دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان

بررسی زیررده‌ای از توابع تقریبا محدب

نگارش

عاطفه عباسی

استاد راهنما

دکتر احمد زیره

استاد مشاور

دکتر ابراهیم هاشمی

شهریور ۹۰

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

قبل از هرچیزخداوند را شاکرم که این موهبت را نصیب من نمود تا در وادی علم و دانش ، قدمی هرچند ناچیز بردارم.

ازاستاد راهنمایم آقای دکتر زیره به خاطرکمکهای بی‌دریغش صمیمانه تشکر می‌کنم .

همچنین مراتب تشکر و قدردانی خود را از استاد مشاورم آقای دکتر ابراهیم هاشمی ابراز می‌دارم.

از خداوند منان آرزوی سلامتی و توفیق روز افزون برای این اساتید خواهانم.

چکیده

در این پایان نامه، به معرفی زیر رده‌های K_s، $K_s(\gamma)$، $K_s(\alpha, \beta)$... از رده‌ی توابع تقریبا محدب می‌پردازیم. در این خصوص، کران‌هایی برای توابع متعلق به این رده‌ها و مشتقات آنها می‌یابیم بعلاوه به تعیین کرانی برای ضرایب پرداخته و یک سری قضایا و روابط دیگری را برای رده‌های مذکور بررسی می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: توابع تحلیلی، توابع تک ارز، توابع ستاره گون، توابع محدب، توابع تقریبا محدب

پیشگفتار

تابع یک به یک را تک ارز می‌نامند. از نظرتحلیلی تابع تک ارز مشتق مخالف صفردارد و از نظر هندسی تابع تک ارز خم های ساده را به خم های ساده می نگارد. مطالعات و تحقیقات فراوانی در جهت چگونگی ترکیب این خواص و خواص دیگر برای اثبات قضایایی که سرشت هندسی یا تحلیلی داشته باشند انجام گرفت.

توابعی که هم تحلیلی و هم تک ارزند، واجد خاصیت جالبی هستند که میدانهای همبند ساده را بر میدان های همبند ساده می‌نگارند.

سیلورمن [1] [۱۹۷۵] رده‌ی توابعی که در دیسک یکه‌ی باز تحلیلی و تک ارز می‌باشند را S نامید و با شرح کاملی از زیر رده‌های این رده به بررسی قضایای مربوط پرداخت.

گو [2] [۲۰۰۵] زیر رده‌ی K_s را مورد مطالعه قرار داد و افراد دیگری زیر رده‌ی فوق را تعمیم داده‌اند ونتایج بدست آمده توسط سیلورمن بر روی رده‌ی S را روی رده‌ی مذبور و تعمیم‌های آن بررسی کردند و بهترین نتایج را گرفتند. ما نیز در این پایان نامه دو زیر رده از رده‌ی توابع تقریبا محدب را معرفی و سپس چند قضیه را بیان و اثبات می‌کنیم.

در این راستا، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که درفصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در فصل دوم، به معرفی زیر رده‌ی K_s از رده‌ی توابع تقریبا محدب و چند تعمیم از آن پرداخته شده است.

در فصل سوم، دو زیر رده از رده‌ی توابع تقریبا محدب را معرفی می‌کنیم و قضایایی را در رابطه با این دو زیر رده بیان و اثبات می‌کنیم.

مراجع اصلی استفاده شده در این پایان نامه عبارتند از [۵] و [۱۸] و [۱۹] و [۲۰].

---

[1] Silverman
[2] Gao

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها ومفاهیم مقدماتی

۱.۱ تعریف‌ها و نمادهای مقدماتی

در این پایان نامه ازعلائم زیر استفاده می‌شود.

$\mathbb{N} = \{۱, ۲, \ldots\}$

$\mathbb{R}$: مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$: مجموعه اعداد مختلط

$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$

$U(r, z_\circ) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_\circ| \leq r\}$

این بخش شامل تعاریف و مفایم اولیه مورد نیاز در فصول بعد می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱. تابع $f(z)$ را در $z_\circ$ تحلیلی گوییم هرگاه در یک همسایگی $z_\circ$ مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۲.۱.۱. یک مجموعه همبند و باز میدان نامیده می‌شود. آنرا با نماد D نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. نقطه $z_\circ$ را نقطه تکین تابع $f(z)$ گوییم اگر $f(z)$ در $z_\circ$ تحلیلی نباشد ولی در هر همسایگی $z_\circ$ نقطه‌ای موجود باشدکه $f(z)$ در آن تحلیلی باشد.

تعریف ۴.۱.۱. نقطه تکین $z_\circ$ تنها نامیده می‌شود اگر همسایگی حول این نقطه موجود باشدکه $f(z)$ در تمام نقاط این همسایگی تحلیلی باشد.

قضیه ۵.۱.۱. (ریمان [1]**)**[۱۵] فرض کنید $z_\circ$ نقطه تکین تنهای $f(z)$ باشد و $f(z)$ در همسایگی محذوف $z_\circ$ کراندار باشد، آنگاه $f(z)$ را می‌توان در $z_\circ$ به گونه‌ای تعریف کرد که در این نقطه تحلیلی باشد.

تعریف ۶.۱.۱. تابع دو متغیره $u(x,y)$ را در D همساز گوییم اگر در سراسر D دارای مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم پیوسته باشد و در معادله با مشتقات جزئی زیر صدق کند:

$$\frac{\partial^۲ u}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ u}{\partial y^۲}=\circ.$$

اثبات قضیه (۷.۱.۱) و (۸.۱.۱) و نتیجه (۹.۱.۱) را می‌توان در[۱۵] مشاهده نمود.

قضیه ۷.۱.۱. فرض کنید تابع $u(z)$ در دامنه‌ی همبند ساده ای شامل‌دیسک $U(r,z_\circ)$ همساز باشد، آنگاه

$$u(z_\circ)=\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi} u(z_\circ+re^{i\theta})d\theta.$$

قضیه ۸.۱.۱. فرمول انتگرال**پواسن** [2]

فرض کنید تابع $u(z)$ در دامنه‌ی همبند ساده ای شامل دیسک $U(R,\circ)$ همساز باشد، آنگاه برای $z=re^{i\theta}$ که $r<R$، داریم:

$$u(re^{i\theta})=\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}\frac{R^۲-r^۲}{R^۲-۲rR\cos(\theta-\varphi)+r^۲}u(Re^{i\varphi})d\varphi.$$

نتیجه ۹.۱.۱. فرض کنید $f(z)=u(z)+iv(z)$ در دامنه‌ی همبند ساده ای شامل دیسک $U(R,\circ)$ تحلیلی باشد، آنگاه برای $z=re^{i\theta}$ که $r<R$ ، داریم :

$$v(re^{i\theta})=\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}\frac{۲rR\sin(\theta-\varphi)}{R^۲-۲rR\cos(\theta-\varphi)+r^۲}u(Re^{i\varphi})d\varphi+v(\circ).$$

تذکر ۱.۱. اگر تابع $f(z)=u+iv$ در دیسک $U(R,\circ)$ تحلیلی باشد از قضیه (۸.۱.۱) و نتیجه (۹.۱.۱)، بدست می‌آید:

$$f(z)=\frac{۱}{۲\pi}\int_\circ^{۲\pi}\frac{Re^{i\varphi}+re^{i\theta}}{Re^{i\varphi}-re^{i\theta}}u(Re^{i\varphi})d\varphi+iv(\circ).$$

[1] Riemann
[2] poisson

تعریف ۱۰.۱.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ که در U تحلیلی هستند و $Re\{f(z)\}>0$ را با P نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۱.۱. فرض کنید $f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n$ در P باشد، آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $|a_n|\leq 2$.

اثبات. اگر $f(z)=u(re^{i\theta})+iv(re^{i\theta})$ و $a_n=\alpha_n+i\beta_n$ باشد، آنگاه

$$u(re^{i\theta})=1+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_m\cos m\theta-\beta_m\sin m\theta)r^m.$$

چون برای هر $n\neq m$

$$\int_0^{2\pi}\cos n\theta\cos m\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\sin n\theta\sin m\theta d\theta=0$$

و برای هر $m,n\in\mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi}\sin m\theta\cos n\theta d\theta=0.$$

پس خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\cos n\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_nr^n\cos^2 n\theta d\theta=\alpha_nr^n \tag{1.1}$$

و

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})\sin n\theta d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}-\beta_nr^n\sin^2 n\theta d\theta=-\beta_nr^n \tag{2.1}$$

حال باضرب رابطه‌ی (۲.۱) در $-i$ و جمع آن با رابطه‌ی (۱.۱)، بدست می‌آید:

$$a_nr^n=(\alpha_n+i\beta_n)r^n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

در نتیجه

$$|a_n|r^n \leq \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(re^{i\theta})|e^{-in\theta}|d\theta = \frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(re^{i\theta})d\theta. \tag{۳.۱}$$

چون تابع $u(z)$ همساز است به‌موجب قضیه (۷.۱.۱) :

$$\frac{۱}{\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(re^{i\theta}) = ۲u(۰) = ۲. \tag{۴.۱}$$

باجایگذاری (۴.۱) در (۳.۱) رابطه‌ی $|a_n|r^n \leq ۲$ بدست می‌آید و با $r \to ۱$ قضیه ثابت می‌گردد.

$\square$

قضیه ۱۲.۱.۱. فرض کنید $f(z)$ در P باشد، آنگاه

$$\frac{۱-|z|}{۱+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{۱+|z|}{۱-|z|} \qquad (z \in U). \tag{۵.۱}$$

اثبات. قرار دهید: $f(z) = u(z) + iv(z)$. بنا به تذکر (۱.۱):

$$f(z) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} \frac{Re^{i\varphi}+z}{Re^{i\varphi}-z} u(Re^{i\varphi})d\varphi \qquad (|z| \leq R < ۱)$$

در نتیجه

$$|f(z)| \leq \frac{R+|z|}{R-|z|}\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(Re^{i\varphi})d\varphi. \tag{۶.۱}$$

به‌موجب قضیه (۷.۱.۱) :

$$\frac{۱}{۲\pi}\int_{۰}^{۲\pi} u(Re^{i\varphi}) = u(۰) = ۱. \tag{۷.۱}$$

با جایگذاری (۷.۱) در (۶.۱)، داریم :

$$|f(z)| \leq \frac{R+|z|}{R-|z|}$$

و با $R \longrightarrow ۱$ در رابطه‌ی بالا طرف راست نامساوی (۵.۱) ثابت می‌شود.

اثبات طرف چپ نامساوی(۵.۱) : چون برای هر $z \in U$، $f(z) \neq ۰$، تابع $g(z) = \frac{۱}{f(z)}$ در U تحلیلی است و $Reg(z) > ۰$. پس با بکاربردن طرف راست نامساوی (۵.۱) برای $g(z)$ داریم:

$$|g(z)| \leq \frac{۱+|z|}{۱-|z|}$$

در نتیجه

$$\left|\frac{۱}{f(z)}\right| \leq \frac{۱+|z|}{۱-|z|} \Longrightarrow |f(z)| \geq \frac{۱-|z|}{۱+|z|}.$$

و بدین ترتیب اثبات کامل است. □

لم ۱۳.۱.۱. فرض کنید تابع $f(z)$ در U تحلیلی باشد و $f(۰) = ۱$. اگر $Ref(z) > \alpha$ که $۰ \leq \alpha < ۱$، آنگاه

$$\frac{۱-(۱-۲\alpha)|z|}{۱+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{۱+(۱-۲\alpha)|z|}{۱-|z|} \quad (z \in U). \tag{۸.۱}$$

اثبات. قرار دهید:

$$g(z) = \frac{f(z)-\alpha}{۱-\alpha}$$

چون‌که $\alpha \neq ۱$، تابع $g(z)$ در U تحلیلی است. $g(۰) = ۱$ و $Reg(z) > \frac{\alpha-\alpha}{۱-\alpha} = ۰$. پس به‌موجب قضیه (۱۲.۱.۱):

$$|g(z)| \leq \frac{۱+|z|}{۱-|z|} \Longrightarrow \left|\frac{f(z)-\alpha}{۱-\alpha}\right| \leq \frac{۱+|z|}{۱-|z|}$$

بنابراین

$$|f(z)| - \alpha \leq \frac{(1+|z|)(1-\alpha)}{1-|z|}$$

درنتیجه

$$|f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}(1-\alpha) + \alpha = \frac{1+(1-2\alpha)|z|}{1-|z|}.$$

بدین ترتیب طرف راست نامساوی (۸.۱) ثابت می‌شود.

اثبات طرف چپ نامساوی (۸.۱): قراردهید:

$$g(z) = \frac{1-\alpha}{f(z)-\alpha},$$

چون‌که برای هر $z \in U$، $f(z) \neq \alpha$، تابع $g(z)$ در U تحلیلی است، $g(0) = 1$ و $Reg(z) > 0$. پس

به‌موجب قضیه (۱۲.۱.۱) :

$$|g(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|} \Longrightarrow \left|\frac{f(z)-\alpha}{1-\alpha}\right| \geq \frac{1-|z|}{1+|z|}$$

بنابراین

$$|f(z)-\alpha| \geq \frac{1-\alpha-(1-\alpha)|z|}{1+|z|} \Longrightarrow |f(z)| \geq \frac{1-\alpha-(1-\alpha)|z|}{1+|z|} + \alpha$$

که نتیجه می شود:

$$|f(z)| \geq \frac{1-(1-2\alpha)|z|}{1+|z|}.$$

و بدین ترتیب اثبات کامل است. □

لم ۱۴.۱.۱. (**شوارتز** [۳]) [۳] فرض کنید $f(z)$ در دیسک $U_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ تحلیلی باشد و برای

ثابت M، $|f(z)| \leq M$. اگر $f(z)$ در $z = 0$ به تعداد دفعات m، صفر شود. در این صورت:

$$|f(z)| \leq \left(\frac{|z|}{R}\right)^m M \qquad (z \in U_R)$$

[۳] Schwarz

در رابطه‌ی فوق، تساوی زمانی برقرار می‌شود که

$$f(z)=\frac{M}{R^m}e^{i\alpha}z^m$$

به‌طوری که α ثابت است.

قضیه ۱۵.۱.۱. (**شوارتز - پیک** [۴])[۲] فرض کنید $f:U\longrightarrow U$ تحلیلی باشد، آنگاه برای هر $z\in U$:

$$\frac{|f'(z)|}{۱-|f(z)|^۲}\leq\frac{۱}{۱-|z|^۲}.$$

تعریف ۱۶.۱.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $f(z)$ که در U تحلیلی هستند و با شرایط $f(۰)=۰$، $f'(۰)=۱$ نرمالیزه می‌گردند را با H نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۱.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $\omega(z)$ که در U تحلیلی می‌باشند و در شرایط $\omega(۰)=۰$ و $|\omega(z)|\leq|z|<۱$ صدق می‌کنند را با E نمایش می دهیم.

تعریف ۱۸.۱.۱. فرض کنید توابع $f(z)$ و $F(z)$ در U تحلیلی باشند. $f(z)$ زیرترتیبی از تابع $F(z)$ است، اگر $\omega(z)\in E$ موجود باشد به‌طوری که $f(z)=F(\omega(z))$. در این صورت آنرا با $f\prec F$ نمایش می‌دهیم. درضمن اگر تابع F تک ارزباشد، آنگاه $f\prec F$ اگر و تنها اگر $f(۰)=F(۰)$ و $f(U)\subset F(U)$.

۲.۱ رده ی S

تعریف ۱.۲.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $f(z)$ که در U تحلیلی و تک ارزند و با شرایط $f(۰)=۰$، $f'(۰)=۱$ نرمالیزه می‌گردند را با S نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۲.۱. رده‌ای از همه‌ی توابع $f\in S$ که فرد می‌باشند را با $S^{(۲)}$ نمایش می‌دهیم.

لم ۳.۲.۱. فرض کنید $f(z)\in S$ باشد، آنگاه $z\sqrt{\frac{f(z^۲)}{z^۲}}\in S$.

[۴] Schwarz-Pik

اثبات. قرار دهید : $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ و در نظر بگیرید

$$g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}=z\sqrt{1+a_2z^2+a_3z^4+\ldots}.$$

تابع $g(z)$ در U تحلیلی است و $g(0)=0$ ، $g'(0)=1$.

اثبات تک ارزی: فرض کنیم $g(z_1)=g(z_2)$. در این صورت $f(z_1^2)=f(z_2^2)$ چون تابع $f(z)$ تک ارز است بنابراین $z_2^2=z_1^2$، یعنی‌که، $z_1=\pm z_2$. از آنجایی که $g(z)$ تابع فرد است، پس $z_1=-z_2$ موجب $g(z_1)=-g(z_2)$ است. بنابراین $z_1=z_2$ و تک ارزی $g(z)$ ثابت می‌شود. □

قضیه ۴.۲.۱. [۱۵] فرض کنید $g(z)=z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}}\in S$ باشد، آنگاه $|a_2|\leq 2$.

قضیه ۵.۲.۱. (پوشش) فرض کنید $f(z)\in S$ و برای $z\in U$، $f(z)\neq c$ که $c\in\mathbb{C}$، آنگاه $|c|\geq\frac{1}{4}$.

اثبات. قرار دهید $f(z)=z+a_2z^2+\ldots$ چون‌که $f(z)\neq c$، تابع

$$g(z)=\frac{cf(z)}{c-f(z)}=z+(a_2+\frac{1}{c})z^2+\ldots$$

نیزمتعلق به S است. پس با بکار بردن قضیه (۴.۲.۱) برای $g(z)$ داریم:

$$\left|\frac{1}{c}+a_2\right|\leq 2\Longrightarrow|\frac{1}{c}|-|a_2|\leq 2$$

و با بکار بردن قضیه (۴.۲.۱) برای $f(z)$ نتیجه می شود:

$$\left|\frac{1}{c}\right|\leq 4\Longrightarrow|c|\geq\frac{1}{4}.$$

و قضیه ثابت است. □

لم ۶.۲.۱. فرض کنید $f(z)\in S$ و $z=re^{i\theta}$، آنگاه

$$Re\left\{\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}=r\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(z)|.$$

اثبات. چون‌که برای $|z| < ۱$، $f'(z) \neq ۰$، شاخه تابع $\log f'(z)$ در U تحلیلی است. پس

$$\frac{\partial}{\partial r} \log f'(re^{i\theta}) = e^{i\theta} \frac{f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})}.$$

و با ضرب طرفین رابطه در r و محاسبه قسمت‌های حقیقی، نتیجه می شود:

$$r \frac{\partial}{\partial r} \log |f'(re^{i\theta})| = Re \left\{ \frac{re^{i\theta} f''(re^{i\theta})}{f'(re^{i\theta})} \right\} = Re \left\{ \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\}.$$

و لم ثابت می‌گردد. $\square$

قضیه ۷.۲.۱. فرض کنید $f(z) \in S$ باشد، آنگاه

$$\frac{۱ - r}{(۱ + r)^۳} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱ + r}{(۱ - r)^۳} \qquad (|z| = r < ۱).$$

اثبات. چون تابع

$$\omega = \frac{z + z_۰}{۱ + \overline{z_۰} z} \qquad (|z_۰| < ۱)$$

در U تحلیلی و تک ارز است و U را به خودش می‌نگارد. پس تابع

$$g(z) = f\left(\frac{z + z_۰}{۱ + \overline{z_۰} z}\right) = b_۰ + b_۱ z + b_۲ z^۲ + \dots$$

نیز در U تحلیلی و تک ارز است اما $g(z)$ به رده S متعلق نیست، چون‌که $g(z)$ نرمالیزه نمی‌باشد. در واقع

$$b_۰ = g(۰) = f(z_۰),$$

$$b_۱ = g'(۰) = f'(z_۰)(۱ - |z_۰|^۲),$$

$$b_۲ = \frac{g''(۰)}{۲} = \frac{۱}{۲}[f''(z_۰)(۱ - |z_۰|^۲)^۲ - ۲f'(z_۰)\overline{z_۰}(۱ - |z_۰|^۲)].$$

با توجه به اینکه تابع

$$\frac{g(z) - b_۰}{b_۱} = z + \frac{b_۲}{b_۱} z^۲ + \dots$$

در S است و با بکار بردن قضیه (۴.۲.۱) برای تابع فوق داریم : $|\frac{b_2}{b_1}| \leq 2$، یعنی

$$\frac{1}{2}\left|\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}(1-|z_0|^2)-2\overline{z_0}\right| \leq 2. \tag{۹.۱}$$

چون‌که z_0 عدد مختلط دلخواهی در U است، تغییر نمادی $z_0 = z = re^{i\theta}$ را انجام می‌دهیم. سپس با ضرب طرفین (۹.۱) در $\frac{2|z|}{1-|z|^2}$ داریم:

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

که نتیجه می‌شود:

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2} \leq Re\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} \leq \frac{2r^2+4r}{1-r^2}. \tag{۱۰.۱}$$

با توجه به لم (۶.۲.۱)، رابطه‌ی (۱۰.۱) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\frac{2r-4}{1-r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(re^{i\theta})| \leq \frac{2r+4}{1-r^2}. \tag{۱۱.۱}$$

با انتگرال‌یابی در (۱۱.۱) نسبت به r از ۰ تا r نتیجه می‌دهد:

$$\log(1-r)-3\log(1+r) \leq \log|f'(re^{i\theta})| \leq \log(1+r)-3\log(1-r)$$

و با نما رساندن رابطه‌ی بالا داریم:

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(re^{i\theta})| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

و قضیه ثابت است. □

قضیه ۸.۲.۱. [۳] فرض کنید $f(z) \in S$ باشد، آنگاه

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2} \qquad (|z|=r<1).$$

لم ۹.۲.۱. [۱۵] فرض کنید $f(z) \in S$ باشد، آنگاه

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta \leq \frac{r}{1-r} \qquad (0<r<1).$$

قضیه ۱۰.۲.۱. فرض کنید تابع $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در S باشد، آنگاه برای هر n، $|a_n|<en$.

اثبات. از فرمول انتگرال **کشی** [۵] برای $n=2,3,\ldots$ داریم:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz \qquad (0<r<1).$$

پس

$$|a_n|\leq\frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|d\theta,$$

که از لم (۹.۲.۱) نتیجه می‌شود:

$$|a_n|\leq\frac{1}{r^{n-1}(1-r)}. \tag{۱۲.۱}$$

چون برای هر r در فاصله $0<r<1$ نامساوی (۱۲.۱) برقراراست، بهترین کرانی که می‌توان بدست آورد این است که در رابطه (۱۲.۱) کمینه سازی کنیم. با اینکار نتیجه می‌شود:

$$|a_n|\leq\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}=n\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}<en.$$

و اثبات کامل است. □

قضیه ۱۱.۲.۱. فرض کنید $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در S باشد و ضرایب حقیقی داشته باشد، آنگاه برای هر n، $|a_n|\leq n$.

[۵] Cauchy

اثبات. برای $z=re^{i\theta}$، $r<1$ قرار دهید:

$$Imf(z)=v(re^{i\theta})=\sum_{k=1}^{\infty}a_kr^k\sin k\theta$$

با ضرب طرفین رابطه‌ی فوق در $\sin n\theta$ و انتگرال‌یابی از ۰ تا π نتیجه می‌شود:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}v(re^{i\theta})\sin n\theta d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}a_nr^n\sin^2 n\theta d\theta=a_nr^n. \tag{۱۳.۱}$$

با توجه به رابطه‌ی

$$|\sin(n+1)\theta|=|\sin n\theta\cos\theta+\cos n\theta\sin\theta|\leq|\sin n\theta|+|\sin\theta|$$

و به روش استقرایی می‌توان نشان داد که $|\sin n\theta|\leq n|\sin\theta|$. لذا از رابطه‌ی (۱۳.۱) نتیجه می‌شود که:

$$|a_nr^n|\leq\frac{2n}{\pi}\int_0^{\pi}|v(re^{i\theta})|\sin\theta d\theta. \tag{۱۴.۱}$$

سپس نشان می‌دهیم $v(re^{i\theta})\neq 0$ $(0<r<1, 0<\theta<\pi)$:

$$0\neq f(re^{i\theta})-f(re^{-i\theta})=\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n(e^{in\theta}-e^{-in\theta})=2i\sum_{n=1}^{\infty}a_nr^n\sin n\theta=2iv(re^{i\theta})$$

چون $v(re^{i\theta})$ نسبت به θ تابعی پیوسته است، می‌بایست در فاصله‌ی $0<\theta<\pi$ علامت جبری ثابت داشته باشد، لذا:

$$r=|a_1r|=\left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}v(re^{i\theta})\sin\theta d\theta\right|=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|v(re^{i\theta})\right|\sin\theta d\theta. \tag{۱۵.۱}$$

با جایگزینی (۱۵.۱) در(۱۴.۱) رابطه‌ی $|a_nr^n|\leq nr$ بدست می‌آید و با $r\longrightarrow 1$ قضیه ثابت می‌گردد. □

قضیه (۱۲.۲.۱) و (۱۳.۲.۱) را می‌توان در [۳] مشاهده نمود.

قضیه ۱۲.۲.۱. فرض کنید $f\in S^{(2)}$ باشد، آنگاه

$$\frac{r}{1+r^2}\leq|f(z)|\leq\frac{r}{1-r^2}\qquad(|z|=r<1).$$

قضیه ۱۳.۲.۱. فرض کنید $f \in S^{(۲)}$ باشد، آنگاه

$$\frac{۱-r^۲}{(۱+r^۲)^۲} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱+r^۲}{(۱-r^۲)^۲} \qquad (|z| = r < ۱).$$

۳.۱ رده ی S^*

تعریف ۱.۳.۱. میدان D را نسبت به $z_۰$ ستاره گون گوییم هرگاه پاره خط مستقیمی که هر نقطه از D را به $z_۰$ وصل می‌کند در D قرار بگیرد (ر.ک ۱.۱).

تعریف ۲.۳.۱. تابع $f(z) \in S$ را نسبت به مبدا ستاره گون گوییم اگر U تحت تابع $f(z)$ بر میدانی نگاشته شود که نسبت به مبدا ستاره گون است. این زیررده‌ی S را با S^* نمایش می‌دهیم.

لم ۳.۳.۱. فرض کنید $f(z) \in S$، در این صورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان ستاره گون بنگارد.

اثبات. ابتدا فرض کنید $f(z) \in S^*$. در نظر بگیرید $D_۱$ تصویر $|z| < ۱$ و $D_۲$ تصویر $|z| < r < ۱$ تحت تابع $f(z)$ باشد. اگر $\omega \in D_۱$، آنگاه برای $۰ < t < ۱$، $t\omega \in D_۱$ (چون $D_۱$ ستاره گون می‌باشد). پس تابع $g(z) = f^{-۱}(tf(z))$ در U تحلیلی است و در شرایط $|g(z)| < ۱$، $g(۰) = f^{-۱}(tf(۰)) = ۰$ صدق می‌کند. با بکار بردن لم شوارتز برای تابع $g(z)$ نتیجه می‌شود:

$$|g(z)| \leq |z|.$$

حال نقطه $\omega_۲ \in D_۲$ را انتخاب می‌کنیم. در این صورت برای نقطه $z_۲$ ای با $|z_۲| < r$، $\omega_۲ = f(z_۲)$. برای t دلخواه، $۰ < t < ۱$ داریم:

$$|f^{-۱}(t\omega_۲)| = |f^{-۱}(tf(z_۲))| = |g(z_۲)| \leq |z_۲| < r$$

و این بدین معنی است که $t\omega_۲$ در $D_۲$ قرار دارد. چون این مطلب برای همه‌ی $\omega_۲$ ها و همه‌ی t ها، $۰ < t < ۱$ درست است، پس میدان $D_۲$ نسبت به مبدا ستاره گون است.

اثبات عکس قضیه: فرض کنید $f(z) \notin S^*$ (فرض خلف)، پس نقطه $\omega_1 \in D_1$ موجود است به‌طوری که برای t_1 ای ، $0 < t_1 < 1$، $t_1\omega_1 \notin D_1$. حال قرص $|z| < r < 1$ را انتخاب می‌کنیم به‌طوری که تصویرش D_2 تحت تابع $f(z)$ شامل نقطه‌ی ω_1 باشد. چون که $D_2 \subset D_1$، نقطه‌ی $t_1\omega_1$ به D_2 تعلق ندارد. پس $f(z)$ قرص $|z| < r$ را بر میدان ستاره گون تصویر نمی‌کند. □

قضیه ۴.۳.۱. فرض کنید $f(z) \in S$ باشد. در این صورت $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر

$$Re\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \qquad (z \in U).$$

اثبات. با توجه به لم (۳.۳.۱) می‌دانیم $f(z) \in S^*$ اگر و تنها اگر D_2 که تصویر $|z| < r < 1$ تحت $f(z)$ است یک میدان ستاره گون باشد. به بیان معادل برای هر θ بردار شعاعی از $\omega = 0$ تا $\omega = f(re^{i\theta})$ باید در D_2 باشد. و این بدین معنی است که $argf(re^{i\theta})$ تابعی نسبت به θ صعودی اکیداست، زیرا در غیر این صورت بردار شعاعی باید مرز D_2 را حداقل در دو نقطه قطع کند. پس یک تابع در S^* با شرط

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{argf(re^{i\theta})\} > 0$$

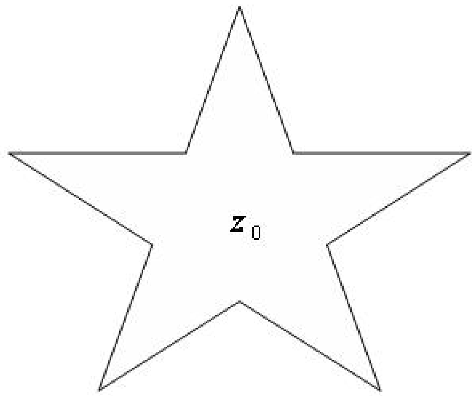
مشخص می‌گردد، می‌دانیم $argf(re^{i\theta}) = Im\log f(re^{i\theta})$ بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\{Im\log f(re^{i\theta})\} = Im\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f(re^{i\theta})\}$$
$$= Im\{i\frac{re^{i\theta}f'(re^{i\theta})}{f(re^{i\theta})}\} = Re\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\} > 0.$$

و اثبات قضیه کامل است.

مثال. $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ در رده‌ی S^* قرار دارد ؛ زیرا U تحت تابع $K(z)$ به کل صفحه مختلط نگاشته می‌شود که در امتداد پرتو $\frac{-1}{4}$ تا ∞ بریده می شود، همچنین:

$$Re\left\{\frac{zK'(z)}{K(z)}\right\} = Re\left\{\frac{1+z}{1-z}\right\} > 0.$$



شکل ۱.۱: مثالی ازیک میدان ستاره گون نسبت به نقطه $z_\circ$

$\square$

قضیه ۵.۳.۱. فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در S^* باشد، آنگاه برای هر n، $|a_n| \leq n$.

اثبات. چون برای $۰ < |z| < ۱$، $f(z) \neq ۰$، تابع

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^{n-۱}}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱}} \tag{۱۶.۱}$$

در U تحلیلی است و می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$p(z) = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} p_n z^n. \tag{۱۷.۱}$$

چون $f(z) \in S^*$، برای هر $z \in U$ داریم $Re\{p(z)\} > ۰$. پس به موجب قضیه (۱۱.۱.۱) :

$$|p_n| \leq ۲ \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{۱۸.۱}$$

از (۱۶.۱) و (۱۷.۱) بدست می آید :

$$۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^{n-۱} = (۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱})(۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} p_n z^n)$$

با برابرگرفتن ضرایب نتیجه می‌شود :

$$ka_k = a_k + a_{k-1}p_1 + a_{k-2}p_2 + \ldots + a_2p_{k-2} + p_{k-1}$$

و یا به صورت معادل

$$(k-1)a_k = a_{k-1}p_1 + a_{k-2}p_2 + \ldots + p_{k-1} \qquad (۱۹.۱)$$

با بکار بردن نامساوی مثلث در (۱۹.۱) و استفاده از کران (۱۸.۱)، داریم:

$$(k-1)|a_k| \leq 2(|a_{k-1}| + |a_{k-2}| + \ldots + |a_2| + 1).$$

از قضیه (۴.۲.۱)، داریم $|a_2| \leq 2$. حال فرض کنیم برای $k = 2, 3, \ldots, n-1$، $|a_k| \leq k$. در این صورت

$$(n-1)|a_n| \leq 2[(n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1] = \frac{2(n-1)n}{2}.$$

و این به $|a_n| \leq n$ برمی‌گردد. لذا به استقرا، قضیه برای هر n درست است. □

قضیه ۶.۳.۱. [۶] فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در S^* باشد و به‌طوری که $a_2 = 0$. آنگاه برای $n = 3, 4, \ldots$ ، $|a_n| \leq 1$.

۴.۱ رده ی $S^*(\alpha)$

تعریف ۱.۴.۱. تابع $f(z) \in S$ ستاره گون ازمرتبه α $(0 \leq \alpha < 1)$ نامیده می‌شود هرگاه

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \qquad (z \in U).$$

این زیررده‌ی S را با $S^*(\alpha)$ نمایش می‌دهیم.

تذکر : زمانی‌که $\alpha = 0$ است، رده‌ی S^* بدست می‌آید.

قضیه ۲.۴.۱. فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ و $(۰ \leq \alpha < ۱)$ باشد. اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$$

آنگاه $f(z) \in S^*(\alpha)$.

اثبات. بنا به تعریف (۱.۴.۱) کافیست نشان دهیم $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ در دیسکی به مرکز ۱و شعاع $۱ - \alpha$ قرار دارد

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱\right| = \left|\frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)a_n z^{n-۱}}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^{n-۱}}\right|$$

$$\leq \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n||z|^{n-۱}}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n||z|^{n-۱}} < \frac{\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n|}{۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|}$$

عبارت بالا دارای کران بالای $۱ - \alpha$ است، اگر

$$\sum_{n=۲}^{\infty}(n-۱)|a_n| \leq (۱-\alpha)(۱ - \sum_{n=۲}^{\infty}|a_n|)$$

که رابطه فوق معادل است با $\sum_{n=۲}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq ۱ - \alpha$ و این رابطه نیز بنا به فرض برقرار است. بنابراین

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - ۱\right| < ۱ - \alpha.$$

□

قضیه ۳.۴.۱. فرض کنید برای $i = ۰, ۱, \ldots, k-۱$، $f_i(z) \in S^*(\alpha_i)$ که $۰ \leq \alpha_i < ۱$. اگر

$$k - ۱ \leq \sum_{i=۰}^{k-۱} \alpha_i < k$$

آنگاه

$$\frac{\prod_{i=۰}^{k-۱} f_i(z)}{z^{k-۱}} \in S^*(\sum_{i=۰}^{k-۱} \alpha_i - (k-۱)).$$

اثبات. چون توابع $f_i(z)$ ستاره گون از مرتبه α_i هستند، بنا به تعریف (۱.۴.۱) برای $i=0,1,\dots,k-1$ داریم:

$$Re\frac{zf'_0(z)}{f_0(z)}>\alpha_0, Re\frac{zf'_1(z)}{f_1(z)}>\alpha_1,\dots Re\frac{zf'_{k-1}(z)}{f_{k-1}(z)}>\alpha_{k-1}. \tag{۲۰.۱}$$

قرار می‌دهیم:

$$F(z)=\frac{f_0(z)f_1(z)\dots f_{k-1}(z)}{z^{k-1}} \tag{۲۱.۱}$$

با گرفتن لگاریتم از طرفین (۲۱.۱) و سپس با مشتق گیری، داریم:

$$\frac{zF'(z)}{F(z)}=\frac{zf'_0(z)}{f_0(z)}+\frac{zf'_1(z)}{f_1(z)}+\dots+\frac{zf_{k-1}(z)}{f_{k-1}(z)}-(k-1).$$

با محاسبه قسمت های حقیقی و از (۲۰.۱)، داریم:

$$Re\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\}=Re\left\{\frac{zf'_0(z)}{f_0(z)}\right\}+\dots+Re\left\{\frac{zf'_{k-1}(z)}{f_{k-1}(z)}\right\}-(k-1)>\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i-(k-1).$$

بنابراین $F(z)$ ستاره گون از مرتبه $\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i-(k-1)$ است، اگر $0\leq\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i-(k-1)<1$ که این رابطه بنا به فرض برقرار است. $\square$

نتیجه ۴.۴.۱. فرض کنید $f(z)\in S^*(\frac{1}{2})$ باشد، آنگاه $\frac{-f(z)f(-z)}{z}\in S^*$.

اثبات. کافیست درقضیه (۳.۴.۱) قرار دهیم $\alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$. $\square$

۵.۱ رده ی C

تعریف ۱.۵.۱. میدان D را محدب گوییم اگر پاره خط مستقیمی که هر دو نقطه از D را به هم وصل می‌کند در D قرار بگیرد (ر.ک ۳.۱).

تذکر: ازنظر هندسی یک میدان محدب نسبت به هر نقطه از این میدان ستاره گون است، بنابراین $C\subset S^*$.

تعریف ۲.۵.۱. تابع $f(z) \in S$ را محدب گوییم هرگاه U تحت $f(z)$ بر یک میدان محدب نگاشته شود. این زیر رده‌ی S را با C نمایش می‌دهیم.

لم ۳.۵.۱. فرض کنید $f(z) \in S$، در این صورت $f(z) \in C$ اگر و تنها اگر $f(z)$ هر قرص $|z| < r < ۱$ را بر میدان محدب بنگارد.

اثبات. ابتد فرض کنید $f(z) \in C$. گیریم D تصویر $|z| < ۱$ و $D_۱$تصویر $|z| < r < ۱$ تحت تابع $f(z)$ باشد. نقاط $\omega_۱$ و$\omega_۲$ را در $D_۱$ انتخاب می‌کنیم باید نشان دهیم که پاره خط

$$t\omega_۱ + (۱ - t)\omega_۲ \qquad (\circ < t < ۱)$$

در $D_۱$ قرارمی‌گیرد. چون $\omega_۱, \omega_۲ \in D_۱$ پس نقاط $z_۱$ ،$z_۲$ ای درقرص $|z| < r$ موجود است به‌طوری که $\omega_۱ = f(z_۱)$ و $\omega_۲ = f(z_۲)$ بدون از دست دادن کلیت مسئله می‌توان فرض کرد $|z_۱| \leq |z_۲|$. در این صورت تصویر $|z| < ۱$ تحت تابع $g(z) = tf((\frac{z_۱}{z_۲})z) + (۱ - t)f(z)$ درD واقع است. پس تابع $h(z) = f^{-۱}(g(z))$ درU تحلیلی است و در شرایط $h(\circ) = \circ$، $|h(z)| < ۱$ صدق می‌کند. به موجب لم شوارتز :

$$|h(z)| \leq |z|.$$

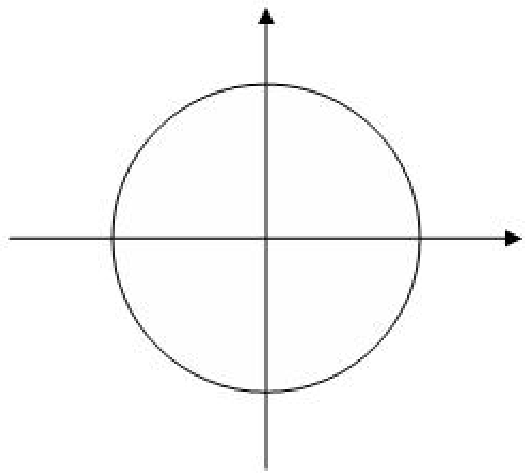
و بویژه:

$$|h(z_۲)| = |f^{-۱}(t\omega_۱ + (۱ - t)\omega_۲)| \leq |z_۲| < r. \qquad (۲۲.۱)$$

چون‌که $D_۱ \subset D$، نقطه $z_\circ$ در دیسک باز U موجود است که $t\omega_۱ + (۱ - t)\omega_۲ = f(z_\circ)$ ولی بنا به (۲۲.۱) نقطه $f^{-۱}(f(z_\circ)) = z_\circ$ باید در قرص $|z| < r$ باشد. پس هر نقطه بر پاره خط $t\omega_۱ + (۱ - t)\omega_۲$ در $D_۱$ قرار دارد.

اثبات عکس قضیه: اگر $f(z) \notin C$، آنگاه دو نقطه در D موجود است که پاره خط مستقیمی که این دو نقطه

را بهم وصل می‌کند در D قرار ندارد. حال قرصی مانند $|z| < r < ۱$ انتخاب می‌کنیم که تصویرش $D_۱$ شامل این دو نقطه باشد. چون‌که $D_۱ \subset D$، پاره خطی که این دو نقطه را بهم وصل می‌کند نمی‌تواند در $D_۱$ قرار داشته باشد. پس$f(z)$ قرص $|z| < r$ را بر یک میدان محدب نمی‌نگارد. $\square$



شکل ۲.۱: مثالی از یک میدان محدب

قضیه ۴.۵.۱. [۱۵] فرض کنید $f(z)$ در U تحلیلی باشد و $f(۰) = ۰$ و $f'(۰) = ۱$. در این صورت $f \in C$ اگر و تنها اگر

$$Re\left\{۱ + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > ۰ \qquad (z \in U).$$

مثال. تابع $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} z^n = \frac{z}{۱-z}$ در رده C است؛ زیرا U توسط تابع $f(z)$ به نیم صفحه $Re f(z) > \frac{-۱}{۲}$ نگاشته می شود و همچنین:

$$Re\left\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = Re\left\{\frac{۲z}{۱-z}\right\} > ۰.$$

قضیه ۵.۵.۱. **(الکساندر [۶])**

[۶] Alexander

فرض کنید $f(z)$ در U تحلیلی باشد $f(\circ)=\circ$، $f'(\circ)=۱$. آنگاه $f(z)\in C$ اگر و تنها اگر $zf'(z)\in S^*$.

اثبات. قراردهید $g(z)=zf'(z)$، در این صورت

$$\frac{zg'(z)}{g(z)} = ۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}.$$

بنابراین طرف راست تساوی قسمت حقیقی مثبت دارد اگر و تنها اگر طرف چپ قسمت حقیقی مثبت داشته باشد. □

قضیه ۶.۵.۱. [۳] . فرض کنید $f(z)\in C$ باشد، آنگاه

$$\frac{r}{۱+r} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{۱-r} \qquad (|z|=r<۱).$$

قضیه ۷.۵.۱. [۳] فرض کنید $f(z)\in C$ باشد، آنگاه

$$\frac{۱}{(۱+r)^۲} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱}{(۱-r)^۲} \qquad (|z|=r<۱).$$

قضیه ۸.۵.۱. فرض کنید $f(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در C باشد، آنگاه برای هر n، $|a_n|\leq ۱$.

اثبات. بنا به قضیه (۵.۵.۱)، تابع $zf'(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty} na_nz^n$ در رده‌ی S^* قرار دارد. پس به موجب قضیه (۵.۳.۱) برای $n=۲,۳,\ldots$:

$$n|a_n| \leq n \Longrightarrow |a_n| \leq ۱.$$

□

قضیه ۹.۵.۱. (پوشش) فرض کنید $f(z)\in C$ و برای $z\in U$، $f(z)\neq c$ که $c\in\mathbb{C}$، آنگاه $|c|\geq \frac{۱}{۲}$.

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم تابع $g(z)=(c-f(z))^{2}$ در U تک ارز است. فرض کنیم z_1 و z_0 دو نقطه متمایز در U باشند. در این صورت:

$$g(z_0)-g(z_1)=(c-f(z_0))^{2}-(c-f(z_1))^{2}=(f(z_0)-f(z_1))(f(z_0)-f(z_1)-2c).$$

چون تابع $f(z)$ تک ارزاست پس $f(z_0)\neq f(z_1)$ و از آنجایی که تابع $f(z)$ محدب است پس نقطه $\frac{f(z_0)+f(z_1)}{2}$ به تصویر U تحت تابع $f(z)$ متعلق است و بنابراین نمی‌تواند مساوی c باشد. پس $f(z_0)+f(z_1)-2c\neq 0$ و لذا تک ارزی $g(z)$ ثابت می شود. چون $g(z)=c^{2}-2zc+\ldots$ پس تابع

$$h(z)=\frac{g(z)-c^{2}}{-2c}=z+\ldots$$

در رده S قرار دارد، بعلاوه در U، $h(z)\neq\frac{c}{2}$ زیرا $g(z)$ هرگز در آنجا صفر نیست. با بکار بردن قضیه (۵.۲.۱) در می‌یابیم :

$$|\frac{c}{2}|\geq\frac{1}{4}\Longrightarrow|c|\geq\frac{1}{2}.$$

$\square$

تذکر: اگر چه همه‌ی توابع در رده‌ی S محدب نیستند، اما می‌توان درجه تحدب را برای هر تابع S اندازه گرفت. برای هر $f\in S$، عددحقیقی $R=R(f)$ بزرگترین قرص $|z|<R\leq 1$ که به وسیله f بر میدان محدب نگاشته می شود را متناظرمی‌کنیم. این عدد به شعاع تحدب موسوم است. حال بزرگترین قرصی را که بر آن تمام توابع S محدب باشند را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۵.۱. فرض کنید $f(z)\in S$، آنگاه $f(z)$ قرص $|z|<2-\sqrt{3}$ را بر میدان محدب می‌نگارد.

اثبات. به موجب قضیه (۴.۵.۱)، تصویر $|z|<r$ تحت تابع $f(z)$محدب است اگر و تنها اگر برای $|z|<r$، $Re\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}>0$. از نامساوی (۱۰.۱) در قضیه (۷.۲.۱) داریم:

$$Re\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\}\geq 1+\frac{2r^{2}-4r}{1-r^{2}}=\frac{1-4r+r^{2}}{1-r^{2}}.$$

چون $\sqrt{۳} - ۲$ کوچکترین ریشه‌ی مثبت $۱ - ۴r + r^۲$ می‌باشد، قضیه ثابت می‌گردد. □

۶.۱ رده ی K

در این بخش به معرفی رده‌ی توابع تقریبا محدب می‌پردازیم در این خصوص قضایا و مثالهای از رده‌ی مزبور بیان می‌کنیم و در انتها ارتباط بین رده فوق با رده های قبل را نیز مشخص می‌کنیم.

تعریف ۱.۶.۱. تابع $f(z) \in H$ تقریبا محدب نامیده می‌شود اگر تابع $g(z) \in C$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $z \in U$، داشته باشیم:

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > ۰.$$

این زیر رده‌ی H را با K نمایش می‌دهیم.

مثال. تابع محدب $f(z)$ تقریبا محدب است؛ قرار دهیم $g(z) = f(z)$ در این صورت:

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} = ۱ > ۰$$

که ازتعریف (۱.۶.۱) نتیجه می شود $f(z)$ تقریبا محدب است .

مثال. هر تابعی که مشتق آن دارای قسمت حقیقی مثبت باشد تقریبا محدب است؛ قرار دهیم: $g(z) = z$، $g \in C$ زیرا:

$$Re\left\{۱ + z\frac{g''(z)}{g'(z)}\right\} = ۱ > ۰.$$

بعلاوه:

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} = Re\{f'(z)\} > ۰$$

که از تعریف (۱.۶.۱) نتیجه می‌شود $f(z)$ تقریبا محدب است.

مثال. تابع ستاره گون $f(z)$ تقریبا محدب است. قرار دهیم: $g(z) = \int_۰^z \frac{f(\zeta)}{\zeta} d\zeta$ تابع $g(z)$ محدب است زیرا:

$$Re\left\{۱ + \frac{zg''(z)}{g'(z)}\right\} = Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > ۰.$$

با جایگذاری $f'(z)$ و$g'(z)$ در عبارت $\frac{f'(z)}{g'(z)}$ داریم:

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} = Re\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > ۰$$

که از تعریف (۱.۶.۱) نتیجه می‌شود تابع $f(z)$ تقریبا محدب است.

مثال. تابع $f(z) = z + \frac{۱}{۲}z^۲ + \frac{۱}{۳}z^۳$ تقریبا محدب است برای $f(z)$ تابع $g(z) = -\log(۱ - z)$ را متناظرمی‌کنیم، تابع $f(z)$ در C قرار دارد زیرا:

$$Re\{۱ + z\frac{g''(z)}{g'(z)}\} = Re\{۱ + \frac{z}{۱ - z}\} > \frac{۱}{۲}.$$

بعلاوه:

$$Re\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\} = Re\{(۱ + z + z^۲)(۱ - z)\} = Re\{۱ - z^۲\} > ۰$$

پس از تعریف (۱.۶.۱) نتیجه می‌شود تابع $f(z)$ تقریبا محدب است.

لم ۲.۶.۱. فرض کنید $\phi(z)$ در میدان محدب D تحلیلی باشد و در D، $Re\phi'(z) > ۰$، آنگاه $\phi(z)$ در D تک ارز است.

اثبات. نقاط متمایز $z_۰$ و $z_۱$ را در D انتخاب می‌کنیم. چون میدان D محدب است در این صورت پاره خط مستقیم $z = z_۰ + t(z_۱ - z_۰)$، $۰ \leq t \leq ۱$ در D قرار دارد. با انتگرال‌گیری در امتداد این مسیر بدست می‌آید.

$$\phi(z_۱) - \phi(z_۰) = \int_{z_۰}^{z_۱} \phi'(z)dz$$

$$= \int_{0}^{1} \phi'(z_0 + t(z_1 - z_0))(z_1 - z_0)dt.$$

با تقسیم بر $z_1 - z_0$ و با محاسبه قسمت های حقیقی داریم:

$$Re\left\{\frac{\phi(z_1) - \phi(z_0)}{z_1 - z_0}\right\} = Re\left\{\int_{0}^{1} \phi'(z_0 + t(z_1 - z_0))dt\right\} > 0.$$

پس $\phi(z_1) \neq \phi(z_0)$ و در نتیجه $\phi(z)$ در D تک ارز است. $\square$

قضیه ۳.۶.۱. [۱۵] فرض کنید تابع $f(z)$ در D تحلیلی و تک ارز باشد و $g(z)$ در $f(D)$ تحلیلی و تک ارز باشد، آنگاه تابع $g(f(z))$ بر D تحلیلی و تک ارز است.

قضیه ۴.۶.۱. فرض کنید $f(z)$ تقریبا محدب باشد، آنگاه $f(z)$ تک ارز است.

اثبات. چون $f(z) \in K$، تابع $g(z) \in C$ موجود است به‌طوری که:

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} > 0 \quad (z \in U).$$

حال فرض کنیم D تصویر U تحت تابع $g(z)$ باشد (D محدب است زیرا $g(z) \in C$). قرارمی‌دهیم $\phi(z) = f(g^{-1}(z))$. در این صورت $f(z) = \phi(g(z))$ و بنابراین $f'(z) = \phi'(g(z))g'(z)$ پس در میدان محدب D داریم:

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{g'(z)}\right\} = Re\{\phi'(g(z))\} > 0.$$

بنابراین از لم (۲.۶.۱) نتیجه می‌شود $\phi(z)$ در D تک ارزاست. با بکار بردن قضیه (۳.۶.۱) ، در می‌یابیم که $f(z)$ در U تک ارز است. $\square$

تذکر: ازقضیه (۴.۶.۱) نتیجه می شود K زیررده‌ی S است .

قضیه ۵.۶.۱. فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ تقریبا محدب باشد، آنگاه برای هر n، $|a_n| \leq n$.

اثبات. فرض کنید $g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ در C باشد و به‌طوری که تابع

$$p(z)=\frac{f'(z)}{g'(z)}=1+\sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \tag{۲۳.۱}$$

قسمت حقیقی مثبت داشته باشد. با ضرب طرفین رابطه (۲۳.۱) در $g'(z)$ و برابرگرفتن ضریب جمله z^{2n-1} ، بدست می‌آید

$$na_n=nb_n+(n-1)p_1b_{n-1}+(n-2)p_2b_{n-2}+\ldots+2p_{n-2}b_2+p_{n-1}. \tag{۲۴.۱}$$

به موجب قضیه (۱۱.۱.۱)، برای هر $k\in\mathbb{N}$ داریم:

$$|p_k|\leq 2. \tag{۲۵.۱}$$

چون $g(z)\in C$ به موجب قضیه (۸.۵.۱)، برای $k=2,3,\ldots$ داریم:

$$|b_k|\leq 1. \tag{۲۶.۱}$$

با بکار بردن نامساوی مثلث در (۲۴.۱) و استفاده از (۲۵.۱) و (۲۶.۱) ، داریم :

$$n|a_n|\leq n|b_n|+(n-1)|p_1||b_{n-1}|+\ldots+|p_{n-1}|$$

$$\leq n+2[(n-1)+(n-2)+\ldots+1]$$

$$=n+\frac{2(n-1)n}{2}=n^2.$$

بنابراین برای هر n، $|a_n|\leq n$ و قضیه ثابت است. □

تذکر: ارتباط بین رده‌ی K و رده های قبلی به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$C\subset S^*\subset K\subset S.$$

فصل ۲

بررسی زیررده‌ا ی از توابع تقریبا محدب

دراین فصل، ابتدا رده‌ی K_s معرفی می‌شود و سپس چند تعمیم از این رده در نظر گرفته می‌شود و نتایج بدست آمده در فصل ۱ روی رده‌های مذکور بررسی خواهد شد.

درتمام این فصل فرض کنید $g(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}b_nz^n$ در رده‌ی $S^*(\frac{۱}{۲})$ باشد و قرار می‌دهیم:

$$G(z)=\frac{-g(z)g(-z)}{z}$$

که می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$G(z)=z+\sum_{n=۲}^{\infty}B_{۲n-۱}z^{۲n-۱}.$$

به‌طوری که برای $n=۲,۳,\ldots$،

$$B_{۲n-۱}=۲b_{۲n-۱}-۲b_۲b_{۲n-۲}+\ldots+(-۱)^n۲b_{n-۱}b_{n+۱}+(-۱)^{n+۱}b_n^۲.$$

چون $G(-z)=-G(z)$، $G(z)$ فرد است. با توجه به اینکه $g(z)\in S^*(\frac{۱}{۲})$، بنا به نتیجه (۴.۴.۱) تابع فوق ستاره گون است.

۱.۲ رده ی K_s

تعریف ۱.۱.۲. تابع $f(z) \in H$ در رده‌ی K_s قرار دارد اگر $g \in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $z \in U$، رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$Re\left\{\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}\right\} > ۰ \tag{۱.۲}$$

به بیان معادل:

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{G(z)}\right\} > ۰. \tag{۲.۲}$$

تذکر $'$۱.۱.۲ . از نامساوی (۲.۲) و با توجه به اینکه تابع $G(z)$ ستاره گون است، از تعریف (۱.۶.۱) نتیجه می‌شود اگر $f(z) \in K_s$ باشد، آنگاه $f(z)$ تقریبا محدب است.

مثال. تابع $f(z) = \ln\frac{۱+z}{\sqrt{۱+z^{۲}}}$ در رده‌ی K_s قرار دارد؛ برای $f(z)$ تابع $g(z) = \frac{z}{\sqrt{۱+z^{۲}}}$ را متناظر می‌کنیم، $g(z) \in S^*(\frac{۱}{۲})$ زیرا:

$$Re\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\} = Re\left\{\frac{۱}{۱+z^{۲}}\right\} > \frac{۱}{۲}.$$

با جایگذاری $f'(z) = \frac{۱-z}{(۱+z)(۱+z^{۲})}$ و $g(z)$ در عبارت $\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}$ داریم :

$$Re\left\{\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}\right\} = Re\left\{\frac{۱-z}{۱+z}\right\} > ۰.$$

بنابراین نامساوی (۱.۲) برقرار است. پس $f(z)$ در رده K_s قرار می‌گیرد.

قضیه ۲.۱.۲. فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} a_n z^n$ در K_s باشد، آنگاه برای هر n، $|a_n| \leq ۱$.

اثبات. چون $f(z) \in K_s$، $g(z) \in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود است به‌طوری که تابع

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{G(z)} = \frac{۱+\sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^{n-۱}}{۱+\sum_{n=۲}^{\infty} B_{۲n-۱} z^{۲n-۲}} \tag{۳.۲}$$

دارای قسمت حقیقی مثبت است. چون برای $۱ > |z| > ۰$، $G(z) \neq ۰$، تابع $p(z)$ در U تحلیلی است و می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$p(z) = ۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} c_n z^n. \tag{۴.۲}$$

پس به موجب قضیه (۱۱.۱.۱) برای هر $n \in \mathbb{N}$،

$$|c_n| \leq ۲. \tag{۵.۲}$$

از (۳.۲) و (۴.۲) بدست می‌آید:

$$(۱ + \sum_{n=۱}^{\infty} c_n z^n)(۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} B_{۲n-۱} z^{۲n-۲}) = ۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} n a_n z^{n-۱}$$

با برابر گرفتن ضرایب نتیجه می‌شود:

$$۲n a_{۲n} = c_{۲n-۱} + c_{۲n-۳} B_۳ + c_{۲n-۵} B_۵ + \ldots + c_۱ B_{۲n-۱} \tag{۶.۲}$$

و

$$(۲n + ۱) a_{۲n+۱} = c_{۲n} + c_{۲n-۲} B_۳ + c_{۲n-۴} B_۵ + \ldots + c_۲ B_{۲n-۱} + B_{۲n+۱}. \tag{۷.۲}$$

با بکار بردن نامساوی مثلث در (۶.۲) و (۷.۲) و استفاده از کران (۵.۲)، داریم :

$$۲n|a_{۲n}| \leq ۲(۱ + |B_۳| + |B_۵| \ldots + |B_{۲n-۱}|) \tag{۸.۲}$$

و

$$(۲n + ۱)|a_{۲n+۱}| \leq ۲(۱ + |B_۳| + |B_۵| + \ldots |B_{۲n-۱}|) + |B_{۲n+۱}|. \tag{۹.۲}$$

چون $G(z) = z + \sum_{n=۲}^{\infty} B_{۲n-۱} z^{۲n-۱}$ ستاره گون است و $B_۲ = ۰$. به موجب قضیه (۶.۳.۱) برای $n = ۲, ۳, \ldots$ داریم:

$$|B_{۲n-۱}| \leq ۱. \tag{۱۰.۲}$$

از (۸.۲) و (۹.۲) و (۱۰.۲) نتیجه می‌شود:

$$۲n|a_{۲n}| \leq ۲n \Longrightarrow |a_n| \leq ۱$$

و

$$(۲n+۱)|a_{۲n+۱}| \leq (۲n+۱) \Longrightarrow |a_{۲n+۱}| \leq ۱.$$

بنابراین برای هر n، $|a_n| \leq ۱$. □

قضیه ۳.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in K_s$ باشد، آنگاه

$$\frac{۱-r}{(۱+r)(۱+r^۲)} \leq |f'(z)| \leq \frac{۱}{(۱-r)^۲} \qquad (|z| = r < ۱). \tag{۱۱.۲}$$

اثبات. چون $f(z) \in K_s$، $g(z) \in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود است به‌طوری که تابع

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{G(z)} = \frac{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^{n-۱}}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} B_{۲n-۱} z^{۲n-۲}} \tag{۱۲.۲}$$

دارای قسمت حقیقی مثبت است. درقضیه (۲.۱.۲) نشان داده‌ایم $p(z) \in P$. پس به موجب قضیه (۱۲.۱.۱):

$$\frac{۱-r}{۱+r} \leq |p(z)| \leq \frac{۱+r}{۱-r} \quad (|z| = r < ۱). \tag{۱۳.۲}$$

چون $G(z) \in S^{(۲)}$، به موجب قضیه (۱۲.۲.۱):

$$\frac{r}{۱+r^۲} \leq |G(z)| \leq \frac{r}{۱-r^۲} \quad (|z| = r < ۱). \tag{۱۴.۲}$$

با جایگذاری (۱۲.۲) در(۱۳.۲) و استفاده از (۱۴.۲)، نامساوی (۱۱.۲) نتیجه می‌شود. □

قضیه ۴.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in K_s$ باشد، آنگاه

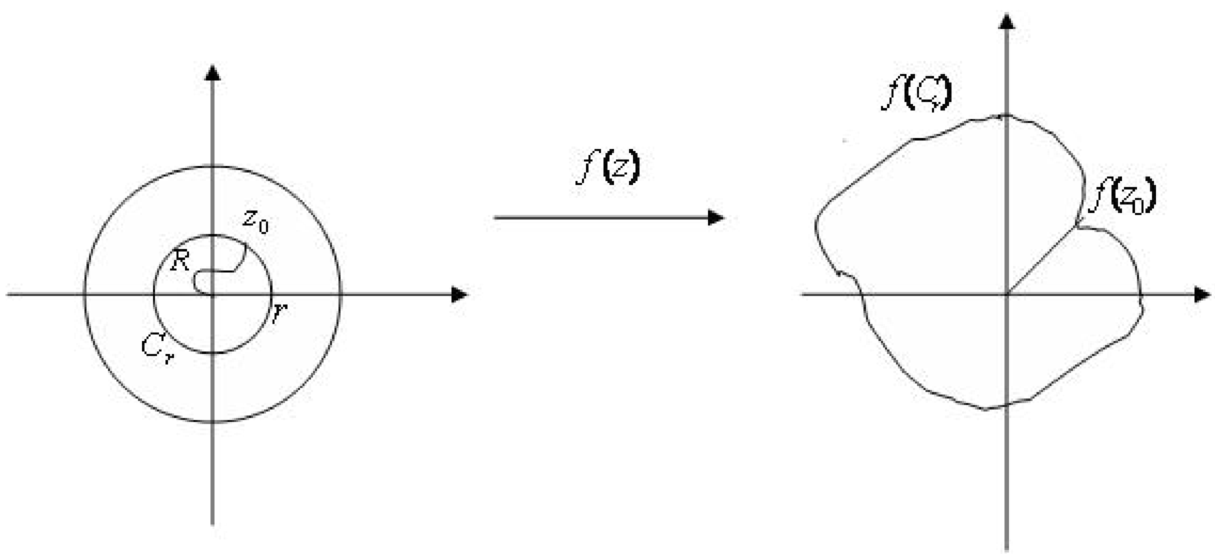
$$\ln \frac{۱+r}{\sqrt{۱+r^{۲}}} \le |f(z)| \le \frac{r}{۱-r} \qquad (|z| = r < ۱). \tag{۱۵.۲}$$

اثبات. بنا به قضیه (۳.۱.۲) برای $|z| = q < ۱$ داریم: $|f'(z)| \le \frac{۱}{(۱-q)^{۲}}$ و با انتگرال‌یابی در امتداد پاره خط مستقیم از ۰ تا $z = re^{i\theta}$ بدست می آید:

$$|f(z)| = \left|\int_{۰}^{z} f'(t)dt\right| = \left|\int_{۰}^{r} f'(qe^{i\theta})e^{i\theta}dq\right| \le \int_{۰}^{r} |f'(qe^{i\theta})|dq \le \int_{۰}^{r} \frac{۱}{(۱-q)^{۲}} = \frac{r}{۱-r}.$$

بدین ترتیب طرف راست نامساوی (۱۵.۲) ثابت می‌شود.

برای اثبات طرف چپ نامساوی (۱۵.۲)، کافیست آنرا برای نزدیکترین نقطه‌ی $f(z_۰)$ $(|z_۰| = r < ۱)$ به مبدا ثابت کنیم چون برای هر z ای که $|z| = r$ باشد، $|f(z)| \ge |f(z_۰)|$. چون $f \in K_s$ است بنا به تذکر (′۱.۱.۲)، $f(z)$ در U تک ارز است. بنابراین پاره خط مستقیم از مبدا تا $f(z_۰)$ تصویر منحنی ساده‌ی R در



شکل ۱.۲:

قرص $C_r = \{z; |z| \leq r\}$ می‌باشد (ر.ک ۱.۲). بنابراین:

$$|f(z_\circ)| = \int_{f(R)} |d\omega| = \int_R |f'(z)||dz|$$

از طرفی بنا به قضیه (۳.۱.۲):

$$|f(z_\circ)| = \int_R |f'(z)||dz| \geq \int_\circ^r \frac{۱-q}{(۱+q)(۱+q^۲)} dq = \ln \frac{۱+r}{\sqrt{۱+r}}.$$

□

لم ۵.۱.۲. [۵] فرض کنید $f(z)$ ستاره گون و فرد باشد، آنگاه

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} \geq \frac{۱-r^۲}{۱+r^۲} \qquad (|z| = r).$$

لم ۶.۱.۲. فرض کنید $f(z)$ در U تحلیلی باشد و در آنجا $Re\{f(z)\} > \circ$ و $f(\circ) = ۱$. آنگاه:

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{۲r}{۱-r^۲} \qquad (|z| = r). \tag{۱۶.۲}$$

اثبات. چون‌که $F(z) = \frac{۱+z}{۱-z}$ دیسک U را به نیم صفحه، $Re\{F(z)\} > \circ$ می‌نگارد و با توجه به اینکه طبق فرض $Re\{f(z)\} > \circ$ است، نتیجه می‌شود:

$$f(U) \subset F(U).$$

حال از آنجایی که $f(\circ) = F(\circ) = ۱$ و $F(z)$ تک ارزاست، بنا به تعریف (۱۸.۱.۱):

$$f(z) \prec \frac{۱+z}{۱-z}.$$

پس $\omega(z) \in E$ موجود است به‌طوری که:

$$f(z) = \frac{۱ + \omega(z)}{۱ - \omega(z)}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{۲z\omega'(z)}{۱ - [\omega(z)]^{۲}}. \qquad (۱۷.۲)$$

با بکار بردن نامساوی مثلث در (۱۷.۲) و استفاده از قضیه شوارتز- پیک، داریم :

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{۲|z|}{۱ - |\omega(z)|^{۲}}.|\omega'(z)| \leq \frac{۲r}{۱ - |\omega(z)|^{۲}} \frac{۱ - |\omega(z)|^{۲}}{۱ - r^{۲}} = \frac{۲r}{۱ - r^{۲}}.$$

بدین ترتیب اثبات لم کامل است. □

قضیه ۷.۱.۲. فرض کنید $f(z) \in K_s$ باشد، آنگاه $f(z)$ بر دیسک $|z| < r_۰$ محدب است، به‌طوری که

$$r_۰ = \frac{۱}{۲}[۱ + \sqrt{۵} - \sqrt{۲(۱ + \sqrt{۵})}].$$

اثبات. چون $f(z) \in K_s$، $g(z) \in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود است به‌طوری که تابع

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{G(z)} = \frac{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^n}{۱ + \sum_{n=۲}^{\infty} B_{۲n-۱} z^{۲n-۲}} \qquad (۱۸.۲)$$

قسمت حقیقی مثبت دارد. پس به موجب لم (۶.۱.۲):

$$\left|\frac{zp'(z)}{p(z)}\right| \leq \frac{۲r}{۱ - r^{۲}} \qquad (|z| = r < ۱). \qquad (۱۹.۲)$$

از (۱۸.۲) نتیجه می‌شود:

$$۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{zG'(z)}{G(z)} + \frac{zp'(z)}{p(z)}.$$

با محاسبه قسمت های حقیقی و به موجب لم (۵.۱.۲) و نامساوی (۱۹.۲)، برای $|z| = r < ۱$ داریم:

$$Re\left\{۱ + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = Re\left\{\frac{zG'(z)}{G(z)}\right\} + Re\left\{\frac{zp'(z)}{p(z)}\right\}$$

$$\geq \frac{1-r^2}{1+r^2} - \left|\frac{zp'(z)}{p(z)}\right|$$
$$\geq \frac{1-r^2}{1+r^2} - \frac{2r}{1-r^2}$$
$$= \frac{1-2r-2r^2-2r^3+r^4}{1-r^4}.$$

ازرابطه فوق در می‌یابیم، اگر $1-2r-2r^2-2r^3+r^4 > 0$ باشد، آنگاه $Re\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > 0$. قرارمی‌دهیم:

$$F(r) = 1-2r-2r^2-2r^3+r^4$$

چون $F(0)=1$، $F(1)=-4$ و

$$F'(r) = -2-4r-6r^2+4r^3 < 0 \qquad (0 \leq r < 1),$$

پس $F(r)=0$ دربازه $(0,1)$ دارای جواب یکتای r_0 می‌باشد.از حل معادله $F(r)=0$ بدست می‌آید:

$$r_0 = \frac{1}{2}[1+\sqrt{5}-\sqrt{2(1+\sqrt{5})}]$$

بنابراین اگر $r<r_0$ باشد، آنگاه $Re\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\} > 0$ است. لذا از قضیه (۴.۵.۱) نتیجه می‌شود $f(z)$ بر قرص $|z|<r_0$ محدب است. □

۲.۲ رده ی $K_s(\gamma)$

تعریف ۱.۲.۲. تابع $f\in H$ در رده $K_s(\gamma)$ $(0\leq\gamma<1)$ قرار دارد اگر $g\in S^*(\frac{1}{2})$ موجود باشد که برای هر $z\in U$، رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$Re\left\{\frac{-z^2f'(z)}{g(z)g(-z)}\right\} > \gamma \tag{۲۰.۲}$$

به بیان معادل:

$$\left|\frac{z^2f'(z)}{g(z)g(-z)}+1\right| < \left|\frac{z^2f'(z)}{g(z)g(-z)}-1+2\gamma\right|. \tag{۲۱.۲}$$

تذکر ۱.۲.۲$'$. در حالتی که $\gamma = ۰$ باشد رده‌ی K_s بدست می‌آید. بنابراین $K_s(\gamma)$ تعمیمی از رده‌ی K_s می‌باشد.

تذکر ۱.۲.۲$''$. ازنامساوی (۲۰.۲) و با توجه به اینکه $G(z) = \frac{-g(z)g(-z)}{z}$ ستاره گون است، ازتعریف (۱.۶.۱) نتیجه می‌شود اگر $f(z) \in K_s(\gamma)$ باشد، آنگاه $f(z)$ تقریبا محدب است.

مثال. تابع $f(z) = \frac{\gamma}{۲}\ln\frac{۱+z}{۱-z} + (۱-\gamma)\frac{z}{۱-z}$ در $K_s(\gamma)$ قرار دارد؛ برای $f(z)$ تابع $g(z) = \frac{z}{۱-z}$ را متناظر می‌کنیم، $g(z) \in S^*(\frac{۱}{۲})$ زیرا:

$$Re\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\} = Re\left\{\frac{۱}{۱-z}\right\} > \frac{۱}{۲}.$$

با جایگذاری $f'(z) = \frac{۱+(۱-۲\gamma)z}{(۱-z)(۱-z^۲)}$ و $g(z)$ در عبارت $\frac{-z^۲f'(z)}{g(z)g(-z)}$ داریم:

$$Re\left\{\frac{-z^۲f'(z)}{g(z)g(-z)}\right\} = Re\left\{\frac{۱+(۱-۲\gamma)z)}{۱-z}\right\} > \gamma.$$

بنابراین نامساوی (۲۰.۲) برقرار است. پس $f(z)$ در رده‌ی $K_s(\gamma)$ قرار دارد.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید $۰ \leq \gamma < ۱$ باشد. $f \in K_s(\gamma)$ اگر و تنها اگر $g \in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود باشد به‌طوری که:

$$\frac{-z^۲f'(z)}{g(z)g(-z)} \prec \frac{۱+(۱-۲\gamma)z}{۱-z} \qquad (z \in U). \tag{۲۲.۲}$$

اثبات. ابتدا فرض کنیم $f \in K_s(\gamma)$، پس $g(z) \in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود است به‌طوری که برای هر $z \in U$،

$$Re\{K(z)\} = Re\left\{\frac{-z^۲f'(z)}{g(z)g(-z)}\right\} > \gamma.$$

حال از آنجایی که $F(z)=\frac{1+(1-2\gamma)z}{1-z}$ دیسک U را به نیم صفحه ، $Re\{F(z)\}>\gamma$ می‌نگارد، نتیجه می‌شود:

$$K(U)\subset F(U)$$

و با توجه به اینکه $F(0)=K(0)=1$ و $F(z)$ تک ارزاست، بنا به تعریف (۱۸.۱.۱):

$$\frac{-z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)}\prec\frac{1+(1-2\gamma)z}{1-z}.$$

به عکس: فرض کنیم $g(z)\in S^*(\frac{1}{2})$ و (۲۲.۲) برقرارباشد. پس تابع $\omega(z)\in E$ موجود است به‌طوری که :

$$\frac{-z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)}=\frac{1+(1-2\gamma)\omega(z)}{1-\omega(z)}$$

به بیان معادل:

$$\frac{z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)}+1=\omega(z)\left(\frac{z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)}+2\gamma-1\right). \tag{۲۳.۲}$$

با توجه به اینکه $|\omega(z)|<1$ و رابطه‌ی (۲۳.۲)، داریم :

$$\left|\frac{z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)}+1\right|<\left|\frac{z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)}-1+2\gamma\right|.$$

بنابراین $f(z)$ به رده‌ی $K_s(\gamma)$ متعلق است. □

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید $\gamma(0\leq\gamma<1)$، $g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n$ در $S^*(\frac{1}{2})$ و $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ در H باشد . اگر

$$2\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|+(|1-2\gamma|+1)\sum_{n=2}^{\infty}|B_{2n-1}|\leq 2(1-\gamma)$$

انگاه $f(z)\in K_s(\gamma)$.

اثبات. قرار دهید:

$$\Lambda=\left|zf'(z)-\frac{-g(z)g(-z)}{z}\right|-\left|zf'(z)+\frac{-(1-2\gamma)g(z)g(-z)}{z}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^n - \sum_{n=۲}^{\infty} B_{۲n-۱} z^{۲n-۱}\right| - \left|(۲-۲\gamma)z + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^n + (۱-۲\gamma)\sum_{n=۲}^{\infty} B_{۲n-۱} z^{۲n-۱}\right|.$$

برای اثبات قضیه از تعریف (۱.۲.۲) کافیست نشان دهیم $\Lambda < ۰$

$$\Lambda \leq \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^n + \sum_{n=۲}^{\infty} |B_{۲n-۱}||z|^{۲n-۱} - \left((۲-۲\gamma)|z| - \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^n - |۱-۲\gamma|\sum_{n=۲}^{\infty} |B_{۲n-۱}||z|^{۲n-۱}\right)$$

$$= -(۲-۲\gamma)|z| + \sum_{n=۲}^{\infty} ۲n|a_n||z|^n + (|۱-۲\gamma|+۱)\sum_{n=۲}^{\infty} |B_{۲n-۱}||z|^{۲n-۱}$$

$$< \left(-(۲-۲\gamma) + \sum_{n=۲}^{\infty} ۲n|a_n| + (|۱-۲\gamma|+۱)\sum_{n=۲}^{\infty} |B_{۲n-۱}|\right)|z|$$

بنابراین $\Lambda < ۰$ اگر

$$-(۲-۲\gamma) + \sum_{n=۲}^{\infty} ۲n|a_n| + (|۱-۲\gamma|+۱)\sum_{n=۲}^{\infty} |B_{۲n-۱}| \leq ۰$$

که عبارت فوق معادل است با $۲\sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n| + (|۱-۲\gamma|+۱)\sum_{n=۲}^{\infty} |B_{۲n-۱}| \leq ۲(۱-\gamma)$ و این رابطه نیز بنا به فرض برقرار است. $\square$

لم ۴.۲.۲. فرض کنید $f(z)$ در U تحلیلی باشد و $f(۰) = ۱$. اگر نامساوی زیر برای مقدار $\gamma(۰ \leq \gamma < ۱)$، $\beta(۰ < \beta \leq ۱)$ و $\alpha(۰ < \alpha \leq ۱)$ برقرار باشد

$$\left|\frac{f(z)-۱}{۲\alpha[f(z)-\gamma]-[f(z)-۱]}\right| < \beta. \qquad (۲۴.۲)$$

آنگاه تابع $\phi(z)$ ای موجود است به‌طوری که در U تحلیلی است،

$$|\phi(z)| \leq \beta$$

و

$$f(z) = \frac{۱+(۲\gamma\alpha-۱)z\phi(z)}{۱+(۲\alpha-۱)z\phi(z)}.$$

اثبات. فرض کنید $f(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ و (۲۴.۲) برقرار باشد. پس به موجب قضیه ریمان، تابع

$$F(z) = \frac{1 - f(z)}{2\alpha\{f(z) - \gamma\} - \{f(z) - 1\}} = \frac{-a_1 z - a_2 z^2 + \dots}{2\alpha(1-\gamma) + (2\alpha a_1 - a_1)z + \dots} \qquad (۲۵.۲)$$

در U تحلیلی است و می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت :

$$F(z) = t_1 z + t_2 z^2 + \dots = z\phi(z) \qquad (۲۶.۲)$$

که $\phi(z)$ در U تحلیلی است. چون $F(z)$ در نامساوی $|F(z)| < \beta$ صادق است. به موجب لم شوارتز:

$$|F(z)| = |z\phi(z)| \leq |z|\beta \Longrightarrow |\phi(z)| \leq \beta.$$

از (۲۵.۲) و (۲۶.۲) نتیجه می‌شود:

$$f(z) = \frac{1 + (2\alpha\gamma - 1)F(z)}{1 + (2\alpha - 1)F(z)} = \frac{1 + (2\alpha\gamma - 1)z\phi(z)}{1 + (2\alpha - 1)z\phi(z)}.$$

بدین ترتیب اثبات لم کامل است. □

قضیه ۵.۲.۲. فرض کنید $0 \leq \gamma < 1$، $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در H و $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ در $S^*(\frac{1}{2})$ باشد و به‌طوری که (۲۱.۲) برقرارباشد. آنگاه برای $n = 2, 3, \dots$ داریم:

$$2n^2|a_{2n}|^2 - 2(1-\gamma)^2 \leq (1-\gamma)\sum_{k=2}^{n}(2(2k-1)|a_{2k-1}B_{2k-1}| + (|2\gamma - 1| + 1)|B_{2k-1}|^2).$$

اثبات. نامساوی (۲۱.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left|\frac{\frac{-z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)} - 1}{2\{\frac{-z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)} - \gamma\} - \{\frac{-z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)} - 1\}}\right| < 1 \qquad (۲۷.۲)$$

با جایگذاری $K(z) = \frac{-z^2 f'(z)}{g(z)g(-z)} = \frac{zf'(z)}{G(z)}$ در (۲۷.۲) بدست می‌آید:

$$\left|\frac{K(z) - 1}{2\{K(z) - \gamma\} - \{K(z) - 1\}}\right| < 1. \qquad (۲۸.۲)$$

چون‌که $K(z)$ در U تحلیلی و $K(\circ) = ۱$ است. پس به موجب لم (۴.۲.۲)، تابع $\phi(z)$ ای موجود است به‌طوری که در U تحلیلی است، $|\phi(z)| \leq ۱$ و

$$K(z) = \frac{zf'(z)}{G(z)} = \frac{۱ + (۲\gamma - ۱)z\phi(z)}{۱ + z\phi(z)}. \tag{۲۹.۲}$$

چون $\phi(z)$ در U تحلیلی است، می‌توان نوشت:

$$z\phi(z) = t_۱ z + t_۲ z^۲ + \ldots. \tag{۳۰.۲}$$

از (۲۹.۲) و (۳۰.۲) بدست می‌آید:

$$\left((۲ - ۲\gamma)z + \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^n - (۲\gamma - ۱)\sum_{n=۲}^{\infty} B_{۲n-۱} z^{۲n-۱}\right)\sum_{n=۱}^{\infty} t_n z^n = \sum_{n=۲}^{\infty} B_{۲n-۱} z^{۲n-۱} - \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^n \tag{۳۱.۲}$$

با برابر گرفتن ضرایب بدست می‌آید:

$$(۲-۲\gamma)t_{۲n-۲} + [۲a_۲ t_{۲n-۳} + ۳a_۳ t_{۲n-۴} + \ldots + na_n t_{۲n-(n+۱)}] - (۲\gamma - ۱)[B_۳ t_{۲n-۴} + \ldots + B_{۲n-۳} t_۱]$$

$$= B_{۲n-۱} - (۲n-۱)a_{۲n-۱}$$

و

$$(۲ - ۲\gamma)t_{۲n-۱} + [۲a_۲ t_{۲n-۲} \ldots + na_n t_n] - (۲\gamma - ۱)[B_۳ t_{۲n-۳} + B_۵ t_{۲n-۵} + \ldots + B_{۲n-۱} t_۱]$$

$$= -۲na_{۲n}$$

بنابراین، برای هر $n \geq ۲$ می‌توان نوشت:

$$\left((۲ - ۲\gamma)z + \sum_{k=۱}^{n-۱} ۲ka_{۲k} z^{۲k} + \sum_{k=۲}^{n}((۲k-۱)a_{۲k-۱} - (۲\gamma - ۱)B_{۲k-۱})z^{۲k-۱}\right) z\phi(z)$$

$$= \sum_{k=۲}^{n}(B_{۲k-۱} - (۲k-۱)a_{۲k-۱})z^{۲k-۱} - \sum_{k=۱}^{n} ۲ka_{۲k} z^{۲k} + \sum_{k=۲n+۱}^{\infty} c_k z^k.$$

حال با در نظر گرفتن مربع قدرمطلق نامساوی بالا و با توجه به اینکه $|z\phi(z)| \leq |z| < 1$ است، داریم:

$$\left|\sum_{k=2}^{n}(B_{2k-1}-(2k-1)a_{2k-1})z^{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}2ka_{2k}z^{2k}+\sum_{k=2n+1}^{\infty}c_kz^k\right|^2$$
$$<\left|(2-2\gamma)z+\sum_{k=1}^{n-1}2ka_{2k}z^{2k}+\sum_{k=2}^{n}((2k-1)a_{2k-1}-(2\gamma-1)B_{2k-1})z^{2k-1}\right|^2.$$

با انتگرال‌یابی در نامساوی بالا روی $|z| = r < 1$ نتیجه می‌دهد:

$$\sum_{k=2}^{n}|B_{2k-1}-(2k-1)a_{2k-1}|^2r^{4k-2}+\sum_{k=1}^{n}|2ka_{2k}|^2r^{4k}+\sum_{k=2n+1}^{\infty}|c_k|^2r^{2k}$$
$$<|2-2\gamma|^2r^2+\sum_{k=1}^{n-1}|2ka_{2k}|^2r^{4k}+\sum_{k=2}^{n}|(2k-1)a_{2k-1}-(2\gamma-1)B_{2k-1}|^2r^{4k-2}$$

در رابطه بالا هرگاه $r \to 1$ داریم:

$$\sum_{k=2}^{n}|B_{2k-1}-(2k-1)a_{2k-1}|^2+\sum_{k=1}^{n}|2ka_{2k}|^2<|2-2\gamma|^2+\sum_{k=1}^{n-1}|2ka_{2k}|^2$$
$$+\sum_{k=2}^{n}|(2k-1)a_{2k-1}-(2\gamma-1)B_{2k-1}|^2$$

بنابراین:

$$4n^2|a_{2n}|^2-4(1-\gamma)^2\leq\sum_{k=2}^{n}(|(2k-1)a_{2k-1}-(2\gamma-1)B_{2k-1}|^2-|B_{2k-1}-(2k-1)a_{2k-1}|^2)$$
$$\leq 2(1-\gamma)\sum_{k=2}^{n}(2(2k-1)|a_{2k-1}B_{2k-1}|+(|2\gamma-1|+1)|B_{2k-1}|^2).$$

بدین ترتیب اثبات قضیه کامل است. □

قضیه ۶.۲.۲. فرض کنید $0 \leq \gamma < 1$ و $f(z) \in K_s(\gamma)$ باشد، آنگاه

$$\frac{1-(1-2\gamma)r}{(1+r)(1+r^2)}\leq|f'(z)|\leq\frac{1+(1-2\gamma)r}{(1-r)(1-r^2)}\qquad(|z|=r<1).\tag{۳۲.۲}$$

اثبات. چون $f(z)\in K_s(\gamma)$، $g(z)\in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود است به‌طوری که تابع

$$p(z)=\frac{zf'(z)}{G(z)} \tag{۳۳.۲}$$

قسمت حقیقی آن بزرگتراز γ است و $p(۰)=۱$. پس به موجب لم (۱۳.۱.۱):

$$\frac{۱-(۱-۲\gamma)r}{۱+r}\le |p(z)|\le \frac{۱+(۱-۲\gamma)r}{۱-r}\qquad (|z|=r<۱). \tag{۳۴.۲}$$

چون $G(z)\in S^{(۲)}$، به موجب قضیه (۱۲.۲.۱):

$$\frac{r}{۱+r^۲}\le |G(z)|\le \frac{r}{۱-r^۲}. \tag{۳۵.۲}$$

باجایگذاری (۳۳.۲) در (۳۴.۲) و استفاده از (۳۵.۲)، قضیه ثابت می‌شود. □

قضیه ۷.۲.۲. فرض کنید $۰\le\gamma<۱$ و $f(z)\in K_s(\gamma)$ باشد، انگاه

$$(۱-\gamma)\ln\frac{۱+r}{\sqrt{۱+r^۲}}+\gamma arctan r\le |f(z)|\le \frac{\gamma}{۲}\ln\frac{۱+r}{۱-r}+(۱-\gamma)\frac{r}{۱-r}\quad (|z|=r<۱). \tag{۳۶.۲}$$

اثبات. بنا به قضیه (۶.۲.۲) برای $|z|=q<۱$ داریم: $|f'(z)|\le\frac{۱+(۱-۲\gamma)q}{(۱-q)(۱-q^۲)}$ و با انتگرال‌یابی در امتداد پاره خط مستقیم از ۰تا $z=re^{i\theta}$ بدست می آید:

$$|f(z)|=|\int_۰^z f'(t)dt|\le\int_۰^r |f'(qe^{i\theta})|dq\le\int_۰^r\frac{۱+(۱-۲\gamma)q}{(۱-q)^۲(۱+q)}dq$$
$$=\frac{\gamma}{۲}\ln\frac{۱+r}{۱-r}+(۱-\gamma)\frac{r}{۱-r}.$$

بدین ترتیب طرف راست نامساوی (۳۶.۲) ثابت می‌شود.

برای اثبات طرف چپ نامساوی (۳۶.۲)، کافیست آنرا برای نزدیکترین نقطه $f(z_۰)$ $(|z_۰|=r<۱)$ به مبداثابت کنیم چون برای هر z ای که $|z|=r<۱$ باشد، $|f(z)|\ge|f(z_۰)|$. چون $f(z)\in K_s(\gamma)$ بنا به

تذکر (″۱.۲.۲)، $f(z)$ در U تک ارزاست. بنابراین پاره خط مستقیم از مبدا تا $f(z_\circ)$ تصویرمنحنی ساده ی R در قرص $C_r=\{z:|z|\leq r\}$ می باشد. لذا:

$$|f(z_\circ)|=\int_{f(R)}|d\omega|=\int_R|f^{'}(z)||dz|$$

ازطرفی بنا به قضیه (۶.۲.۲) :

$$\begin{aligned}|f(z_\circ)|=\int_R|f^{'}(z)||dz|&\geq\int_\circ^r\frac{۱-(۱-۲\gamma)q}{(۱-q)^۲(۱+q^۲)}dq\\&=(۱-\gamma)\ln\frac{۱+r}{\sqrt{۱+r^۲}}+\gamma\arctan r.\end{aligned}$$

و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل است. $\square$

۳.۲ رده ی $K_s(\alpha,\beta)$

تعریف ۱.۳.۲. تابع $f(z)\in H$ در رده‌ی $K_s(\alpha,\beta)$ برای مقادیر $\alpha(۱\leq\alpha\leq\circ)$، $\beta(۱\leq\beta<\circ)$ قرار دارد اگر $g(z)\in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $z\in U$، نامساوی زیر برقرار باشد:

$$\left|\frac{z^۲f'(z)}{g(z)g(-z)}+۱\right|<\beta\left|\frac{\alpha z^۲f'(z)}{g(z)g(-z)}-۱\right| \qquad (۳۷.۲)$$

به بیان معادل:

$$\left|\frac{zf^{'}(z)}{G(z)}-۱\right|<\beta\left|\frac{\alpha zf^{'}(z)}{G(z)}+۱\right|.$$

تذکر ′۱.۳.۲ . در حالتی که $\alpha=\beta=۱$ باشد رده‌ی K_s بدست می آید. بنابراین $K_s(\alpha,\beta)$ تعمیمی از K_s است.

قضیه ۲.۳.۲. فرض کنید $۱\leq\alpha\leq\circ$، $۱\leq\beta<\circ$ باشد. $f(z)\in K_s(\alpha,\beta)$ اگر و تنها اگر تابع $g\in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود باشد به‌طوری که:

$$\frac{z^۲f'(z)}{-g(z)g(-z)}\prec\frac{۱+\beta z}{۱-\alpha\beta z}\qquad(z\in U). \qquad (۳۸.۲)$$

اثبات. ابتدا فرض کنیم $f(z)\in K_s(\alpha,\beta)$، پس $g(z)\in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود است به‌طوری که (۳۷.۲) برقراراست. لذا:

$$\left|\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}-۱\right|^{۲}<\beta^{۲}\left|\frac{\alpha z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}+۱\right|^{۲}$$

بنابراین:

$$\left|\frac{z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}\right|^{۲}(۱-\alpha^{۲}\beta^{۲})-۲Re\left\{\frac{z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}\right\}(۱+\alpha\beta^{۲})<-۱+\beta^{۲}. \qquad (۳۹.۲)$$

دوحالت برای β و α در نظر گرفته می‌شود:

حالت (۱): $\alpha\neq ۱$ یا $\beta\neq ۱$. در این صورت با تقسیم طرفین (۳۹.۲) به $۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}$و سپس افزودن $(\frac{۱+\alpha\beta^{۲}}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}})^{۲}$ به طرفین آن داریم:

$$\left|\frac{z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}\right|^{۲}-\frac{۲(۱+\alpha\beta^{۲})}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}Re\left\{\frac{z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}\right\}+(\frac{۱+\alpha\beta^{۲}}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}})^{۲}<\frac{\beta^{۲}-۱}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}+(\frac{۱+\alpha\beta^{۲}}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}})^{۲}$$

که نتیجه می‌شود:

$$\left|\frac{z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}-\frac{۱+\alpha\beta^{۲}}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}\right|<\frac{\beta(\alpha+۱)}{(۱-\alpha^{۲}\beta^{۲})}. \qquad (۴۰.۲)$$

از نظرهندسی، (۴۰.۲) گویایی این است که برای هر $z\in U$، مقادیر تابع $K(z)=\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}$ در دیسکی به مرکز $(\frac{۱+\alpha\beta^{۲}}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}},۰)$ و شعاع $\frac{\beta(۱+\alpha)}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}$ قرار دارد. حال تصویر U را تحت تابع $\omega(z)=\frac{۱+\beta z}{۱-\alpha\beta z}$ می‌یابیم. نگاشت‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$e(z)=۱-\alpha\beta z,\quad h(z)=\frac{۱}{۱-\alpha\beta z},\quad \omega(z)=\frac{-۱}{\alpha}+(۱+\frac{۱}{\alpha})g(z)$$

تابع $e(z)$ دیسک U را به دایره ای به مرکز $(۱,۰)$ و شعاع $\alpha\beta$ می‌نگارد. $h(z)$ دیسک فوق را به دیسکی به مرکز $(\frac{۱}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}},۰)$ و شعاع $\frac{\alpha\beta}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}$ می‌نگارد و در نهایت تابع $\omega(z)$ دیسک فوق را به ناحیه زیر تصویر می‌کند

$$\left|\frac{۱+\beta z}{۱-\alpha\beta z}-\frac{۱+\alpha\beta^{۲}}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}\right|<\frac{\beta(\alpha+۱)}{(۱-\alpha^{۲}\beta^{۲})}. \tag{۴۱.۲}$$

از (۴۰.۲) و (۴۱.۲) نتیجه می‌شود:

$$K(U)\subset\omega(U).$$

حال از آنجایی که $K(۰)=\omega(۰)=۱$ و $\omega(z)$ در U تک ارز است، بنا به تعریف (۱۸.۱.۱):

$$\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}\prec\omega(z)=\frac{۱+\beta z}{۱-\alpha\beta z}.$$

حالت (۲): $\alpha=\beta=۱$. در این صورت داریم:

$$\left|\frac{z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}+۱\right|<\left|\frac{z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}-۱\right|. \tag{۴۲.۲}$$

(۴۲.۲) مبین آن است که برای هر $z\in U$:

$$Re\{K(z)\}=Re\left\{\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}\right\}>۰.$$

از آنجایی که تابع $\omega(z)=\frac{۱+z}{۱-z}$ دیسک U را به نیم صفحه $Re\{\omega(z)\}>۰$، می نگارد، نتیجه می‌شود:

$$K(U)\subset\omega(U). \tag{۴۳.۲}$$

از رابطه‌ی (۴۳.۲) و با توجه به اینکه $K(۰)=\omega(۰)$ و $\omega(z)$ در U تک ارز است، بنا به تعریف (۱۸.۱.۱):

$$\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}\prec\frac{۱+z}{۱-z}.$$

به عکس: فرض کنیم $g(z)\in S^{*}(\frac{۱}{۲})$ و (۳۸.۲) برقرار باشد. پس بنا به تعریف (۱۸.۱.۱)، $\omega(z)\in E$ موجود

است به‌طوری که :

$$\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}=\frac{۱+\beta\omega(z)}{۱-\alpha\beta\omega(z)}$$

به بیان معادل

$$\frac{z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}+۱=\beta\omega\left(\frac{\alpha z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}-۱\right). \qquad (۴۴.۲)$$

با توجه به اینکه $|\omega(z)|<۱$ و رابطه‌ی (۴۴.۲)، نتیجه می‌شود:

$$\left|\frac{z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}+۱\right|<\beta\left|\frac{\alpha z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}-۱\right|.$$

بنابراین $f(z)$ به رده‌ی $K_s(\alpha,\beta)$ متعلق است. $\square$

تذکر ۲.۳.۲′. چون برای هر $z\in U$، $Re\{\frac{۱+\beta z}{۱-\alpha\beta z}\}>۰$ است با توجه به رابطه‌ی (۳۸.۲) و تعریف (۱۸.۱.۱) نتیجه می‌شود:

$$Re\left\{\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}\right\}>۰.$$

حال از آنجایی که $G(z)=\frac{-g(z)g(-z)}{z}$ ستاره گون است، از تعریف (۱.۶.۱) نتیجه می‌شود اگر $f(z)\in K_s(\alpha,\beta)$ باشد، آنگاه $f(z)$ تقریبا محدب است.

اثبات لم زیر را می‌توان در [۹] مشاهده نمود.

لم ۳.۳.۲. فرض کنید $f(z)$ در U تحلیلی باشد و $f(۰)=۱$. اگر برای مقادیر $\alpha(۰\le\alpha\le۱)$، $\beta(۰<\beta\le۱)$ نامساوی

$$\left|\frac{۱-f(z)}{۱+\alpha f(z)}\right|<\beta \qquad (z\in U)$$

برقرار باشد. آنگاه تابع $\phi(z)$ ای موجود است به‌طوری که در U تحلیلی است،

$$|\phi(z)|\le\beta$$

و

$$f(z)=\frac{1-z\phi(z)}{1+\alpha z\phi(z)}.$$

لم زیر در[1] ثابت شده است.

لم ۴.۳.۲. فرض کنید توابع $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$ و $k(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n$ در S باشند و به‌طوری برای مقادیر $\beta(0<\beta\leq 1)$، $\alpha(0\leq\alpha\leq 1)$ نامساوی

$$\left|\frac{zf'(z)}{k(z)}-1\right|<\beta\left|\frac{\alpha zf'(z)}{k(z)}+1\right|, \tag{۴۵.۲}$$

برای هر $z\in U$ برقرار باشد. آنگاه برای $n=2,3,\ldots$ داریم:

$$|na_n-c_n|^2\leq 2(\alpha\beta^2+1)\sum_{k=1}^{n-1}k|a_k||c_k|. \tag{۴۶.۲}$$

اثبات. چون برای $0<|z|<1$، $k(z)\neq 0$، تابع

$$K(z)=\frac{zf'(z)}{k(z)}=\frac{1+\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^{n-1}} \tag{۴۷.۲}$$

در U تحلیلی است و $K(0)=1$. با جایگذاری $K(z)$ در (۴۵.۲) بدست می‌آید:

$$\left|\frac{K(z)-1}{1+\alpha K(z)}\right|<\beta. \tag{۴۸.۲}$$

پس به موجب لم (۳.۳.۲)، تابع $\phi(z)$ ای موجود است به‌طوری که در U تحلیلی است،

$$|\phi(z)|\leq\beta$$

و

$$K(z)=\frac{1-z\phi(z)}{1+\alpha z\phi(z)}. \tag{۴۹.۲}$$

چون $\phi(z)$ تحلیلی است، می‌توان نوشت:

$$z\phi(z) = t_۱ z + t_۲ z^۲ + \dots . \tag{۵۰.۲}$$

از (۴۷.۲) و (۴۹.۲) بدست می‌آید:

$$[\alpha z f'(z) + k(z)]z\phi(z) = k(z) - zf'(z)$$

درنتیجه:

$$\left[(\alpha+۱)z + \alpha\sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^n + \sum_{n=۲}^{\infty} c_n z^n\right]\left[\sum_{n=۱}^{\infty} t_n z^n\right] = \sum_{n=۲}^{\infty} c_n z^n - \sum_{n=۲}^{\infty} na_n z^n$$

با برابرگرفتن ضرایب نتیجه می‌شود:

$$c_n - na_n = (\alpha+۱)t_{n-۱} + (\alpha ۲a_۲ + c_۲)t_{n-۲} + \dots + (\alpha(n-۱)a_{n-۱} + c_{n-۱})t_۱$$

بنابراین، برای هر $n \geq ۲$ می توان نوشت:

$$\left[(\alpha+۱)z + \sum_{k=۲}^{n-۱}(\alpha k a_k + c_k)z^k\right] z\phi(z) = \sum_{k=۲}^{n}(c_k - ka_k)z^k. \tag{۵۱.۲}$$

با گرفتن مجذور قدرمطلق (۵۱.۲) و بکار بردن $|z\phi(z)| \leq \beta|z| < \beta$، بدست می آید:

$$\left|\sum_{k=۲}^{n}(c_k - ka_k)z^k\right|^۲ < \beta^۲\left|(\alpha+۱)z + \sum_{k=۲}^{n-۱}(\alpha k a_k + c_k)z^k\right|^۲. \tag{۵۲.۲}$$

با انتگرال‌یابی در (۵۲.۲) روی $|z| = r < ۱$ نتیجه می‌دهد:

$$\sum_{k=۲}^{n}|ka_k - c_k|^۲ r^{۲k} < \beta^۲\left[(\alpha+۱)^۲ r^۲ + \sum_{k=۲}^{n-۱}|\alpha k a_k + c_k|^۲ r^{۲k}\right]$$

در رابطه‌ی بالا هرگاه $r \longrightarrow ۱$ داریم:

$$|na_n - c_n|^۲ < \beta^۲(۱+\alpha)^۲ + \beta^۲\sum_{k=۲}^{n-۱}|\alpha k a_k + c_k|^۲ - \sum_{k=۲}^{n-۱}|ka_k - c_k|^۲$$

$$\leq \beta^{2}(1+\alpha)^{2}+(\alpha^{2}\beta^{2}-1)\sum_{k=2}^{n-1}k^{2}|a_k|^{2}+(\beta^{2}-1)\sum_{k=2}^{n-1}|c_k|^{2}+2(\alpha\beta^{2}+1)\sum_{k=2}^{n-1}k|a_k||c_k|$$

چون‌که $1 \leq \alpha \leq 0$ و $1 \leq \beta < 0$ است. نتیجه می‌شود: $0 \leq 1 - \alpha^{2}\beta^{2}$، $0 \leq 1 - \beta^{2}$ و $\beta^{2}(1+\alpha)^{2} < 2(\alpha\beta^{2}+1)$. بنابراین:

$$|na_n - c_n|^{2} < \beta^{2}(1+\alpha)^{2}+(\alpha^{2}\beta^{2}-1)\sum_{k=2}^{n-1}k^{2}|a_k|^{2}+(\beta^{2}-1)\sum_{k=2}^{n-1}|c_k|^{2}+2(\alpha\beta^{2}+1)\sum_{k=2}^{n-1}k|a_k||c_k|$$

$$\leq 2(\alpha\beta^{2}+1)\sum_{k=1}^{n-1}k|a_k||b_k|.$$

بدین ترتیب اثبات لم کامل است. $\square$

قضیه ۵.۳.۲. فرض کنید $1 \leq \beta < 0$، $1 \leq \alpha \leq 0$، $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در H و $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ در $S^*(\frac{1}{2})$ باشد و به‌طوری که نامساوی (۳۷.۲) برقرارباشد. آنگاه برای $n = 2, \ldots$ داریم:

$$|na_n - B_{2n-1}|^{2} \leq 2(1+\alpha\beta^{2})\sum_{k=1}^{n-1}k\,|a_k|\,|B_{2k-1}|. \tag{۵۳.۲}$$

اثبات. چون تابع $G(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} B_{2n-1}z^{2n-1}$ ستاره گون است و بنا به تذکر (′۲.۳.۲)، $f(z)$ تقریبا محدب است. بنابراین $f(z)$ و $G(z)$ به رده‌ی S متعلق‌اند. از عبارت معادل (۳۷.۲) :

$$\left|\frac{zf'(z)}{G(z)} - 1\right| < \beta\left|\frac{\alpha zf'(z)}{G(z)} + 1\right|.$$

پس با بکاربردن قضیه (۴.۳.۲) داریم : $|na_n - B_{2n-1}|^{2} \leq 2(1+\alpha\beta^{2})\sum_{k=1}^{n-1}k|a_k||B_{2k-1}|$. $\square$

قضیه ۶.۳.۲. فرض کنید $\alpha(1 \leq \alpha \leq 0)$، $\beta(1 \leq \beta < 0)$، $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ در $S^*(\frac{1}{2})$ و $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در رده‌ی H باشد.اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(1+\alpha\beta)|a_n| + \sum_{n=2}^{\infty}(1+\beta)|B_{2n-1}| \leq (1+\alpha)\beta.$$

آنگاه $f(z) \in K_s(\alpha, \beta)$.

اثبات. قرار دهید:

$$\Lambda = \left|zf^{'}(z) - \frac{-g(z)g(-z)}{z}\right| - \beta\left|\alpha zf^{'}(z) + \frac{-g(z)g(-z)}{z}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=۱}^{\infty} na_n z^n - \sum_{n=۲}^{\infty} B_{۲n-۱}z^{۲n-۱}\right| - \beta\left|\alpha z + \sum_{n=۲}^{\infty} n\alpha a_n z^n + z + \sum_{n=۲}^{\infty} B_{۲n-۱}z^{۲n-۱}\right|$$

ازتعریف (۱.۳.۲) برای اثبات قضیه کافیست نشان دهیم $\Lambda < ۰$

$$\Lambda \leq \sum_{n=۲}^{\infty} n|a_n||z|^n + \sum_{n=۲}^{\infty} |B_{۲n-۱}||z|^{۲n-۱} - \beta[(۱+\alpha)|z| - \sum_{n=۲}^{\infty} n\alpha|a_n||z|^n - \sum_{n=۲}^{\infty} |B_{۲n-۱}||z|^{۲n-۱}]$$

$$< [-(۱+\alpha)\beta + \sum_{n=۲}^{\infty} n(۱+\alpha\beta)|a_n| + \sum_{n=۲}^{\infty}(۱+\beta)|B_{۲n-۱}|]|z|$$

بنابراین $\Lambda < ۰$ اگر

$$-(۱+\alpha)\beta + \sum_{n=۲}^{\infty} n(۱+\alpha\beta)|a_n| + \sum_{n=۲}^{\infty}(۱+\beta)|B_{۲n-۱}| < ۰$$

که رابطه فوق معادل است با $\sum_{n=۲}^{\infty} n(۱+\alpha\beta)|a_n| + \sum_{n=۲}^{\infty}(۱+\beta)|B_{۲n-۱}| \leq (۱+\alpha)\beta$ و این رابطه نیز بنا به فرض درست است. $\square$

۴.۲ رده ی $K_s^{(k)}(\alpha,\beta)$

تعریف ۱.۴.۲. تابع $f(z) \in H$ در رده‌ی $K_s^{(k)}(\alpha,\beta)$ برای مقادیر $\alpha(۱ \leq \alpha \leq ۰)$، $\beta(۱ \leq \beta < ۰)$، $k(k \in \mathbb{N})$ قرار دارد اگر $h(z) \in S^*(\frac{k-۱}{k})$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $z \in U$، نامساوی

$$\left|\frac{z^k f^{'}(z)}{h_k(z)} - ۱\right| < \beta\left|\frac{\alpha z^k f^{'}(z)}{h_k(z)} + ۱\right|. \qquad (۵۴.۲)$$

برقرار باشد. به‌طوری که $h_k(z)$ به صورت زیرتعریف می‌شود.

$$h_k(z) = \Pi_{v=۰}^{k-۱}\varepsilon^{-v}h(\varepsilon^v z) \quad \varepsilon^k = ۱.$$

تذکر ۱.۴.۲′ در حالتی که ۲ $k=$ باشد رده‌ی $K_s(\alpha,\beta)$ بدست می‌آید. بنابراین $K_s^{(k)}(\alpha,\beta)$ تعمیمی از $K_s(\alpha,\beta)$ است.

قضیه زیرحالت کلی قضیه (۲.۳.۲) است.

قضیه ۲.۴.۲. [۱۹] فرض کنید $\alpha(0\leq\alpha\leq1)$، $\beta(0<\beta\leq1)$، $k(k\in\mathbb{N})$ باشد. $f(z)\in K_s^{(k)}(\alpha,\beta)$ اگر و تنها اگر $h(z)\in S^*(\frac{k-1}{k})$ موجود باشد به‌طوری که

$$\frac{z^kf'(z)}{h_k(z)}\prec\frac{1+\beta z}{1-\alpha\beta z}\qquad(z\in U)\tag{۵۵.۲}$$

که $h_k(z)=\Pi_{v=0}^{k-1}\varepsilon^{-v}h(\varepsilon^vz)$.

تذکر ۲.۴.۲′. چون برای هر $z\in U$ ، $Re\{\frac{1+\beta z}{1-\alpha\beta z}\}>0$ است با توجه به رابطه‌ی (۵۵.۲) و تعریف (۱۸.۱.۱) نتیجه می‌شود:

$$Re\left\{\frac{z^kf'(z)}{h_k(z)}\right\}>0.\tag{۵۶.۲}$$

قضیه ۳.۴.۲. [۱۹] فرض کنید $h(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}c_nz^n\in S^*(\frac{k-1}{k})$ باشد ، انگاه $\frac{h_k(z)}{z^{k-1}}\in S^*$.

تذکر ۳.۴.۲′. اگر $f(z)\in K_s^{(k)}(\alpha,\beta)$ باشد، ازنامساوی (۵۶.۲) و قضیه (۳.۴.۲) نتیجه می‌شود $f(z)$ تقریبا محدب است.

لم زیر توسط **لیو** [1] در [۱۰] ثابت شده است.

لم ۴.۴.۲. فرض کنید $-1\leq B_2\leq B_1<A_1\leq A_2\leq1$ باشد، آنگاه

$$\frac{1+A_1z}{1+B_1z}\prec\frac{1+A_2z}{1+B_2z}.$$

[1] Liu

قضیه ۵.۴.۲. فرض کنید $k\in\mathbb{N}$، $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$ و $0 < \beta_1 \le \beta_2 \le 1$ باشد، آنگاه

$$K_s^{(k)}(\alpha_1,\beta_1) \subset K_s^{(k)}(\alpha_2,\beta_2). \tag{۵۷.۲}$$

اثبات. فرض کنیم $f(z) \in K_s^{(k)}(\alpha_1,\beta_1)$ باشد، بنا به قضیه **(۲.۴.۲)**، $h(z) \in S^*(\frac{k-1}{k})$ موجود است به طوری که:

$$\frac{z^k f'(z)}{h_k(z)} \prec \frac{1+\beta_1 z}{1-\alpha_1\beta_1 z}. \tag{۵۸.۲}$$

چون‌که $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$ و $0 < \beta_1 \le \beta_2 \le 1$، نتیجه می‌شود:

$$-1 \le -\alpha_2\beta_2 \le -\alpha_1\beta_1 < \beta_1 < \beta_2 \le 1.$$

بنابراین از لم (۴.۴.۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{1+\beta_1 z}{1-\alpha_1\beta_1 z} \prec \frac{1+\beta_2 z}{1-\alpha_2\beta_2 z}. \tag{۵۹.۲}$$

(۵۸.۲) و (۵۹.۲) نتیجه می‌دهد:

$$\frac{z^k f'(z)}{h_k(z)} \prec \frac{1+\beta_2 z}{1-\alpha_2\beta_2 z}.$$

بنابراین $f(z) \in K_s^{(k)}(\alpha_2,\beta_2)$ و اثبات قضیه کامل است.

□

قضیه ۶.۴.۲. فرض کنید $k \in N$، $0 \le \alpha \le 1$، $0 < \beta \le 1$، $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در H و $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ در $S^*(\frac{k-1}{k})$ باشد. اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(1+\alpha\beta)|a_n| + \sum_{n=2}^{\infty}(1+\beta)|D_n| \le (1+\alpha)\beta$$

آنگاه $f(z) \in K_s^{(k)}(\alpha,\beta)$. به‌طوری که

$$\frac{h_k(z)}{z^{k-1}} = z + \sum_{n=2}^{\infty} D_n z^n.$$

اثبات. قرار دهید:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \left| zf'(z) - \frac{h_k(z)}{z^{k-1}} \right| - \beta \left| \alpha z f'(z) + \frac{h_k(z)}{z^{k-1}} \right| \\ &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} n a_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} D_n z^n \right| - \beta \left| (1+\alpha) z + \sum_{n=2}^{\infty} n\alpha a_n z^n + \sum_{n=2}^{\infty} D_n z^n \right|\end{aligned}$$

بنا به تعریف (۱.۴.۲) کافیست نشان دهیم $\Lambda < 0$

$$\begin{aligned}\Lambda &\le \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^n + \sum_{n=2}^{\infty} |D_n||z|^n - \beta[(1+\alpha)|z| - \sum_{n=2}^{\infty} n\alpha|a_n||z|^n - \sum_{n=2}^{\infty} |D_n||z|^n] \\ &< [-(1+\alpha)\beta + \sum_{n=2}^{\infty} n(1+\alpha\beta)|a_n| + \sum_{n=2}^{\infty}(1+\beta)|D_n|]|z|\end{aligned}$$

بنابراین $\Lambda < 0$ اگر

$$[-(1+\alpha)\beta + \sum_{n=2}^{\infty} n(1+\alpha\beta)|a_n| + \sum_{n=2}^{\infty}(1+\beta)|D_n|] \le 0$$

که عبارت فوق معادل است با $\sum_{n=2}^{\infty} n(1+\alpha\beta)|a_n| + \sum_{n=2}^{\infty}(1+\beta)|D_n| \le (1+\alpha)\beta$ و این رابطه نیزبنا به فرض درست است. □

قضیه زیر حالت کلی‌تر قضیه (۵.۳.۲) است.

قضیه ۷.۴.۲. [۱۹] فرض کنید $0 < \beta \le 1$، $0 \le \alpha \le 1$، $k \in N$، $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در H و $h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} c_n z^n$ در $S^*(\frac{k-1}{k})$ باشد و به‌طوری که (۵۴.۲) برقرار باشد. آنگاه برای $n = 2, 3, \dots$ داریم:

$$|na_n - D_n|^2 \le 2(1+\alpha\beta^2) \sum_{k=1}^{n-1} k\,|a_k|\,|D_k|.$$

به‌طوری که :

$$\frac{h_k(z)}{z^{k-1}} = z + \sum_{n=2}^{\infty} D_n z^n.$$

۵.۲ رده ی $K_s(\lambda, A, B)$

تعریف ۱.۵.۲. تابع $f(z) \in H$ در رده‌ی $K_s(\lambda, A, B)$ $(-1 \leq B < A \leq 1, 0 \leq \lambda \leq 1)$ قراردارد اگر $g \in S^*(\frac{1}{2})$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $z \in U$، رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\frac{z^2 f'(z) + \lambda z^3 f''(z)}{-g(z)g(-z)} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz} \tag{۶۰.۲}$$

به بیان معادل:

$$\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{G(z)} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz}.$$

تذکر ′۵.۱.۲. زمانی که $\lambda = 0$، $A = \beta$، $B = -\alpha\beta$ برای $\alpha(1 \leq \alpha \leq 0)$، $\beta(1 \leq \beta < 0)$. رده‌ی $K_s(\alpha, \beta)$ بدست می‌آید. بنابراین $K_s(\lambda, A, B)$ تعمیمی از $K_s(\alpha, \beta)$ است.

لم ۲.۵.۲. [۲۱] فرض کنید $f(z)$ در رده‌ی K باشد و $\gamma \geq 0$. آنگاه

$$F(z) = \frac{1 + \gamma}{z^\gamma} \int_0^z f(t) t^{\gamma - 1} dt$$

در K قرار دارد.

قضیه ۳.۵.۲. فرض کنید $-1 \leq B < A \leq 1$ و $1 \leq \lambda \leq 0$ باشد. اگر $f(z) \in K_s(\lambda, A, B)$، آنگاه $f(z)$ تقریبا محدب است.

اثبات. قرار دهید:

$$F(z) = (1 - \lambda) f(z) + \lambda z f'(z) \tag{۶۱.۲}$$

در نتیجه:

$$F^{'}(z) = f^{'}(z) + \lambda z f^{''}(z). \qquad (۶۲.۲)$$

چون $f(z) \in K_s(\lambda, A, B)$، $g(z) \in S^*(\frac{1}{2})$ موجود است به‌طوری که

$$\frac{zf^{'}(z) + \lambda z^2 f^{''}(z)}{G(z)} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz}.$$

باجایگذاری (۶۲.۲) در رابطه فوق بدست می‌آید:

$$\frac{zF^{'}(z)}{G(z)} \prec \frac{1 + Az}{1 + Bz}. \qquad (۶۳.۲)$$

تابع $F(z)$ تقریبا محدب است. زیرا برای هر $z \in U$، $Re\left\{\frac{1+Az}{1+Bz}\right\} > 0$ است، از (۶۳.۲) و تعریف (۱۸.۱.۱) نتیجه می‌شود:

$$Re\left\{\frac{zF^{'}(z)}{G(z)}\right\} > 0.$$

با توجه به اینکه $G(z)$ ستاره گون است، ازتعریف (۱.۶.۱) نتیجه می‌شود $F(z)$ تقریبا محدب است.

حالت‌های مختلف λ را در نظر می‌گیریم و نشان می‌دهیم $f(z)$ تقریبا محدب است.

حالت (۱): باقرار دادن $\lambda = 0$ در (۶۱.۲) و با توجه به اینکه $F(z)$ تقریبا محدب است. نتیجه می‌گیریم $f(z)$ نیز تقریبا محدب است.

حالت (۲): اگر $0 < \lambda \leq 1$، $1 - \frac{1}{\lambda} \leq 0$. از حل معادله (۶۱.۲) بدست می‌آید:

$$f(z) = \frac{1}{\lambda} z^{1-\frac{1}{\lambda}} \int_0^z F(t) t^{\frac{1}{\lambda}-2} dt.$$

با توجه به اینکه $F(z)$ تقریبا محدب است با بکاربردن لم (۲.۵.۲)، نتیجه می‌شود $f(z)$ تقریبامحدب است.

بدین ترتیب برهان قضیه کامل است. $\square$

قضیه ۴.۵.۲. فرض کنید $0 \le \lambda \le 1$ و $-1 \le B_2 \le B_1 < A_1 \le A_2 \le 1$ باشد، آنگاه

$$K_s(\lambda, A_1, B_1) \subset K_s(\lambda, A_2, B_2). \tag{۶۴.۲}$$

اثبات. فرض کنید $f(z)$ در $K_s(\lambda, A_1, B_1)$ باشد. پس $g \in S^*(\frac{1}{2})$ موجود است به‌طوری که برای هر $z \in U$:

$$\frac{z^2 f'(z) + \lambda z^3 f''(z)}{-g(z)g(-z)} \prec \frac{1 + A_1 z}{1 + B_1 z}. \tag{۶۵.۲}$$

چون $-1 \le B_2 \le B_1 < A_1 \le A_2 \le 1$ ، به موجب لم (۴.۴.۲):

$$\frac{1 + A_1 z}{1 + B_1 z} \prec \frac{1 + A_2 z}{1 + B_2 z}. \tag{۶۶.۲}$$

از (۶۵.۲) و (۶۶.۲) نتیجه می‌شود:

$$\frac{z^2 f'(z) + \lambda z^3 f''(z)}{-g(z)g(-z)} \prec \frac{1 + A_2 z}{1 + B_2 z}$$

بنابراین $f(z) \in K_s(\lambda, A_2, B_2)$. □

لم زیر توسط **روگوسینسکی** [۲] در [۱۳] ثابت شده است.

لم ۵.۵.۲. فرض کنید $f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ در دیسک U تحلیلی و $h(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ در دیسک U تحلیلی و محدب باشد و به‌طوری که $f \prec h$. آنگاه

$$|a_k| \le |c_1| \quad (k \in \mathbb{N}).$$

[۲] Rogosinski

قضیه ۶.۵.۲. فرض کنید $-1 \leq B < A \leq 1$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ باشد. اگر $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در $K_s(\lambda, A, B)$ باشد، انگاه

$$|a_{2n}| \leq \frac{n(A-B)}{2n[1+(2n-1)\lambda]} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{۶۷.۲}$$

و

$$|a_{2n+1}| \leq \frac{n(A-B)+1}{(2n+1)(2n\lambda+1)} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{۶۸.۲}$$

اثبات. چون $f \in K_s(\lambda, A, B)$، $g(z) \in S^*(\frac{1}{2})$ موجود است به‌طوری که

$$\frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{G(z)} \prec \frac{1+Az}{1+Bz} \qquad (z \in U). \tag{۶۹.۲}$$

چون برای $0 < |z| < 1$، $G(z) \neq 0$، تابع

$$p(z) = \frac{zf'(z)+\lambda z^2 f''(z)}{G(z)} = \frac{1+\sum_{n=2}^{\infty}(n+\lambda n(n-1))a_n z^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty} B_{2n-1} z^{2n-2}} \tag{۷۰.۲}$$

در U تحلیلی است و می توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n. \tag{۷۱.۲}$$

چون برای $|z| < 1$، $1 + Bz \neq 0$، تابع $K(z) = \frac{1+Az}{1+Bz}$ در U تحلیلی است و می توان آنرا به صورت زیر نوشت :

$$K(z) = 1 + (A-B)z + \dots.$$

همچنین $K(z)$ دیسک U را به میدان محدب تصویر می‌کند. پس به موجب لم (۵.۵.۲):

$$|c_n| \leq (A-B) \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{۷۲.۲}$$

از (۷۰.۲) و (۷۱.۲) بدست می‌آید:

$$(1+\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n)(1+\sum_{n=2}^{\infty} B_{2n-1} z^{2n-1}) = 1+\sum_{n=2}^{\infty}(n+\lambda n(n-1))a_n z^{n-1}$$

با برابرگرفتن ضرایب نتیجه می‌شود:

$$2n[1+(2n-1)\lambda]a_{2n} = c_{2n-1}+c_{2n-3}B_3+c_{2n-5}B_5\ldots+c_1 B_{2n-1} \qquad (73.2)$$

و

$$(2n+1)(1+2n\lambda)a_{2n+1} = c_{2n}+c_{2n-2}B_3+c_{2n-4}B_5+\ldots+c_2 B_{2n-1}+B_{2n+1}. \qquad (74.2)$$

با بکاربردن نامساوی مثلث در (۷۳.۲) و(۷۴.۲) و استفاده ازکران (۷۲.۲) بدست می‌آید:

$$2n[1+(2n-1)\lambda]|a_{2n}| \leq (A-B)[1+B_3+B_5+\ldots+B_{2n-1}] \qquad (75.2)$$

و

$$(2n+1)(1+2n\lambda)|a_{2n+1}| \leq (A-B)[1+B_3+B_5+\ldots+B_{2n-1}+B_{2n+1}] \qquad (76.2)$$

چون $G(z) = z+\sum_{n=2}^{\infty} B_{2n-1} z^{2n-1}$ ستاره گون است و $B_2 = 0$. به موجب قضیه (۶.۳.۱) برای $n = 2,\ldots$ داریم :

$$|B_{2n-1}| \leq 1. \qquad (77.2)$$

از (۷۵.۲) و (۷۶.۲) و (۷۷.۲) نتیجه می‌شود:

$$2n(1+(2n-1)\lambda)|a_{2n}| \leq n(A-B) \Longrightarrow |a_{2n}| \leq \frac{n(A-B)}{2n[1+(2n-1)\lambda]}$$

و

$$(2n+1)(1+2n\lambda)|a_{2n+1}| \leq n(A-B)+1 \Longrightarrow |a_{2n+1}| \leq \frac{n(A-B)+1}{(2n+1)(2n\lambda+1)}.$$

بدین ترتیب اثبات قضیه پایان می‌یابد. □

قضیه ۷.۵.۲. (پوشش) فرض کنید $f(z) \in K_s(\lambda, A, B)$، آنگاه U تحت تابع $f(z)$ به میدانی نگاشته می‌شود که شامل دیسک باز $|\omega| < r_1$ به‌طوری که:

$$r_1 = \frac{2(1+\lambda)}{A - B + 4(1+\lambda)}.$$

اثبات. فرض کنید ω_0 عدد مختلط دلخواهی باشد به طوری که برای هر $z \in U$، $f(z) \neq \omega_0$. برای اثبات قضیه کافیست نشان دهیم $|\omega_0| \geq r_1$.

نشان می‌دهیم $\omega_0 \neq 0$. فرض کنید $\omega_0 = 0$ (فرض خلف)، چون $f(0) = 0$ بنابراین $\omega_0 = f(0) = 0$ که این تناقض است. بنابراین $\omega_0 \neq 0$.

چون $f(z) \neq \omega_0$، تابع

$$g(z) = \frac{\omega_0 f(z)}{\omega_0 - f(z)}$$

در U تحلیلی است و می‌توان آنرا به صورت زیر نوشت:

$$g(z) = z + (a_2 + \frac{1}{\omega_0})z^2 + \dots.$$

چون $f(z) \in K_s(\lambda, A, B)$ ، به موجب قضیه (۳.۵.۲)، $f(z)$به رده‌ی S تعلق دارد. لذا $g(z)$ نیزمتعلق به S است. بابکاربردن لم (۳.۲.۱) برای $g(z)$ داریم:

$$|a_2 + \frac{1}{\omega_0}| \leq 2$$

پس

$$|\frac{1}{\omega_0}| - |a_2| \leq 2. \tag{۷۸.۲}$$

چون $f(z) \in K_s(\lambda, A, B)$ بنا به قضیه (۶.۵.۲):

$$|a_2| \leq \frac{A - B}{2(1+\lambda)}. \tag{۷۹.۲}$$

از (۷۸.۲) و (۷۹.۲) نتیجه می‌شود:

$$-۲ + |\frac{۱}{\omega_۰}| \leq |a_۲| \leq \frac{A-B}{۲(۱+\lambda)}$$

بنابراین :

$$|\frac{۱}{\omega_۰}| \leq \frac{A-B+۴(۱+\lambda)}{۲(۱+\lambda)} \Longrightarrow |\omega_۰| \geq \frac{۲(۱+\lambda)}{A-B+۴(۱+\lambda)}.$$

و قضیه ثابت است. □

قضیه ۸.۵.۲. [۱۸] فرض کنید $-۱ \leq B < A \leq ۱$ ، $۰ \leq \lambda \leq ۱$ و $f(z) \in K_s(\lambda, A, B)$ باشد. آنگاه

$$\frac{۱}{r}\int_۰^r \frac{۱-At}{(۱-Bt)(۱+t^۲)}dt \leq |f'(z)| \leq \frac{۱}{r}\int_۰^r \frac{۱+At}{(۱+Bt)(۱-t^۲)}dt.$$

قضیه ۹.۵.۲. [۱۸] فرض کنید $-۱ \leq B < A \leq ۱$ ، $۰ \leq \lambda \leq ۱$ و $f(z) \in K_s(\lambda, A, B)$ باشد.

(۱) : اگر $\lambda = ۰$ ، آنگاه برای $|z| = r < ۱$ داریم :

$$\int_۰^r \frac{۱-At}{(۱-Bt)(۱+t^۲)}dt \leq |f(z)| \leq \int_۰^r \frac{۱+At}{(۱+Bt)(۱-t^۲)}dt.$$

(۲) : اگر $۰ < \lambda \leq ۱$ ، آنگاه برای $|z| = r < ۱$ داریم :

$$\frac{۱}{\lambda}r^{۱-\frac{۱}{\lambda}}\int_۰^r\int_۰^s \frac{۱-At}{(۱-Bt)(۱+t^۲)}dt s^{\frac{۱}{\lambda}-۲}ds \leq |f(z)| \leq \frac{۱}{\lambda}r^{۱-\frac{۱}{\lambda}}\int_۰^r\int_۰^s \frac{۱+At}{(۱+Bt)(۱-t^۲)}dt s^{\frac{۱}{\lambda}-۲}ds.$$

فصل ۳

بررسی رده‌های $\kappa_S(\alpha,\beta,\gamma)$ و $S_S^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma)$

ما در این فصل دو رده‌ی $\kappa_s(\alpha,\beta,\gamma)$ و $S_s^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma)$ را معرفی می‌کنیم و چند قضیه در رابطه با این رده‌ها را بیان و اثبات می‌کنیم.

۱.۳ رده‌ی $\kappa_s(\alpha,\beta,\gamma)$

ما در این بخش، رده ی $K_s(\alpha,\beta)$ که درفصل دوم تعریف شده است راتعمیم می‌دهیم.

تذکر: $g(z)$ و $G(z)$ همان توابع تعریف شده درفصل (۲) می باشند.

تعریف ۱.۱.۳. تابع $f(z)\in H$ دررده‌ی $\kappa_s(\alpha,\beta,\gamma)$ قرار دارد اگر $g(z)\in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $z\in U$:

$$\left|\frac{z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}+۱\right|<\beta\left|\frac{\alpha z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}+۲\gamma-۱\right| \qquad (۱.۳)$$

برای مقدار $\alpha(۰\le\alpha\le۱)$، $\beta(۰<\beta\le۱)$ و $\gamma(۰\le\gamma<\frac{۱}{۲})$.

تذکر ′۱.۱.۳ . در حالتی که $\gamma=۰$ باشد رده‌ی $K_s(\alpha,\beta)$ بدست می‌آید. بنابراین $\kappa_s(\alpha,\beta,\gamma)$ تعمیمی از رده‌ی $K_s(\alpha,\beta)$ است.

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنید $۰\le\alpha\le۱$ ، $۰<\beta\le۱$ و $۰\le\gamma<\frac{۱}{۲}$ باشد. $f(z)\in\kappa_s(\alpha,\beta,\gamma)$ اگر و تنها

اگر $g(z)\in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود باشد به‌طوری که

$$\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}\prec\frac{۱+(۱-۲\gamma)\beta z}{۱-\alpha\beta z}\qquad(z\in U).\tag{۲.۳}$$

اثبات. ابتدا فرض کنیم $f(z)\in\kappa_s(\alpha,\beta,\gamma)$. پس $g(z)\in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود است بطوری‌که نامساوی (۱.۳) برقرار است. لذا :

$$\left|\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}-۱\right|^{۲}<\beta^{۲}\left|\frac{\alpha z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}-۲\gamma+۱\right|^{۲}$$

بنابراین

$$\left|\frac{z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}\right|^{۲}(۱-\alpha^{۲}\beta^{۲})-۲Re\left\{\frac{z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}\right\}(۱+\alpha\beta^{۲}(۱-۲\gamma))<-۱+\beta^{۲}(۱-۲\gamma)^{۲}$$
(۳.۳)

حالت های مختلف β و α را در نظر می‌گیریم :

حالت(۱) : $\alpha\neq ۱$ یا $\beta\neq ۱$. در این صورت با تقسیم طرفین (۳.۳) به $۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}$ و سپس افزودن $\left(\frac{۱+\alpha\beta^{۲}(۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}\right)^{۲}$ به طرفین آن داریم :

$$\left|\frac{z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}\right|^{۲}-\frac{۲(۱+\alpha\beta^{۲}(۱-۲\gamma))}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}Re\left\{\frac{z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}\right\}+\left(\frac{۱+\alpha\beta^{۲}(۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}\right)^{۲}$$
$$<\frac{\beta^{۲}(۱-۲\gamma)^{۲}-۱}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}+\left(\frac{۱+\alpha\beta^{۲}(۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}\right)^{۲}$$

به صورت معادل:

$$\left|\frac{z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}-\frac{۱+\alpha\beta^{۲}(۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}\right|^{۲}<\frac{\beta^{۲}(\alpha+۱-۲\gamma)^{۲}}{(۱-\beta^{۲}\alpha^{۲})^{۲}}$$

بنابراین :

$$\left|\frac{z^{۲}f'(z)}{-g(z)g(-z)}-\frac{۱+\alpha\beta^{۲}(۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}\right|<\frac{\beta(\alpha+۱-۲\gamma)}{(۱-\alpha^{۲}\beta^{۲})} \tag{۴.۳}$$

ازنظرهندسی، (۴.۳) گویایی این مطلب است که برای هر $z\in U$، مقادیرتابع $K(z)=\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}$ در دیسکی به مرکز $(\frac{۱+\alpha\beta^{۲}(۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}},۰)$ و شعاع $\frac{\beta(\alpha+۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}$ قراردارد. تابع $\omega(z)=\frac{۱+\beta(۱-۲\gamma)z}{۱-\alpha\beta z}$ دیسک U را به دیسک زیر می‌نگارد .

$$\left|\omega(z)-\frac{۱+\alpha\beta^{۲}(۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^{۲}\beta^{۲}}\right|<\frac{\beta(\alpha+۱-۲\gamma)}{(۱-\alpha^{۲}\beta^{۲})} \tag{۵.۳}$$

از (۴.۳) و (۵.۳) نتیجه می‌گیریم :

$$K(U)\subset\omega(U).$$

از آنجایی که $K(۰)=\omega(۰)$ و تابع $\omega(z)$ تک ارز است، بنا به تعریف (۱۸.۱.۱):

$$\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}\prec\omega(z)=\frac{۱+\beta(۱-۲\gamma)z}{۱-\alpha\beta z}.$$

به عکس: فرض کنیم $g(z)\in S^*(\frac{۱}{۲})$ موجود باشد و به‌طوری که (۲.۳) برقرارباشد. پس بنا به تعریف (۱۸.۱.۱)، تابع $\omega(z)\in E$ موجود است به‌طوری که:

$$\frac{-z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}=\frac{۱+\beta(۱-۲\gamma)\omega(z)}{۱-\alpha\beta\omega(z)}$$

به صورت معادل:

$$\frac{z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}+۱=\beta\omega\left(\frac{\alpha z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}+۲\gamma-۱\right) \tag{۶.۳}$$

با توجه به اینکه $|\omega(z)|<۱$ و رابطه‌ی (۶.۳)، نتیجه می‌گیریم:

$$\left|\frac{z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}+۱\right|<\beta\left|\frac{\alpha z^{۲}f'(z)}{g(z)g(-z)}+۲\gamma-۱\right|$$

بنابراین $f(z)$ به رده‌ی $\kappa_s(\alpha,\beta,\gamma)$ متعلق است. $\square$

تذکر ۲.۱.۳$'$.چون برای هر $z \in U$، $Re\{\frac{1+\beta(1-2\gamma)z}{1-\alpha\beta z}\} > 0$ است با توجه به رابطه‌ی (۲.۳) و تعریف (۱۸.۱.۱) نتیجه می‌گیریم:

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{-g(z)g(-z)/z}\right\} > 0 \qquad (۷.۳)$$

تذکر ۲.۱.۳$''$. از نامساوی (۷.۳) و با توجه به اینکه تابع $G(z) = \frac{-g(z)g(-z)}{z}$ ستاره گون است، از تعریف (۱.۶.۱) نتیجه می‌گیریم اگر $f(z) \in \kappa_s(\alpha,\beta,\gamma)$ باشد، آنگاه $f(z)$ تقریبا محدب است.

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنید $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ در H و $g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$ در $S^*(\frac{1}{2})$ باشد. اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(1+\alpha\beta)\,|a_n| + (1+\beta(1-2\gamma))\sum_{n=2}^{\infty}|B_{2n-1}| \leq \beta(\alpha+1-2\gamma)$$

برای مقدار $\alpha(1 \leq \alpha \leq 0)$، $\beta(1 \leq \beta < 0)$ و $\gamma(\frac{1}{2} > \gamma \leq 0)$. آنگاه $f(z) \in \kappa_s(\alpha,\beta,\gamma)$.

اثبات. قرار دهید :

$$\Lambda = \left|zf'(z) - \frac{-g(z)g(-z)}{z}\right| - \beta\left|\alpha zf'(z) + \frac{-(1-2\gamma)g(z)g(-z)}{z}\right|$$

$$= \left|\sum_{n=2}^{\infty} na_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} B_{2n-1}z^{2n-1}\right| -$$

$$\beta\left|z(\alpha+1-2\gamma) + \sum_{n=2}^{\infty} n\alpha a_n z^n + (1-2\gamma)\sum_{n=2}^{\infty} B_{2n-1}z^{2n-1}\right|$$

ازتعریف (۱.۱.۳) برای اثبات قضیه کافیست نشان دهیم $\Lambda < 0$

$$\Lambda \leq \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^n + \sum_{n=2}^{\infty}|B_{2n-1}||z|^{2n-1}$$

$$-\beta\left((\alpha+1-2\gamma)|z|-\sum_{n=2}^{\infty}n\alpha|a_n||z|^n-(1-2\gamma)\sum_{n=2}^{\infty}|B_{2n-1}||z|^{2n-1}\right)$$

$$\leq\left(-\beta(\alpha+1-2\gamma)+\sum_{n=2}^{\infty}n(1+\alpha\beta)|a_n|+(1+\beta(1-2\gamma))\sum_{n=2}^{\infty}|B_{2n-1}|\right)|z|$$

بنابراین $\Lambda < 0$ اگر

$$-\beta(\alpha+1-2\gamma)+\sum_{n=2}^{\infty}n(1+\alpha\beta)|a_n|+(1+\beta(1-2\gamma))\sum_{n=2}^{\infty}|B_{2n-1}|\leq 0$$

که این رابطه نیز بنا به فرض برقرار است. $\square$

قضیه ۴.۱.۳. فرض کنید $1 \leq \alpha \leq 0$، $1 \leq \beta < 0$، $0 \leq \gamma < \frac{1}{2}$ و $f \in \kappa_s(\alpha,\beta,\gamma)$ باشد، آنگاه

$$\frac{1-\beta(1-2\gamma)r}{(1+\alpha\beta r)(1+r^2)}\leq|f'(z)|\leq\frac{1+\beta(1-2\gamma)r}{(1-\alpha\beta r)(1-r^2)}\qquad(|z|=r<1)$$

اثبات. چون $f \in \kappa_s(\alpha,\beta,\gamma)$، $g(z)\in S^*(\frac{1}{2})$ موجوداست به‌طوری که :

$$\frac{zf'(z)}{G(z)}\prec\frac{1+\beta(1-2\gamma)z}{1-\alpha\beta z}.$$

پس بنا به تعریف (۱۸.۱.۱)، $\omega(z)\in E$ موجوداست به‌طوری که :

$$\frac{zf'(z)}{G(z)}=\frac{1+\beta(1-2\gamma)\omega(z)}{1-\alpha\beta\omega(z)}$$

بنابراین داریم :

$$\frac{1-\beta(1-2\gamma)r}{1+\alpha\beta r}\leq\left|\frac{zf'(z)}{G(z)}\right|\leq\frac{1+\beta(1-2\gamma)r}{1-\alpha\beta r}\tag{۸.۳}$$

چون $G(z)\in S^{(2)}$، بنا به قضیه (۱۲.۲.۱) :

$$\frac{r}{1+r^2}\leq|G(z)|\leq\frac{r}{1-r^2}\tag{۹.۳}$$

از (۸.۳) و (۹.۳) نتیجه می‌گیریم :

$$\frac{1-\beta(1-2\gamma)r}{(1+\alpha\beta r)(1+r^2)} \le |f'(z)| \le \frac{1+\beta(1-2\gamma)r}{(1-\alpha\beta r)(1-r^2)}$$

و بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود. □

قضیه ۵.۱.۳. * فرض کنید $0 \le \alpha \le 1$، $0 < \beta \le 1$، $0 \le \gamma < \frac{1}{2}$ و $f \in \kappa_s(\alpha,\beta,\gamma)$ باشد. آنگاه

$$\int_0^r \frac{1-\beta(1-2\gamma)t}{(1+\alpha\beta t)(1+t^2)}\,dt \le |f(z)| \le \int_0^r \frac{1+\beta(1-2\gamma)t}{(1-\alpha\beta t)(1-t^2)}\,dt \qquad (|z|=r<1)$$

۲.۳ رده‌ی $S_s^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma)$

ساکاگوچی [1] در [۱۴] رده S_s^* را معرفی نمود و نشان داد رده ی مزبور زیر رده‌ی از رده‌ی توابع تقریبا محدب است. **سادهارسان** [2] در [۱۶] رده ی $S_s^*(\alpha,\beta)$ را معرفی نمود و نشان داد رده ی مزبور تعمیمی از S_s^* است.

در این بخش رده‌ی $S_s^{(k)}(\alpha,\beta)$ که توسط **گو** [3] در [۴] تعریف و بررسی شده است را تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۳. تابع $f(z) \in H$ در رده‌ی $S_s^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma)$ قرار دارد اگر برای هر $z \in U$ رابطه‌ی زیر برقرار باشد:

$$\left|\frac{zf'(z)}{f_k(z)}-1\right| < \beta\left|\frac{\alpha zf'(z)}{f_k(z)}+1-2\gamma\right| \qquad (۱۰.۳)$$

برای مقدار $\alpha(0\le\alpha\le1)$، $\beta(0<\beta\le1)$، $\gamma(0\le\gamma<\frac{1}{2})$، $k(k\in\mathbb{N})$. به‌طوری که تابع $f_k(z)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$f_k(z)=\frac{1}{k}\sum_{v=0}^{k-1}\varepsilon^{-v}f(\varepsilon^v z) \qquad \varepsilon^k=1$$

تذکر : در حالتی که $\gamma=0$ باشد رده‌ی $S_s^{(k)}(\alpha,\beta)$ بدست می‌آید.

[1] Sakaguchi
[2] Sudharsan
[3] Gao

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید $۱ \leq \alpha \leq ۱$، $۰ < \beta \leq ۱$، $۰ \leq \gamma < \frac{۱}{۲}$ و $k \in \mathbb{N}$ باشد. $f \in S_s^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma)$ اگر و تنها اگر

$$\frac{zf'(z)}{f_k(z)} \prec \frac{۱+(۱-۲\gamma)\beta z}{۱-\alpha\beta z} \qquad (z \in U).$$

اثبات. ابتدا فرض کنیم $f(z) \in S_s^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma)$. لذا :

$$(۱-\alpha^۲\beta^۲)\left|\frac{zf'(z)}{f_k(z)}\right|^۲ - ۲(۱+\alpha\beta^۲(۱-۲\gamma))Re\left\{\frac{zf'(z)}{f_k(z)}\right\} < \beta^۲(۱-۲\gamma)^۲ - ۱$$

حالت های مختلف α و β رادرنظرمی گیریم :

حالت ۱: $\alpha \neq ۱$ یا $\beta \neq ۱$. در این صورت داریم:

$$\left|\frac{zf'(z)}{f_k(z)}\right|^۲ - \frac{۲(۱+\alpha\beta^۲(۱-۲\gamma))}{۱-\alpha^۲\beta^۲}Re\left\{\frac{zf'(z)}{f_k(z)}\right\} + \left(\frac{۱+\alpha\beta^۲(۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^۲\beta^۲}\right)^۲ < \frac{\beta^۲(۱-۲\gamma)^۲-۱}{۱-\alpha^۲\beta^۲} + \left(\frac{۱+\alpha\beta^۲(۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^۲\beta^۲}\right)^۲$$

درنتیجه

$$\left|\frac{zf'(z)}{f_k(z)} - \frac{۱+\alpha\beta^۲(۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^۲\beta^۲}\right| < \frac{\beta(۱+\alpha-۲\gamma)}{(۱-\alpha^۲\beta^۲)},$$

نامساوی بالا نشان می‌دهد مقادیر تابع $K(z) = \frac{zf'(z)}{f_k(z)}$ دردیسکی به مرکز $(۰, \frac{۱+\alpha\beta^۲(۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^۲\beta^۲})$ و شعاع $\frac{\beta(۱+\alpha-۲\gamma)}{(۱-\alpha^۲\beta^۲)}$ قرار دارد می دانیم تابع $\omega(z) = \frac{۱+\beta(۱-۲\gamma)z}{۱-\alpha\beta z}$ دیسک U را به دیسک زیرتصویرمی کند

$$\left|\omega - \frac{۱+\alpha\beta^۲(۱-۲\gamma)}{۱-\alpha^۲\beta^۲}\right| < \frac{\beta(\alpha+۱-۲\gamma)}{(۱-\alpha^۲\beta^۲)} \qquad (۱۱.۳)$$

بنابراین

$$K(U) \subset \omega(U).$$

از آنجایی که تابع $\omega(z)$ بر U تک ارز است و $K(۰) = \omega(۰)$، نتیجه می‌گیریم :

$$\frac{zf'(z)}{f_k(z)} \prec \omega(z) = \frac{۱+\beta(۱-۲\gamma)z}{۱-\alpha\beta z}.$$

حالت ۲: اگر $\alpha=\beta=۱$. در این صورت داریم:

$$\left|\frac{zf'(z)}{f_k(z)}-۱\right|<\left|\frac{zf'(z)}{f_k(z)}+۱-۲\gamma\right|$$

بنابراین

$$\frac{zf'(z)}{f_k(z)}\prec\frac{۱+(۱-۲\gamma)z}{۱-z}.$$

به عکس: حال فرض کنیم $g(z)\in S^*(\frac{۱}{۲})$ و $\frac{zf'(z)}{f_k(z)}\prec\frac{۱+(۱-۲\gamma)\beta z}{۱-\alpha\beta z}$ باشد. پس تابع $\omega(z)\in E$ موجود است به‌طوری که

$$\frac{zf'(z)}{f_k(z)}=\frac{۱+\beta(۱-۲\gamma)\omega(z)}{۱-\alpha\beta\omega(z)}$$

در رابطه‌ی بالا با توجه به اینکه $|\omega(z)|<۱$، نامساوی (۱۰.۳) نتیجه می‌شود. بنابراین $f(z)\in S_s^k(\alpha,\beta,\gamma)$.

□

تذکر: چون برای هر $z\in U$، $Re\{\frac{۱+\beta(۱-۲\gamma)z}{۱-\alpha\beta z}\}>۰$ است، بنا به قضیه (۲.۲.۳) و تعریف (۱۸.۱.۱) نتیجه می‌گیریم:

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f_k(z)}\right\}>۰ \tag{۱۲.۳}$$

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید $f(z)\in S_s^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma)$ باشد، آنگاه $f_k(z)\in S^*$.

اثبات. چون $f(z)\in S_s^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma)$ با جایگذاری $\varepsilon^\mu z$ در نامساوی (۱۲.۳)، داریم :

$$Re\{\frac{\varepsilon^\mu zf'(\varepsilon^\mu z)}{f_k(\varepsilon^\mu z)}\}>۰ \qquad (\mu=۰,۱,\dots k-۱). \tag{۱۳.۳}$$

از تعریف $f_k(z)$ و با توجه به اینکه $\varepsilon^k = ۱$ داریم $f_k(\varepsilon^\mu z) = \varepsilon^\mu f_k(z)$. بادرنظر گرفتن مجموع (۱۳.۳) از $\mu = ۰, ۱, \ldots k-۱$ بدست می‌آوریم :

$$Re\left\{\frac{۱}{k}\sum_{\mu=۰}^{k-۱}\frac{\varepsilon^\mu z f'(\varepsilon^\mu z)}{\varepsilon^\mu f_k(z)}\right\} = Re\left\{\frac{zf_k'(z)}{f_k(z)}\right\} > ۰$$

بنابراین $f_k(z)$ در S^* قرار دارد. $\square$

تذکر : اگر $f(z) \in S_s^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma)$ باشد، با توجه به قضیه (۳.۲.۲) و نامساوی (۱۲.۳) نتیجه می‌گیریم، $f(z)$ تقریبا محدب است.

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنید $f(z) \in S_s^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma)$ باشد، آنگاه

$$f_k(z) = z\exp\{\frac{۱}{k}\sum_{\mu=۰}^{k-۱}\int_۰^{\varepsilon^\mu z}\frac{\omega(t)(\beta(۱-۲\gamma)+\alpha\beta)}{t(۱-\alpha\beta\omega(t))}dt\},$$

به‌طوری که $\omega(z) \in E$.

اثبات. فرض کنیم $f(z) \in S_s^{(k)}(\alpha,\beta,\gamma)$ باشد، بنا به قضیه (۲.۲.۳) :

$$\frac{zf'(z)}{f_k(z)} \prec \frac{۱+(۱-۲\gamma)\beta z}{۱-\alpha\beta z}$$

بنابراین تابع $\omega(z) \in E$ موجود است به‌طوری که :

$$\frac{zf'(z)}{f_k(z)} = \frac{۱+\beta(۱-۲\gamma)\omega(z)}{۱-\alpha\beta\omega(z)},$$

با قرار دادن $\varepsilon^\mu z$ در رابطه‌ی بالا داریم:

$$\frac{\varepsilon^\mu z f'(\varepsilon^\mu z)}{f_k(\varepsilon^\mu z)} = \frac{۱+\beta(۱-۲\gamma)\omega(\varepsilon^\mu z)}{۱-\alpha\beta\omega(\varepsilon^\mu z)} \qquad \mu = ۰, ۱, \ldots, k-۱$$

با در نظر گرفتن مجموع رابطه‌ی بالا از $\mu = ۰, ۱, \ldots, k-۱$ و با توجه به اینکه $f_k(\varepsilon^\mu z) = \varepsilon^\mu f_k(z)$ داریم:

$$\frac{zf_k'(z)}{f_k(z)} = \frac{۱}{k}\sum_{\mu=۰}^{k-۱}\frac{۱+\beta(۱-۲\gamma)\omega(\varepsilon^\mu z)}{۱-\alpha\beta\omega(\varepsilon^\mu z)}.$$

در نتیجه:

$$\frac{f_k'(z)}{f_k(z)}-\frac{1}{z}=\frac{1}{k}\sum_{\mu=0}^{k-1}\frac{\beta(1-2\gamma+\alpha)\omega(\varepsilon^\mu z)}{z[1-\alpha\beta\omega(\varepsilon^\mu z)]}$$

با انتگرال‌گیری در تساوی بالا از ۰ تا z بدست می‌آوریم:

$$\log\left\{\frac{f_k(z)}{z}\right\}=\frac{1}{k}\sum_{\mu=0}^{k-1}\int_0^z\frac{\beta\omega(\varepsilon^\mu\zeta)(1-2\gamma+\alpha)}{\zeta[1-\alpha\beta\omega(\varepsilon^\mu\zeta)]}d\zeta.$$

با نما رساندن رابطه‌ی بالا داریم :

$$f_k(z)=f_k(z)=z\exp\{\frac{1}{k}\sum_{\mu=0}^{k-1}\int_0^{\varepsilon^\mu z}\frac{\omega(t)(\beta(1-2\gamma)+\alpha\beta)}{t(1-\alpha\beta\omega(t))}dt\}.$$

و بدین ترتیب اثبات کامل است . □

قضیه ۵.۲.۳. فرض کنید $f(z)\in S_s^k(\alpha,\beta,\gamma)$ باشد، آنگاه

$$f(z)=\int_0^z\frac{1+\beta(1-2\gamma)\omega(\zeta)}{1-\alpha\beta\omega(\zeta)}\exp\{\frac{1}{k}\sum_{\mu=0}^{k-1}\int_0^{\varepsilon^\mu\zeta}\frac{\omega(t)(\beta(1-2\gamma)+\alpha\beta)}{t(1-\alpha\beta\omega(t))}dt\}d\zeta.$$

اثبات. چون $f(z)\in S_s^k(\alpha,\beta,\gamma)$، بنا به قضیه (۲.۲.۳):

$$\frac{zf'(z)}{f_k(z)}\prec\frac{1+(1-2\gamma)\beta z}{1-\alpha\beta z}.$$

پس $\omega(z)\in E$ موجود است، به‌طوری که :

$$\frac{zf'(z)}{f_k(z)}=\frac{1+(1-2\gamma)\beta\omega(z)}{1-\alpha\beta\omega(z)}$$

در نتیجه :

$$f'(z)=\frac{f_k(z)}{z}.\frac{1+\beta(1-2\gamma)\omega(z)}{1-\alpha\beta\omega(z)},$$

با جایگذاری مقدار $f_k(z)$ از قضیه (۴.۲.۳) در رابطه‌ی بالا و با انتگرال‌یابی از ۰ تا z، بدست می‌آید :

$$f(z)=\int_0^z\frac{1+\beta(1-2\gamma)\omega(\zeta)}{1-\alpha\beta\omega(\zeta)}\exp\{\frac{1}{k}\sum_{\mu=0}^{k-1}\int_0^{\varepsilon^\mu\zeta}\frac{\omega(t)(\beta(1-2\gamma)+\alpha\beta)}{t(1-\alpha\beta\omega(t))}dt\}d\zeta.$$

□

قضیه ۶.۲.۳. فرض کنید $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$در رده‌ی H باشد و نامساوی زیر برقرارباشد

$$\sum_{n=2}^{\infty}[n(1+\alpha\beta)+b_n(\beta(1-2\gamma)-1)]|a_n|\leq\beta(\alpha+1-2\gamma),$$

برای $\alpha(1\leq\alpha\leq 0)$، $\beta(1\leq\beta<0)$، $\gamma(\frac{1}{2}<\gamma\leq 0)$ و $b_n=\frac{1}{k}\sum_{v=0}^{k-1}\varepsilon^{(n-1)v}$ انگاه $f(z)\in$ $S_s^k(\alpha,\beta,\gamma)$.

اثبات. قرار دهید:

$$\Lambda=|zf'(z)-f_k(z)|-\beta|\alpha zf'(z)+(1-2\gamma)f_k(z)|$$

$$\Lambda=|\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n-\sum_{n=2}^{\infty}a_nb_nz^n|-\beta|(\alpha+1-2\gamma)z+\alpha\sum_{n=2}^{\infty}na_nz^n+(1-2\gamma)\sum_{n=2}^{\infty}a_nb_nz^n|$$

برای اثبات قضیه از تعریف (۱.۲.۳) کافیست نشان دهیم $\Lambda<0$

$$\Lambda\leq\sum_{n=2}^{\infty}(n-b_n)|a_n||z|^n-\beta[(\alpha+1-2\gamma)|z|-\sum_{n=2}^{\infty}(\alpha n+(1-2\gamma)b_n)|a_n||z|^n]$$

$$<\sum_{n=2}^{\infty}(n-b_n+\alpha\beta n+\beta(1-2\gamma)b_n)|a_n|-\beta(\alpha+1-2\gamma)$$

بنابراین $\Lambda<0$ اگر

$$\sum_{n=2}^{\infty}[n(1+\alpha\beta)+b_n(\beta(1-2\gamma)-1)]|a_n|-\beta(\alpha+1-2\gamma)\leq 0$$

این رابطه نیز بنا به فرض برقرار است. $\square$

مراجع

[1] K. Alshaqsi and M. Darus. On subclass of close-to-convex functions. *Int.J.Contemp.Math.Sci*, 2:745–757, 2007. 46

[2] S. Dineen. *The schwarz lemma*. Oxford, 1989. 7

[3] P.L. Duren. *On univalent functions*. Springer-verlag, New-york, 1983. 6, 10, 12, 21

[4] C.Y. Gao and S.Q. Zhou. A new subclass of close-to-convex functions. *Soochow Jornal of mathematics*, 31(1):41–49, 2005. 65

[5] C.Y. Gao and S.Q Zhou. On a class of analytic functions related to the functions. *Kyunpook Math.J*, 45:123–130, 2005. , 32

[6] G.M. Goluzin. *Geometric theory of functions of a complex variable*. American Mathematical Society, 1969. 16

[7] A.W. Goodman. *Univalent functions*. Mariner publishing Co.,Inc.,Tampa,FL, 1983.

[8] J. Kowalczyk and E. Les-Bomba. On subclass of close-to-convex functions. *Applied Mathematics Letters.*, 23:1147–1151, 2010.

[9] T. Lakshminarasimhan. On subclass of functions starlike in the unit disk. *J.Indian.Math.Soc*, 41:233–243, 1977. 45

[10] M.S. Liu. On a subclass of p-valent close-to-convex functions of order p and type α. *J.Math.Study*, 30:102–104, 1997. 50

[11] S. Owa. On a class of starlike functions. *J.Korean Math.Soc*, 19(1):29–38, 1982.

[12] C. Pommerenke. *Univalent functions*. Vandenhoek and Ruprecht,Gottingen, 1975.

[13] W. Rogosinski. On the coefficients of subordinate functions. *Proc.London Math.Soc*, 2:48–82, 1943. 55

[14] K. Sakaguchi. On certain univalent mapping. *J.Math.Soc.Japan*, 11:72–75, 1959. 65

[15] H. Silverman. *Complex variales with applications*. Houghton Mifflinco.,Boston. 1975. 2, 8, 11, 20, 25

[16] T.V. Sudharsan, Balasubrahmanyam, and K.G Subramonian. On functions starlike with respect to symmetric and conjugate points. *Twiwanese Jornal Of Mathematics*, 2(1):57–68, 1998. 65

[17] J. Thangamani. On starlike functions with respect to symmetric points. *J.Pure appl.Math.,*, 11(3):392–405, 1980.

[18] Z.G. Wang and D.Z. Chen. On a subclass of close-to-convex functions. *J.Math*, 38(2):95–101, 2009. , 59

[19] Z.G. Wang and C.Y. Gao. On certain new subclass of close-to-convex functions. *Acta Math.Acad.Paedagog.Nyhazi*, 22:119–124, 2006. , 50, 52

[20] Z.G. Wang and C.Y. Gao. On certain subclass of close-to-convex functions. *Acta Math.Acad.Paedagog.Nyhazi*, 22:171–177, 2006.

[21] Z.R. Wu. The integral operator of starlikeness and family of bazilevic functions. *Acta Math.Sinica*, 27:394–409, 1984. 53

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

اثبات	Proof
تحلیلی	Analytic
تساوی	Equality
تعمیم	Generaliztion
تقریبامحدب	Close-to-covex
تک ارز	Univalent
حقیقی	Real
زیرترتیب	Subordination
زیررده	Subclass
ستاره گون	Starlike
شعاع	Radius
ضرایب	Coefficent
فرد	Odd
کران	Bound
لم	Lemma
مبدا	Origin
مثبت	Positive
محدب	Convex
مختلط	Complex
مشتق	Derivative
معادل	Equivalent
معادله	Equation
میدان	Field
نامساوی	Inequality
همساز	Harmonic
واحد	Unit

Abstract

In this thesis, we study the subclasses K_s, $K_s(\gamma)$, $K_s(\alpha, \beta)$,... of close-to-convex functions. In particular we obtain up and lower bound for derivative of these functions. Also we consider the coefficents of these functions and give some properties.

Keywords: *Analytic function, Univalent function, Starlike function, Convex function, Close-to-convex function*

Shahrood University of technology

Facualty of Methematical Sciences

Department of Mathematics

Ms Thesis

On subclass of close-to-convex functions

By:

Atefe Abbasi

Supervisor:
Dr.Ahmad Zireh

advisor:
Dr.Ebrahim Hashemi

September 2011