h] - 4(1+k)(2+k)(3+k)U[3+k,-1+h] - (1+k)(2+k)(3+k)(4+k)U[4+k,-1+h])$$

$$N[Collect[Sum[U[m,n]x^mt^n,\{m,0,6\},\{n,0,3\}],t]]$$

$$Collect\left[Series\left[15-15\left(\operatorname{Tanh}\left[\frac{1}{2}*(x-6t+10)\right]+\operatorname{Tanh}\left[\frac{1}{2}*(x-6t+10)\right]^2-\operatorname{Tanh}\left[\frac{1}{2}*(x-6t+10)\right]^3,\{t,0,5\},\{x,0,5\},t/N\right.\right.\right.$$

مراجع

- [1] S. J. Farlow, (1982), "**Partial Differential Equation for Scientists and Engineers**", John Wiley, New York.
- [2] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, (2000) , "**The Finite element method: Solid mechanics**", Vol. 2, Butterworth-Heinemann, 5 edition.
- [3] H. Versteeg , W. Malalasekera (2007) , "**An introduction to computational fluid dynamics: The finite volume method**", 2 edition.
- [4] John P. Wolf, (2003), "**The scaled boundary element method**", John Wiley and Sons
- [5] Smith G. D.(Gordon D.), (1985), "**Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods**", U.S. by Oxford university press Inc. New York, 3 edition.
- [6] C.G. Canuto, M. Y. Hussaini, A. Quarteroni, T.A. Zang, (2007), "**Spectral methods: Evolution to complex geometries and applications to fluid dynamics**".
- [7] M. Tatari, M. Dehghan, M. Razzaghi, (2007), "Application of the Adomian decomposition method for the FokkerPlanck equation ", **Appl. Math. Comput**, 45 , 639–650.
- [8] J. Biazar, F. Badpeimaa, F. Azimi, (2009), "Application of the homotopy perturbation method to Zakharov-Kuznetsov equations ", **Appl. Math. Comput**, 58 , 2391–2394.
- [9] J. Lu, "An analytical approach to the Fornberg–Whitham type equations by using the variational iteration method", **Appl. Math. Comput**, to appear.
- [10] J.K.Zhou, (1986) , "**Differential transform and its applications for electrical circuit**", Huazhong University Press, Wuhan, China.
- [11] C.K. Chen, S.H. Ho, (1996),"Application of differential transformation to eigenvalue problems ", **Appl. Math. Comput**, 79, 173–88.

- [12] C.K. Chen, S.H. Ho, (1999), "Solving partial differential equations by two dimensional differential transform", **Appl. Math. Comput**, 106, 171–179.
- [13] A. Arikoglu, I. Ozkol, (2006), "Solution of difference equations by using differential transform method", **Appl. Math. Comput**, 174 , 1216–1228.
- [14] A. Arikoglu, I. Ozkol, (2006), "Solution of difference equations by using differential transform method", **Appl. Math. Comput**, 174 , 442–454.
- [15] I.H. Abdel-Halim Hassan, (2004) , "Differential transformation technique for solving higher-order initial value problems", **Appl. Math. Comput**, 154, 299–311.
- [16] J. Biazar, M. Eslami, (2010) , "Differential transform method for quadratic riccati differential equation", **Int. j nonlinear Sci** ,Vol.9 No.4,pp.444-447.
- [17] A. A. Bahnasawi, M. A. El-Tawil and A. Abdel-Naby, (2004), "Solving riccati differential equation using Adomian's decomposition method ", **Appl. Math. Comput**, 157, 503-514.
- [18] M.S.H. Chowdhury, I. Hashim , (2007), "Solutions of a class of singular second-order IVPs by homotopy-perturbation method", **Phys. Lett. A**, 365, 439–447.
- [19] J.I. Ramos, (2005), **Appl. Math. Comput**, 161 , 525.
- [20] M.J. Jang, C.L. Chen, Y.C. Liu, (2001), "Two-dimensional differential transform for partial differential equations", **Appl. Math. Comput**, 121, 261–270.
- [21] F. Ayas, (2003), "On the two-dimensional differential transform method", **Appl. Math. Comput**, 143, 361–374.
- [22] A. Borhanifar, Reza Abazari, "Exact solutions for non-linear Schrödinger equations by differential transformation method", **Appl. Math. Comput**, doi:10.1007/s12190-009-0338-2.
- [23] Xiaofan Yang , Yaoxin Liu , Sen Bai, (2006), "A numerical solution of second-order linear partial differential equations by differential transform", **Appl. Math. Comput**, 173 , 792–802.
- [24] J. Biazar, F. Mohammadi, (2010), "Application of Differential Transform Method to the Generalized Burgers–Huxley Equation" , **Appl. Appl. Math.**, 1726– 1740.
- [25] J. Biazar, M. Eslami, (2010), "Differential transform method for solving Helmholtz equation", **World. Appl. Sciences Journal**, 10(2) , 166–168.

- [26] J. Biazar, M. Eslami, (2010), "Analytic solution for Telegraph equation by differential transform method", **Phys. Lett. A**, 374, 2904–2906.
- [27] F. Ayas, (2004), "Solutions of the system of differential equations by differential transform method", **Appl. Math. Comput**, 147 , 547–567.
- [28] A.M. Wazwaz, (2000), "The decomposition method applied to systems of partial equations and to the reaction–diffusion Brusselator model", **Appl. Math. Comput**, 110 , 251–264.
- [29] Shih-Hsiang Chang, I-Ling Chang , (2008), "A new algorithm for calculating one-dimensional differential transform of nonlinear functions ", **Appl. Math. Comput**, 195 , 799–808.
- [30] A.M. Wazwaz, (2005), "Adomian decomposition method for a reliable treatment of the Bratu-type equations", **Appl. Math. Comput**, 166 , 652–663.
- [31] Shih-Hsiang Chang, I-Ling Chang , (2009), "A new algorithm for calculating two-dimensional differential transform of nonlinear functions ", **Appl. Math. Comput**,. 215 , 2486–2494.
- [32] H. Risken , (1986), "The Fokker-planck equation: Method of solution and applications ", Springer Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [33] T. D. Frank, (2004), "Stochastic feedback, nonlinear families of Markov processes, and nonlinear Fokker-Planck equations ", **Physica A**, 331, 391-408.
- [34] C. Buet, S. Dellacherie, R. Sentis , (2001), "Numerical solution of an ionic Fokker-planck equation with electronic temperature ", **Siam J. Numer. Anal**, 39 , 1219-1253.
- [35] M. Lakestani, M. Dehghan, (2009), "Numerical solution of Fokker-Planck equation using the cubic B-spline scaling functions ", **Numer. Meth. PDE**, 25 , 418-429.
- [36] G. B. Whitham , (1967), "Variational methods and applications to water wave", **Proc. R. Soc. Lond. Ser. A**, 299, 6–25.
- [37] B. He, Q. Meng, S. Li, (2010), "Explicit peakon and solitary wave solutions for the modied Fornberg–Whitham equation ", **Appl. Math. Comput**, in press.
- [38] F. Abidi, K. Omrani, (2010), "The homotopy analysis method for solving the Fornberg–Whitham equation and comparison with Adomians decomposition method ", **Appl. Math. Comput**, 59 ,2743–2750.

- [39] P. K. Gupta, M. Singh, "Homotopy perturbation method for fractional Fornberg-Whitham equation ", **Appl. Math. Comput**, to appear.
- [40] Y. Keskin, G. Oturanc, (2009), "Reduced Differential Transform Method for Partial Differential Equations ", **Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul**, 10(6), 741–749.
- [41] Y. Keskin, G. Oturanc, "Numerical simulations of systems of PDEs by reduced differential transform method ", **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul**, In Press.
- [42] Y. Keskin, G. Oturanc, (2010), "Reduced Differential Transform Method for fractional partial differential equations ", **Nonlinear Science Letters A**, 1(2), 61-72. 7900.
- [43] B. Fornberg, G.B. Whitham, (1978), "A numerical and theoretical study of certain nonlinear wave phenomena", **Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A**, 289, 373-404.
- [44] J. Lu, "An analytical approach to the Fornberg–Whitham type equations by using the variational iteration method", **Appl. Math. Comput**, to appear.
- [45] A.M. Wazwaz, (2008), "The extended tanh method for the Zakharov-Kuznetsov (ZK) equation, the modified ZK equation, and its generalized forms", **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul**, 13, 1039–1047.
- [46] W. Huang, (2006), "A polynomial expansion method and its application in the coupled Zakharov-Kuznetsov equations", **Chaos Solitons Fractals**, 29, 365–371.
- [47] X. Zhao, H. Zhou, Y. Tang, H. Jia, (2006), "Travelling wave solutions for modified Zakharov- Kuznetsov equation ", **Appl. Math. Comput**, 181, 634–648.
- [48] M. Inc, (2007), "Exact solutions with solitary patterns for the Zakharov-Kuznetsov equations with fully nonlinear dispersion", **Chaos Solitons Fractals**, 33 (15), 1783-1790.
- [49] N. A. Larkin, (2004), "Korteweg-de Vries and Kuramoto-Sivashinsky equations in bounded domains ", **J. Math. Anal. Appl**, 297, 169–185.
- [50] A. H. Khater, R. S. Temsah, (2008), "Numerical solutions of the generalized Kuramoto- Sivashinsky equation by Chebyshev spectral collocation methods ", **Appl. Math. Comput**, 56, 1465–1472.

- [51] A. V. Manickam, K. M. Moudgalya, A. K. Pani, (1998), "Second-order splitting combined with orthogonal cubic spline collocation method for the Kuramoto-Sivashinsky equation ", **Appl. Math. Comput**, 35 ,5-25.
- [52] Akrivis Georgios, Smyrlis Yiorgos-Sokratis, (2004), "Implicitexplicit BDF methods for the Kuramoto-Sivashinsky equation ", **Appl. Math. Comput**, 51 , 151-169.
- [53] X. Yan, S. C. Wang, (2006), "Local discontinuous Galerkin methods for the Kuramoto- Sivashinsky equations and the Ito-type coupled KdV equations ", **Appl. Math. Comput**, 195 , 3430-3447.
- [54] Lai Huilin, Ma Changfeng , (2009), "Lattice Boltzmann method for the generalized Kuramoto- Sivashinsky equation", **Phys. Lett. A**, 388, 1405-1412.
- [55] Engui Fan, (2000), "Extended tanh-function method and its applications to non-linear equations", **Phys. Lett. A**, 277 , 212-218.
- [56] Xu Yan, Shu Chi-Wang, (2000), "Local discontinuous Galerkin methods for the Kuramoto- Sivashinsky equations and the Ito-type coupled KdV equations", **Appl. Math. Comput**, 195 , 3430-3447.
- [57] Uddin M, Haq Sirajul, Siraj-ul-Islam, (2009), "A mesh-free numerical method for solution of the family of Kuramoto-Sivashinsky equations", **Appl. Math. Comput**, 212 , 458-469.
- [58] S. G Rubin, R. A Graves, (2009), "Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics", NASA TR R-436, Washington, DC, 1975.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Partial differential equation	معادلات با مشتقات جزئی
Differential transform method	روش تبدیل دیفرانسیل
One-dimensional differential transform method	روش تبدیل دیفرانسیل یک بعدی
Two-dimensional differential transform method	روش تبدیل دیفرانسیل دو بعدی
Three-dimensional differential transform method	روش تبدیل دیفرانسیل سه بعدی
inverse differential transform	تبدیل دیفرانسیل معکوس
Linear	خطی
NonLinear	غیر خطی
Initial condition	شرط اولیه
Substituting	جایگزین کردن
Linearization	خطی سازی
Discretization	گسسته سازی
Perturbation	آشفستگی
Exact solution	جواب دقیق
Close form	فرم بسته
non-homogeneous	ناهمگن
Finite series	سری متناهی
Differentiation	مشتق گیری
Exponential nonlinearity	غیرخطی نمایی
Logarithmic nonlinearity	غیرخطی لگاریتمی
Trigonometric nonlinearity	غیرخطی مثلثاتی
Hyperbolic nonlinearity	غیرخطی هذلولوی
Fokker-Planck equation	معادله فوکر-پلانک
Diffusion coefficient	ضریب انتشار
Drift coefficient	ضریب رانش
Forward Kolmogorov equation	معادله کولموگوروف پیشرو
Backward Kolmogorov equation	معادله کولموگوروف پسرو
Variable	متغیر
Analytical solution	جواب تحلیلی
Fornberg-Whitham equation	معادله فرنبرگ- وایتهم
Reduced differential transform method	روش کاهش تبدیل دیفرانسیل

Modified	اصلاح شده
Adomian decomposition method	روش تجزیه آدمیان
Homotopy perturbation method	روش آشفتگی هموتوپی
Variational iteration method	روش ناپایدار تکراری
Power series expansion	بسط سری توانی
Standard operator	عملگر استاندارد
Approximation solution	جواب تقریبی
Zakharov-Kuznetsov equation	معادله زاخاروف-کازنتسوف
dynamical systems	دستگاه های پویا
arbitrary constant	ثابت اختیاری
Kuramoto-Sivashinsky equation	معادله کوراماتو-سیواشینسکی

Abstract

In this thesis, we first introduce the partial differential Equations of the first and second orders; then we express differential transform method for linear and nonlinear functions. We show the efficiency of the proposed method by several numerical examples. Finally, the Fokker-Plank Equation, the Zakharov- Kuznetsov equation and Kuramoto-Sivashinsky equation are solved by the differential transform method. the Fornberg-Whitham equation is also solved by the Reduced differential transform method.

Keywords: *Partial equation, Differential transform method, Inverse differential transform, Exact solution, Close form.*



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Science

Department of Mathematics

M.s Thesis

***Solving a class of Partial Differential Equation's
using Differential Transforms Method***

By:

Saeideh Hesam

Supervisors:

Dr. Jafar Fathali

Dr. Alireza Nazemi

Adviser:

Mr. Farokh Forohande

17 September 2011