

سلام افلا



دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری آنالیز عددی

کاربردهایی از سیستم‌های فازی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری و مسائل وابسته

نگارنده: مرضیه مرتضایی

استادان راهنما

دکتر مهدی قوتمند
دکتر علیرضا ناظمی

اسفند ۱۴۰۰

شماره: ۵۰۶-۲۲-۲

تاریخ: ۲۲ / ۱ / ۱۴۰۱

ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

پیوست شماره ۲

دانشکده: علوم ریاضی

گروه: ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر

رساله دکتری خانم مرضیه مرتضایی

تحت عنوان: کاربردهایی از سیستم‌های فازی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری و مسائل وابسته

در تاریخ ۱۴۰۰/۱۲/۲ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک رساله دکتری ارزیابی گردید و با درجه بسیار خوب مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر مهدی قوتمند
	نام و نام خانوادگی:		نام و نام خانوادگی: دکتر علیرضا ناظمی

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی: دکتر مهرداد غزنوی		نام و نام خانوادگی: دکتر حجت احسنی طهرانی
			نام و نام خانوادگی: دکتر محمدحادی نوری اسکندری
			نام و نام خانوادگی: دکتر رضا پورقلی



تقدیم به خدایی که آفرید
جهان را، انسان را، عقل را، علم را، معرفت را، عشق را
و تقدیم به کسانی که عشقشان را در وجودم دمید؛
مهربان فرشتگانی که لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا
و زیبای زندگیم، میون حضور سبز آنهاست؛
پدر و مادر عزیز و مهربانم که در سختی ها و دشواری های زندگی، همواره یاری دلسوز و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم بوده اند؛
برادر و خواهرم که وجودشان شادی بخش و صفایشان مایه آرامش من است.

سپاس گزاری...

سپاس خدای را که سخوران، در ستودن او بماند و شمارندگان، شمردن نعمت های او ندانند و کوشندگان، حق او را گزاردن نتوانند. و سلام و دورد بر محمد و خاندان پاک او، طاهران معصوم، هم آنان که وجودمان و امدار وجودشان است؛ و نفرین پیوسته بر دشمنان ایشان تا روز رستاخیز...

بدون شک منزلت معلم، اجل از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی شائبه او، بازبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگاریم.

اما از آنجایی که تجلیل از معلم، سپاس از انسانی است که هدف و غایت آفرینش را تائین می کند و سلامت امانت های را که به دستش سپرده اند، تضمین؛ بر حسب وظیفه و از باب «من لم یشکر المنعم من المخلوقین لم یشکر الله عزّوجلّ»: از پدر و مادر عزیزم... این دو معلم بزرگوارم... که همواره بر کوتاهی و درستی من، قلم عنو کشیده و گریانه از کنار غفلت هایم گذشته اند و در تمام عرصه های زندگی یار و یاور بی چشم داشت برای من بوده اند؛

از اساتید با کمال و شایسته؛ جناب آقای دکتر قوتمند و جناب آقای دکتر ناظمی که در کمال سه صدر، با حسن خلق و فروتنی، از هیچ گلی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی این رساله را بر عهده گرفتند؛ کمال تشکر و قدردانی را دارم.

همچنین لازم می دانم و از دوست و همکلاسی مهربانم سرکار خانم هدایتی به خاطر مساعدت و همراهی ایشان در قدردانی بنمایم. باشد که این خردترین، بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

تعهد نامه

اینجانب مرضیه مرتضایی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان کاربردهایی از سیستم‌های فازی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری و مسائل وابسته، تحت راهنمایی مهدی قوتمند و علیرضا ناظمی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مرضیه مرتضایی

اسفند ۱۴۰۰

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

موضوع مهم و بنیادی رساله دکتری حاضر، بررسی کاربردهایی از سیستم‌های فازی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری و مسائل وابسته است. برخی از قوانین فیزیکی و دینامیکی با سیستم‌های دینامیکی معمولی قابل بیان نیستند. برای مدل‌سازی دستگاه‌های دینامیکی پیچیده و یا هنگامی که ذرات دینامیکی در مقیاس ذره‌بینی هستند؛ استفاده از سیستم‌های مرتبه کسری ضروری به نظر می‌رسد. معمولاً به دست آوردن جواب‌های تحلیلی برای این مسائل دشوار است. بنابراین روش‌های عددی برای حل آن‌ها ارائه می‌شود. در این رساله، از سیستم‌های فازی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر و مسائل کنترل بهینه استفاده شده است. سیستم فازی یکی از تکنیک‌های هوش مصنوعی است که به جای منطق بولی از مجموعه‌ای از توابع عضویت فازی و قوانین برای استدلال درمورد داده‌ها استفاده می‌کند. سیستم‌های فازی در مقایسه با روش‌های تقریبی رایج، مانند شبکه عصبی، نمایش شفاف‌تری را از سیستم مورد مطالعه ارائه می‌دهند. وجود این مزیت در سیستم‌های فازی، به دلیل امکان تفسیر زبانی در قالب قوانین است. از آن‌جا که سیستم فازی تقریب زننده عمومی است این رویکرد هوش محاسباتی، در طیف گسترده‌ای از کاربردها استفاده می‌شود.

کلمات کلیدی: معادلات دیفرانسیل کسری، معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر، کنترل بهینه کسری، هوش مصنوعی، سیستم‌های فازی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. M. Mortezaee, M. Ghovatmand, A.R. Nazemi, (2020), Solving variable-order fractional differential algebraic equations via generalized fuzzy hyperbolic model with application in electric circuit modeling, Soft Computing, DOI:10.1007/s00500-020-04969-7.
2. M. Mortezaee, M. Ghovatmand, A.R. Nazemi, (2020), An Application of Generalized Fuzzy Hyperbolic Model for Solving Fractional Optimal Control Problems with Caputo–Fabrizio Derivative, Neural Processing Letters, DOI: 10.1007/s11063-020-10334-4.
3. M. Mortezaee, M. Ghovatmand, A.R. Nazemi, Solving variable-order fractional delay differential algebraic equations via fuzzy systems with application in delay optimal control problems, submitted.
4. M. Mortezaee, M. Ghovatmand, A.R. Nazemi, An application of a fuzzy system for solving time delay fractional optimal control problems with Atangana-Baleanu derivative, submitted.

فهرست مطالب

ق	فهرست تصاویر
ث	فهرست جداول
۱	۱ سیستم‌های فازی
۱	۱.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضیات فازی
۲	۱.۱.۱ عملیات بر روی مجموعه‌های فازی
۵	۲.۱.۱ قواعد فازی و استدلال فازی
۸	۳.۱.۱ قواعد اگر-آنگاه فازی
۹	۴.۱.۱ منطق فازی و استدلال تقریبی
۱۰	۲.۱ سیستم‌های فازی
۱۴	۱.۲.۱ انواع سیستم‌های فازی
۱۶	۲.۲.۱ سیستم‌های فازی به‌عنوان تقریب‌گرهای عمومی
۱۹	۲ حسابان کسری
۱۹	۱.۲ مروری بر تاریخچه محاسبات کسری و تعاریف مقدماتی
۲۰	۱.۱.۲ انتگرال کسری
۲۱	۲.۱.۲ مشتق کسری ریمان-لیوویل
۲۲	۳.۱.۲ مشتق کسری کاپوتو
۲۳	۴.۱.۲ مشتق کسری کاپوتو-فابریزیو
۲۴	۵.۱.۲ مشتق و انتگرال کسری آتانگانا-بالینو
۲۵	۶.۱.۲ حسابان کسری مرتبه متغیر
۲۶	۲.۲ معادلات دیفرانسیل جبری کسری
۲۷	۳.۲ مسئله کنترل بهینه کسری و شرایط لازم بهینگی
	۳ حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از سیستم‌های فازی
۲۹	

۳۰	معرفی معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر و روش حل مسئله	۱.۳
۳۳	آموزش مدل هایپربولیک فازي تعمیم یافته	۱.۱.۳
۳۶	حل مسئله کنترل بهینه کسری با سیستم های فازي	۲.۳
۳۷	فرمول بندی مسئله کنترل بهینه کسری با مشتق کاپوتو- فابریزیو	۱.۲.۳
	حل مسئله کنترل بهینه کسری با مدل هایپربولیک فازي تعمیم یافته	۲.۲.۳
۳۹	یافته	
۴۰	مثال های عددی	۳.۳
۴	کاربرد سیستم فازي برای حل معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر	
۵۹	معرفی معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر و روش حل مسئله	۱.۴
۶۰	حل مسئله کنترل بهینه تأخیری کسری مرتبه متغیر با سیستم فازي	۲.۴
۶۳	فرمول بندی مسئله کنترل بهینه تأخیری کسری مرتبه متغیر	۱.۲.۴
۶۴	مثال عددی	۳.۴
۶۷		
۷۷	مراجع	

فهرست تصاویر

۱۱	 ساختار اصلی سیستم‌های فازی.	۱.۱
۳۵	 فلوجارت الگوریتم یادگیری.	۱.۳
۴۲	 جواب تقریبی $x(t)$ برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در مثال ۱.۳.۳.	۲.۳
۴۲	 $\alpha(t) = 0.99$ (آ)	
۴۲	 $\alpha(t) = \frac{1}{1+\exp(-t)}$ (ب)	
۴۲	 $\alpha(t) = 1 - \frac{\exp(t)\cos(t)}{10}$ (ج)	
۴۲	 $\alpha(t) = 1 - 0.5t$ (د)	
۴۳	 جواب تقریبی $y(t)$ برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در مثال ۱.۳.۳.	۳.۳
۴۳	 $\alpha(t) = 0.99$ (آ)	
۴۳	 $\alpha(t) = \frac{1}{1+\exp(-t)}$ (ب)	
۴۳	 $\alpha(t) = 1 - \frac{\exp(t)\cos(t)}{10}$ (ج)	
۴۳	 $\alpha(t) = 1 - 0.5t$ (د)	
۴۳	 خطای مطلق $x(t)$ و $y(t)$ برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$.	۴.۳
۴۳	 خطای مطلق $x(t)$ (آ)	
۴۳	 خطای مطلق $y(t)$ (ب)	
۴۴	 جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $y(t)$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۲.۳.۳.	۵.۳
۴۵	 جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $y(t)$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۳.۳.۳.	۶.۳
۴۶	 جواب‌های تقریبی $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۴.۳.۳.	۷.۳
۴۸	 جواب‌های تقریبی $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۵.۳.۳.	۸.۳
۴۸	 مدار RLC.	۹.۳
۵۰	 جواب‌های تقریبی $X(t)$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۶.۳.۳.	۱۰.۳
۵۰	 V_C (آ)	
۵۰	 V_L (ب)	
۵۰	 V_R (ج)	
۵۰	 i_L (د)	

۵۰	 i_E (ه)
۵۳	جواب دقیق و جواب تقریبی $x(t)$ با $\alpha = ۰/۹, ۰/۸, ۰/۷, ۰/۶$ برای مثال ۷.۳.۳
۵۳	 $\alpha = ۰/۹$ (آ)
۵۳	 $\alpha = ۰/۸$ (ب)
۵۳	 $\alpha = ۰/۷$ (ج)
۵۳	 $\alpha = ۰/۶$ (د)
۵۴	جواب دقیق و جواب تقریبی $u(t)$ با $\alpha = ۰/۹, ۰/۸, ۰/۷, ۰/۶$ برای مثال ۷.۳.۳
۵۴	 $\alpha = ۰/۹$ (آ)
۵۴	 $\alpha = ۰/۸$ (ب)
۵۴	 $\alpha = ۰/۷$ (ج)
۵۴	 $\alpha = ۰/۶$ (د)
۵۴	خطای مطلق $x(t)$ و $u(t)$ به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۷.۳.۳
۵۴	 خطای مطلق $x(t)$ (آ)
۵۴	 خطای مطلق $u(t)$ (ب)
۵۵	جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۸.۳.۳
۵۶	جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۹.۳.۳
۵۶	جواب‌های تقریبی $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ و $u(t)$ به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۱۰.۳.۳
۵۸	 ۱۰.۳.۳
۶۸	جواب‌های تقریبی $x_1(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۱.۳.۴
۶۸	 $\alpha_1(t) = \frac{1}{1+\exp(-t)}$ (آ)
۶۸	 $\alpha_2(t) = ۰/۷ + ۰/۰۵ \sin(\frac{t}{10})$ (ب)
۶۸	 $\alpha_3(t) = \tanh(t+1)$ (ج)
۶۸	 $\alpha_4(t) = ۰/۶$ (د)
۶۹	جواب‌های تقریبی $x_2(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۱.۳.۴
۶۹	 $\alpha_1(t) = \frac{1}{1+\exp(-t)}$ (آ)
۶۹	 $\alpha_2(t) = ۰/۷ + ۰/۰۵ \sin(\frac{t}{10})$ (ب)
۶۹	 $\alpha_3(t) = \tanh(t+1)$ (ج)
۶۹	 $\alpha_4(t) = ۰/۶$ (د)
۷۰	خطای مطلق $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۱.۳.۴
۷۰	 (آ)
۷۰	 (ب)
۷۰	جواب‌های تقریبی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۲.۳.۴
۷۳	جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۳.۳.۴

۶.۴	جواب‌های تقریبی $x_1(t), x_2(t)$ و $x_4(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال
۷۴	۴.۳.۴

فهرست جداول

۴۱	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ در مثال ۱.۳.۳	۱.۳
۴۴	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۲.۳.۳	۲.۳
۴۵	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۳.۳.۳	۳.۳
۴۷	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۴.۳.۳	۴.۳
۴۷	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۵.۳.۳	۵.۳
۴۹	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۶.۳.۳	۶.۳
۵۲	بیشینه خطا مطلق $x(t)$ و $u(t)$ برای $\alpha = 0/6, 0/7, 0/8, 0/9$	۷.۳
۵۲	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۷.۳.۳	۸.۳
۵۵	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۸.۳.۳	۹.۳
۵۶	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۹.۳.۳	۱۰.۳
۵۷	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۱۰.۳.۳	۱۱.۳
۶۹	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ و زمان اجرا برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در مثال ۱.۳.۴	۱.۴
۷۱	خطای مطلق $x(t)$ در $\alpha(t) = 1$ برای مثال ۲.۳.۴	۲.۴
۷۱	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ و زمان اجرا برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در مثال ۲.۳.۴	۳.۴
۷۲	نتایج J در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۳.۳.۴	۴.۴
۷۳	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ و زمان اجرا برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در مثال ۳.۳.۴	۵.۴
۷۵	نتایج J در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۴.۳.۴	۶.۴
۷۵	مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ و زمان اجرا برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در مثال ۴.۳.۴	۷.۴

فصل ۱

سیستم‌های فازی

این فصل مقدمه‌ای برای استفاده از سیستم‌های فازی در تقریب توابع فراهم می‌کند. نقطه آغاز و زبان اصلی برای سیستم‌های فازی، ریاضیات فازی است که در آن اصول ریاضی با جایگزینی مجموعه‌های فازی به جای مجموعه‌های ریاضیات کلاسیک، گسترش پیدا کرده است. مطالب این فصل از [۱]، [۳] و [۴] گرفته شده است.

۱.۱ مروری بر برخی از مفاهیم ریاضیات فازی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید X مجموعه‌ای از عناصر باشد، مجموعه فازی^۱ A در X به صورت زوج مرتب

$$A = \{(x, \mu_A(x)) | x \in X\},$$

نمایش داده می‌شود، که $\mu_A(x)$ تابع عضویت^۲ مجموعه A است و هر عنصر از X را به مقدار تعلق که عددی بین صفر و یک است می‌نگارد.

واضح است که اگر تابع عضویت $\mu_A(x)$ فقط دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار کند، آن‌گاه مجموعه A به مجموعه کلاسیک و تابع عضویت $\mu_A(x)$ به تابع مشخصه کاهش می‌یابد. بنابراین

^۱Fuzzy Set

^۲Membership Function

مجموعه‌های فازی تعمیمی از مجموعه‌های کلاسیک هستند. سه نکته مهم را درباره مجموعه‌های فازی می‌توان استنباط کرد

- خواص و ویژگی‌هایی که یک مجموعه فازی برای مشخص کردن عضوها استفاده می‌کند معمولاً فازی هستند با این حال توابع عضویت خودشان فازی نیستند، بلکه توابع ریاضی دقیق هستند.
- ما می‌توانیم از توابع عضویت مختلف برای توصیف یک مشخصه یکسان استفاده کنیم. به‌طور کلی دو راه‌حل برای تعیین یک تابع عضویت مناسب وجود دارد. اولین راه‌حل استفاده از دانش انسان خبره است. معمولاً این راه‌حل فقط می‌تواند یک فرمول ساده و خام برای توابع عضویت به ما بدهد و برای استفاده باید آن را تنظیم کرد. در راه‌حل دوم ابتدا ساختار توابع عضویت را تعیین کرده، سپس پارامترهای توابع عضویت را براساس داده‌های جمع‌آوری شده به‌طور دقیق تنظیم می‌کنیم.
- هر مجموعه فازی یک تناظر یک به یک با تابع عضویت خود دارد. وقتی می‌گوییم یک مجموعه فازی، فقط یک تابع عضویت منحصربه‌فرد (یکتا) متناظر با آن وجود دارد و بالعکس وقتی یک تابع عضویت را می‌دهیم، این تابع عضویت یک مجموعه فازی را نمایش می‌دهد. پس از این نظر، مجموعه‌های فازی و توابع عضویت با هم معادل هستند.

تعریف ۲.۱.۱. تکیه‌گاه مجموعه فازی A در فضای جهانی U یک مجموعه غیر فازی است که شامل تمامی عضوهای غیر صفر U می‌شود، یعنی

$$\text{Supp}(A) = \{x \in U \mid \mu_A(x) > 0\}.$$

اگر تکیه‌گاه یک مجموعه فازی تهی باشد، آن را مجموعه فازی تهی می‌نامند. به مجموعه فازی که تکیه‌گاه آن یک نقطه واحد در U باشد، منفرد فازی می‌گویند.

تعریف ۳.۱.۱. ارتفاع یک مجموعه فازی، بزرگترین مقدار تابع عضویت آن است. اگر ارتفاع یک مجموعه فازی برابر با ۱ باشد، در آن صورت آن را مجموعه فازی طبیعی می‌نامند.

۱.۱.۱ عملیات بر روی مجموعه‌های فازی

اجتماع، اشتراک و مکمل از اساسی‌ترین عملگرهای مجموعه‌های کلاسیک هستند. متناظر با این عملگرها در مجموعه‌های کلاسیک، عملگرهای مشابه برای مجموعه‌های فازی اولین بار توسط زاده^۱ در [۵] معرفی شده‌است. قبل از معرفی این سه عملگر، مفهوم زیر مجموعه بودن را در مجموعه‌های فازی ارائه می‌دهیم. بدیهی است که این تعریف، تعمیمی از تعریف

¹zadeh

زیر مجموعه بودن در مجموعه‌های کلاسیک است. فرض کنید A و B مجموعه‌های فازی هستند که در یک مجموعه جهانی یکسان تعریف شده‌اند.

تعریف ۴.۱.۱. مجموعه A زیر مجموعه B است هرگاه برای تمامی مقادیر $x \in U$ ، $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ باشد.

تعریف ۵.۱.۱. مکمل مجموعه فازی A مجموعه فازی $\bar{A}$ در U است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x). \quad (1.1)$$

تعریف ۶.۱.۱. اجتماع دو مجموعه فازی A و B یک مجموعه فازی در U است که با $A \cup B$ نشان داده شده و تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max[\mu_A, \mu_B]. \quad (2.1)$$

تعریف ۷.۱.۱. اشتراک مجموعه فازی A و B یک مجموعه فازی در U است که با $A \cap B$ نشان داده شده و تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A, \mu_B]. \quad (3.1)$$

برخلاف مجموعه‌های کلاسیک عملگرهای (۱.۱)–(۳.۱) تنها عملگرهای ممکن برای مجموعه‌های فازی نیستند. عملگرهای جدید دیگری نیز وجود دارند که براساس تعدادی فرضیه معرفی می‌شوند. در ادامه به معرفی چند اصل موضوعه در مورد مکمل، اجتماع و اشتراک می‌پردازیم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید a و b نشان‌دهنده توابع عضویت دو مجموعه فازی A و B باشند یعنی $b = \mu_B(x)$ ، $a = \mu_A(x)$ ، به تابع پیوسته $N : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ که در شرایط زیر صدق کند، عملگر مکمل فازی می‌گویند

• شرط مرزی: $N(1) = 0$ ، $N(0) = 1$

• شرط نزولی بودن: اگر $a \leq b$ آن‌گاه $N(a) \geq N(b)$.

یک کلاس از مکمل‌های فازی، کلاس سوگنوا^۱ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N_\lambda(a) = \frac{1-a}{1+\lambda a}, \quad \lambda \in (-1, \infty).$$

برای هر مقدار پارامتر λ ، یک مکمل فازی خاص به دست می‌آید. توجه کنید که $\lambda = 0$ مکمل فازی اولیه یعنی رابطه (۱.۱) را نتیجه می‌دهد.

^۱Sugeno Class

تعریف ۹.۱.۱. هر تابع $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ که در شرایط زیر صدق کند، یک T -نرم نامیده می‌شود.

• شرط مرزی: $T(0, 0) = 0, T(a, 1) = T(1, a) = a$,

• شرط جابجایی: $T(a, b) = T(b, a)$,

• شرط صعودی بودن: اگر $a \leq a'$ و $b \leq b'$ آن‌گاه $T(a, b) \leq T(a', b')$,

• شرط شرکت‌پذیری: $T[T(a, b), c] = T[a, T(b, c)]$.

به‌عنوان مثال به‌سادگی می‌توان ثابت کرد تابع $\min$ رابطه (۳.۱) یک T -نرم است. همچنین ضرب جبری:

$$T_{ap}(a, b) = ab, \quad (۴.۱)$$

ضرب کران‌دار:

$$T_{bp}(a, b) = 0 \vee (a + b - 1), \quad (۵.۱)$$

ضرب دراستیک:

$$T_{dp}(a, b) = \begin{cases} a, & b = 1, \\ b, & a = 1, \\ 0, & a, b < 1 \end{cases} \quad (۶.۱)$$

سه T -نرم رایج در کتاب‌ها هستند.

تعریف ۱۰.۱.۱. هر تابع $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ که در شرایط زیر صدق کند، یک S -نرم نامیده می‌شود.

• شرط مرزی: $S(1, 1) = 1, S(0, a) = S(a, 0) = a$,

• شرط جابجایی: $S(a, b) = S(b, a)$,

• شرط صعودی بودن: اگر $a \leq a'$ و $b \leq b'$ آن‌گاه $S(a, b) \leq S(a', b')$,

• شرط شرکت‌پذیری: $S[S(a, b), c] = S[a, S(b, c)]$.

برای هر S -نرم یک T -نرم متناظر وجود دارد و بالعکس. بنابراین متناظر با T -نرم‌های (۳.۱) و (۴.۱)–(۶.۱)، S -نرم‌های ماکسیمم: مطابق رابطه (۲.۱)

$$S(a, b) = \max(a, b), \quad (۷.۱)$$

جمع جبری:

$$S_{ap}(a, b) = a + b - ab, \quad (۸.۱)$$

جمع کران دار:

$$S_{bp}(a, b) = 1 \wedge (a + b), \quad (۹.۱)$$

جمع دراستیک:

$$T_{dp}(a, b) = \begin{cases} a, & b = 0, \\ b, & a = 0, \\ 1, & a, b > 0, \end{cases} \quad (۱۰.۱)$$

S - نرم‌های رایج در کتاب‌ها و مقالات هستند.

۲.۱.۱ قواعد فازی و استدلال فازی

قواعد فازی و استدلال فازی ستون اصلی سیستم‌های فازی هستند. در اینجا ابتدا اصل توسعه و رابطه فازی را معرفی می‌کنیم، که مفاهیم و کاربرد مجموعه‌های فازی را گسترش می‌دهند و پیش‌زمینه استدلال فازی هستند.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید $f: U \rightarrow V$ تابعی از مجموعه قطعی U به مجموعه قطعی V باشد و A یک مجموعه فازی در U باشد آنگاه تابع عضویت مجموعه فازی $B = f(A)$ در V به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_B(y) = \max_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x), \quad y \in V, \quad (۱۱.۱)$$

که $f^{-1}(y)$ نشان‌دهنده مجموعه تمامی نقاط $x \in U$ بوده، به نحوی که $f(x) = y$. معادله (۱۱.۱) اصل توسعه نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید $U_1, U_2, \dots, U_n$ مجموعه‌های کلاسیک دلخواه باشند. رابطه فازی R بین $U_1, U_2, \dots, U_n$ ، یک مجموعه فازی در فضای حاصلضرب برداری

$$U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n = \{(u_1, u_2, \dots, u_n) | u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \dots, u_n \in U_n\}, \quad (۱۲.۱)$$

و با تابع عضویت

$$\mu_R: U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \rightarrow [0, 1], \quad (۱۳.۱)$$

است.

با توجه به نحوه نمایش مجموعه‌های فازی، رابطه فازی R به صورت زیر نمایش داده می‌شود

$$R = \{((u_1, u_2, \dots, u_n), \mu_R) | (u_1, u_2, \dots, u_n) \in U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n\}. \quad (14.1)$$

تعریف ۱۳.۱.۱. ترکیب روابط فازی $P(U, V)$ و $Q(V, W)$ یک رابطه فازی در $U \times W$ است که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mu_{PoQ}(x, z) = \max_{y \in V} T[\mu_P(x, y), \mu_Q(y, z)], \quad (x, z) \in V \times W, \quad (15.1)$$

که در آن T یک T -نرم است.

بدیهی است که با توجه به T -نرم‌های مختلف، ترکیب‌های متفاوتی به دست می‌آید که ترکیب ماکسیمم-مینیمم و ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب از مهم‌ترین ترکیب‌های مورد استفاده هستند. فرض کنید P و Q روابط فازی باشند که به ترتیب روی $U \times V$ و $V \times W$ تعریف شده‌اند.

تعریف ۱۴.۱.۱. ترکیب ماکسیمم-مینیمم روابط فازی $P(U, V)$ و $Q(V, W)$ یک مجموعه فازی در $U \times W$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$PoQ = \{[(x, w), \max_v \min(\mu_p(u, v), \mu_Q(v, w))] | u \in U, v \in V, w \in W\}. \quad (16.1)$$

تعریف ۱۵.۱.۱. ترکیب ماکسیمم-حاصلضرب روابط فازی $P(U, V)$ و $Q(V, W)$ یک مجموعه فازی در $U \times W$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$PoQ = \{[(x, w), \max_v (\mu_p(u, v) \mu_Q(v, w))] | u \in U, v \in V, w \in W\}. \quad (17.1)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود که ترکیب‌های ماکسیمم-مینیمم و ماکسیمم-حاصلضرب به ترتیب از T -نرم‌های مینیمم و ضرب جبری در (۱۵.۱) استفاده می‌کنند.

تعریف ۱۶.۱.۱. متغیر زبانی متغیری است که واژه‌هایی از زبان طبیعی را به عنوان متغیر می‌پذیرد. یک متغیر زبانی به وسیله چهار پارامتر (X, T, U, M) مشخص می‌شود که

• X نام متغیر زبانی است.

• T مجموعه مقادیر زبانی است که X اختیار می‌کند.

• U دامنه فیزیکی واقعی است که در آن متغیر زبانی X ، مقادیر عددی خود را اختیار می‌کند.

• M یک قاعده لغوی است که هر مقدار زبانی در T را به یک مجموعه فازی در U مرتبط می‌سازد.

به عنوان مثال اگر سن، متغیر زبانی باشد، مجموعه واژه $T(X)$ به شرح زیر است

$$T(X) = \{ \dots, \text{نه میانسال}, \text{میانسال}, \dots, \text{نه خیلی جوان}, \text{خیلی جوان}, \text{نه جوان}, \text{جوان} \}, \\ \{ \dots, \text{نه خیلی پیر}, \text{کم یا بیش پیر}, \text{خیلی پیر}, \text{نه پیر}, \text{پیر} \}, \\ \{ \dots, \text{نه خیلی جوان و نه خیلی پیر} \},$$

$U = [0, 100]$. قاعده لغوی، تابع عضویت هر مقدار زبانی مجموعه T را تعریف می کند. مفهوم متغیر زبانی رویکرد دیگری برای مدل سازی تفکر انسانی ارائه می دهد رویکردی که اطلاعات را خلاصه می کند و آن را برحسب مجموعه فازی به جای اعداد محدود بیان می کند. با استفاده از متغیرهای زبانی قادر خواهیم بود توصیف های مبهم و نامعلوم در زبان طبیعی را با گزاره های ریاضی دقیق فرموله کنیم.

از مثال قبلی می توان دید که مجموعه مقادیر زبانی شامل چندین واژه ابتدایی (جوان، میان سال، پیر) می شود که با منفی سازی (نه) و یا قیدها (خیلی، کم یا بیش، کاملاً، تا حدی و غیره) اصلاح می شود و سپس با حروف ربط مثل «و» و «یا» و... به هم متصل می شوند. حال به معرفی دو قید پرکاربرد «خیلی» و «کم یا بیش» می پردازیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. فرض کنید A یک مجموعه فازی در U باشد، خیلی A یک مجموعه فازی در U است که با تابع عضویت زیر تعریف می شود

$$\mu_{very A}(x) = [\mu_A(x)]^2, \quad (18.1)$$

و «کم یا بیش A » به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر معرفی می شود

$$\mu_{more or less A}(x) = [\mu_A(x)]^{\frac{1}{2}}. \quad (19.1)$$

عبارات فازی مرکب به عنوان روابط فازی مرکب در نظر گرفته می شوند و با استفاده از تعاریف ارائه شده می توانیم عملگر not و حرف ربط and و or را به صورت زیر تعبیر کنیم فرض کنید x و y متغیرهای زبانی در دامنه های فیزیکی U و V و A و B دو مجموعه فازی در U و V باشند، آنگاه منفی ساز نه، با مکمل های فازی جایگزین می شود، یعنی

$$not(A) = \bar{A},$$

رابط فازی And با اشتراک های فازی جایگزین می شود، یعنی عبارت مرکب فازی

$$x, A \text{ است و } y, B \text{ است},$$

به صورت رابطه اشتراک فازی $A \cap B$ در $U \times V$ با تابع عضویت

$$\mu_{A \cap B}(x, y) = T[\mu_A(x), \mu_B(y)], \quad (20.1)$$

تفسیر می‌شود که $T : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک T -نرم دلخواه است. رابط فازی or با اجتماع فازی جایگزین می‌شود، یعنی عبارت مرکب فازی

x, A است یا y, B است،

به صورت رابطه فازی $A \cup B$ در $U \times V$ با تابع عضویت

$$\mu_{A \cup B}(x, y) = S[\mu_A(x), \mu_B(y)], \quad (21.1)$$

تفسیر می‌شود که $S : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ یک S -نرم دلخواه است.

۳.۱.۱ قواعد اگر-آنگاه فازی

تعریف ۱۸.۱.۱. قاعده اگر-آنگاه فازی (بیان شرطی فازی) به صورت زیر است

اگر x, A است، آنگاه، y, B است،

که A و B مقادیر زبانی تعریف شده با مجموعه‌های فازی جهانی X و Y هستند. اغلب « x, A است» مقدم نامیده می‌شود در حالی که « y, B است» نتیجه یا تالی نامیده می‌شود. مثال‌های قواعد فازی اگر-آنگاه در عبارات روزمره زبان‌شناسی ما پراکنده است. مثل موارد زیر

- اگر فشار زیاد باشد، حجم کم است.
- اگر جاده لغزنده باشد، رانندگی خطرناک است.
- اگر سرعت زیاد باشد، کاربرد ترمز کم است.

قبل از این که بتوانیم قواعد اگر-آنگاه را برای مدل‌سازی و تحلیل سیستم به کار ببریم، ابتدا باید بدانیم که قواعد اگر-آنگاه فازی چگونه تعبیر و تفسیر می‌شوند. در ریاضیات جدید عبارت اگر p آنگاه q به شکل $p \rightarrow q$ نوشته می‌شود. هنگامی که p و q گزاره‌های قطعی باشند، $p \rightarrow q$ یک استلزام کلی است که معادل با

$$\bar{p} \vee q, \quad (22.1)$$

و

$$(p \wedge q) \vee \bar{p}, \quad (23.1)$$

است. هنگامی که p و q گزاره‌های فازی باشند، $p \rightarrow q$ یک استلزام جزئی یا محلی خواهد بود، چرا که با توجه به تعدد مقادیر p و q ، تعداد حالت‌های زیادی خواهد داشت. در این حالت، $p \rightarrow q$ معادل

$$(p \wedge q), \quad (24.1)$$

است. بنابراین می‌توانیم قواعد فازی را با جایگزینی $\neg$ ، $\vee$ و $\wedge$ که نشان‌دهنده عملیات منطقی and و or ، not هستند، با مکمل، اجتماع و اشتراک فازی تفسیر نماییم. به دلیل وجود چند نوع عملگر مکمل، اجتماع و اشتراک، تفسیرهای متعددی برای قواعد اگر-آنگاه فازی ارائه می‌شود که تعدادی از آن‌ها را فهرست می‌کنیم. فرض کنید قاعده اگر-آنگاه فازی را به صورت $IF \langle Fp \rangle THEN \langle Fq \rangle$ نمایش دهیم که Fp و Fq عبارت‌های فازی هستند. همچنین فرض کنید Fp یک رابطه فازی در $U = U_1 \times \dots \times U_n$ و Fq یک رابطه فازی در $V = V_1 \times \dots \times V_m$ باشد و x و y به ترتیب متغیرهای زبانی در U و V باشند.

- استلزام دینس-رشر: اگر عملگرهای منطقی $\neg$ ، $\vee$ و $\wedge$ در رابطه (۲۲.۱) با مکمل فازی اولیه (۱.۱) و اجتماع فازی اولیه (۲.۱)، جایگزین کنیم استلزام دینس-رشر نتیجه می‌شود، یعنی قاعده فازی $IF \langle Fp \rangle THEN \langle Fq \rangle$ به شکل یک رابطه فازی Q در $U \times V$ با تابع عضویت زیر تفسیر می‌شود

$$\mu_{Q_D}(x, y) = \max[1 - \mu_{Fp}(x), \mu_{Fq}(y)]. \quad (25.1)$$

- استلزام ممدانی: اگر عملگر منطقی $\wedge$ در (۲۴.۱) را با $\min$ و ضرب جبری جایگزین کنیم استلزام ممدانی نتیجه می‌شود، یعنی قاعده فازی $IF \langle Fp \rangle THEN \langle Fq \rangle$ به شکل رابطه فازی Q_{MM} یا Q_{MP} در $U \times V$ با تابع عضویت زیر تفسیر می‌شود

$$\mu_{Q_{MM}}(x, y) = \min[\mu_{Fp}(x), \mu_{Fq}(y)], \quad (26.1)$$

$$\mu_{Q_{MP}}(x, y) = \mu_{Fp}(x) \mu_{Fq}(y). \quad (27.1)$$

۴.۱.۱ منطق فازی و استدلال تقریبی

منطق، مطالعه روش‌ها و اصول استدلال است و استدلال به معنای به دست آوردن گزاره‌ها و نتایج جدید از گزاره‌ها و عبارت‌های موجود است. منطق فازی، منطق کلاسیک دو مقداری را به گزاره‌هایی که مقدار درستی آن‌ها می‌تواند هر مقداری در محدوده $[0, 1]$ داشته باشد، تعمیم می‌دهد. این تعمیم امکان استدلال تقریبی را به ما می‌دهد. هدف نهایی منطق فازی این است که با استفاده از تئوری مجموعه‌های فازی به عنوان یک ابزار اصولی، بنیان‌هایی برای استدلال تقریبی با گزاره‌های نادقیق فراهم کند. برای دستیابی به این هدف سه قاعده استنتاج مودس پوننس تعمیم یافته، مودس تولنس تعمیم یافته و قیاس فرضی تعمیم یافته معرفی شده‌اند. به عنوان مثال قاعده مودس پوننس تعمیم یافته می‌گوید که دو گزاره فازی داده شده « $\dot{A}, x$ است» و «اگر A, x است، $\dot{A}$ است» باید یک گزاره جدید فازی به صورت « $\dot{B}, y$ است» را نتیجه دهد به نحوی که هرچه $\dot{A}$ به A نزدیکتر باشد $\dot{B}$ به B نزدیکتر است که $A, \dot{A}, B$ و $\dot{B}$ مجموعه‌های فازی هستند. بدین معنی که مقدمه ۱: $\dot{A}, x$ است.

مقدمه ۲: اگر x, A است، آن گاه y, B است.

نتیجه: $y, \dot{B}$ است.

برای تعیین توابع عضویت نتیجه با استفاده از توابع عضویت مقدمه، قاعده ترکیبی استنتاج به صورت زیر تعریف می شود

تعریف ۱۹.۱.۱. فرض کنید $\dot{A}$ یک مجموعه فازی در U و Q یک رابطه فازی در $U \times V$ باشد و $\mu_{\dot{A}}$ و $\mu_Q(x, y)$ داده شده باشند. رابطه

$$\mu_{\dot{B}}(y) = \sup_{x \in U} [\mu_{\dot{A}}(x) * \mu_Q(x, y)], \quad (28.1)$$

که * نماد عملگر T -نرم است، قاعده ترکیبی استنتاج یا ترکیب $sup - star$ نامیده می شود.

به طور خلاصه روابط دقیق محاسبه نتیجه مودس پوننس تعمیم یافته بدین ترتیب به دست می آید

مجموعه فازی $\dot{A}$ (که نشان دهنده مقدمه $x, \dot{A}$ است) و رابطه فازی $A \rightarrow B$ در $U \times V$ (که نشان دهنده مقدمه اگر x, A است، آن گاه y, B است) داده شده است. مجموعه فازی $\dot{B}$ در V که نشان دهنده نتیجه $y, \dot{B}$ است به صورت زیر نتیجه می شود

$$\mu_{\dot{B}}(y) = \sup_{x \in U} T[\mu_{\dot{A}}(x), \mu_{A \rightarrow B}(x, y)]. \quad (29.1)$$

باید توجه داشت که با استفاده از T -نرم ها و قواعد استلزام مختلف، نتایج متفاوتی به دست خواهد آمد.

۲.۱ سیستم‌های فازی

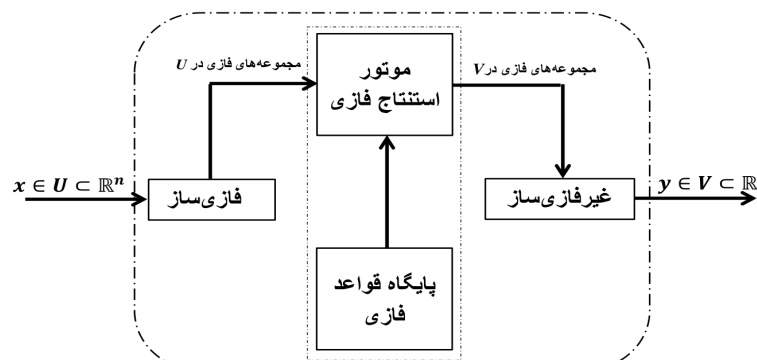
ساختار کلی یک سیستم فازی می تواند به صورت نمایش داده شده در شکل ۱.۱ باشد. چنین سیستمی از چهار بخش اصلی تشکیل شده است: پایگاه قواعد فازی^۱، موتور استنتاج فازی^۲، فازی ساز^۳ و غیرفازی ساز^۴. ورودی سیستم فازی می تواند داده های قطعی یا داده های فازی باشد. اگر ورودی سیستم فازی داده های قطعی باشند ابتدا فازی ساز مجموعه فازی مناسب را به ورودی غیر فازی اختصاص می دهد سپس فرایند استنتاج آغاز می شود. مقادیر متغیرهای ورودی به وسیله یک روش مناسب استدلال تقریبی (موتور استنتاج) و با استفاده از مجموعه ای از قواعد اگر-آنگاه فازی (پایگاه قواعد فازی) به متغیر خروجی که یک متغیر زبانی است، نگاشته می شود. علاوه بر مقادیر زبانی، ممکن است داده های قطعی به عنوان خروجی سیستم فازی مورد نیاز باشند. در چنین مواردی از یک نافازی ساز مناسب استفاده می شود تا داده های

¹Fuzzy Rule Base

²Fuzzy Inference Engine

³Fuzzifier

⁴Defuzzifier



شکل ۱.۱: ساختار اصلی سیستم‌های فازی.

قطعی که نماینده مجموعه فازی خروجی هستند تعیین شوند. در ادامه چهار بخش اصلی سیستم فازی را معرفی می‌کنیم.

(الف) پایگاه قواعد فازی: پایگاه قواعد فازی شامل مجموعه‌ای از قواعد اگر-آنگاه فازی است که از دانش افراد ماهر یا دانش حوزه مورد بررسی به دست می‌آید. به طور مشخص یک پایگاه داده با M قاعده به صورت زیر است

$$(3.1) \quad R^l: \text{اگر } x_1, x_2, \dots, x_n \text{ و } A_n^l \text{ است، آنگاه } y, B^l \text{ است،}$$

که $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in U$ و $y \in V$ و به ترتیب ورودی و خروجی سیستم فازی هستند. پایگاه قواعد فازی خوش تعریف باید کامل، سازگار و پیوسته باشد.

تعریف ۱.۲.۱. پایگاه قواعد فازی کامل نامیده می‌شود اگر برای هر $x \in U$ حداقل یک قاعده در پایگاه قواعد فازی وجود داشته باشد.

تعریف ۲.۲.۱. پایگاه قواعد فازی سازگار است اگر قواعدی یافت نشوند که بخش‌های اگر یکسان و بخش‌های آنگاه متفاوت داشته باشند.

تعریف ۳.۲.۱. پایگاه قواعد فازی پیوسته نامیده می‌شود اگر قواعد همسایه‌ای وجود نداشته باشند که اشتراک مجموعه‌های فازی بخش آن‌ها تهی باشد.

(ب) موتور استنتاج فازی: موتور استنتاج فازی، قواعد پایگاه قواعد فازی را به کار می‌گیرد تا یک نگاشت را از مجموعه‌های فازی در فضای ورودی U به مجموعه‌های فازی در فضای خروجی V تعیین کند. به طور کلی دو روش برای نتیجه‌گیری از روی یک مجموعه قاعده وجود دارد

- استنتاج مبتنی بر ترکیب قواعد (ابتدا جمع و سپس استنتاج)، که ابتدا ترکیبی از تمامی قواعد موجود در پایگاه قواعد فازی ساخته می‌شود، و سپس استنباط با استفاده از ترکیب $sup - star$ انجام می‌شود.

• استنتاج مبتنی بر قواعد جداگانه (ابتدا استنتاج و سپس جمع)، که در آن ابتدا استنتاج با استفاده از ترکیب $sup - star$ برای هر یک از قواعد به صورت جداگانه انجام می‌شود و سپس خروجی نهایی از ترکیب نتایج استنتاج به دست می‌آید.

فرایند ترکیب قواعد در استنتاج مبتنی بر ترکیب قواعد و همچنین ترکیب نتایج استنتاج در استنتاج مبتنی بر قواعد جداگانه، تجميع^۱ نامیده می‌شود. عملگر تجميع برای M مقدار $x_1, x_2, \dots, x_M \in [0, 1]$ با نگاشت

$$\oplus : [0, 1]^M \Rightarrow [0, 1],$$

$$x = \oplus_{i=1}^M x_i = \oplus(x_1, x_2, \dots, x_M),$$

نمایش داده می‌شود. عملگر تجميع را می‌توان با اجتماع که به وسیله یک S -نرم معرفی می‌شود (ترکیب ممدانی) یا با اشتراک که به وسیله یک T -نرم معرفی می‌شود (ترکیب گودال)، تعریف کرد. بنابراین اگر A یک مجموعه فازی دلخواه در U و ورودی موتور استنتاج باشد. خروجی موتور استنتاج فازی مبتنی بر ترکیب قواعد به صورت

$$\mu_{\dot{B}_{FATI}}(y) = \sup_{x \in U} T[\mu_A, \oplus_{i=1}^M \mu_{R^i}(x, y)], \quad (31.1)$$

و خروجی موتور استنتاج فازی مبتنی بر قواعد جداگانه به صورت

$$\mu_{\dot{B}_{FITA}}(y) = \oplus_{i=1}^M \sup_{x \in U} T[\mu_A, \mu_{R^i}(x, y)], \quad (32.1)$$

به دست می‌آید.

روال محاسباتی استنتاج مبتنی بر قواعد جداگانه به ترتیب زیر است
گام اول: برای M قاعده فازی توابع عضویت $\mu_{A_1^l \times \dots \times A_n^l}(x_1, \dots, x_n)$ را مطابق با رابطه زیر معین کنید

$$\mu_{A_1^l \times \dots \times A_n^l}(x_1, \dots, x_n) = \mu_{A_1^l}(x_1) * \dots * \mu_{A_n^l}(x_n), \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad (33.1)$$

که $*$ یک عملگر T -نرم است.

گام دوم: $A_1^l \times \dots \times A_n^l$ را به عنوان مقدمه و B^l را به عنوان نتیجه در یکی از استلزام‌های معرفی شده در نظر گرفته و $\mu_{R^l}(x_1, \dots, x_n, y) = \mu_{A_1^l \times \dots \times A_n^l \rightarrow B^l}(x_1, \dots, x_n, y)$ را برای $l = 1, 2, \dots, M$ مطابق با یکی از این استلزام‌ها تعیین کنید.

گام سوم: برای مجموعه فازی داده شده $\dot{A}$ در U ، خروجی مجموعه فازی $\dot{B}_l$ در V برای هر قاعده جداگانه R_l به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\mu_{\dot{B}_l}(y) = \sup_{x \in U} T[\mu_A, \mu_{R^l}(x, y)], \quad 1 \leq l \leq M, \quad (34.1)$$

¹Aggregation

گام چهارم: خروجی موتور استنتاج فازی، ترکیب M خروجی فازی $\{\dot{B}_1, \dots, \dot{B}_M\}$ خواهد بود. این ترکیب به صورت اجتماع

$$\mu_{\dot{B}}(y) = \mu_{\dot{B}_1}(y) + \dots + \mu_{\dot{B}_M}(y), \quad (35.1)$$

یا به صورت اشتراک

$$\mu_{\dot{B}}(y) = \mu_{\dot{B}_1}(y) * \dots * \mu_{\dot{B}_M}(y), \quad (36.1)$$

است که $+$ و $*$ به ترتیب نشان‌دهنده عملگرهای S -نرم و T -نرم هستند. به عنوان مثال موتور استنتاج حاصل ضرب، از استنتاج مبتنی بر قواعد جداگانه با ترکیب اجتماع، استلزام حاصل ضرب ممدانی، ضرب جبری برای T -نرم‌ها و $\max$ برای S -نرم‌ها به دست می‌آید. بنابراین با داشتن مجموعه فازی $\dot{A}$ در U ، موتور استنتاج حاصل ضرب مطابق رابطه زیر، مجموعه فازی $\dot{B}$ را در V می‌دهد

$$\mu_{\dot{B}}(y) = \max_{l=1}^M [\sup_{x \in U} (\mu_{\dot{A}}(x) \prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i) \mu_{B^l}(y))]. \quad (37.1)$$

ج) فازی‌سازها: در بسیاری از مسائل کاربردی ورودی سیستم‌های فازی داده‌های قطعی هستند در صورتی که ورودی موتور استنتاج فازی باید یک مجموعه فازی باشد. فازی‌ساز نگاشتی از مقادیر حقیقی $x^* \in U \subset \mathbb{R}^n$ به یک مجموعه فازی $\dot{A}$ در U است. به عنوان مثال فازی‌ساز منفرد نقطه $x^* \in U$ با مقدار حقیقی را به یک منفرد فازی $\dot{A}$ در U می‌نگارد که مقدار تعلق در نقطه x^* برابر ۱ و در سایر نقاط U برابر ۰ است، یعنی

$$\mu_{\dot{A}}(x) = \begin{cases} 1, & x = x^*, \\ 0, & \text{در غیر این صورت.} \end{cases} \quad (38.1)$$

د) غیرفازی‌سازها: خروجی موتور استنتاج فازی یک مجموعه فازی است در حالی که در بسیاری از مسائل کاربردی نیاز به یک خروجی قطعی داریم. غیرفازی‌ساز به عنوان نگاشتی از مجموعه فازی $\dot{B}$ در $V \subset \mathbb{R}$ (که خروجی موتور استنتاج فازی است) به نقطه قطعی $y^* \in V$ تعریف می‌شود. در واقع غیرفازی‌ساز نقطه‌ای را مشخص می‌کند که بهترین نماینده مجموعه فازی $\dot{B}$ باشد. غیرفازی‌ساز مرکز ثقل یکی از متداول‌ترین غیرفازی‌سازها است که نقطه y^* را به عنوان مرکز ناحیه‌ای که به وسیله تابع عضویت $\mu_{\dot{B}}(y)$ پوشش داده شده، معرفی می‌کند. یعنی

$$y^* = \frac{\int_V y \mu_{\dot{B}}(y) dy}{\int_V \mu_{\dot{B}}(y) dy}. \quad (39.1)$$

اشکال این غیرفازی‌ساز در پیچیدگی محاسبات آن است. غیرفازی‌ساز میانگین مراکز به وسیله تقریب رابطه (۳۹.۱) با فرمول ساده‌تر این اشکال را رفع می‌کند. فرض کنید $\bar{y}^l$ ، مرکز مجموعه

فازی l ام و w_l درجه ارتفاع آن باشد، غیرفازی‌ساز میانگین مراکز، y^* را بدین ترتیب تعریف می‌کند

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l w_l}{\sum_{l=1}^M w_l}. \quad (۴۰.۱)$$

۱.۲.۱ انواع سیستم‌های فازی

با توجه به طیف گسترده‌ای از کاربردهای ممکن، انواع مختلفی از سیستم‌های فازی وجود دارد که در مقالات و کتاب‌ها ارائه شده‌اند. اما به‌دست آوردن سیستم‌های جدیدی که همراه با کاهش پیچیدگی محاسبات، بهبود کیفیت مدل‌سازی و یا سهولت بیشتر در تفسیر زبانی از نتایج استنتاج باشند، هنوز هم موضوع تحقیق بسیاری از محققان است. مدل پیشنهاد شده توسط ممدانی و اصیلیان [۶] اولین سیستم فازی ارائه شده در مقالات است که می‌توان آن را پایه و اساس مدل‌های فازی مبتنی بر قوانین اگر-آن‌گاه در نظر گرفت. در ادامه، سه نوع سیستم فازی را معرفی می‌کنیم که در کاربردهای مختلفی، به کار می‌روند. تفاوت بین این سه سیستم فازی در بخش تالی قواعد فازی و نحوه استنتاج است.

الف) مدل‌های فازی ممدانی^۱

سیستم فازی ممدانی به‌عنوان اولین تلاش برای کنترل موتور بخار به‌وسیله یک مجموعه از قواعد زبانی که توسط افراد باتجربه به‌دست آمده، ارائه شده است. در این مدل قواعد فازی به‌صورت (۳۰.۱) هستند و از عملگرهای $\min$ و $\max$ به‌ترتیب به‌عنوان T -نرم و S -نرم، فازی‌ساز منفرد و غیرفازی‌ساز مرکز ثقل استفاده شده است. در این مدل از استنتاج مبتنی بر قواعد جداگانه استفاده شده است بنابراین با توجه به (۳۲.۱) خروجی موتور استنتاج مدل ممدانی به‌صورت زیر است

$$\mu_{\hat{B}}(y) = \max_{i=1}^M \sup_{x \in U} \min[\mu_{A_i}(x), \mu_{B^i}(y)],$$

که

$$\mu_{A^i}(x) = \min[\mu_{A_1^i}(x), \mu_{A_2^i}(x), \dots, \mu_{A_n^i}(x)].$$

با استفاده از غیرفازی‌ساز مرکز ثقل خروجی سیستم فازی ممدانی به‌صورت

$$y^* = \frac{\int_v y \mu_{\hat{B}}(y) dy}{\int_v \mu_{\hat{B}}(y) dy},$$

تعیین می‌شود. با انتخاب T -نرم و S -نرم متفاوت انواع دیگری از سیستم‌های فازی به‌دست می‌آید. به‌عنوان مثال در سیستم فازی لارسن، از ضرب جبری برای T -نرم و میانگین حسابی برای عملگر تجمیع، استفاده می‌شود. بنابراین برای مشخص کردن سیستم فازی ممدانی، باید تابع هر یک از عملگرهای زیر تعیین شود

¹Mamdani Fuzzy Models

- عملگر T - نرم برای محاسبه قدرت ماکزیمم شلیک یک قانون با مقدم AND .
- عملگر S - نرم برای محاسبه قدرت شلیک یک قانون با مقدم OR .
- عملگر T - نرم برای محاسبه ترکیب $sup - star$.
- عملگر S - نرم برای تجمیع.

(ب) مدل‌های فازی سوگنو^۱

سیستم فازی سوگنو توسط تاکاگی^۲، سوگنو^۳ و کانگ^۴ با هدف ارائه رویکردی نظام‌مند برای ایجاد قوانین فازی از مجموعه داده خروجی - ورودی، پیشنهاد شده است. قواعد فازی در مدل فازی سوگنو دارای شکل زیر است

$$(41.1) \quad R^l: \text{اگر } x_1, C_1^l, \dots \text{ و } x_n, C_n^l \text{ است، آن گاه } y^l = f(x)$$

که C_i^l مجموعه‌های فازی، $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in U \subset \mathbb{R}^n$ و $f(x)$ می‌تواند هر تابعی باشد. وقتی $f(x)$ چندجمله‌ای درجه اول است، سیستم فازی حاصل، مدل فازی درجه یک سوگنو نام دارد که در [۷] و [۸] معرفی شده است. وقتی $f(x)$ ثابت است مدل فازی درجه صفر سوگنو را داریم که با نوع خاصی از سیستم فازی ممدانی یکسان است. خروجی سیستم سوگنو، به‌صورت متوسط وزن دار شده y^l های رابطه (۴۱.۱) محاسبه می‌شود، یعنی

$$y^* = \frac{\sum_{l=1}^M y^l w^l}{\sum_{l=1}^M w^l},$$

که وزن‌های w^l از رابطه زیر محاسبه می‌شوند

$$(42.1) \quad w^l = \prod_{i=1}^n \mu_{C_i^l}(x_i).$$

(ج) مدل‌های فازی تسوکاموتو^۵

قواعد فازی در مدل فازی تسوکاموتو دارای شکل زیر است

$$(43.1) \quad R^l: \text{اگر } x_1, C_1^l, \dots \text{ و } x_n, C_n^l \text{ است، آن گاه } y^l = f_l^{-1}(F^l(x))$$

که $f(y)$ یک تابع یکنوا است و

$$F^l(x) = T[\mu_{A_1^l}, \mu_{A_2^l}, \dots, \mu_{A_n^l}],$$

¹Sugeno Fuzzy Models

²Takagi

³Sugeno

⁴Kang

⁵Tsukamoto Fuzzy Models

قدرت شلیک قانون l است. خروجی به‌دست آمده برای هر قانون با قدرت شلیک $F^l(x)$ ، به‌صورت زیر است

$$\mu_{B^l}(y) = \begin{cases} F^l(x), & y = y^l \\ 0, & y \neq y^l, \end{cases}$$

که $y^l = f_l^{-1}(F^l(x))$ و $F^l(x) = f_l(y^l)$. خروجی سیستم به‌عنوان میانگین وزنی خروجی هر قانون در نظر گرفته می‌شود که وزن‌ها قدرت شلیک قواعد هستند، یعنی

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^M F^i(x) y^i}{\sum_{i=1}^M F^i(x)}. \quad (44.1)$$

این مدل اغلب مورد استفاده قرار نمی‌گیرد زیرا به اندازه مدل‌های فازی ممدانی یا سوگنو واضح نیست.

۲.۲.۱ سیستم‌های فازی به‌عنوان تقریب‌گرهای عمومی

سیستم‌های فازی از یکسو سیستم‌های مبتنی بر قواعد بوده که به‌وسیله مجموعه‌ای از قواعد زبانی ساخته می‌شوند از سویی دیگر سیستم‌های فازی نگاشت‌هایی غیرخطی هستند که می‌توان آن‌ها را به‌وسیله روابط دقیق ریاضی نمایش داد.

لم ۱.۲.۱. فرض کنید مجموعه فازی B^l با مرکز $\bar{y}^l$ یک مجموعه طبیعی باشد. فرمول دقیق سیستم‌های فازی با پایگاه قواعد (۳۰.۱)، موتور استنتاج حاصل ضرب، فازی‌ساز منفرد و غیر فازی‌ساز میانگین مراکز به‌صورت زیر است

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i))}{\sum_{l=1}^M (\prod_{i=1}^n \mu_{A_i^l}(x_i))}, \quad (45.1)$$

که $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ ورودی سیستم فازی و $f(x) \in V \subset \mathbb{R}$ خروجی سیستم فازی است.

لم (۱.۲.۱) نشان می‌دهد که سیستم فازی یک نگاشت غیرخطی از $x \in U \subset \mathbb{R}^n$ به $f(x) \in V \subset \mathbb{R}$ بوده که رابطه (۴۵.۱) فرمول دقیق این نگاشت را می‌دهد. سیستم‌های فازی به شکل (۴۵.۱) با سیستم‌های فازی مرتبه صفر سوگنو یکسان هستند و از متداول‌ترین سیستم‌های فازی مورد استفاده اند. با انتخاب توابع عضویت مختلف برای $\mu_{A_i^l}$ و μ_{B^l} زیر کلاس‌های مختلفی از سیستم‌های را می‌توان به‌دست آورد. به‌عنوان مثال اگر از توابع عضویت گوسین زیر برای $\mu_{A_i^l}$ و μ_{B^l} استفاده کنیم

$$\mu_{A_i^l}(x_i) = a_i^l \exp\left[-\left(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l}\right)^2\right],$$

$$\mu_{B^l}(y) = \exp\left[-(y - \bar{y}^l)^2\right],$$

که $\bar{x}_i^l, \bar{y}^l \in \mathbb{R}$ و $\sigma_i^l \in (0, \infty)$ ، $a_i^l \in (0, 1]$ پارامترهایی با مقادیر حقیقی هستند، آن‌گاه سیستم‌های فازی (۴۵.۱) بدین شکل در می‌آیند

$$f(x) = \frac{\sum_{l=1}^M \bar{y}^l [\prod_{i=1}^n a_i^l \exp(-(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l})^2)]}{\sum_{l=1}^M [\prod_{i=1}^n a_i^l \exp(-(\frac{x_i - \bar{x}_i^l}{\sigma_i^l})^2)]}. \quad (46.1)$$

مشاهده می‌شود که سیستم‌های فازی نوع خاصی از توابع غیرخطی هستند، بنابراین اهمیتی ندارد که به‌عنوان کنترل‌کننده استفاده شوند یا تصمیم‌گیرنده یا پردازشگر سیگنال یا هر نوع سیستم دیگر، موضوع جالب دانستن قابلیت سیستم‌های فازی از نقطه نظر یک تابع تقریب است. به‌عنوان مثال سیستم‌های فازی، کدام نوع از توابع غیرخطی را می‌توانند نشان دهند یا آن‌را تقریب بزنند و با چه دقتی؟ اگر سیستم‌های فازی فقط بتوانند انواع مشخصی از توابع غیرخطی را تقریب بزنند، آن‌هم با دقت محدودی، آن‌گاه در کاربردهای کلی و عمومی زیاد مناسب نخواهند بود. ولی اگر سیستم‌های فازی بتوانند هر تابع غیرخطی را با هر دقت دلخواهی تقریب بزنند آن‌گاه در طیف گسترده‌ای از کاربردهای مختلف، بسیار مفید خواهند بود. کلاس‌های مشخصی از سیستم‌های فازی قابلیت تقریب عمومی را دارند. به‌طور مشخص، قضیه اصلی زیر را داریم

قضیه ۱.۲.۱. (قضیه تقریب‌گر عمومی) فرض کنید که ورودی، مجموعه مرجع U یک مجموعه بسته در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه برای هر تابع حقیقی داده‌شده $g(x)$ در U و $\varepsilon > 0$ دلخواه، یک سیستم فازی $f(x)$ به‌شکل رابطه (۴۶.۱) وجود دارد به‌نحوی که

$$\sup_{x \in U} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

بنابراین سیستم‌های فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی‌ساز منفرد، غیرفازی‌ساز میانگین مراکز و توابع عضویت گوسین یا سیستم‌های فازی سوگنو مرتبه صفر تقریب‌گر عمومی هستند. اثبات این قضیه بر اساس قضیه زیر است.

قضیه ۲.۲.۱. (قضیه استون-ویراشتراس) فرض کنید Z مجموعه‌ای از توابع پیوسته، در مجموعه بسته U باشد. اگر

(۱) Z یک جبر باشد، بدین معنا که تحت عمل جمع، ضرب، و ضرب اسکالر بسته باشد،

(۲) Z متمایز کننده نقاط U باشد، یعنی برای هر $x, y \in U$ و $x \neq y$ یک $f \in Z$ وجود دارد به‌نحوی که $f(x) \neq f(y)$ ،

(۳) Z در هیچ نقطه‌ای از U صفر نشود، بدین معنی که برای هر $x \in U$ یک $f \in Z$ وجود دارد به‌نحوی که $f(x) \neq 0$ ،

آن‌گاه برای هر تابع حقیقی پیوسته $g(x)$ بر روی U و $\varepsilon > 0$ دلخواه، یک $f \in Z$ وجود دارد به‌طوری که

$$\sup_{x \in U} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

فصل ۲

حسابان کسری

۱.۲ مروری بر تاریخچه محاسبات کسری و تعاریف مقدماتی

ایده حسابان کسری از همان زمان حسابان معمولی به وجود آمد و بیشترین نظریه‌های مربوط به آن تا قبل از قرن بیستم گسترش یافت. نخستین بار این موضوع را لایبنیتز^۱ و هوپیتال^۲ در سال ۱۶۹۵ مطرح کردند. در آن زمان لایبنیتز به هوپیتال نامه نوشت و نظر او را درباره مشتق غیر صحیح $\frac{1}{x}$ جویا شد. سوال طرح شده توسط لایبنیتز باعث شد از آن به بعد افراد زیادی این موضوع را دنبال کنند. در سال ۱۷۳۰ این موضوع توجه اوایلر^۳ را به خود جلب نمود. در آن زمان اوایلر بیان کرد که اگر n یک عدد صحیح مثبت و P تابعی از x باشد. کسر $d^n P$ به dx^n را می‌توان به صورت جبری بیان کرد. در ۱۷۷۲، لاگرانژ^۴ قاعده‌ی زیر را برای عملگر دیفرانسیلی از مرتبه صحیح توسعه داد

$$\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}}, \quad (1.2)$$

و به‌طور غیر مستقیم به حسابان کسری کمک کرد. در ۱۸۱۲ لاپلاس^۵ یک مشتق کسری توسط مفهوم انتگرال تعریف کرد و در سال ۱۸۱۹ اولین نماد مشتق از مرتبه دلخواه توسط

¹Leibniz

²Hopital

³Euler

⁴Lagrange

⁵Laplace

لاکروا^۱ معرفی شد. سپس فوریه^۲ در ۱۸۲۲ عملگرهای کسری را با نمایش تابع انتگرالی تابع $f(x)$ به صورت زیر معرفی کرد

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{\infty} \cos(t(x-u)) dt,$$

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du \int_{-\infty}^{\infty} t^n \cos(t(x-u)) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} n\pi dt,$$

که n می تواند مثبت یا منفی باشد. این اولین تعریف مناسب از مشتق کسری برای هر تابع خوش تعریف بود. اگرچه دانشمندان و محققان زیادی مفهوم عملگر کسری را ارائه دادند، اما آبل^۳ اولین کسی بود که در سال ۱۸۲۳ کاربردی از عملگر کسری ارائه داد. او با استفاده از این ابزار جدید به حل مسئله تاتوکرون^۴ پرداخت و گامی اساسی در جهت بیان کاربردهای حسابان کسری برداشت. اولین مطالعه جدی روی حسابان کسری در سال ۱۸۳۲ توسط لیوویل^۵ صورت گرفت وی تلاش کرد معادلات دیفرانسیل با مشتق کسری را حل کند. در سال ۱۸۶۷ گرانوالد^۶ روی اپراتورهای مرتبه کسری کار کرد. ریمان تئوری انتگرال گیری کسری را در زمان تحصیلش گسترش داد و اولین مقاله خود را در سال ۱۸۹۲ منتشر کرد. گرانوالد و کروگ^۷ نتایج به دست آمده توسط ریمان و لیوویل را یکسان سازی کرده و انتگرال و مشتقی را به نام ریمان-لیوویل معرفی کردند. در اوایل قرن بیستم مارچاد^۸، واتانابه^۹ و ریس^{۱۰} تلاش هایی را در زمینه تعریف و تعمیم حسابان کسری انجام دادند. شخصی به نام کاپوتو با استفاده از بازنویسی فرمول ریمان-لیوویل مشتق جدیدی را معرفی نمود که امروزه با نام مشتق کاپوتو از آن استفاده می شود. با گذشت زمان و پیدایش کاربردهای مختلفی از حسابان کسری تعاریف متعددی از مشتق و انتگرال کسری که متناسب با مدل های فیزیکی بودند بیان شد. تا نیمه قرن بیستم حسابان کسری تا حدی رشد پیدا کرد که اولین کنفرانس در سال ۱۹۷۴ فقط مربوط به نظریات و کاربردهای حسابان کسری برگزار شد.

۱.۱.۲ انتگرال کسری

ایده تعریف انتگرال کسری از فرمول کشی برای محاسبه انتگرال مرتبه صحیح گرفته شده است. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $a, t \in \mathbb{R}$ و $t > a$ باشد

$${}_a I_t^n (f(t)) = \int_a^t \int_a^{\tau_1} \dots \int_a^{\tau_{n-1}} f(\tau) d\tau \dots d\tau_{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t f(\tau) (t-\tau)^{n-1} d\tau. \quad (2.2)$$

¹Lacroix

²Fourier

³Abel

⁴Tautochrone

⁵Liouville

⁶Grünwald

⁷Krug

⁸Marchaud

⁹Watanabe

¹⁰Riesz

اگر n با عدد مثبت و حقیقی α جایگزین شود، فرمول انتگرال کسری به صورت زیر به دست می آید

$${}_a I^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (3.2)$$

$${}_t I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (4.2)$$

که $\Gamma(\alpha)$ تعمیم تابع فاکتوریل است و به صورت زیر تعریف می شود

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt. \quad (5.2)$$

این انتگرال ها به ترتیب انتگرال های چپ و راست ریمان-لیوویل نامیده می شوند [۹]. برای مشتق کسری عملگرهای متعددی وجود دارند که در حالت کلی برهم منطبق نیستند. در ادامه دو عملگر مشتق معروف یعنی ریمان-لیوویل و کاپوتو را معرفی می کنیم.

۲.۱.۲ مشتق کسری ریمان-لیوویل

فرض کنید $f \in AC^n([a, b])$ روی بازه $[a, b]$ تا مرتبه $(n-1)$ ام مشتق پیوسته دارد و مشتق n ام آن مطلقاً پیوسته است و $n-1 < \alpha < n$. مشتقات چپ و راست ریمان-لیوویل به صورت زیر تعریف می شوند

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n ({}_a I_t^{n-\alpha} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (t > a), \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} {}_t D_b^\alpha f(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n ({}_t I_b^{n-\alpha} f(t)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{-d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (b > t). \end{aligned} \quad (7.2)$$

برخی از خواص مهم مشتق چپ ریمان-لیوویل به صورت زیر است

- ${}_a D_t^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda {}_a D_t^\alpha f(t) + \gamma {}_a D_t^\alpha g(t).$
- ${}_a D_t^\alpha ({}_a I_t^{-\alpha} f(t)) = f(t).$
- ${}_a I_t^{-\alpha} ({}_a D_t^\alpha f(t)) = f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_a D_t^{\alpha-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}.$
- ${}_a D_t^\alpha (x-a)^\beta = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)} (x-a)^{\beta-\alpha}.$
- ${}_a D_t^\alpha ({}_a I_t^{-\beta} f(t)) = {}_a D_t^{\alpha-\beta} f(t).$
- ${}_a I_t^{-\beta} ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^{\alpha-\beta} f(t) - \sum_{j=1}^n [{}_a D_t^{\alpha-j} f(t)]_{t=a} \frac{(t-a)^{\beta-j}}{\Gamma(\beta-j+1)}.$

به طور مشابه خواص بالا برای مشتق راست ریمان-لیوویل نیز برقرار است.

۳.۱.۲ مشتق کسری کاپوتو

تعریف مشتق و انتگرال کسری ریمان-لیوویل نقش مهمی در توسعه حسابان کسری داشته است. اما چون برای حل معادلات با مشتقات کسری ریمان-لیوویل به شرایط اولیه با مشتقات کسری نیاز است، نتوانست در کاربرد به ویژه در حل معادلات کسری رشد چندانی داشته باشد. با توجه به پیشرفت های جدید علوم و یافتن کاربردهایی از مشتقات کسری در مدل سازی پدیده ها، به یک تعریف از مشتق کسری نیاز بود که بتواند بهتر پدیده ها را مدل بندی کند و با شرایط اولیه مسئله ها نیز سازگار باشد [۲]. از این رو کاپوتو در سال ۱۹۷۶ مشتق کسری جدیدی را به نام مشتق کاپوتو^۱ معرفی کرد. فرض کنید $f(t) \in AC^n[a, b]$ و $n-1 < \alpha < n$ ، مشتقات کسری چپ و راست کاپوتو به ترتیب با عبارات زیر تعریف می شوند

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (۸.۲)$$

$${}_t^C D_b^\alpha f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau. \quad (۹.۲)$$

رابطه مشتق کسری ریمان-لیوویل و کاپوتو به صورت زیر است

$${}_a^{RL} D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)}. \quad (۱۰.۲)$$

از رابطه فوق نتیجه می شود که اگر برای $k=0, 1, \dots, n-1$ داشته باشیم $f^{(k)}(a) = 0$ ، آنگاه دو تعریف مشتق با هم برابر می شوند. در زیر برخی خواص مشتق کاپوتو ذکر شده است.

- ${}_t^C D_t^\alpha (\lambda f(t) + \gamma g(t)) = \lambda {}_t^C D_t^\alpha f(t) + \gamma {}_t^C D_t^\alpha g(t).$
- ${}_t^C D^\alpha c = 0,$

که در آن c ثابت است.

- ${}_t^C D^\beta [{}_t^C D^\alpha f(t)] = {}_t^C D^{\beta+\alpha} f(t).$
- ${}_t^C D^\alpha [I^\alpha f(t)] = f(t).$
- ${}_a I_t^\alpha [{}_a^C D_t^\alpha f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k.$
- ${}_t I_b^\alpha [{}_t^C D_b^\alpha f(t)] = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k.$

^۱Caputo Derivative

۴.۱.۲ مشتق کسری کاپوتو-فابریزیو

مشتق کسری کاپوتو یکی از رایج‌ترین عملگرهای کسری است. با این حال نقطه ضعف اصلی این عملگر هسته تکین آن است و از این رو برخی از دینامیک‌ها با استفاده از مشتقات کاپوتو نمی‌توانند به درستی مدل‌سازی شوند. برای رفع این مشکل کاپوتو و فابریزیو در [۱۰] مشتق جدیدی را به نام مشتق کاپوتو-فابریزیو^۱ ارائه دادند که هسته آن بدون نقطه تکین است. این مشتق کسری با تغییر هسته $(t - \tau)^{-\alpha}$ در (۸.۲) با تابع $\exp(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t - \tau))$ و $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ به دست می‌آید. فرض کنید $f \in H^1(a, b)$ که H^1 فضای سوبولوف^۲ مرتبه یک و $a < b$ ، مشتق کسری چپ و راست کاپوتو-فابریزیو از مرتبه $\alpha \in (0, 1)$ با مفهوم کاپوتو به صورت

$${}_a^{CF}D_t^\alpha f(t) = \frac{M_\alpha(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t \exp(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t - \tau)) \dot{f}(\tau) d\tau, \quad (11.2)$$

$${}_t^{CF}D_b^\alpha f(t) = -\frac{M_\alpha(\alpha)}{1-\alpha} \int_t^b \exp(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(\tau - t)) \dot{f}(\tau) d\tau. \quad (12.2)$$

تعریف می‌شوند که $M_\alpha(\alpha)$ تابع نرمال‌سازی است به طوری که $M_\alpha(0) = M_\alpha(1) = 1$. مشتقات کسری چپ و راست کاپوتو-فابریزیو از مرتبه $\alpha \in (0, 1)$ با مفهوم ریمان-لیویل به صورت زیر تعریف می‌شوند

$${}_a^{CFR}D_t^\alpha f(t) = \frac{M_\alpha(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t \exp(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t - \tau)) f(\tau) d\tau, \quad (13.2)$$

$${}_t^{CFR}D_b^\alpha f(t) = -\frac{M_\alpha(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_t^b \exp(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(\tau - t)) f(\tau) d\tau. \quad (14.2)$$

ملاحظه ۱.۱.۲. مشابه مشتق کسری کاپوتو، اگر f تابع ثابتی باشد ${}^{CF}D^\alpha f = 0$.

تعریف زیر فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء را برای مشتق کسری کاپوتو-فابریزیو ارائه می‌کند که نقش مهمی در اثبات مسائل مربوط به حساب تغییرات کسری دارد.

تعریف ۱.۱.۲. [۱۱] (انتگرال‌گیری جزء به جزء) فرض کنید $f \in AC_{loc}[a, b]$ (مشتق مرتبه اول f روی $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد) و $\alpha \in (0, 1)$. فرمول انتگرال‌گیری جزء به جزء مشتق کسری کاپوتو-فابریزیو به صورت زیر است

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) {}_a^{CF}D_t^\alpha g(t) dt &= \int_a^b g(t) {}_t^{CF}D_b^\alpha f(t) dt \\ &+ f(b) \int_a^b g(\tau) \varphi_\alpha(b - \tau) d\tau - g(a) \int_a^b f(\tau) \varphi_\alpha(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

که $\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{1-\alpha} \exp(-\frac{\alpha}{1-\alpha}t)$

^۱Caputo-Fabrizio Derivative

^۲Sobolev

۵.۱.۲ مشتق و انتگرال کسری آتانگانا- بالینو

فرض کنید $f \in H^1(a, b)$, $a < b$ و $\alpha \in (0, 1)$ ، مشتق کسری آتانگانا- بالینو^۱ که هسته آن بدون نقطه تکیه است با مفهوم کاپوتو به صورت

$${}_a^{ABC}D_t^\alpha f(t) = \frac{M_\alpha(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t E_\alpha\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^\alpha\right) \dot{f}(\tau) d\tau, \quad (15.2)$$

و با مفهوم ریمان- لیویل به صورت

$${}_a^{ABR}D_t^\alpha f(t) = \frac{M_\alpha(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t E_\alpha\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^\alpha\right) f(\tau) d\tau, \quad (16.2)$$

تعریف می شود که $E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$ ، تابع میتاگ- لفلر است. همچنین مشتق کسری راست آتانگانا- بالینو با مفهوم کاپوتو به صورت

$${}_t^{ABC}D_b^\alpha f(t) = -\frac{M_\alpha(\alpha)}{1-\alpha} \int_t^b E_\alpha\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(\tau-t)^\alpha\right) \dot{f}(\tau) d\tau, \quad (17.2)$$

و با مفهوم ریمان- لیویل به صورت

$${}_t^{ABR}D_b^\alpha f(t) = -\frac{M_\alpha(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_t^b E_\alpha\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(\tau-t)^\alpha\right) f(\tau) d\tau, \quad (18.2)$$

تعریف می شود.

انتگرال کسری چپ و راست آتانگانا- بالینو به ترتیب با عبارات زیر تعریف می شوند

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1-\alpha}{M_\alpha(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{M_\alpha(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (19.2)$$

$${}_t I_b^\alpha f(t) = \frac{1-\alpha}{M_\alpha(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{M_\alpha(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \quad (20.2)$$

در زیر برخی روابط مفید بین مشتقات کسری چپ و راست آتانگانا- بالینو با مفهوم کاپوتو و آتانگانا- بالینو با مفهوم ریمان- لیویل و انتگرال های کسری متناظر بیان می شود

- ${}_a I_t^\alpha \{ {}_a^{ABR}D_t^\alpha f(t) \} = {}_t I_b^\alpha \{ {}_t^{ABR}D_b^\alpha f(t) \} = f(t).$
- ${}_a I_t^\alpha \{ {}_a^{ABC}D_t^\alpha f(t) \} = f(t) - f(a).$
- ${}_t I_b^\alpha \{ {}_t^{ABC}D_b^\alpha f(t) \} = f(t) - f(b).$

برای جزئیات بیشتر به [۱۲] و [۱۳] مراجعه شود.

¹Atangana-Baleanu Fractional Derivative

۶.۱.۲ حسابان کسری مرتبه متغیر

یک تعمیم جالب از نظریه حسابان کسری که اخیراً زیاد به آن توجه شده است مسائلی هستند که شامل مشتق‌های مرتبه کسری وابسته به زمان یا مکان هستند، یعنی مرتبه این مشتق‌ها ثابت نیست [۱۴]–[۱۵]. بسیاری از نویسندگان دریافتند که بعضی پدیده‌ها در فیزیک، وقتی عملگر مرتبه کسری ثابت نباشد بهتر توصیف می‌شوند مانند رفتار بعضی از فرآیندهای انتشار در پاسخ به تغییرات دما، فرآیند انتشار در یک محیط ناهمگن یا فرآیندهایی که تغییرات در محیط باعث تغییر دینامیک ذرات می‌شود [۱۶]–[۱۸]. کارهای پیش‌گامانه عملگر مرتبه متغیر، با معرفی انتگرال و مشتق ریمان–لیویل مرتبه متغیر، توسط سامکو و همکاران در سال ۱۹۹۳ ارائه شده‌اند [۱۹]–[۲۰]. با توسعه حساب کسری مرتبه متغیر، عملگرهای مختلفی با مرتبه متغیر معرفی شده‌اند. یک رده از مشتقات کسری با مرتبه متغیر در [۲۱] گزارش شده‌است. در ادامه مشتقات کسری آتانگانا–بالینو با مرتبه متغیر $\alpha(t) \in (0, 1)$ را معرفی می‌کنیم. فرض کنید $f \in H^1(0, T)$, $T > 0$ و $M(\alpha(t))$ تابع نرمال‌ساز باشد.

تعریف ۲.۱.۲. [۲۲] مشتق کسری چپ مرتبه متغیر آتانگانا–بالینو با مفهوم کاپوتو به صورت

$${}_{0^+}^{ABC}D_t^{\alpha(t)} f(t) = \frac{M(\alpha(t))}{1 - \alpha(t)} \int_0^t E_{\alpha(t)}\left(-\frac{\alpha(t)}{1 - \alpha(t)}(t - \tau)^{\alpha(t)}\right) \dot{f}(\tau) d\tau, \quad (21.2)$$

و با مفهوم ریمان–لیویل به صورت

$${}_{0^+}^{ABR}D_t^{\alpha(t)} f(t) = \frac{M(\alpha(t))}{1 - \alpha(t)} \frac{d}{dt} \int_0^t E_{\alpha(t)}\left(-\frac{\alpha(t)}{1 - \alpha(t)}(t - \tau)^{\alpha(t)}\right) f(\tau) d\tau, \quad (22.2)$$

تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۱.۲. [۲۲] مشتق راست آتانگانا–بالینو مرتبه متغیر با مفهوم کاپوتو به صورت

$${}_t^{ABC}D_T^{\alpha(t)} f(t) = -\frac{M(\alpha(t))}{1 - \alpha(t)} \int_t^T E_{\alpha(t)}\left(-\frac{\alpha(t)}{1 - \alpha(t)}(\tau - t)^{\alpha(t)}\right) \dot{f}(\tau) d\tau, \quad (23.2)$$

و با مفهوم ریمان–لیویل به صورت

$${}_t^{ABR}D_T^{\alpha(t)} f(t) = -\frac{M(\alpha(t))}{1 - \alpha(t)} \frac{d}{dt} \int_t^T E_{\alpha(t)}\left(-\frac{\alpha(t)}{1 - \alpha(t)}(\tau - t)^{\alpha(t)}\right) f(\tau) d\tau. \quad (24.2)$$

تعریف می‌شود.

برخی از روابط بین مشتقات کسری چپ و راست آتانگانا–بالینو در مفهوم ریمان–لیویل و آتانگانا–بالینو با مفهوم کاپوتو به صورت زیر تعریف می‌شود.

• رابطه بین مشتق کسری چپ آتانگانا–بالینو در مفهوم ریمان–لیویل با مفهوم کاپوتو

$${}_{0^+}^{ABC}D_t^{\alpha(t)} f(t) = {}_{0^+}^{ABR}D_t^{\alpha(t)} f(t) - \frac{M(\alpha(t))}{1 - \alpha(t)} f(0) E_{\alpha(t)}\left(-\frac{\alpha(t)}{1 - \alpha(t)} t^{\alpha(t)}\right), \quad (25.2)$$

• رابطه بین مشتق کسری راست آتانگانا- بالینو در مفهوم ریمان- لیوویل با مفهوم کاپوتو

$${}_t^{ABC} D_T^{\alpha(t)} f(t) = {}_t^{ABR} D_T^{\alpha(t)} f(t) - \frac{M(\alpha(t))}{1 - \alpha(t)} f(T) E_{\alpha(t)} \left(-\frac{\alpha(t)}{1 - \alpha(t)} (T - t)^{\alpha(t)} \right). \quad (26.2)$$

• انتگرال گیری جزء به جزء

$$\int_0^T {}_0^{ABC} D_t^{\alpha(t)} f(t) g(t) dt = \int_0^T f(t) {}_t^{ABR} D_T^{\alpha(t)} g(t) dt + \frac{M(\alpha(t))}{1 - \alpha(t)} f(t) (e^{\frac{1}{\alpha(t)}, 1, \frac{-\alpha(t)}{1 - \alpha(t)}, T - g(t)} |_0^T), \quad (27.2)$$

که $E_{\rho, \mu}^{\gamma}(z) =$ همچنین $(e_{\rho, \mu, \omega, b}^{\gamma} - \varphi)(x) = \int_x^b (t - x)^{\mu-1} E_{\rho, \mu}^{\gamma}[\omega(t - x)^{\rho}] \varphi(t) dt, x < b,$
 $\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma)_k z^k}{\Gamma(\rho k + \mu) k!}$
 برای جزئیات بیشتر به [۲۲] مراجعه شود.

۲.۲ معادلات دیفرانسیل جبری کسری

بسیاری از پدیده‌های فیزیکی در مکاترونیک، سینتیک شیمیایی، کنترل بهینه، کنترل فرآیند شیمیایی، دینامیک مولکولی، طراحی مدار الکتریکی، سیستمهای قدرت و فرآیندهای تولید صنعتی و غیره با استفاده از معادلات دیفرانسیل جبری^۱ مدل سازی می شوند [۲۳] - [۲۴]. فرم کلی معادله دیفرانسیل به صورت زیر است

$$F(t, y, \dot{y}) = 0, \quad (28.2)$$

که y بردار متغیرهای وابسته، F یک تابع برداری از زمان، متغیرهای وابسته و مشتقات آنها و $\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}$ منفرد است. شکل خاصی از معادلات دیفرانسیل جبری در (۲۸.۲)، که غالباً در کاربردهای عملی ظاهر می شود، معادله دیفرانسیل جبری نیمه صریح^۲ یا معادله دیفرانسیل معمولی با محدودیت های جبری است که به صورت زیر تعریف می شود

$$\dot{y} = F(t, y, z), \quad (29.2)$$

$$0 = g(t, y, z). \quad (30.2)$$

برای مطالعه بیشتر درباره معادلات دیفرانسیل جبری به [۲۵] - [۲۶] مراجعه شود. ماهیت غیر موضعی^۳ مشتقات مرتبه کسری باعث می شود که بسیاری از این پدیده ها با مشتقات مرتبه کسری بهتر توصیف شوند به عنوان مثال فرآیندهای الکتروشیمیایی، طراحی کنترل گر بهینه غیر عدد صحیح، فرآیندهای بیوشیمیایی پیچیده و ... با معادلات دیفرانسیل جبری- کسری دقیق تر توصیف می شوند [۲۴].

تعریف ۱.۲.۲. [۲۷] معادلات دیفرانسیل جبری کسری^۴ تعمیمی از معادلات دیفرانسیل

¹Differential Algebraic Equation

²Semi-explicit Differential Algebraic Equation

³Non-local

⁴Fractional Differential Algebraic Equations

جبری مرتبه صحیح است که در آن معادلات دیفرانسیل با مرتبه کسری در نظر گرفته می شود به عبارت دیگر معادلات دیفرانسیل جبری کسری مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل کسری همراه محدودیت های جبری اضافی است و به صورت زیر نمایش داده می شود

$${}^*D^\alpha y = F(t, y, z), \quad (31.2)$$

$$\circ = g(t, y, z). \quad (32.2)$$

که ${}^*D^\alpha$ یک عملگر مشتق کسری است.

۳.۲ مسئله کنترل بهینه کسری و شرایط لازم بهینگی

یکی از موضوعات جالب و مورد توجه در سیستم های کسری مسئله کنترل بهینه کسری^۱ است. کنترل بهینه کسری تعمیمی از کنترل بهینه کلاسیک است که در آن سیستم های دینامیکی شامل مشتقات کسری است. مسئله کنترل بهینه کسری می تواند نسبت به مشتق های کسری مختلفی تعریف شود که یکی از مهم ترین آن ها مشتق کسری کاپاتو است. ابتدا فرم کلی مسئله کنترل بهینه کسری را تعریف می کنیم و سپس قضایای شرایط بهینگی بیان می شود.

$$\text{Minimize } J(u) = \psi(T, x(T)) + \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt \quad (33.2)$$

subject to

$$M\dot{x}(t) + N {}^*D_t^\alpha x(t) = g(t, x(t), u(t)), \quad \circ < t \leq T, \quad (34.2)$$

$$x(\circ) = x_\circ, \quad (35.2)$$

که در آن $M, N \in \mathbb{R}^p, x_\circ \in \mathbb{R}^p, \alpha \in (\circ, 1]$ و $(M, N) \neq \circ$ هستند و

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p, \quad \psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R},$$

توابع مشتق پذیر هستند. $x(\cdot)$ و $u(\cdot)$ به ترتیب متغیرهای وضعیت و کنترل هستند و ${}^*D_t^\alpha$ در (۳۴.۲) عملگر مشتق کسری است. در مسئله (۳۳.۲) – (۳۵.۲)، T و $x(T)$ می توانند ثابت و یا آزاد باشند. اگر $N = \circ$ باشد مسئله کنترل بهینه کلاسیک را خواهیم داشت. برای به دست آوردن شرایط بهینگی مسئله (۳۳.۲) – (۳۵.۲) با مشتق کاپاتو ابتدا تابع همیلتونی H را با استفاده از ضریب لاگرانژ $\lambda(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می کنیم [۲۸]

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = f(x(t), u(t), t) + \lambda^T g(x(t), u(t), t). \quad (36.2)$$

لم ۱.۳.۲. [۲۸] فرض کنید $g: [\circ, T] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع پیوسته باشد و به ازای هر تابع پیوسته $\eta: [\circ, T] \rightarrow \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$\int_0^T \eta(t) g(t) dt = \circ,$$

¹Fractional Optimal Control Problem

در این صورت به ازای هر $t \in [0, T]$ داریم $g(t) = 0$.

قضیه ۱.۳.۲. [۲۸] فرض کنید (x, u, T) جواب بهینه مسئله (۳۳.۲)–(۳۵.۲) باشد. در این صورت تابع $\lambda(\cdot)$ وجود دارد به طوری که سه تایی (x, u, λ) در شرایط زیر صدق می کند (الف) دستگاه همیلتونی

$$-\frac{\partial H(t, x, u, \lambda)}{\partial x} = M\dot{\lambda}(t) - N_t^C D_T^\alpha \lambda(t), \quad t \in [0, T], \quad (۳۷.۲)$$

$$\frac{\partial H(t, x, u, \lambda)}{\partial \lambda} = M\dot{x}(t) + N_0^C D_t^\alpha x(t), \quad t \in [0, T], \quad (۳۸.۲)$$

(ب) شرایط ایستایی

$$\frac{\partial H(t, x, u, \lambda)}{\partial u} = 0, \quad t \in [0, T], \quad (۳۹.۲)$$

(ج) شرایط تراگردی

$$\left[H(t, x, u, \lambda) - N\lambda(t)_0^C D_t^\alpha x(t) + N\dot{x}(t)_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) + \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0, \quad (۴۰.۲)$$

$$\left[M\lambda(t) + N_t I_T^{1-\alpha} \lambda(t) - \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0, \quad (۴۱.۲)$$

که همیلتونی H در (۳۶.۲) تعریف شده است.

فصل ۳

حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از سیستم‌های فازی

بسیاری از پدیده‌های طبیعی توسط سیستم‌های دینامیکی توصیف می‌شوند که شامل معادلات جبری و دیفرانسیل است. در قرن اخیر، با توجه به تحولات حساب کسری، مشتق کسری به عنوان یک ابزار مهم در مدل سازی پدیده‌های طبیعی معرفی شده است. با پیدایش کاربردهای حساب کسری در فیزیک و تقریباً همه شاخه‌های علم، ظهور سیستم‌های دینامیکی پیچیده که شامل مشتقات کسری و معادلات جبری هستند، اجتناب ناپذیر است. بسیاری از پدیده‌های فیزیکی را می‌توان با استفاده از سیستم‌های پیچیده‌ای که به عنوان معادلات دیفرانسیل جبری کسری شناخته می‌شوند، مدل سازی کرد [۲۷، ۲۹، ۳۰]. از آنجا که بیشتر معادلات دیفرانسیل جبری کسری جواب دقیقی ندارند، روش‌های عددی برای به دست آوردن جواب‌های تقریبی معادلات دیفرانسیل جبری کسری ضروری و مفید هستند. مفهوم معادلات دیفرانسیل جبری کسری موضوع جدیدی در ریاضیات است، از این رو تعداد رویکردهای محدودی برای حل آن‌ها ارائه شده است. به عنوان مثال در [۳۱] یک روش عددی مبتنی بر سری‌های توانی پیشنهاد شده است. توابع موجک هار برای حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری در [۳۲] بسط داده شده‌اند. در [۳۳]، نویسندگان نظریه کنترل حالت لغزشی را برای تبدیل معادلات دیفرانسیل

۳۰ حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از سیستم‌های فازی

جبری کسری به معادلات دیفرانسیل کسری معرفی کرده‌اند، سپس از روش پیش‌بینی کننده-تصحیح کننده برای حل معادلات دیفرانسیل کسری حاصل استفاده کرده‌اند. روش آنالیز هموتوبی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری در [۳۴] بکار گرفته شده است همچنین این روش با نتایج روش‌های عددی دیگر مانند روش تجزیه آدومین مقایسه شده است. در [۳۵]، روش تعمیم یافته ژاکوبی گالرکین برای حل عددی یک کلاس از معادلات دیفرانسیل جبری کسری غیرخطی توسعه داده شده است. در [۳۶]، نویسنده روش منحنی بزیه^۱ را برای حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری گسترش داده است.

تعمیمی از معادلات دیفرانسیل جبری کسری، معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر است که در آن معادلات دیفرانسیل به صورت مشتقات کسری با مرتبه متغیر هستند. این تعمیم از معادلات دیفرانسیل جبری کسری تا کنون مورد بررسی قرار نگرفته است. در این فصل به حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از سیستم‌های فازی می‌پردازیم. همچنین نشان می‌دهیم شرایط لازم بهینگی برای مسائل کنترل بهینه کسری به صورت معادلات دیفرانسیل جبری کسری هستند. بنابراین در این فصل به عنوان یک کاربرد معادلات دیفرانسیل جبری کسری، مسئله کنترل بهینه کسری نیز با مدل فازی پیشنهادی حل می‌شود.

۱.۳ معرفی معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر و روش حل مسئله

معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با مشتقات کسری آتانگانا-بالینو به صورت زیر تعریف می‌شود

$${}^{\circ}ABC D_t^{\alpha_i(t)} x_i(t) = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n), \quad \alpha_i(t) \in (\circ, 1), \quad (1.3)$$

$$\circ = g(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad t \geq \circ, \quad (2.3)$$

با شرط اولیه

$$x_i(\circ) = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

در سال ۲۰۰۴، ژانگ^۲ و همکاران سیستم فازی جدیدی را به نام مدل هایپربولیک فازی تعمیم یافته^۳ ارائه دادند که به عنوان ابزاری موفق برای تقریب توابع غیرخطی شناخته شده است [۳۷]. از این مدل فازی برای حل مسائل مختلف استفاده شده است. به عنوان مثال، یک کنترل کننده تطبیقی بر اساس مدل هایپربولیک فازی تعمیم یافته برای یک کلاس از

¹Bezier Curves Method

²Zhang

³Generalized Fuzzy Hyperbolic Model

۳۲ حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از سیستم‌های فازی

تعریف می‌شود. بنابراین فقط از دو مجموعه فازی برای نمایش متغیرهای ورودی استفاده می‌شود. با استفاده از متغیر تعمیم یافته و انتخاب w_s به اندازه کافی بزرگ، تمام فضای ورودی را می‌توان پوشش داد.

لم ۱.۱.۳. برای سیستم با n متغیر ورودی و یک متغیر خروجی $f(x)$ ، با در نظر گرفتن پایگاه قواعد فازی هایپربولیک تعمیم یافته و متغیرهای ورودی تعمیم یافته ۱.۱.۳، تعریف توابع عضویت برای مجموعه فازی P_x و N_x با (۵.۳)، مدل هایپربولیک فازی تعمیم یافته به صورت زیر است

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^m \frac{C_{p_i} \exp(k_i y_i) + C_{N_i} \exp(-k_i y_i)}{\exp(k_i y_i) + \exp(-k_i y_i)} \\ &= \sum_{i=1}^m p_i + \sum_{i=1}^m q_i \frac{\exp(k_i y_i) - \exp(-k_i y_i)}{\exp(k_i y_i) + \exp(-k_i y_i)} = p + Q^T \tanh(K_y y), \end{aligned} \quad (۶.۳)$$

که $Q \in \mathbb{R}^m$ ، $p_i = \frac{C_{p_i} + C_{N_i}}{2}$ ، $q_i = \frac{C_{p_i} - C_{N_i}}{2}$ ، $p = \sum_{i=1}^m p_i$ ، $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $K_y = \text{diag}(k_1, k_2, \dots, k_m)$

قضیه ۱.۱.۳. (قضیه تقریب گر عمومی) فرض کنید که ورودی، مجموعه مرجع U یک مجموعه فشرده در $\mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه برای هر تابع حقیقی داده شده $g(x)$ در U و $\varepsilon > 0$ دلخواه، یک سیستم فازی $f(x)$ به شکل رابطه (۶.۳) وجود دارد به نحوی که

$$\sup_{x \in U} |f(x) - g(x)| < \varepsilon.$$

بنابراین مدل هایپربولیک فازی تعمیم یافته یک تقریب زننده عمومی است و می‌تواند هر تابع غیرخطی را در مجموعه فشرده U تقریب بزند. برای حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از مدل هایپربولیک فازی تعمیم یافته هر کدام از جواب‌های مسئله (۱.۳) و (۲.۳) با شرایط مرزی (۳.۳) را به عنوان یک مدل فازی در نظر می‌گیریم و جواب‌های فازی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$G_{x_i} = p_{x_i} + Q_{x_i}^T \tanh(K_{y_{x_i}} y_{x_i}). \quad (۷.۳)$$

با توجه به شرایط اولیه (۳.۳) جواب‌های فازی مسئله (۱.۳) – (۳.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$x_G^i(\Phi_{x_i}, t) = a_i + t G_{x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (۸.۳)$$

که x_G^i فازی Φ_{x_i} بردار پارامترهای قابل تنظیم جواب فازی است. بنابراین، هر جواب فازی از مجموع دو بخش به دست می‌آید. بخش اول شامل هیچ پارامتر قابل تنظیمی نیست و شرایط اولیه را برآورده می‌کند و بخش دوم شامل یک مدل هایپربولیک فازی تعمیم یافته با پارامترهای قابل تنظیم است.

۱.۱.۳ آموزش مدل هایپربولیک فازی تعمیم یافته

پارامترهای مدل هایپربولیک فازی تعمیم یافته عموماً از طریق یک فرآیند یادگیری به دست می آیند. آموزش شامل به حداقل رساندن یک تابع هزینه یا شاخص عملکرد است که معمولاً معیاری از خطا است. از آنجایی که عملکرد x_G^i از پیش ناشناخته است، مدل به روش بدون نظارت آموزش داده می شود. در این جا میانگین مربعات خطا^۱ به عنوان شاخص عملکرد انتخاب می شود. برای این منظور با جایگزین کردن جواب های فازی (۸.۳) در مسئله (۱.۳) و (۲.۳) داریم

$${}^{\circ}ABC D_t^{\alpha_i(t)} x_G^i(t) = f(t, x_G^1, x_G^2, \dots, x_G^n, \dot{x}_G^1, \dot{x}_G^2, \dots, \dot{x}_G^n), \quad \alpha_i(t) \in (\circ, 1), \quad (9.3)$$

$$\circ = g(t, x_G^1, x_G^2, \dots, x_G^n), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \quad t \geq \circ. \quad (10.3)$$

حال توابع خطای تقریبی زیر را تعریف می کنیم

$$E_i(\Phi, t_j) = {}^{\circ}ABC D_{t_j}^{\alpha_i(t_j)} x_G^i(t_j) - f(t_j, x_G^1, x_G^2, \dots, x_G^n, \dot{x}_G^1, \dot{x}_G^2, \dots, \dot{x}_G^n), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (11.3)$$

$$E_n(\Phi, t_j) = g(t_j, x_G^1, x_G^2, \dots, x_G^n), \quad (12.3)$$

که $\Phi = (\Phi_{x_1}, \Phi_{x_2}, \dots, \Phi_{x_n})$ بردار تمام پارامترهای قابل تنظیم در جواب های فازی (۸.۳) و $t_j, j = 1, 2, \dots, J$ نقاط کالوکیشن در بازه $[\circ, T]$ است. در نتیجه، مسئله (۹.۳) و (۱۰.۳) به مسئله بهینه سازی نامقید زیر تبدیل می شود

$$\text{Minimize } \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n-1} [E_i(\Phi, t_j)]^2 + \sum_{j=1}^J [E_n(\Phi, t_j)]^2. \quad (13.3)$$

مسئله بهینه سازی (۱۳.۳) را می توان به صورت زیر نمایش داد

$$\text{Minimize } E(\Phi) = \frac{1}{J} \|\eta(\Phi)\|_2^2, \quad (14.3)$$

که $\eta(\Phi) = [E_1(\Phi, t_1), E_1(\Phi, t_2), \dots, E_{n-1}(\Phi, t_J), E_n(\Phi, t_1), E_n(\Phi, t_2), \dots, E_n(\Phi, t_J)]^T$ آموزش مدل هایپربولیک فازی تعمیم یافته به معنای یافتن پارامترهای صحیح Φ است تا $E(\Phi)$ کمینه شود. از الگوریتم های بهینه سازی متعددی مانند نیوتن، شبه نیوتن، گرادیان مزدوج و غیره می توان برای حل (۱۴.۳) استفاده کرد [۴۴]–[۴۷]. یکی از ساده ترین روش ها، روش گرادیان کاهشی است. در این روش وزن ها به صورت تصادفی مقداردهی اولیه می شوند و سپس الگوریتم تغییر زیر اعمال می شود

$$\Phi_i(j+1) = \Phi_i(j) - \kappa \frac{\partial E(\Phi)}{\partial \Phi_i}, \quad (15.3)$$

¹Mean Square Error

۳۴ حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از سیستم‌های فازی

که در آن κ نرخ یادگیری است، j گام تکرار است، $\Phi_i, i = 1, 2, \dots, n(3m+1)$ تمام پارامترهای قابل تنظیم جواب‌های فازی (۸.۳) و m تعداد متغیرهای ورودی تعمیم یافته است. برای مثال، پارامترهای قابل تنظیم x_G^1 به صورت زیر به روز می‌شود

$$p_{x_1}(j+1) = p_{x_1}(j) - \kappa \frac{\partial E(\Phi)}{\partial p_{x_1}}, \quad (16.3)$$

$$q_{x_1}^i(j+1) = q_{x_1}^i(j) - \kappa \frac{\partial E(\Phi)}{\partial q_{x_1}^i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (17.3)$$

$$k_{x_1}^i(j+1) = k_{x_1}^i(j) - \kappa \frac{\partial E(\Phi)}{\partial k_{x_1}^i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (18.3)$$

$$d_{x_1}^i(j+1) = d_{x_1}^i(j) - \kappa \frac{\partial E(\Phi)}{\partial d_{x_1}^i}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (19.3)$$

به طور مشابه، سایر پارامترهای قابل تنظیم $x_G^s, s = 2, \dots, n$ با استفاده از (۱۶.۳) – (۱۹.۳) بهینه‌سازی می‌شوند. در مراحل زیر الگوریتم یادگیری توضیح داده شده است.

مرحله ۱: مقادیر اولیه پارامترهای جواب‌های فازی $\Phi_i, i = 1, 2, \dots, n(3m+1)$ را به طور تصادفی انتخاب کنید همچنین کران خطا $\varepsilon > 0$ و تعداد تکرار L را انتخاب کنید.

مرحله ۲: بردار ورودی $t = (t_1, t_2, \dots, t_J)$ را مقداردهی کنید.

مرحله ۳: مقادیر خروجی $x_G^s, s = 1, 2, \dots, n$ را محاسبه کنید.

مرحله ۴: تابع خطای $E(\Phi)$ را با استفاده از (۱۴.۳) محاسبه کنید.

مرحله ۵: پارامترها را با استفاده از الگوریتم تغییر زیر به روز کنید

$$\Phi_i(j+1) = \Phi_i(j) - \kappa \frac{\partial E(\Phi)}{\partial \Phi_i}.$$

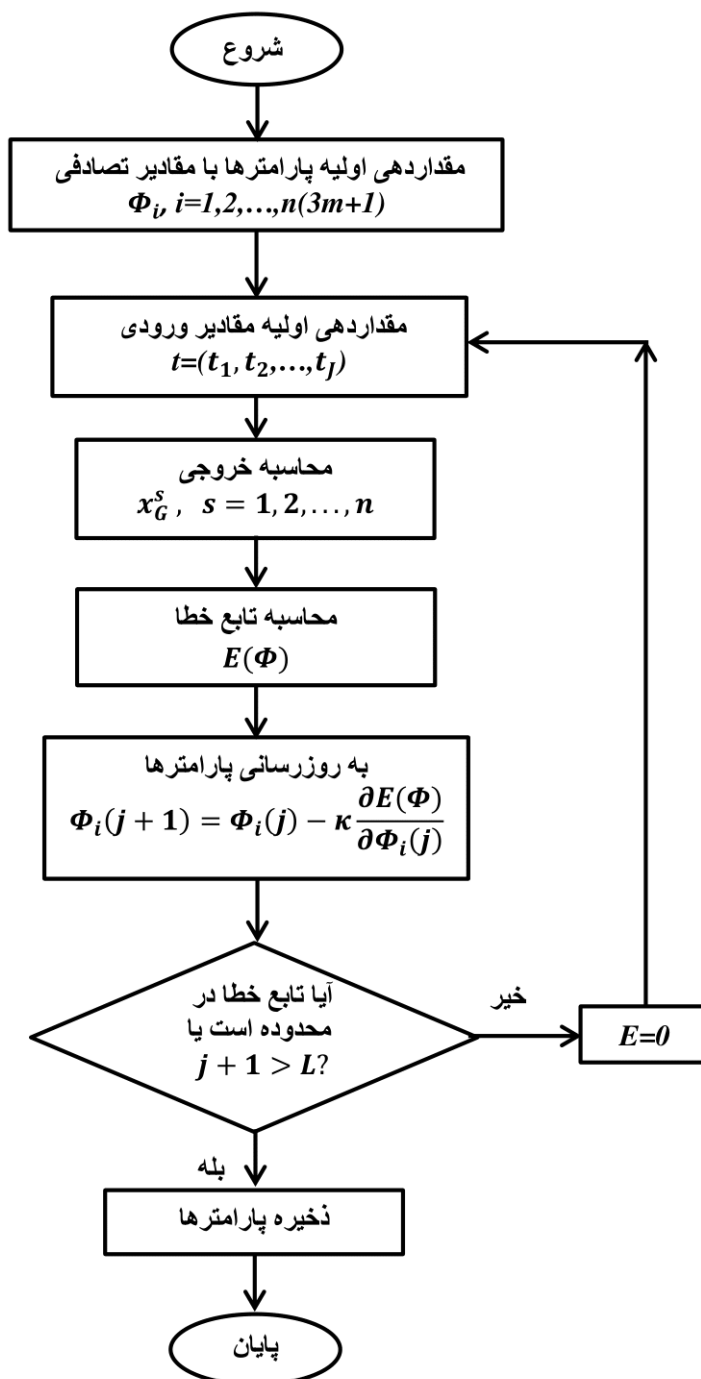
مرحله ۶: اگر $E(\Phi) \leq \varepsilon$ یا $j+1 > L$ ، به مرحله ۷ بروید در غیر این صورت به مرحله ۲ بروید.

مرحله ۷: پس از تکمیل الگوریتم یادگیری، پارامترهای نهایی را ذخیره کنید.

فلوچارت الگوریتم یادگیری در شکل ۱.۳ نشان داده شده است. با استفاده از قضیه زیر همگرایی الگوریتم یادگیری ارائه شده را نشان می‌دهیم.

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنید $E(\Phi_j)$ پیوسته، مجموعه تراز $\{\Phi_j \mid E(\Phi_j) \leq E(\Phi_0)\}$ کران‌دار و $E(\Phi_j) \rightarrow 0$ هنگامی که $j \rightarrow \infty$ باشد. آن‌گاه $\Delta E(\Phi_j) = E(\Phi_{j+1}) - E(\Phi_j) < 0$.

برهان. با توجه به تعریف $E(\Phi_j)$ در (۱۴.۳)، $E(\Phi) \geq 0$ و از آنجایی که پارامترهای قابل تنظیم سیستم فازی پیشنهادی توسط الگوریتم گرادیان کاهشی بهینه‌سازی شده‌اند بنابراین $E(\Phi_j)$ در امتداد $\{\Phi_j, j = 1, 2, \dots\}$ نزولی است. فرض کنید $j \rightarrow \infty$ ، $E(\Phi_j) \rightarrow L_\infty \neq 0$. تابع $W(\Phi_j) = \Delta E(\Phi(j)) = E(\Phi_{j+1}) - E(\Phi_j)$ در $\Phi_j \in \{\Phi \mid L_\infty \leq E(\Phi) \leq E(\Phi_0)\}$ تمام را برای تمام Φ_j در



شکل ۱.۳: فلوچارت الگوریتم یادگیری.

نظر بگیرید. این مجموعه بسته و کران دار و در نتیجه فشرده است [۴۸]. بنابراین بیشینه $W(\Phi)$ وجود دارد و در این مجموعه فشرده به دست می آید. بیشترین مقدار $W(\Phi)$ را $-\theta$ در نظر بگیرید. بدیهی است که θ مخالف صفر است زیرا $W(\Phi_j) = \Delta E(\Phi_j) < 0$ و $L_\infty \neq 0$ است. داریم

$$E(\Phi_N) = \sum_{j=0}^{N-1} \Delta E(\Phi_j) + E(\Phi_0) \leq -N\theta + E(\Phi_0).$$

این بدان معناست که $E(\Phi_N) \rightarrow -\infty$ هنگامی که $N \rightarrow \infty$. که با نامنفی بودن $E(\Phi)$ برای تمام مقادیر N در تناقض است. در نتیجه $L_\infty = 0$. $\square$

۲.۳ حل مسئله کنترل بهینه کسری با سیستم های فازی

کنترل بهینه کسری موضوع جدیدی است که در سال ۱۹۹۶ با آثار ریو^۱ [۴۹]–[۵۰] مطرح شد. مسئله کنترل بهینه‌ای را که در آن تابع هدف یا حداقل یکی از دینامیک‌ها دارای مشتق کسری است، کنترل بهینه کسری می‌نامند. کنترل بهینه کسری در واقع تعمیمی از کنترل بهینه مرتبه صحیح، با مرتبه دلخواه است. بنابراین مانند کنترل بهینه مرتبه صحیح، روش‌های حل آن به دو دسته مستقیم و غیرمستقیم تقسیم می‌شوند. روش‌های غیرمستقیم براساس اصل کمینه پونتریاگین تعمیم یافته برای کنترل بهینه کسری استوار است و جواب‌های آن از حل مسئله مقدار مرزی همیلتونی کسری که از شرایط لازم بهینگی کنترل بهینه کسری حاصل می‌شود، به دست می‌آیند. از طرف دیگر، روش‌های مستقیم کنترل بهینه کسری را به مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌کنند. سپس مسئله حاصل با یک حل کننده NLP^۲، حل می‌شود. یکی از مزایای روش‌های غیرمستقیم اعتبار بالای جواب‌های تقریبی به دست آمده است. این مزیت بر پایه صدق کردن این جواب‌ها در شرایط لازم بهینگی که از حساب تغییرات و اصل کمینه پونتریاگین ناشی می‌شوند، است. یکی از کارهای اولیه روی روش‌های عددی برای حل مسئله کنترل بهینه کسری در [۵۱] ارائه شده است. در [۵۱] آگراول^۳ از نتایج ریو استفاده کرد و شرایط لازم بهینگی را برای یک کلاس از مسائل کنترل بهینه کسری ارائه داد. پس از آن محققان روش‌های عددی را برای حل مسئله کنترل بهینه کسری توسعه دادند. برای مثال، می‌توان به روش‌های عددی مبتنی بر چندجمله‌ای متعامد لژاندر [۵۲]–[۵۶]، روش‌های مبتنی بر چندجمله‌ای برنولی [۵۷]–[۵۹]، روش شبه طیفی و ادغام عددی [۶۰]، روش‌های مبتنی بر گسسته سازی [۶۱]–[۶۳]، روش عملگر چیشف–لژاندر [۶۴]، روش مبتنی بر چندجمله‌ای ژاکوبی [۶۵]–[۶۶]، روش طیفی ریتز [۶۷]، روش‌های مبتنی

¹Riewe

²NLP-solver

³Agrawal

بر موجک‌ها [۶۸]–[۶۹]، روش‌های مستقیم مبتنی بر رابطه‌های انتگرال کسری [۷۰]، روش کالوکیشن بر اساس چند جمله‌ای لاگرانژ مرتبه کسری [۷۱]، روش‌های تقریب [۷۲]، روش مبتنی بر چندجمله‌ای چبیشف تعمیم‌یافته [۷۳]، روش جریمه اپسیلون [۷۴] و روش شبه طیفی مونتس–لژاندر [۷۵] اشاره کرد. در این بخش برخی از مسائل کنترل بهینه کسری را بررسی می‌کنیم. به‌طور خاص، نشان می‌دهیم که مسئله کنترل بهینه کسری با مشتق کاپوتو–فابریزو را می‌توان به‌عنوان معادلات دیفرانسیل جبری کسری همیلتونی مجدداً فرموله کرد. سپس معادلات دیفرانسیل جبری کسری مشتق شده را می‌توان با استفاده از توانایی سیستم‌های فازی ارائه شده برای تقریب توابع غیرخطی حل کرد.

۱.۲.۳ فرمول‌بندی مسئله کنترل بهینه کسری با مشتق کاپوتو–فابریزو

در این بخش، یک کلاس از مسائل کنترل بهینه کسری با مشتق کاپوتو–فابریزو را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\text{Minimize } J(x, u) = \int_0^T F(t, x(t), u(t)) dt \quad (20.3)$$

subject to

$$M\dot{x}(t) + N_0^{CF} D_t^\alpha x(t) = G(t, x(t), u(t)), \quad 0 < t \leq T, \quad (21.3)$$

$$x(0) = x_0, \quad (22.3)$$

که $x \in \mathbb{R}^n$ متغیر وضعیت و $u \in \mathbb{R}^m$ متغیر کنترل است. فرض کنید $F \in \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم نسبت به تمام مؤلفه‌هایش است. همچنین $G \in \mathbb{R}^n$ پیوسته لیپ شیتز و T ثابت است. برای به‌دست آوردن جواب‌های (۲۰.۳)–(۲۲.۳)، شرایط لازم بهینگی متناظر با این مسئله کنترل بهینه کسری را ارائه می‌دهیم. برای این منظور تابع همیلتونی H را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = F(x(t), u(t), t) + \lambda^T G(x(t), u(t), t), \quad (23.3)$$

که $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ضریب لاگرانژ است. قضیه زیر شرایط لازم بهینگی را برای (۲۰.۳)–(۲۲.۳) بیان می‌کند.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید $\lambda(T) = 0$ ، اگر $\lambda(t)$ ، $x(t)$ و $u(t)$ جواب‌های بهینه (۲۰.۳)–(۲۲.۳)

باشند، آنگاه در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$\begin{cases} -\frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial x} = M\dot{\lambda}(t) - N_t^{CF} D_T^\alpha \lambda(t), \\ \frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial \lambda} = M\dot{x}(t) + N_\circ^{CF} D_t^\alpha x(t), & x(\circ) = x_\circ, \\ \frac{\partial H(x, u, \lambda, t)}{\partial u} = \circ. \end{cases} \quad (24.3)$$

برهان. ابتدا مسئله اولیه را به مسئله زیر تبدیل می‌کنیم

$$\mathcal{J}(x, u, \lambda) = \int_\circ^T (H(x, u, \lambda, t) - \lambda (M\dot{x}(t) + N_\circ^{CF} D_t^\alpha x(t))) dt. \quad (25.3)$$

سپس، متغیرهایی به شکل زیر تعریف می‌کنیم

$$x + \delta x, \quad u + \delta u, \quad \lambda + \delta \lambda,$$

با توجه به شرط اولیه (۳۵.۲)، نتیجه می‌گیریم که $\delta x(\circ) = \circ$. در روند کمینه‌سازی اولین تغییر $\mathcal{J}$ باید صفر باشد بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \circ &= \int_\circ^T \left[\frac{\partial H}{\partial x} \delta x + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \delta \lambda - \delta \lambda (M\dot{x}(t) + N_\circ^{CF} D_t^\alpha x(t)) \right. \\ &\quad \left. - \lambda(t) (M\delta \dot{x}(t) + N_\circ^{CF} D_t^\alpha \delta x(t)) \right] dt. \end{aligned}$$

از انتگرال‌گیری جزء به جزء روابط زیر را داریم

$$\int_\circ^T \lambda \delta \dot{x}(t) dt = - \int_\circ^T \delta x(t) \dot{\lambda}(t) dt,$$

9

$$\begin{aligned} \int_\circ^T \lambda {}^\circ CF D_t^\alpha \delta x(t) dt &= \int_\circ^T \delta x(t) {}^\circ CF D_T^\alpha \lambda(t) dt \\ &\quad + \underbrace{\lambda(T)}_{=\circ} \int_\circ^T \delta x(\tau) \varphi_\alpha(T - \tau) d\tau - \underbrace{\delta x(\circ)}_{=\circ} \int_\circ^T \lambda(\tau) \varphi_\alpha(\tau) d\tau \\ &= \int_\circ^T \delta x(t) {}^\circ CF D_T^\alpha \lambda(t) dt. \end{aligned}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \int_\circ^T [\delta x(t) \left(\frac{\partial H}{\partial x} + M\dot{\lambda} - N_t^{CF} D_T^\alpha \lambda(t) \right) + \delta u(t) \frac{\partial H}{\partial u} \\ + \delta \lambda(t) \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - M\dot{x}(t) - N_\circ^{CF} D_t^\alpha x(t) \right)] dt = \circ. \end{aligned}$$

□

از آنجا که $\delta x(t) \neq \circ$ ، $\delta \lambda(t) \neq \circ$ و $\delta u(t) \neq \circ$ ، قضیه ثابت می‌شود.

ملاحظه ۱.۲.۳. سیستم کسری (۲۴.۳) شامل شرایط لازم برای بهینگی جواب‌های (۲۰.۳) - (۲۲.۳) است اگر $F(t, x, u)$ و $G(t, x, u)$ بر حسب x و u محدب باشند، سیستم (۲۴.۳) شرایط لازم و کافی را برای بهینگی جواب‌های x^* و u^* ارائه می‌دهد.

ملاحظه ۲.۲.۳. در سیستم (۲۴.۳) معادله اول و دوم، معادلات همیلتونی متعارف هستند. معادله سوم را می توان به عنوان یک محدودیت جبری در نظر گرفت. بنابراین سیستم (۲۴.۳) را معادله دیفرانسیل جبری همیلتونی می نامند.

۲.۲.۳ حل مسئله کنترل بهینه کسری با مدل های پربولیک فازی تعمیم یافته

همان طور که نشان داده شد، شرایط لازم بهینگی برای مسائل کنترل بهینه کسری به صورت معادلات دیفرانسیل جبری کسری هستند. در این بخش از توانایی مدل های پربولیک فازی تعمیم یافته در تقریب توابع استفاده می کنیم و هرکدام از توابع وضعیت، ضرایب لاگرانژ و کنترل را به صورت یک سیستم فازی در نظر می گیریم

$$G_x = p_x + Q_x^T \tanh(K_{y_x} y_x), \quad (26.3)$$

$$G_\lambda = p_\lambda + Q_\lambda^T \tanh(K_{y_\lambda} y_\lambda), \quad (27.3)$$

$$G_u = p_u + Q_u^T \tanh(K_{y_u} y_u). \quad (28.3)$$

با توجه به شرایط اولیه و مرزی، جواب های فازی به صورت زیر تعریف می شوند

$$x_G(\Phi_x, t) = tG_x, \quad (29.3)$$

$$\lambda_G(\Phi_\lambda, t) = (T - t)G_\lambda, \quad (30.3)$$

$$u_G(\Phi_u, t) = G_u, \quad (31.3)$$

که Φ_x ، Φ_λ و Φ_u به ترتیب پارامترهای قابل تنظیم جواب های فازی x_G ، λ_G و u_G هستند. تعداد قوانین فازی برای هرکدام از مدل های های پربولیک فازی تعمیم یافته می تواند متفاوت باشد. همچنین در (۲۹.۳) – (۳۱.۳) شرط اولیه $x(\circ) = \circ$ در نظر گرفته شده است. برای سایر شرایط مرزی و اولیه می توان جواب های فازی مناسب تعریف کرد. حال برای به دست آوردن پارامترهای قابل تنظیم می توان از الگوریتم یادگیری ارائه شده در بخش قبل استفاده کرد. برای این منظور و معرفی توابع خطای تقریبی مناسب به صورت زیر عمل می شود. می دانیم که جواب های فازی (۲۹.۳) – (۳۱.۳) باید در شرایط (۲۴.۳) صدق کنند. بنابراین

$$\begin{cases} -\frac{\partial H_G}{\partial x_G} = M\dot{\lambda}_G - N_t^{CF} D_T^\alpha \lambda_G, \\ \frac{\partial H_G}{\partial \lambda_G} = M\dot{x}_G + N_\circ^{CF} D_t^\alpha x_G, \\ \frac{\partial H_G}{\partial u_G} = \circ, \end{cases} \quad (32.3)$$

۴۰ حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از سیستم‌های فازی

که $H_G = H(x_G, u_G, \lambda_G, t)$. توابع خطا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$E_1(\Phi, t_j) = \left(M \dot{\lambda}_G(\Phi_\lambda, t_j) - N_{t_i}^{CF} D_T^\alpha \lambda_G(\Phi_\lambda, t_j) + \frac{\partial H_G(\Phi, t_j)}{\partial x_G(\Phi_x, t_j)} \right)^2, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

$$E_2(\Phi, t_j) = \left(M \dot{x}_G(\Phi_x, t_j) + N_{t_j}^{CF} D_{t_j}^\alpha x_G(\Phi_x, t_j) - \frac{\partial H_G(\Phi, t_j)}{\partial \lambda_G(\Phi_\lambda, t_j)} \right)^2, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

$$E_3(\Phi, t_j) = \left(\frac{\partial H_G(\Phi, t_j)}{\partial u_G(\Phi_u, t_j)} \right)^2, \quad j = 1, 2, \dots, J,$$

که $\Phi = (\Phi_x, \Phi_\lambda, \Phi_u)$ بردار تمام پارامترهای قابل تنظیم در جواب‌های فازی (۲۹.۳)–(۳۱.۳) و نقاط کالوکیشن در بازه $(0, T)$ است. در نتیجه، مسئله میانگین مربعات خطا زیر را داریم

$$\min_{\Phi} E(\Phi) = \frac{1}{J} \|\eta(\Phi)\|_2^2, \quad (33.3)$$

که $\eta(\Phi) = [E_1(\Phi, t_1), E_1(\Phi, t_2), \dots, E_3(\Phi, t_J)]^T$ بردار توابع خطا در نقاط t_i است.

۳.۳ مثال‌های عددی

در این بخش برای نشان دادن کارایی روش پیشنهاد شده، چند مثال متنوع ارائه می‌دهیم. در همه مثال‌ها، از ۳۲ قانون فازی ($m = 5$) برای هر مدل هایبربولیک فازی تعمیم یافته استفاده می‌کنیم. با توجه به جدول خطا برای مقادیر مختلف $0 < \alpha(t) < 1$ ، می‌توان تأیید کرد که جواب‌های به دست آمده، دقیق هستند.

مثال ۱.۳.۳. به عنوان مثال اول، معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر

$${}_{\circ}^{ABC} D_t^{\alpha(t)} x(t) = -2x(t) + y(t) + f(t), \quad (34.3)$$

$$\circ = x(t) + y(t) - t^2 - \exp(-t), \quad (35.3)$$

را با شرایط اولیه $x(\circ) = \circ$ و $y(\circ) = 1$ در نظر بگیرید. تابع $f(t)$ به گونه‌ای است که جواب دقیق مسئله به ازای هر $0 < \alpha(t) < 1$ ، به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ \exp(-t) \end{bmatrix}.$$

با در نظر گرفتن شرایط اولیه $x(\circ) = \circ$ و $y(\circ) = 1$ ، جواب‌های فازی و توابع خطا به صورت

زیر هستند

$$\begin{cases} x_G = tG_x, \\ y_G = 1 + tG_y. \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1(\Phi, t_j) = {}^{ABC}D_t^{\alpha(t)} x_G(t) + \Upsilon x_G(t_j) - y_G(t_j) - f(t_j), \\ E_2(\Phi, t_j) = x_G(t_j) + y_G(t_j) - t_j^\Upsilon - \exp(-t_j), \quad j = 1, 2, \dots, 10. \end{cases}$$

در نتیجه مسئله بهینه‌سازی نامقید زیر را داریم

$$\text{Minimize } \sum_{j=1}^{10} [E_1(\Phi, t_j)^2 + E_2(\Phi, t_j)^2].$$

با استفاده از روش ارائه شده، جواب تقریبی با $J = 10$ ، برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ به دست آمده است. در شکل‌های ۲.۳ و ۳.۳ جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $y(t)$ برای روش پیشنهاد شده با جواب‌های دقیق مقایسه شده است. خطای مطلق برای $x(t)$ و $y(t)$ در شکل ۴.۳ نشان داده شده است. در جدول ۱.۳ مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ به ازای مرتبه‌های مختلف $\alpha(t)$ ارائه شده است. شکل‌های ۲.۳ - ۴.۳ و جدول ۱.۳ کارایی مدل هایپربولیک فازی تعمیم یافته را برای تقریب جواب‌های دقیق مسئله نشان می‌دهند.

جدول ۱.۳: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ در مثال ۱.۳.۳

$\alpha(t)$	$E(\Phi)$
$\alpha_1(t) = 0.99$	1.0588×10^{-6}
$\alpha_2(t) = \frac{1}{1+\exp(-t)}$	1.1053×10^{-6}
$\alpha_3(t) = 1 - \frac{\exp(t) \cos(t)}{10}$	1.0720×10^{-6}
$\alpha_4(t) = 1 - 0.5t$	8.5192×10^{-7}

مثال ۲.۳.۳. معادله دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر زیر را در نظر بگیرید

$${}^{ABC}D_t^{\alpha(t)} x(t) = t y - x(t) + (1+t)y(t), \quad (36.3)$$

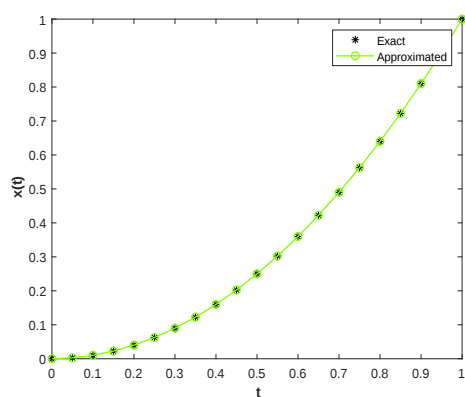
$$0 = y(t) - \sin(t), \quad (37.3)$$

با شرایط اولیه $x(0) = 1$ و $y(0) = 0$. از [۳۶] جواب دقیق مسئله برای $\alpha = 1$ به صورت زیر است

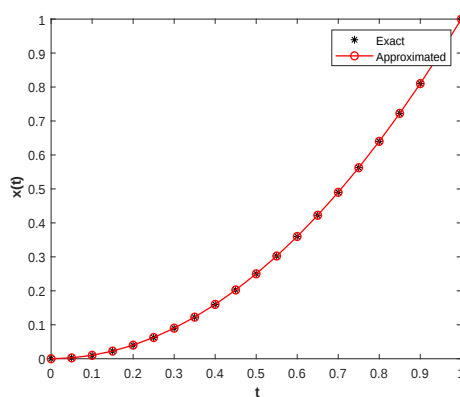
$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-t) + t \sin(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}.$$

جواب دقیق در $\alpha = 1$ و جواب تقریبی $x(t)$ و $y(t)$ برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در شکل ۵.۳ نمایش داده شده است. جدول ۲.۳ مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ را به ازای $\alpha(t)$ های متفاوت نمایش می‌دهد.

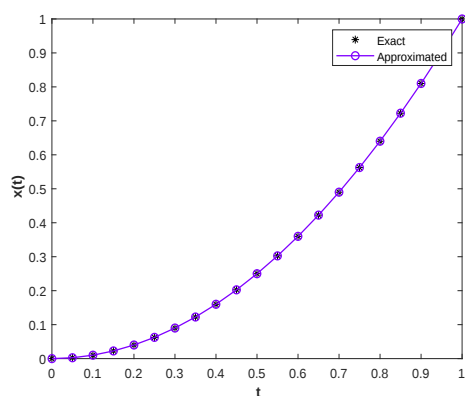
۴۲ حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از سیستم‌های فازی



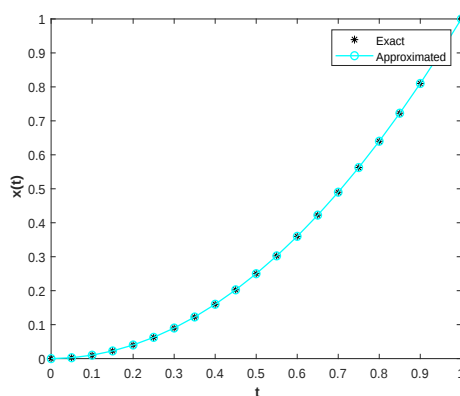
$$\alpha(t) = \frac{1}{1+\exp(-t)} \quad (\text{ب})$$



$$\alpha(t) = 0.99 \quad (\text{ا})$$

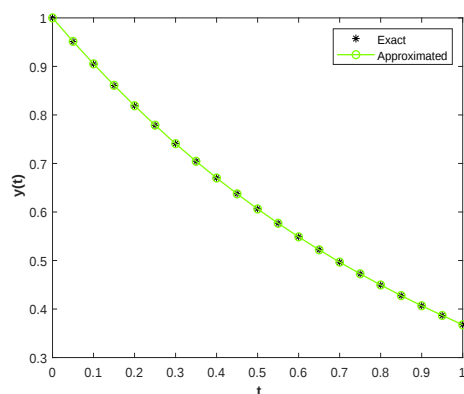


$$\alpha(t) = 1 - 0.5t \quad (\text{د})$$

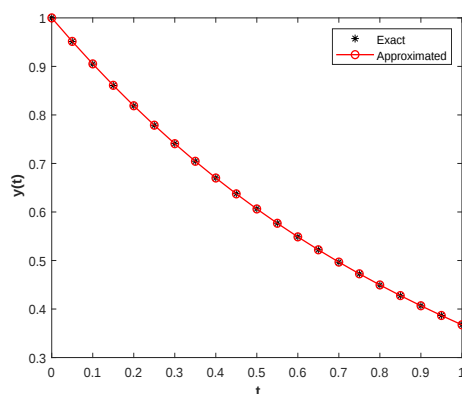


$$\alpha(t) = 1 - \frac{\exp(t) \cos(t)}{10} \quad (\text{ج})$$

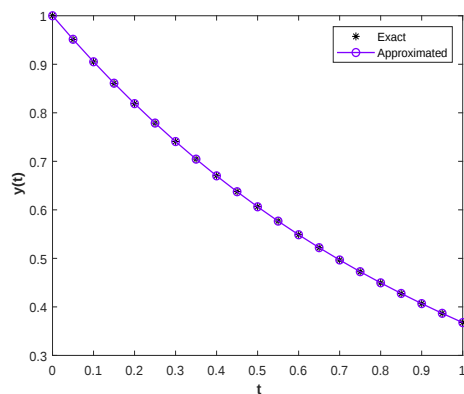
شکل ۲.۳: جواب تقریبی $x(t)$ برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در مثال ۱.۳.۳.



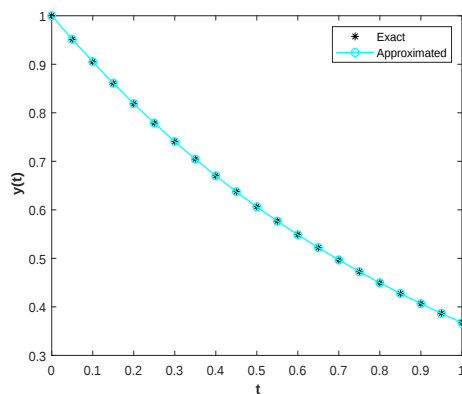
(ب) $\alpha(t) = \frac{1}{1+\exp(-t)}$



(آ) $\alpha(t) = 0.99$

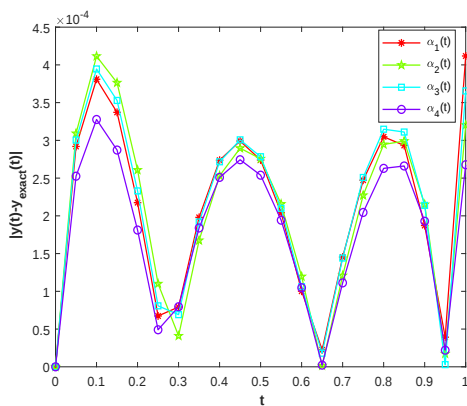


(د) $\alpha(t) = 1 - 0.5t$

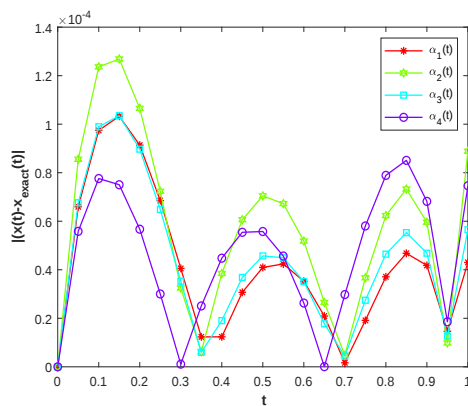


(ج) $\alpha(t) = 1 - \frac{\exp(t)\cos(t)}{10}$

شکل ۳.۳: جواب تقریبی $y(t)$ برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در مثال ۱.۳.۳.

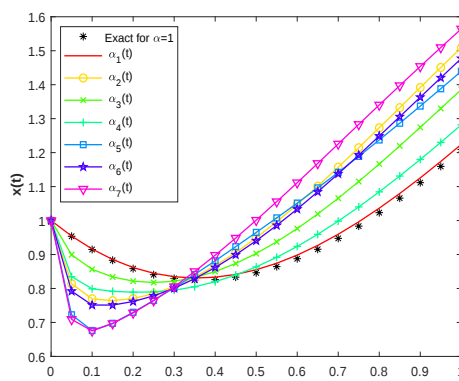
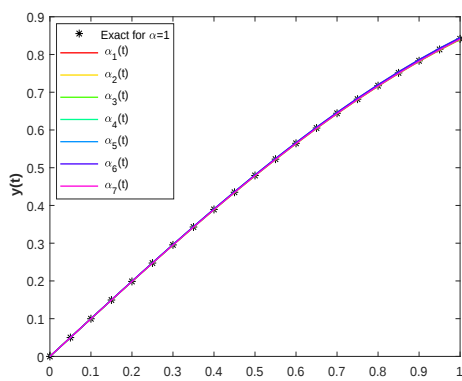


(ب) خطای مطلق $y(t)$



(آ) خطای مطلق $x(t)$

شکل ۴.۳: خطای مطلق $x(t)$ و $y(t)$ برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$.



شکل ۵.۳: جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $y(t)$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۲.۳.۳.

جدول ۲.۳: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۲.۳.۳.

$\alpha(t)$	$E(\Phi)$
$\alpha_1(t) = 0.99$	$1/401800 \times 10^{-8}$
$\alpha_2(t) = 1 - \frac{0.5}{1+\exp(-t)}$	$2/893469 \times 10^{-9}$
$\alpha_3(t) = 1 - \frac{\exp(t) \cos(t)}{10}$	$2/465738 \times 10^{-9}$
$\alpha_4(t) = \tanh(t+1)$	$8/086626 \times 10^{-9}$
$\alpha_5(t) = 1 - \frac{\cos(t)^2}{3}$	$2/268666 \times 10^{-8}$
$\alpha_6(t) = 0.7$	$3/107675 \times 10^{-9}$
$\alpha_7(t) = 0.5$	$3/623555 \times 10^{-9}$

مثال ۳.۳.۳. مسئله زیر را در نظر بگیرید

$${}_{\circ}^{ABC}D_t^{\alpha(t)} x(t) = -x(t) + y(t) - \sin(t), \quad (38.3)$$

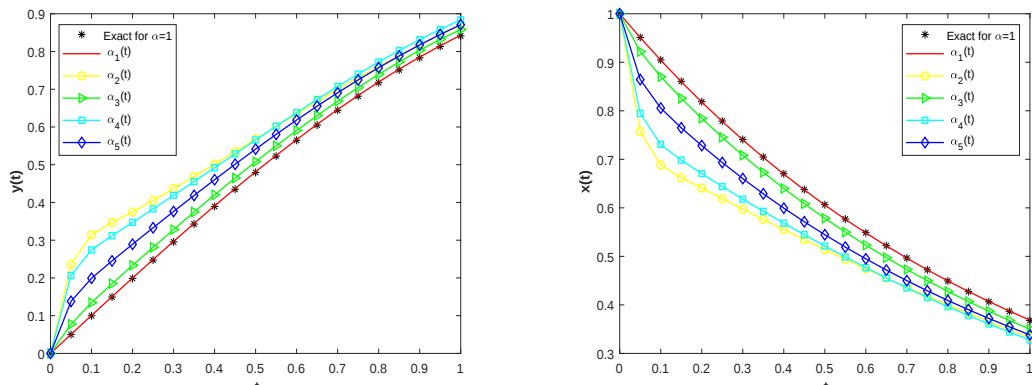
$$\circ = -x(t) - y(t) + \exp(-t) + \sin(t), \quad (39.3)$$

با شرایط اولیه $x(\circ) = 1$ و $y(\circ) = 0$.

از [۳۲] جواب دقیق این مسئله برای $\alpha = 1$ به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}.$$

جواب دقیق در $\alpha = 1$ و جواب‌های تقریبی این مسئله برای $\alpha(t)$ های مختلف در شکل ۶.۳ نمایش داده شده است. جدول ۳.۳ مقادیر $E(\Phi)$ به ازای $\alpha(t)$ نشان می‌دهد.



شکل ۶.۳: جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $y(t)$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۳.۳.۳.

جدول ۳.۳: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۳.۳.۳.

$\alpha(t)$	$E(\Phi)$
$\alpha_1(t) = 0.99$	2.414926×10^{-8}
$\alpha_2(t) = \frac{1}{1+\exp(-t)}$	6.095167×10^{-8}
$\alpha_3(t) = 0.97 - 0.03 \cos(\frac{t}{10})$	3.500389×10^{-8}
$\alpha_4(t) = 1 - \frac{\cos(t)^2}{3}$	4.140974×10^{-8}
$\alpha_5(t) = 0.85 - 0.01 \exp(t)$	3.673002×10^{-8}

مثال ۴.۳.۳. معادله دیفرانسیل جبری مرتبه متغیر زیر را در نظر بگیرید

$${}^{\circ}ABC D_t^{\alpha(t)} x(t) = t\dot{y}(t) - t^2 \dot{z}(t) - x(t) + (1+t)y(t) - (t^2 + 2t)z(t), \quad (40.3)$$

$${}^{\circ}ABC D_t^{\alpha(t)} y(t) = t\dot{z}(t) + y(t) - (t-1)z(t), \quad (41.3)$$

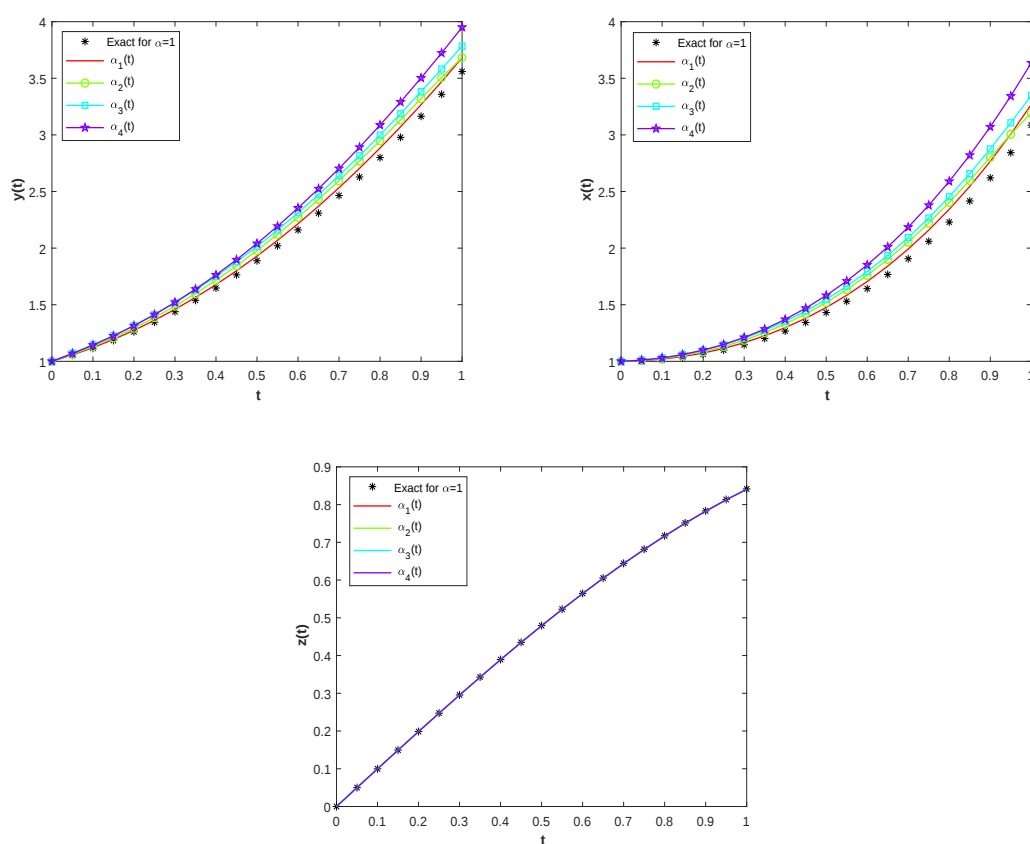
$${}^{\circ} = z(t) - \sin(t), \quad (42.3)$$

با شرایط اولیه $x(\circ) = y(\circ) = 1$ و $z(\circ) = 0$.

از [۳۱] جواب دقیق برای $\alpha = 1$ به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \\ z^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-t) + t \exp(t) \\ \exp(t) + t \sin(t) \\ \sin(t) \end{bmatrix}.$$

شکل ۷.۳ جواب دقیق در $\alpha = 1$ و جواب‌های تقریبی مسئله (۴۰.۳) – (۴۲.۳) را در $\alpha(t)$ های مختلف برای $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ نشان می‌دهد. در جدول ۴.۳ مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ ارائه شده است.



شکل ۷.۳: جواب‌های تقریبی $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۴.۳.۳.

جدول ۴.۳: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۴.۳.۳.

$\alpha(t)$	$E(\Phi)$
$\alpha_1(t) = 0.99$	$6/239544 \times 10^{-8}$
$\alpha_2(t) = 1 - \frac{\cos(t)^3}{\Delta_0}$	$6/018962 \times 10^{-7}$
$\alpha_3(t) = \tanh(t + 2)$	$1/838068 \times 10^{-7}$
$\alpha_4(t) = 1 - 0.0004 \exp(t^3)$	$2/454823 \times 10^{-7}$

مثال ۵.۳.۳. مسئله زیر را در نظر بگیرید

$${}^{\circ}ABC D_t^{\alpha(t)} x(t) = 1 + x(t) - x(t)z(t), \quad (43.3)$$

$${}^{\circ}ABC D_t^{\alpha(t)} z(t) = y(t) - x^2(t) - z(t), \quad (44.3)$$

$$\circ = y(t) - x^2(t), \quad (45.3)$$

با شرایط اولیه $x(\circ) = y(\circ) = z(\circ) = 1$

از [۳۱] جواب دقیق برای $\alpha = 1$ به صورت زیر است

$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \\ z^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(t) \\ \exp(2t) \\ \exp(-t) \end{bmatrix}.$$

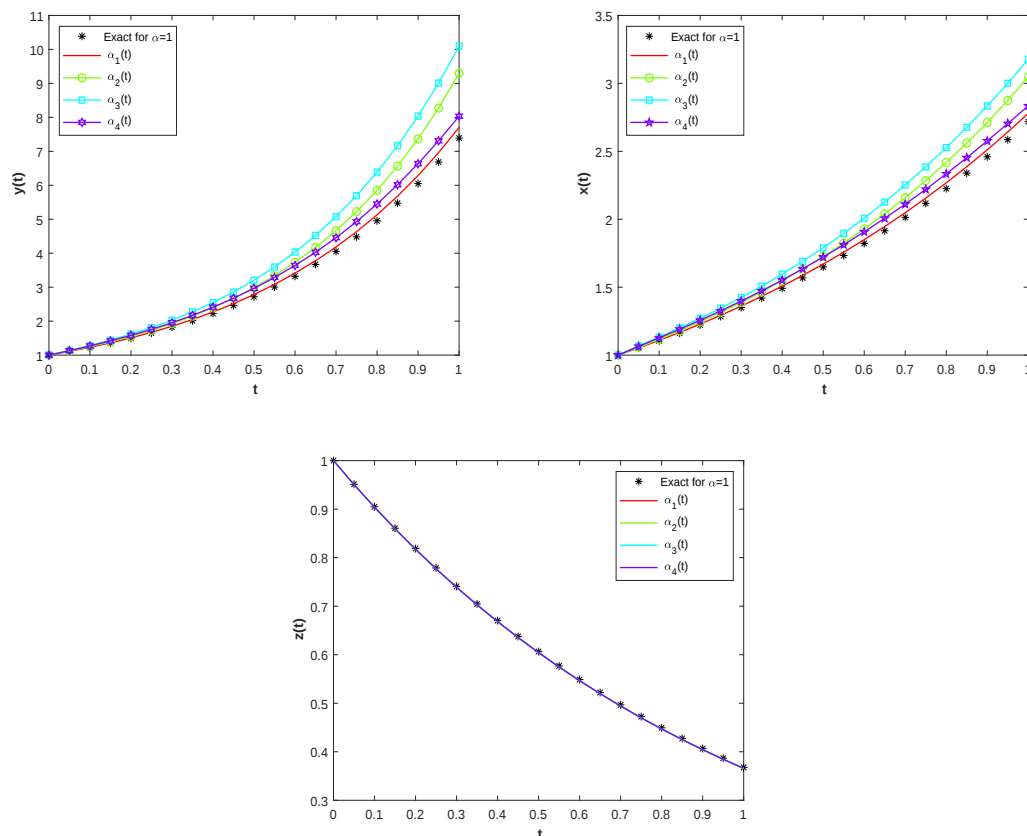
شکل ۸.۳ جواب دقیق در $\alpha = 1$ و جواب‌های تقریبی مسئله (۴۳.۳)–(۴۵.۳) را در $\alpha(t)$ های مختلف برای $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ نشان می‌دهد. در جدول ۵.۳ مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ ارائه شده است.

جدول ۵.۳: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۵.۳.۳.

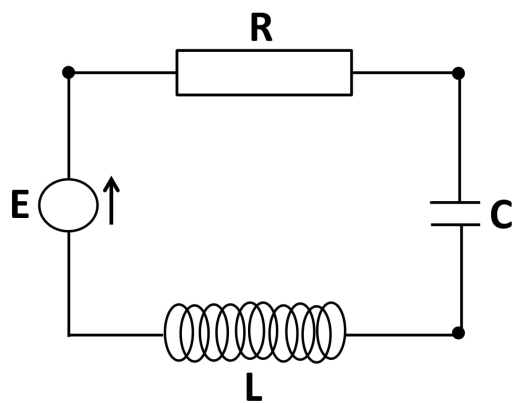
$\alpha(t)$	$E(\Phi)$
$\alpha_1(t) = 0.99$	$6/631767 \times 10^{-8}$
$\alpha_2(t) = 1 - 0.02 \exp(t)$	$3/350741 \times 10^{-6}$
$\alpha_3(t) = 1 - \exp(t) \frac{\cos(t)}{3^{\circ}}$	$8/882757 \times 10^{-6}$
$\alpha_4(t) = \tanh(t + 2)$	$1/949968 \times 10^{-6}$

مثال ۶.۳.۳. در این مثال یک کاربرد از معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر در مدل‌سازی مدار RLC ارائه شده است. شکل ۹.۳ یک مدار RLC را با منبع ولتاژ $V(t)$ ، ضریب القا L ، مقاومت R و خازن با ظرفیت $C > 0$ نشان می‌دهد. قانون جریان و ولتاژ کیرشهف^۱،

۴۸ حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از سیستم‌های فازی



شکل ۸.۳: جواب‌های تقریبی $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۵.۳.۳.



شکل ۹.۳: مدار RLC.

معادله دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر زیر را نتیجه می‌دهد

$${}^{\circ}ABC D_t^{\alpha(t)} X(t) = AX(t), \quad (46.3)$$

$$BX(t) + GV_E = 0, \quad (47.3)$$

که

$$X(t) = [V_C(t), V_L(t), V_R(t), i_L(t), i_E(t)]^T,$$

$$V_E = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{L}\right)(\cos(t) - 1) + R \sin(t),$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & R \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

و با شرط اولیه $X(0) = 0$

از [۳۵] جواب دقیق مسئله (۴۶.۳) و (۴۷.۳) برای $\alpha = 1$ به صورت زیر است

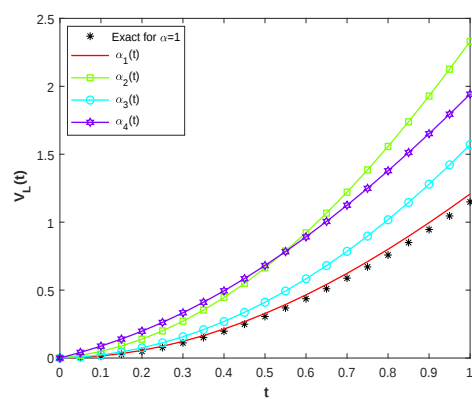
$$V_C(t) = \frac{1}{C}(1 - \cos(t)), \quad V_L(t) = \frac{1}{L}(1 - \cos(t)), \quad V_R(t) = -R \sin(t),$$

$$i_L(t) = i_E(t) = \sin(t).$$

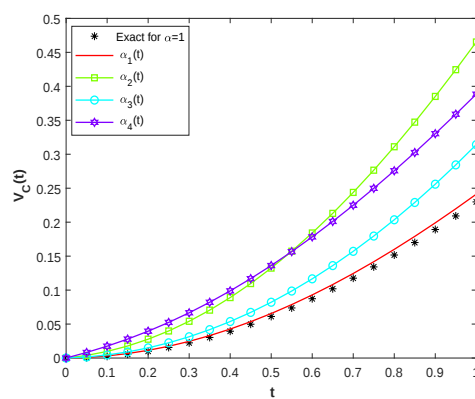
شکل ۱۰.۳ جواب دقیق مسئله را در $\alpha = 1$ و جواب‌های تقریبی $X(t)$ را به ازای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ با داده‌های ورودی $R = 4$ ، $L = 0.4$ و $C = 2$ ، نشان می‌دهد. همچنین مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ در جدول ۶.۳ ارائه شده است.

جدول ۶.۳: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۶.۳.۳	
$\alpha(t)$	$E(\Phi)$
$\alpha_1(t) = 0.99$	$1/216665 \times 10^{-7}$
$\alpha_2(t) = 1 - \frac{\exp(t)\cos(t)}{10}$	$7/568761 \times 10^{-8}$
$\alpha_3(t) = 1 - 0.3 \exp(t)$	$1/3383967133 \times 10^{-8}$
$\alpha_4(t) = \tanh(t + 1)$	$5/0127583311 \times 10^{-7}$

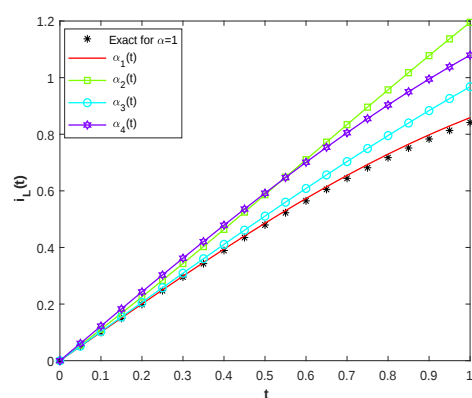
۵۰ حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از سیستم‌های فازی



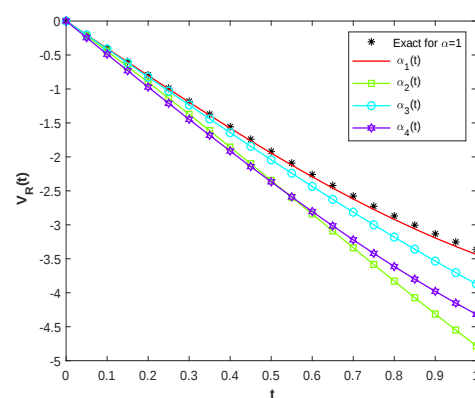
V_L (ب)



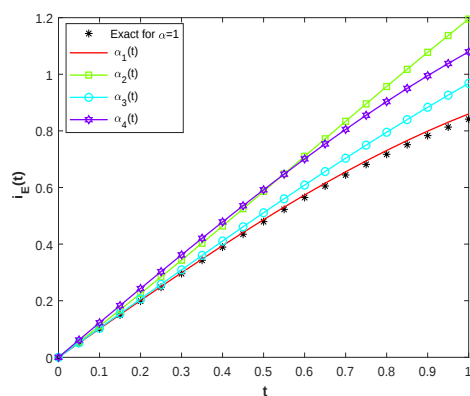
V_C (ا)



i_L (د)



V_R (ج)



i_E (ه)

شکل ۱۰.۳: جواب‌های تقریبی $X(t)$ به ازای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۶.۳.۳.

مثال ۷.۳.۳. مسئله کنترل بهینه زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J(x, u) = \frac{1}{\Upsilon} \int_0^1 ((x(t) - x_d(t))^2 + u^2(t)) dt \quad (48.3)$$

subject to

$${}_0^CF D_t^\alpha x(t) = -x(t) + f(t) + u(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad (49.3)$$

$$x(0) = \Upsilon, \quad (50.3)$$

که

$$x_d(t) = \frac{(M_\alpha)}{(\Upsilon\alpha - 1)} \left(\exp\left(\frac{-(\alpha t - \Upsilon\alpha + 1)}{(\alpha - 1)}\right) - \exp(t) \right) + \exp(-\Upsilon t) - \exp(t) + \exp(1) + 1,$$

$$f(t) = \frac{\Upsilon M_\alpha \exp(-\Upsilon t)}{(\Upsilon\alpha - \Upsilon)} \left(\exp\left(\frac{t(\Upsilon\alpha - \Upsilon)}{(\alpha - 1)}\right) - 1 \right) + \exp(-\Upsilon t) + \exp(t) - \exp(1) + 1.$$

جواب تحلیلی مسئله به صورت زیر است [۷۶]

$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ u^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \exp(-\Upsilon t) \\ -\exp(t) + \exp(1) \end{bmatrix}.$$

تابع همیلتونی به صورت زیر تعریف می شود

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{\Upsilon} ((x(t) - x_d(t))^2 + u^2(t)) + \lambda(-x(t) + f(t) + u(t)).$$

با اعمال شرایط (۲۴.۳) داریم

$$\begin{cases} {}_t^CF D_1^\alpha \lambda(t) = x(t) - x_d(t) - \lambda(t), & \lambda(1) = 0, & 0 \leq t < 1, \\ {}_0^CF D_t^\alpha x(t) = -x(t) + u(t) + f(t), & x(0) = \Upsilon, & 0 < t \leq 1, \\ u(t) + \lambda(t) = 0. \end{cases}$$

با توجه به شرایط $x(0) = \Upsilon$ و $\lambda(1) = 0$ ، جواب‌های فازی به صورت زیر انتخاب می شوند

$$x_G = \Upsilon + tG_x,$$

$$\lambda_G = (1 - t)G_\lambda,$$

$$u_G = G_u.$$

در شکل‌های ۱۱.۳ و ۱۲.۳ جواب‌های تحلیلی توابع مسیر و کنترل با جواب‌های تقریبی به دست آمده از روش پیشنهاد شده با $J = 9$ برای $\alpha = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$ نمایش داده شده است. خطای مطلق تابع وضعیت $x(t)$ و تابع کنترل $u(t)$ با $J = 9$ و مقادیر مختلف α در شکل ۱۳.۳ رسم شده است. در این مثال بیشینه خطای مطلق $x(t)$ و $u(t)$ به دست آمده از روش پیشنهادی با مقادیر به دست آمده با روش ارائه شده در [۷۶] مقایسه شده است. در [۷۶]، از

۵۲ حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از سیستم‌های فازی

جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ با انتخاب مقادیر بزرگ J به دست آمده است. جدول ۱.۳ بیشینه خطای مطلق $x(t)$ و $u(t)$ به دست آمده از روش پیشنهاد شده با $J = 9$ و روش پیشنهادی در [۷۶] با $J = 800$ را برای α های مختلف، نشان می‌دهد. مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ در جدول ۸.۳ ارائه شده است. شکل‌های ۱۱.۳ – ۱۳.۳ و جداول ۷.۳ و ۸.۳ کارایی مدل هایپربولیک فازی تعمیم یافته را برای تقریب جواب‌های دقیق مسئله نشان می‌دهند.

جدول ۷.۳: بیشینه خطای مطلق $x(t)$ و $u(t)$ برای $\alpha = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$.

	روش پیشنهادی در [۷۶]		روش ارائه شده	
	e_x	e_u	e_x	e_u
$\alpha = 0.6$	$5/57 \times 10^{-4}$	$2/9111 \times 10^{-4}$	$8/3669 \times 10^{-4}$	$2/9111 \times 10^{-4}$
$\alpha = 0.7$	$5/34 \times 10^{-4}$	$1/7357 \times 10^{-4}$	$3/0159 \times 10^{-4}$	$1/7357 \times 10^{-4}$
$\alpha = 0.8$	$8/91 \times 10^{-4}$	$0/0017$	$3/3210 \times 10^{-4}$	$0/0017$
$\alpha = 0.9$	$0/0032$	$4/1184 \times 10^{-4}$	$3/4900 \times 10^{-4}$	$4/1184 \times 10^{-4}$

جدول ۸.۳: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۷.۳.۳.

α	0.6	0.7	0.8	0.9
E	$1/56071 \times 10^{-10}$	$2/45199 \times 10^{-10}$	$5/68724 \times 10^{-10}$	$1/2449 \times 10^{-10}$

مثال ۸.۳.۳. مسئله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J(x, u) = \frac{1}{\Gamma} \int_0^1 (x^2(t) + u^2(t)) dt \quad (51.3)$$

subject to

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = -x(t) + u(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad (52.3)$$

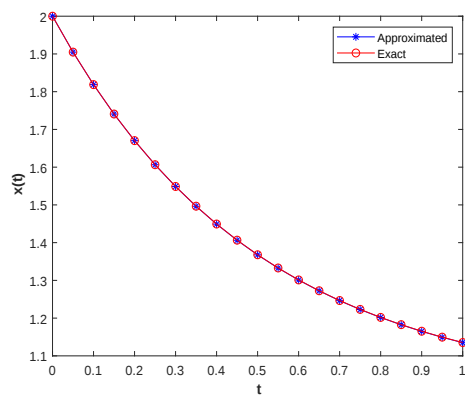
$$x(0) = 1. \quad (53.3)$$

برای $\alpha = 1$ ، جواب دقیق مسئله به صورت زیر است [۷۶]

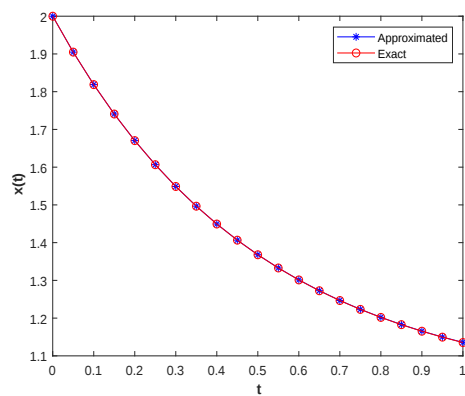
$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ u^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{\Gamma}t) + \beta \sinh(\sqrt{\Gamma}t) \\ (\beta\sqrt{\Gamma} + 1)\cosh(\sqrt{\Gamma}t) + (\beta + \sqrt{\Gamma})\sinh(\sqrt{\Gamma}t) \end{bmatrix},$$

که

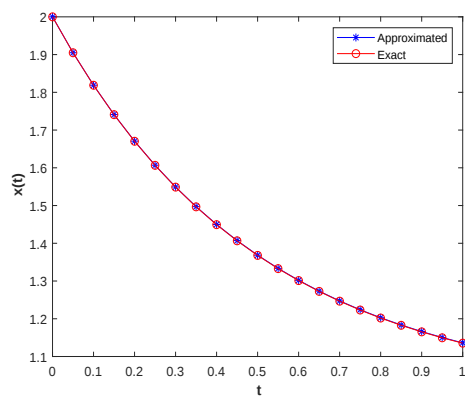
$$\beta = -\frac{\sqrt{\Gamma} \sinh(\sqrt{\Gamma}) + \cosh(\sqrt{\Gamma})}{\sinh(\sqrt{\Gamma}) + \sqrt{\Gamma} \cosh(\sqrt{\Gamma})}.$$



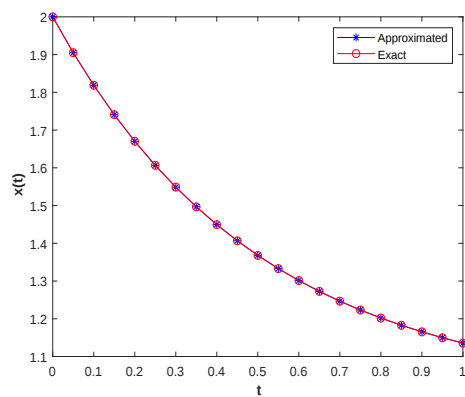
(ب) $\alpha = 1/8$



(آ) $\alpha = 1/9$



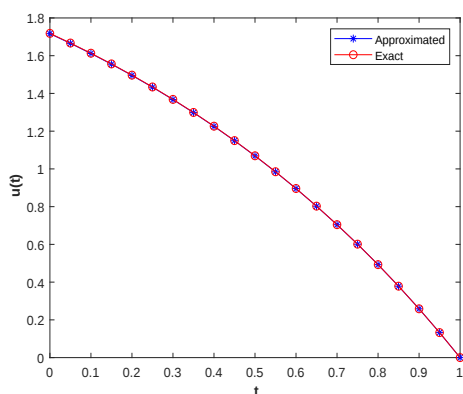
(د) $\alpha = 1/6$



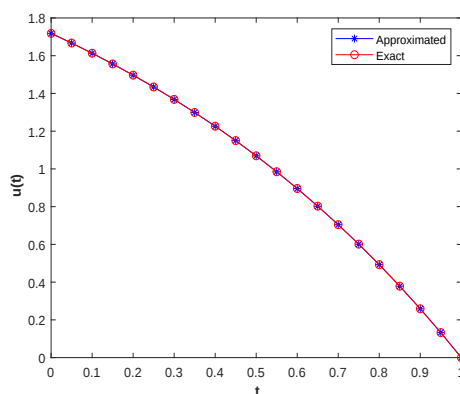
(ج) $\alpha = 1/7$

شکل ۱۱.۳: جواب دقیق و جواب تقریبی $x(t)$ با $\alpha = 1/9, 1/8, 1/7, 1/6$ برای مثال ۷.۳.۳.

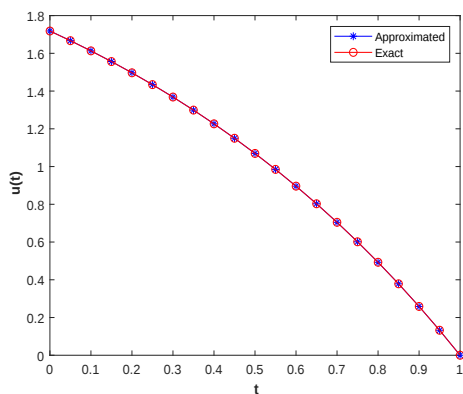
۵۴ حل معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر با استفاده از سیستم‌های فازی



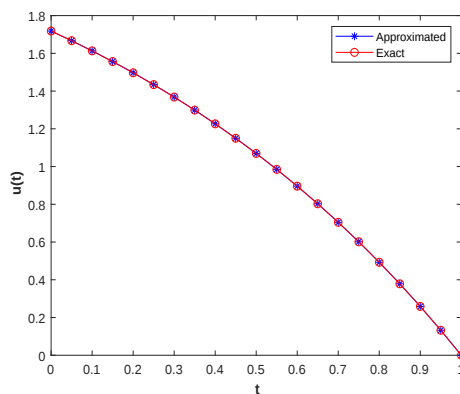
(ب) $\alpha = 0.8$



(آ) $\alpha = 0.9$

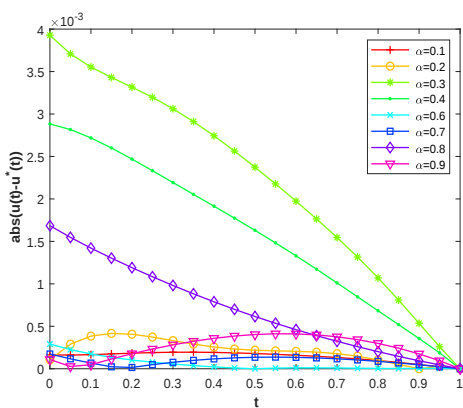


(د) $\alpha = 0.6$

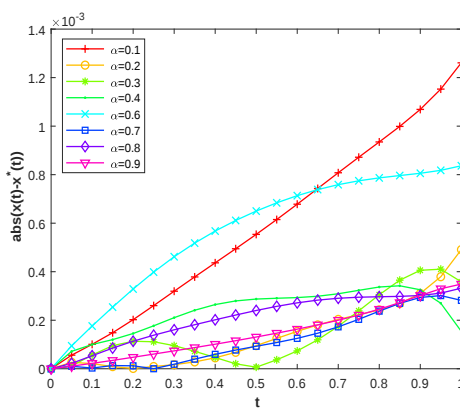


(ج) $\alpha = 0.7$

شکل ۱۲.۳: جواب دقیق و جواب تقریبی $u(t)$ با $\alpha = 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$ برای مثال ۷.۳.۳.

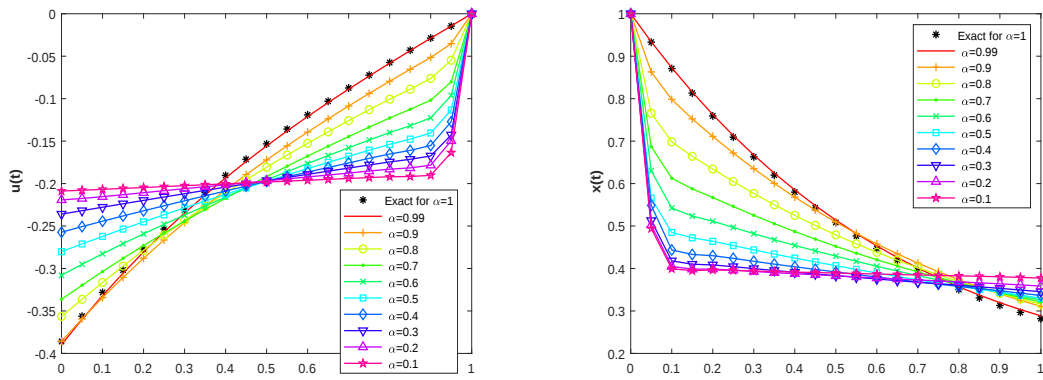


(ب) خطای مطلق $u(t)$



(آ) خطای مطلق $x(t)$

شکل ۱۳.۳: خطای مطلق $x(t)$ و $u(t)$ به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۷.۳.۳.



شکل ۱۴.۳: جواب‌های تقریبی $u(t)$ و $x(t)$ به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۸.۳.۳.

با در نظر گرفتن (۲۴.۳) داریم

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha \lambda(t) = x(t) - \lambda(t), & \lambda(1) = 0, & 0 \leq t < 1, \\ {}^C D_t^\alpha x(t) = -x(t) + u(t), & x(0) = 1, & 0 < t \leq 1, \\ u(t) + \lambda(t) = 0. \end{cases}$$

جواب دقیق برای $\alpha = 1$ و جواب تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ با $J = 9$ برای مقادیر مختلف α در شکل ۱۴.۳ نمایش داده شده است. شکل ۱۴.۳ نشان می‌دهد که وقتی α به ۱ میل می‌کند، جواب‌های به‌دست آمده به ازای α به جواب سیستم با $\alpha = 1$ نزدیک می‌شوند. جدول ۹.۳ مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ را برای α های مختلف نشان می‌دهد.

جدول ۹.۳: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۸.۳.۳.

α	۰/۱	۰/۳	۰/۵	۰/۷	۰/۹۹
E	$6/396 \times 10^{-8}$	$7/078 \times 10^{-8}$	$4/991 \times 10^{-8}$	$8/528 \times 10^{-8}$	$3/755 \times 10^{-9}$

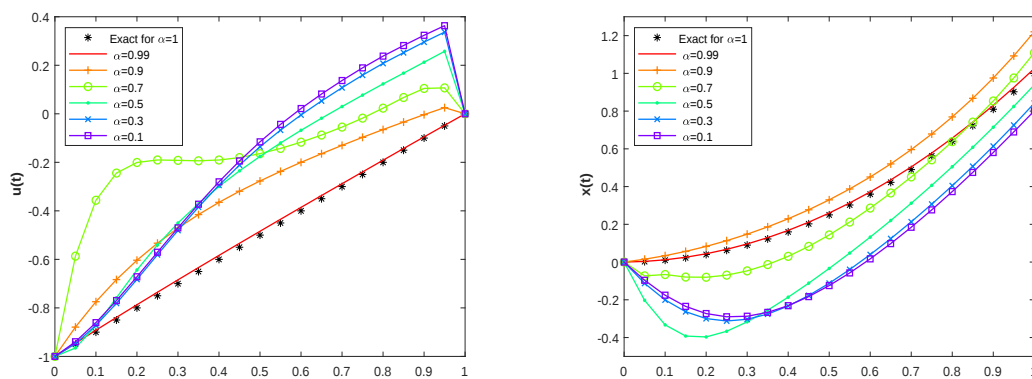
مثال ۹.۳.۳. مسئله کنترل بهینه کسری زیر را در نظر بگیرید

$$\text{Minimize } J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^1 ((x(t) - t^2)^2 + (u(t) - t + 1)^2) dt \quad (54.3)$$

subject to

$${}^C D_t^\alpha x(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} (x(t) - tu(t)), \quad 0 < t \leq 1, \quad (55.3)$$

$$x(0) = 0. \quad (56.3)$$



شکل ۱۵.۳: جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۹.۳.۳.

جواب دقیق برای $\alpha = 1$ به صورت زیر است [۷۷]

$$\begin{bmatrix} x^*(t) \\ u^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ t - 1 \end{bmatrix}.$$

با توجه به شرایط بهینگی (۲۴.۳) داریم

$$\begin{cases} {}^C_t D_t^\alpha \lambda(t) = x(t) - t^2 + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} \lambda(t), & \lambda(1) = 0, & 0 \leq t < 1, \\ {}^C_0 D_t^\alpha x(t) = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} (x(t) - t u(t)), & x(0) = 0, & 0 < t \leq 1, \\ u(t) - \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(2)} t \lambda(t) - t + 1 = 0. \end{cases}$$

در شکل ۱۵.۳ جواب دقیق برای $\alpha = 1$ و جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ با $J = 9$ برای مقادیر مختلف α نمایش داده شده است. همچنین مقادیر $E(\Phi)$ در جدول ۱۰.۳ ارائه شده است.

جدول ۱۰.۳: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۹.۳.۳.

α	$0/2$	$0/4$	$0/6$	$0/8$	$0/99$
E	$3/882 \times 10^{-6}$	$2/854 \times 10^{-6}$	$2/017 \times 10^{-5}$	$8/753 \times 10^{-9}$	$8/716 \times 10^{-8}$

مثال ۱۰.۳.۳. در این مثال، مسئله کنترل بهینه زیر در نظر گرفته شده است

$$\text{Minimize } J(x, u) = \frac{1}{2} \int_0^1 (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt \quad (57.3)$$

subject to

$${}^C_0 D_t^\alpha x_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad (58.3)$$

$${}^C_0 D_t^\alpha x_2(t) = -2x_2(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad (59.3)$$

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 1. \quad (60.3)$$

شرایط لازم بهینگی این مسئله به صورت زیر است

$$\begin{cases} {}^{CF}D_t^\alpha \lambda_1(t) = x_1(t) - \lambda_1(t), & \lambda_1(1) = 0, & 0 \leq t < 1, \\ {}^{CF}D_t^\alpha \lambda_2(t) = x_2(t) + \lambda_1(t) - 2\lambda_2(t), & \lambda_2(1) = 0, & 0 \leq t < 1, \\ {}^C D_t^\alpha x_1(t) = -x_1(t) + x_2(t) + u(t), & x_1(0) = 1, & 0 < t \leq 1, \\ {}^C D_t^\alpha x_2(t) = -2x_2(t), & x_2(0) = 1, & 0 < t \leq 1, \\ u(t) + \lambda_1(t) = 0. \end{cases}$$

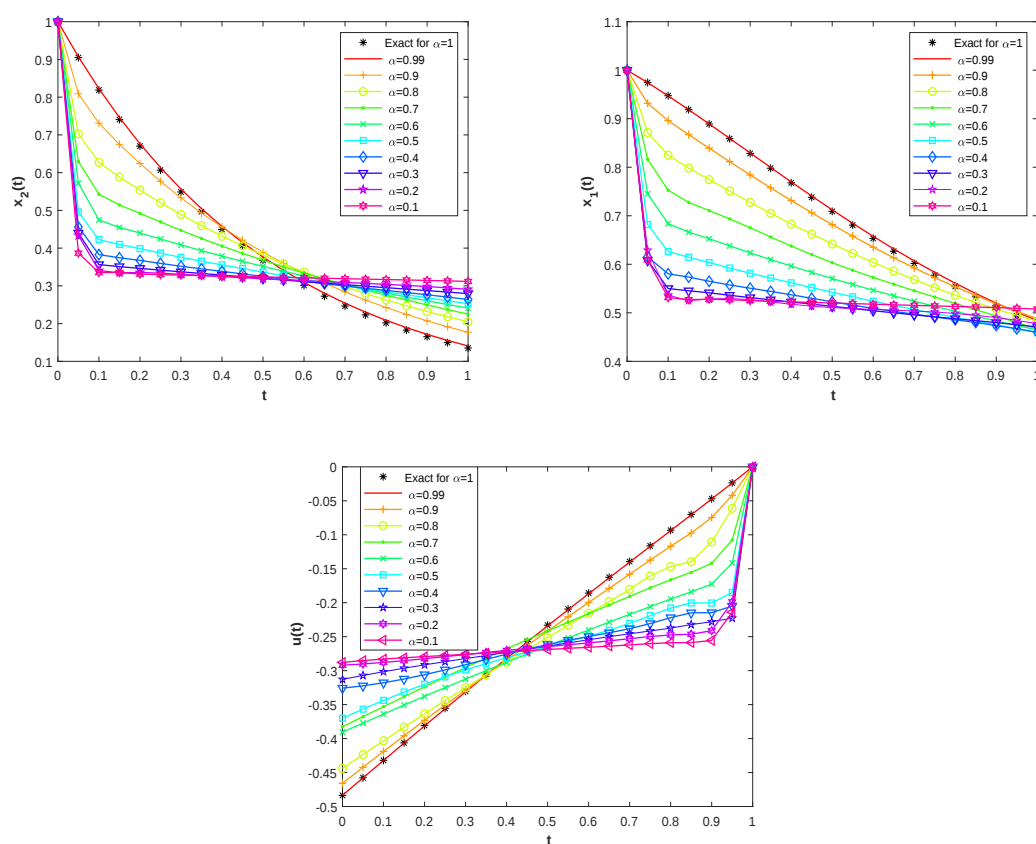
جواب دقیق این مسئله برای $\alpha = 1$ به صورت زیر است [۷۸]

$$\begin{bmatrix} x_1^*(t) \\ x_2^*(t) \\ u^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.18352 \exp(\sqrt{2}t) + 2.48165 \exp(-\sqrt{2}t) - 1/5 \exp(-2t) \\ \exp(-2t) \\ 0.44305 \exp(\sqrt{2}t) - 1.279322 \exp(-\sqrt{2}t) + 0.5 \exp(-2t) \end{bmatrix}.$$

در شکل ۱۶.۳ جواب دقیق برای $\alpha = 1$ و جواب‌های تقریبی $x(t)$ ، $x_2(t)$ و $u(t)$ با $J = 9$ برای مقادیر مختلف α نمایش داده شده است. همچنین مقادیر $E(\Phi)$ در جدول ۱۱.۳ ارائه شده است.

جدول ۱۱.۳: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ برای مثال ۱۰.۳.۳.

α	۰/۱	۰/۴	۰/۷	۰/۹	۰/۹۹
E	7.584×10^{-8}	1.484×10^{-4}	5.636×10^{-5}	7.199×10^{-8}	5.731×10^{-8}



شکل ۱۶.۳: جواب‌های تقریبی $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ و $u(t)$ به ازای مقادیر مختلف α برای مثال ۱۰.۳.۳.

فصل ۴

کاربرد سیستم فازی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر

به‌طور کلی معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری ترکیبی از معادلات دیفرانسیل جبری و معادلات دیفرانسیل تأخیری هستند. با توجه به گستره وسیع کاربردهای سیستم‌های دیفرانسیل جبری و معنای فیزیکی طبیعی تأخیر زمانی، واضح است که این معادلات نقش مهمی در مدل‌سازی فیزیکی و درک نظری مسائل مختلف علوم و مهندسی دارند. از آنجایی که مفهوم معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری موضوع جدیدی در ریاضیات است، تعداد رویکردهای موجود برای حل آن‌ها محدود است و فقط می‌توان به [۷۹] اشاره کرد. در [۷۹] از روش عددی آرام سازی موج^۱ برای حل معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری استفاده شده است. در این فصل ابتدا صورت کلی معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر را معرفی می‌کنیم. سپس یک روش عددی بر مبنای سیستم‌های فازی برای حل این دسته از معادلات پیشنهاد می‌کنیم. در انتهای فصل نشان می‌دهیم دسته خاصی از مسائل کنترل بهینه تأخیری قابل تبدیل به معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری هستند و این مسائل را با استفاده از روش ارائه شده حل می‌کنیم.

¹Waveform Relaxation Method

۱.۴ معرفی معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر و روش حل مسئله

معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر تعمیمی از معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری مرتبه صحیح، با مرتبه دلخواه هستند و به صورت زیر تعریف می شوند

$$E_{\circ}^{ABC} D_t^{\alpha(t)} x(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau) + F(t), \circ < t \leq T, \quad (1.4)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad -\tau \leq t \leq \circ, \quad (2.4)$$

که $\tau \in \mathbb{R}^{+n}$ برداری از تأخیرهای ثابت و $F : [\circ, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، $\det(E) = \circ$ ، $E, A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ است.

همان طور که در فصل ۱ اشاره شد سیستم های فازی با موتور استنتاج ضرب، فازی ساز منفرد، غیرفازی ساز میانگین مراکز و توابع عضویت گوسین یا سیستم های فازی سوگنو مرتبه صفر تقریب گر عمومی هستند. در این بخش از سیستم فازی با یک متغیر ورودی $t \in [\circ, T]$ و متغیر خروجی $f(t) \in \mathbb{R}$ به صورت زیر استفاده می کنیم

$$f(t) = \sum_{i=1}^m c_i \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i} = C^T \Psi, \quad (3.4)$$

که در آن μ_i ، $i = 1, 2, \dots, m$ و $\psi_i = \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i}$ ، $\Psi = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m]^T$ ، $C = [c_1, c_2, \dots, c_m]^T$ توابع عضویت گوسین هستند و به صورت زیر تعریف می شوند

$$\mu_i = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{t - a_i}{\sigma_i}\right)^2\right), \quad (4.4)$$

که a_i و σ_i به ترتیب مقادیر میانگین و انحراف معیار هستند. این پارامترها به صورت زیر تعیین می شوند

$$a_i = (i - 1) \frac{T}{m - 1}, \quad (5.4)$$

$$\sigma_i = \frac{T}{m - 1}, \quad (6.4)$$

که $m > 1$ تعداد قوانین فازی است.

ملاحظه ۱.۱.۴. تابع گوسین^۱، تابعی غیرخطی در C^∞ است. این ویژگی باعث می شود که جواب های تقریبی (۱.۴) - (۲.۴)، هموار، پیوسته و مشتق پذیر در C^∞ باشند.

¹Gaussian function

ملاحظه ۲.۱.۴. از (۶.۴) به راحتی می توان فهمید هنگامی که تعداد توابع عضویت بینهایت باشد σ_i به صفر میل می کند، یعنی $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_i = 0$. بنابراین، هنگامی که m به بینهایت نزدیک می شود، تابع عضویت در (۴.۴) از حالت گوسی به منفرد تبدیل می شود.

براساس قضیه ۱.۲.۱، اثبات می شود که هر تابع پیوسته $g(t) \in [0, T]$ را می توان به وسیله سیستم فازی ارائه شده با تعداد قوانین فازی مناسب، تقریب زد. در ادامه یک کران بالای خطا برای این تقریب به دست می آوریم. سپس همگرایی را برای $m \rightarrow \infty$ ، یعنی زمانی که همه نقاط t در دامنه $[0, T]$ در نظر گرفته شوند، بررسی می کنیم.

قضیه ۱.۱.۴. فرض کنید تابع $g(t)$ به طور پیوسته مشتق پذیر باشد و مجموعه ای از پارامترها به صورت $c_i = g(t_i)$ هنگامی که $m \rightarrow \infty$ موجود باشد. آن گاه

$$\begin{aligned} |g(t) - f(t)| &\leq 0.83452 g_s \Delta_t + \max_i |e_i|, \quad (\text{الف}) \\ \text{که } g_s &= \sup_{t \in [0, T]} \left| \frac{dg(t)}{dt} \right| \text{ و } e_i = g(t_i) - c_i, \Delta_t = \frac{T}{m-1} \\ \lim_{m \rightarrow \infty} f(t) &= g(t) \quad (\text{ب}) \end{aligned}$$

برهان. الف)

$$\begin{aligned} |g(t) - f(t)| &= \left| g(t) - \sum_{i=1}^m c_i \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i} \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^m (g(t) - c_i) \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i} \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |g(t) - c_i| \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i}. \end{aligned} \quad (7.4)$$

از طرفی

$$\begin{aligned} |g(t) - c_i| &= |g(t) - g(t_i) + g(t_i) - c_i| \\ &= |g(t) - g(t_i) + e_i| \\ &\leq |g(t) - g(t_i)| + |e_i|. \end{aligned}$$

از قضیه مقدار میانگین داریم

$$\begin{aligned} |g(t) - c_i| &\leq \left| \frac{dg(t)}{dt} \Big|_{\hat{t}_i} (t - t_i) \right| + |e_i| \\ &\leq \left| \frac{dg(t)}{dt} \Big|_{\hat{t}_i} \right| |t - t_i| + |e_i| \\ &\leq g_s |t - t_i| + |e_i|, \end{aligned} \quad (8.4)$$

که $\hat{t}_i$ مقادیری بین t و t_i هستند. با جای گذاری (۸.۴) در (۷.۴) داریم

$$\begin{aligned} |g(t) - f(t)| &\leq \frac{\sum_{i=1}^m g_s |(t - t_i)| \mu_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i} + \frac{\sum_{i=1}^m |e_i| \mu_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i} \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^m g_s |(t - t_i)| \mu_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i} + \frac{\sum_{i=1}^m \max_i |e_i| \mu_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i} \\ &\leq \frac{\sum_{i=1}^m g_s |(t - t_i)| \mu_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i} + \max_i |e_i|. \end{aligned} \quad (9.4)$$

اولین عبارت در سمت راست (۹.۴) را می توان به صورت زیر نوشت

$$\theta := g_s \frac{\sum_{i=1}^m |(t - t_i)| \mu_i}{\sum_{i=1}^m \mu_i},$$

که

$$\mu_i = \exp\left(-\frac{1}{\tau} \left(\frac{t - t_i}{\Delta_t}\right)^2\right), \quad t_i = (i - 1)\Delta_t \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

قرار دهید $t = (j - 1)\Delta_t$, $j \in [1, m]$ سپس

$$\theta = g_s \Delta_t \frac{\sum_{i=1}^m |(j - i)| \exp\left(-\frac{1}{\tau} (j - i)^2\right)}{\sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{1}{\tau} (j - i)^2\right)}.$$

می توان نشان داد که برای $j \in [1, m]$ و $m \geq 2$

$$\frac{\sum_{i=1}^m |(j - i)| \exp\left(-\frac{1}{\tau} (j - i)^2\right)}{\sum_{i=1}^m \exp\left(-\frac{1}{\tau} (j - i)^2\right)} \leq 0.83459.$$

از این رو

$$\theta \leq 0.83452 g_s \Delta_t. \quad (10.4)$$

در نتیجه (الف) اثبات می شود.

(ب)

از (الف)، کران بالای تقریب بین جواب دقیق و جواب فازی ارائه شده را می توان به صورت زیر توصیف کرد

$$|g(t) - f(t)| \leq 0.83452 g_s \Delta_t + \max_i |e_i|. \quad (11.4)$$

با حد گرفتن از دو طرف (۱۱.۴) زمانی که m نزدیک به بینهایت می شود و با توجه به این که g_s کران دار است و $\Delta_t \rightarrow 0$ ، داریم

$$|g(t) - \lim_{m \rightarrow \infty} f(t)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \max_i |e_i|. \quad (12.4)$$

از ملاحظه ۲.۱.۴ و (۱۲.۴)

$$|g(t) - \lim_{m \rightarrow \infty} f(t)| = o, \quad (13.4)$$

□

یعنی، $g(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} f(t)$.

بنابراین با توجه به توانایی عالی سیستم فازی (۳.۴) برای تقریب توابع، هریک از جواب‌های مجهول معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر را به عنوان خروجی سیستم فازی مرتبط در نظر می‌گیریم. این جواب‌های فازی به صورت مجموع دو بخش نوشته می‌شوند. بخش اول شامل پارامترهای قابل تنظیم نیست و در شرایط اولیه و مرزی صدق می‌کند. بخش دوم شامل یک سیستم فازی با پارامترهای قابل تنظیم است. در نتیجه، مدل‌های فازی زیر را برای تقریب جواب‌های مسئله مقدار اولیه (۱.۴) و (۲.۴) به شرح زیر معرفی می‌کنیم

$$x_{d_{FS}}(C_{x_d}, t) = \phi(o) + tFS_{x_d}, \quad d = 1, 2, \dots, n, \quad (14.4)$$

که FS سیستم فازی تعریف شده در (۳.۴) است. با جای‌گذاری جواب‌های فازی (۱۴.۴) در مسئله مقدار اولیه (۱.۴) و (۲.۴) داریم

$$E_{\circ}^{ABC} D_t^{\alpha(t)} x_{FS}(t) = \mathcal{A}x_{FS}(t) + \mathcal{B}x_{FS}(t - \tau) + \mathcal{F}(t), \quad o < t \leq T, \quad (15.4)$$

که $x_{FS} = [x_{1_{FS}}, x_{2_{FS}}, \dots, x_{n_{FS}}]^T$ و $\Upsilon = [C_{x_1}, C_{x_2}, \dots, C_{x_n}]^T$ بردار تمام پارامترهای قابل تنظیم جواب‌های فازی (۱۴.۴) است. حال برای آموزش پارامترهای قابل تنظیم از فرآیند یادگیری فصل ۳ استفاده می‌کنیم.

۲.۴ حل مسئله کنترل بهینه تأخیری کسری مرتبه متغیر با سیستم فازی

مسائل کنترل بهینه تأخیری کسری مرتبه متغیر دسته‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری مرتبه متغیر هستند که دستگاه‌های تأخیر زمانی را شامل می‌شوند. این مسائل در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های واقعی کاربرد دارند، از این رو، توسط محققان مورد بررسی قرار گرفته‌اند. به عنوان مثال می‌توان به روش‌های مبتنی بر چند جمله‌ای‌های متعامد و ماتریس‌های عملیاتی کسری [۸۰]–[۹۰] و روش‌های مبتنی بر گسسته‌سازی [۹۱]–[۹۲] اشاره کرد. همچنین نویسندگان در [۹۳]–[۹۵] سعی کرده‌اند از توانایی روش‌های شبکه عصبی برای حل برخی از انواع مسائل کنترل بهینه تأخیری کسری استفاده کنند. با وجود مزایای سیستم‌های فازی، هنوز هیچ مطالعه‌ای برای حل مسائل کنترل بهینه تأخیری کسری با آن‌ها ارائه نشده است.

به طور کلی، روش های عددی برای حل مسائل کنترل بهینه تأخیری کسری مرتبه متغیر به روش های غیر مستقیم و مستقیم تقسیم می شوند. روش های مستقیم این مسائل را با تقریب توابع حالت و کنترل حل می کنند، در حالی که روش های غیرمستقیم مبتنی بر ساخت یک دستگاه همیلتونی و سپس حل مسائل مقدار مرزی حاصل هستند. در این بخش، نشان می دهیم که در برخی مسائل کنترل بهینه تأخیری کسری مرتبه متغیر، دستگاه همیلتونی حاصل از روش های غیرمستقیم را می توان به عنوان معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری در نظر گرفت.

۱.۲.۴ فرمول بندی مسئله کنترل بهینه تأخیری کسری مرتبه متغیر

در این بخش، مسئله کنترل بهینه تأخیری کسری مرتبه متغیر را در نظر می گیریم

$$\text{Minimize } J(x, u) = \int_0^T F(t, x(t), u(t)) dt \quad (16.4)$$

subject to

$$\mathcal{M}\dot{x}(t) + \mathcal{N}_0^{ABC} D_t^{\alpha(t)} x(t) = G(t, x(t), u(t), x(t - \tau_x), u(t - \tau_u)), \quad 0 < t \leq T, \quad (17.4)$$

$$x(t) = \phi(t), \quad -\tau_x \leq t \leq 0, \quad (18.4)$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad -\tau_u \leq t \leq 0, \quad (19.4)$$

که $x \in \mathbb{R}^n$ بردار وضعیت، $\tau \in \mathbb{R}^{+n}$ برداری از تاخیرهای ثابت و $u \in \mathbb{R}^m$ بردار کنترل، $F \in \mathbb{R}$ پیوسته و مشتق پذیر و $G \in \mathbb{R}^n$ پیوسته است. همچنین T ثابت و $\phi(t), \varphi(t)$ توابعی پیوسته هستند.

به منظور فرمول بندی مجدد مسئله (۱۶.۴) - (۱۹.۴) به عنوان معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری شرایط لازم بهینگی متناظر با این مسئله را به دست می آوریم. برای شروع، با توجه به مسئله (۱۶.۴) - (۱۹.۴)، تابع همیلتونی H را به صورت زیر تعریف می کنیم

$$H(t, x(t), u(t), x(t - \tau_x), u(t - \tau_u), \lambda(t)) = F(t, x(t), u(t)) + \lambda^T G(t, x(t), x(t - \tau_x), u(t), u(t - \tau_u)), \quad (20.4)$$

که $\lambda \in \mathbb{R}^n$ بردار ضرایب لاگرانژ است. قضیه زیر شرایط لازم بهینگی مسئله (۱۶.۴) - (۱۹.۴) را بیان می کند.

قضیه ۱.۲.۴. اگر $\lambda(t)$ ، $x(t)$ و $u(t)$ جواب های بهینه مسئله (۱۶.۴) - (۱۹.۴) باشند آنگاه در شرایط زیر صدق می کنند

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}\dot{x}(t) + \mathcal{N}_{\circ}^{ABC} D_t^{\alpha(t)} x(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda(t)}, \quad \circ < t \leq T, \\ \mathcal{M}\dot{\lambda}(t) - \mathcal{N}_t^{ABC} D_T^{\alpha(t)} \lambda(t) = -\frac{\partial H}{\partial x(t)} - \chi_{[\circ, T-\tau_x]} \mathcal{H}_x(t + \tau_x), \quad \circ \leq t < T, \\ \frac{\partial H}{\partial u(t)} + \chi_{[\circ, T-\tau_u]} \mathcal{H}_u(t + \tau_u) = \circ, \quad \circ \leq t \leq T, \\ x(t) = \phi(t), \quad -\tau_x \leq t \leq \circ, \\ u(t) = \varphi(t), \quad -\tau_u \leq t \leq \circ, \\ \lambda(T) = \circ, \end{array} \right. \quad (21.4)$$

که $\mathcal{H}_u(t) = \frac{\partial H}{\partial u(t - \tau_u)}$ و $\mathcal{H}_x(t) = \frac{\partial H}{\partial x(t - \tau_x)}$

برهان. مسئله اولیه را به مسئله زیر تبدیل کنید

$$\mathcal{J}(u) = \int_{\circ}^T \left(H(t, x(t), u(t), x(t - \tau_x), u(t - \tau_u), \lambda(t)) - \lambda \left(\mathcal{M}\dot{x}(t) + \mathcal{N}_{\circ}^{ABC} D_t^{\alpha(t)} x(t) \right) \right) dt.$$

سپس متغیرهایی به شکل

$$x(t) + \delta x(t), \quad u(t) + \delta u(t), \quad \lambda(t) + \delta \lambda(t), \quad x(t - \tau_x) + \delta x(t - \tau_x), \quad u(t - \tau_u) + \delta u(t - \tau_u)$$

و با شرایط شدنی زیر تعریف کنید

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x(t) = \circ, \quad -\tau_x \leq t \leq \circ, \\ \delta u(t) = \circ, \quad -\tau_u \leq t \leq \circ. \end{array} \right.$$

در روند کمینه سازی اولین تغییر $\mathcal{J}$ باید صفر باشد بنابراین داریم

$$\begin{aligned} \circ &= \int_{\circ}^T \left\{ \frac{\partial H}{\partial x(t)} \delta x(t) + \frac{\partial H}{\partial x(t - \tau_x)} \delta x(t - \tau_x) + \frac{\partial H}{\partial u(t)} \delta u(t) + \frac{\partial H}{\partial u(t - \tau_u)} \delta u(t - \tau_u) \right. \\ &\quad + \frac{\partial H}{\partial \lambda(t)} \delta \lambda(t) - \delta \lambda(t) \left(\mathcal{M}\dot{x}(t) + \mathcal{N}_{\circ}^{ABC} D_t^{\alpha(t)} x(t) \right) \\ &\quad \left. - \lambda(t) \left(\mathcal{M}\dot{\delta x}(t) + \mathcal{N}_{\circ}^{ABC} D_t^{\alpha(t)} \delta x(t) \right) \right\} dt. \end{aligned}$$

از انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$\int_{\circ}^T \lambda \delta \dot{x}(t) dt = - \int_{\circ}^T \delta x(t) \dot{\lambda}(t) dt + \lambda(T) \delta x(T),$$

$$\int_{\circ}^T \lambda_{\circ}^{ABC} D_t^{\alpha(t)} \delta x(t) = \int_{\circ}^T \delta x(t) {}_t^{ABR} D_T^{\alpha(t)} \lambda(t) dt.$$

از آن جا که $x(\circ)$ مشخص است، داریم $\delta x(\circ) = \circ$. با استفاده از (۲۶.۲)

$$\begin{aligned} & \int_{\circ}^T \delta x(t) {}^{ABR}D_T^{\alpha(t)} \lambda(t) dt \\ &= \int_{\circ}^T \delta x(t) {}^{ABC}D_T^{\alpha(t)} \lambda(t) dt + \lambda(T) \frac{M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \int_{\circ}^T \delta x(t) E_{\alpha(t)} \left(\frac{-\alpha(t)}{1-\alpha(t)} (T-t)^{\alpha(t)} \right) dt. \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} \int_{\circ}^T \frac{\partial H}{\partial x(t-\tau_x)} \delta x(t-\tau_x) dt &= \int_{\circ}^T \mathcal{H}_x(t) \delta x(t-\tau_x) dt \\ &= \int_{\tau_x}^T \mathcal{H}_x(t) \delta x(t-\tau_x) dt = \int_{\circ}^{T-\tau_x} \mathcal{H}_x(t+\tau_x) \delta x(t) dt \\ &= \int_{\circ}^T \mathcal{H}_x(t+\tau_x) \delta x(t) dt, \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} \int_{\circ}^T \frac{\partial H}{\partial u(t-\tau_u)} \delta u(t-\tau_u) dt &= \int_{\circ}^T \mathcal{H}_u(t) \delta u(t-\tau_u) dt \\ &= \int_{\tau_u}^T \mathcal{H}_u(t) \delta u(t-\tau_u) dt = \int_{\circ}^{T-\tau_u} \mathcal{H}_u(t+\tau_u) \delta u(t) dt \\ &= \int_{\circ}^T \mathcal{H}_u(t+\tau_u) \delta u(t) dt, \end{aligned}$$

از آن جا که $\delta x(t) = \circ$, $-\tau_x \leq t \leq \circ$ ، $\delta u(t) = \circ$, $-\tau_u \leq t \leq \circ$ و $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_u = \circ$ برای $t \geq T$. بنابراین، رابطه زیر را نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned} & -\lambda(T) \left(\mathcal{N} \frac{M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \int_{\circ}^T \delta x(t) E_{\alpha(t)} \left(\frac{-\alpha(t)}{1-\alpha(t)} (T-t)^{\alpha(t)} \right) dt + \mathcal{M} \delta x(T) \right) \\ & + \int_{\circ}^T \left\{ \delta x(t) \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \mathcal{H}_x + \mathcal{M} \dot{\lambda} - \mathcal{N} {}^{ABC}D_T^{\alpha(t)} \lambda(t) \right) \right. \\ & \left. + \delta u(t) \left(\frac{\partial H}{\partial u} + \mathcal{H}_u \right) + \delta \lambda(t) \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \mathcal{M} \dot{x}(t) - \mathcal{N} {}^{ABC}D_t^{\alpha(t)} x(t) \right) \right\} dt = \circ. \end{aligned}$$

با فرض $\mathcal{N} \frac{M(\alpha(t))}{1-\alpha(t)} \int_{\circ}^T \delta x(t) E_{\alpha(t)} \left(\frac{-\alpha(t)}{1-\alpha(t)} (T-t)^{\alpha(t)} \right) dt \neq -\mathcal{M} \delta x(T)$ و از آن جایی که توابع تغییرات به طور دلخواه انتخاب شده اند، پس اثبات قضیه کامل است.

□

ملاحظه ۱.۲.۴. دو معادله اول در (۲۱.۴) معادلات متعارف همیلتون هستند. معادله سوم را می توان به عنوان یک محدودیت جبری در نظر گرفت. بنابراین (۲۱.۴) را معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری همیلتونی می نامیم.

۳.۴ مثال عددی

در این بخش، چندین مثال برای نشان دادن کارایی و اعتبار روش پیشنهادی ارائه شده است. برای همه مثال‌ها، مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ و زمان سپری شده واحد پردازش مرکزی^۱ (بر حسب ثانیه) برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ فهرست شده است. تمام نتایج عددی با استفاده از کامپیوتر شخصی با پردازنده ۲/۶۰ گیگاهرتز اینتل ۷ هسته‌ای و رم ۶ گیگابایت و سیستم عامل ویندوز به‌دست آمده است.

مثال ۱.۳.۴. معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} {}^{ABC}D_t^{\alpha(t)} x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} x_1(t-1) \\ x_2(t-0.6) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad (22.4)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp(0.5t) \\ \sin(\pi t) \end{bmatrix}, \quad t \leq 0, \quad (23.4)$$

$f(t)$ به‌گونه‌ای است که جواب دقیق مسئله به‌صورت زیر باشد

$$x^*(t) = \begin{bmatrix} \exp(0.5t) \\ \sin(\pi t) \end{bmatrix}.$$

با توجه به شرایط $x_1(0) = 1$ و $x_2(0) = 0$ جواب‌های فازی به‌صورت زیر انتخاب می‌شوند

$$x_{1_{FS}} = 1 + tFS_{x_1},$$

$$x_{2_{FS}} = tFS_{x_2}.$$

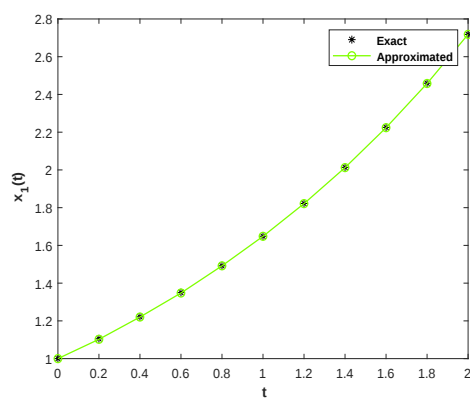
شکل‌های ۱.۴ و ۲.۴ مقادیر دقیق و تقریبی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ را با $m = 11$ برای تعدادی از مرتبه‌های مختلف $\alpha(t)$ نشان می‌دهند. خطاهای مطلق $x_1(t)$ و $x_2(t)$ با $m = 11$ برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در شکل ۳.۴ نشان داده شده است. مقادیر تابع خطای $E(\Phi)$ و زمان اجرا (بر حسب ثانیه) برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در جدول ۱.۴ فهرست شده است. از شکل‌های ۱.۴ – ۳.۴ و جدول ۱.۴، واضح است که استفاده از روش پیشنهادی منجر به تقریب‌های خوبی از جواب‌های دقیق می‌شود.

مثال ۲.۳.۴. معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر زیر را در نظر بگیرید

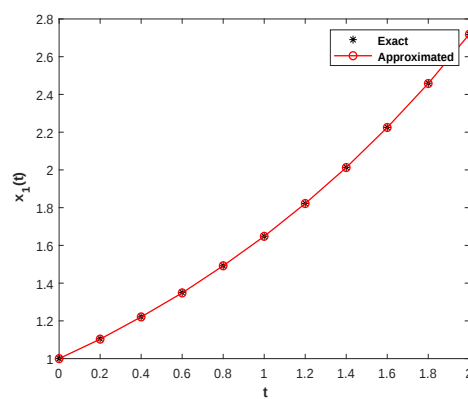
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} {}^{ABC}D_t^{\alpha(t)} x(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t-1) + \begin{bmatrix} 1 - \exp(t) - \exp(t-1) \\ 1 - 2t \end{bmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2, \quad (24.4)$$

¹CPU

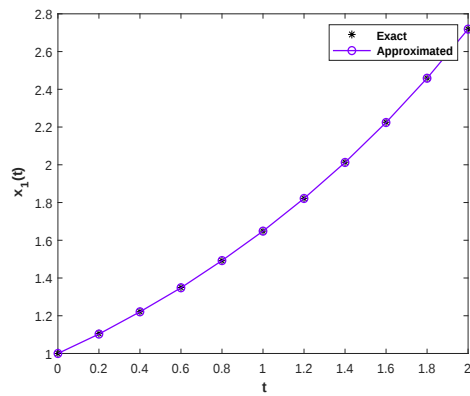
۶۸ کاربرد سیستم فازی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر



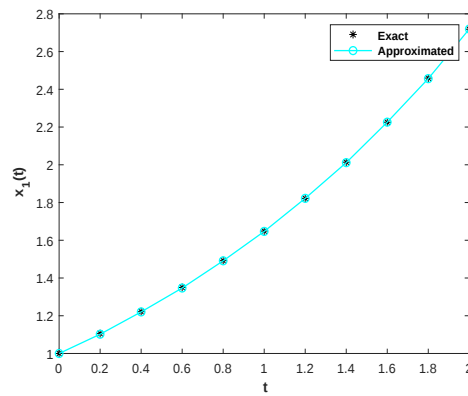
(ب) $\alpha_2(t) = 0.7 + 0.5 \sin(\frac{t}{0.5})$



(ا) $\alpha_1(t) = \frac{1}{1+\exp(-t)}$



(د) $\alpha_4(t) = 0.6$

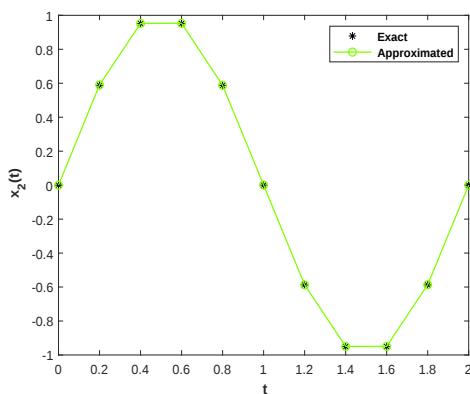


(ج) $\alpha_3(t) = \tanh(t+1)$

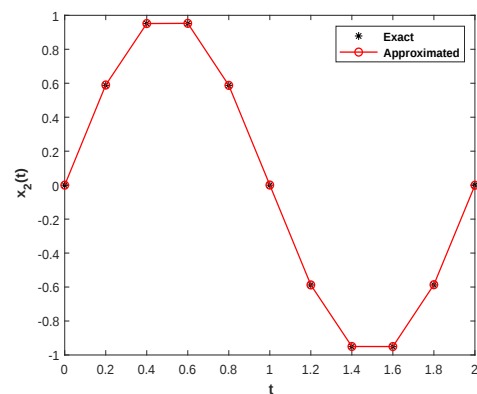
شکل ۱.۴: جواب‌های تقریبی $x_1(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۱.۳.۴.

جدول ۱.۴: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ و زمان اجرا برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در مثال ۱.۳.۴.

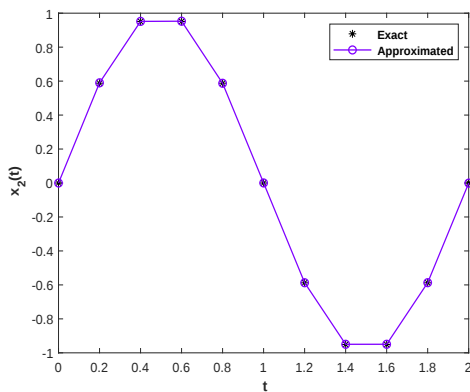
$\alpha(t)$	$E(\Phi)$	زمان اجرا
$\alpha_1(t) = \frac{1}{1+\exp(-t)}$	$4/4750 \times 10^{-20}$	۰/۳۴۴
$\alpha_2(t) = 0/7 + 0/05 \sin(\frac{t}{10})$	$3/0586 \times 10^{-20}$	۰/۴۳۷
$\alpha_3(t) = \tanh(t+1)$	$1/5952 \times 10^{-16}$	۰/۵۹۴
$\alpha_4(t) = 0/6$	$1/2874 \times 10^{-19}$	۰/۳۶۰



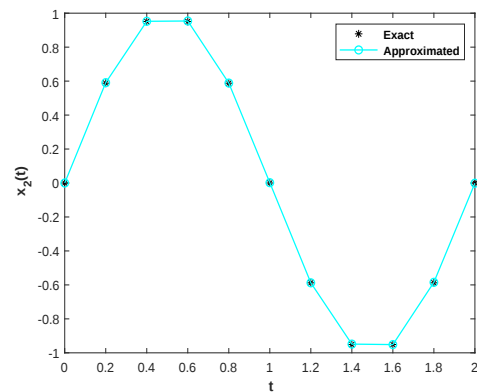
(ب) $\alpha_2(t) = 0/7 + 0/05 \sin(\frac{t}{10})$



(ا) $\alpha_1(t) = \frac{1}{1+\exp(-t)}$



(د) $\alpha_4(t) = 0/6$



(ج) $\alpha_3(t) = \tanh(t+1)$

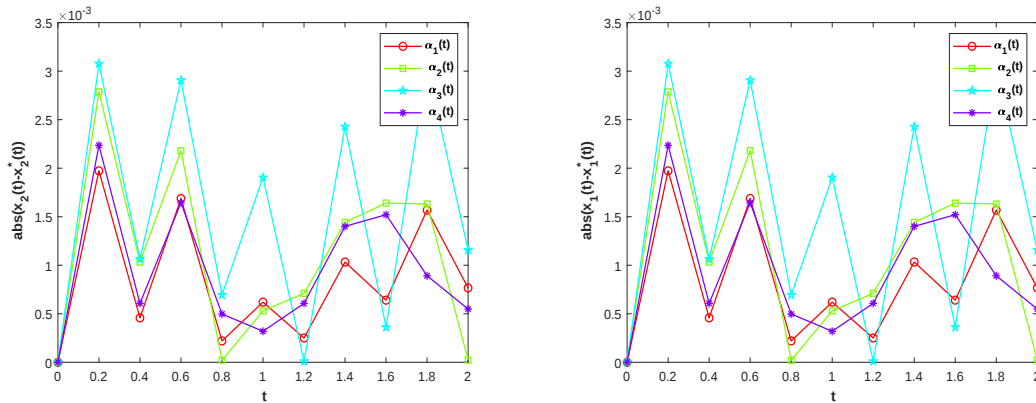
شکل ۲.۴: جواب‌های تقریبی $x_2(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۱.۳.۴.

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp(t) \\ t \end{bmatrix}, \quad t \leq 0, \quad (25.4)$$

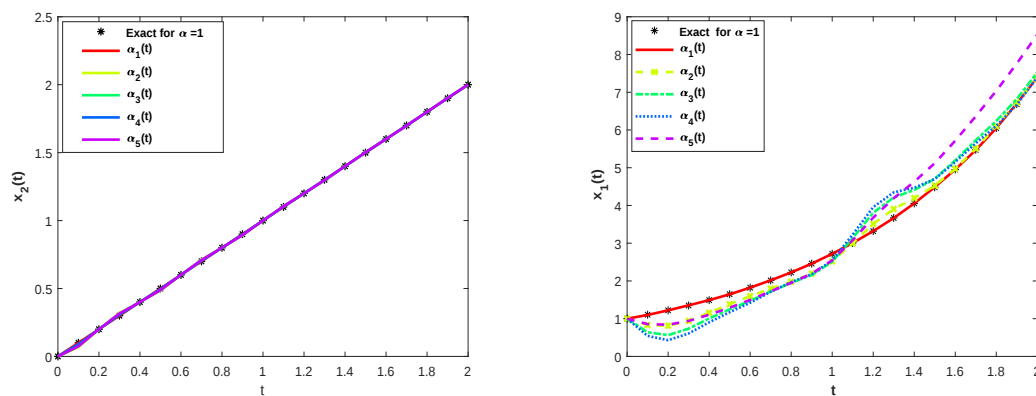
جواب دقیق مسئله برای $\alpha(t) = 1$ به صورت زیر است

$$x(t) = \begin{bmatrix} \exp(t) \\ t \end{bmatrix}.$$

۷۰ کاربرد سیستم فازی برای حل معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر



شکل ۳.۴: خطای مطلق $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۱.۳.۴



شکل ۴.۴: جواب‌های تقریبی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۲.۳.۴

در این جا، از روش پیشنهادی برای حل مسئله (۲۴.۴)–(۲۵.۴) استفاده می‌شود. با در نظر گرفتن شرایط $x_1(0) = 1$ و $x_2(0) = 0$ ، می‌توانیم جواب‌های فازی را با ۱۱ قانون فازی ($m = 11$) به صورت زیر انتخاب کنیم

$$x_{1FS} = 1 + tFS_{x_1},$$

$$x_{2FS} = tFS_{x_2}.$$

جواب دقیق $\alpha(t) = 1$ و جواب‌های عددی $x_1(t)$ و $x_2(t)$ برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در شکل ۴.۴ ارائه شده است. در جدول ۲.۴، خطاهای مطلق $x(t)$ برای $\alpha(t) = 1$ نشان داده شده است. همچنین، جدول ۳.۴ مقادیر تابع خطای $E(\Phi)$ و زمان سپری شده (برحسب ثانیه) را برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ نشان می‌دهد. از شکل ۴.۴ و جداول ۲.۴ و ۳.۴، واضح است که نتایج تقریبی خوبی با استفاده از روش ارائه شده با تعداد کمی از قوانین فازی به دست می‌آید.

مثال ۳.۳.۴. مسئله کنترل بهینه کسری دارای تأخیر در متغیر حالت را به صورت زیر در نظر

جدول ۲.۴: خطای مطلق $x(t)$ در $\alpha(t) = 1$ برای مثال ۲.۳.۴.

t	خطای مطلق $x_1(t)$	خطای مطلق $x_2(t)$
۰/۲	$1/765 \times 10^{-4}$	$4/706 \times 10^{-11}$
۰/۴	$1/280 \times 10^{-4}$	$1/057 \times 10^{-10}$
۰/۶	$1/003 \times 10^{-4}$	$1/649 \times 10^{-10}$
۰/۸	$7/714 \times 10^{-5}$	$1/285 \times 10^{-10}$
۱	$5/757 \times 10^{-5}$	$1/866 \times 10^{-11}$
۱/۲	$2/184 \times 10^{-4}$	$4/790 \times 10^{-11}$
۱/۴	$1/582 \times 10^{-4}$	$4/078 \times 10^{-11}$
۱/۶	$1/224 \times 10^{-4}$	$1/010 \times 10^{-10}$
۱/۸	$9/553 \times 10^{-5}$	$1/481 \times 10^{-10}$
۲	$8/394 \times 10^{-5}$	$3/119 \times 10^{-10}$

جدول ۳.۴: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ و زمان اجرا برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در مثال ۲.۳.۴.

$\alpha(t)$	$E(\Phi)$	زمان اجرا
$\alpha_1(t) = 1$	$2/5410 \times 10^{-21}$	۰/۱۲۵
$\alpha_2(t) = 0/8 + 0/03 \sin(\frac{t}{10})$	$4/3343 \times 10^{-22}$	۰/۴۲۲
$\alpha_3(t) = 0/6$	$8/7169 \times 10^{-22}$	۰/۳۹۰
$\alpha_4(t) = 0/1 + 0/4t$	$1/0537 \times 10^{-22}$	۰/۴۸۵
$\alpha_5(t) = 0/9 - 0/4t$	$3/5363 \times 10^{-22}$	۰/۳۹۱

بگیرید

$$\text{Minimize } J(x, u) = \frac{1}{\gamma} \int_0^2 (x^2(t) + u^2(t)) dt \quad (26.4)$$

subject to

$${}^{ABC}_0 D_t^{\alpha(t)} x(t) = tx(t-1) + u(t), \quad 0 < t \leq 2, \quad (27.4)$$

$$x(t) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0. \quad (28.4)$$

در این جا، از روش پیشنهادی برای حل مسئله (۲۶.۴) – (۲۸.۴) استفاده می‌شود. تابع همیلتونی در این مسئله به صورت زیر است

$$H(x(t), x(t-1), u(t), \lambda(t), t) = \frac{1}{\gamma} (x^2(t) + u^2(t)) + \lambda(t) (tx(t-1) + u(t)).$$

بنابراین شرایط بهینگی زیر را داریم

$$\begin{cases} {}^{ABC}D_t^{\alpha(t)}\lambda(t) = x(t) + \chi_{[\circ, 1]}(t+1)\lambda(t+1), & \circ \leq t < 2, \\ {}^{ABC}D_t^{\alpha(t)}x(t) = tx(t-1) + u(t), & \circ < t \leq 2, \\ u(t) + \lambda(t) = \circ, \\ x(t) = 1, & -1 \leq t \leq \circ. \\ \lambda(2) = \circ. \end{cases}$$

با توجه به شرایط $x(\circ) = 1$ و $\lambda(2) = \circ$ جواب‌های فازی به صورت

$$\begin{aligned} x_{FS} &= 1 + tFS_x, \\ \lambda_{FS} &= (2-t)FS_\lambda, \\ u_{FS} &= FS_u, \end{aligned}$$

انتخاب می‌شوند. در جدول ۴.۴، مقایسه‌ای بین مقادیر تابع هدف به دست آمده از تقریب گرونوالد-لتنیکوف^۱ [۹۱]، و روش ارائه شده، برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ انجام شده است. جواب‌های عددی متغیر حالت $x(t)$ و متغیر کنترل $u(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در شکل ۵.۴ ارائه شده است. همچنین، جدول ۵.۴ مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ و زمان سپری شده (بر حسب ثانیه) را برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ نشان می‌دهد.

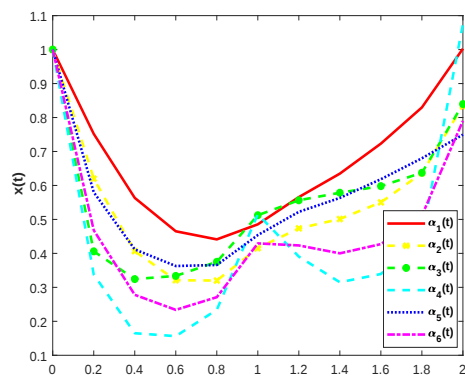
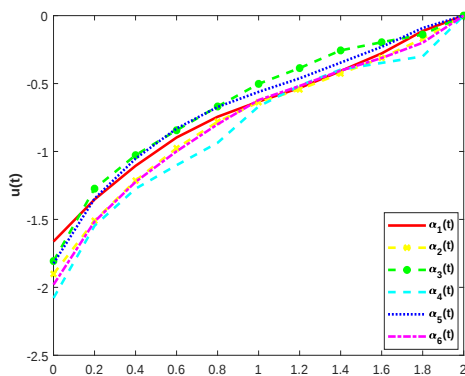
جدول ۴.۴: نتایج J در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۳.۳.۴.

$\alpha(t)$	روش پیشنهادی	روش [۹۱]
۱	۱/۱۰۳۳	۱/۲۰۱۸
۰/۹	۱/۰۸۳۶	۱/۲۲۳۲
۰/۸	۱/۰۲۱۱	۱/۲۵۴۶
$1 - \frac{\cos(t)^2}{3}$	۰/۸۶۵۹	—
$1 - \frac{0.5}{1+\exp(-t)}$	۱/۰۹۸۵	—
$\tanh(t+1)$	۰/۹۳۵۶	—

¹Grunwald-Letnikov

جدول ۵.۴: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ و زمان اجرا برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در مثال ۳.۳.۴.

$\alpha(t)$	$E(\Phi)$	زمان اجرا
$\alpha_1(t) = 1$	$1/53319 \times 10^{-23}$	۰/۲۵۶
$\alpha_2(t) = 0/9$	$1/71997 \times 10^{-20}$	۰/۴۶۸
$\alpha_3(t) = 1 - \frac{\cos(t)^2}{3}$	$1/4041 \times 10^{-22}$	۰/۶۷۲
$\alpha_4(t) = 1 - \frac{0/5}{1+\exp(-t)}$	$4/6986 \times 10^{-23}$	۰/۶۵۶
$\alpha_5(t) = \tanh(t + 1)$	$1/7422 \times 10^{-23}$	۰/۵۹۴
$\alpha_6(t) = 0/8$	$6/0986 \times 10^{-20}$	۰/۴۶۹



شکل ۵.۴: جواب‌های تقریبی $x(t)$ و $u(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۳.۳.۴.

مثال ۴.۳.۴. مسئله کنترل بهینه تأخیری کسری با مرتبه متغیر زیر را در نظر بگیرید

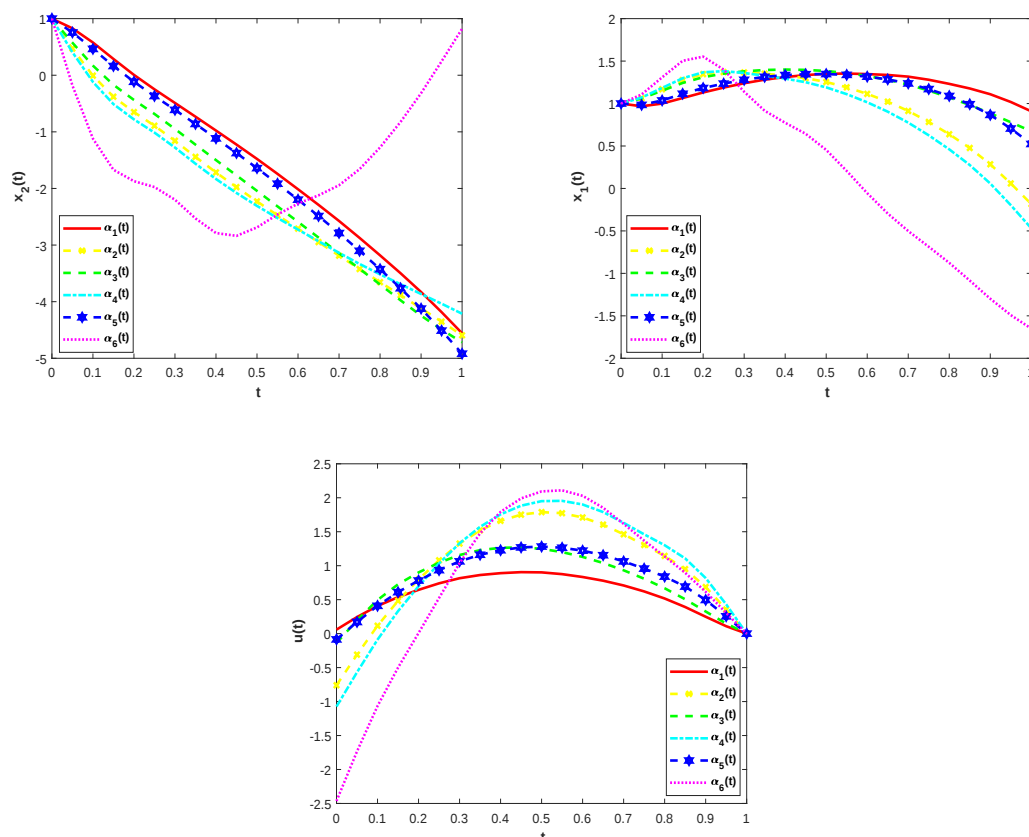
$$\text{Minimize } J(x, u) = \frac{1}{\varphi} \int_0^1 ((x_1(t) + x_2(t))^2 + u^2(t)) dt \quad (29.4)$$

subject to

$${}^{\circ}ABC D_t^{\alpha(t)} x_1(t) = t x_1(t) + x_2(t - \frac{1}{\varphi}), \quad 0 < t \leq 1, \quad (30.4)$$

$${}^{\circ}ABC D_t^{\alpha(t)} x_2(t) = t^2 x_2(t) - 5 x_1(t - \frac{1}{\varphi}) - x_2(t - \frac{1}{\varphi}) + u(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad (31.4)$$

$$x_1(t) = x_2(t) = 1, \quad -\frac{1}{\varphi} \leq t \leq 0. \quad (32.4)$$



شکل ۶.۴: جواب‌های تقریبی $x_1(t)$, $x_2(t)$ و $u(t)$ در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۴.۳.۴.

شرایط بهینگی زیر را داریم

$$\begin{cases} {}_t^{ABC} D_1^{\alpha(t)} \lambda_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + t \lambda_1(t) - \chi_{[\circ, \frac{1}{\Gamma}]} \Delta \lambda_2(t + \frac{1}{\Gamma}), & \circ \leq t < 1, \\ {}_t^{ABC} D_1^{\alpha(t)} \lambda_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + t^2 \lambda_2(t) + \chi_{[\circ, \frac{1}{\Gamma}]} \lambda_1(t + \frac{1}{\Gamma}) - \chi_{[\circ, \frac{1}{\Gamma}]} \lambda_2(t + \frac{1}{\Gamma}), & \circ \leq t < 1, \\ {}_0^{ABC} D_t^{\alpha(t)} x_1(t) = t x_1(t) + x_2(t - \frac{1}{\Gamma}), & \circ < t \leq 1, \\ {}_0^{ABC} D_t^{\alpha(t)} x_2(t) = t^2 x_2(t) - \Delta x_1(t - \frac{1}{\Gamma}) - x_2(t - \frac{1}{\Gamma}) + u(t), & \circ < t \leq 1, \\ u(t) + \lambda_2(t) = \circ, & \circ \leq t \leq 1, \\ x_1(t) = x_2(t) = 1, & -\frac{1}{\Gamma} \leq t \leq \circ, \\ \lambda_1(1) = \lambda_2(1) = \circ. \end{cases}$$

جواب‌های تقریبی $x_1(t)$, $x_2(t)$ و $u(t)$ برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در شکل ۶.۴ ارائه شده است. در جدول ۶.۴، مقادیر تقریبی J به دست آمده با تقریب گرونوالد-لتنیکوف [۹۱] و نتایج عددی روش پیشنهادی برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ فهرست شده است. علاوه بر این، جدول ۷.۴ مقادیر تابع خطای $E(\Phi)$ و زمان اجرا (برحسب ثانیه) را با $m = 21$ برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ نشان می‌دهد.

جدول ۶.۴: نتایج J در مقادیر مختلف $\alpha(t)$ برای مثال ۴.۳.۴.

$\alpha(t)$	روش پیشنهادی	روش [۹۱]
۱	۲/۱۲۲۲	۱/۷۵۴۸
۰/۹	۲/۲۱۷۸	۲/۲۳۹۲
۰/۸	۳/۱۰۸۲	۲/۷۹۹۸
$۰/۹ + ۰/۰۱ \exp(t)$	۱/۵۰۰۲	—
$\tanh(\frac{3}{4}(t+1))$	۳/۲۷۱۰	—
$\cos(\frac{(t+1)\pi}{18})$	۲/۵۶۱۲	—

جدول ۷.۴: مقادیر تابع خطا $E(\Phi)$ و زمان اجرا برای مقادیر مختلف $\alpha(t)$ در مثال ۴.۳.۴.

$\alpha(t)$	$E(\Phi)$	زمان اجرا
$\alpha_1(t) = 1$	$1/14086 \times 10^{-23}$	۰/۳۵۹
$\alpha_2(t) = 0/9 + 0/01 \exp(t)$	$1/5120 \times 10^{-23}$	۱/۱۸۱
$\alpha_3(t) = \tanh(\frac{3}{4}(t+1))$	$1/2678 \times 10^{-18}$	۱/۲۵
$\alpha_4(t) = 0/9$	$5/68724 \times 10^{-23}$	۰/۸۷۵
$\alpha_5(t) = \cos(\frac{(t+1)\pi}{18})$	$4/0750 \times 10^{-22}$	۱/۱۴۱
$\alpha_6(t) = 0/8$	$5/81165 \times 10^{-23}$	۰/۹۳۸

نتیجه گیری و پیشنهادات

در این رساله رده‌ای از معادلات دیفرانسیل جبری کسری و مسائل وابسته را مورد بررسی قرار دادیم. برای به‌دست آوردن جواب عددی معادلات دیفرانسیل جبری کسری بر پایه سیستم‌های فازی دو مدل فازی را پیشنهاد دادیم. در فصل ۳ معادلات دیفرانسیل جبری کسری مرتبه متغیر را معرفی کردیم و برای حل آن‌ها از مدل هایپربولیک فازی تعمیم یافته استفاده شد. همچنین نشان دادیم که مسئله کنترل بهینه کسری را می‌توان به‌عنوان معادلات دیفرانسیل جبری کسری فرمول‌بندی کرد. سپس با استفاده از مدل فازی ارائه شده جواب عددی معادلات دیفرانسیل جبری کسری حاصل را به‌دست آوردیم. در فصل ۴ معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر را معرفی کردیم. برای حل معادلات دیفرانسیل جبری تأخیری کسری مرتبه متغیر و مسائل کنترل بهینه تأخیری کسری از سیستم فازی سوگونو کمک گرفتیم. همچنین یک کران بالای خطای بین جواب‌های دقیق و جواب‌های فازی پیشنهادی با توجه به تعداد قوانین فازی به‌دست آوردیم و همگرایی سیستم فازی پیشنهادی را نشان دادیم. برای آموزش و به‌هنگام کردن پارامترهای تمام مدل‌های پیشنهادی یک الگوریتم یادگیری بر پایه آموزش بدون نظارت ارائه کردیم.

اکنون یک سوال منطقی پیش می‌آید. مزایای استفاده از سیستم‌های فازی در مقایسه با دیگر روش‌های موجود برای حل مسائل معادلات دیفرانسیل جبری کسری چیست؟ برای پاسخ به این سوال بعضی از مزیت‌های روش سیستم‌های فازی پیشنهادی به‌طور خلاصه بیان می‌شود.

(۱) از سیستم‌های فازی پیشنهادی برای حل مسائلی که جواب‌های تحلیلی ندارند یا جواب‌های تحلیلی آن‌ها به راحتی قابل محاسبه نیست استفاده می‌شود.

(۲) جواب به‌دست آمده با استفاده از سیستم‌های فازی در تمام دامنه مسئله پیوسته است. در حالی که اکثر روش‌های عددی جواب‌ها را تنها در نقاط گسسته‌سازی شده به‌دست می‌آورند و جواب بین این نقاط باید از طریق درونیابی به‌دست آید.

(۳) روش‌ها بر پایه سیستم‌های فازی از ماتریس عملگر استفاده نمی‌کنند. برخی از روش‌های عددی از ماتریس عملگر برای حل استفاده می‌کنند. پیدا کردن ماتریس عملگر معمولاً سخت است و این ماتریس‌های عملگر در مرتبه‌های بالاتر باعث پیچیدگی محاسباتی نیز خواهند شد. (۴) جواب تقریبی مسئله نزدیک به جواب تحلیلی است.

(۵) به راحتی می‌توان از روش سیستم‌های فازی برای حل مسائل غیرخطی یا مسائلی با مرتبه‌های بالاتر استفاده کرد.

(۶) جواب مسئله را می‌توان به طور سریع و با تعداد کمی از پارامترها در کاربردهای واقعی تخمین زد.

برای کارهای آتی پیشنهاد می‌شود که این روش‌ها را روی مسائلی با سیستم‌های کسری با تأخیر متغیر، مسائلی با مشتقات جزئی کسری، معادلات انتگرال و ... پیاده سازی کرد.

مراجع

- [۱] وانگ ل، (۱۳۸۸)، ”سیستم‌های فازی و کنترل“، ترجمه تشنه لب م، صفاریور ن، افیونی ه، چاپ پنجم، انتشارات دانشگاه خواجه نصیر طوسی تهران
- [۲] اکرمی م.ح، ”(۱۳۹۶) حسابان کسری از نظریه تا کاربرد“، ریاضی و جامعه، شماره ۴، ص ۵۹-۶۹.
- [3] Jang J.-S.R., Sun C. T. and Mizutani E. (1997), ”**Neuro-Fuzzy and Soft Computing: A Computational Approach to Learning and Machine Intelligence**” Upper saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- [4] Prokopowicz P., Czerniak J., Mikołajewski D., Apiecionek Ł., Śl zak D. (2017), ”**Theory and Applications of Ordered Fuzzy Numbers. Studies in Fuzziness and Soft Computing**”, Vol. 356. Springer, Cham
- [5] Zadeh L.A. (1965), ”Fuzzy sets” **Information and Control**, 8, 3, pp 338-353
- [6] Mamdani E.H. and Assilian S. (1999), ”An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller” **International Journal of Human-Computer Studies**, 51, 2, pp 135-147
- [7] Sungeno M. and Kang G. T. (1988), ”Structure identification of fuzzy model” **Fuzzy Sets and Systems**, 28, 1, pp 15-33
- [8] Takagi T. and Sungeno M. (1985), ”Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control” **IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics**, 15, 1, pp 116-132
- [9] Kilbas A.A. and H. M. Srivastava, and Trujillo J.J. (2006), ”**Theory and Applications of Fractional Differential Equations**”, Vol. 204, North-Holland Mathematics Studies, Elsevier Science B.V., Amsterdam

-
- [10] Caputo M. and Fabrizio M. (2015), " A new Definition of Fractional Derivative without Singular Kernel" **Progress in Fractional Differentiation and Applications**, 1, 2, pp 73-85
- [11] Atanacković TM., Pilipović S. and Zorica D. (2018), "Properties of the Caputo-Fabrizio fractional derivative and its distributional settings" **Fractional Calculus and Applied Analysis**, 21, 1, pp 29-44.
- [12] Atangana A. and Baleanu, D. (2016), "New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: theory and application to heat transfer model" **Thermal Science**, 20, 2, pp 763-769
- [13] Abdeljawad T. and Baleanu D. (2017), "Integration by parts and its applications of a new nonlocal fractional derivative with Mittag-Leffler nonsingular kernel", **Journal of Nonlinear Sciences and Applications**, 10,3, pp 1098-1107
- [14] Chen S., Liu F. and Burrage K. (2014), "Numerical simulation of a new twodimensional variable-order fractional percolation equation in non-homogeneous porous media" **Computers & Mathematics with Applications**, 67,9, pp 1673-1681
- [15] Odziejewicz T. , Malinowska A. B. and Torres D. F. M. (2013), "Fractional variational calculus of variable order" **Advances in Harmonic Analysis and Operator Theory. Operator Theory: Advances and Applications** , 229, pp 291-301
- [16] Chechkin A. V. , Gorenflo R. and Sokolov I. M. (2005), "Fractional diffusion in inhomogeneous media" **Journal of Physics A General Physics**, 38, 42, pp L679-L684
- [17] Santamaria F. , Wils S. , de Schutter E. and Augustine G. J. (2006), "Anomalous diffusion in Purkinje cell dendrites caused by spines" **Neuron** 52,4, pp 635-648
- [18] Sun H. G. , Chen W. and Chen Y. Q. (2009), "Variable order fractional differential operators in anomalous diffusion modeling" **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, 388,21, pp 4586-4592
- [19] Samko S. G. and Ross B. (1993), "Integration and differentiation to a variable fractional order" **Integral Transforms and Special Functions**, 1, 4, pp 277-300

- [20] Ross B. and Samko S. G. (1995), "Fractional integration operator of variable order in the Holder space $H\lambda(x)$ " **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, 18,4, pp 777-788
- [21] Yang X.J. (2017), "Fractional derivatives of constant and variable orders applied to anomalous relaxation models in heat-transfer problems" **Thermal Science**, 21, 3, pp 1161-1171
- [22] Bahaa G.M. (2019), "Optimal control problem for variable-order fractional differential systems with time delay involving Atangana–Baleanu derivatives" **Chaos, Solitons & Fractals**, 122 , pp 129-142
- [23] Wang S.H., Jhu W.L., Yung C. F. and Wang P. F. (2011), "Numerical solutions of differential algebraic equations and its applications in solving TPPC problems" **Journal of Marine Science and Technology**, 19,1, pp 76-88
- [24] DAMARLA S.K. and KUNDU M. (2015), "Numerical Solution of Fractional Order Differential-Algebraic Equations Using Generalized Triangular Function Operational Matrices" **Journal of Fractional Calculus and Applications**, 6,2, pp 31-52
- [25] Brenan K.E., Campbell S.L. and Petzold L.R. (1989), "**Numerical solution of initial value problems in differential-algebraic equations**", Elsevierr ,New York
- [26] Gear C.W. (1971), "The simultaneous numerical solution of differential-algebraic equations" **IEEE Transactions on Circuit Theory**, 18,1, pp 89-95
- [27] Shiri B. and Baleanu D. (2019), "System of fractional differential algebraic equations with applications" **Chaos, Solitons and Fractals** 120, pp 203-212
- [28] Guo T.L. (2013), "The necessary conditions of fractional optimal control in the sense of Caputo" **Journal of Optimization Theory and Applications**, 156,1, pp 115-126
- [29] Thomsen P. G. and Bendtsen C. (1999), Technical Report, "**Numerical solution of differential algebraic equations**", Department of Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark

-
- [30] Wang S. H., Jhu W. L., Yung C. F. and Wang P. F. (2011), "Numerical solutions of differential algebraic equations and its applications in solving TPPC problems" **Journal of Marine Science and Technology** 19, 1, pp 76-88
- [31] Moaddy K.H., AL-Smadi M. and Hashim I. (2015), "A Novel Representation of the Exact Solution for Differential Algebraic Equations System Using Residual Power-Series Method" **Discrete Dynamics in Nature and Society**, 2015
- [32] Karabacak M. and Celik E. (2015), "The Numerical Solution of Fractional Differential Algebraic Equations (FDAEs) by Haar Wavelet Functions" **International Journal of Engineering and Applied Sciences**, 2, 10, pp 65-71
- [33] Wang L. and Chen N. (2014) "The predictor-corrector solution for fractional order differential algebraic equation", ICFDA'14 International Conference on Fractional Differentiation and Its Applications, p 1-6, Catania, Italy
- [34] Zurigat M., Momani S.H. and Alawneh A. (2010), "Analytical approximate solutions of systems of fractional algebraic differential equations by homotopy analysis method" **Computers and Mathematics with Applications**, 59, 3, pp 1227-1235
- [35] Ghanbari F., Ghanbari K. and Mokhtary P. (2018), "Generalized Jacobi–Galerkin method for nonlinear fractional differential algebraic equations" **Computational and Applied Mathematics**, 37,4, pp 5456-5475
- [36] Ghomanjani F. (2017), "A new approach for solving fractional differential-algebraicequations" **Journal of Taibah University for Science**, 11,6, pp 1158-1164
- [37] Zhang H.G., Wang Z.L., Li M., Quan B. and Zhang M.J. (2004), "Generalized Fuzzy Hyperbolic Model: A Universal Approximator" **Acta Automatica Sinica** , 30,3, pp 416-422
- [38] Cui Y., . Zhang H.G, Wang Y. and Gao W. (2016), "Adaptive control for a class of uncertain strict-feedback nonlinear systems based on a generalized fuzzy hyperbolic model", **Fuzzy Sets and Systems**, 302, pp 52-64
- [39] Zhang M. and Zhang H. (2006), "Robust adaptive fuzzy control scheme for nonlinear system with uncertainty" **Journal of Control Theory and Applications**, 4,2, pp 209-216

- [40] Zhang M., Zhang H. and Liu D. (2004) "A Generalized Fuzzy Hyperbolic Modeling and Control Scheme", IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp 1203-1207, Budapest, Hungary
- [41] Zhang M. and Zhang H. (2005) "Modeling and Control Based on Generalized Fuzzy Hyperbolic Model", American Control Conference, pp 1709-1714, Portland, USA
- [42] Sun Q., Wang Y., Yang J., Qiu Y., and Zhang H. (2014), "Chaotic Dynamics in Smart Grid and Suppression Scheme via Generalized Fuzzy Hyperbolic Model" **Mathematical Problems in Engineering**, 2014, Article ID 761271, 7 pages
- [43] Zhang J.L., Zhang H.G., Luo Y.H. and Liang H.J. (2013), "Nearly optimal control scheme using adaptive dynamic programming based on generalized fuzzy hyperbolic model", **Acta Automatica Sinica**, 39,2, pp 142-148
- [44] Bazaraa M. S., Sherali H. D., and Shetty C. M. (2013), **Nonlinear Programming-Theory and Algorithms**, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey
- [45] Zhang X-S. (2000), **Neural Networks in Optimization**, Vol. 46, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London
- [46] Nocedal J. and Wright S. (2006), **Numerical Optimization**, Springer Science & Business Media, Berlin, NewYork,
- [47] Lee K. Y. and El-Sharkawi M. A. (2008), **Modern Heuristic Optimization Techniques: Theory and Applications to Power Systems**, Vol. 39, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey
- [48] Goh B. S. (2010), "Convergence of algorithms in optimization and solutions of non-linear equations" **Journal of optimization theory and applications**, 144, 1, pp 43-55
- [49] Riewe F. (1996), "Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics" **Physical Review E**, 53, 2, pp 1890–1899
- [50] Riewe F. (1997), "Mechanics with fractional derivatives" **Physical Review E**, 55, 3, pp 3582–3592
- [51] Agrawal O. (2004) , "A General Formulation and Solution Scheme for Fractional Optimal Control Problems" **Nonlinear Dynamics**, 38, 1, pp 323-337

- [52] Hassani H., Machado J.T. and Mehrabi S. (2021), "An optimization technique for solving a class of nonlinear fractional optimal control problems: application in cancer treatment" **Applied Mathematical Modelling**, 93, pp 868-884
- [53] Jafari H., Ganji R.M., Sayevand K., and Baleanu D. (2021), "A numerical approach for solving fractional optimal control problems with Mittag-Leffler kernel" **Journal of Vibration and Control**, 10775463211016967
- [54] Ghasemi S., Nazemi A., Tajik R., and Mortezaee M. (2021), "On fractional optimal control problems with an application in fractional chaotic systems using a Legendre collocation-optimization technique" **Transactions of the Institute of Measurement and Control**, 43, 6, pp 1268-1285
- [55] Bhrawy A.H., Doha E.H., Machado J.A. and Ezz-Eldien S.S. (2015), "An Efficient Numerical Scheme for Solving Multi-Dimensional Fractional Optimal Control Problems With a Quadratic Performance Index" **Asian Journal of Control**, 17,6, pp 2389-2402
- [56] Zaky M.A. (2018), "A Legendre collocation method for distributed-order fractional optimal control problems" **Nonlinear Dynamics**, 91,4, pp 2667-2681
- [57] Keshavarz E., Ordokhani Y. and Razzaghi M. (2016), "A numerical solution for fractional optimal control problems via Bernoulli polynomials" **Journal of Vibration and Control**, 22,18, pp 1-15
- [58] Postavaru O., Toma A. (2022). "A numerical approach based on fractional-order hybrid functions of block-pulse and Bernoulli polynomials for numerical solutions of fractional optimal control problems" **Mathematics and Computers in Simulation**, 194, pp 269-284
- [59] Behroozifar M. and Habibi N. (2018), "A numerical approach for solving a class of fractional optimal control problems via operational matrix Bernoulli polynomials" **Journal of Vibration and Control**, 24,12, pp 2494-2511
- [60] Zaky M.A. and Machado Tenreiro J.A. (2017), "On the formulation and numerical simulation of distributed-order fractional optimal control problems" **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 52, pp 177-189
- [61] Almeida R. and Torres D. (2015), "A discrete method to solve fractional optimal control problems" **Nonlinear Dynamics**, 80, pp 1811-1816

- [62] Baleanu D., Jajarmi A. and Hajipour M. (2017), "A New Formulation of the Fractional Optimal Control Problems Involving Mittag-Leffler Nonsingular Kernel" **Journal of Optimization Theory and Applications**, 157,3, pp 718-737
- [63] Jajarmi A., Hajipour M., Mohammadzadeh E. and Baleanu D. (2018), "A new approach for the nonlinear fractional optimal control problems with external persistent disturbances" **Journal of the Franklin Institute**, 355, pp 3938-3967
- [64] Bhrawy A.H., Ezz-Eldien S.S., Doha E.H. , Abdelkawy M.A. and Baleanu D. (2017), "Solving fractional optimal control problems within a Chebyshev–Legendre operational technique" **International Journal of Control**, 90,6, pp 1230-1244
- [65] Doha E.H., Bhrawy A.H., Baleanu D., Ezz-Eldien S.S. and Hafez R.M. (2015), "An efficient numerical scheme based on the shifted orthonormal Jacobi polynomials for solving fractional optimal control problems" **Advances in Difference Equations**, 15, pp 1-17
- [66] Dehghan M., Hamed E.A. and Khosravian-Arab H. (2016), "A numerical scheme for the solution of a class of fractional variational and optimal control problems using the modified Jacobi polynomials" **Journal of Vibration and Control**, 22,6, pp 1-13
- [67] Nemati A., Yousefi S., Soltanian F., and Ardabili J.S. (2016), "An Efficient Numerical Solution of Fractional Optimal Control Problems by using the Ritz Method and Bernstein Operational Matrix" **Asian Journal of Control**, 18, 6, pp 2272-2282
- [68] Wang Y., and Fan Q. (2012), "The second kind Chebyshev wavelet method for solving fractional differential equations" **Applied Mathematics and Computation**, 218,17, pp 8592-8601
- [69] Heydari M.H., Hooshmandasl M.R., Maalek Ghaini F.M. and Cattani C. (2016), "Wavelets method for solving fractional optimal control problems" **Applied Mathematics and Computation**, 286, pp 139-154
- [70] Bello Salati A., Shamsi F. and Torres D. (2019), "Direct transcription methods based on fractional integral approximation formulas for solving nonlinear fractional optimal control problems" **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 67, pp 334-350

- [71] Sabermahani S., Ordokhani Y. (2018) "Numerical solution of fractional optimal control problems via Lagrange polynomials", 3th international conference on combinatorics, cryptography and computation, pp 6, Tehran, Iran
- [72] Peng L., Zhou Y. and Debbouche A. (2019), "Approximation techniques of optimal control problems for fractional dynamic systems in separable Hilbert spaces" **Chaos, Solitons & Fractals**, 118, pp 234-241
- [73] Hassani H., Tenreiro Machado J.A. and Naraghirad E. (2019), "Generalized shifted Chebyshev polynomials for fractional optimal control problems" **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 75, pp 50-61
- [74] Lotfi A. (2019), "Epsilon penalty method combined with an extension of the Ritz method for solving a class of fractional optimal control problems with mixed inequality constraints" **Applied Numerical Mathematics**, 135, pp 497-509
- [75] Rahimkhani P. and Ordokhani Y. (2018), "Numerical solution a class of 2D fractional optimal control problems by using 2D Müntz-Legendre wavelets" **Optimal Control Applications and Methods**, 39,6, pp 1916-1934
- [76] Yildiz T.A., Jajarmi A., Yildiz B. and Baleanu D. (2020), "New aspects of time fractional optimal control problems within operators with nonsingular kernel" **Discrete & Continuous Dynamical Systems - S**, 13, 3, pp 407-428
- [77] Zeid S.S. and Yousefi M. (2016), "Approximated solutions of linear quadratic fractional optimal control problems" **Journal of Applied Mathematics, Statistics and Informatics**, 12, 2, pp 83-94
- [78] Ahmed H.F., (2018), "A numerical technique for solving multi-dimensional fractional optimal control problems" **Journal of Taibah University for Science**, 12, 5, pp 494-505
- [79] Liu H., Fu Y. and Li B. (2017), "Discrete Waveform Relaxation Method for Linear Fractional Delay Differential-Algebraic Equations" **Discrete Dynamics in Nature and Society**, 2017, Article ID 6306570, 9 pages
- [80] Marzban H.R. (2021), "A new fractional orthogonal basis and its application in nonlinear delay fractional optimal control problems" **ISA transactions**, 114, pp 106-119

- [81] Marzban H.R. (2021), "Solution of a specific class of nonlinear fractional optimal control problems including multiple delays" **Optimal Control Applications and Methods**, 42, 1, pp 2-29
- [82] Sabermahani S., Ordokhani Y. (2021), "Fibonacci wavelets and Galerkin method to investigate fractional optimal control problems with bibliometric analysis" **Journal of Vibration and Control**, 27, 15, pp 1778-1792
- [83] Marzban H.R., Malakoutikhah F. (2019), "Solution of delay fractional optimal control problems using a hybrid of block-pulse functions and orthonormal Taylor polynomials" **Journal of the Franklin Institute**, 356,15, pp 8182–8215
- [84] Moradi L., Mohammadi F. and Baleanu D. (2019), "A direct numerical solution of time-delay fractional optimal control problems by using Chelyshkov wavelets" **Journal of Vibration and Control**, 25, 2, pp 310–324
- [85] Sabermahani S., Ordokhani Y., and Yousefi S.A. (2019), " Fractional-order Lagrange polynomials: An application for solving delay fractional optimal control problems" **Transactions of the Institute of Measurement and Control**, 41,11, pp 2997–3009
- [86] Hosseinpour S., Nazemi A. and Tohidi E. (2019), "Müntz–Legendre spectral collocation method for solving delay fractional optimal control problems" **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 351, pp 344-363
- [87] Hosseinpour S., Nazemi A.R. (2017), "A collocation method via block-pulse functions for solving delay fractional optimal control problems" **IMA Journal of Mathematical Control and Information**, 34, 4, pp 1215-1237
- [88] Bhrawy A.H. and Ezz-Eldien S.S. (2016), "A new Legendre operational technique for delay fractional optimal control problems" **Calcolo**, 53, 4, pp 53-521
- [89] Rahimkhani P, Ordokhani Y, Babolian E. (2016), "An efficient approximate method for solving delay fractional optimal control problems" **Nonlinear Dynamics**, 86,3 pp 1649-1661
- [90] Safaie E., Farahi M.H. and Farmani Ardehaie M. (2015), "An approximate method for numerically solving multi-dimensional delay fractional optimal control problems by Bernstein polynomials" **Computational and Applied Mathematics**, 34, pp 831-846

-
- [91] Jajarmi A. and Baleanu D.(2018), "Suboptimal control of fractional-order dynamic systems with delay argument" **Journal of Vibration and Control**, 24, 2, pp 2430–2446
- [92] Effati S, Rakhshan SA, Saqi S. (2018), "Formulation of Euler–Lagrange equations for multidelay fractional optimal Control Problems" **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, 13, 6, pp 1-10
- [93] Kheyrinataj F. and Nazemi A.R. (2020), "Fractional power series neural network for solving delay fractional optimal control problems" **Connection Science**, 32, 1, pp 53-80
- [94] Kheyrinataj F. and Nazemi A.R. (2020), "Fractional Chebyshev functional link neural network-optimization method for solving delay fractional optimal control problems with Atangana-Baleanu derivative" **Optimal Control Applications and Methods**, 41, 3, pp 808-832
- [95] Kheyrinataj F. and Nazemi A.R. (2020), "Müntz–Legendre neural network construction for solving delay optimal control problems of fractional order with equality and inequality constraints" **Soft Computing**, 24, 13, pp 9575-9594

Aabstract

The main topic of this thesis is studying the applications of fuzzy systems to solve fractional differential algebraic equations and related problems. Some dynamic and physical laws are not expressed in general dynamical systems. For modelling complex systems or when the particles are in microscopic scales, the use of fractional order systems seems to be essential. Obtaining analytical solutions for such problems is usually difficult. Therefore, numerical methods for obtaining the approximate solutions of these equations, have been proposed. In this thesis, fuzzy system is used for the numerical solution of variable-order fractional differential algebraic equations and fractional optimal control problem. Fuzzy logic system is an artificial intelligent technique that uses a collection of fuzzy membership functions and rules, instead of Boolean logic, to reason about data. Fuzzy systems can provide a more transparent representation of the studied system, comparing with the popular approximation methods such as artificial neural networks. Existence of this merit in fuzzy systems, is due to the possible linguistic interpretation in the form of rules. Since the fuzzy system is universal approximator, this approach of the computational intelligence has been used for a wide variety of applications.

Keywords: fractional differential equations; variable-order fractional differential algebraic equations; fractional optimal control problems; artificial intelligent; fuzzy system



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Numerical Analysis

Applications of fuzzy systems to solve fractional differential algebraic equations and related problems

By: Marzieh Mortezaee

Supervisors:

Dr. Mehdi Ghovatmand

Dr. Alireza Nazemi

Feb 2022