دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

شرط مک کوی روی حلقه چند جمله ای‌های اریب

نگارش
زهرا خراسانی

استاد راهنما
دکتر ابراهیم هاشمی

شهریور ۹۰

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

در اینجا می‌خواهم از همه تشکر کنم.

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه جابجایی و $g(x), f(x)$ دو چندجمله ای ناصفر از $R[x]$ باشند. مک کوی ثابت کرد که اگر $f(x)g(x) = 0$، آنگاه عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $f(x)c = 0$.

حلقه R (نه لزوماً جابجایی) را مک کوی راست می نامیم هرگاه $g(x), f(x)$ دو چندجمله ای ناصفر از $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = 0$، آنگاه عنصر ناصفر $c \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه $f(x)c = 0$.

در این پایان نامه ابتدا برخی از توسیع های حلقه های مک کوی راست را بررسی می کنیم. به عنوان مثال نشان می دهیم اگر R مک کوی راست باشد، انگاه $R[x]/(x^n)$ نیز مک کوی راست است.

فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R باشد. حلقه R را مک کوی σ−اریب می نامیم، هرگاه $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ عناصر ناصفری از $R[x;\sigma]$ باشند و $p(x)q(x) = 0$، آنگاه عنصر مخالف صفر $c \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه $p(x)c = 0$. سپس رابطه بین حلقه های مک کوی σ−اریب با حلقه های σ−آرمنداریز و σ−برگشت پذیر را مطالعه می کنیم.

واژه‌های کلیدی: حلقه مک کوی، حلقه آرمنداریز، حلقه تقلیل یافته، حلقه نیم جابجایی، حلقه چندجمله ای اریب، حلقه σ−برگشت پذیر، حلقه مک کوی σ−اریب

پیشگفتار

فهرست مطالب

۱ مفاهیم مقدماتی ۱

۱.۱ پیش نیازها و تعاریف ۱

۲ توسیع هایی از حلقه هایی که شرط مک کوی را دارا هستند ۸

۱.۲ توسیع هایی از حلقه های مک کوی راست ۸

۲.۲ رابطه بین حلقه های مک کوی و نیم جابجایی ۱۴

۳.۲ حلقه نیم جابجایی وجود دارد که مک کوی نیست ۱۷

۳ حلقه کسرها ۲۴

۱.۳ مقدمه ۲۴

۲.۳ حلقه کسرها ۳۱

۳.۳ حلقه کسرهای کلاسیک ۳۷

۴ شرط مک کوی روی حلقه چندجمله ایهای اریب ۴۷

۱.۴ مقدمه ۴۷

۲.۴ قضایای مرتبط با شرط مک کوی روی حلقه چندجمله ایهای اریب ۵۱

مراجع ۷۴

فهرست الفبایی ۷۶

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۷۷

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ پیش نیازها و تعاریف

در سراسر این پایان نامه R نمایانگر یک حلقه شرکت پذیر و یکدار می باشد.

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $\varnothing \neq S \subseteq R$. مجموعه S را ضربی بسته می نامیم، هرگاه $1 \in S$ و برای هر $a, b \in S$ ، $ab \in S$.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R باشد. حلقه چندجمله ایهای اریب روی R را با علامت $R[x;\sigma]$ نمایش می دهیم که عناصر آن به فرم $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$، $(a_i \in R)$ می باشند.

دو عمل جمع و ضرب روی $R[x;\sigma]$ به طور طبیعی تعریف می شوند و عمل ضرب از قانون $xa = \sigma(a)x$ پیروی می کند. به عنوان مثال اگر $f(x) = \sum a_ix^i$ و $g(x) = \sum b_jx^j$، آنگاه

$$f(x)g(x) = (\sum_i a_ix^i)(\sum_j b_jx^j) = \sum_{i,j} a_i\sigma^i(b_j)x^{i+j}.$$

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم σ یک خودریختی از حلقه R باشد. حلقه چندجمله ایهای اریب لوران روی R را با $R[x, x^{-1};\sigma]$ نمایش می دهیم که عناصر آن به فرم

$a_{-m}x^{-m} + a_{-m+1}x^{-m+1} + \cdots + a_0 + \cdots + a_nx^n$ هستند. (m, n اعداد صحیح نامنفی اند)

دو عمل جمع و ضرب در حلقه $R[x, x^{-1};\sigma]$ به طور طبیعی تعریف می شوند و عمل ضرب از قانون

$x^i a = \sigma^i(a) x^i$ پیروی می کند.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. عنصر ناصفر $a \in R$ را مقسوم علیه چپ صفر می نامیم، هرگاه عنصر ناصفر $b \in R$ وجود داشته باشد به قسمی که $ab = 0$. مقسوم علیه راست صفر متناظراً تعریف می شود.

اگر a هم مقسوم علیه چپ صفر و هم مقسوم علیه راست صفر باشد، a را یک مقسوم علیه صفر می نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. حلقه جابجایی R را یک دامنه صحیح می نامیم، هرگاه $R \neq 0$ و برای هر $a, b \in R$، اگر $ab = 0$ آنگاه $a = 0$ یا $b = 0$.

توجه. هر دامنه فاقد مقسوم علیه صفر است.

تعریف ۶.۱.۱. ایده آل سره P از حلقه R را اول می نامیم، هرگاه به ازای هر ایده آل $A, B \in R$، اگر $AB \subseteq P$، آنگاه $A \subseteq P$ یا $B \subseteq P$.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد و $\varnothing \neq X \subseteq R$. پوچ ساز چپ و پوچ ساز راست X در R را به ترتیب چنین تعریف می کنیم:

$$l.ann_R(X) = \{a \in R \mid ax = 0, x \in X \text{ به ازای هر }\},$$

$$r.ann_R(X) = \{a \in R \mid xa = 0, x \in X \text{ به ازای هر }\}.$$

اگر X تک عضوی باشد از علائم $r_R(x), l_R(x)$ استفاده می نماییم.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. عنصر $x \in R$ را منظم می نامیم هرگاه $r \cdot ann_R(x) = 0$ و $l \cdot ann_R(x) = 0$. توجه داریم که اگر $R \subseteq Q$ دو حلقه باشند، و $x \in R$ در حلقه Q وارون پذیر باشد آنگاه x یک عنصر منظم R است.

تعریف ۹.۱.۱. حلقه R را تقلیل یافته می نامیم هرگاه هیچ عنصر پوچ توان ناصفری نداشته باشد.

تعریف ۱۰.۱.۱. حلقه R را برگشت پذیر می نامیم هرگاه برای هر $a,b \in R$، اگر $ab=0$، آنگاه $ba=0$.

تعریف ۱۱.۱.۱. حلقه R را آرمنداریز می نامیم در صورتیکه، اگر $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ چندجمله ایهای ناصفر در $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$، آنگاه به ازای هر i,j، $a_i b_j=0$.

تذکر۱. هر حلقه تقلیل یافته و جابجایی، برگشت پذیر است.

تذکر۲. هر زیرحلقه از یک حلقه آرمنداریز، آرمنداریز است.

تعریف ۱۲.۱.۱. حلقه R را متقارن می نامیم هرگاه برای هر $a,b,c \in R$، اگر $abc=0$، آنگاه $bac=0$.

تعریف ۱۳.۱.۱. حلقه R را نیم جابجایی می نامیم هرگاه برای هر $a,b \in R$، $ab=0$ نتیجه دهد $aRb=0$.

نتیجه ۱۴.۱.۱. ۱. هر حلقه تقلیل یافته و جابجایی متقارن است.

۲. هر حلقه متقارن برگشت پذیر است.

۳. هر حلقه برگشت پذیر نیم جابجایی است.

اثبات. ۱ و ۲ بدیهی است.

۳. فرض کنیم $a,b,r \in R$ و $br=0$. در نتیجه $abr=0$، و چون R برگشت پذیر است، لذا $arb=0$ نتیجه می دهد $aRb=0$. بنابراین حلقه R نیم جابجایی است. ■

چنانچه در مثال بعدی خواهیم دید، عکس روابط فوق در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۱۵.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه باشد. زیرحلقه $S=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in R\right\}$ از حلقه ماتریس های بالا مثلثی 3×3 را در نظر می گیریم. نشان می دهیم S نیم جابجایی است ولی برگشت پذیر نمی باشد.

حل. فرض کنیم $A=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ و $B=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ دو عضو دلخواه از S باشند. چون عنصر مخالف صفر $S \ni r=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}$ وجود دارد به طوریکه

$$ArB=\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}=۰$$

اما

$$BA=\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix}\neq ۰$$

بنابراین S نیم جابجایی است ولی برگشت پذیر نمی باشد.

تعریف ۱۶.۱.۱. فرض کنیم R یک حلقه و M یک (R,R)-دو مدول باشند. توسیع بدیهی R بوسیله M را چنین تعریف می کنیم:

$$T(R,M)=\left\{\begin{pmatrix} a & m \\ ۰ & a \end{pmatrix} \mid a\in R, m\in M\right\}.$$

$T(R,M)$ با علامت $R\oplus M$ نیز نمایش داده می شود.

جمع و ضرب روی $T(R,M)$ به طور طبیعی به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(r_۱,m_۱)(r_۲,m_۲)=(r_۱r_۲, r_۱m_۲+m_۱r_۲)$$

همچنین $\left\{\begin{pmatrix} a & m \\ ۰ & a \end{pmatrix} \mid a\in R, m\in M\right\}$ یک زیر حلقه از حلقه ماتریس بالا مثلثی $\begin{pmatrix} R & M \\ ۰ & R \end{pmatrix}$ است.

گزاره ۱۷.۱.۱. اگر حلقه R تقلیل یافته باشد آنگاه

$$S=\left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ ۰ & a & d \\ ۰ & ۰ & a \end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in R\right\}$$

آرمنداریز است[۱۱].

اثبات. فرض کنیم $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} \in S$. هر عنصر از S را می توان به فرم (a,b,c,d) نمایش داد. بنابراین دو عمل جمع و ضرب روی S را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)+(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2,d_1+d_2)$$

$$(a_1,b_1,c_1,d_1)(a_2,b_2,c_2,d_2)=(a_1a_2,a_1b_2+b_1a_2,a_1c_2+b_1d_2+c_1a_2,a_1d_2+d_1a_2).$$

همچنین هر چندجمله ای در $S[x]$ را می توان به فرم $(p_0(x),p_1(x),p_2(x),p_3(x))$ بیان کرد. (به ازای هر $0 \leq i \leq 3$، $p_i(x) \in R[x]$)

فرض کنیم $f(x) = (f_0(x),f_1(x),f_2(x),f_3(x))$ و $g(x) = (g_0(x),g_1(x),g_2(x),g_3(x))$ چندجمله ایهایی در $S[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. در نتیجه

$$f(x)g(x)=(f_0(x)g_0(x),f_0(x)g_1(x)+f_1(x)g_0(x),f_0(x)g_2(x)+f_1(x)g_3(x)$$

$$+f_2(x)g_0(x),f_0(x)g_3(x)+f_3(x)g_0(x))=0$$

باتوجه به این تساوی دستگاه معادلات زیر را داریم:

(0) $f_0(x)g_0(x)=0$

(1) $f_0(x)g_1(x)+f_1(x)g_0(x)=0$

(2) $f_0(x)g_2(x)+f_1(x)g_3(x)+f_2(x)g_0(x)=0$

(3) $f_0(x)g_3(x)+f_3(x)g_0(x)=0$

مطابق فرض، حلقه R تقلیل یافته است، بنابراین از معادله (0) نتیجه می گیریم $g_0(x)f_0(x)=0$.

اگر معادله (1) را از راست در $f_0(x)$ ضرب کنیم آنگاه

$f_0(x)g_1(x)f_0(x)+f_1(x)g_0(x)f_0(x)=0$. پس $f_1(x)g_0(x)=0, f_0(x)g_1(x)=0$.

همچنین با ضرب معادله (۳) از راست در $f_0(x)$، $f_0(x)g_3(x)f_0(x) + f_3(x)g_0(x)f_0(x) = 0$.
بنابراین $f_0(x)g_3(x) = 0 , f_3(x)g_0(x) = 0$.

اکنون معادله (۲) را از راست در $f_0(x)$ ضرب کنیم، در این صورت به تساوی زیر می رسیم.

$$f_0(x)g_2(x)f_0(x) + f_1(x)g_3(x)f_0(x) + f_2(x)g_0(x)f_0(x) = 0$$

بنابراین $f_0(x)g_2(x) = 0$. پس معادله (۲) به فرم زیر تبدیل می شود.

$$f_1(x)g_3(x) + f_2(x)g_0(x) = 0. \qquad (3')$$

اگر $f_1(x)$ را از راست در معادله $(3')$ ضرب کنیم، آنگاه $f_1(x)g_3(x) = 0$ و $f_2(x)g_0(x) = 0$.

فرض کنیم $f(x), g(x) \in S[x]$. قرار می دهیم:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix} x^i \quad , \quad g(x) = \sum_{j=0}^{m} \begin{pmatrix} a_j & b_j & c_j \\ 0 & a_j & d_j \\ 0 & 0 & a_j \end{pmatrix} x^j$$

و

$$f_0(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \;\; , \;\; f_1(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \;\; , \;\; f_2(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \;\; , \;\; f_3(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^i$$
$$g_0(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j \;\; , \;\; g_1(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j \;\; , \;\; g_2(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j x^j \;\; , \;\; g_3(x) = \sum_{j=0}^{m} d_j x^j.$$

بنابراین با توجه به فرض و نتایج بدست آمده، به ازای هر i, j داریم:

$$a_ia_j = 0 \;,\; a_ib_j = 0 \;,\; b_ia_j = 0 \;,\; a_ic_j = 0 \;,\; b_id_j = 0 \;,\; c_ia_j = 0 \;,\; a_id_j = 0 \;,\; d_ia_j = 0$$

در نتیجه:

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i & c_i \\ 0 & a_i & d_i \\ 0 & 0 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_j & b_j & c_j \\ 0 & a_j & d_j \\ 0 & 0 & a_j \end{pmatrix} = 0.$$

پس حلقه S آرمنداریز است. ■

قضیه ۱۸.۱.۱. اگر حلقه R تقلیل یافته باشد، آنگاه توسیع بدیهی $T(R,R)$ یک حلقه آرمنداریز است.

اثبات. چون $T(R,R)$ با

$$U=\left\{\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,b\in R\right\}$$

یکریخت است و هر زیر حلقه از یک حلقه آرمنداریز، آرمنداریز است. بنابراین با توجه به گزاره ۱۷.۱.۱، $T(R,R)$ یک حلقه آرمنداریز است. ■

فصل ۲

توسیع هایی از حلقه هایی که شرط مک کوی را دارا هستند

۱.۲ توسیع هایی از حلقه های مک کوی راست

مک کوی [۱] ثابت کرد که اگر R یک حلقه جابجایی و $f(x)$ یک مقسوم علیه صفر در $R[x]$ باشد، آنگاه عنصر مخالف صفر $r \in R$ به قسمی وجود دارد که $f(x)r = ۰$.

تعریف ۱.۱.۲. حلقه R را مک کوی راست می نامیم، هرگاه $g(x), f(x)$ چندجمله ایهای ناصفر در $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = ۰$، آنگاه عنصر ناصفر $c \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه $f(x)c = ۰$. حلقه مک کوی چپ متناظراً تعریف می شود.

اگرحلقه ای هم مک کوی چپ و هم مک کوی راست باشد آن را مک کوی می نامیم.

قضیه ۲.۱.۲. حلقه R مک کوی راست است اگر و تنها و اگر $R[x]$ مک کوی راست باشد. [۱۲]

اثبات. فرض کنیم R مک کوی راست باشد.

فرض کنیم $F(y) = \sum_{i=۰}^{n} f_i y^i$ و $G(y) = \sum_{j=۰}^{m} g_j y^j$ دو چندجمله ای مخالف صفر در $R[x][y]$ باشند و $F(y)G(y) = ۰$. قرار می دهیم:

$$f_i = \sum_{s=۰}^{p_i} a_{is} x^s \ , \ g_j = \sum_{t=۰}^{q_j} b_{jt} x^t \ \in R[x].$$

[۱] McCoy

فرض کنیم $k = \sum \deg(f_i) + \sum \deg(g_j)$، که deg درجه چندجمله ای است و درجه چندجمله ای صفر را صفر در نظر گرفته ایم. در نتیجه

$$F(x^k) = \sum_{i=0}^{n} f_i x^{ik}\ ,\ G(x^k) = \sum_{j=0}^{m} g_j x^{jk}\ \in R[x].$$

مشاهده می کنیم که مجموعه ضرایب $F(x^k)$ با مجموعه ضرایب f_iها برابر است و مجموعه ضرایب $G(x^k)$ با مجموعه ضرایب g_iها برابر است. چون $F(y)G(y) = 0$ و x با عناصر R جابجا می شود، پس $F(x^k)G(x^k) = 0$. از طرفی چون R مک کوی راست است، عنصر مخالف صفر $u \in R$ وجود دارد به طوریکه $F(x^k)u = 0$. بنابراین $F(y)u = 0$ و در نتیجه $R[x]$ مک کوی راست است.

بعکس، فرض کنیم $R[x]$ مک کوی راست باشد و $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{m} b_j x^j$ چندجمله ایهای ناصفر از $R[x]$ باشند که $f(x)g(x) = 0$. همچنین فرض کنیم $f(y) = \sum_{i=0}^{n} a_i y^i$ و $g(y) = \sum_{j=0}^{m} b_j y^j$ دو چندجمله ای ناصفر از $R[x][y]$ باشند و $f(y)g(y) = 0$. چون $R[x]$ مک کوی راست است، عنصر مخالف صفر $h(x) = \sum_{k=0}^{p} h_k x^k \in R[x]$ وجود دارد به طوریکه $f(y)h(x) = 0$. بنابراین به ازای هر $i = 0, 1, \ldots, n$، $a_i h(x) = 0$. در نتیجه عنصر مخالف صفر $h_k \in R$ وجود دارد به طوریکه $f(x)h_k = 0$. بنابراین R مک کوی راست است. ■

قضیه ۳.۱.۲. حلقه R مک کوی راست است اگر و تنها اگر توسیع بدیهی $T(R, R)$ مک کوی راست باشد. [۱۴]

اثبات. ابتدا فرض کنیم $T(R, R)$ مک کوی راست باشد.

فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ دو چندجمله ای ناصفر از $R[x]$ باشند و $f(x)g(x) = 0$. دو عضو $F(x) = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$ و $G(x) = \sum_{j=0}^{n} B_j x^j$ از $T(R, R)[x]$ را در نظر

می گیریم که به ازای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$،

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_i \end{pmatrix} \ , \ B_j = \begin{pmatrix} b_j & 0 \\ 0 & b_j \end{pmatrix}.$$

چون $f(x)g(x) = 0$، پس $F(x)G(x) = 0$. و چون $T(R,R)[x]$ مک کوی راست است، پس عنصرمخالف صفر $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ در $T(R,R)$ وجود دارد به طوریکه $F(x)\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = 0$. چون عنصر $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$ مخالف صفراست پس a یا b نیز مخالف صفر هستند. بنابراین به ازای هر $0 \leq i \leq m$،

$$\begin{pmatrix} a_i a & a_i b \\ 0 & a_i a \end{pmatrix} = 0$$

به ازای هر $0 \leq i \leq m$، $a_i a = 0$ و $a_i b = 0$، بنابراین $f(x)a = 0$ و $f(x)b = 0$. درنتیجه حلقه R مک کوی راست می باشد.

بعکس، فرض کنیم حلقه R مک کوی راست باشد. قرار می دهیم $R' = T(R,R)$.

فرض کنیم $F(x)$ و $G(x)$ دو عضو مخالف صفر از $R'[x]$ باشند و $F(x)G(x) = 0$. قرار می دهیم:

$$F(x) = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} a_m & b_m \\ 0 & a_m \end{pmatrix} x^m,$$
$$G(x) = \begin{pmatrix} a'_0 & b'_0 \\ 0 & a'_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 \\ 0 & a'_1 \end{pmatrix} x + \cdots + \begin{pmatrix} a'_n & b'_n \\ 0 & a'_n \end{pmatrix} x^n.$$

فرض کنیم

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \ , \ f_2(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$$

$$g_1(x) = a'_0 + a'_1 x + \ldots + a'_n x^n \ , \ g_2(x) = b'_0 + b'_1 x + \ldots + b'_n x^n.$$

چون $F(x)G(x) = 0$، پس

$$0 = \begin{pmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ 0 & f_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(x) & g_2(x) \\ 0 & g_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x)g_1(x) & f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x) \\ 0 & f_1(x)g_1(x) \end{pmatrix}.$$

بنابراین $f_1(x)g_1(x) = 0$ و $f_1(x)g_2(x) + f_2(x)g_1(x) = 0$. ۹ حالت اتفاق می افتد:

حالت اول. فرض کنیم $f_1(x) \neq 0, f_2(x) \neq 0, g_1(x) \neq 0, g_2(x) \neq 0$. چون $f_1(x)g_1(x) = 0$ و حلقه R مک کوی راست است، عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $f_1(x)c = 0$. بنابراین عنصرناصفر $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ در R' وجود دارد به طوریکه $F(x)\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. در نتیجه R' حلقه مک کوی راست است.

حالت دوم. فرض کنیم $f_1(x) \neq 0, g_1(x) \neq 0, f_2(x) \neq 0, g_2(x) = 0$. در این صورت دوباره می توان عنصر ناصفر $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R'$ را انتخاب کرد.

حالت سوم. فرض کنیم $f_1(x) \neq 0, g_1(x) = 0, f_2(x) \neq 0, g_2(x) \neq 0$. در نتیجه $f_1(x)g_2(x) = 0$. چون R مک کوی راست است عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $f_1(x)c = 0$. بنابراین عنصر ناصفر $\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R'$ وجود دارد به طوریکه $F(x)\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. در نتیجه R' مک کوی راست است.

حالت چهارم. فرض کنیم $f_1(x) \neq 0, g_1(x) \neq 0, f_2(x) = 0, g_2(x) \neq 0$. پس $f_1(x)g_1(x) = 0$. بنابراین عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $f_1(x)c = 0$. در نتیجه عنصر $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R'$ $\neq 0$ وجود دارد به طوریکه $F(x)\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0$. بنابراین حلقه R' مک کوی راست است.

حالت پنجم. فرض کنیم $f_1(x) \neq 0, g_1(x) \neq 0, f_2(x) = 0, g_2(x) = 0$. پس $f_1(x)g_1(x) = 0$. بنابراین عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $f_1(x)c = 0$. در نتیجه عنصر $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \in R'$ $\neq 0$ وجود دارد به طوریکه $F(x)\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} = 0$. بنابراین حلقه R' مک کوی راست است.

حالت ششم. اگر $f_1(x) = 0, g_1(x) = 0, f_2(x) \neq 0, g_2(x) \neq 0$. آنگاه می توانیم عنصر ناصفر $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R'$ را انتخاب می کنیم.

حالتهای دیگر شبیه حالات (۱) – (۵) می باشند. ■

مثال ۴.۱.۲. فرض کنیم حلقه R مک کوی راست باشد. نشان می دهیم زیر حلقه

$$T_6 = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & a_1 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & a_1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} ; a_i, b_i, c_i, d_i \in R \right\}$$

از حلقه ماتریس های بالا مثلثی 6×6، مک کوی راست نیست.

حل. دو چند جمله ای $f(x), g(x) \in T_6[x]$ را به صورت زیر در نظر می گیریم

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x,$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x.$$

به وضوح $f(x)g(x) = 0$ است، اما عنصر ناصفر c در T_6 وجود ندارد به طوریکه $f(x)c = 0$.

بنابراین حلقه T_6 مک کوی راست نیست.

فرض کنیم R یک حلقه باشد. قرار می دهیم:

$$B_4(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a & b & c \\ 0 & a_1 & d & r \\ 0 & 0 & a_1 & s \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \end{pmatrix} ; a_1, a, b, c, d, r, s \in R \right\}.$$

واضح است $B_4(R)$ زیر حلقه ای از حلقه ماتریس های بالا مثلثی 4×4 است.

قضیه ۵.۱.۲. اگر $B_4(R)$ مک کوی راست باشد، آنگاه R مک کوی راست است.

اثبات. فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{k} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{t} b_j x^j$ دو چندجمله ای مخالف صفردر $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. فرض کنیم E_{ij} نمایانگر ماتریس واحد باشد، یعنی ماتریسی که درایه (i,j)–ام آن ۱ و سایر درایه های آن ۰ باشد. در این صورت

$$(\sum_{i=0}^{k} E_{ij}x^i)(\sum_{j=0}^{t} E_{ij}x^j)=0.$$

چون $B_4(R)$ حلقه مک کوی راست است، عنصر مخالف صفر $c\in B_4(R)$ وجود دارد به طوریکه

$$(\sum_{i=0}^{k} E_{ij}x^i)c=0.$$

پس عنصر مخالف صفر $r\in R$ وجود دارد به طوریکه $f(x)r=0$. بنابراین R مک کوی راست است. ■

۲.۲ رابطه بین حلقه های مک کوی و نیم جابجایی

هیرانو [۲] ادعا کرد که اگر حلقه R نیم جابجایی باشد آنگاه $R[x]$ هم نیم جابجایی است، درحالیکه در مثال ۳.۳.۳، نشان می دهیم این ادعا درست نیست. همچنین نشان می دهیم حلقه نیم جابجایی وجود دارد که مک کوی نیست. در واقع ثابت می کنیم که هر حلقه برگشت پذیر مک کوی است. برای اثبات آن نیاز داریم بررسی کنیم که وقتی R برگشت پذیر یا نیم جابجایی است چه روابطی را می توان از $f(x)g(x) = ۰$ بدست آورد.

لم ۱.۲.۲. فرض کنیم حلقه R نیم جابجایی باشد و $f(x) = \sum_{i=۰}^{m} a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=۰}^{n} b_j x^j$ دو عضو از $R[x]$ باشند. در این صورت اگر $f(x)g(x) = ۰$، آنگاه به ازای هر $i \in \{۰, ۱, \dots, m\}$، $a_i b_۰^{i+۱} = ۰$.

اثبات. واضح است که برای هر $i \in \{۰, ۱, \dots, m+n\}$، عبارت

$$(*)_i \quad \sum_{j=۰}^{i} a_j b_{i-j} = ۰.$$

ضریب جمله iام معادله $f(x)g(x) = ۰$ است.

اگر $i = ۰$، آنگاه $a_۰ b_۰ = ۰$. فرض کنیم برای هر $j < k$، $a_j b_۰^{j+۱} = ۰$. به ویژه $a_j b_۰^k = ۰$، بنابراین با توجه به خاصیت نیم جابجایی، برای هر $j < k$، $a_j b_{k-j} b_۰^k = ۰$. اگر $b_۰^k$ را از راست در ضریب x^k ضرب کنیم، آنگاه:

$$۰ = \sum_{j=۰}^{k} a_j b_{k-j} b_۰^k = a_k b_۰^{k+۱}.$$

در نتیجه حکم ثابت می شود. ■

قضیه ۲.۲.۲. هرحلقه برگشت پذیر، مک کوی است.[۱۳]

---
[۲] Hirano

اثبات. فرض کنیم حلقه R برگشت پذیر باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ دو چندجمله ای مخالف صفر از $R[x]$ به ترتیب از درجه m و n باشند و $f(x)g(x)=0$. کافیست نشان دهیم که R مک کوی چپ است.

برای هر چندجمله ای $a(x)\in R[x]$، ایده آل چپ تولید شده به وسیله ضرایب $a(x)$ را با C_a نمایش می دهیم. به استقرا روی درجه $g(x)$ نشان می دهیم که عنصر مخالف صفر $c\in C_f$ وجود دارد به طوریکه $cg(x)=0$.

می توان فرض نمود $a_0,b_0\neq 0$. در غیر اینصورت $g(x),f(x)$ را بر توانهایی از x تقسیم می کنیم تا جمله ثابت آنها ناصفر شود.

اگر $n=0$، آنگاه با فرض $c=a_0$ نتیجه می گیریم $cg(x)=a_0b_0=0$ و لذا حکم برقرار است.

فرض کنیم $n\geq 1$. با توجه به لم ۱.۲.۲، عدد $l\geq 0$ را طوری انتخاب می کنیم که

$$f(x)b_0^{l+1}=0\neq f(x)b_0^l.$$

قرار می دهیم $a(x):=b_0^lf(x)$. چون R برگشت پذیر است، $a(x)\neq 0$ اما $b_0^lf(x)b_0=0$. پس

$$a(x)g(x)=0\quad,\quad a(x)b_0=0. \tag{۱.۲}$$

فرض کنیم $b(x):=(g(x)-b_0)/x$، بنابراین با توجه به معادله (۱.۲)، $a(x)b(x)=0$.

یاد آوری می کنیم که $b(x)\neq 0$. چون $\deg(g(x))=n>0$ و $\deg(b(x))=n-1<n$، لذا با توجه به فرض استقرا عنصر مخالف صفر $c\in C_a$ وجود دارد که $cb(x)=0$. از طرفی $a(x)b_0=0$، پس $C_ab_0=(0)$ و از این رو $cb_0=0$. در نتیجه $cg(x)=0$.

با توجه به ساختار $a(x)$ می دانیم $C_a\subseteq C_f$. بنابراین $c\in C_f$ و این برهان را کامل می کند. ■

لم ۳.۲.۲. فرض کنیم حلقه R نیم جابجایی باشد و $f(x)=\sum_{i=0}^{m}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n}b_jx^j$ عناصری از $R[x]$ باشند که $f(x)\neq 0$ و $f(x)g(x)=0$. در این صورت اعداد صحیح نامنفی $l_0,l_1,\ldots,l_n\in N$

وجود دارند به طوریکه برای هر $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$f(x)b_k^{l_k}b_{k-1}^{l_{k-1}}\ldots b_0^{l_0} \neq 0 = f(x)b_k^{l_k+1}b_{k-1}^{l_{k-1}}\ldots b_0^{l_0}.$$

اثبات. وجود l_0 از لم ۱.۲.۲ نتیجه می شود. به استقرا فرض کنیم $l_0, l_1, \ldots, l_j$ وجود داشته باشند که در شرایط بالا صدق می کنند. قرار می دهیم $r = b_j^{l_j}b_{j-1}^{l_{j-1}}\ldots b_0^{l_0}$.

چون $f(x)g(x) = 0$، لذا $m+1$ معادله زیر را داریم:

$$\begin{aligned}
(*)_{j+1} \quad & a_0b_{j+1} + a_1b_j + \cdots + a_mb_{j-m+1} = 0,\\
(*)_{j+2} \quad & a_0b_{j+2} + a_1b_{j+1} + \cdots + a_mb_{j-m+2} = 0,\\
& \vdots\\
(*)_{j+m+1} \quad & a_0b_{j+m+1} + a_1b_{j+m} + \cdots + a_mb_{j+1} = 0,
\end{aligned}$$

که $(*)_\alpha$، ضریب x^α در معادله $f(x)g(x) = 0$ را نشان می دهد.

به ازای هر i و هر $k \leq j$، چون $a_ir = 0$، پس با توجه به خاصیت نیم جابجایی و چگونگی انتخاب $l_0, l_1, \ldots, l_j$، داریم $a_ib_kr = 0$. نشان می دهیم که برای هر $i \leq m$، $a_ib_{j+1}^{i+1}r = 0$. سپس l_{j+1} را کوچکترین عدد صحیح نامنفی در نظر می گیریم که به ازای هر i، $a_ib_{j+1}^{l_{j+1}+1}r = 0$.

اگر معادله $(*)_{j+1}$ را از راست در r ضرب کنیم، آنگاه

$$0 = a_0b_{j+1}r + a_1b_jr + \cdots + a_mb_{j-m+1}r = a_0b_{j+1}r.$$

حال اگر معادله $(*)_{j+2}$ را از راست در $b_{j+1}r$ ضرب کنیم با توجه به خاصیت نیم جابجایی داریم:

$$0 = a_0b_{j+2}b_{j+1}r + a_1b_{j+1}^2r + \cdots + a_mb_{j-m+2}b_{j+1}r = a_1b_{j+1}^2r.$$

با ادامه این روند نتیجه می گیریم که برای هر $i \leq m$، $a_ib_{j+1}^{i+1}r = 0$. ■

۳.۲ حلقه نیم جابجایی وجود دارد که مک کوی نیست

در این بخش مثالی ارائه می دهیم که نیم جابجایی است اما مک کوی نیست. در بررسی این مثال به لم لوزی نیاز داریم. بنابراین ابتدا یه سری مفاهیم مقدماتی جهت بیان لم لوزی ذکر می کنیم.

مقدمه. فرض کنیم k یک حلقه جابجایی و یکدار و X یک مجموعه ناتهی باشد. همچنین فرض کنیم $\langle X\rangle$، تکوار تولید شده توسط X باشد، یعنی؛ $\langle X\rangle = \{x_۱x_۲\dots x_n \mid x_i\in X\}\cup\{۱\}$. در این صورت $k\langle X\rangle$، k−جبر شرکت پذیر آزاد تولید شده توسط X است.

تقلیل. فرض کنیم $i\in I$ و $A,B\in\langle X\rangle$. مجموعه I یک مجموعه اندیس گذار باشد ، $\{W_i{-}f_i\,;i\in I\}$ را در نظر می گیریم که به ازای هر $i\in I$، $W_i\in\langle X\rangle$ و $f_i\in k\langle X\rangle$. بنابراین k−درونریختی $\varphi : k\langle X\rangle\to k\langle X\rangle$ با ضابطه $AW_iB\mapsto Af_iB$ را یک k−تقلیل می نامیم، که این تابع هر عنصر از $\langle X\rangle$ را به خودش تصویر می کند و سایر عناصر $k\langle X\rangle$ را حرکت نمی دهد.

توجه داریم که برای کلیه عناصر در $\langle X\rangle$ یا در $k\langle X\rangle$ حداقل یک تقلیل وجود دارد که می توان برای آنها بکار برد. پس اگر هر تقلیل، تغییرناپذیر باشد آنگاه تک جمله ای تقلیل ناپذیر است.

گراف. گراف جهت دار G، گرافی است که در آن راس w به راس w' وصل می شود هرگاه w' حاصل تقلیل w باشد.

مؤلفه همبندی. زیر گراف ماکسیمال C از گراف G را یک مؤلفه همبندی می نامیم هرگاه بین هر دو راس آن یک مسیر وجود داشته باشد.

لم لوزی. فرض کنیم G یک گراف جهت دار و v یک راس از آن باشد به طوریکه

۱. طول هر مسیر جهت دار با نقطه شروع v متناهی باشد

۲. (شرط لوزی) هر دو مسیر با نقطه شروع از v را بتوان به مسیرهای جهت دار با نقطه پایان یکسان توسیع داد. [۴]

در این صورت هر مؤلفه همبندی C از گراف G دارای یک راس ماکسیمال یکتا است. منظور از یک راس ماکسیمال راسی است که هر مسیر جهت دار ماکسیمال از C به آن منتهی می شود.

مثال ۱.۳.۲. فرض کنیم $k = \mathbb{F}_2\langle a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1\rangle$، $\mathbb{F}_2$–جبر آزاد تولید شده توسط ۶ متغیر باشد. ایده آلی که توسط عناصر

$$\langle a_0b_0,\ a_0b_1 + a_1b_0,\ a_1b_1 + a_2b_0,\ a_2b_1 + a_3b_0,\ a_3b_1,$$

$$a_0a_j\ (0 \le j \le 3),\ a_3a_j\ (0 \le j \le 3),\ a_1a_j + a_2a_j\ (0 \le j \le 3),$$

$$b_ib_j\ (0 \le i,j \le 1),\ b_ia_j\ (0 \le i \le 1, 0 \le j \le 3)\rangle$$

تولید شود را به I نمایش می دهیم. فرض کنیم $R = k/I$.

اگر قرار دهیم $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ و $G(x) = b_0 + b_1x$، آنگاه با توجه به تعریف I، $F(x)G(x) = 0$. نشان می دهیم $F(x)$ و $G(x)$ عناصر مخالف صفر در $R[x]$ هستند. علاوه بر این ثابت می کنیم R نیم جابجایی و مک کوی چپ است اما مک کوی راست نیست.

ابتدا شرح می دهیم که چطور می توان هر عنصر R را به فرم تقلیل یافته یکتا نوشت.

ادعا ۱: هر عنصر $\gamma \in R$ به طور منحصر به فرد به فرم زیر نوشته می شود.

$$\gamma = f_0 + f_1(a_2)a_1 + f_2(a_2)a_2 + g(a_2)a_0 + h(a_2)a_3 +$$

$$(r_0 + r_1(a_2)a_1 + r_2(a_2)a_2 + r_3(a_2)a_3)b_0 + s_0b_1.$$

که

$$f_0, r_0, s_0 \in \mathbb{F}_2 \quad , \quad f_1(x), f_2(x), g(x), h(x), r_1(x), r_2(x), r_3(x) \in \mathbb{F}_2[x].$$

اثبات. با استفاده از لم لوزی ثابت می کنیم. فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$. در این صورت $w = x_1x_2\ldots x_n$ را یک تک جمله ای از درجه n می نامیم. نشان می دهیم برای هر

w شرایط لم لوزی برقرار است. چون در هر مورد روند اثبات مشابه است در زیر به چند مورد اشاره می کنیم.

اگر تک جمله ای w شامل a_0b_0، a_3b_1، b_ib_j، b_ia_j، a_0a_j و a_3aj باشد آنگاه با توجه به تعریف I تک جمله ای صفر است. در غیر اینصورت در w، a_ib_1ها را با $a_{i+1}b_0$ و a_1a_jها را با a_2a_j جایگزین می کنیم.

فرض کنیم $w = x$. که در آن $x \in X$. در این صورت حکم برقرار است. به عنوان مثال اگر $w = a_0$ آنگاه با در نظر گرفتن

$$f_0 = 0, f_1(x) = f_2(x) = h(x) = 0,$$

$$r_0 = 0, s_0 = 0,\ r_1(x) = r_2(x) = r_3(x) = 0, g(x) = 1$$

a_0 به شکل مورد نظر نوشته می شود.

فرض کنیم $w = x_1x_2$. که در آن $x_1, x_2 \in X$. اگر w به صورت a_0b_0، a_0a_j، a_3b_1، a_3a_j، b_ib_j و b_ia_j باشد آنگاه صفر می شود. فرض کنیم $w = a_0b_1$. از آنجا که همه a_ib_1ها را با $a_{i+1}b_0$ و a_1a_jها را با a_2a_j جایگزین می کنیم، بنابراین $w = a_1b_0$. اگر

$$f_0 = 0, f_1(x) = f_2(x) = g(x) = h(x) = 0,$$

$$r_0 = 0, s_0 = 0, r_2(x) = r_3(x) = 0, r_1(x) = 1$$

آنگاه a_1b_0 تک جمله ای منحصر به فرد در R است. همچنین اگر $w = a_1a_3$، آنگاه آن را با a_2a_3 جایگزین می کنیم و در نتیجه a_2a_3 نیز تک جمله ای منحصر به فرد خواهد بود. به طور مشابه برای حالت های دیگر حکم برقرار است.

حال فرض کنیم $w = x_1x_2x_3$. شرایط لم لوزی را بررسی می کنیم.

فرض کنیم $w = a_1a_0b_1$. در این صورت دو مسیر جهت دار داریم:

$$a_1a_0b_1 \longmapsto a_2a_0b_1 \longmapsto a_2a_0b_1 \longmapsto a_2a_1b_0$$

$$a_1a_0b_1 \longmapsto a_1^2b_0 \longmapsto a_2a_1b_0$$

مطابق انتظار مشاهده می کنیم دو شرط لم لوزی برقرار است. بنابراین اگر در رابطه γ، $r_1(x) = x$ و بقیه جملات را صفر اختیار کنیم آنگاه $a_2a_1b_0$ تک جمله ای منحصر به فرد خواهد بود.

تک جمله ای w می تواند **۴**حرفی، **۵**حرفی و ... باشد که در هر کدام روند استدلال مشابه حالات ذکر شده است. بنابراین می توان نتیجه گرفت که هر عنصر R به طور یکتا به فرم γ نوشته می شود. ■

ادعا ۲: حلقه R نیم جابجایی است.

اثبات. با توجه به ادعای ۱ فرض کنیم γ, γ' عناصری یکتا از R باشند و $\gamma\gamma' = 0$. برای محاسبه راحتتر γ و γ' را به فرم زیر می نویسیم.

$$\gamma = f_0 + f_1a_1 + f_2a_2 + ga_0 + ha_3 + (r_0 + r_1a_1 + r_2a_2 + r_3a_3)b_0 + s_0b_1$$

$$\gamma' = f'_0 + f'_1a_1 + f'_2a_2 + g'a_0 + h'a_3 + (r'_0 + r'_1a_1 + r'_2a_2 + r'_3a_3)b_0 + s'_0b_1.$$

برای اینکه ثابت کنیم R نیم جابجایی است کافیست نشان دهیم برای هر $r \in R$، $\gamma r\gamma' = 0$.

ابتدا ثابت می کنیم برای حروف (یعنی تک جمله ایهای از درجه۱) این رابطه برقرار است.

اگر γ, γ' صفر باشند آنگاه حکم بدیهی است. بنابراین فرض کنیم $\gamma, \gamma' \neq 0$. چون $\gamma\gamma' = 0$، پس $f_0f'_0 = 0$. در نتیجه $f_0 = 0$ یا $f'_0 = 0$.

فرض کنیم $f_0 = 0$. اگر $\delta \neq 0$ مجموع جملات مخالف صفر γ از کمترین درجه باشد، چون I همگن است آنگاه $\delta f'_0 = 0$. بنابراین $f'_0 = 0$. به طور مشابه اگر فرض شود $f'_0 = 0$، آنگاه $f_0 = 0$ را بدست می آوریم. در نتیجه در همه موارد $f_0 = f'_0 = 0$.

توجه. فرض کنیم A_n مجموعه ترکیبات خطی تک جمله ایها از درجه n روی $\mathbb{F}_2$ باشد. در این صورت ایده آل I همگن است، هرگاه $\sum_{i=1}^{s} r_i \in I$، آنگاه $r_i \in I$. $(r_i \in A_i)$

چون $f'_0 = 0$ و با توجه به تعریف I، $b_i a_j = 0$ و $b_i b_j = 0$، بنابراین $b_i\gamma' = 0$. در نتیجه $\gamma b_i \gamma' = 0$. بنابراین کافیست نشان دهیم برای هر $0 \leq j \leq 3$، $\gamma a_j \gamma' = 0$.

برای این منظور ابتدا γa_j را محاسبه می کنیم.

$$\gamma a_j = (f_1 a_1 + f_2 a_2 + g a_0 + h a_3 + (r_0 + r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3) b_0 + s_0 b_1) a_j =$$

$$f_1 a_1 a_j + f_2 a_2 a_j + g a_0 a_j + h a_3 a_j + (r_0 + r_1 a_1 + r_2 a_2 + r_3 a_3) b_0 a_j + s_0 b_1 a_j.$$

چون

$$a_0 a_j = 0 \quad , \quad a_3 a_j = 0 \quad , \quad b_0 a_j = 0 \quad , \quad b_1 a_j = 0$$

پس $\gamma a_j = f_1 a_1 a_j + f_2 a_2 a_j$. اما می دانیم $a_1 a_j + a_2 a_j = 0$. بنابراین $a_1 a_j = a_2 a_j$، و در نتیجه $\gamma a_j = (f_1 + f_2) a_2 a_j$. اگر $f_1 = f_2$، آنگاه $\gamma a_j \gamma' = 0$. پس فرض کنیم $f_1 \neq f_2$. نشان می دهیم این فرض متناقض با $\gamma' \neq 0$.

ابتدا فرم تقلیل یافته $\gamma\gamma'$ را محاسبه می کنیم.

$$0 = \gamma\gamma' = (f_1 + f_2) a_2 (f'_1 a_1 + f'_2 a_2 + g' a_0 + h' a_3) + f_1 a_1 (r'_0 + r'_1 a_1 + r'_2 a_2 + r'_3 a_3) b_0 +$$

$$s'_0 f_1 a_1 b_1 + f_2 a_2 (r'_0 + r'_1 a_1 + r'_2 a_2 + r'_3 a_3) b_0 + s'_0 f_2 a_2 b_1 + g s'_0 a_0 b_1 +$$

$$h a_3 (r'_0 + r'_1 a_1 + r'_2 a_2 + r'_3 a_3) b_0 + h s'_0 a_3 b_1$$

$$= (f_1 + f_2) a_2 (f'_1 a_1 + f'_2 a_2 + g' a_0 + h' a_3) + (s'_0 f_2 + r'_0 h + (f_1 + f_2) a_2 r'_3) a_3 b_0$$

$$+ (s'_0 f_1 + r'_0 f_2 + (f_1 + f_2) a_2 r'_2) a_2 b_0 + (s'_0 g + r'_0 f_1 + (f_1 + f_2) a_2 r'_1) a_1 b_0.$$

چون $f_1 + f_2 \neq 0$، پس باید $f'_1 = f'_2 = g' = h' = 0$. همچنین داریم:

$$(1)\quad s'_0 f_2 + r'_0 h + (f_1 + f_2)a_2 r'_3 = 0$$

$$(2)\quad s'_0 f_1 + r'_0 f_2 + (f_1 + f_2)a_2 r'_2 = 0$$

$$(3)\quad s'_0 g + r'_0 f_1 + (f_1 + f_2)a_2 r'_1 = 0$$

فرض کنیم $s'_0 = 1$. اگر $r'_0 = 1$ آنگاه با توجه به اینکه $f_1 \neq f_2$ از معادله (۲) نتیجه می گیریم $deg(f_1 + f_2)a_2 \leq deg(f_1 + f_2)$ که امکان پذیر نیست. بنابراین $r'_0 = 0$. اما با فرض $s'_0 = 1$ حاصلجمع معادله های (۱), (۲) دوباره ما را به این تناقض می رساند. بنابراین باید $s'_0 = 0$ باشد.

اگر $r'_0 = 1$ آنگاه حاصلجمع معادله های (۲), (۳) همانند قبل به تناقض می رسد. پس $r'_0 = 0$. از طرفی چون $f_1 \neq f_2$، بنابراین $r'_1 = r'_2 = r'_3 = 0$ و درنتیجه $\gamma' = 0$ که این متناقض با فرض $\gamma' \neq 0$ است. بنابراین اگر r یک حرف یا یک تک جمله ایی از درجه ۱ باشد آنگاه در همه موارد $\gamma r \gamma' = 0$.

حال اگر روند اثبات را به جای γ با γr تکرار کنیم که r یک تک جمله ای از درجه مثبت است، باز هم نتیجه برقرار است. همچنین چون هر عنصر R مجموعی از تک جمله ایهاست پس قرار دادن آنها کنار یکدیگر برای هر $r \in R$، $\gamma r \gamma' = 0$ را نتیجه می دهد. بنابراین R نیم جابجایی است. ■

توجه: از ادعای ۱ نتیجه می گیریم هر یک از ضرایب $F(x)$ و $G(x)$ مخالف صفر هستند. پس در $R[x]$، $F(x), G(x) \neq 0$.

ادعا ۳: حلقه R مک کوی راست نیست.

اثبات. کافیست نشان دهیم اگر برای هر $r \in R$، $F(x)r = 0$ آنگاه $r = 0$. بنابراین کافیست ثابت کنیم اگر $a_2 r = 0$ آنگاه $r = 0$، که این با توجه به ادعای ۱ و محاسبه فرم تقلیل یافته $a_2 r$ به ازای هر $r \in R$ بدیهی است. در نتیجه R مک کوی راست نیست. ■

ادعا ۴: حلقه R مک کوی چپ است.

اثبات. فرض کنیم $P(x)=\sum_{i=۱}^{m} p_i x^i$ و $Q(x)=\sum_{i=۱}^{n} q_i x^i$ دو چند جمله ای مخالف صفر از $R[x]$ باشند و $P(x)Q(x)=۰$. اگر هر q_i جمله ثابت صفر باشد آنگاه $b_۰ Q(x)=۰$ و حکم برقرار است. پس فرض می کنیم q_i جمله ثابت مخالف صفر و k کوچکترین اندیسی باشد که q_k این ویژگی را دارد.

فرض کنیم برای هر $p_i \neq ۰$، p'_i مجموع جملات مخالف صفر p_i از کوچکترین درجه باشد و برای هر $p_i=۰$، $p'_i=۰$. همچنین j را کوچکترین اندیسی در نظر می گیریم که در میان اعضای مخالف صفر $\{p'_۰, p'_۱, \ldots, p'_m\}$، p'_j می نیمم درجه را داشته باشد.

می دانیم j وجود دارد چون $P(x)\neq ۰$. حال با توجه به درجه جمله $j+k$ام معادله $P(x)Q(x)=۰$ داریم:

$$\sum_{r,s:r+s=j+k} p_r q_s = ۰. \qquad (۲.۲)$$

چون ایده آل I همگن است، پس مجموع جملات ثابت معادله (۲.۲) باید صفر شود.

اما در حاصلضرب $p_j q_k$ معادله (۲.۲) تنها یک جمله از کوچکترین درجه به نام $p'_j \cdot ۱$ وجود دارد که مخالف صفر است و این یک تناقض است. بنابراین فرض $q_i \neq ۰$ نمی تواند درست باشد. درنتیجه R مک کوی چپ است.

■

فصل ۳

حلقه کسرها

[۵]

۱.۳ مقدمه

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم X یک مجموعه ضربی بسته از حلقه R باشد. گوییم X در شرط اور راست صدق می کند هرگاه برای هر $x \in X, r \in R$، عناصر $y \in X, s \in R$، وجود داشته باشند به طوریکه $ry = xs$. مجموعه ضربی بسته ای که در شرط اور راست صدق می کند را مجموعه اور راست می نامیم.

شرط اور چپ و مجموعه اور چپ به طور مشابه تعریف می شوند.

تعریف ۲.۱.۳. مجموعه ضربی بسته ای که هم مجموعه اور راست و هم مجموعه اور چپ باشد را مجموعه اور می نامیم.

به عنوان مثال هر مجموعه ضربی بسته در یک حلقه جابجایی یک مجموعه اور است.

تعریف ۳.۱.۳. فرض کنیم A یک زیرمدول از B باشد. A را زیرمدول اساسی B می نامیم هرگاه A با هر زیرمدول ناصفر از B اشتراک ناصفر داشته باشد و با علامت $A \leq_e B$ نمایش می دهیم. تحت این شرایط گوییم B یک توسیع اساسی از A است.

تعریف ۴.۱.۳. فرض کنیم A و B دو $R-$مدول باشند. $R-$تکریختی $f : A \to B$ را یک تکریختی

اساسی می نامیم هرگاه $f(A) \leq_e B$.

تعریف ۵.۱.۳. فرض کنیم A یک $R-$مدول و X یک زیرمجموعه ضربی بسته از حلقه R باشد. زیرمجموعه $X-$تابی مدول A را چنین تعریف می کنیم:

$$t_X(A) = \{a \in A \mid ax = 0 \ , x \in X \text{ برای برخی}\}.$$

مدول A را $X-$تابی می نامیم هرگاه $t_X(A) = A$ و $X-$بدون تاب می نامیم هرگاه $t_X(A) = 0$.

توجه داریم که اگر A یک $Z-$مدول باشد و $X = Z \setminus \{0\}$، آنگاه A یک $Z-$مدول $X-$تابی ($X-$بدون تاب) است اگر وتنها اگر A یک گروه جمعی تابی (بدون تاب) باشد.

لم ۶.۱.۳. فرض کنیم X یک زیرمجموعه اور راست از حلقه R باشد.

(۱) اگر $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ آنگاه عناصر $s_1, s_2, \ldots, s_n \in R$ وجود دارند که

$$x_1 s_1 = \cdots = x_n s_n \quad \text{و} \quad x_1 s_1 \in X.$$

یعنی $x_1 R \cap \cdots \cap x_n R \cap X \neq \varnothing$.

(۲) برای هر $R-$مدول راست A مجموعه $t_X(A)$ یک زیرمدول A است.

اثبات. (۱) کافی است برای $n = 2$ ثابت کنیم. چون X یک مجموعه اور راست است عناصر $s \in R$ و $y \in X$ وجود دارند به طوریکه $x_1 y = x_2 s$ و لذا $x_1 y \in X$.

(۲) اگر $a_1, a_2 \in t_X(A)$ آنگاه عناصر $x_1, x_2 \in X$ وجود دارند به طوریکه $a_1 x_1 = 0 = a_2 x_2$. بنابر بر (۱) عنصر $y \in x_1 R \cap x_2 R \cap X$ وجود دارد به طوریکه $(a_1 \pm a_2) y = 0$ و لذا $(a_1 \pm a_2) \in t_X(A)$.

حال فرض کنیم $r \in R$. از آنجائیکه X اور راست است نتیجه می گیریم عناصر $z \in X, s \in R$ وجود دارند به طوریکه $rz = x_1 s$. پس $a_1 rz = a_1 x_1 s = 0$ در نتیجه $a_1 r \in t_X(A)$. ■

تعریف ۷.۱.۳. فرض کنیم X یک زیرمجموعه اور راست از حلقه R و A یک $R-$مدول راست باشد. در این صورت $t_X(A)$ را زیرمدول $X-$تابی A می نامیم.

لم ۸.۱.۳. فرض کنیم X یک مجموعه اور راست از حلقه R باشد.

(a) اگر A یک $R-$مدول راست باشد آنگاه $t_X(A)$ یک زیرمدول $X-$تابی و $A/t_X(A)$ یک مدول $X-$بدون تاب است.

(b) هر زیرمدول، هر مدول خارج قسمتی و هر مجموع از مدول های $X-$تابی، $X-$تابی است.

(c) فرض کنیم $B \leq A$ دو $R-$مدول باشند به طوریکه A/B و B هر دو $X-$تابی باشند. در این صورت A نیز $X-$تابی است.

(d) هر زیرمدول و هر حاصلضرب مستقیم از مدولهای $X-$بدون تاب، $X-$بدون تاب است.

(e) فرض کنیم $B \leq_e A$ دو $R-$ مدول باشند و B، $X-$بدون تاب باشد. در این صورت A، $X-$بدون تاب است.

اثبات. قسمت $(a), (c), (d)$ به سادگی قابل اثبات هستند.

(b). فرض کنیم $\{A_i \mid i \in I\}$ خانواده ای از زیرمدولهای $X-$تابی از $R-$مدول راست A باشد. در این صورت به ازای هر $i \in I$، $A_i \leq t_X(A)$ و لذا $\sum_i A_i \leq t_X(A)$. بنابراین $\sum_i A_i$، $X-$تابی است.

(e). چون $t_X(A)$ زیرمدولی از A است و $B \cap t_X(A) = t_X(B) = 0$، بنابراین $t_X(A) = 0$. ■

تعریف ۹.۱.۳. $R-$مدول A را انژکتیو می نامیم هرگاه برای هر $R-$زیرمدول C از B، هر $R-$همریختی $C \to A$ قابل توسیع به $R-$همریختی $B \to A$ باشد.

گزاره ۱۰.۱.۳. فرض کنیم A یک $R-$مدول راست باشد. در این صورت A_R انژکتیو است اگر و تنها اگر برای هر ایده آل راست I از حلقه R و هر $f \in Hom_R(I, A)$ عنصر $a \in A$ به قسمی وجود داشته باشد که برای هر $r \in I$، $f(r) = ar$.

اثبات . اگر A_R انژکتیو باشد آنگاه هر $f \in Hom_R(I, A)$ قابل توسیع به عنصری از $Hom_R(I, A)$ مانند $f_۱$ است و لذا برای هر $r \in I$، $f(r) = f_۱(r) = f_۱(۱)r$.

بعکس، فرض کنیم A_R در شرایط داده شده صدق کند و C یک R−زیرمدول B و $f : C \to A$ یک R−همریختی باشد. فرض کنیم X مجموعه تمام زوج مرتب های $(C_۱, f_۱)$ باشد که $C_۱$ یک R−زیرمدول B و $f_۱ \in Hom_R(C_۱, A)$ توسیعی از f است. رابطه $\leq$ را روی X چنین تعریف می کنیم: برای هر $(C_۱, f_۱), (C_۲, f_۲) \in X$، $(C_۱, f_۱) \leq (C_۲, f_۲)$ اگر و تنها اگر $(C_۱ \leq C_۲)$ و $f_۲$ توسیعی از $f_۱$ باشد. بنابراین به آسانی دیده می شود که X نسبت به رابطه $\leq$ یک مجموعه جزئی مرتب است و هر زنجیر از عناصر آن یک کران بالا در X دارد. پس بنا بر لم زرن، X حداقل یک عضو ماکسیمال چون (C^*, f^*) دارد.

ادعا می کنیم $C^* = B$. در غیر اینصورت عنصر $b \in B \backslash C^*$ را انتخاب می کنیم و قرار می دهیم $I = \{r \in R | br \in C^*\}$. به وضوح I یک ایده آل راست R است و نگاشت $I \to A$ با ضابطه $r \mapsto f^*(br)$ یک R−همریختی است. پس عنصر $a \in A$ به قسمی وجود دارد که برای هر $r \in I$، $f^*(br) = ar$. به سادگی دیده می شود نگاشت $f_۱ : C^* + bR \to A$ با ضابطه $f_۱(c + br) = f^*(c) + ar$ یک R−همریختی و توسیعی از f^* است که با ماکسیمال بودن (C^*, f^*) در تناقض است. بنابراین $C^* = B$.
■

تعریف ۱۱.۱.۳. Z−مدول A را بخش پذیر می نامیم هرگاه برای هر عدد صحیح ناصفر n، $nA = A$.

گزاره ۱۲.۱.۳. (۱). Z−مدول A انژکتیو است اگر و تنها اگر بخش پذیر باشد.

(۲). هر Z−مدول، زیرمدول یک مدول بخش پذیر است.

اثبات. (۱). به وضوح عنصر $a \in A$ بر عدد صحیح ناصفر n بخش پذیر است اگر و تنها اگر Z−همریختی $nZ \to A$ با ضابطه $n \mapsto a$ قابل توسیع به Z−همریختی $Z \to A$ باشد.

(۲). اگر A یک $Z-$مدول باشد آنگاه $Z-$مدول آزاد F و زیرمدول K از F به قسمی وجود دارند که $A \cong F/K$. چون F مجموع مستقیم خارجی نسخه هایی از Z است، پس F را می توان در D که مجموع مستقیم خارجی نسخه هایی از Q است نشاند.

از آنجا که $Z-$مدول Q بخش پذیر است، D نیز بخش پذیر می باشد. فرض کنیم $f : F \to D$ یک $Z-$تکریختی باشد. در نتیجه $A \cong F/K \cong f(F)/f(K) \subseteq D/f(K)$ و چون $D/f(K)$ بخش پذیر است از این رو بنابر (۱)، $D/f(K)$ انژکتیو است. ■

فرض کنیم D، گروه آبلی و R یک حلقه باشد. برای هر $f \in Hom_Z(R, D)$ و $r \in R$، ضابطه fr را چنین تعریف می کنیم: برای هر $x \in R$،

$$(fr)(x) = f(rx).$$

لم ۱۳.۱.۳. اگر D یک $Z-$مدول بخش پذیر و R یک حلقه باشد آنگاه $R-$مدول $H = Hom_Z(R, D)$ انژکتیو است.

اثبات . فرض کنیم I یک ایده آل راست از R باشد و $f \in Hom_R(I, H)$. نگاشت $\psi : I \to D$ با ضابطه $\psi(r) = f(r)(1)$ یک $Z-$همریختی است. چون $Z-$مدول D انژکتیو است، ψ را می توان به $Z-$همریختی $g : R \to D$ توسیع داد و چون برای هر $r \in I$ و $x \in R$،

$$(gr)(x) = g(rx) = \psi(rx) = (f(rx))(1) = (f(r)x)(1) = (f(r))(x)$$

بنابراین $f(r) = gr$. در نتیجه بنابر گزاره ۱۰.۱.۳، $R-$مدول H انژکتیو است. ■

قضیه ۱۴.۱.۳. هر مدول را می توان در یک مدول انژکتیو نشاند.

اثبات. فرض کنیم A یک $R-$مدول راست باشد. بنابر گزاره ۱۲.۱.۳، A به عنوان $Z-$مدول قابل نشاندن در $Z-$مدول بخش پذیر D است. بنابر لم ۱۳.۱.۳، $R-$مدول $Hom_Z(R, D)$ انژکتیو است، و به عنوان

$R-$مدول،

$$A \cong Hom_R(R, A) \leq Hom_Z(R, A) \leq Hom_Z(R, D).$$

■

نتیجه ۱۵.۱.۳. مدول A انژکتیو است اگر و تنها اگر جمعوند مستقیم هر توسیع از خودش باشد.

اثبات. فرض کنیم $R-$مدول A انژکتیو باشد و $A \leq B$. نگاشت همانی $i : A \to A$ قابل توسیع به $R-$همریختی $f : B \to A$ است، و لذا $B = A \oplus \ker(f)$.

بعکس، بنابر قضیه ۱۴.۱.۳، A قابل نشاندن در $R-$مدول انژکتیو B است. در نتیجه A جمعوند مستقیم B است، و لذا خودش انژکتیو است. ■

تعریف ۱۶.۱.۳. مدول B را یک توسیع اساسی محض از مدول A می نامیم هرگاه $A \leq_e B$، و $A < B$.

گزاره ۱۷.۱.۳. مدول A انژکتیو است اگر و تنها اگر هیچ توسیع اساسی محض نداشته باشد.

اثبات. فرض کنیم A انژکتیو و مدول B یک توسیع اساسی از A باشد. بنابر نتیجه ۱۵.۱.۳، زیرمدول C از B به قسمی موجود است که $B = A \oplus C$. چون $A \leq_e B$، لذا $C = ۰$ و در نتیجه $B = A$.

بعکس، اگر $R-$مدول A انژکتیو نباشد آنگاه بنابر نتیجه ۱۵.۱.۳، مدول C شامل A به قسمی موجود است که A جمعوند مستقیم C نیست. زیرمدول B از C را طوری انتخاب می کنیم که نسبت به خاصیت $A \cap B = ۰$ ماکسیمال باشد. واضح است که $A \oplus B < C$. چون $(A \oplus B)/B \leq_e C/B$، لذا $R-$تکریختی $A \to C \to C/B$ اساسی است، و از این رو یک توسیع اساسی از A وجود دارد. ■

توجه. $R-$زیرمدول A از C را بسته می نامیم هرگاه A هیچ توسیع اساسی نابدیهی در C نداشته باشد. یعنی؛ اگر $A \leq_e B \leq C$ آنگاه $A = B$. واضح است که $C, ۰$ زیرمدولهای بسته C هستند. همچنین هر جمعوند مستقیم C یک زیرمدول بسته C است.

تعریف ۱۸.۱.۳. فرض کنیم A یک زیرمدول اساسی B باشد. اگر B در هر توسیع از خودش بسته باشد آنگاه B را توسیع اساسی ماکسیمال A می نامیم.

قضیه ۱۹.۱.۳. فرض کنیم R–مدول انژکتیو B یک توسیع از مدول A باشد. در این صورت A دارای یک توسیع اساسی ماکسیمال مشمول در B است.

اثبات. اگر X خانواده تمام زیرمدولهای B باشد که توسیع اساسی از A هستند آنگاه X با رابطه شمول یک مجموعه جزئی مرتب ناتهی است که هر زنجیر افزایشی در آن دارای کران بالا می باشد. پس بنابر لم زرن، X دارای عضو ماکسیمال E است. حال فرض کنیم E' یک توسیع اساسی از E باشد. چون B انژکتیو است، R–همریختی $g : E' \to B$ به قسمی موجود است که توسیعی از R–همریختی $E \xrightarrow{\subseteq} B$ است. چون $A \cap \ker(g) = (0)$، و $A \leq_e E \leq_e E'$، پس $\ker(g) = (0)$. بنابراین $E' \cong g(E') \subseteq B$ و با توجه به انتخاب E بایستی $E = E'$. ■

توجه. فرض کنیم مدول B انژکتیو باشد و $A \leq B$. اگر هر $A \subseteq E \subset B$ انژکتیو نباشد آنگاه B را توسیع انژکتیو مینیمال A می نامیم.

قضیه ۲۰.۱.۳. فرض کنیم A یک R–زیرمدول B باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند.

۱. B توسیع اساسی ماکسیمال A است؛

۲. B انژکتیو و توسیع اساسی A است؛

۳. B توسیع انژکتیو مینیمال A است.

اثبات. اثبات (۱) $\leftrightarrow$ (۲) و (۲) $\leftarrow$ (۳) با توجه به گزاره ۱۷.۱.۳، بدیهی است.

(۳) $\leftarrow$ (۲). بنابر قضیه ۱۹.۱.۳، زیرمدول $E \subseteq B$ وجود دارد که توسیع اساسی ماکسیمال A می باشد. پس با توجه به (۱) $\leftrightarrow$ (۲)، E انژکتیو است و لذا بایستی $E = B$. ■

توجه. R−مدول B را که در یکی از گزاره های قضیه ۲۰.۱.۳ صدق کند پوش انژکتیو A می نامیم و آن را با $E(A)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۲۱.۱.۳. پوش انژکتیو هر مدول وجود دارد و یکتا است.

اثبات. فرض کنیم A یک R−مدول باشد. با توجه به قضایای ۱۴.۱.۳، ۱۹.۱.۳، و ۲۰.۱.۳ نتیجه می گیریم $E(A)$ وجود دارد. فرض کنیم $E_۱$ و $E_۲$ پوش انژکتیو های A باشند. چون $E_۲$ انژکتیو است، همریختی $A \longrightarrow E_۲$ قابل توسیع به همریختی $g : E_۱ \to E_۲$ است. چون $A \cap \ker(g) = ۰$، و $A \leq_e E_۱$، پس $\ker(g) = ۰$. در نتیجه $E_۱ \cong g(E_۱) \leq E_۲$. بنابراین $g(E_۱)$ یک توسیع انژکتیو از A مشمول در $E_۲$ است. بنابراین $g(E_۱) = E_۲$. یعنی؛ g یک R−یکریختی است. ■

۲.۳ حلقه کسرها

تعریف ۱.۲.۳. فرض کنیم X، زیرمجموعه ضربی بسته از عناصر منظم حلقه R باشد. گوییم S حلقه کسرهای راست R نسبت به X است هرگاه

(۱) $R \subseteq Q$،

(۲) هر عنصر X در S وارون پذیر باشد،

(۳) هر عنصر S را بتوان به شکل $ax^{-۱}$ نوشت به طوریکه $a \in R, x \in X$.

متناظراً حلقه کسرهای چپ R نسبت به مجموعه X تعریف می شود. درصورتیکه R یک حلقه جابجایی باشد، از نوشتن پسوندهای چپ و راست خودداری می کنیم. توجه داریم که اگر R یک دامنه جابجایی باشد آنگاه میدان کسرهای آن همان حلقه کسرها نسبت به مجموعه ضربی بسته $R \setminus \{۰\}$ است.

مثال ۲.۲.۳. فرض کنیم σ یک خودریختی از حلقه K باشد و $R = K[x;\sigma]$. در این صورت حلقه چندجمله ایهای اریب لوران $K[x,x^{-۱};\sigma]$ همان حلقه کسرهای راست و حلقه کسرهای چپ R نسبت

به مجموعه ضربی بسته $X = \{۱, x, x^۲, \dots\}$ است.

جمع و ضرب عناصر در حلقه کسرها. فرض کنیم X زیرمجموعه ضربی بسته از عناصر منظم حلقه R باشد. همچنین حلقه کسرهای راست R نسبت به X وجود داشته باشد که آن را به S نمایش می دهیم. می خواهیم کسرهای $ax^{-۱}, by^{-۱}$ در S را با هم جمع کنیم، که $a, b \in R$ و $x, y \in X$.

می دانیم $ax^{-۱} = ay(xy)^{-۱}$. در صورتی می توانیم $by^{-۱} = (bx)(xy)^{-۱}$ را داشته باشیم که x, y با هم جابجا شوند. در هر صورت با توجه به شرط اور راست و قسمت (۱) لم ۶.۱.۳، عناصر $c, d \in R$ و $z \in X$ وجود دارند به طوریکه $z = xc = yd$. در نتیجه

$$ax^{-۱} = (ac)z^{-۱} \quad , \quad by^{-۱} = (bd)z^{-۱}$$

اگر $(ac), (bd)$ را با a', b' نمایش دهیم آنگاه $ax^{-۱} = a'z^{-۱}\ ,\ by^{-۱} = b'z^{-۱}$. بنابراین

$$ax^{-۱} + by^{-۱} = (a' + b')z^{-۱}.$$

برای بررسی حاصلضرب کسرهای $ax^{-۱}$ و $by^{-۱}$ انتظار یک فرمول ساده شبیه $(ax^{-۱})(by^{-۱}) = (ab)(yx)^{-۱}$ را نداریم، به جز در زمانی که x, y با هم جابجا شوند. به عبارت دیگر چون هر عنصر S به شکل کسری با مخرج کسر راست گرد است، کسر چپ گرد $x^{-۱}b$ به ازای برخی $c \in R, z \in X$ باید معادل $cz^{-۱}$ باشد. درنتیجه

$$(ax^{-۱})(by^{-۱}) = (ac)(yz)^{-۱}.$$

لم ۳.۲.۳. فرض کنیم X زیرمجموعه ضربی بسته از عناصر منظم حلقه R باشد. همچنین S، حلقه کسرهای راست R نسبت به X وجود داشته باشد.

(a) X یک مجموعه اور راست است.

(b) برای هر $s_۱, s_۲, \dots, s_n \in S$ عناصر $x \in X$ و $a_۱, a_۲, \dots, a_n \in R$ وجود دارند به قسمی که برای هر i، $s_i = a_i x^{-۱}$.

(c) فرض کنیم $a, b \in R$ و $x, y \in X$. در این صورت $ax^{-۱} = by^{-۱}$ اگرو تنها اگر عناصر $c, d \in R$ وجود داشته باشند به طوریکه $ac = bd$ و $xc = yd \in X$.

اثبات. (a) فرض کنیم $r \in R$ و $x \in X$. چون $x^{-۱}r \in S$، پس عناصر $y \in X$ و $s \in R$ به قسمی وجود دارند که $x^{-۱}r = sy^{-۱}$. در نتیجه $ry = xs$.

(b) چون S حلقه کسرها است، برای هر $۱ \leq i \leq n$، عناصر $x_i \in X, b_i \in R$ وجود دارند به طوریکه $s_i = b_i x_i^{-۱}$. بنابر لم ۶.۱.۳، عناصر $c_۱, c_۲, \cdots, c_n \in R$ و $x \in X$ وجود دارند به طوریکه به ازای هر i، $x = x_i c_i$. چون x, x_i هر دو در S وارون پذیرند، پس c_i نیز در S وارون پذیر است و لذا $x^{-۱} = c_i^{-۱} x_i^{-۱}$. بنابراین به ازای هر i، $s_i = b_i c_i x^{-۱}$. چون $b_i, c_i \in R$، پس $a_i \in R$ وجود دارد به طوریکه $s_i = a_i x^{-۱}$.

(c) فرض کنیم عناصر $c, d \in R$ وجود داشته باشند که $ac = bd$ و $xc = yd \in X$. در نتیجه

$$ax^{-۱} = ac(xc)^{-۱} = bd(yd)^{-۱} = by^{-۱}.$$

به عکس، فرض کنیم $ax^{-۱} = by^{-۱}$. با استفاده از لم۶.۱.۳، عناصر$c, d \in R$ وجود دارند به طوریکه $xc = yd \in X$. بنابراین

$$ac(xc)^{-۱} = ax^{-۱} = by^{-۱} = bd(yd)^{-۱} = bd(xc)^{-۱}$$

و لذا $ac = bd$. ■

قضیه ۴.۲.۳. فرض کنیم X زیرمجموعه ضربی بسته از عناصر منظم حلقه R باشد. در این صورت حلقه کسرهای راست R نسبت به X وجود دارد اگر و تنها اگر X اور راست باشد.

اثبات. فرض کنیم X یک مجموعه اور راست باشد.

قرار می دهیم $E = E(R_R)$ که منظور از $E(R_R)$ همان پوش انژکتیو مدول R_R است. فرض کنیم $A = \{a \in E \mid ax \in R$ ،$x \in X$ برای برخی$\}$. واضح است که $A \subseteq E$. نشان می دهیم A زیرمدولی از E است.

فرض کنیم M یک $R-$مدول باشد. چون X یک مجموعه اور راست است، بنابراین $T_X(M) = \{m \in M \mid mx = ۰$ ،$x \in X$ برای برخی$\}$ زیرمدولی از M است. پس می توان نتیجه گرفت $T_X(E/R) \leq E/R$. نگاشت $\pi : E \to E/R$ را با ضابطه $\pi(e) = \overline{e} = e + R$ در نظر می گیریم. واضح است که

$$A = \{a \in E \mid ax \in R \text{ ،} x \in X \text{ برای برخی}\} = \pi^{-۱}(T_X(E/R)).$$

این نشان می دهد که $A \leq E$، و چون $۱ \in X$ پس $A \subseteq R = R۱$، لذا $R_R \leq A \leq E$. اما با توجه به تعریف A داریم:

$$T_x(A/R) = \{\overline{a} \in A/R \mid \overline{a}x = \overline{ax} = \overline{۰} \text{ ،} x \in X \text{ برای برخی}\}$$

$$= \{\overline{a} \in A/R \mid ax \in R \text{ ،} x \in X \text{ برای برخی}\} = \{\overline{a} \in A/R \mid a \in A/R\} = A/R.$$

پس A/R یک $R-$مدول $X-$تابی است. بنابراین با توجه به قسمت (a) لم ۸.۱.۳، در می یابیم که $\dfrac{E/R}{A/R}$ یک $R-$مدول $X-$بدون تاب است. در نتیجه E/A یک $R-$مدول $X-$بدون تاب است. از آنجائیکه عناصر X منظم هستند، لذا $t_X(E) \cap R = t_X(R) = ۰$ و چون $R \leq_e E$، پس بنا به قسمت (e) لم ۸.۱.۳، $T_X(E) = ۰$. بنابراین A و E، $X-$بدون تاب هستند.

قرار می دهیم $S = End_R(A)$.

ادعا ۱. اگر $a \in A$ و $x \in X$ آنگاه عنصر $b \in A$ وجود دارد به طوریکه $bx = a$.

اثبات . چون x منظم است لذا $xR \cong R_R$ و $R-$همریختی $f : xR \to A$ وجود دارد به طوریکه

$f(x) = a$. چون $A \leq E$ و E انژکتیو است پس می توان f را به یک R−همریختی $g : R \to E$ توسیع داد. فرض کنیم $b = g(۱)$. واضح است که $b \in E$. بنابراین $bx = g(۱) = g(x) = f(x) = a$.

از اینکه $bx \in A$، و E/A یک مجموعه X−بدون تاب است، نتیجه می گیریم $b \in A$. ■

ادعا ۲. برای هر $r \in R$ درونریختی منحصر به فرد $\phi_r \in S$ وجود دارد به طوریکه برای هر $b \in R$، $\phi_r(b) = rb$. در واقع ϕ_r تنها عنصری از S است که در شرط $\phi_r(۱) = r$ صدق می کند.

اثبات. چون E انژکتیو و $R \leq E$، لذا نگاشت $R_R \to R_R$ با ضابطه $a \mapsto ra$ یک R−همریختی است که می توان آن را به R−همریختی $f : R \to E$ توسیع داد به طوریکه $f(R) = rR$. به ازای هر $a \in A$، عنصر $x \in X$ وجود دارد به طوریکه $ax \in R$، و لذا

$$f(a)x \in f(R) \leq R.$$

پس $f(a) \in A$. بنابراین $g \in S$ وجود دارد که برای هر $b \in R$، $g(b) = f(b) = rb$.

حال منحصر به فردی g را بررسی می کنیم. (در واقع g همان ϕ_r مورد نظر است)

فرض کنیم $g' \in S$ و $g'(۱) = r$. تابع $\psi = g' - g$ را در نظر می گیریم. به ازای هر $b \in R$ داریم:

$$\psi(b) = (g' - g)(b) = g'(b) - g(b) = rb - rb = ۰$$

لذا $R \leq \ker \psi$. بنابراین با توجه به قوانین یکریختی $\psi(A) \cong \dfrac{A}{\ker(\psi)} \cong \dfrac{A/R}{\ker(\psi)/R}$. در نتیجه $\psi(A)$ تصویر همریخت A/R است. برای هر $a \in A$، چون $\psi(a) \in \psi(A) \hookrightarrow \dfrac{A}{R}$، لذا از X−تابی بودن A/R نتیجه می گیریم $x \in X$یی وجود دارد که $\psi(ax) = \psi(a)x = ۰$. از طرفی $ax \in E$ و E یک مدول X−بدون تاب است پس $ax \neq ۰$، و چون x منظم است لذا $\psi(a) = ۰$. بنابراین با توجه به دلخواه بودن a، $\psi(A) = ۰$. در نتیجه $(g' - g)(A) = ۰$، که نشان می دهد $g' = g$ و این منحصر به فردی g را ثابت می کند. ■

ادعا ۳. نگاشت $\phi : R \to S$ با ضابطه $\phi(r) = \phi_r$، یکریختی حلقه ای از R به $\widehat{R}$ است. $\phi(R) = \widehat{R}$

اثبات. اگر $r, s \in R$ آنگاه

$$(\phi_r + \phi_s)(1) = r + s \quad , \quad (\phi_r\phi_s)(1) = \phi_r(s) = rs.$$

در نتیجه بنا بر ادعای دوم، $\phi_r + \phi_s = \phi_{r+s}$ و $\phi_r\phi_s = \phi_{rs}$. به علاوه چون $id_A(1) = 1$، پس $id_A = \phi_1$، یعنی $1 = \phi_1$. بنابراین نگاشت $\phi : R \to S$ با ضابطه $\phi(r) = \phi_r$، یک بروریختی از حلقه هاست. از آنجائیکه برای هر $r \in R$، $\phi_r(1) = r$، پس $\phi_r = 0$ اگر و تنها اگر $r = 0$، لذا ϕ یک به یک است، و در نتیجه ϕ یکریختی است.

حال فرض کنیم $\widehat{X} = \{\phi_x \mid x \in X\}$.

بنا بر ادعای سوم، $\widehat{X}$ یک زیرمجموعه اور راست از عناصر منظم حلقه $\widehat{R}$ می باشد. از این رو کافیست نشان دهیم حلقه کسرهای $\widehat{R}$ نسبت به مجموعه اور راست $\widehat{X}$ وجود دارد. نشان می دهیم S، حلقه مورد نظر است.

فرض کنیم $x \in X$. چون به ازای هر $r \in R$، $\phi_x(r) = xr$ لذا $\ker(\phi_x) \cap R = r_R(x)$. از طرفی x در R منظم است، پس $r_R(x) = 0$، و بنابراین $\ker(\phi_x) \cap R = 0$. چون $\ker(\phi_x) \leq E$ و $R \leq_e E$، در نتیجه $\ker(\phi_x) = 0$.

با توجه به شرط اور در مجموعه X، برای هر $r \in R$ داریم $rx \cap xR \neq \varnothing$. بنابراین $t_x(R/xR) = (R/xR)$. پس R/xR و A/R هردو $X-$تابی هستند، از این رو بنا به لم ۸.۱.۳، $\dfrac{A}{xR} \cong \dfrac{A}{R} \oplus \dfrac{R}{xR}$ نیز $X-$تابی است. بنابراین برای هر $a \in A$، عناصر $y \in X$ و $b \in R$ وجود دارند به طوریکه $ay = xb = \phi_x(b)$. با توجه به ادعای ۱، عنصر $c \in A$ وجود دارد به طوریکه $cy = b$ و لذا $ay = xb = \phi_x(b) = \phi_x(cy) = \phi_x(c)y$. چون A $X-$بدون تاب است پس $\phi_x(c) = a$ و درنتیجه $\phi_x(A) = A$. بنابراین ϕ_x یک خودریختی از A است. یعنی ϕ_x در S وارون پذیر است.

حال فرض کنیم $s\in S$. چون $s(\text{۱})\in A$، پس عناصر $x\in X$ و $r\in R$ وجود دارند که $s(\text{۱})x=r$. در نتیجه $s\phi_x(\text{۱})=s(x)=r$ و چون ϕ_r منحصر به فرد است، از این رو $s\phi_x=\phi_r$. از اینکه ϕ_x در S وارون پذیر است، نتیجه می گیریم $s=\phi_r\phi_x^{-\text{۱}}$. ■

بنابراین S، حلقه کسرهای راست $\widehat{R}$ نسبت به مجموعه اور راست $\widehat{X}$ است. ■

توجه. فرض کنیم X یک زیرمجموعه اور راست (چپ) از عناصر منظم حلقه R باشد. حلقه کسرهای راست (چپ) R نسبت به X را با $RX^{-\text{۱}}$ $(X^{-\text{۱}}R)$ نمایش می دهیم.

گزاره ۵.۲.۳. فرض کنیم X یک زیرمجموعه اور از عناصر منظم حلقه R باشد. در این صورت $RX^{-\text{۱}}=X^{-\text{۱}}R$.

اثبات . قرار می دهیم $S=RX^{-\text{۱}}$. اگر $s\in S$، آنگاه عناصر $x\in X$ و $a\in R$ وجود دارند که $s=ax^{-\text{۱}}$. چون X یک مجموعه اور چپ است، لذا عناصر $y\in X$ و $b\in R$ وجود دارند که $ya=bx$ و از این رو $s=y^{-\text{۱}}b$. بنابراین $S=X^{-\text{۱}}R$. ■

۳.۳ حلقه کسرهای کلاسیک

تعریف ۱.۳.۳. حلقه کسرهای راست حلقه R نسبت به مجموعه تمام عناصر منظم R را حلقه کسرهای راست کلاسیک R می نامیم و با علامت $Q(R)$ نمایش می دهیم. حلقه کسرهای چپ کلاسیک متناظراً تعریف می شود. بنابراین حلقه کسرهای چپ (راست) کلاسیک حلقه R وجود دارد اگر و تنها اگر مجموعه تمام عناصر منظم حلقه R یک مجموعه اور چپ (راست) باشد. گزاره ۵.۲.۳، نشان می دهد که اگر حلقه کسرهای چپ کلاسیک و حلقه کسرهای راست کلاسیک حلقه R وجود داشته باشند آنگاه برابرند.

به عنوان مثال، حلقه کسرهای کلاسیک هر حلقه جابجایی وجود دارد.

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنیم حلقه کسرهای راست کلاسیک حلقه R وجود داشته باشد، در این صورت حلقه R مک کوی راست است اگر و تنها اگر $Q(R)$ مک کوی راست باشد.

اثبات. کافی است نشان دهیم اگر R حلقه مک کوی راست باشد، آنگاه $Q(R)$ نیز مک کوی راست است.

فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{k}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{t}b_jx^j$، دو عضو ناصفر در $Q(R)[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. عناصر $c_i,d_j,u,v\in R$ وجود دارند، که u,v منظم هستند، و $a_i=c_iu^{-1}$ و $b_j=d_jv^{-1}$. چون به ازای هر j، $u^{-1}d_j\in Q(R)$، پس عناصر $z_j,w\in R$ وجود دارند، که عنصر w منظم است و $u^{-1}d_j=z_jw^{-1}$.

قرار می دهیم $f'(x)=\sum_{i=0}^{k}c_ix^i$ و $g'(x)=\sum_{j=0}^{t}z_jx^j$ که $f'(x),g'(x)\in R[x]$.

از این که $f(x)g(x)=0$، می توان نتیجه گرفت $f'(x)g'(x)(vw)^{-1}=0$

چون R مک کوی راست است، عنصر مخالف صفر $c\in R$ وجود دارد به طوریکه $f'(x)c=0$ و چون $c\neq 0$ و $u^{-1}v^{-1}\in Q(R)$، پس عناصر مخالف صفر $c',y\in R$ وجود دارند، که y منظم است و $u^{-1}c'=cy^{-1}$.

چون $f(x)c'=f'(x)cy^{-1}=0$، پس نتیجه می گیریم که $Q(R)$ مک کوی راست است. ■

مثال ۳.۳.۳. فرض کنیم $\mathbb{Z}_2$ دامنه اعداد صحیح به پیمانه ۲ و $A=\mathbb{Z}_2[a_0,a_1,a_2,b_0,b_1,b_2,c]$، $\mathbb{Z}_2$−جبر آزاد تولید شده توسط متغیرهای تعویض ناپذیر $c,b_2,b_1,b_0,a_2,a_1,a_0$ باشد که جمله ثابت آنها صفر است. توجه داریم که A یکدار نیست.[۹]

ایده الی از حلقه $A+\mathbb{Z}_2$ که توسط عناصر

$$a_0b_0,\ a_0b_1+a_1b_0,\ a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0,\ a_1b_2+a_2b_1,\ a_2b_2,\ a_0rb_0,\ a_2rb_2,$$

$$b_0a_0,\ b_0a_1+b_1a_0,\ b_0a_2+b_1a_1+b_2a_0,\ b_1a_2+b_2a_1,\ b_2a_2,\ b_0ra_0,\ b_2ra_2,$$

$$(a_0+a_1+a_2)r(b_0+b_1+b_2),\ (b_0+b_1+b_2)r(a_0+a_1+a_2),\ r_1r_2r_3r_4,$$

$r_1, r_2, r_3, r_4 \in A$، تولید می شود را به I نمایش می دهیم. فرض کنیم $R = (\mathbb{Z}_2 + A)/I$. ملاحظه می کنیم که $R[x] \cong (\mathbb{Z}_2 + A)[x]/I[x]$، و توجه داریم که $(a_0 + a_1x + a_2x^2)(b_0 + b_1x + b_2x^2) \in I[x]$، اما $(a_0 + a_1x + a_2x^2)c(b_0 + b_1x + b_2x^2) \notin I[x]$، زیرا $a_0cb_1 + a_1cb_0$ در I قرار ندارد. بنابراین $R[x]$ نیم جابجایی و برگشت پذیر نمی باشد. نشان می دهیم R برگشت پذیر است.

فرض کنیم H_n مجموعه همه ترکیبات خطی تک جمله ایها از درجه n روی $\mathbb{Z}_2$ باشد. توجه داریم که برای هر n، H_n متناهی است و ایده آل I همگن است.

ادعا ۱. اگر $f_1, g_1 \in H$ و $f_1g_1 \in I$، آنگاه $g_1f_1 \in I$.

حل: با توجه به تعریف I، تنها حالتهای زیر برای f_1 و g_1 اتفاق می افتند.

$$(f_1 = a_0, g_1 = b_0),\ \ (f_1 = a_2, g_1 = b_2),\ \ (f_1 = a_0 + a_1 + a_2, g_1 = b_0 + b_1 + b_2),$$

$$(f_1 = b_0, g_1 = a_0),\ \ (f_1 = b_2, g_1 = a_2),\ \ (f_1 = b_0 + b_1 + b_2, g_1 = a_0 + a_1 + a_2).$$

که در هر کدام از حالات به سادگی نتیجه مورد نظر بدست می آید.

ادعا ۲. اگر $f, g \in A$ و $fg \in I$، آنگاه $gf \in I$.

حل: فرض کنیم $f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ و $g = g_1 + g_2 + g_3 + g_4$، که $f_1, g_1 \in H_1$، $f_2, g_2 \in H_2$، $f_3, g_3 \in H_3$، و همچنین $f_4, g_4 \in I$. چون برای هر $i \geq 4$، $H_i \subseteq I$. در این صورت $fg = f_1g_1 + f_1g_2 + f_2g_1 + h$ که در آن $h \in I$. از $fg \in I$ نتیجه می گیریم $f_1g_1 + f_1g_2 + f_2g_1 \in I$. چون I همگن است، پس $f_1g_1 \in I$ و $f_1g_2 + f_2g_1 \in I$. با توجه به ادعای ۱ واضح است که $g_1f_1 \in I$. نشان می دهیم $g_1f_2 + g_2f_1 \in I$.

چون $f_1g_2 + f_2g_1 \in I$، پس تنها حالتهای زیر را می توان برای f_1 و g_1 در نظر گرفت.

$(1) f_1 = a_0\ ,\ g_1 = b_0$

$(2) f_1 = a_2\ ,\ g_1 = b_2$

$(3) f_1 = a_0 + a_1 + a_2\ ,\ g_1 = b_0 + b_1 + b_2$

$(4) f_1 = b_0\ ,\ g_1 = a_0$

$(5) f_1 = b_2\ ,\ g_1 = a_2$

$(6) f_1 = b_0 + b_1 + b_2\ ,\ g_1 = a_0 + a_1 + a_2$

اگر $g_2, f_2 \in I$، آنگاه نتیجه برقرار است. فرض کنیم f_1 و g_1 مطابق حالت (1) باشند. f_2 و g_2 را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$(f_2 \in I, g_2 = b_0 t),\ (f_2 \in I, g_2 = tb_0),\ (f_2 = a_0 s, g_2 = b_0 t),\ (f_2 = a_0 s, g_2 = tb_0),$$

$$(f_2 = sa_0, g_2 = b_0 t),\ (f_2 = sa_0, g_2 = tb_0),\ (f_2 = a_0 s, g_2 \in I),\ (f_2 = sa_0, g_2 \in I)$$

که s, t، تک جمله ایهای دلخواه از درجه ۱ هستند. بنابراین $g_1 f_2 + g_2 f_1 \in I$.

اگر حالتهای $(2), (3)$ را برای f_1 و g_1 در نظر بگیریم، آنگاه متناظراً به نتیجه مورد نظر می رسیم، و برای حالتهای $(4), (5), (6)$، به صورت تقارنی می توان نتیجه را بدست آورد. پس در حالت کلی $g_1 f_2 + g_2 f_1 \in I$. بنابراین برای $k \in I$یی، $gf = g_1 f_1 + g_1 f_2 + g_2 f_1 + k$ مشمول در I می باشد.

حال نشان می دهیم اگر $g, h \in \mathbb{Z}_2 + A$ و $gh \in I$، آنگاه $hg \in I$.

فرض کنیم برای برخی عناصر $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2$ و $g', h' \in A$، $g = \alpha + g'$ و $h = \beta + h'$. پس $gh = \alpha\beta + \alpha h' + g'\beta + g'h' \in I$. در نتیجه $\alpha = 0$ یا $\beta = 0$.

فرض کنیم $\alpha = 0$، در این صورت $g'\beta + g'h' \in I$. چون I همگن است و $\beta \in \mathbb{Z}_2$، پس $g' \in I$ و $g'h' \in I$. با توجه به ادعای ۲، $h'g' \in I$ و لذا $hg = \beta g' + h'g' \in I$.

در حالت $\beta = 0$ نیز به طور مشابه $hg = h'\alpha + h'g' \in I$ را بدست می آوریم. بنابراین حلقه R برگشت پذیر است.

لم ۴.۳.۳. حلقه R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر حلقه کسرهای راست کلاسیک آن تقلیل یافته باشد.

اثبات. کافی است نشان دهیم که اگر حلقه R تقلیل یافته باشد، آنگاه $Q(R)$ نیز تقلیل یافته است.

برهان خلف. فرض کنیم q عنصر مخالف صفری از $Q(R)$ باشد که $q^{۲} = ۰$. در این صورت عناصر $a, b \in R$ وجود دارندکه b منظم است و $q = ab^{-۱}$. در نتیجه $ab^{-۱}ab^{-۱} = ۰$.

چون عناصر $c, d \in R$، که d عنصر منظم است وجود دارند، به طوریکه $b^{-۱}a = cd^{-۱} \in Q(R)$، پس

$$ac(bd)^{-۱} = acd^{-۱}b^{-۱} = ab^{-۱}ab^{-۱} = ۰.$$

در نتیجه $ac = ۰$، و لذا $(ca)^{۲} = ۰$، و چون R تقلیل یافته است پس $ca = ۰$.

از $b^{-۱}a = cd^{-۱}$ در $Q(R)$، نتیجه می گیریم $ad = bc$. پس $ada = bca = ۰$، و در نتیجه $ad = ۰$. چون d منظم است، از این رو $a = ۰$، که این یک تناقض است. بنابراین $Q(R)$ تقلیل یافته است. ■

قضیه ۵.۳.۳. حلقه R آرمنداریز است اگر و تنها اگر $R[x]$ آرمنداریز باشد.[۱]

اثبات. چون هر زیرحلقه از یک حلقه آرمنداریز، آرمنداریز است، بنابراین اگر حلقه $R[x]$ آرمنداریز باشد آنگاه R نیز آرمنداریز است.

بعکس، فرض کنیم R آرمنداریز باشد و

$$f(T) = f_۰ + f_۱T + \cdots + f_nT^n \quad , \quad g(T) = g_۰ + g_۱T + \cdots + g_mT^m$$

دو عضو از $R[x][T]$ باشند که $f_i, g_j \in R[x]$ و $f(T)g(T) = ۰$. نشان می دهیم به ازای هر i, j، $f_ig_j = ۰$. فرض کنیم $k = \deg f_۰ + \cdots + \deg f_n + \deg g_۰ + \cdots + \deg g_m$ که $\deg$، درجه

چندجمله ای است و درجه چندجمله ای صفر را ۰ در نظر می گیریم. فرض کنیم

$$f(X^k) = f_0 + f_1 X^k + \cdots + f_n X^{kn}$$

$$g(X^k) = g_0 + g_1 X^k + \cdots + g_m X^{km}$$

چندجمله ایهای ناصفری از $R[x]$ باشند. مشاهده می کنیم مجموعه ضرایب f_iها برابر با مجموعه ضرایب $f(X^k)$ و مجموعه ضرایب g_jها با مجموعه ضرایب $g(X^k)$ برابر است. چون $f(T)g(T) = 0$ و X با عناصر R جابجا می شود، پس $f(X^k)g(X^k) = 0$. از طرفی چون R آرمنداریز است، پس هر ضریب f_i هر ضریب g_j را صفر می کند. بنابراین $f_i g_j = 0$. ■

قضیه ۶.۳.۳. فرض کنیم $n \geq 2$ یک عدد طبیعی باشد، در این صورت حلقه R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر حلقه $R[x]/(x^n)$ آرمنداریز باشد.

اثبات. فرض کنیم حلقه $R[x]/(x^n)$ آرمنداریز باشد و عنصر $r \in R$ وجود داشته باشد، که $r^n = 0$. چون r و $\overline{x}$ با یکدیگر جابجا می شوند، پس

$$0 = r^n - \overline{x}^n T^n = (r - \overline{x}T)(r^{n-1} + r^{n-2}\overline{x}T + \cdots + \overline{x}^{n-1}T^{n-1})$$

که T یک متغیر است. از طرفی چون $R[x]/(x^n)$ آرمنداریز است، پس $r\overline{x}^{n-1} = 0$، و لذا $r = 0$. بنابراین حلقه R تقلیل یافته است.

بعکس، فرض کنیم حلقه R تقلیل یافته باشد. عنصر $\overline{x} \in R[x]/(x^n)$ را با علامت u نمایش می دهیم. در نتیجه

$$R[x]/(x^n) = R[u] = R + Ru + \cdots + Ru^{n-1}$$

و u با عناصر R جابجا می شود و $u^n = 0$.

فرض کنیم $f = f_0 + f_1 u + \cdots + f_{n-1} u^{n-1}$ و $g = g_0 + g_1 u + \cdots + g_{n-1} u^{n-1}$ دو چندجمله ای ناصفر از $R[u][T]$ باشند که $f_i, g_j \in R[T]$ و $fg = 0$. برای هر $f_i u^i$ و $g_j u^j$ اگر $i+j \geq n$، آنگاه $u^{i+j} = 0$، و لذا ضرایب $f_i u^i$ ضرایب $g_j u^j$ را صفر می کنند، یعنی $f_i g_j = 0$.

حال نشان می دهیم اگر $i + j < n$، آنگاه $f_i g_j = 0$.

چون R تقلیل یافته است، پس آرمنداریز است و ضرایب f_i ضرایب g_j را صفر می کنند. لذا ضرایب f نیز ضرایب g را صفر می کنند. داریم:

$$0 = fg = (f_0 + f_1 u + \cdots + f_{n-1} u^{n-1})(g_0 + g_1 u + \cdots + g_{n-1} u^{n-1})$$

$$= f_0 g_0 + (f_0 g_1 + f_1 g_0) u + (f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0) u^2 + \cdots$$

$$+ (f_0 g_{n-1} + f_1 g_{n-2} + \cdots + f_{n-1} g_0) u^{n-1}$$

بنابراین

$$(1)\ f_0 g_0 = 0$$

$$(2)\ f_0 g_1 + f_1 g_0 = 0$$

$$(3)\ f_0 g_2 + f_1 g_1 + f_2 g_0 = 0$$

$$\vdots$$

$$(4)\ f_0 g_{n-1} + f_1 g_{n-2} + \cdots + f_{n-1} g_0 = 0.$$

توجه داریم که حلقه R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in R$، $ab^2 = 0$ نتیجه دهد $ab = 0$، و هر حلقه تقلیل یافته نیم جابجایی است. پس به استقرا روی $i + j$، و با استفاده از این فرض که حلقه R تقلیل یافته است، می توان نتایج زیر را بدست آورد:

ابتدا معادلات (۱) و (۲) را از راست در g_0 ضرب می کنیم.

$$0 = f_0 g_0 g_0 = f_0 g_0^2 \quad , \quad 0 = f_0 g_1 g_0 + f_1 g_0 g_0 = f_1 g_0 g_0$$

بنابراین $f_0g_1 = 0$ و $f_1g_0 = 0$ (۵).

اگر معادلات (۱)، (۳) و (۵) را از راست در g_0، و معادله (۳) را از راست در g_1 ضرب کنیم، آنگاه $0 = f_0g_2 = f_1g_1 = f_2g_0$.

به استقرا فرض کنیم برای هر $i + j = 0, 1, \ldots, n - 2$، $f_ig_j = 0$. حال معادله (۴) را از راست در g_0 ضرب می کنیم.

$$0 = f_0g_{n-1}g_0 + f_1g_{n-2}g_0 + \cdots + f_{n-2}g_1g_0 + f_{n-1}g_0g_0 = f_{n-1}g_0g_0 = f_{n-1}g_0f_{n-1}g_0$$

چون برای هر $i = 0, 1, \ldots, n - 2$، $f_ig_0 = 0$، پس $f_{n-1}g_0 = 0$. در نتیجه:

$$(۶) \quad f_0g_{n-1} + f_1g_{n-2} + \cdots + f_{n-2}g_1 = 0.$$

اگر معادله (۶) را از راست در f_1 ضرب کنیم آنگاه متناظراً $f_{n-2}g_1g_1 = 0$، و لذا $f_{n-2}g_1 = 0$. بنابراین معادله (۶) به شکل زیر تبدیل می شود:

$$f_0g_{n-1} + f_1g_{n-2} + \cdots + f_{n-3}g_2 = 0$$

سرانجام با تکرار این روش داریم:

$$0 = f_0g_{n-1} = f_1g_{n-2} = \cdots = f_{n-2}g_1 = f_{n-1}g_0.$$

در نتیجه برای هر $i + j = 0, 1, \ldots, n - 1$، $f_ig_j = 0$ و لذا $R[x]/(x^n)$ آرمنداریز است. ■

قضیه ۷.۳.۳. فرض کنیم حلقه R مک کوی راست باشد و $n \geq 2$. در این صورت حلقه $R[x]/(x^n)$ نیز مک کوی راست است.

اثبات. فرض کنیم $F(y) = \sum_{i=0}^{p} f_iy^i$ و $G(y) = \sum_{j=0}^{q} g_jy^j$ دو چندجمله ای ناصفر از حلقه $(R[x]/(x^n))[y]$ باشند و $F(y)G(y) = 0$، که به ازای هر i, j،

$$f_i = \sum_{s=0}^{n-1} a_{is}x^s, g_j = \sum_{t=0}^{n-1} b_{jt}x^t \ \in R[x]/(x^n).$$

برای هر s,t قرار می دهیم: $k_s(y)=\sum_{i=0}^{p} a_{is}y^i$ و $h_t(y)=\sum_{j=0}^{q} b_{jt}y^j$. در نتیجه:

$$[\sum_{s=0}^{n-1} k_s(y)x^s\,][\sum_{t=0}^{n-1} h_t(y)x^t\,] = F(y)G(y) = 0. \tag{1.3}$$

فرض کنیم $k_0(y)\neq 0$ و k کوچکترین اندیسی باشد که $h_k(y)\neq 0$. از معادله (۱,۳) نتیجه می گیریم $k_0(y)h_k(y)=0$. بنابراین عنصر مخالف صفر $r_1\in R$ وجود دارد به طوریکه $k_0(y)r_1=0$، و در نتیجه $F(y)(r_1x^{n-1})=0$.

اگر $k_0(y)=0$، آنگاه $F(y)x^{n-1}=0$. بنابراین $R[x]/(x^n)$ مک کوی راست است. ■

گزاره ۸.۳.۳. فرض کنیم S یک زیرمجموعه ضربی بسته از عناصر منظم حلقه R باشد. در این صورت R مک کوی راست است اگر و تنها اگر $S^{-1}R$ مک کوی راست است.

اثبات. فرض کنیم R مک کوی راست باشد. فرض کنیم $F(x)=\sum_{i=0}^{m}\alpha_i x^i$ و $G(x)=\sum_{j=0}^{n}\beta_j x^j$ دو چندجمله ای مخالف صفر در $(S^{-1}R)[x]$ باشند و $F(x)G(x)=0$. عناصر $a_i,b_j,u,v\in R$ وجود دارند که u,v منظم هستند و $\alpha_i=u^{-1}a_i$ و $\beta_j=v^{-1}b_j$. در نتیجه

$$0 = F(x)G(x) = (u^{-1}\sum_{i=0}^{m} a_ix^i)(v^{-1}\sum_{j=0}^{n} b_jx^j)$$

همچنین به ازای هر i، عناصر $a'_i,v'\in R$ وجود دارند که v' عنصر منظم است و $a_iv^{-1}=v'^{-1}a'_i$. پس

$$0 \;=\; F(x)G(x) \;=\; u^{-1}v'^{-1}(\sum_{i=0}^{m} a'_ix^i)(\sum_{j=0}^{n} b_jx^j) \;=\; (v'u)^{-1}(\sum_{i=0}^{m} a'_ix^i)(\sum_{j=0}^{n} b_jx^j).$$

فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a'_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_jx^j$، دو چندجمله ای ناصفر از $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. چون R مک کوی راست است، پس عنصر مخالف صفر $c\in R$ وجود دارد به طوریکه $f(x)c=0$. در نتیجه:

$$0 \;=\; u^{-1}v'^{-1}f(x)c \;=\; u^{-1}(\sum_{i=0}^{m} a_ix^i)(v^{-1}c) \;=\; \sum_{i=0}^{m} u^{-1}a_ix^i(v^{-1}c) \;=\; F(x)(v^{-1}c).$$

چون $v^{-1}c$ عنصر مخالف صفری از $S^{-1}R$ است، بنابراین $S^{-1}R$ مک کوی راست می باشد.

بعکس، فرض کنیم $S^{-1}R$ مک کوی راست باشد. فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$، چندجمله ایهای ناصفر در $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. چون $S^{-1}R$ مک کوی راست است، عنصر مخالف صفر $u^{-1}c\in S^{-1}R$ وجود دارد به طوریکه $f(x)u^{-1}c=0$. همچنین عناصر $u',c'\in R$ وجود دارند که u' منظم است و $u^{-1}c=c'u'^{-1}$، پس $f(x)u^{-1}c=f(x)c'u'^{-1}=0$. بنابراین برای عنصر مخالف صفر $c'\in R$، $f(x)c'=0$ و در نتیجه R مک کوی راست است. ■

نتیجه ۹.۳.۳. فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت$R[x]$ مک کوی راست است اگر و تنها اگر $R[x;x^{-1}]$ مک کوی راست باشد.

اثبات. با توجه به گزاره ۸.۳.۳، اگر $S=\{1,x,x^2,\ldots\}$، آنگاه به وضوح S یک زیرمجموعه ضربی بسته از $R[x]$ است و $R[x;x^{-1}]=S^{-1}R[x]$. ■

فصل ۴

شرط مک کوی روی حلقه چندجمله ایهای اریب

۱.۴ مقدمه

تعریف ۱.۱.۴. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R باشد. حلقه R را $\sigma-$آرمنداریز می نامیم در صورتیکه، اگر $p(x) = a_\circ + a_1x + \cdots + a_mx^m$ و $q(x) = b_\circ + b_1x + \cdots + b_nx^n$ چندجمله ایهای ناصفر در $R[x;\sigma]$ باشند و $p(x)q(x) = \circ$، آنگاه به ازای هر $\circ \leq i \leq m$ و $\circ \leq j \leq n$، $a_ib_j = \circ$.

تعریف ۲.۱.۴. حلقه R را آرمنداریز $\sigma-$اریب می نامیم در صورتیکه، اگر $p(x) = \sum_{i=\circ}^{m} a_ix^i$ و $q(x) = \sum_{j=\circ}^{n} b_jx^j$ عناصری ناصفر از $R[x;\sigma]$ باشند و $p(x)q(x) = \circ$، آنگاه به ازای هر $\circ \leq i \leq m$ و $\circ \leq j \leq n$، $a_i\sigma^i(b_j) = \circ$.

قضیه ۳.۱.۴. هر حلقه $\sigma-$آرمنداریز، آرمنداریز $\sigma-$اریب است. [۸]

اثبات. فرض کنیم حلقه R، $\sigma-$آرمنداریز باشد و $p(x) = \sum_{i=\circ}^{m} a_ix^i$، $q(x) = \sum_{j=\circ}^{n} b_jx^j$ چندجمله ایهای ناصفر در $R[x;\sigma]$ باشند و $pq = \circ$. چون R، $\sigma-$آرمنداریز است، برای هر $\circ \leq i \leq m$ و $\circ \leq j \leq n$، $a_ib_j = \circ$. ادعا می کنیم $a_i\sigma^i(b_j) = \circ$.

چون برای هر $0 \leq j \leq n$، $a_0 b_j = 0$، پس

$$0 = pq = a_0(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) + (a_1 x + \cdots + a_m x^m)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)$$

$$= (a_1 x + \cdots + a_m x^m)(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)$$

بنابراین

$$0 = (a_1 + a_2 x + \cdots + a_m x^{m-1}) x (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)$$

$$= (a_1 + a_2 x + \cdots + a_m x^{m-1})(\sigma(b_0) x + \sigma(b_1) x^2 + \cdots + \sigma(b_n) x^{n+1}).$$

قرار می دهیم:

$$p_1 = a_1 + a_2 x + \cdots + a_m x^{m-1} \quad , \quad q_1 = \sigma(b_0) x + \sigma(b_1) x^2 + \cdots + \sigma b_n x^{n+1}$$

چون R، σ–آرمنداریز است، از $p_1 q_1 = 0$ نتیجه می گیریم به ازای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $a_i \sigma(b_j) = 0$. از طرفی

$$0 = p_1 q_1$$

$$= a_1(\sigma(b_0)x + \cdots + \sigma(b_n)x^{n+1}) + (a_2 x + \cdots + a_m x^{m-1})(\sigma(b_0)x + \sigma(b_1)x^2 + \cdots + \sigma(b_n)x^{n+1})$$

$$= (a_2 + a_3 x + \cdots + a_m x^{m-2})(\sigma^2(b_0)x^2 + \sigma^2(b_1)x^3 + \cdots + \sigma^2(b_n)x^{n+1}).$$

حال اگر p_2, q_2 را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$p_2 = a_2 + a_3 x + \cdots + a_m x^{m-2} \quad , \quad q_2 = \sigma^2(b_0)x^2 + \sigma^2(b_1)x^3 + \cdots + \sigma^2(b_n)x^{n+2}$$

آنگاه $p_2 q_2 = 0$ نتیجه می دهد $a_i \sigma^2(b_j) = 0$، (به ازای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$).

بنابراین با ادامه این روند برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $a_i \sigma^i(b_j) = 0$، و در نتیجه R آرمنداریز σ–اریب است. ■

تعریف ۴.۱.۴. درونریختی σ از حلقه R را صلب می نامیم، هرگاه به ازای هر $a \in R$، اگر $a\sigma(a) = 0$، آنگاه $a = 0$.

حلقه R را σ–صلب می نامیم، هرگاه درونریختی صلب σ از R وجود داشته باشد.

تذکر. هر درونریختی صلب یک به یک است.

گزاره ۵.۱.۴. هرحلقهσ– صلب، تقلیل یافته است.

اثبات. فرض کنیم R یک حلقه σ–صلب باشد و برای هر $a \in R$، $a^2 = 0$. در نتیجه:

$$a\sigma(a)\sigma(a\sigma(a)) = a\sigma(a^2)\sigma^2(a) = 0.$$

چون R، σ–صلب است، لذا $a\sigma(a) = 0$ و در نتیجه $a = 0$. بنابراین حلقه R تقلیل یافته است. ■

تذکر: هر حلقه σ–صلب، σ–آرمنداریز است، ولی عکس آن برقرار نیست.

مثال ۶.۱.۴. نشان می دهیم حلقه σ–آرمنداریز جابجایی وجود دارد که σ–صلب نیست.

فرض کنیم $R = T(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$ توسیع بدیهی $\mathbb{Z}$ توسط $\mathbb{Q}$ باشد، و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ به ترتیب حلقه اعداد صحیح و میدان اعداد گویا باشند. در این صورت حلقه R جابجایی است. خودریختی $\sigma : R \to R$ با ضابطه $\sigma((a,s)) = (a, s/2)$ را در نظر می گیریم. چون $(0,0) = ((0,1))\sigma((0,1))$، پس R، σ–صلب نیست. ادعا می کنیم که حلقه R، σ–آرمنداریز است.

فرض کنیم $p = \sum_{i=0}^{m} A_i x^i$ و $q = \sum_{j=0}^{n} B_j x^j$ عناصری از $R[x;\sigma]$ باشند که به ازای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $A_i = (a_i, s_i)$ و $B_j = (b_j, t_j) \in R$، و $pq = 0$. توجه کنید که برای هر $p \in R[x;\sigma]$، $p = (p_0, p_1)$ که $p_0 \in \mathbb{Z}[x]$ و $p_1 \in \mathbb{Q}[x]$.

اگر فرض کنیم $p = (p_0, p_1)$ و $q = (q_0, q_1)$ که

$$p_0 = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \ , \ p_1 = \sum_{i=0}^{m} s_i x^i \ , \ q_0 = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j \ , \ q_1 = \sum_{j=0}^{n} t_j x_j$$

آنگاه $pq = (p_0q_0, p_0q_1 + p_1q_0) = (0, 0)$. بنابراین $p_0q_0 = 0$. چون $\mathbb{Z}[x]$ دامنه صحیح و $p_0q_0 \in \mathbb{Z}[x]$، لذا $p_0 = 0$ یا $q_0 = 0$.

(۱) اگر $p_0 = 0$، آنگاه به ازای هر i، $a_i = 0$ و $p_0q_1 + p_1q_0 = p_1q_0 = 0$. چون p_1q_0 در $\mathbb{Q}[x]$ قرار دارد و $\mathbb{Q}[x]$ یک دامنه است، بنابراین $p_1 = 0$ یا $q_0 = 0$. در نتیجه برای هر i, j، $A_iB_j = 0$.

(۲) اگر $q_0 = 0$، آنگاه متناظراً برای هر i, j، $A_iB_j = 0$.

بنابراین با توجه به (۱) و (۲) حلقه R، $\sigma-$آرمنداریز است.

لم ۷.۱.۴. فرض کنیم حلقه R، $\sigma-$صلب باشد و $a, b \in R$. در این صورت

(i) اگر $ab = 0$، آنگاه برای هر عدد صحیح مثبت n، $a\sigma^n(b) = \sigma^n(a)b = 0$.

(ii) اگر برای برخی اعداد صحیح و مثبت k، $\sigma^k(a)b = 0 = a\sigma^k(b)$، آنگاه $ab = 0$.[۶]

اثبات. (i) کافیست نشان دهیم برای هر $a, b \in R$، $a\sigma(b) = \sigma(a)b = 0$.

اگر $ab = 0$، آنگاه $b\sigma(a)\sigma(b\sigma(a)) = b\sigma(ab)\sigma^2(a) = 0$. چون R، $\sigma-$صلب است، پس $b\sigma(a) = 0$. از طرفی حلقه R تقلیل یافته است، بنابراین از $(\sigma(a)b)^2 = 0$ نتیجه می گیریم $\sigma(a)b = 0$.

(ii) فرض کنیم برای برخی اعداد صحیح و مثبت k، $a\sigma^k(b) = 0$. با توجه به (i)، مشاهده می کنیم که $\sigma^k(ab) = \sigma^k(a)\sigma^k(b) = 0$، و چون σ تکریختی است، بنابراین $ab = 0$.

متناظراً از $\sigma^k(a)b = 0$ نتیجه می گیریم $ab = 0$. ■

گزاره ۸.۱.۴. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R باشد. در این صورت اگر R، $\sigma-$صلب باشد آنگاه $R[x; \sigma]$ تقلیل یافته است.

اثبات. برهان خلف. فرض کنیم $R[x; \sigma]$ تقلیل یافته نباشد. در این صورت عنصر مخالف صفر $f \in R[x; \sigma]$ وجود دارد به طوریکه $f^2 = 0$. چون R تقلیل یافته است، پس f متعلق به R نیست. فرض کنیم $f = \sum_{i=0}^{m} a_ix^i$، که برای هر $0 \leq i \leq m$، $a_i \in R$ و $a_m \neq 0$. چون $f^2 = 0$، پس با توجه به

لم ۷.۱.۴، $a_m\sigma^m(a_m) = 0$، و لذا $a_m^2 = 0$. بنابراین $a_m = 0$، که این یک تناقض است. پس $R[x;\sigma]$ تقلیل یافته است. ■

۲.۴ قضایای مرتبط با شرط مک کوی روی حلقه چندجمله ایهای اریب

تعریف ۱.۲.۴. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R باشد. حلقه R را مک کوی σ–اریب می نامیم در صورتیکه، اگر $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ عناصر ناصفری از $R[x;\sigma]$ باشند و $p(x)q(x) = 0$، آنگاه عنصر مخالف صفر $c \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه $p(x)c = 0$.

گزاره ۲.۲.۴. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R باشد.

(۱) اگر R یک حلقه آرمنداریز σ–اریب باشد، آنگاه R مک کوی σ–اریب است.

(۲) فرض کنیم نگاشت $\alpha : R \to S$ یک یکریختی حلقه ای باشد. در این صورت R مک کوی σ–اریب است اگر و تنها اگر S مک کوی $\alpha\sigma\alpha^{-1}$–اریب باشد.

اثبات . (۱) فرض کنیم $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ چندجمله ایهای ناصفر در $R[x;\sigma]$ باشند و $p(x)q(x) = 0$. چون R آرمنداریز σ–اریب است، لذا برای هر $0 \le i \le m$ و $0 \le j \le n$، $a_i\sigma^i(b_j) = 0$. از طرفی $q(x) \neq 0$، پس عنصر مخالف صفر $b_{j_0} \in R$ وجود دارد به طوریکه $a_i\sigma^i(b_{j_0}) = 0$. بنابراین $p(x)b_{j_0} = 0$، و در نتیجه R مک کوی σ–اریب است.

(۲) فرض کنیم برای هر $a \in R$، $a' = \alpha(a)$. در این صورت داریم:

$$(p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i \ , \ q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j) \ \in R[x;\sigma]$$

$$\Longleftrightarrow (p'(x) = \sum_{i=0}^{m} a'_i x^i \ , \ q'(x) = \sum_{j=0}^{n} b'_j x^j) \ \in S[x;\alpha\sigma\alpha^{-1}].$$

چون R آرمنداریز σ–اریب است، پس به ازای هر $0 \leq k \leq m+n$،

$$p(x)q(x) = 0 \in R[x;\sigma] \Longleftrightarrow \sum_{i+j=k} a_i\sigma^i(b_j) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i+j=k} \alpha(a_i\sigma^i(b_j)) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \sum_{i+j=k} \alpha(a_i)(\alpha\sigma\alpha^{-1})^i\alpha(b_j) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i+j=k} a'_i(\alpha\sigma\alpha^{-1})^i(b'_j) = 0$$

$$\Longleftrightarrow p'(x)q'(x) = 0 \in S[x;\alpha\sigma\alpha^{-1}]$$

(یادآوری می کنیم که برای هر عدد صحیح مثبت t، $(\alpha\sigma\alpha^{-1})^t = \alpha\sigma^t\alpha^{-1}$)

چون R مک کوی σ–اریب است، عنصر مخالف صفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $p(x)c = 0$ اگر و تنها اگر به ازای هر i،

$$\alpha(a_i)(\alpha\sigma\alpha^{-1})^i\alpha(c) = 0 \Longleftrightarrow a'_i(\alpha\sigma\alpha^{-1})^i(c') = 0; \quad 0 \neq c' = \alpha(c).$$

و این برقرار است اگر و تنها اگر عنصر مخالف صفر $c' \in S$ وجود داشته باشد که $p'(x)c' = 0$.

در نتیجه اثبات کامل می شود. ■

نتیجه ۳.۲.۴. هر دامنه با درونریختی σ مک کوی σ–اریب است. [۷]

اثبات. فرض کنیم σ یک درونریختی از دامنه R باشد و $p = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $q = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ چندجمله ایهای ناصفر از $R[x;\sigma]$ باشند که $pq = 0$. ادعا می کنیم برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $a_i\sigma^i(b_j) = 0$.

فرض کنیم برای هر $0 \leq s \leq m$، $a_s \neq 0$ و $a_0 = \cdots = a_{s-1} = 0$. بنابراین از

$$a_0 b_s + a_1\sigma(b_{s-1}) + \cdots + a_s\sigma^s(b_0) = 0$$

که ضریب جمله sام معادله $pq = 0$ می باشد و برای $k > m$، $a_k = 0$، نتیجه می گیریم $a_s\sigma^s(b_0) = 0$، و لذا $\sigma^s(b_0) = 0$.

چون $\sigma^{s+1}(b_0) = \sigma(\sigma^s(b_0)) = 0$، لذا از

$$a_0 b_{s+1} + a_1\sigma(b_s) + \cdots + a_s\sigma^s(b_1) + a_{s+1}\sigma^{s+1}(b_0) = 0$$

نیز نتیجه می گیریم $a_s\sigma^s(b_1) = 0$. بنابراین $\sigma^s(b_1) = 0$. با ادامه این روش داریم:

$$\sigma^s(b_0) = \sigma^s(b_1) = \cdots = \sigma^s(b_n) = 0$$

در نتیجه برای هر $0 \leq i \leq m$ و $0 \leq j \leq n$، $a_i\sigma^i(b_j) = 0$.

چون به ازای هر $0 \leq i \leq s-1$، $a_i = 0$ و به ازای هر $s \leq i \leq m$، $\sigma^i(b_j) = 0$، پس R آرمنداریز σ–اریب است. بنابراین با توجه به گزاره ۲.۲.۴، R مک کوی σ–اریب است. ■

با ارائه مثالی نشان می دهیم حلقه مک کوی R با خودریختی σ وجود دارد که مک کوی σ–اریب نیست.

مثال ۴.۲.۴. فرض کنیم Z_2 حلقه اعداد صحیح به پیمانه ۲ باشد. حلقه $Z_2 \oplus Z_2$ را بررسی می کنیم.

قرار می دهیم $R = Z_2 \oplus Z_2$. در این صورت حلقه R تقلیل یافته و جابجایی است، از این رو آرمنداریز و در نتیجه مک کوی می باشد.

فرض کنیم σ یک خودریختی از حلقه R با ضابطه $\sigma((a,b)) = (b,a)$ باشد. برای دو چندجمله ای مخالف صفر $p(x) = (1,0) + (1,0)x$ و $q(x) = (0,1) + (1,0)x$ در $R[x;\sigma]$، مشاهده می کنیم $p(x)q(x) = 0$، اما عنصر ناصفر $c \in R$ وجود ندارد که $p(x)c = 0$. بنابراین R مک کوی σ–اریب نیست.

قضیه ۵.۲.۴. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R باشد. اگر $R[x;\sigma]$ مک کوی راست باشد، آنگاه R مک کوی σ–اریب است.

اثبات. فرض کنیم $R[x;\sigma]$ مک کوی راست باشد و $p(x)=\sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ و $q(x)=\sum_{j=0}^{n} b_j x^j$، چندجمله ایهای ناصفر در $R[x;\sigma]$ باشند که $p(x)q(x)=0$. در این صورت

$$f(y)=a_0+(a_1x)y+\cdots+(a_mx^m)y^m \quad , \quad g(y)=b_0+(b_1x)y+\cdots+(b_nx^n)y^n$$

چندجمله ایهای ناصفر در $R[x;\sigma][y]$ هستند و $f(y)g(y)=0$.

چون $R[x;\sigma]$ مک کوی راست است، لذا عنصر مخالف صفر $c=c_0+c_1x+\cdots+c_kx^k$ در $R[x;\sigma]$ وجود دارد که $f(y)c=0$. پس به ازای هر i، $a_ix^ic=0$. بنابراین به ازای هر $0\leq i\leq m$ و $0\leq t\leq k$، $a_i\sigma^i(c_t)=0$. چون c مخالف صفر است، پس عنصر مخالف صفر c_{t_0} وجود دارد به طوریکه $p(x)c_{t_0}=0$. در نتیجه حلقه R مک کوی σ–اریب است. ■

نتیجه ۶.۲.۴. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R و $R[x;\sigma]$ برگشت پذیر باشد. در این صورت R مک کوی σ–اریب است.

اثبات. مطابق قضیه ۲.۲.۲، اگر $R[x;\sigma]$ برگشت پذیر باشد، آنگاه $R[x;\sigma]$ مک کوی است. لذا با توجه به قضیه ۴.۲.۴، R مک کوی σ–اریب است. ■

تعریف ۷.۲.۴. درونریختیσ از حلقه R را برگشت پذیر راست می نامیم، هرگاه برای هر $a,b\in R$، $ab=0$ نتیجه دهد $b\sigma(a)=0$.

درونریختیσ از حلقه R را برگشت پذیر چپ می نامیم، هرگاه برای هر $a,b\in R$، $ab=0$ نتیجه دهد $\sigma(b)a=0$.

حلقه R را σ–برگشت پذیر راست (چپ) می نامیم، هرگاه درونریختی برگشت پذیر راست(چپ) σ از R وجود داشته باشد.

تعریف ۸.۲.۴. حلقه R را σ–برگشت پذیر می نامیم، هرگاه هم σ–برگشت پذیر راست و هم چپ باشد.

تذکر. مفاهیم برگشت ناپذیری و σ–برگشت ناپذیری یک طرفه به یکدیگر بستگی ندارند، که در مثال زیر نشان می دهیم.

مثال ۹.۲.۴. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ حلقه اعداد صحیح باشد. حلقه $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ را در نظر می گیریم. مشاهده می کنیم برای دو عضو دلخواه $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ در R، $AB = 0$، اما $BA \neq 0$. بنابراین R برگشت پذیر نیست.

حال درونریختی $\sigma : R \to R$ را با ضابطه زیر تعریف می کنیم:

$$\sigma(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ عناصری از R باشند و $AB = 0$. بنابراین $aa' = 0$. پس $B\sigma(A) = 0$، و در نتیجه R σ–برگشت پذیر راست است.

اما برای $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ در R، $AB = 0$ در حالیکه $\sigma(B)A \neq 0$. بنابراین R σ–برگشت پذیر چپ نیست.

مثال زیر نشان می دهد که یک حلقه σ–برگشت پذیر جابجایی با خودریختی σ وجود دارد که آرمنداریز σ–اریب نیست.

مثال ۱۰.۲.۴. فرض کنیم $\mathbb{Z}_4$ حلقه اعداد صحیح به پیمانه ۴ باشد.

حلقه $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_4 \right\}$ را بررسی می کنیم، و نشان می دهیم R آرمنداریز σ–اریب نیست.

ابتدا درونریختی $\sigma : R \to R$ را با ضابطه $\sigma(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ در نظر می گیریم. فرض کنیم $p = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ و $q = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ عناصری از R باشند و $pq = 0$. بنابراین $q\sigma(p) = 0$، و لذا R، σ–برگشت پذیر راست است. به همین ترتیب R، σ–برگشت پذیر چپ و در نتیجه σ–برگشت پذیر می باشد. اما R آرمنداریز σ–اریب نیست.

زیرا برای چندجمله ای x $p(x) = \begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix} x$ در $R[x;\sigma]$، $p(x)^۲ = ۰$، در حالیکه $\begin{pmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}\sigma(\begin{pmatrix} ۲ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{pmatrix}) \neq ۰$.

تذکر. فرض کنیم R یک حلقه برگشت پذیر باشد. در این صورت R، $\sigma-$برگشت پذیر چپ است اگر و تنها اگر $\sigma-$برگشت پذیر راست باشد.

گزاره ۱۱.۲.۴. فرض کنیم σ یک تکریختی از حلقه R باشد. حلقه R، $\sigma-$برگشت پذیر راست است، اگر وتنها اگر به ازای هر $a, b \in R$، $a\sigma(b) = ۰$ نتیجه دهد $ba = ۰$.

اثبات. فرض کنیم R، $\sigma-$برگشت پذیر راست باشد. بنابراین برای هر $a, b \in R$،

$$a\sigma(b) = ۰ \implies ۰ = \sigma(b)\sigma(a) = \sigma(ba)$$

و چون σ تکریختی است، در نتیجه $ba = ۰$.

بعکس، فرض کنیم اگر $a\sigma(b) = ۰$، آنگاه $ba = ۰$. نشان می دهیم R، $\sigma-$برگشت پذیر راست است.

فرض کنیم $ab = ۰$. چون σ تکریختی است، پس $\sigma(a)\sigma(b) = \sigma(ab) = ۰$. بنابراین با توجه به فرض $b\sigma(a) = ۰$. ■

لم ۱۲.۲.۴. درونریختی σ از حلقه R را در نظر می گیریم.

(۱) فرض کنیم حلقه R برگشت پذیر و $\sigma-$برگشت پذیر راست باشد. اگر σ یک تکریختی و $m \geq ۰$، آنگاه به ازای هر $a, b, c \in R$،

$$a\sigma^m(bc) = ۰ \iff ca\sigma^m(b) = ۰$$

(۲) فرض کنیم R یک حلقه نیم جابجایی باشد. اگر $p(x) = \sum_{i=۰}^{m} a_i x^i$ و $q(x) = \sum_{j=۰}^{n} b_j x^j$

چندجمله ایهای ناصفر از $R[x;\sigma]$ باشند و $p(x)q(x)=0$، آنگاه به ازای هر $0\leq i\leq m$،

$a_i\sigma^i(b_0^{i+1})=0$. (بنابراین برای هر $h\geq i+1$، $a_i\sigma^i(b_0^h)=0$.)

اثبات. (۱) فرض کنیم R یک حلقه برگشت پذیر و $\sigma-$برگشت پذیر راست باشد. اگر $m=0$، آنگاه $abc=0$ اگر و تنها اگر $cab=0$، و لذا حکم برقرار است. فرض کنیم $m\geq 1$.

به استقرا روی m عمل می کنیم. فرض کنیم برای هر $k<m$،

$$a\sigma^k(bc)=0 \iff ca\sigma^k(b)=0.$$

بنابراین، $a\sigma^{k+1}(bc)=0 \iff a\sigma^k(\sigma(b)\sigma(c))=0 \iff \sigma(c)a\sigma^{k+1}(b)=0$.

از طرفی با توجه به این فرض که R برگشت پذیر است و بنا به گزاره ۱۱.۲.۴،

$$a\sigma^{k+1}(b)\sigma(c)=0 \iff ca\sigma^{k+1}(b)=0.$$

در نتیجه $a\sigma^{k+1}(bc)=0 \iff ca\sigma^{k+1}(b)=0$.

(۲) در اینجا روش اثبات لم ۱.۲.۲ را روی حلقه چندجمله ای اریب به کار می بریم.

فرض کنیم $p(x)q(x)=0$. واضح است که برای هر $0\leq i\leq m$ عبارت

$$\sum_{j=0}^{i}a_j\sigma^j(b_{i-j})=0. \tag{۱.۴}$$

ضریب جمله iام معادله $f(x)g(x)=0$ است.

اگر $i=0$، آنگاه $a_0b_0=0$. فرض کنیم برای هر $j<k$، $a_j\sigma^j(b_0^{j+1})=0$. چون R نیم جابجایی است، پس $a_j\sigma^j(b_0^k)=0$، و برای هر $j<k$، $a_j\sigma^j(b_{k-j})\sigma^j(b_0^k)=0$.

حال با در نظر گرفتن $i=k$، اگر تساوی (۱.۴) را از راست در $\sigma^j(b_0^k)$ ضرب کنیم، آنگاه

$$0=\sum_{j=0}^{i}a_j\sigma^j(b_{i-j})\sigma^j(b_0^k)=a_k\sigma^k(b_0^{k+1}).$$

بنابراین نتیجه برقرار می شود. ■

قضیه ۱۳.۲.۴. فرض کنیم σ یک خودریختی از حلقه R، و R برگشت پذیر و σ−برگشت پذیر راست باشد، در این صورت

(۱) حلقه R مک کوی σ−اریب است.

(۲) اگر $p(x)$ و $q(x)$ چندجمله ایهای ناصفر از $R[x;\sigma]$ باشند و $p(x)q(x) = ۰$، آنگاه عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $cq(x) = ۰$. [۲]

اثبات. فرض کنیم $p(x) = \sum_{i=۰}^{m} a_i x^i$ و $q(x) = \sum_{j=۰}^{n} b_j x^j$ چندجمله ایهای ناصفر از $R[x;\sigma]$ به ترتیب از درجه m و n باشند و $p(x)q(x) = ۰$. می توان فرض کرد $a_۰, b_۰, a_m, b_m \in R \setminus \{۰\}$. ادعا می کنیم که رابطه

$$ab = ۰ \iff \sigma^{s_۱}(a^{t_۱})\sigma^{s_۲}(b^{t_۲}) = ۰ \iff \sigma^{s_۳}(b^{t_۳})\sigma^{s_۴}(a^{t_۴}) = ۰ \qquad (۲.۴)$$

برای هر عدد صحیح نامنفی s_i و هر عدد صحیح مثبت t_i برقرار است.

چون R برگشت پذیر و σ−برگشت پذیر راست است، پس

$$ab = ۰ \implies a\sigma(b) = ۰ \ , \ b\sigma(a) = ۰.$$

همچنین از $a\sigma(b) = ۰$ و $b\sigma(a) = ۰$، به ترتیب $\sigma(b)\sigma(a) = ۰$ و $\sigma(a)\sigma(b) = ۰$ را نتیجه می گیریم.

بنابراین برای هر عدد صحیح نامنفی s_i داریم: $\sigma^{s_۱}(a)\sigma^{s_۲}(b) = ۰$ و $\sigma^{s_۳}(b)\sigma^{s_۴}(a) = ۰$.

چون R برگشت پذیر و نیم جابجایی است، لذا برای هر عدد صحیح و مثبت t_i داریم:

$$\sigma^{s_۱}(a^{t_۱})\sigma^{s_۲}(b^{t_۲}) = ۰ \quad , \quad \sigma^{s_۳}(b^{t_۳})\sigma^{s_۴}(a^{t_۴}) = ۰.$$

عکس رابطه $(۲,۴)$ با توجه به یک به یک بودن σ برقرار است.

اثبات (۱). به استقرا روی درجه $q(x)$ نشان می دهیم عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $p(x)c = ۰$.

اگر $q(x) = b_\circ$، آنگاه حکم بدیهی است. بنابراین فرض کنیم $\deg(q(x)) \geq ۱$.

اگر به ازای هر i، $a_i q(x) = \circ$، آنگاه با توجه به رابطه $(۲, ۴)$ به ازای هر j، $p(x)b_j = \circ$، و چون $q(x) \neq \circ$، بنابراین حکم برقرار است. فرض کنیم iیی وجود دارد که $a_i q(x) \neq \circ$، و $i_\circ$ بزرگترین اندیسی باشد که خاصیت $a_{i_\circ} q(x) \neq \circ$ را دارد. چون با توجه به (۲.۴)،

$$a_{i_\circ} b_j = \circ \iff b_j \sigma^j(a_{i_\circ}) = \circ$$

پس $q(x)a_{i_\circ} \neq \circ$، و لذا می توان نوشت $p(x)(q(x)a_{i_\circ}) = \circ$.

از طرفی چون برای هر $i_\circ + ۱ \leq t \leq m$، $(a_t x^t)q(x) = \circ$، لذا

$$(\sum_{i=i_\circ+۱}^{m} a_i x^i)q(x) = \circ \quad , \quad p(x)q(x) = (\sum_{i=\circ}^{i_\circ} a_i x^i)q(x).$$

بنابراین $a_{i_\circ}\sigma^{i_\circ}(b_n) = \circ$، پس با توجه به رابطه (۲.۴) نتیجه می گیریم $a_{i_\circ} b_n = \circ$ و $b_n \sigma^n(a_{i_\circ}) = \circ$، که باعث می شود $\deg(q(x)a_{i_\circ}) < \deg(q(x))$. بنابراین بنا به فرض استقرا عنصر مخالف صفر $c \in R$ وجود دارد به طوریکه $p(x)c = \circ$، و در نتیجه حلقه R مک کوی $\sigma-$اریب است.

اثبات (۲). برای هر چندجمله ای $p(x) \in R[x;\sigma]$، ایده آل چپ تولید شده بوسیله ضرایب $p(x)$ را با C_p نمایش می دهیم. به استقرا روی درجه $q(x)$ نشان می دهیم عنصر مخالف صفر $c \in C_p$ وجود دارد به قسمی که $cq(x) = \circ$.

اگر $n = \circ$، آنگاه با فرض $c = a_\circ$ نتیجه می گیریم $a_\circ q(x) = a_\circ b_\circ = \circ$، و لذا حکم برقرار است. فرض کنیم $n \geq ۱$.

با استفاده از قسمت (۲) لم ۱۲.۲.۴، عدد $l \geq \circ$ وجود دارد به طوریکه

$$p(x)b_\circ^{l+۱} = \sum_{i=\circ}^{m} a_i \sigma^i(b_\circ^{l+۱})x^i = \circ \neq \sum_{i=\circ}^{m} a_i \sigma^i(b_\circ^l)x^i = p(x)b_\circ^l.$$

سپس با توجه به قسمت (۱) لم ۱۲.۲.۴، به ازای هر $\circ \leq i \leq m$، $a_i \sigma^i(b_\circ^{l+۱}) = \circ$ نتیجه می دهد

$b_\circ^l a_i \sigma^i(b_\circ) = \circ$، و برای هر $\circ \leq i_\circ \leq m$ ،$a_{i_\circ} \sigma^{i_\circ}(b_\circ^l) \neq \circ$ نتیجه می دهد $b_\circ^l a_{i_\circ} \neq \circ$. بنابراین $b_\circ^l p(x) \neq \circ$ و $b_\circ^l p(x) b_\circ = \circ$.

فرض کنیم $h(x) = b_\circ^l p(x)$. در این صورت $h(x)b_\circ = \circ$. اگر $k(x) = (q(x) - b_\circ)/x$، چون $p(x)q(x) = \circ$، آنگاه $h(x)k(x) = \circ$، که $h(x), k(x)$ هردو مخالف صفر هستند.

مشاهده می کنیم که درجه $k(x)$ کمتر از n است، بنابراین با توجه به فرض استقرا عنصر مخالف صفر $c \in C_h$ وجود دارد به طوریکه $ck(x) = \circ$. از طرفی با توجه به قسمت (۱) لم ۱۲.۲.۴، از $h(x)b_\circ = \circ$ نتیجه می گیریم $C_h b_\circ = \circ$. پس $cb_\circ = \circ$، و در نتیجه $cq(x) = \circ$. همچنین $C_h \subseteq C_p$، بنابراین عنصر مخالف صفر $c \in C_p$ وجود دارد که $cq(x) = \circ$. ■

گزاره ۱۴.۲.۴. فرض کنیم حلقه R، برگشت پذیر و σ–برگشت پذیر راست باشد. اگر به ازای هر $a, b \in R$، $ab = \circ$ آنگاه برای هر عدد صحیح و مثبت n، $aR\sigma^n(b) = \circ$.

اثبات. کافیست نشان دهیم $aR\sigma(b) = \circ$. چون R برگشت پذیر و σ–برگشت پذیر راست است، پس $ba = \circ$ نتیجه می دهد $ab = \circ$ و $a\sigma(b) = \circ$. اگر $a\sigma(b) = \circ$، آنگاه به ازای هر $r \in R$، $a\sigma(b)r = \circ$. بنابراین $ar\sigma(b) = \circ$، و در نتیجه $aR\sigma(b) = \circ$. ■

نتیجه ۱۵.۲.۴. (۱) اگر حلقه R برگشت پذیر باشد، آنگاه R مک کوی است.

(۲) حلقه σ–برگشت پذیر جابجایی با تکریختی σ مک کوی σ–اریب است.

(۳) حلقه σ–برگشت پذیر تقلیل یافته با تکریختی σ مک کوی σ–اریب است.[۳]

اثبات. (۱) قضیه ۲.۲.۲ در فصل دوم.

(۲) با توجه به قسمت (۱) قضیه ۱۳.۲.۴، برقرار است.

(۳) فرض کنیم $p = \sum_{i=\circ}^{m} a_i x^i$ و $q = \sum_{j=\circ}^{n} b_j x^j$ چندجمله ایهای ناصفر در $R[x;\sigma]$ باشند و $pq = \circ$. در این صورت به ازای هر $k = \circ, ۱, \ldots, m+n$، $\sum_{i+j=k} a_i \sigma^i(b_j) = \circ$.

ادعا می کنیم به ازای هر i, j، $a_i\sigma^i(b_j) = 0$. به استقرا روی $i+j$ نشان می دهیم حکم برقرار است. واضح است $a_0 b_0 = 0$. فرض کنیم ادعا برای $i + j \leq s$ برقرار باشد. بنابراین ضریب درجه $s+1$ام معادله $pq = 0$ را در نظر می گیریم:

$$a_0 b_{s+1} + a_1\sigma(b_s) + \cdots + a_s\sigma^s(b_1) + a_{s+1}\sigma^{s+1}(b_0) = 0. \tag{۳.۴}$$

اگر معادله $(3, 4)$ را از راست در $\sigma^{s+1}(b_0)$ ضرب کنیم، آنگاه

$$a_0 b_{s+1}\sigma^{s+1}(b_0) + \cdots + a_s\sigma^s(b_1)\sigma^{s+1}(b_0) + a_{s+1}\sigma^{s+1}(b_0)\sigma^{s+1}(b_0) = 0. \tag{۴.۴}$$

چون بنا به فرض استقرا به ازای هر $i = 0, 1, \ldots, s$، $a_i\sigma^i(b_0) = 0$، و با توجه به گزاره ۱۴.۲.۴، از $a_i\sigma^i(b_0) = 0$ نتیجه می گیریم $a_i R\sigma^{s+1}(b_0) = 0$، پس

$$a_0 b_{s+1}\sigma^{s+1}(b_0) = a_1\sigma(b_s)\sigma^{s+1}(b_0) = \cdots = a_s\sigma^s(b_1)\sigma^{s+1}(b_0) = 0. \tag{۵.۴}$$

بنابراین با توجه به فرمول $(4, 4)$، $a_{s+1}(\sigma^{s+1}(b_0))^2 = 0$. یادآوری می کنیم حلقه R تقلیل یافته است اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in R$، $ab^2 = 0$ نتیجه دهد $ab = 0$. چون $a_{s+1}(\sigma^{s+1}(b_0))^2 = 0$، لذا $a_{s+1}\sigma^{s+1}(b_0) = 0$. بنابراین معادله $(3, 4)$ به صورت زیر به دست می آید:

$$a_0 b_{s+1} + a_1\sigma(b_s) + \cdots + a_s\sigma^s(b_1) = 0 \tag{۶.۴}$$

متناظراً اگر معادله $(6, 4)$ را از راست در $\sigma^s(b_1)$ ضرب کنیم، آنگاه $a_s(\sigma^s(b_1))^2 = 0$، و در نتیجه $a_s\sigma^s(b_1) = 0$.

با ادامه این روش داریم:

$$a_{s+1}\sigma^{s+1}(b_0) = a_s\sigma^s(b_1) = \cdots = a_0 b_{s+1} = 0.$$

بنابراین برای هر i, j، که $i + j = s + 1$، $a_i\sigma^i(b_j) = 0$. پس بنا بر اصل استقرا به ازای هر i, j، $a_i\sigma^i(b_j) = 0$. در نتیجه R آرمنداریز σ–اریب و با توجه به گزاره ۲.۲.۴، مک کوی σ–اریب می باشد.

■

مثال ۱۶.۲.۴. فرض کنیم $\mathbb{Z}_3$ حلقه اعداد صحیح به پیمانه ۳ باشد. نشان می دهیم حلقه ماتریس های بالامثلثی $R = Mat_2(\mathbb{Z}_3)$ روی $\mathbb{Z}_3$ مک کوی σ–اریب نیست.

درونریختی σ از حلقه R را با ضابطه زیر در نظر می گیریم.

$$\sigma(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

فرض کنیم $p(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $q(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

چندجمله ایهای ناصفر در $R[x;\sigma]$ باشند. مشاهده می کنیم $p(x)q(x) = 0$، اما عنصر مخالف صفر $c \in R$ وجود ندارد که $p(x)c = 0$، بنابراین R مک کوی σ–اریب نیست. در نتیجه حلقه ماتریسهای بالا مثلثی $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ روی $\mathbb{Z}_3$ مک کوی σ–اریب نمی باشد.

تعریف ۱۷.۲.۴. ایده آل I از حلقه R را σ–ایده آل می نامیم، هرگاه $\sigma(I) \subseteq I$.

اگر I، σ–ایده آل باشد، آنگاه $\overline{\sigma} : \frac{R}{I} \longrightarrow \frac{R}{I}$ با ضابطه $\overline{\sigma}(a + I) = \sigma(a) + I$ برای هر $a \in R$، یک درونریختی از حلقه خارج قسمتی $\frac{R}{I}$ است.

تذکر. در حالت کلی لزومی ندارد تصویر همریخت حلقه مک کوی σ–اریب، مک کوی $\overline{\sigma}$–اریب باشد.

مثال ۱۸.۲.۴. فرض کنیم R، حلقه خارج قسمتی با ضرایب صحیح باشد. در این صورت R، یک دامنه است. بنابراین با توجه به نتیجه ۳.۲.۴، برای هر درونریختی σ، R مک کوی σ–اریب است. اما با توجه به مثال ۱۶.۲.۴ برای هر عدد صحیح اول فرد q، حلقه $\frac{R}{q} \cong \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_q & \mathbb{Z}_q \\ \mathbb{Z}_q & \mathbb{Z}_q \end{pmatrix}$ مک کوی $\overline{\sigma}$–اریب نیست.

تعریف ۱۹.۲.۴. اشتراک تمام ایده آلهای اول حلقه R را رادیکال اول $P(R)$ از R می نامیم.

هرگاه R ایده آل اول نداشته باشد، آنگاه $P(R) = R$. حلقه R با خاصیت $P(R) = ۰$ را نیم اول می نامیم.

تعریف ۲۰.۲.۴. ایده آل $P(R)$ از حلقه R را نیم اول کامل می نامیم، هرگاه برای هر $a \in R$، اگر $a^۲ \in P(R)$ آنگاه $a \in P(R)$.

مثال بعد نشان می دهد برای یک خودریختی σ از حلقه جابجایی R، رادیکال اول $P(R)$، که $P(R)$ یک ایده آل نیم اول کامل از R است، مک کوی σ–اریب و $\frac{R}{P(R)}$ مک کوی $\overline{\sigma}$–اریب است، ولی R مک کوی σ–اریب نیست.

مثال ۲۱.۲.۴. فرض کنیم $\mathbb{Z}$ حلقه اعداد صحیح باشد. زیرحلقه

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ ۰ & b \end{pmatrix} \mid a - b \overset{۲}{\equiv} c \overset{۲}{\equiv} ۰ \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

از حلقه ماتریسهای بالا مثلثی ۲×۲ را در نظر می گیریم. فرض کنیم $\sigma : R \to R$ یک درونریختی با ضابطه $\sigma(\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ ۰ & c \end{pmatrix}$ باشد. در این صورت $P(R) = \left\{ \begin{pmatrix} ۰ & c \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \mid c \overset{۲}{\equiv} ۰ \right\}$، نیم اول کامل و آرمنداریز σ–اریب است، لذا مک کوی σ–اریب می باشد.

چون $\frac{R}{P(R)} = \left\{ \begin{pmatrix} a & ۰ \\ ۰ & b \end{pmatrix} \mid a - b \overset{۲}{\equiv} ۰ \right\}$، تقلیل یافته و $\overline{\sigma}$ نگاشت همانی روی $\frac{R}{P(R)}$ است، پس $\frac{R}{P(R)}$ آرمنداریز $\overline{\sigma}$–اریب و درنتیجه مک کوی $\overline{\sigma}$–اریب می باشد. در حالیکه R آرمنداریز σ–اریب نیست. زیرا برای

$$(p(x) = \begin{pmatrix} ۲ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} x \ \ , \ \ q(x) = \begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & -۲ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} x) \quad \in \quad R[x; \sigma]$$

$pq = ۰$ اما $\sigma(\begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & -۲ \end{pmatrix}) \begin{pmatrix} ۰ & ۲ \\ ۰ & ۰ \end{pmatrix} \neq ۰$. از طرفی عنصر مخالف صفر $c \in R$ وجود ندارد که $p(x)c = ۰$. درنتیجه R مک کوی σ–اریب نیز نمی باشد.

تعریف ۲۲.۲.۴. فرض کنیم R یک حلقه، و برای هر $n \geq ۲$،

$$S_n(R) = \left\{ \left(\begin{array}{ccccc} a & a_{۱۲} & a_{۱۳} & \cdots & a_{۱n} \\ ۰ & a & a_{۲۳} & \cdots & a_{۲n} \\ ۰ & ۰ & a & \cdots & a_{۳n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & \cdots & a \end{array} \right) \mid a, a_{ij} \in R \right\}.$$

واضح است که $S_n(R)$ یک زیر حلقه از حلقه ماتریسهای بالا مثلثی $n \times n$ است. هر درونریختی σ از R را می توان به یک درونریختی $\overline{\sigma}$ از $S_n(R)$، به صورت زیر توسیع داد.

$$\overline{\sigma}((a_{ij})) = (\sigma(a_{ij})).$$

قضیه ۲۳.۲.۴. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R باشد. در این صورت R مک کوی σ–اریب است اگر و تنها اگر برای هر $n \geq ۲$، $S_n(R)$ مک کوی $\overline{\sigma}$–اریب باشد.

اثبات. کافیست برای حالت $n = ۲$ ثابت کنیم. فرض کنیم R مک کوی σ–اریب باشد.

یادآور می شویم که $S_n(R)[x;\sigma] \cong S_n(R[x;\sigma])$. فرض کنیم

$$p(x) = \sum_{i=۰}^{m} \left(\begin{array}{cc} a_{۱۱}^{(i)} & a_{۱۲}^{(i)} \\ ۰ & a_{۱۱}^{(i)} \end{array} \right) x^i = \left(\begin{array}{cc} p_{۱۱} & p_{۱۲} \\ ۰ & p_{۱۱} \end{array} \right),$$

$$q(x) = \sum_{j=۰}^{n} \left(\begin{array}{cc} b_{۱۱}^{(j)} & b_{۱۲}^{(j)} \\ ۰ & b_{۱۱}^{(j)} \end{array} \right) x^j = \left(\begin{array}{cc} q_{۱۱} & q_{۱۲} \\ ۰ & q_{۱۱} \end{array} \right)$$

چندجمله ایهای ناصفر در $S_۲(R)[x;\overline{\sigma}]$ باشند و $p(x)q(x) = ۰$. از

$$p(x)q(x) = \left(\begin{array}{cc} p_{۱۱} & p_{۱۲} \\ ۰ & p_{۱۱} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} q_{۱۱} & q_{۱۲} \\ ۰ & q_{۱۱} \end{array} \right) = ۰$$

نتیجه می گیریم $p_{۱۱}q_{۱۱} = ۰$ و $p_{۱۱}q_{۱۲} + p_{۱۲}q_{۱۱} = ۰$.

اگر $p_{۱۱} \neq ۰$، آنگاه عنصر مخالف صفر $q \in \{q_{۱۱}, q_{۱۲}\}$ وجود دارد به طوریکه $p_{۱۱}q = ۰$. از طرفی چون R مک کوی σ–اریب است، عنصر ناصفر $c \in R$ وجود دارد که $p_{۱۱}c = ۰$. بنابراین

$$\left(\begin{array}{cc} p_{۱۱} & p_{۱۲} \\ ۰ & p_{۱۱} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc} ۰ & c \\ ۰ & ۰ \end{array} \right) = ۰ .$$

اگر $p_{11} = 0$، آنگاه برای هر عنصر مخالف صفر $c \in R$، $\begin{pmatrix} 0 & p_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$. بنابراین $S_2(R)$، مک کوی $\overline{\sigma}$–اریب است.

بعکس، فرض کنیم $S_2(R)$، مک کوی $\overline{\sigma}$–اریب باشد. فرض کنیم $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$ و $q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$ چندجمله ایهای مخالف صفر در $R[x;\sigma]$ باشند و $p(x)q(x) = 0$. در این صورت

$$\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q(x) & 0 \\ 0 & q(x) \end{pmatrix} = 0.$$

چون $S_2(R)$، مک کوی $\overline{\sigma}$–اریب است، پس عنصر مخالف صفر $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in S_2(R)$ وجود دارد، به طوریکه

$$\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & p(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = 0.$$

بنابراین $p(x)a = 0$ و $p(x)b = 0$، که $a \neq 0$ یا $b \neq 0$. درنتیجه R مک کوی σ–اریب است. ■

نتیجه ۲۴.۲.۴. حلقه R مک کوی است اگر و تنها اگر برای هر $n \geq 2$، $S_n(R)$ مک کوی باشد.

$$S_n(R) = \left\{ \begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \mid a, a_{kl} \in R \right\}.$$

اثبات. ابتدا فرض می کنیم حلقه R مک کوی باشد. عناصر $A_i, B_j \in S_n(R)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & a_{12}^{(i)} & \cdots & a_{1n}^{(i)} \\ 0 & a_i & \cdots & a_{2n}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_i \end{pmatrix} \quad , \quad B_j = \begin{pmatrix} b_j & b_{12}^{(j)} & \cdots & b_{1n}^{(j)} \\ 0 & b_j & \cdots & b_{2n}^{(j)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_j \end{pmatrix}.$$

فرض کنیم

$$F(x) = \sum_{i=0}^{p} A_ix^i = \begin{pmatrix} f(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ 0 & f(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(x) \end{pmatrix},$$

$$G(x)=\sum_{j=0}^{q}B_jx^j=\begin{pmatrix} g(x) & g_{12}(x) & \cdots & g_{1n}(x)\\ 0 & g(x) & \cdots & g_{2n}(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & g(x)\end{pmatrix}$$

دو چندجمله ای ناصفر در $S_n(R)[x]$ باشند و $F(x)G(x)=0$، که به ازای هر $1\leq k,l\leq n$ و $k<l$،

$$f(x)=\sum_{i=0}^{p}a_ix^i \;\;,\;\; f_{kl}(x)=\sum_{i=0}^{p}a_{kl}^{(i)}x^i \;\;,\;\; g(x)=\sum_{j=0}^{q}b_jx^j \;\;,\;\; g_{kl}(x)=\sum_{j=0}^{q}b_{kl}^{(j)}x^j.$$

مجموعه $H(x)=F(x)G(x)=(h_{pq}(x))$ را برای $p,q=1,\cdots,n$ در نظر می گیریم.

حالت اول. اگر $f(x)\neq 0$ و $g(x)\neq 0$، آنگاه $h_{11}(x)=f(x)g(x)=0$. چون R مک کوی است، عناصر مخالف صفر $s,t\in R$ وجود دارند به طوریکه $f(x)s=0$ و $tf(x)=0$.

فرض کنیم $E_{ij}(r)$ نمایانگر ماتریسی باشد که درایه های (i,j) آن برابر r، و سایر درایه ها صفر است.

اگر $A=E_{1n}(s)$ و $B=E_{1n}(t)$، آنگاه $F(x)A=0$ و $BG(x)=0$.

حالت دوم. اگر $f(x)\neq 0$ و $g(x)=0$، آنگاه چون $G(x)\neq 0$، چندجمله ای $g_{kl}(x)\neq 0$ وجود دارد به طوریکه برای برخی k,l و $1\leq u\leq n-k$، $g_{k+u,l}(x)=0$. همچنین $h_{kl}(x)=f(x)g_{kl}(x)=0$. چون R مک کوی است، پس عنصر مخالف صفر $s\in R$ وجود دارد به طوریکه $f(x)s=0$. اگر $A=E_{1n}(s)$، آنگاه $F(x)A=AG(x)=0$.

حالت سوم. اگر $f(x)=0$ و $g(x)\neq 0$، آنگاه مشابه حالت دوم، عناصر مخالف صفر $A,B\in R$ وجود دارند به طوریکه $BG(x)=F(x)A=0$.

حالت چهارم. اگر $f(x)=0$ و $g(x)=0$، آنگاه برای هر عنصر مخالف صفر $s\in R$ فرض می کنیم $A=E_{1n}(s)$. واضح است که $F(x)A=AG(x)=0$.

بنابراین $S_n(R)$ مک کوی است.

بعکس، فرض کنیم برای هر $n\geq 2$، $S_n(R)$ مک کوی باشد. فرض کنیم $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ و $g(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ دو چندجمله ای مخالف صفر در $R[x]$ باشند و $f(x)g(x)=0$. همچنین فرض

کنیم $F(x)=\sum_{i=0}^{n} A_ix^i$ و $G(x)=\sum_{j=0}^{m} B_jx^j$ عناصری از $S_n(R)[x]$ باشند که برای هر $0 \leq i \leq n$ و $0 \leq j \leq m$،

$$A_i=\begin{pmatrix} a_i & a_i & \cdots & a_i \\ 0 & a_i & \cdots & a_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_i \end{pmatrix} \quad , \quad B_j=\begin{pmatrix} b_j & b_j & \cdots & b_j \\ 0 & b_j & \cdots & b_j \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_j \end{pmatrix}$$

و

$$F(x)G(x)=\begin{pmatrix} f(x) & f(x) & \cdots & f(x) \\ 0 & f(x) & \cdots & f(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(x) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(x) & g(x) & \cdots & g(x) \\ 0 & g(x) & \cdots & g(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g(x) \end{pmatrix}=0.$$

چون $S_n(R)$ مک کوی است، پس عنصر مخالف صفر $A=\begin{pmatrix} s & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ 0 & s & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s \end{pmatrix}$ در $S_n(R)$ وجود دارد به طوریکه $F(x)A=0$. اگر $s \neq 0$، آنگاه $f(x)s=0$.

اگر $s=0$، آنگاه عنصر مخالف صفر s_{ij} وجود دارد، به طوریکه به ازای هر $1 \leq v \leq n-i$، $s_{i+v,j}=0$. بنابراین $f(x)s_{ij}=0$. به طور مشابه عنصر مخالف صفر $t \in R$ وجود دارد به طوریکه $tg(x)=0$. بنابراین R مک کوی است. ■

مثال زیر نشان می دهد، حلقه مک کوی σ–اریب وجود دارد که آرمنداریز σ–اریب نیست.

مثال ۲۵.۲.۴. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R و R، σ–صلب باشد. زیرحلقه

$$S_4(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a,a_{ij}\in R\right\}.$$

از حلقه ماتریسهای بالا مثلثی 4×4 را نظر می گیریم. نشان می دهیم S_4 آرمنداریز $\overline{\sigma}$–اریب نیست.

یادآوری می کنیم که اگر حلقه R، σ–صلب باشد، آنگاه برای هر $e^2=e\in R$، $\sigma(e)=e$.

فرض کنیم $p = e_{۱۲} + (e_{۱۲} - e_{۱۳})x$ و $q = e_{۳۴} + (e_{۲۴} + e_{۳۴})x$ دو عضو دلخواه از $S_۴[x;\overline{\sigma}]$ باشند که e_{ij}ها ماتریس های واحد در $S_۴$ هستند. پس

$$p = \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} x,$$

$$q = \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} x.$$

مشاهده می کنیم $pq = ۰$، اما $(e_{۱۲} - e_{۱۳})\overline{\sigma}(e_{۳۴}) \neq ۰$، یعنی

$$\begin{pmatrix} ۰ & ۱ & -۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{pmatrix} \neq ۰$$

درنتیجه $S_۴(R)$، آرمنداریز $\overline{\sigma}$–اریب نیست. در حالیکه با توجه به قضیه ۲۳.۲.۴، مک کوی $\overline{\sigma}$–اریب است.

تذکر. اگر σ یک درونریختی از حلقه R باشد، آنگاه نگاشت $\overline{\sigma} : R[x] \to R[x]$ با ضابطه

$$\overline{\sigma}(\sum_{i=۰}^{m} a_i x^i) = \sum_{i=۰}^{m} \sigma(a_i) x^i$$

یک درونریختی از حلقه چندجمله ایهای $R[x]$ است.

قضیه ۲۶.۲.۴. فرض کنیم σ یک درونریختی از حلقه R باشد و برای برخی اعداد صحیح و مثبت t، $\sigma^t = id_R$. در این صورت حلقه R مک کوی σ–اریب است اگر و تنها اگر $R[x]$ مک کوی $\overline{\sigma}$–اریب باشد.

اثبات. فرض کنیم R، مک کوی σ–اریب باشد. فرض کنیم

$$p(y) = f_۰(x) + \cdots + f_m(x)y^m \quad , \quad q(y) = g_۰(x) + \cdots + g_n(x)y^n$$

دو چندجمله ای ناصفر در $(R[x])[y;\overline{\sigma}]$ باشند و $p(y)q(y)=0$، که برای هر $0 \le i \le m$ و $0 \le j \le n$،

$$f_i(x)=a_{i0}+\cdots+a_{w_i}x^{w_i} \quad , \quad g_j(x)=b_{j0}+\cdots+b_{v_j}x^{v_j}$$

چندجمله ایهایی در $R[x]$ هستند که $a_{i0},\ldots,a_{w_i},b_{j0},\ldots,b_{v_j}\in R$.

قرار می دهیم: $k=\sum_{i=0}^{m}\deg(f_i)+\sum_{j=0}^{n}\deg(g_j)$. که $\deg$ درجه چندجمله ای است و درجه چندجمله ای صفر را 0 در نظر می گیریم. حال فرض کنیم

$$P=f_0(x^t)+f_1(x^t)x^{tk+1}+\cdots+f_m(x^t)x^{(tk+1)m},$$

$$Q=g_0(x^t)+g_1(x^t)x^{tk+1}+\cdots+g_n(x^t)x^{(tk+1)n}$$

دو چندجمله ای در $R[x;\sigma]$ باشند. چون $p(y)\neq 0$ و $q(y)\neq 0$، پس $P\neq 0$ و $Q\neq 0$. از طرفی چون مجموعه ضرایب f_iها و g_jها با مجموعه ضرایب P و Q معادل است و همچنین x^t با همه عناصر R در $R[x;\sigma]$، که $\sigma^t=id_R$ جابجا می شود، بنابراین از $p(y)q(y)=0$، نتیجه می گیریم $PQ=0$.

از آنجائیکه R مک کوی σ–اریب است، پس عنصر مخالف صفر $c\in R$ وجود دارد به طوریکه $Pc=0$. پس برای هر $i=0,\ldots,m$ و $s=0,\ldots,w_i$، $f_i(x^t)\sigma^i(c)=0$ و لذا $a_{i_s}\sigma^i(c)=0$. بنابراین عنصر مخالف صفر c در $(R[x])[y;\overline{\sigma}]$ وجود دارد به طوریکه $p(y)c=0$. در نتیجه حلقه $R[x]$ مک کوی $\overline{\sigma}$–اریب است.

بعکس، فرض کنیم $R[x]$، مک کوی $\overline{\sigma}$–اریب باشد.

فرض کنیم $p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ و $q(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n$ دو چندجمله ای مخالف صفر در $R[x;\sigma]$ باشند و $p(x)q(x)=0$، همچنین فرض کنیم $f(y)=a_0+a_1y+\cdots+a_my^m$ و $g(y)=b_0+b_1y+\cdots+b_ny^n$ چندجمله ایهایی در $(R[x])[x;\overline{\sigma}]$ باشند. از آنجائیکه $p(x)\neq 0$ و $q(x)\neq 0$، پس $f(y)\neq 0$ و $g(y)\neq 0$. به علاوه چون $\overline{\sigma}$ با σ معادل است و $p(x)q(x)=0$، بنابراین

$f(y)g(y) = ۰$. از طرفی چون $R[x]$ مک کوی $\overline{\sigma}$-اریب است، پس عنصر مخالف صفر $c(x) = c_۰ + c_۱x + \cdots + c_kx^k$ در $R[x]$ وجود دارد که $f(y)c(x) = ۰$. در این صورت برای هر $۰ \leq i \leq m$، $a_i\overline{\sigma}^i(c(x)) = ۰$. بنابراین برای هر $۰ \leq i \leq m$ و $۰ \leq l \leq k$، $a_i\sigma^i(c_l) = ۰$.

چون $c(x) \neq ۰$، بنابراین عنصر مخالف صفر c_t وجود دارد به طوریکه $p(x)c_t = ۰$. در نتیجه R مک کوی σ-اریب است. ■

تعریف ۲۷.۲.۴. برای یک درونریختی σ از حلقه R، و توسیع بدیهی $T(R,R)$ از R، نگاشت $\overline{\sigma} : T(R,R) \to T(R,R)$ با ضابطه:

$$\overline{\sigma}(\begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & a \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \sigma(a) & \sigma(b) \\ ۰ & \sigma(a) \end{pmatrix}$$

یک درونریختی از $T(R,R)$ می باشد.

گزاره ۲۸.۲.۴. فرض کنیم حلقه R تقلیل یافته باشد. اگر R، σ-برگشت پذیر باشد، آنگاه توسیع بدیهی $T(R,R)$، $\overline{\sigma}$- برگشت پذیر است.

اثبات . فرض کنیم $A = \begin{pmatrix} a & b \\ ۰ & a \end{pmatrix}$ و $B = \begin{pmatrix} c & d \\ ۰ & c \end{pmatrix}$ دو عضو دلخواه در $T(R,R)$ باشند و $AB = ۰$. بنابراین $ac = ۰$ و $ad + bc = ۰$. چون R تقلیل یافته است، پس $ca = ۰$. در نتیجه

$$۰ = ad + bc = c(ad + bc) = (ca)d + cbc = cbc.$$

بنابراین $(bc)^۲ = ۰$، پس $bc = ۰$، و لذا $ad = ۰$.

چون R، σ-برگشت پذیر و $c\sigma(a) = ۰$، $c\sigma(b) = ۰$ و $d\sigma(a) = ۰$، بنابراین $B\overline{\sigma}(A) = ۰$. در نتیجه $T(R,R)$، $\overline{\sigma}$-برگشت پذیر است. ■

قضیه ۲۹.۲.۴. فرض کنیم حلقه R تقلیل یافته و n یک عدد صحیح مثبت باشد. اگر R،

σ–برگشت پذیر راست و σ یک تکریختی از R باشد، آنگاه $R[x]/\langle x^n\rangle$ یک حلقه $\overline{\sigma}$–برگشت پذیر راست است که $\langle x^n\rangle$، ایده آل تولید شده بوسیله x^n است.[۱۰]

اثبات . فرض کنیم $S = R[x]/\langle x^n\rangle$. اگر $n = ۱$، آنگاه $S \cong R$. و اگر $n = ۲$ باشد، آنگاه $S \cong T(R,R)$، که با توجه به گزاره ۲۸.۲.۴، $\overline{\sigma}$–برگشت پذیر است. پس فرض کنیم $n \geq ۳$.

فرض کنیم $f = \sum_{i=۰}^{n-۱} a_i\overline{x}^i$ و $g = \sum_{j=۰}^{n-۱} b_j\overline{x}^j$ عناصری از S باشند و $fg = ۰$، که $\overline{x} = x + \langle x\rangle$.

اگر $i+j \geq n$، آنگاه $a_ib_j\overline{x}^{i+j} = ۰$، و لذا حکم برقرار است. بنابراین فرض می کنیم $i+j \leq n-۱$.

در این صورت از $fg = ۰$ معادلات زیر را داریم:

$$(۱)\quad a_۰b_۰ = ۰,$$

$$(۲)\quad a_۰b_۱ + a_۱b_۰ = ۰,$$

$$(۳)\quad a_۰b_۲ + a_۱b_۱ + a_۲b_۰ = ۰,$$

$$\vdots$$

$$(۴)\quad a_۰b_{n-۲} + a_۱b_{n-۳} + \cdots + a_{n-۳}b_۱ + a_{n-۲}b_۰ = ۰,$$

$$(۵)\quad a_۰b_{n-۱} + a_۱b_{n-۲} + \cdots + a_{n-۲}b_۱ + a_{n-۱}b_۰ = ۰.$$

به استقرا روی $i+j$ و با استفاده از این فرض که حلقه R تقلیل یافته است، عمل می کنیم.

اگر معادله $(۱),(۲)$ را از راست در $b_۰$ ضرب کنیم، آنگاه

$$۰ = a_۰b_۰b_۰ = a_۰b_۰^۲ \quad , \quad ۰ = a_۰b_۱b_۰ + a_۱b_۰b_۰ = a_۱b_۰b_۰ = a_۱b_۰a_۱b_۰.$$

بنابراین $a_۰b_۱ = ۰ \ , \ a_۱b_۰ = ۰ \ (۶)$.

اگر معادلات $(۱),(۳),(۶)$ را از راست در $b_۰$ و معادله (۳) را در $b_۱$ ضرب کنیم، متناظراً $a_۰b_۲ = a_۱b_۱ = a_۲b_۰ = ۰$. فرض کنیم برای هر $i+j = ۰,۱,\ldots,n-۲$، $a_ib_j = ۰$.

حال معادله (۵) را از راست در b_0 ضرب می کنیم، چون برای هر $i = 0, 1, \ldots, n-2$، $a_i b_0 = 0$، بنابراین

$$a_0 b_{n-1} b_0 + a_1 b_{n-2} b_0 + \cdots + a_{n-2} b_1 b_0 + a_{n-1} b_0 b_0 = a_{n-1} b_0 b_0$$

پس $a_{n-1} b_0 = 0$، و معادله (۵) به صورت زیر تبدیل می شود:

$$(7) \quad a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \cdots + a_{n-2} b_1 = 0.$$

اگر معادله (۷) را از راست در b_1 ضرب کنیم، آنگاه متناظراً $a_{n-2} b_1 b_1 = 0$، و در نتیجه $a_{n-2} b_1 = 0$. بنابراین معادله (۷) به معادله زیر تبدیل می شود:

$$a_0 b_{n-1} + a_1 b_{n-2} + \cdots + a_{n-3} b_2 = 0.$$

سرانجام با تکرار این روش، داریم:

$$0 = a_0 b_{n-1} = a_1 b_{n-2} = \cdots = a_{n-2} b_1 = a_{n-1} b_0.$$

در نتیجه، به ازای هر i, j اگر $i + j \leq n - 1$، آنگاه $a_i b_j = 0$، و چون R، σ−برگشت پذیر راست و تقلیل یافته است، بنابراین برای هر عدد صحیح و مثبت t، $b_j \sigma^t(a_i) = 0$. پس $g\overline{\sigma}(f) = 0$، و در نتیجه S، $\overline{\sigma}$−برگشت پذیر راست است. ■

همچنین با توجه به قسمت (۲), (۳) نتیجه ۱۵.۲.۴، می توان نتیجه گرفت که S مک کوی $\overline{\sigma}$−اریب است.

مراجع

[1] D.D. Anderson and V Camillo. Armendariz rings and gaussian rings. *Comm. Algebra*, 26(7):2265–2272, 1998. 41

[2] Başer, Muhittin, Kwak, Tai Keun, and Yang Lee. The mccoy condition on skew polynomial rings. *Communications in Algebra,*, 37(11):4026–4037, 2009. 58

[3] M. Başer, C. Y. Hong, and T. K. Kwak. On extended reversible rings. *Colloq.*, 16(1):37–48, 2009. 60

[4] M. George and Bergman. The diamond lemma for ring theory. *Adv. in Math.*, 29(2):178–218, 1987. 17

[5] K.R. Goodearl and R.B. Warfield, Jr. *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings*. London Mathematical Society Student Texts 61. hardback, cambridge, 2004. 24

[6] C. Y. Hong, N. K. Kim, and T. K. Kwak. Ore extensions of baer and p.p.-rings. *J. Pure and Appl. Algebra.*, 151(3):215–226, 2000. 50

[7] C. Y. Hong, N. K. Kim, and T. K. Kwak. On skew armendariz rings. *Comm. Algebra*, 31(1):103–122, 2003. 52

[8] C. Y. Hong, T. K. Kwak, and S.T. Rizvi. Extensions of generalized armendariz rings. *Algebra Colloq.*, 13(2):253–266, 2006. 47

[9] C. Huh, Y. Lee, and A. Smoktunowicz. Armendariz rings and semicommutative rings. *Comm. Algebra*, 30(2):751–761, 2002. 38

[10] Nam Kyun Kim and Yang Lee. Extensions of reversible rings. *J. Pure Appl. Algebra,*, 185, 2003. 71

[11] N.k. Kim and Y. Lee. Armendariz rings and reduced rings. *J. Algebra*, 223(2):477–488, 2000. 4

[12] Z. Lei, J. Chen, and Z. Ying. A question on mccoy rings. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 76:137–141, 2007. 8

[13] P.P. Neilsen. Semicommutativity and the mccoy condition. *J. Algebra*, 298(1):134–141, 2006. 14

[14] Muhammet Tamer Koşan. Extensions of rings having mccoy condition. *Canad. Math. Bull. Vol.*, pages 1–6, 2009. 9

فهرست الفبایی

σ–ایده آل، ۶۲
$E(A)$، ۳۱
$R[x, x^{-۱}; \sigma]$، ۱
$R[x; \sigma]$، ۱
$X^{-۱}R$، ۳۷
$\mathbb{Q}$، ۴۹
$\mathbb{Z}$، ۴۹
$\leq_e$، ۲۴
$l.ann_R(X)$، ۲
$r.ann_R(X)$، ۲
$t_X(A)$، ۲۵

انژکتیو، ۲۶

ایده آل اول، ۲
ایده آل همگن، ۲۱
توسیع اساسی، ۲۴
تکریختی اساسی، ۲۵
حلقه σ–آرمنداریز، ۴۷
حلقه σ–برگشت پذیر، ۵۴
حلقه σ–صلب، ۴۸
حلقه آرمنداریز، ۳
حلقه مک کوی، ۸
حلقه مک کوی σ–اریب، ۵۱
حلقه چندجمله ای اریب، ۱
حلقه چندجمله ای اریب لوران، ۱
حلقه کسرها، ۳۲
حلقه کسرهای کلاسیک، ۳۷
دامنه، ۲
رادیکال اول، ۶۲
شرط اور، ۲۴
عنصر منظم، ۲
لم لوزی، ۱۸
مجموعه اور، ۲۴
مدول X–بدون تاب، ۲۵
مدول X–تابی، ۲۵
پوش انژکتیو، ۳۱

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ایده آل اول	prime ideal
ایده آل نیم اول کامل	completely semiprime ideal
انژکتیو	injective
برگشت پذیر	reversible
پوچ ساز	annihilator
پوش انژکتیو	injective hull
تکریختی	monomorphism
تکریختی اساسی	essential monomorphism
توسیع اساسی	essential extension
چندجمله ای	polynomial
چندجمله ای اریب	Skew polynomial
چندجمله ای لوران	Luran polynomial
حلقه آرمنداریز	Armendariz ring
حلقه برگشت پذیر	reversible ring
حلقه تقلیل یافته	reduced ring
حلقه جابجایی	commutative ring
حلقه خارج قسمتی	factor ring
حلقه کسرها	rings of fractions
حلقه کسرهای کلاسیک	a classic quotient ring
حلقه متقارن	symmetric ring
حلقه مک کوی	McCoy ring
حلقه نیم جابجایی	semicommutative ring
خودریختی	outomorphism
دامنه	domain
درونریختی	endomorphism
رادیکال اول	prime radical
شرط اور	Ore condision
مجموعه اور	Ore set
ماتریس بالا مثلثی	upper triangular matrix
همریختی	homomorphism
$\sigma-$آرمنداریز	$\sigma-$Armendariz
$\sigma-$برگشت پذیر	$\sigma-$reversible

σ−rigid .... صلب−σ
σ−Skew Armendariz ring .... حلقه آرمنداریز σ−اریب
σ−Skew McCoy ring .... حلقه مک کوی σ−اریب
X-torsion .... تابی−X
X-torsionfree .... بدون تاب−X
R-moule .... مدول−R

Abstract

McCoy proved that if R is a commutative ring then,

Keywords: *McCoy ring, Armendariz ring, reduced ring, semicommutative ring, (skew) Polynomial ring, $\sigma-$reversible ring, $\sigma-$ skew McCoy ring.*

Shahrood University of Technology

Department of Mathematics

MS Thesis

The McCoy Condition on Skew Polynomial Rings

By:

Zahra Khorasani

Supervisor:
Ebrahim Hashemi

Date