





دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری ریاضی کاربردی - آنالیز عددی

روش‌های بدون شبکه برای حل عددی رده‌ای از معادلات انتگرو-دیفرانسیل دوبعدی

نگارنده: مرتضی عسگری

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

استاد مشاور

دکتر علیرضا ناظمی

اسفند ۱۳۹۹

تقدیم به:

همسر عزیزم و فرزند دلبندم آرمان

سپاس‌گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدم را به زیور عقل آراست. در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر علی مس‌فروش و استاد مشاور، جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی صمیمانه تشکر و قدردانی نمایم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید. از جناب آقای دکتر داود میرزایی بابت راهنمایی‌های ارزنده در مورد موضوع مورد تحقیق تشکر می‌نمایم.

از همسر عزیزم و فرزندم آرمان به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که بهترین پشتیبان من بوده سپاسگزارم و صمیمانه دوستشان دارم. از مادر مهربان و دلسوزم و پدر خانم و مادر خانم که دعای خیر آنها، همیشه بدرقه راه من بوده، تشکر و قدردانی می‌کنم.

مرتضی عسگری

اسفند ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب مرتضی عسگری دانشجوی دکتری روزانه رشته ریاضی کاربردی و علوم کامپیوتر علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده رساله با عنوان روش‌های بدون شبکه برای حل عددی رده‌ای از معادلات انتگرو-دیفرانسیل دوبعدی، تحت راهنمایی علی مس فروش متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این رساله، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مرتضی عسگری

اسفند ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

ریاضیات، به عنوان زبان علوم، همواره نقش مهمی در فناوری ایفا می کند و در حال حاضر در مسایل اقتصادی، بهینه سازی، پزشکی، هوش مصنوعی، گرافیک کامپیوتری، پردازش تصاویر، پردازش سیگنال، شبکه های عصبی، فیزیک نظری، مکانیک و مهندسی بکار می رود. بسیاری از مسایل، با استفاده از معادلات دیفرانسیل معمولی یا معادلات دیفرانسیل جزئی مدل بندی می شوند. اغلب آنها را می توانیم به معادلات انتگرال و یا انتگرو-دیفرانسیل با شرایط اولیه یا شرایط مرزی تبدیل نماییم. برای حل این معادلات به روش های عددی نیاز داریم. یکی از روش های تقریب چند متغیره روی نواحی کلی، تقریب به روش المان های متناهی است که به کمک شبکه بندی ناحیه انجام می گیرد. این روش، پایه بسیاری از روش های عددی، به خصوص در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی است. روش متفاوت دیگری وجود دارد که به روش های بدون شبکه موسومند. در این روش ها از شبکه بندی ناحیه به عنوان المان های متناهی استفاده نمی شود و بجای آن تقریب بر اساس مجموعه ای از نقاط که با کیفیت مناسب درون ناحیه پراکنده شده اند نوشته می شود. یکی از برتری های روش های بدون شبکه نسبت به روش المان های متناهی، تعمیم ساده تر و کم هزینه تر آنها به ابعاد بالاتر است. در این رساله، دو روش بدون شبکه کمترین مربعات متحرک و کمترین مربعات متحرک درونیاب برای حل عددی رده ای از معادلات انتگرال و معادلات انتگرو-دیفرانسیل غیرخطی را مورد مطالعه قرار می دهیم.

کلمات کلیدی: معادلات انتگرال، معادلات انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم، فضای هار، روش کمترین مربعات متحرک و روش کمترین مربعات متحرک درونیاب

لیست مقالات مستخرج از رساله

1. The numerical approximation for the solution of linear and non linear integral equations of the second kind by interpolating moving least squares
2. The numerical method for solving Volterra-Fredholm integro-differential equations of the second kind based on the meshless method

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
ش	پیشگفتار
۱	۱ تعاریف و مفاهیم اولیه
۱	۱.۱ معادلات انتگرال و انتگرو-دیفرانسیل
۲	۱.۱.۱ معادله انتگرال فردهلم
۴	۲.۱.۱ معادله انتگرال ولترا
۵	۳.۱.۱ معادله انتگرال ولترا-فردهلم
۶	۴.۱.۱ معادله انتگرال منفرد
۶	۵.۱.۱ معادله انتگرو-دیفرانسیل
۷	۲.۱ فضاها و نرم‌های توابع
۹	۱.۲.۱ تقریب در فضاهاى پیش-هیلبرت (تقریب در نرم دو)
۱۰	۲.۲.۱ معادلات نرمال
۱۱	۳.۲.۱ دستگاه متعامد یکه
۱۳	۳.۱ فضای هار و قضیه مایرهوربر-کورتیس
۱۴	۴.۱ چندجمله‌ای‌های چند متغیره
۱۵	۵.۱ نمادهای اُوی بزرگ و اُوی کوچک
۱۷	۲ تقریب با روش‌های بدون شبکه
۱۷	۱.۲ مقدمه
۱۹	۲.۲ روش تقریب کمترین مربعات متحرک
۲۲	۱.۲.۲ انتخاب تابع وزن
۲۶	۳.۲ روش تقریب کمترین مربعات متحرک درونیاب

۳۵	۳	حل عددی معادلات انتگرال ولترا-فردهلم به روش IMLS
۳۵	۱.۳	مقدمه
۳۶	۲.۳	شرح روش پیشنهادی
۳۷	۳.۳	آنالیز خطا
۴۱	۴.۳	نتایج عددی
۴۹	۴	کاربرد روش‌های بدون شبکه در حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل
۴۹	۱.۴	مقدمه
۵۰	۲.۴	حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم به روش MLS
۵۲	۳.۴	آنالیز خطا
۵۷	۴.۴	نتایج عددی
۶۷		مراجع

فهرست تصاویر

۱۰	نمایی از بهترین تقریب در نرم دو	۱.۱
۱۸	تقریب Ω با چندضلعی R و مثلثی سازی R	۱.۲
۱۸	تصویری کلی از نقاط پراکنده‌ی مورد استفاده در تقریب‌های بدون شبکه	۲.۲
۴۲	تقریب عددی از درجه ۲ با ۶۵ نقطه مثال ۱.۴.۳	۱.۳
۴۴	تقریب عددی از درجه ۲ با ۲۰۱ نقطه و قدرمطلق خطا برای مثال ۲.۴.۳	۲.۳
۴۷	تقریب عددی از درجه ۲ با ۴۰۱ نقطه و قدرمطلق خطا برای مثال ۵.۴.۳	۳.۳
۶۰	قدرمطلق خطا برای تقریب از درجه ۳ با ۵۱ نقطه مثال ۱.۴.۴	۱.۴
۶۱	تقریب عددی از درجه ۲ با ۱۱ نقطه و قدرمطلق خطا برای مثال ۲.۴.۴	۲.۴
۶۲	تقریب عددی از درجه ۳ با ۵۱ نقطه و قدرمطلق خطا برای مثال ۳.۴.۴	۳.۴
۶۳	تقریب عددی از درجه ۴ با ۱۷ نقطه و قدرمطلق خطا برای مثال ۴.۴.۴	۴.۴
۶۴	قدرمطلق خطا برای تقریب از درجه ۲ با ۲۱×۲۱ نقطه مثال ۵.۴.۴	۵.۴
۶۵	قدرمطلق خطا برای تقریب از درجه ۳ با ۳۳×۳۳ نقطه مثال ۶.۴.۴	۶.۴

فهرست جداول

۴۲	نتایج عددی برای m و N های متفاوت مثال ۱.۴.۳	۱.۳
۴۳	نتایج مقایسه تقریب عددی دو روش بدون شبکه ۱.۴.۳	۲.۳
۴۴	نتایج عددی برای m و N های متفاوت مثال ۲.۴.۳	۳.۳
۴۵	نتایج عددی برای m و N های متفاوت مثال ۳.۴.۳	۴.۳
۴۵	نتایج عددی برای m و N های متفاوت مثال ۴.۴.۳	۵.۳
۴۶	نتایج عددی برای m و N های متفاوت مثال ۵.۴.۳	۶.۳
۵۹	نتایج عددی برای مثال ۱.۴.۴	۱.۴
۶۰	نتایج عددی برای مثال ۲.۴.۴	۲.۴
۶۱	نتایج عددی برای مثال ۳.۴.۴	۳.۴
۶۴	نتایج عددی برای مثال ۵.۴.۴	۴.۴
۶۵	نتایج عددی برای مثال ۶.۴.۴	۵.۴

پیشگفتار

معادلات انتگرال شاخه‌ای از ریاضیات است که کاربردهای زیادی در فیزیک و علوم مهندسی دارد. مدل‌سازی ریاضی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی و مهندسی به یک معادله انتگرال یا یک معادله انتگرو-دیفرانسیل منجر می‌شود [۴، ۵]. مدار الکتریکی شامل یک منبع ولتاژ خازن، مقاومت الکتریکی و خودالقا ساده‌ترین مثالی است که معادله حاکم بر آن با استفاده از KVL^۱ به صورت معادله انتگرو-دیفرانسیل مدل‌سازی می‌شود.

ریاضیدان مشهور ایتالیایی بنام ولتر^۲ در حدود سالهای ۱۹۰۳-۱۹۰۰ میلادی روی معادلات انتگرال کار کرد. در همان زمان ریاضیدان مشهور سوئدی بنام فردهلم^۳ کارهای مشهور و جالب خود را روی یک روش جدید برای حل مساله دیریکله^۴ ارائه کرد که منجر به معادله انتگرال گردید. از آن زمان به بعد تا عصر حاضر، با توجه به تنوع مسایل موجود و پیچیده تر شدن سیستم‌ها و توانایی معادلات انتگرال برای بیان آنها، معادلات انتگرال موضوع تحقیقات ریاضیدانان زیادی بوده است زیرا آنها بطور پیوسته با مسایل جدید و جالبی برخورد می‌کنند. چون پیدا کردن جواب تحلیلی این معادلات خیلی مشکل و در اکثر موارد نشدنی است لذا برای حل، از روش‌های عددی برای تقریب جواب آنها استفاده می‌شود. بنابراین مفهوم تقریب، نقش بسیار مهمی در ریاضیات کاربردی بازی می‌کند. این طبیعی است که دنبال بهترین تقریب برای جواب این نوع معادلات باشیم.

از جمله روش‌هایی که برای تقریب می‌توان استفاده کرد روش‌های بدون شبکه می‌باشند. تقریب کمترین مربعات متحرک به عنوان یکی از روش‌های بدون شبکه برای اولین بار در دهه هشتاد میلادی برای تقریب رویه‌های چندبعدی مطرح شد و بتدریج به روش شناخته شده‌ای تبدیل شده است. این تقریب در دو دهه اخیر توجه محققین در رشته‌های ریاضی و مهندسی را به خود جلب کرده و اساس بسیاری از روش‌های عددی به خصوص در حل معادلات دیفرانسیل جزئی، معادلات انتگرال و انتگرو-دیفرانسیل است. روش بدون شبکه توابع پایه شعاعی موضعی برای حل معادله انتگرال فردهلم در [۶] و کاربردی از روش بدون شبکه کمترین متحرک تعمیم یافته در [۷، ۸] ارائه شده است. در روش‌های بدون شبکه از شبکه‌بندی ناحیه به عنوان المان‌های

^۱Kirchoff's Voltage Law

^۲Volterra

^۳Fredholm

^۴P. G. L. Dirichlet

متناهی استفاده نمی‌شود و به‌جای آن تقریب بر اساس مجموعه‌ای از نقاط که با کیفیت مناسب درون ناحیه پراکنده شده‌اند نوشته می‌شود. در این رساله، روش بدون شبکه کمترین مربعات متحرک و کمترین مربعات متحرک درونیاب، برای حل عددی رده‌ای از معادلات انتگرال و معادلات انتگرو-دیفرانسیل غیرخطی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

این رساله شامل چهار فصل است. در فصل اول تعاریف و مفاهیم مقدماتی از معادلات انتگرال، معادلات انتگرو-دیفرانسیل، قضیه‌های یکتایی جواب معادله انتگرال، فضاها و نرم‌های توابع آورده شده‌است. در فصل دوم چگونگی تقریب با روش‌های بدون شبکه و به‌طور خاص، روش‌های MLS و IMLS را بیان کرده‌ایم. در فصل سوم حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از روش بدون شبکه کمترین مربعات متحرک درونیاب و آنالیز خطای روش پیشنهادی را ارائه می‌دهیم. همچنین در فصل چهارم معادلات انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم را به‌صورت عددی با روش بدون شبکه کمترین مربعات متحرک حل کرده و آنالیز خطا و کارایی روش نشان داده‌ایم.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال و معادلات انتگرو-دیفرانسیل غیرخطی در بسیاری از مدل‌های ریاضی مسایل شاخه‌های مختلف علوم مانند دینامیک سیالات، فیزیک حالت جامد، فیزیک حالت پلاسما، زیست‌شناسی و فیزیک نظری ظاهر می‌شوند. معادلات انتگرال و معادلات انتگرو-دیفرانسیل در سال‌های اخیر، حجم وسیعی از مطالعات را به خود اختصاص داده است. چون امکان پیدا کردن جواب تحلیلی برای بیشتر معادلات انتگرال و معادلات انتگرو-دیفرانسیل غیرخطی خیلی مشکل و در اکثر موارد نشدنی است لذا برای حل آنها، روش‌های عددی مختلفی مورد بحث قرار می‌گیرد. در این بخش تعاریف اولیه و برخی از قضایای وجود و یکتایی جواب معادلات انتگرال و معادلات انتگرو-دیفرانسیل [۲، ۳، ۴، ۵، ۳۳] و برخی از فضاها مورد نیاز را به اختصار توضیح می‌دهیم.

۱.۱ معادلات انتگرال و انتگرو-دیفرانسیل

تعریف ۱.۱.۱. هر معادله به شکل

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x, t, u(t)) dt$$

را یک معادله انتگرال یک‌بعدی غیرخطی گویند که در آن λ عدد معلوم و $\alpha(x)$ ، $\beta(x)$ و $f(x)$ توابع معلوم هستند و $u(x)$ تابع مجهول است. منظور از حل این معادله پیدا کردن تابع مجهول $u(x)$ است که در آن صدق کند.

تعریف ۲.۱.۱. هر معادله به شکل

$$u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_{\alpha_1(x)}^{\beta_1(x)} \int_{\alpha_2(y)}^{\beta_2(y)} K(x, y, s, t, u(s, t)) ds dt$$

را یک معادله انتگرال دوبعدی غیرخطی گویند که در آن λ عدد معلوم و $\alpha_i(x), \beta_i(x), i = 1, 2$ و $f(x, y)$ توابع معلوم هستند و $u(x, y)$ تابع مجهول است. منظور از حل این معادله پیدا کردن تابع مجهول $u(x, y)$ است که در آن صدق کند.

تعریف ۳.۱.۱. معادله‌ای را خطی گویند که معادله نسبت به متغیر وابسته (متغیر مجهول) u و مشتقات آن خطی باشد. در غیر این صورت آن را غیرخطی گویند.

معادلات انتگرال و انتگرو-دیفراسیل یک‌بعدی و دوبعدی تعریف شده با توجه به حدود انتگرال $\alpha_i(x), \beta_i(x), i = 1, 2$ و ویژگیهای توابع F, K, f و همچنین نوع متغیرهای موجود (قطعی و تصادفی) در معادلات به رده‌های مختلف دسته‌بندی می‌شوند.

۱.۱.۱ معادله انتگرال فردهلم

اگر در معادله انتگرال حدود انتگرال ثابت باشد، آن را معادله انتگرال فردهلم^۱ می‌نامند. به‌طور کلی معادله انتگرال فردهلم خطی یک‌بعدی به شکل

$$h(x)y(x) - \lambda \int_a^b k(x, t)y(t) dt = f(x), \quad x \in [a, b],$$

است که در آن λ, a و b اعداد معلوم، $k(x, t)$ هسته معادله انتگرال و $f(x)$ تابع معلوم هستند. اگر $h(x) = 1$ باشد، معادله فوق را نوع دوم گویند و در صورتی که $h(x) = 0$ ، نوع اول می‌نامند. معمولاً تابع جواب در معادلات نوع اول به تغییرات $f(x)$ خیلی حساس است به بیان دیگر، تغییرات جزئی در آن باعث تغییرات زیاد در تابع جواب می‌شود و این مسایل بد حالت هستند که روش‌های خاصی را برای حل می‌طلبند [۴، ۵]. هرگاه $f(x) = 0$ باشد معادله را همگن، در غیر این صورت آن را غیرهمگن می‌گویند. معادله همگن را مسأله مقدار ویژه و $y(x)$ را تابع ویژه عملگر انتگرال نیز می‌گویند [۴]. لازم به ذکر است که مسایل مقدار مرزی را می‌توان به معادله انتگرال فردهلم با جواب یکسان تبدیل نمود.

قضیه ۱.۱.۱ (قضیه متناوب فردهلم). معادله انتگرال فردهلم خطی غیرهمگن جواب یکتا دارد اگر و تنها اگر معادله انتگرال فردهلم همگن نظیر آن فقط جواب بدیهی داشته باشد.

□

برهان. برای مشاهده اثبات به [۵] رجوع کنید.

¹Fredholm

قضیه ۲.۱.۱. هرگاه $k(x, t)$ در معادله انتگرال فردهلم خطی نوع دوم در ناحیه مربعی

$$D = \{(x, t) \mid a \leq x, t \leq b\},$$

و $f(x)$ در $[a, b]$ پیوسته باشند و $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ باشد که در آن M کران بالای تابع $k(x, t)$ در D است، آنگاه معادله انتگرال فردهلم خطی جواب یکتا دارد.

□

برهان. برای مشاهده اثبات به [۴]، [۵] رجوع کنید.

هر معادله به شکل

$$y(x) - \lambda \int_a^b F(x, t, y(t)) dt = f(x). \quad (1.1)$$

را معادله انتگرال فردهلم غیرخطی یک بعدی گویند. با تعریف عملگر T به فرم

$$T(y) = f(x) + \lambda \int_a^b F(x, t, y(t)) dt,$$

می توان معادله (۱.۱) را به شکل $y(x) = T(y)$ نوشت که آن را شکل عملگری معادله انتگرال فردهلم غیرخطی می گویند.

تعریف ۴.۱.۱. تابع $F(x, t, y(t))$ نسبت به متغیر $y(t)$ در شرط لیپ شیتز صدق می کند هرگاه عدد مثبت L (ثابت لیپ شیتز) موجود باشد به طوریکه برای هر $(x, t, a(t)), (x, t, b(t)) \in D_F$ داشته باشیم

$$|F(x, t, a(t)) - F(x, t, b(t))| \leq L|a(t) - b(t)|,$$

که در آن

$$D_F = \{(x, t, y(t)) : x, t \in [a, b], y(t) \in [c, d]\}.$$

تعریف ۵.۱.۱ (نقطه ثابت یک عملگر). اگر $T : M \rightarrow M$ یک عملگر باشد، نقطه $x_0 \in M$ را نقطه ثابت عملگر T می گوئیم اگر $T(x_0) = x_0$

تعریف ۶.۱.۱ (عملگر انقباضی). عملگر $T : M \rightarrow M$ را عملگر انقباضی می گوئیم اگر عدد حقیقی و نامنفی مانند α که $0 \leq \alpha < 1$ موجود باشد به طوریکه برای هر $x_1, x_2 \in M$ داشته باشیم،

$$|T(x_1) - T(x_2)| \leq \alpha|x_1 - x_2|,$$

قضیه ۳.۱.۱ (قضیه نقطه ثابت باناخ^۱). اگر $T : M \rightarrow M$ عملگر انقباضی باشد آنگاه T دارای نقطه ثابت یکتا است.

□

برهان. برای مشاهده اثبات به [۵] رجوع کنید.

¹Banach

قضیه ۴.۱.۱. اگر عملگر T ، نظیر معادله انتگرال فردهلم غیرخطی (۱.۱)، در شرط لیپ شیتز صدق کند و $|\lambda| < \frac{1}{L(b-a)}$ که در آن عدد L ثابت لیپ شیتز T است آنگاه معادله $y(x) = Ty(x)$ جواب یکتا دارد.

برهان. برای مشاهده اثبات به [۵] رجوع کنید. $\square$

۲.۱.۱ معادله انتگرال ولترا

اگر یکی از حدود انتگرال در معادله انتگرال متغیر باشد آن را معادله انتگرال ولترا^۱ می نامند. به طور کلی معادله انتگرال ولترا خطی یک بعدی، به شکل،

$$h(x)y(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)y(t) dt = f(x), \quad x \in [a, b],$$

است که در آن λ ، a و b اعداد معلوم، $k(x,t)$ به نام هسته معادله انتگرال و $f(x)$ تابع معلوم هستند. در معادله بالا هرگاه $h(x) = 1$ ، آن را نوع دوم و هرگاه $h(x) = 0$ ، آن را نوع اول می گویند. هرگاه $f(x) = 0$ ، آن را همگن در غیر این صورت آنرا ناهمگن می گویند. مساله مقدار اولیه به یک معادله انتگرال ولترا با همان جواب قابل تبدیل است [۵]. با فرض اینکه $k(x,x) \neq 0$ و $k(x,t)$ نسبت به x مشتق پذیر باشد، معادله انتگرال ولترای خطی نوع اول

$$f(x) = \lambda \int_0^x k(x,t)y(t) dt, \quad x \in [0, b],$$

را می توان به معادله انتگرال ولترای خطی نوع دوم

$$y(x) - \int_0^x H(x,t)y(t) dt = g(x), \quad x \in [0, b],$$

تبدیل نمود که در آن $g(x) = \frac{1}{\lambda k(x,x)} \frac{df}{dx}$ ، $H(x,t) = \frac{-1}{k(x,x)} \frac{\partial k(x,t)}{\partial x}$ می باشد [۹]. هر معادله انتگرال ولترا را می توان یک معادله فردهلم در نظر گرفت که هسته آن به صورت

$$k(x,t) = \begin{cases} k(x,t), & t \leq x, \\ 0, & t > x. \end{cases}$$

است که در آن $k(x,t)$ موجود در ضابطه اول همان هسته معادله انتگرال ولترا است [۹].

قضیه ۵.۱.۱. اگر در معادله انتگرال ولترا

$$y(x) - \lambda \int_a^x k(x,t)y(t) dt = f(x), \quad x \in [a, b],$$

تابع $f(x)$ در $[a, b]$ و $k(x,t)$ در ناحیه مربعی $D = \{(x,t) | a \leq x \leq b, a \leq t \leq b\}$ پیوسته باشند، آنگاه معادله بالا، جواب یکتا دارد که در $[a, b]$ پیوسته است [۵].

¹Volterra

لازم به ذکر است که معادله انتگرال ولترا را می‌توان به صورت $(I - T)y(x) = 0$ نیز نمایش داد که در آن،

$$Ty(x) = f(x) + \lambda \int_a^x k(x, t)y(t) dt.$$

معادله انتگرال ولترا ی غیرخطی یک بعدی به صورت

$$y(x) - \lambda \int_a^x F(x, t, y(t)) dt = f(x), \quad x \in [a, b],$$

است که وجود و یکتایی جواب آن، زمانی که $f(x)$ در $[a, b]$ پیوسته و $F(x, t, y(t))$ نسبت به هر سه متغیر $y(t), t, x$ در ناحیه

$$D = \{(x, t, y(t)) : a \leq x \leq b, a \leq t \leq b, c \leq y(t) \leq d\}.$$

پیوسته باشد و $F(x, t, y(t))$ نسبت به $y(t)$ در شرط لپ شیتز صدق کند. در مرجع [۵] اثبات شده است که حل تحلیلی معادلات انتگرال غیرخطی در حالت کلی بسیار مشکل است.

۳.۱.۱ معادله انتگرال ولترا-فردهلم

اگر در معادله انتگرال، هم انتگرال ولترا و هم انتگرال فردهلم ظاهر شود، معادله حاصل، معادله انتگرال ولترا-فردهلم نامیده می‌شود. بسته به چگونگی قرار گرفتن انتگرال ولترا و انتگرال فردهلم در معادله انتگرال، دو نوع مختلف از معادله انتگرال ولترا-فردهلم معرفی می‌شوند.

۱. اگر در معادله انتگرال، انتگرال ولترا و انتگرال فردهلم به صورت جدا از هم ظاهر شده باشند معادله انتگرال، ولترا-فردهلم جدا از هم نامیده می‌شود.

$$u(x) = f(x) + \lambda_1 \int_a^x k_1(x, t)u(t) dt + \lambda_2 \int_a^b k_2(x, t)u(t) dt.$$

۲. اگر در معادله انتگرال، انتگرال ولترا و انتگرال فردهلم به صورت انتگرال دوگانه ظاهر شده باشند معادله انتگرال، ولترا-فردهلم مرکب نامیده می‌شود.

$$u(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_c^y \int_a^b k(x, y, s, t)u(s, t) ds dt,$$

که در آن

$$-\infty < a \leq x \leq b < +\infty, \quad -\infty < c \leq y \leq d < +\infty,$$

بوده و توابع $f(x, y)$ و $k(x, y, s, t)$ توابعی معلوم هستند که به ترتیب روی نواحی،

$$S = \{(x, y, s, t) : a \leq x, s \leq b, c \leq y, t \leq d\}, \quad D = [a, b] \times [c, d].$$

تعریف شده و $u(x, y)$ تابع مجهول می‌باشد.

مثال ۱.۱.۱. معادلات

$$u(x) = -2 - 2x + 2e^x + \int_0^x (x-t)u(t)dt + \int_0^1 xu(t)dt,$$

و

$$u(x, y) + \int_{-1}^y \int_{-1}^1 -xys^2t^2yu(s, t)dsdt = x^2 + \frac{13}{15}xy - \frac{2}{15}xy^4.$$

مثال‌هایی از معادلات انتگرال ولترا-فردهلم می‌باشند.

۴.۱.۱ معادله انتگرال منفرد

اگر در معادله انتگرال یک یا هر دو کران انتگرال بی‌نهایت باشند، یا هسته انتگرال در یک یا چند نقطه در بازه انتگرال‌گیری بی‌کران شود آن معادله انتگرال، منفرد^۱ نامیده می‌شود. برای مثال معادله انتگرال آبل^۲ که به صورت زیر تعریف می‌شود یک معادله انتگرال منفرد است.

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(x-t)}}u(t)dt.$$

۵.۱.۱ معادله انتگرو-دیفرانسیل

معادلات انتگرو-دیفرانسیل در اوایل سال ۱۹۰۰ توسط ولترا معرفی شدند. ولترا در مطالعه پدیده تأثیر وراثت رشد جمعیت با این نوع معادلات برخورد کرد. این نوع معادلات در مواردی مانند انتقال گرما، پدیده انتشار و پخش نوترون کاربرد دارند [۹].

تعریف ۷.۱.۱. معادله‌ای که هم شامل انتگرال تابع مجهول و هم شامل مشتق تابع مجهول باشد را معادله انتگرو-دیفرانسیل می‌نامند. فرم کلی معادلات انتگرو-دیفرانسیل یک‌بعدی و دوبعدی به ترتیب زیر می‌باشند،

$$F(x, u, u', \dots, u^{(n)}) = f(x) + \lambda \int_{\alpha_1(x)}^{\beta_1(x)} K(x, t, u(t), u'(t), \dots, u^{(n)}(t)) dt,$$

و

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, \dots) = f(x, y) + \lambda \int_{\alpha_1(x)}^{\beta_1(x)} \int_{\alpha_2(y)}^{\beta_2(y)} K(x, y, s, t, u, u_t, u_s, u_{tt}, u_{ts}, \dots) ds dt.$$

این نوع معادلات شامل بخش انتگرالی و بخش دیفرانسیلی هستند. معادلات انتگرو-دیفرانسیل با توجه به این که تابع مجهول بر حسب یک یا چند متغیر مستقل به همراه مشتقات تابع نسبت به آن متغیرها شرکت داشته باشد به معادلات انتگرو-دیفرانسیل یک‌بعدی یا چندبعدی تقسیم می‌شوند. معادلات انتگرو-دیفرانسیل مانند معادلات انتگرال، به انواع فردهلم، ولترا، ولترا-فردهلم و خطی یا غیرخطی تقسیم می‌شوند.

¹Singular

²Abel

مثال ۲.۱.۱. معادله

$$\begin{cases} u'(x) = xe^{-x^2} - x + \frac{1}{x} + \int_0^x 2txe^{-u^2(t)} dt - \int_0^1 (1+t)u(t) dt, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

یک معادله انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم غیرخطی جدا از هم،

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \int_0^y \int_0^1 ysu(s,t) ds dt = 2x - \frac{1}{x}y^2 + \frac{1}{x}y^4, \\ u(0,y) = -y^2, \end{cases}$$

یک معادله انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم مرکب،

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - u(x,t) - \int_{-1}^1 \int_0^1 (xy + tz)u(y,z) dy dz \\ &= 2e^x - \frac{7}{3}x - \frac{5}{3}t, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

یک معادله انتگرو-دیفرانسیل دوبعدی فردهلم و

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \int_0^t \int_0^x (e^y + z)u(y,z) dy dz \\ &= e^x - \frac{1}{x}te^{2x} - xte^x + te^x - \frac{1}{x^2}x^2t^2 + \frac{1}{3}xt^3 - \frac{1}{x}, \quad x, t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

یک معادله انتگرو-دیفرانسیل دوبعدی ولترا است.

۲.۱ فضاها و نرم‌های توابع

یکی از پیش‌نیازها در آنالیز عددی، آشنایی با فضاها و نرم‌های مربوط به هر فضا است. جواب دقیق یک مسأله، عضوی از یک فضا و تقریب آن معمولاً در فضایی دیگر و دارای ساختاری ساده‌تر است. یعنی اغلب به دنبال یافتن تقریبی با ساختاری ساده‌تر برای جواب مسأله مورد نظر هستیم. قطعاً تقریبی ارزشمندتر است که به جواب دقیق مسأله نزدیک‌تر باشد، بنابراین برای بررسی میزان نزدیکی تقریب به جواب دقیق به یک متر نیازمندیم، لذا باید فضاهای متریک باشند. فضاهای نرم‌دار حالت خاصی از فضاهای متریک‌اند.

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ی تمام توابع حقیقی پیوسته روی بازه $[a, b]$ را با نماد $C[a, b]$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی توابعی که مشتق مرتبه m آن‌ها روی بازه $[a, b]$ پیوسته است را با نماد $C^m[a, b]$ نمایش می‌دهیم و اگر $f \in C^m$ باشد اصطلاحاً می‌گوییم f از رده همواری C^m است. با این نمادگذاری $C^0[a, b] \equiv C[a, b]$.

پرکاربردترین فضای توابع، فضای $C[a, b]$ است. به آسانی می‌توان نشان داد $C[a, b]$ یک فضای خطی است، اما متناهی‌البعد نیست. یکی از شناخته‌شده‌ترین نرم‌ها روی این فضا، نرم بینهایت (یکنواخت یا چبیشف^۱) است که به‌زای هر $f \in C[a, b]$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\|f\|_{\infty} := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|,$$

دوتایی $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$ یک فضای خطی نرم‌دار است، اما چون یک فضای باناخ است از اهمیت بیشتری برخوردار است. تعریف فضای باناخ در زیر آورده شده است.

تعریف ۲.۲.۱. فضای $(V, \|\cdot\|)$ را در نظر بگیرید. می‌گوییم V کامل است، هرگاه هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد.

می‌توان ثابت نمود $(C[a, b], \|\cdot\|_{\infty})$ یک فضای باناخ است، زیرا هر دنباله کوشی از توابع پیوسته در نرم بینهایت، به تابعی پیوسته همگراست. مثال دیگری از فضاها، باناخ، فضای $C^{\ell}[a, b]$ با نرم یکنواخت،

$$\|f\|_{\infty} := \sum_{k=0}^{\ell} \max_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)|,$$

می‌باشد. در این‌جا مشتقات در نقاط a و b به ترتیب مشتقات راست و چپ در نظر گرفته می‌شوند.

تعریف ۳.۲.۱. تابع پیوسته $w : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ را تابع وزن گوییم اگر برای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم، $w(x) > 0$ و $0 < \int_a^b w(x) dx < \infty$. توجه کنید که پیوستگی فقط روی بازه باز لازم است.

تعریف ۴.۲.۱. نگاشت $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ را یک ضرب داخلی نامیم هرگاه شرایط زیر به‌زای هر $f, g, h \in V$ و هر $\alpha \in \mathbb{C}$ برقرار باشند،

$$1. \langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle, \quad (\text{خطی بودن}),$$

$$2. \langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle, \quad (\text{همگن بودن}),$$

$$3. \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}, \quad (\text{مقارن بودن}),$$

$$4. \langle f, f \rangle > 0 \quad f \neq 0 \quad \text{داشته باشیم}.$$

از خواص ۲ و ۳ نتیجه می‌شود $\langle f, \alpha g \rangle = \bar{\alpha} \langle f, g \rangle$. همچنین با توجه به خواص ضرب داخلی، می‌توان یک نرم روی V به‌صورت زیر تعریف نمود،

$$\|f\| := \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

شرط‌های اول و دوم نرم به‌وضوح برقرارند. برای بررسی نامساوی مثلث از نامساوی کوشی–شوارتز زیر استفاده می‌شود.

¹Chebyshev

لم ۱.۲.۱ (نامساوی کوشی-شوارتز). برای هر $f, g \in \mathcal{V}$ داریم،

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|. \quad (2.1)$$

برهان. برای مشاهده اثبات به [۱] رجوع کنید. $\square$

تعریف ۵.۲.۱. فضای پیش-هیلبرت^۱، فضای خطی نرم‌داری است که نرم آن با یک ضرب داخلی القا شود، و فضای پیش-هیلبرتی که یک فضای باناخ باشد، فضای هیلبرت می‌نامند.

مثال ۱.۲.۱. به عنوان مثال فضای $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_2)$ یک فضای پیش-هیلبرت است، زیرا $\|\cdot\|_2$ توسط ضرب داخلی $\langle x, y \rangle := \sum x_k \bar{y}_k$ که روی دو بردار $x, y \in \mathbb{C}^d$ تعریف می‌شود، القا می‌شود. همچنین می‌توان ثابت نمود این فضا، یک فضای کامل است. بنابراین $(\mathbb{C}^d, \|\cdot\|_2)$ یک فضای هیلبرت است.

۱.۲.۱ تقریب در فضاهای پیش-هیلبرت (تقریب در نرم دو)

مفهوم تقریب نقش بسیار مهمی در ریاضیات، به ویژه در ریاضیات کاربردی بازی می‌کند. از این روش‌های تقریب یکی از اساسی‌ترین موضوعات در آنالیز عددی هستند. همچنین بررسی تقریب در نرم دو، یکی از پرکاربردترین مسایل مورد نیاز در روش‌های عددی است. این بررسی ما را به ساختار توابع متعامد نیز رهنمون خواهد ساخت. بهترین تقریب در نرم دو را گاهی تقریب کمترین مربعات می‌نامند. در این بخش به دنبال بهترین تقریب در یک زیر فضای خطی با بعد متناهی خواهیم بود. از این به بعد $\mathcal{V}$ را یک فضای پیش-هیلبرت و $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ را یک زیر فضای خطی با بعد متناهی از آن در نظر گرفته و درصدد یافتن بهترین تقریب برای $v \in \mathcal{V}$ در $\mathcal{U}$ نسبت به $\langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}} := \|v\|_2$ خواهیم بود. خوشبختانه ساختار بهترین تقریب در نرم دو کاملاً مشخص است. طبق قضیه زیر می‌توان برای هر عضو v بهترین تقریب را به دست آورد.

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنید $\mathcal{V}$ یک فضای پیش-هیلبرت و $\mathcal{U}$ یک زیر فضای با بعد متناهی از آن باشد. u^* بهترین تقریب $v \in \mathcal{V}$ در $\mathcal{U}$ نسبت به نرم دو است اگر و فقط اگر برای هر $u \in \mathcal{U}$ داشته باشیم

$$\langle v - u^*, u \rangle = 0.$$

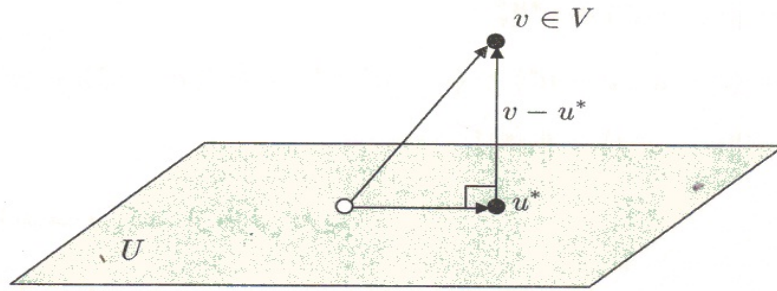
برهان. برای مشاهده اثبات به [۱] رجوع کنید. $\square$

قضیه می‌گوید u^* بهترین تقریب است اگر و فقط اگر خطای $v - u^*$ بر زیر فضای $\mathcal{U}$ عمود باشد. در شکل ۱.۱ تعبیر هندسی از این قضیه برای

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^3 : u = (u_1, u_2, 0)\},$$

با نرم اقلیدسی آورده شده است. همان گونه که مشاهده می‌کنید فاصله اقلیدسی v و u^* وقتی کمترین است که بردار $v - u^*$ بر صفحه $\mathcal{U}$ عمود باشد.

¹per-Hilbert



شکل ۱.۱: نمایی از بهترین تقریب در نرم دو

۲.۲.۱ معادلات نرمال

فرض کنید $u^* = \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ و $\mathcal{U} := \text{span}\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ و $v \in \mathcal{V}$ بهترین تقریب باشد. یافتن بهترین تقریب u^* معادل یافتن بردار بهینه $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$ است. طبق قضیه ۱.۲.۱ داریم،

$$\left\langle v - \sum_{j=0}^n \alpha_j u_j, u \right\rangle = 0, \quad \forall u \in \mathcal{U}.$$

به سادگی می توان نشان داد که رابطه بالا معادل با رابطه زیر است،

$$\left\langle v - \sum_{j=0}^n \alpha_j u_j, u_k \right\rangle = 0; \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

که منجر به ۳.۱ می شود،

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \langle u_j, u_k \rangle = \langle v, u_k \rangle; \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (3.1)$$

روابط ۳.۱ دستگاه معادلات خطی $A\alpha = b$ با درایه های $\alpha_{kj} = \langle u_j, u_k \rangle$ و $b_k = \langle v, u_k \rangle$ به ترتیب برای A و b را تشکیل می دهد که به آن دستگاه معادلات نرمال می گویند. با توجه به اینکه بهترین تقریب موجود و یکتاست، این دستگاه دارای جواب یکتای α است که به کمک یک روش عددی به سادگی محاسبه می شود. از قضیه ۱.۲.۱ می توان خطای تقریب را نیز به دست آورد.

نتیجه ۱.۲.۱. اگر u^* بهترین تقریب v باشد آنگاه

$$\|v - u^*\|^2 = \|v\|^2 - \|u^*\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{j=0}^n \alpha_j \langle v, u_j \rangle.$$

□

برهان. برای مشاهده اثبات به [۱] رجوع کنید.

مثال ۲.۲.۱. فرض کنیم $\mathcal{V} = L^2_\omega[a, b]$ یک فضای نرم‌دار با نرم $\|f\|_2 = \left(\int_a^b \omega(x) |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ باشد. اگر $[a, b] = [0, 1]$ ، $\omega(x) = 1$ و $\mathcal{U} = \mathbb{P}_n = \text{span}\{1, x, \dots, x^n\}$ ، آنگاه درایه‌های ماتریس A و بردار b عبارتند از

$$\alpha_{kj} = \langle x^j, x^k \rangle = \int_0^1 x^{k+j} dx = \frac{1}{k+j+1}; \quad k, j = 0, 1, \dots, n,$$

$$b_k = \langle f, x^k \rangle = \int_0^1 x^k f(x) dx; \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

در این حالت ماتریس A یک ماتریس هیلبرت است که با افزایش n به سرعت بدو ضلع می‌شود [۱]. بنابراین به‌دست آوردن پایه‌ای مناسب برای زیرفضای $\mathcal{U}$ که حل دستگاه نهایی را ساده‌تر کند ضروری است.

۳.۲.۱ دستگاه متعامد یکه

اگر اعضای پایه $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ به‌گونه‌ای انتخاب شوند که یک دستگاه متعامد یکه تشکیل دهند، آنگاه دستگاه معادلات نرمال به ساده‌ترین شکل ممکن قابل حل است، یعنی اگر داشته باشیم

$$\langle u_k, u_j \rangle = \delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

در این حالت، ماتریس A ، یک ماتریس همانی است و جواب دستگاه معادلات نرمال (۳.۱) به‌طور صریح با

$$\alpha_k = \langle v, u_k \rangle, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

به‌دست می‌آید. همچنین نیازی نیست که بعد زیرفضا یعنی $(n+1)$ از ابتدا ثابت فرض شود، زیرا محاسبه‌ی α_ℓ مستقل از α_k برای $k < \ell$ است. بنابراین برای به‌دست آوردن تقریبی مناسب (با خطای از پیش تعیین شده) می‌توان بعد $\mathcal{U}$ را تا آن‌جا که مورد نیاز است افزایش داد، بدون این‌که نیازی به تکرار محاسبات قبلی باشد. اگر برای هر k و j داشته باشیم،

$$\langle u_k, u_j \rangle = \begin{cases} c_k \neq 0, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$$

که $c_k = \|u_k\|_2^2$ ، گوییم دستگاه متعامد است. واضح است که اگر پایه‌ای متعامد برای زیرفضای $\mathcal{U}$ در نظر گیریم، ضرایب بهترین تقریب با،

$$\alpha_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\|u_k\|_2^2}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

تعیین می‌شوند. با داشتن یک خانواده مستقل خطی مانند $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ ، همواره می‌توان یک پایه متعامد توسط الگوریتم گرام-اشمیت^۱ تولید نمود، همچنین با تقسیم هر عضو u_k بر $\sqrt{c_k}$ از روی دستگاه متعامد می‌توان یک دستگاه متعامد یکه به‌دست آورد. دستوری که برای خطای $\|v - u^*\|_2$ در نتیجه (۱.۲.۱) بیان شده است نشان می‌دهد،

$$\sum_{j=0}^n \alpha_j \langle v, u_j \rangle \leq \|v\|_2^2.$$

در این حالت اگر $u_0, u_1, \dots, u_n$ یک دستگاه متعامد یکه تشکیل دهند این نامعادله با توجه به رابطه (۴.۱) به نامعادله $\sum_{j=0}^n \alpha_j^2 \leq \|v\|_2^2$ تبدیل می‌شود. این نامساوی، وقتی دستگاه متعامد یکه $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ به یک دستگاه متعامد یکه با بعد نامتناهی توسعه داده شود همچنان برقرار خواهد بود در واقع داریم [۱]،

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 \leq \|v\|_2^2, \quad (۵.۱)$$

که به نامساوی بسل^۲ معروف است. حال پرسش این است که چه هنگامی می‌توان اختلاف بین تقریب u^* و v را با افزایش n به اندازه دلخواه کوچک کرد؟ برای پاسخ به این پرسش تعریف زیر را ارائه می‌دهیم.

تعریف ۶.۲.۱. یک دستگاه متعامد یکه (متناهی یا نامتناهی) $\{u_0, u_1, \dots\}$ از اعضای یک فضای پیش-هیلبرت $\mathcal{V}$ را در $\mathcal{V}$ کامل گویند اگر برای هر $v \in \mathcal{V}$ یک دنباله $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ با $v_n \in \text{span}\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ وجود داشته‌باشد به‌طوری‌که،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_2 = 0,$$

اگر $\mathcal{V}$ با بعد متناهی باشد، هر دستگاه متعامد یکه از آن نیز متناهی است و اگر بعد آن دستگاه با بعد $\mathcal{V}$ یکی باشد، دستگاه کامل است. کامل بودن یک دستگاه متعامد یکه شرطی لازم است که به کمک آن می‌توان بهترین تقریب یک عضو را با هر دقت مورد نظر به‌دست آورد.

فرض کنید $\{u_0, u_1, \dots\}$ یک دستگاه متعامد یکه و کامل باشد. طبق تعریف برای هر $v \in \mathcal{V}$ دنباله $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ که در آن $v_n \in \text{span}\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_2 = 0.$$

فرض کنیم برای هر n دلخواه u_n^* بهترین تقریب v در $\mathcal{U}_n = \text{span}\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ باشد، آنگاه برای هر n ، $\|v - u_n^*\|_2 \leq \|v - v_n\|_2$ و طبق (۱.۲.۱) داریم،

$$\|v - u_n^*\|_2^2 = \|v\|_2^2 - \sum_{k=0}^n \alpha_k^2,$$

^۱Gram-Schmite

^۲Bessel

در این صورت با توجه به این که، $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - v_n\|_2 = 0$ داریم، $\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - u_n^*\|_2 = 0$ و این امر ایجاب می کند که،

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^2 = \|v\|_2^2, \quad (6.1)$$

که به تساوی پارسوال^۱ مشهور است. از طرفی برقراری رابطه پارسوال ایجاب می کند،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v - u_n^*\|_2 = 0,$$

که کامل بودن دستگاه متعامد یکه $\{u_0, u_1, \dots\}$ را نشان می دهد.

نتیجه ۲.۲.۱. یک دستگاه متعامد یکه $\{u_0, u_1, \dots\}$ کامل است اگر و فقط اگر تساوی پارسوال (۶.۱) برقرار باشد.

ملاحظه ۱.۲.۱. گاهی کامل بودن یک دستگاه متعامد یکه به صورت دیگری نیز تعریف می شود، یک دستگاه متعامد یکه کامل است اگر عضو صفر تنها عضوی باشد که بر تمام اعضای دستگاه عمود است.

۳.۱ فضای هار و قضیه مایر هوبر – کورتیس

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ناحیه ای شامل حداقل n نقطه باشد. اگر $\mathcal{V} \subset C(\Omega)$ فضای برداری n – بعدی روی Ω باشد. $\mathcal{V}$ یک فضای هار n – بعدی روی Ω نامیده می شود، هرگاه برای هر مجموعه از نقاط متمایز دلخواه $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$ و مقادیر دلخواه $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{R}$ یک و تنها یک تابع $s \in \mathcal{V}$ وجود داشته باشد به طوریکه برای هر $k = 1, 2, \dots, n$ رابطه $s(x_k) = f_k$ برقرار باشد.

مثال ۱.۳.۱. فرض کنید Ω یک زیرمجموعه دلخواهی از $\mathbb{R}$ باشد که شامل n نقطه می باشد در این صورت فضای $\mathcal{V} = \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ ، یک فضای هار n – بعدی روی Ω است.

قضیه ۱.۳.۱. گزاره های زیر هم ارزند [۱۰].

۱. $\mathcal{V}$ یک فضای هار n – بعدی است.

۲. هر $u \in \mathcal{V} \setminus \{0\}$ حداکثر $(n-1)$ ریشه دارد.

۳. برای هر مجموعه از نقاط $x_1, x_2, \dots, x_n \in \Omega$ و هر پایه $u_1, u_2, \dots, u_n$ از $\mathcal{V}$ داریم: $\det[u_j(x_k)] \neq 0$ که $[u_j(x_k)]$ ماتریس واندرموند مبتنی بر پایه انتخاب شده روی نقاط فرض شده می باشد.

¹Parseval

اما پرسش مهم این است که آیا در ابعاد بالاتر نیز فضای هار وجود دارد؟ پاسخ سراسر است این پرسش در قضیه بعد ارائه شده است.

قضیه ۲.۳.۱ (مایر-هوبر-کورتیس). فرض کنید برای $d \geq 2$ ، مجموعه $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ شامل حداقل یک نقطه‌ی درونی باشد آنگاه هیچ فضای هار $n \geq 2$ بعدی روی Ω وجود ندارد [۱۰].

۴.۱ چند جمله‌ای‌های چند متغیره

فضای چند جمله‌ای‌هایی از درجه حداکثر q روی $\mathbb{R}^d$ را با نماد $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ نشان می‌دهیم. در کار با چند جمله‌ای‌های چند متغیره، چندتایی‌ها و چند اندیشه‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند، فرض کنیم، $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ یعنی $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ که در آن، $x_j \in \mathbb{R}$ و $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ یک چند اندیشه باشد در این صورت تعریف می‌کنیم،

$$\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_d, \quad \alpha! = \alpha_1! \times \alpha_2! \times \cdots \times \alpha_d!,$$

و برای چند اندیشه‌های α و β ، گوییم، $\alpha < \beta$ ، اگر برای هر $1 \leq i \leq d$ داشته باشیم، $\alpha_i < \beta_i$ (رابطه $\leq$ ، به همین شکل تعریف می‌شود). برای تابع به اندازه کافی هموار f نماد $D^\alpha f$ نشان دهنده مشتقات جزئی f است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}.$$

بنابر قضیه مایر-هوبر-کورتیس فضای چند جمله‌ای‌های چند متغیره، نمی‌توانند یک فضای هار تشکیل دهند در حالی که در چند جمله‌ای‌های یک متغیره این امکان وجود دارد. بنابراین درونیابی روی هر مجموعه دلخواه از نقاط $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m\}$ که $m = \dim \mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ با چند جمله‌ای‌های فضای $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ امکان پذیر نیست. با این وجود درونیابی چند جمله‌ای نقش مهمی در ابعاد بالاتر بازی می‌کند، اگر چه خود را محدود به مجموعه‌ای از نقاط کنیم که برای آن‌ها درونیابی امکان پذیر باشد.

قضیه ۱.۴.۱ [۱۰]:

۱. تک جمله‌ای‌های $\mathbf{x}^\alpha$ که $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ و $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ مستقل خطی‌اند.

$$2. \dim \mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d) = \binom{d+q}{d}.$$

تعریف ۱.۴.۱ مجموعه $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset \mathbb{R}^d$ با $n \geq \dim \mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ را $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ -یکتا حل کننده^۱ گوییم، اگر چند جمله‌ای صفر، تنها چند جمله‌ای $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ باشد که روی تمام x_j ها صفر است.

¹Unisolvent

مثال ۱.۴.۱. فرض کنید X زیر مجموعه $\mathbb{R}^2$ شامل نقاط $x_1 = (1, 2)$ ، $x_2 = (-1, 3)$ ، $x_3 = (5, 0)$ باشد. در اینصورت X یک مجموعه $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ یکتا حل کننده نیست. چون تابع غیر صفر، $f(x, y) = x + 2y - 5$ از فضای $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}^2)$ وجود دارد که مقدار آن در تمام نقاط مجموعه X ، صفر می باشد.

تعریف ۲.۴.۱. ماتریس متقارن A معین مثبت نامیده می شود، هرگاه برای هر $x \in \mathbb{R}^d$ نامساوی $x^T A x > 0$ برقرار باشد و نیمه معین مثبت نامیده می شود هرگاه برای $x \in \mathbb{R}^d$ نامساوی $x^T A x \geq 0$ برقرار باشد.

مثال ۲.۴.۱. هر ماتریس قطری با درایه های قطری مثبت، یک ماتریس معین مثبت می باشد.

تعریف ۳.۴.۱. ماتریس مربعی A را غیرمنفرد^۱ (غیرتکین) گوییم، اگر یک ماتریس B هم مرتبه با آن موجود باشد به طوریکه، $AB = BA = I$. ماتریس مربعی A غیرتکین است اگر و فقط اگر $\det A \neq 0$.

۵.۱ نمادهای اوی بزرگ و اوی کوچک

از این نمادها برای مقایسه سرعت میل کردن دو تابع به یک مقدار مشخص استفاده می شود. فرض کنیم توابع حقیقی مقدار f و g در همسایگی نقطه x_0 تعریف شده اند. گوییم در این همسایگی f از اوی بزرگ g است و می نویسیم،

$$f(x) = O(g(x)), \quad (x \rightarrow x_0),$$

اگر یک ثابت C وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $x \in I$ داشته باشیم،

$$|f(x)| \leq C|g(x)|. \quad (7.1)$$

در اینصورت گوییم f و g در همسایگی x_0 هم مرتبه اند. از طرفی می گوییم $f(x)$ در همسایگی I از اوی کوچک $g(x)$ است و می نویسیم،

$$f(x) = o(g(x)), \quad (x \rightarrow x_0),$$

اگر در صورت وجود حد داشته باشیم،

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

در واقع $f = O(g)$ به این معناست که f و g با سرعت تقریباً به مقدار مورد نظر میل می کنند و $f = o(g)$ به این معناست که سرعت همگرایی f به صفر، بسیار بیشتر از سرعت همگرایی g به صفر است [۱].

¹Nonsingular

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید که $\{p_n\}$ دنباله‌ای از اعداد همگرا به p باشد. به ازای هر n قرار می‌دهیم،

$$e_n = p_n - p,$$

اگر اعداد مثبت α و λ موجود باشند به طوریکه،

$$\lim_{x \rightarrow x_\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|} = \lambda.$$

گوییم دنباله $\{p_n\}$ همگرا به عدد p از مرتبه α می‌باشد و λ را مقدار ثابت خطای مجانبی می‌گوییم.

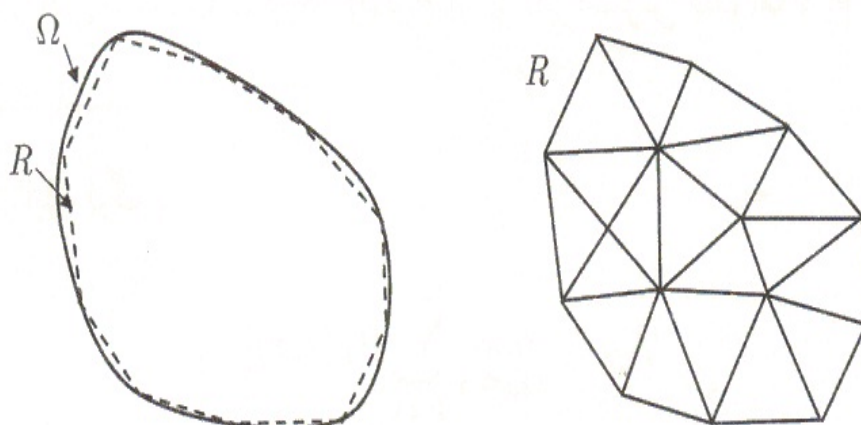
فصل ۲

تقریب با روش‌های بدون شبکه

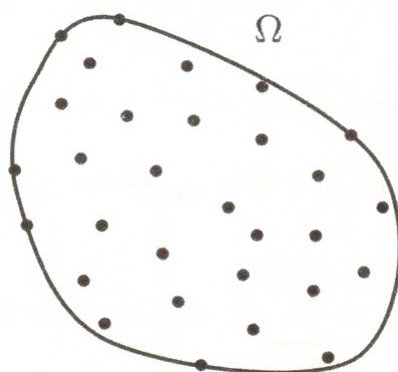
۱.۲ مقدمه

روش‌های متفاوتی برای درونیابی و تقریب توابع چند متغیره وجود دارند. روش‌های درونیابی روی ناحیه مستطیلی (در حالت دوبعدی)، تقریب در فضای ضرب تانسوری، درونیابی روی مثلث (در حالت دوبعدی) و تقریب توسط توابع اسپلاین از جمله این روش‌ها می‌باشند. یکی از روش‌های تقریب توابع چند متغیره روی نواحی کلی (نه لزوماً مستطیلی یا مکعبی) این است که ناحیه تقریب را با اجتماعی از زیر ناحیه‌های منظم مانند مثلث‌ها، مستطیل‌ها، هرم‌ها یا مکعب‌ها تقریب بزنیم، سپس تقریب‌های موضعی روی این زیرناحیه‌ها را به‌دست آوریم و در آخر تقریب سراسری از درجه همواری معین روی کل ناحیه بسازیم که این همان روش عناصر متناهی است که به کمک شبکه‌بندی ناحیه انجام می‌شود. روش‌های دیگری نیز وجود دارند که روش بدون شبکه نامیده می‌شوند.

روش‌های بدون شبکه نه تنها در ریاضیات مورد توجه است بلکه در مهندسی، بهینه‌سازی، هوش مصنوعی، گرافیک کامپیوتری، پردازش تصاویر، پردازش سیگنال و شبکه‌های عصبی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این روش‌ها از شبکه‌بندی ناحیه به مفهوم عناصر متناهی استفاده نمی‌شود و بجای آن، تقریب بر اساس مجموعه‌ای از نقاط که به‌صورت مناسب درون ناحیه پراکنده شده‌اند نوشته می‌شوند. شکل‌های ۱.۲ و ۲.۲ تفاوت چگونگی تقریب در دو روش را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۲: تقریب Ω با چندضلعی R و مثلثی سازی R



شکل ۲.۲: تصویری کلی از نقاط پراکنده‌ی مورد استفاده در تقریب‌های بدون شبکه

روش‌های بدون شبکه، تابع مفروض را برحسب مقادیر تابع در نقاط پراکنده تقریب می‌زنند. توزیع این نقاط می‌تواند دلخواه باشد، اما با توجه به قضیه مایرهور-کورتیس گاهی باید شرایطی روی نقاط حاکم باشد که تقریب یکتا شود. برتری روش‌های بدون شبکه نسبت به روش‌های عناصر متناهی این است که به شکل هندسی دامنه وابسته نیستند و تعمیم ساده‌تر و کم هزینه‌تری به ابعاد بالاتر دارند. برای تقریب به روش بدون شبکه، روش‌های متنوعی به وجود آمده است که برای حل معادلات دیفرانسیل، معادلات انتگرال و معادلات انتگرو-دیفرانسیل به کار رفته است که از بین آنها می‌توان به مواردی مانند روش توابع پایه شعاعی، به اختصار RBF^۱، روش توابع پایه شعاعی شبه طیفی، یا RBF-PS^۲، روش بدون شبکه موضعی پترو-گالرکین و به اختصار MLPG^۳ و روش کمترین مربعات متحرک اشاره کرد. در ادامه دو روش کمترین مربعات متحرک و روش کمترین مربعات

^۱Radial Basis Functions

^۲RBF-Pseudo Spectral

^۳Meshless Local Petrov-Galerkin

متحرک درونیاب به اختصار معرفی می‌شوند.

۲.۲ روش تقریب کمترین مربعات متحرک

روش تقریب کمترین مربعات متحرک و به اختصار MLS^۱ برای اولین بار در سال ۱۹۸۱ توسط سالکائوسکاس^۲ و لنکستر^۳ و با الهام از مقاله شپارد^۴ در سال ۱۹۶۸ [۱۱]، برای رویه‌های چندبعدی معرفی شد [۱۲]، پس از آن به‌طور گسترده برای حل معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال مورد استفاده قرار گرفت.

روش کمترین مربعات متحرک روی دسته‌ای از نقاط پراکنده روی دامنه مساله، بنا می‌شود. فرض کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ باشد. مجموعه‌ای از نقاط پراکنده مانند $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\} \subset \Omega$ را در نظر می‌گیریم، این نقاط می‌توانند به‌طور منظم یا تصادفی در دامنه مساله، پراکنده شوند. روش MLS برای تقریب مقدار تابع u در هر نقطه $x \in \Omega$ ، یک مساله کمترین مربعات گسسته وزن دار موضعی را حل می‌کند که همان مساله بهترین تقریبات در نرم دو است.

در روش MLS برای هر نقطه گره، وزن w_j در نظر می‌گیریم که این وزن وابسته به نقطه‌ای است که می‌خواهیم مقدار تابع را در آن تقریب بزنیم. برای مثال، برای $x_j \in \Omega$ ، وزن مرتبط با گره x_j در نقطه x را به‌صورت $w_j(x)$ نمایش می‌دهیم (یعنی همان وزن متحرک). حال فرض می‌کنیم $\{u_j\}_{j=1}^N$ مقادیر تابع u در نقاط x_j داده شده باشد. می‌خواهیم $u(x)$ را در فضای چندجمله‌ای‌های حداکثر از درجه q ($\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$) تقریب بزنیم ($q \ll N$).

مجموعه $\mathcal{P} = \{p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)\}$ را به‌عنوان پایه‌ای برای فضای $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ در نظر می‌گیریم. تقریب به روش کمترین مربعات متحرک u را در هر نقطه دلخواه $x \in \Omega$ ، با نماد $u^h(x)$ نشان می‌دهیم و تقریب $u^h(x) \in \mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ از تابع u را به‌صورت رابطه ۱.۲ در نظر می‌گیریم،

$$u^h(x) := \sum_{k=1}^m a_k(x) p_k(x), \quad (1.2)$$

شکل ماتریسی رابطه (۱.۲) برای هر $x \in \Omega$ به‌صورت (۲.۲) بیان می‌شود،

$$u^h(x) = \mathbf{P}^T(x) \mathbf{a}(x), \quad (2.2)$$

که در آن، $\mathbf{a}(x)$ بردار ضرایب بوده و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود،

$$\mathbf{a}(x) = [a_1(x) \quad a_2(x) \quad \cdots \quad a_m(x)]^T,$$

و $\mathbf{P}^T(x)$ ، بردار پایه به شکل زیر می‌باشد،

$$\mathbf{P}^T(x) = [p_1(x) \quad p_2(x) \quad \cdots \quad p_m(x)],$$

¹Moving Least Square

²Salkauskas

³Lancaster

⁴Shepard

بردار ضرایب $a(x)$ را طوری پیدا می‌کنیم که $u^h(x)$ بهترین تقریب تابع $u(x)$ نسبت به نرم مربعی گسسته وزن دار از بین اعضای $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ باشد. به این منظور کافی است ضرایب $a_j(x)$ را طوری بیابیم که به ازای آن تابع $J(x)$ که به شکل (۳.۲) تعریف شده است، کمینه شود.

$$J(x) = \sum_{j=1}^n w_j(x) (P^T(x_j)a(x) - u_j)^2, \quad (3.2)$$

که در آن $w_j(x)$ وزن مرتبط با گره j ام و n تعداد گره‌هایی در Ω است به طوری که $w_j(x) > 0$. رابطه (۳.۲) را می‌توان به شکل ماتریسی (۴.۲) نوشت.

$$J(x) = [Pa(x) - U]^T W [Pa(x) - U], \quad (4.2)$$

که در آن،

$$P = \begin{bmatrix} P^T(x_1) \\ P^T(x_2) \\ \vdots \\ P^T(x_n) \end{bmatrix}_{n \times m}, \quad W = \begin{bmatrix} w_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2(x) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n(x) \end{bmatrix}_{n \times n}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix},$$

برای تعیین ضرایب $a(x)$ که به ازای آن $J(x)$ کمینه شود باید $\nabla_a J = 0$ ، به این معنا که

$$P^T W (Pa(x) - U) = 0,$$

منجر به رابطه (۵.۲) می‌گردد.

$$P^T W P a(x) = P^T W U, \quad (5.2)$$

با فرض

$$A(x) := P^T W P = \sum_{j=1}^n w_j(x) P(x_j) P^T(x_j),$$

$$B(x) := P^T W U = \begin{bmatrix} w_1(x)P(x_1) & w_2(x)P(x_2) & \dots & w_n(x)P(x_n) \end{bmatrix},$$

رابطه (۵.۲) به صورت (۶.۲) نوشته می‌شود که در آن ماتریس $A_{m \times m}$ ماتریس لحظه نامیده می‌شود.

$$A(x)a(x) = B(x)U, \quad (6.2)$$

تقریب MLS زمانی خوش تعریف است که ماتریس A نامنفرد باشد یا به طور معادل ماتریس P دارای رتبه کامل ستونی از مرتبه m باشد. بنابر رابطه (۶.۲) داریم،

$$a(x) = A^{-1}(x)B(x)U, \quad (7.2)$$

با جایگذاری (۷.۲) در (۲.۲) برای هر $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ داریم،

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x})\mathbf{U} = \sum_{j=1}^n \phi_j(\mathbf{x})u_j, \quad (۸.۲)$$

که در آن،

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (۹.۲)$$

که در آن، $\Phi^T(\mathbf{x}) = [\phi_1(\mathbf{x}) \quad \phi_2(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \phi_n(\mathbf{x})]$ با توجه به (۹.۲) و تعریف $\Phi^T(\mathbf{x})$ هر عنصر $\Phi^T(\mathbf{x})$ به صورت (۱۰.۲) قابل نمایش است.

$$\phi_j(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) \left[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \right]_{kj}, \quad (۱۰.۲)$$

که $\phi_j(\mathbf{x})$ ها، توابع ساختار^۱ تقریب MLS متناظر با گره $\mathbf{x}_j$ نامیده می شوند. اگر برای $j = 1, 2, \dots, n$ داشته باشیم، $w_j(\mathbf{x}) \in C^r(\Omega)$ و برای $k = 1, 2, \dots, m$ داشته باشیم، $p_k(\mathbf{x}) \in C^s(\Omega)$ آنگاه می توان ثابت کرد که، $\phi_j(\mathbf{x}) \in C^{\min(r,s)}$ [۱۳]. مشتق جزئی توابع ساختار $\phi_j(\mathbf{x})$ به صورت زیر به دست می آید [۱۴].

$$\phi_{j,k}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \left[p_{i,k} \left(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) \right)_{ij} + p_i \left(\mathbf{A}_{,k}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}_{,k}(\mathbf{x}) \right)_{ij} \right], \quad (۱۱.۲)$$

که در آن، $\mathbf{A}_{,k}^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1} \right)_{,k}$ مشتق معکوس $\mathbf{A}$ نسبت به x_k می باشد که به صورت زیر به دست می آید.

$$\mathbf{A}_{,k}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}_{,k}\mathbf{A}^{-1}, \quad (۱۲.۲)$$

که نماد کاما، $\left(\cdot \right)_{,k}$ بیانگر، $\frac{\partial(\cdot)}{\partial x_k}$ است. یک نوع از توابع وزنی که در تقریب MLS مورد استفاده قرار می گیرد، تابع وزنی گاوس^۲ می باشد که به شکل زیر تعریف می شود،

$$w_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\exp\left(-\left(\frac{d_j}{\alpha}\right)^2\right) - \exp\left(-\left(\frac{h_j}{\alpha}\right)^2\right)}{1 - \exp\left(-\left(\frac{h_j}{\alpha}\right)^2\right)}, & 0 \leq d_j \leq h_j, \\ 0, & d_j > h_j, \end{cases} \quad (۱۳.۲)$$

که در آن، $d_j = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$ (فاصله اقلیدسی بین $\mathbf{x}$ و $\mathbf{x}_j$)، α یک پارامتر آزاد است که ثابت کنترل ساختار تابع وزن w_j بوده و h_j اندازه دامنه پشتیبان^۳ متناظر با گره $\mathbf{x}_j$ می باشد. این تابع در ردهی C^0 است.

^۱Shape Functions

^۲Gaussian Weight Function

^۳Support Domain

۱.۲.۲ انتخاب تابع وزن

هموار بودن $\phi_j(\mathbf{x})$ ها که توابع ساختار MLS می‌باشند و به تبع آن همواری $u^h(\mathbf{x})$ ، به هموار بودن توابع پایه و تابع وزن وابسته هستند. بنابراین توابع وزن نقش مهمی را در تقریب کمترین مربعات متحرک دارند. از این رو تابع وزن را طوری انتخاب می‌کنیم که هر چه از نقطه $\mathbf{x}$ (نقطه تقریب) دورتر شویم ، وزن نقاط کمتر و کمتر شوند و وزن نقاطی که از یک فاصله معین دورترند، صفر شود و برای تقریب تابع در نقطه $\mathbf{x}$ بکار گرفته نشوند. به این منظور، فرض می‌کنیم Ω ناحیه باز کراندار در $\mathbb{R}^d$ و $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^d$ مجموعه نقاط پراکنده‌ای باشد. حال برای هر یک از نقاط پراکنده $\mathbf{x}_j$ ، گوی Λ_j به مرکز $\mathbf{x}_j$ ، در نظر می‌گیریم به طوری که،

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup_{j=1}^N \Lambda_j,$$

و شعاع Λ_j را با $h_j = \max_{\mathbf{x} \in \partial \Lambda_j} \{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|\}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت $\mathcal{I}_N := \{\Lambda_j\}_{j=1}^N$ یک پوشش باز متناهی از $\bar{\Omega}$ نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۲. رده‌ای از توابع $\mathcal{W} := \{w_j\}_{j=1}^N$ یک افزاز از توابع واحد^۱ برای پوشش باز $\mathcal{I}_N$ نامیده می‌شود، هرگاه دارای خواص زیر باشد،

$$w_j \in C^s(\mathbb{R}^d), \quad s > 0 \quad \text{or} \quad s = \infty. \quad ۱.$$

$$\text{supp}(w_j) \subseteq \bar{\Lambda}_j. \quad ۲.$$

$$w_j(\mathbf{x}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \Lambda_j. \quad ۳.$$

$$\sum_{j=1}^N w_j(\mathbf{x}) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad ۴.$$

برای ساخت یک افزاز از توابع واحد، روش‌های گوناگونی وجود دارد، یک روش معمول استفاده از تابع وزن انتقال - پایا^۲ می‌باشد یعنی برای تابع یک متغیره، $\phi : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ می‌توان قرار داد،

$$w(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}) = \phi(r), \quad r = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_2}{\delta},$$

که δ پارامتر مقیاس و ϕ تابع نزولی پیوسته‌ای است که روی بازه $[0, 1]$ مثبت و خارج آن صفر می‌باشد. بنابراین برای نقاط $\mathbf{x}$ که فاصله اقلیدسی آنها از $\mathbf{x}_j$ بیشتر از δ باشد مقدار $w(\mathbf{x}_j, \mathbf{x})$ برابر صفر است. از این رو برای هر نقطه $\mathbf{x}$ ، فقط اندیس‌های $I(\mathbf{x}) = \{j : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_2 \leq \delta\}$ برای تقریب تابع در $\mathbf{x}$ ، فعال هستند.

¹Partition Of Unity Subordinated

²Translation-Invariant Weight Function

از جمله توابع وزنی که در تقریب MLS مورد استفاده قرار می‌گیرند، توابع وزن گاوسی (۱۳.۲) و توابع اسپالینی می‌باشند که به صورت (۱۴.۲) نمایش داده می‌شوند [۱۵].

$$w_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{d_j}{\delta} \right)^2 + 8 \left(\frac{d_j}{\delta} \right)^3 - 3 \left(\frac{d_j}{\delta} \right)^4, & 0 \leq d_j \leq \delta, \\ 0, & d_j > \delta. \end{cases} \quad (14.2)$$

که این توابع در رده‌ی همواری C^2 هستند. در برنامه‌های عددی ارائه شده در این رساله از تابع وزن گاوسی استفاده شده‌است.

لم ۱.۲.۲. اگر $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ یک مجموعه $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ -یکتا حل‌کننده باشد و

$$\{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})\},$$

پایه‌ای برای $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ باشد آنگاه ماتریس

$$P = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}.$$

از رتبه کامل^۱ است [۱].

برهان. چون $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ یکتا حل‌کننده است پس هیچ عضوی غیر از چندجمله‌ای صفر از $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ وجود ندارد که در تمام نقاط X صفر شود. حال فرض می‌کنیم که P از رتبه کامل نباشد پس یک ستون مانند P_j را می‌توان به صورت ترکیب خطی از بقیه نوشت یعنی مقادیر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ متعلق $\mathbb{R}$ به گونه‌ای وجود دارند که

$$\alpha_1 P_1 + \cdots + \alpha_{j-1} P_{j-1} + \alpha_{j+1} P_{j+1} + \cdots + \alpha_m P_m = P_j,$$

که با پایه بودن $\{p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})\}$ تناقض دارد در نتیجه P رتبه کامل می‌باشد. $\square$

با توجه به روند تقریب کمترین مربعات متحرک، شرط خوش تعریف بودن روش MLS این است که ماتریس لحظه یعنی $A(\mathbf{x})$ معکوس پذیر باشد.

قضیه ۱.۲.۲. [۱۰]: شرط لازم و کافی برای معکوس‌پذیری $A(\mathbf{x})$ این است که مجموعه $\{\mathbf{x}_j \in X : j \in I(\mathbf{x})\} - \mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ یکتا حل‌کننده باشد.

برهان. فرض کنیم مجموعه $\{\mathbf{x}_j \in X : j \in I(\mathbf{x})\}$ ، $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ -یکتا حل‌کننده باشد. نشان می‌دهیم که $A(\mathbf{x})$ معین مثبت است. با توجه به ماتریس W در روش کمترین مربعات متحرک،

^۱Full Rank

می‌دانیم که توابع وزن روی قطر اصلی اکیدا مثبت هستند پس برای عناصر روی قطر اصلی که به صورت $w_j(\mathbf{x})$ هستند، برای هر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ داریم،

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^T \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{x} &= \mathbf{x}^T (P^T \mathbf{W} P) \mathbf{x} = \left(\mathbf{x}^T P^T \sqrt{\mathbf{W}} \right) \left(\sqrt{\mathbf{W}} P \mathbf{x} \right), \\ &= \left(\sqrt{\mathbf{W}} P \mathbf{x} \right)^T \left(\sqrt{\mathbf{W}} P \mathbf{x} \right) = \|\sqrt{\mathbf{W}} P \mathbf{x}\|_2^2 \geq 0, \end{aligned}$$

پس تا اینجا $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ نیمه معین مثبت می‌باشد، از طرفی $\mathbf{W}$ اکیدا مثبت است بنابراین،

$$\mathbf{x}^T (P^T \mathbf{W} P) \mathbf{x} = 0, \Rightarrow \|\sqrt{\mathbf{W}} P \mathbf{x}\|_2 = 0, \Rightarrow P \mathbf{x} = 0, \quad (15.2)$$

در نتیجه با توجه به شرط یکتا حل‌کنندگی، ستون‌های ماتریس P مستقل خطی هستند، بنابراین دستگاه همگن (15.2) فقط جواب $\mathbf{x} = 0$ دارد، پس ماتریس $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ معین مثبت است و در نتیجه نامنفرد است. برعکس، اگر $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ منفرد باشد چون $\mathbf{W}$ نامنفرد است پس P از رتبه کامل نیست و این با شرط یکتا حل‌کنندگی تناقض دارد. $\square$

برای اینکه $\{\mathbf{x}_j \in X : j \in I(\mathbf{x})\}$ یک مجموعه $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ – یکتا حل‌کننده باشد لازم است حداقل شامل m نقطه باشد (به اندازه بعد $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$). اما این تنها یک شرط لازم است و کافی نیست. بنابراین برای هر $\mathbf{x}$ باید δ را آنقدر بزرگ اختیار کرد که این تعداد نقطه لازم در محمل تابع وزن قرار گیرد. به همین خاطر معمولاً δ ضریبی از ماکزیمم فاصله نقاط در نظر گرفته می‌شود. فرض کنیم $h = h_{X,\Omega}$ شعاع بزرگترین گوی‌ای باشد که بتوان آن را طوری درون ناحیه قرار داد که شامل هیچ نقطه $\mathbf{x}_j$ نباشد. به‌طور ریاضی تعریف می‌کنیم،

$$h = h_{X,\Omega} := \max_{\mathbf{x} \in \Omega} \min_{1 \leq j \leq N} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|_2,$$

و آن را اندازه تراکم^۱ X می‌گوییم. در این صورت معمولاً قرار می‌دهیم $\delta = ch$ و ضریب c را طوری تعیین می‌کنیم که حداقل m نقطه در محمل ω (تابع وزن) قرار گیرد.

تعریف ۲.۲.۲. برای مجموعه نقاط پراکنده $X = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ ، فاصله انفصال^۲ را با نماد q_X نشان داده و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$q_X := \frac{1}{N} \min_{i \neq j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2,$$

همچنین مجموعه X را شبه-یکنواخت^۳ نسبت به ثابت c می‌نامیم اگر،

$$q_X \leq h_{X,\Omega} \leq cq_X.$$

¹Fill Distance

²Sepration Distance

³Quasi-Uniform

در بحث نظری، به دست آوردن شرط یکتا حل کنندگی برای یک ناحیه کلی Ω دور از دسترس است، از این رو باید خود را به ناحیه‌هایی که در شرط مخروط داخلی صدق می‌کنند، محدود کرد.

تعریف ۳.۲.۲. مجموعه $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ دارای شرایط مخروط داخلی^۱ نامیده می‌شود، اگر زاویه $\theta \in (0, \frac{\pi}{4})$ و شعاع $r > 0$ یافت شود که برای هر $x \in \Omega$ ، بردار واحد $\xi(x)$ موجود باشد به‌طوری‌که مخروط،

$$C(x, \xi(x), \theta, r) = \{x + \lambda y : y \in \mathbb{R}^d, \|y\|_2 = 1, y^T \xi(x) \geq \cos(\theta), \lambda \in [0, r]\},$$

در Ω محاط شده باشد.

در حقیقت شرط یکتا حل کنندگی را روی مخروط به دست آورده و به یکتا حل کنندگی روی Ω می‌رسیم. در این بین از این خاصیت استفاده می‌شود که خط واصل بین مرکز و هر نقطه دیگر درون مخروط، کاملاً درون آن قرار دارد. سپس چندجمله‌ای‌های چند متغیره را به چندجمله‌ای یک متغیره روی این خط کاهش داده و به کمک نامساوی مارکوف شرط یکتا حل کنندگی را بررسی می‌کنیم.

ملاحظه ۱.۲.۲. مرتبه همگرایی تقریب MLS به کیفیت پراکندگی نقاط x_j و همچنین به درجه چندجمله‌ای‌های پایه، یعنی q بستگی دارد. اگر چه لزومی ندارد نقاط X یکنواخت باشند، اما بهتر است حداقل شبه-یکنواخت باشند. حال قضیه همگرایی زیر را داریم.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ مجموعه‌ای فشرده با شرایط مخروط داخلی با زاویه θ و شعاع r باشد. همچنین فرض می‌کنیم که Ω^* بستر $\bigcup_{x \in \Omega} B(x, 2\tau h_0)$ و X یک مجموعه شبه-یکنواخت با اندازه تراکم $h_{X, \Omega} \leq h_0$ باشد که در آن،

$$h_0 = \frac{r}{\tau}, \quad \tau = \frac{16(1 + \sin \theta)^2 q^2}{3 \sin^2 \theta},$$

آنگاه ثابت $c \geq 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $u \in C^{q+1}(\Omega^*)$ داریم،

$$\|u - u^h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq ch_{X, \Omega}^{q+1} \max_{x \in \Omega^*} \|D^\alpha u(x)\|_{L^\infty(\Omega^*)}, \quad |\alpha| = q + 1,$$

یعنی اگر u به اندازه کافی هموار باشد مرتبه همگرایی $O(h^{q+1})$ خواهد بود [۱۰].

یادآوری می‌کنیم که برای تقریب u در هر نقطه x باید یک دستگاه جداگانه حل شود که کاری پرهزینه است، اما بعد ماتریس $A(x)$ برابر m که با تعداد اعضای پایه $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ برابر است. معمولاً تقریب MLS یک پایه از چندجمله‌ای‌های از درجه پایین را استفاده می‌کند. یعنی بعد ماتریس A کوچک است و تقریب MLS بجای حل یک دستگاه معادلات بزرگ (مانند روش توابع پایه شعاعی)، چندین دستگاه معادلات با بعد کوچک حل می‌کند که از لحاظ محاسباتی کاراتر است.

¹Interior Cone Condition

ملاحظه ۲.۲.۲. در تقریب به روش کمترین مربعات متحرک معمولاً، پایه $\{\mathbf{x}^\beta\}_{0 \leq \beta \leq q}$ برای استفاده $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ استفاده می‌شود. اما اگر از پایه انتقال یافته و مقیاس شده، $\left\{ \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})^\beta}{h^{|\beta|}} \right\}_{0 \leq \beta \leq q}$ استفاده شود، تقریب MLS به‌طور چشمگیری پایدارتر می‌شود. لازم به ذکر است که این پایه در تشکیل ماتریس P کار می‌رود. بنابر این $\mathbf{x}_j$ بجای $\mathbf{x}$ و نقطه‌ای که قرار است در آن تقریب صورت پذیرد، بجای $\mathbf{y}$ ، قرار می‌گیرد. در [۱۶] تاثیر انتخاب این نوع پایه در ضریب وضعیت ماتریس $A(\mathbf{x})$ و پایداری الگوریتم با جزئیات کامل بررسی شده است.

۳.۲ روش تقریب کمترین مربعات متحرک درونیاب

روش کمترین مربعات متحرک درونیاب توسط لنکستر و سالکائوسکاس ارائه شد [۱۲]. توابع شکل روش کمترین مربعات متحرک درونیاب بر خلاف روش کمترین مربعات متحرک در خاصیت دلتای کرونکر صدق می‌کنند، بنابراین با استفاده از این ویژگی می‌توان شرایط مرزی اساسی را در حل معادلات دیفرانسیل یا معادلات انتگرو-دیفرانسیل به‌صورت مستقیم اعمال کرد.

فرض $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}$ مجموعه‌ای از نقاط در دامنه کراندار $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ باشد که N تعداد نقاط است. پارامتر ρ_I شعاع دامنه تاثیر نقطه $\mathbf{x}_I$ ، و $\|\cdot\|$ نرم اقلیدسی را نشان می‌دهند. دامنه تاثیر نقطه $\mathbf{x}_I$ به‌شکل $\Omega_I = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \leq \rho_I, \mathbf{x} \in \Omega\}$ تعریف می‌شود. فرض کنید $\rho = \max_{\mathbf{x}_I \in \mathbf{X}} \{\rho_I\}$ باشد. برای نقطه داده شده $\mathbf{x} \in \Omega$ ، مجموعه اندیس $\tau_{\mathbf{x}} = \{I : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \leq \rho_I, \mathbf{x} \in \mathbf{X}\}$ را تعریف می‌کنیم.

فرض $u(\mathbf{x})$ تابعی از متغیر میدان در Ω باشد. تابع تقریب $u(\mathbf{x})$ با نماد $u^h(\mathbf{x})$ نمایش داده می‌شود. به منظور اینکه تقریب $u^h(\mathbf{x})$ در روش کمترین مربعات متحرک درونیاب در خاصیت درونیابی صدق کند. تابع وزن منفردی را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم،

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = \begin{cases} \left\| \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_I}{\rho_I} \right\|^{-\alpha}, & \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \leq \rho_I, \\ 0, & \text{سایر}, \end{cases} \quad (16.2)$$

که پارامتر α یک عدد صحیح زوج است. ضرب داخلی را به‌صورت،

$$\langle f, g \rangle_{\mathbf{x}} = \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) f(\mathbf{x}_I) g(\mathbf{x}_I), \quad \forall f, g \in C^0(\Omega), \quad (17.2)$$

تعریف می‌کنیم که $\mathbf{x}$ یک نقطه در Ω را مشخص می‌کند. نرم متناظر در $\mathbf{x}$ نیز به‌شکل زیر است،

$$\|f\|_{\mathbf{x}} = \left[\sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) f^2(\mathbf{x}_I) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (18.2)$$

فرض $p_0(\mathbf{x}) \equiv 1, p_1(\mathbf{x}), \dots, p_{\bar{m}}(\mathbf{x})$ توابع پایه‌ای باشند که $\bar{m} + 1$ تعداد توابع پایه‌ای را مشخص می‌کند. توابع پایه‌ای جدیدی را با استفاده از این توابع پایه‌ای می‌سازیم. ابتدا $p_0(\mathbf{x})$ را نرمال می‌کنیم و فرض می‌کنیم،

$$\tilde{p}_0(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}) = \frac{1}{\left[\sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \right]^{\frac{1}{\bar{m}}}}. \quad (19.2)$$

پس توابع پایه‌ای جدید را عمود بر $\tilde{p}_0(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}})$ به صورت زیر می‌سازیم،

$$\tilde{p}_i(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}) = p_i(\bar{\mathbf{x}}) - \mathcal{S}p_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (20.2)$$

که $\mathcal{S}p_i$ یک اپراتور خطی است که به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$\mathcal{S}p_i(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) p_i(\mathbf{x}_I), \quad (21.2)$$

و

$$v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = \frac{w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)}{\sum_{J \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J)}. \quad (22.2)$$

تابع $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$ دارای خاصیت‌های زیر است. [۱۲].

لم ۱.۳.۲. اگر تابع وزن (۱۶.۲) استفاده شود، آنگاه $v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \in C^\infty(\bar{\Omega})$ و

$$v(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J) = \delta_{IJ}, \quad \forall I, J \in \tau_{\mathbf{x}}, \quad 1.$$

$$\sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = 1, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad 2.$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega, \quad 0 \leq v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \leq 1, \text{ و } v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = 0 \quad \text{اگر و فقط اگر} \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_J, \quad J \neq I, \quad 3.$$

$$\frac{\partial v(\mathbf{x}_I, \mathbf{x}_J)}{\partial \mathbf{x}} = 0, \quad \forall I, J \in \tau_{\mathbf{x}}. \quad 4.$$

برای بدست آوردن فرم تابع تقریب $u^h(\mathbf{x})$ که در خاصیت درونیابی صدق کند، لنکستر و سالکائوسکاس [۱۲] تقریب محلی را به صورت زیر تعریف کردند،

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \tilde{p}_0(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}) a_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{\bar{m}} \tilde{p}_i(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}) a_i(\mathbf{x}), \quad (23.2)$$

که $\bar{\mathbf{x}}$ یک نقطه در دامنه تاثیر $\mathbf{x}$ است و $a_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, \bar{m}$ ضرایب مجهول توابع پایه‌ای هستند. برای یک $\mathbf{x}$ داده شده، تفاضل بین تابع تقریب محلی $u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}})$ و تابع $u(\bar{\mathbf{x}})$ با روش کمترین مربعات وزنی کمینه‌سازی می‌شود. به این منظور نرم L_2 گسسته وزنی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$J(\mathbf{x}) = \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \left[u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) - u_I \right]^2, \quad (24.2)$$

$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I)$ ، تابع وزنی با محمل فشرده است که در (۱۶.۲) نمایش داده شده و $\mathbf{x}_I$ برای هر $I \in \tau_{\mathbf{x}}$ نقاطی هستند که $\mathbf{x}$ در دامنه تاثیر آنها قرار دارد و $u_I = u(\mathbf{x}_I)$ می‌باشد. با کمینه‌سازی نرم L_2 گسسته وزنی نمایش داده شده در (۲۴.۲) داریم،

$$\langle u(\cdot) - u^h(\mathbf{x}, \cdot), \tilde{p}_0 \rangle_{\mathbf{x}} = 0, \quad (25.2)$$

$$\langle u(\cdot) - u^h(\mathbf{x}, \cdot), \tilde{p}_i \rangle_{\mathbf{x}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (26.2)$$

به دلیل تعامد، (۲۵.۲) و (۲۶.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$a_0(\mathbf{x}) = \langle u, \tilde{p}_0 \rangle_{\mathbf{x}}, \quad (27.2)$$

$$a_0(\mathbf{x}) \langle \tilde{p}_0, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}} + \sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) \langle \tilde{p}_i, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}} = \langle u, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}}, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (28.2)$$

با توجه به (۱۹.۲) و تعریف ضرب داخلی، داریم،

$$\tilde{p}_0(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}) a_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{\left[\sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) \right]^{\frac{1}{2}}} \langle u, \tilde{p}_0 \rangle_{\mathbf{x}} = \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}} v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) u_I = \mathcal{S}u. \quad (29.2)$$

بنابراین (۲۸.۲) به شکل زیر نوشته می‌شود،

$$\sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) \langle \tilde{p}_i, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}} = \langle u - \mathcal{S}u, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}}, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (30.2)$$

با توجه به لم زیر، (۳۰.۲) را می‌توان ساده کرد.

لم ۲.۳.۲. اگر تابع وزن (۱۶.۲) استفاده شود، برای هر $\mathbf{x} \in \Omega$ داریم،

$$\langle \mathcal{S}u, \tilde{p}_i \rangle_{\mathbf{x}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (31.2)$$

□

برهان. برای مشاهده اثبات به [۱۷] رجوع کنید.

با توجه به لم (۲.۳.۲)، (۳۰.۲) را می‌توان به شکل زیر ساده کرد،

$$\sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) \langle \tilde{p}_i, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}} = \langle u, \tilde{p}_j \rangle_{\mathbf{x}}, \quad j = 1, 2, \dots, \bar{m}. \quad (32.2)$$

(۳۲.۲) را می‌توان به شکل زیر نوشت،

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_w(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \quad (33.2)$$

که

$$\mathbf{a}^T(\mathbf{x}) = (a_1(\mathbf{x}), a_2(\mathbf{x}), \dots, a_{\bar{m}}(\mathbf{x})), \quad (34.2)$$

$$\mathbf{u}^T = (u_1, u_2, \dots, u_N), \quad (35.2)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_w(\mathbf{x})\mathbf{F}^T(\mathbf{x}), \quad (36.2)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1) & \tilde{p}_1(\mathbf{x}; \mathbf{x}_2) & \dots & \tilde{p}_1(\mathbf{x}; \mathbf{x}_N) \\ \tilde{p}_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1) & \tilde{p}_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_2) & \dots & \tilde{p}_2(\mathbf{x}; \mathbf{x}_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{p}_{\bar{m}}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_1) & \tilde{p}_{\bar{m}}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_2) & \dots & \tilde{p}_{\bar{m}}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad (37.2)$$

و $\mathbf{F}_w(\mathbf{x}) = \bar{\omega}_{k,J}(\mathbf{x})_{\bar{m} \times N}$ یک ماتریس $\bar{m} \times N$ است و

$$\bar{\omega}_{k,J}(\mathbf{x}) = \begin{cases} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J) \tilde{p}_k(\mathbf{x}; \mathbf{x}_J), & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_J, \\ \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}, I \neq J} w(\mathbf{x}_J, \mathbf{x}_I) [p_k(\mathbf{x}_J) - p_k(\mathbf{x}_I)], & \mathbf{x} = \mathbf{x}_J. \end{cases} \quad (38.2)$$

پس می‌توانیم ضرایب مجهول را به‌شکل زیر محاسبه کنیم،

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}_w(\mathbf{x})\mathbf{u}. \quad (39.2)$$

آنگاه تابع تقریب محلی را می‌توان به‌شکل زیر بدست آورد،

$$u^h(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}) = \mathcal{S}u + \sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) \tilde{p}_i(\mathbf{x}; \bar{\mathbf{x}}). \quad (40.2)$$

بنابراین تابع تقریب درونیاب سراسری تابع $u(\mathbf{x})$ به‌صورت زیر بدست می‌آید،

$$u^h(\mathbf{x}) = \mathcal{S}u + \sum_{i=1}^{\bar{m}} a_i(\mathbf{x}) g_i(\mathbf{x}) \equiv \Phi(\mathbf{x})\mathbf{u} = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}_I), \quad (41.2)$$

که $\Phi(\mathbf{x})$ ماتریسی از توابع شکل است.

$$\Phi(\mathbf{x}) = (\phi_1(\mathbf{x}), \phi_2(\mathbf{x}), \dots, \phi_N(\mathbf{x})) = \mathbf{v}^T + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}_w(\mathbf{x}), \quad (42.2)$$

که در آن

$$\mathbf{v}^T = (v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1), v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2), \dots, v(\mathbf{x}, \mathbf{x}_N)), \quad (43.2)$$

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_{\bar{m}}(\mathbf{x})), \quad (44.2)$$

$$g_i(\mathbf{x}) = p_i(\mathbf{x}) - \mathcal{S}p_i(\mathbf{x}). \quad (45.2)$$

آنگاه مشتق جزئی مرتبه اول توابع شکل روش کمترین مربعات متحرک درونیاب به شکل زیر قابل محاسبه هستند،

$$\phi_{,i}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_{,i}^T + \mathbf{p}_{,i}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}_w(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}_{w,i}(\mathbf{x}) + \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A}_{,i}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{F}_w(\mathbf{x}), \quad (46.2)$$

که

$$\mathbf{F}_{w,i}(\mathbf{x}) = \bar{\omega}_{kJ,i}(\mathbf{x})\bar{m} \times N, \quad (47.2)$$

$$\bar{\omega}_{kJ,i}(\mathbf{x}) = \begin{cases} w_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J)\tilde{p}_k(\mathbf{x}; \mathbf{x}_J) + w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_J)\tilde{p}_{k,i}(\mathbf{x}; \mathbf{x}_J)(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_J, \\ \sum_{I \in \tau_{\mathbf{x}}, I \neq J} w_{,i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) [p_k(\mathbf{x}_J) - p_k(\mathbf{x}_I)], & \mathbf{x} = \mathbf{x}_J, \end{cases} \quad (48.2)$$

$$\mathbf{A}_{,i}^{-1}(\mathbf{x}) = -\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{A}_{,i}(\mathbf{x})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}). \quad (49.2)$$

بنابراین توابع شکل و مشتق آنها و سپس تابع تقریب و مشتق آن در روش کمترین مربعات متحرک درونیاب به شکل بالا محاسبه می‌شوند.

در روش کمترین مربعات متحرک درونیاب، ماتریس $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ یک ماتریس از مرتبه $\bar{m} \times \bar{m}$ می‌باشد که نقش مهمی را ایفا می‌کند. رابطه (۳۳.۲) جواب یکتا دارد اگر رتبه ماتریس $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ برابر $\bar{m}$ باشد.

بنابر این در بکارگیری روش کمترین مربعات متحرک درونیاب، فرض می‌کنیم برای هر $\mathbf{x} \in \Omega$ ماتریس $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ وارون‌پذیر است به بیان دیگر، مجموعه $\{\mathbf{x}_I \in \mathbf{X}, I \in \tau_{\mathbf{x}}\}$ یک مجموعه $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ – یکتا حل‌کننده باشد.

یادآوری می‌کنیم که برای تقریب مقدار تابع u در هر نقطه x با روش‌های کمترین مربعات متحرک و کمترین مربعات متحرک درونیاب، باید یک دستگاه جداگانه حل شود که به نظر پرهزینه است، اما ماتریس $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ از بُعد تعداد اعضای فضای تقریب یعنی $\mathbb{P}_q(\mathbb{R}^d)$ می‌باشد. معمولاً در تقریب با روش‌های کمترین مربعات متحرک و کمترین مربعات متحرک درونیاب، یک پایه از چندجمله‌ایها از درجه پایین استفاده می‌شود. بنابر این بُعد ماتریس $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ کوچک است و تقریب بجای حل یک دستگاه معادلات بزرگ (مانند روش بدون شبکه تابع پایع شعاعی)، چندین دستگاه معادلات با بُعد کوچک حل می‌کند که از لحاظ محاسباتی کاراتر است.

با توجه به معرفی روش‌های کمترین مربعات متحرک و کمترین مربعات متحرک درونیاب در رابطه با تفاوت‌های این دو روش به موارد زیر می‌توان اشاره کرد.

۱. در روش IMLS تابع وزن منفرد است ولی در روش MLS اینطور نیست.

۲. توابع شکل روش IMLS در خاصیت دلتای کرونکر صدق می‌کنند ولی در روش MLS اینطور نیست.

۳. روش IMLS بر خلاف روش MLS یک روش درونیاب می باشد.

مثال ۱.۳.۲. در این مثال تقریب تابع $u(x) = e^x$ روی بازه $[0, 1]$ در نقطه $x = 0.4$ به روش کمترین مربعات متحرک با چندجمله ای پایه درجه دو مدنظر است. مجموعه نقاط پراکنده زیر را روی بازه $[0, 1]$ در نظر می گیریم،

$$X = \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$$

که در آن $h = 0.125$ و $N = 5$ می باشد. با انتخاب $\delta = c \times h$ که در آن $c = 5/1$ در نظر گرفته شده است. چون فاصله همه نقاط پراکنده از نقطه تقریب $x = 0.4$ کمتر از δ در نتیجه همه آنها در برای تقریب موثر هستند. همچنین پایه از درجه دو برای فضای تقریب در حالت یک بعدی به صورت زیر می باشد،

$$\{p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2\},$$

بنابر این،

$$P^T(x) = [1 \quad x \quad x^2],$$

همچنین،

$$P = \begin{bmatrix} P^T(0) \\ P^T(0.25) \\ P^T(0.5) \\ P^T(0.75) \\ P^T(1) \end{bmatrix}_{5 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.25 & 0.0625 \\ 1 & 0.5 & 0.25 \\ 1 & 0.75 & 0.5625 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2840 \\ 1.6487 \\ 2.1170 \\ 2.7183 \end{bmatrix},$$

و

$$W = \begin{bmatrix} w_1(0.4) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_2(0.4) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3(0.4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w_4(0.4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_5(0.4) \end{bmatrix},$$

در نتیجه،

$$W = \begin{bmatrix} 0.6003 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.9433 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9748 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.6932 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.1116 \end{bmatrix},$$

با توجه به $A(x) = P^T W P$ و $B(x) = P^T W$ برای نقطه تقریب مورد نظر داریم،

$$A = \begin{bmatrix} 0/4784 & -1/2505 & -1/4338 \\ -1/2505 & -1/4338 & -1/4685 \\ -1/4338 & -1/4685 & -1/4629 \end{bmatrix},$$

و

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0/8429 & 0/3789 & -0/3708 & -1/3726 \\ 0 & 0/2107 & 0/1894 & -0/2781 & -1/3726 \\ 0 & 0/0527 & 0/0947 & -0/2086 & -1/3726 \end{bmatrix},$$

با استفاده از رابطه $\Phi^T(x) = P^T(x)A^{-1}(x)B(x)$ ، توابع شکل روش کمترین مربعات متحرک در نقطه $x = 0/4$ مشخص می‌شود،

$$\Phi^T = \begin{bmatrix} -0/3520 & 0/9929 & 0/6533 & -0/4774 & 0/1831 \end{bmatrix},$$

بنابر این،

$$u^h(0/4) = \Phi^T(0/4)U = \sum_{j=1}^5 \phi_j(x)u_j = 1/4873,$$

که مقدار دقیق $u(0/4) = 1/4918$ می‌باشد.

مثال ۲.۳.۲. تابع $u(x) = \sin(\pi x)$ را روی بازه $[0, 1]$ در نظر بگیرد. تقریب عددی مقدار u در نقطه $x = 0/4$ با استفاده از روش کمترین مربعات متحرک درونیاب با چندجمله‌ای پایه درجه دو مدنظر است. مجموعه نقاط پراکنده زیر را روی بازه $[0, 1]$ در نظر می‌گیریم،

$$X = \{0, 0/25, 0/5, 0/75, 1\},$$

که در آن $N = 5$ می‌باشد. همچنین ماتریس مقادیر تابع u در نقاط پراکنده برابر است با،

$$U = \begin{bmatrix} 0 \\ 0/7071 \\ 1 \\ 0/7071 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

شعاع دامنه تاثیر، $\rho = 0/5$ انتخاب می‌کنیم. چون فاصله نقطه پراکنده $x_5 = 1$ تا نقطه تقریب بیشتر از ρ است. بنابراین در تقریب $u(0/4)$ به روش کمترین مربعات متحرک درونیاب مؤثر نمی‌باشد. در نتیجه،

$$\tau_x = \{1, 2, 3, 4\},$$

همچنین پایه از درجه دو برای فضای تقریب در حالت یک بعدی ($x = x$) به صورت زیر می باشد،

$$\{p_0(x) = 1, p_1(x) = x, p_2(x) = x^2\},$$

با توجه به ضابطه تابع وزن منفرد و نقطه تقریب داریم،

$$w(x, x_I) = w(\circ/4, x_I) = |\circ/4 - x_I|,$$

پس،

$$W = \begin{bmatrix} 6/25 & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & 44/4444 & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & 100 & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & 8/1633 & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{bmatrix},$$

ابتدا $p_0(x)$ نرمال می کنیم،

$$\tilde{p}_0(x; \bar{x}) = \frac{1}{[\sum_{I \in \tau_x} w(x, x_I)]^{\frac{1}{2}}} = \circ/\circ\circ 63,$$

حال پایه های متعامد را می سازیم،

$$\tilde{p}_i(x; \bar{x}) = p_i(\bar{x}) - \sum_{I \in \tau_x} \frac{w(x, x_I) p_i(x)}{\sum_{J \in \tau_x} w(x, x_J)}, \quad i = 1, 2,$$

به عبارت دیگر،

$$\tilde{p}_1(\circ/4; \bar{x}) = \bar{x} - \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + w_4 x_4 + w_5 x_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5},$$

و

$$\tilde{p}_2(\circ/4; \bar{x}) = \bar{x}^2 - \frac{w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 + w_3 x_3^2 + w_4 x_4^2 + w_5 x_5^2}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5},$$

با توجه به رابطه (۳۷.۲)،

$$F(x) = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1(x; x_1) & \tilde{p}_1(x; x_2) & \tilde{p}_1(x; x_3) & \tilde{p}_1(x; x_4) & \tilde{p}_1(x; x_5) \\ \tilde{p}_2(x; x_1) & \tilde{p}_2(x; x_2) & \tilde{p}_2(x; x_3) & \tilde{p}_2(x; x_4) & \tilde{p}_2(x; x_5) \end{bmatrix},$$

پس،

$$F(\circ/4) = \begin{bmatrix} -\circ/4232 & -\circ/1731 & \circ/\circ 768 & \circ/3268 & \circ/5768 \\ -\circ/2038 & -\circ/1413 & \circ/4062 & \circ/3887 & \circ/7962 \end{bmatrix}.$$

با در نظر گرفتن رابطه (۴۴.۲) ،

$$\mathbf{p}^T(x) = \begin{bmatrix} g_1(x) & g_2(x) \end{bmatrix},$$

و رابطه (۴۵.۲) ،

$$\mathbf{p}^T(x) = \begin{bmatrix} \tilde{p}_1(x; x) & \tilde{p}_2(x; x) \end{bmatrix},$$

در نتیجه،

$$\mathbf{p}^T(\circ/4) = \begin{bmatrix} -\circ/0.232 & -\circ/438 \end{bmatrix},$$

با استفاده از رابطه‌های (۲۲.۲) و (۴۳.۲) ،

$$\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} \circ/0.393 & \circ/2798 & \circ/6295 & \circ/514 & 0 \end{bmatrix},$$

برای تعیین ماتریس $\mathbf{F}_w$ با استفاده از رابطه (۳۸.۲) داریم،

$$\mathbf{F}_w^T = \begin{bmatrix} w(\circ/4, x_1) \tilde{p}_1(\circ/4; x_1) & w(\circ/4, x_1) \tilde{p}_2(\circ/4; x_1) \\ w(\circ/4, x_2) \tilde{p}_1(\circ/4; x_1) & w(\circ/4, x_2) \tilde{p}_2(\circ/4; x_2) \\ w(\circ/4, x_3) \tilde{p}_1(\circ/4; x_3) & (\circ/4, x_3) \tilde{p}_2(\circ/4; x_3) \\ w(\circ/4, x_4) \tilde{p}_1(\circ/4; x_4) & (\circ/4, x_4) \tilde{p}_2(\circ/4; x_4) \\ w(\circ/4, x_5) \tilde{p}_1(\circ/4; x_5) & (\circ/4, x_5) \tilde{p}_2(\circ/4; x_5) \end{bmatrix},$$

در نتیجه،

$$\mathbf{F}_w = \begin{bmatrix} -2/6452 & -7/6992 & 7/6769 & 2/6675 & 0 \\ -1/2735 & -6/2784 & 4/6235 & 2/9285 & 0 \end{bmatrix},$$

بنا به رابطه (۳۶.۲) ،

$$\mathbf{A}(\circ/4) = \begin{bmatrix} 3/9143 & 2/9385 \\ 2/9385 & 2/4107 \end{bmatrix},$$

همچنین ماتریس توابع شکل با توجه به رابطه (۴۲.۲) مشخص می‌شود ،

$$\Phi = \begin{bmatrix} -\circ/0.365 & \circ/3896 & \circ/7304 & -\circ/0.835 & 0 \end{bmatrix},$$

بنابر این،

$$u^h(\circ/4) = \Phi U = \circ/9469$$

که مقدار دقیق $u(\circ/4) = \circ/9511$ می‌باشد.

فصل ۳

حل عددی معادلات انتگرال ولترا-فردهلم به روش IMLS

۱.۳ مقدمه

تئوری و کاربرد معادلات انتگرال موضوع مهمی در ریاضیات کاربردی است. معادلات انتگرال در بسیاری از زمینه‌های مختلف علوم و مهندسی ظاهر می‌شوند. در بسیاری از موارد مانند معادلات دیفرانسیل وابسته به مسایل سلسه عصبی می‌تواند به یک معادله انتگرال ولترا-فردهلم غیرخطی تبدیل شود [۲۱]. حل تحلیلی این نوع معادلات مشکل یا نشدنی است لذا برای حل آنها از روش‌های عددی استفاده می‌شود. تکنیک‌های متفاوتی برای تقریب جواب این نوع معادلات وجود دارند. روش سری تیلور در [۲۲] و روش چندجمله‌ای‌های لاگرانژ در [۲۳] آمده است. در [۲۴] روش تکرار متغیر^۱ برای حل معادلات انتگرال ولترا-فردهلم مرکب ارائه شده است. حل معادلات انتگرال ولترا-فردهلم با روش کمترین مربعات متحرک بر اساس چندجمله‌ای‌های چبیشف در [۲۵] و روش توابع مثلثی در [۲۶] آمده است. سالکائوسکاس و لنکاستر [۱۲] روش کمترین مربعات متحرک درونیاب را معرفی کردند که در این بخش روش IMLS را برای حل معادلات انتگرال ولترا-فردهلم به کار می‌گیریم. همچنین تحلیل خطای روش پیشنهادی را ارائه کرده و سرانجام با محاسبه جواب چندین معادله انتگرال و مقایسه

¹Variational iteration

آنها با جواب دقیق مساله، کارایی آن را نمایش خواهیم داد.

۲.۳ شرح روش پیشنهادی

معادله انتگرال ولترا-فردهلم زیر را در نظر می گیریم،

$$u(x) = \mathcal{F} \left(x, \int_a^b K_1(x, t, u(t)) dt, \int_a^x K_2(x, t, u(t)) dt \right), \quad (1.3)$$

که در آن u تابع مجهول، a و b اعداد حقیقی، K_1 و K_2 توابع کرنل (هسته) نامیده می شوند. توابع $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times C^p \times C^p \rightarrow C^p$ و $K_1, K_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C^p \rightarrow C^p$ توابع معلوم پیوسته ای هستند که در شرایط زیر صدق می کنند،

$$\|\mathcal{F}(x, u_1, u_2) - \mathcal{F}(x, v_1, v_2)\| \leq \beta_1 \|u_1 - v_1\| + \beta_2 \|u_2 - v_2\|, \quad \forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in C^p, \quad (2.3)$$

$$\|K_1(x, u(x), \theta_1) - K_1(x, u(x), \theta_2)\| \leq \gamma_1 \|\theta_1 - \theta_2\|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in C^p, \quad (3.3)$$

$$\|K_2(x, u(x), \theta_1) - K_2(x, u(x), \theta_2)\| \leq \gamma_2 \|\theta_1 - \theta_2\|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in C^p, \quad (4.3)$$

$$\|K_1(x, u(x), \theta)\| \leq c_1 \|\theta\|, \quad \forall \theta \in C^p, \quad (5.3)$$

$$\|K_2(x, u(x), \theta)\| \leq c_2 \|\theta\|, \quad \forall \theta \in C^p, \quad (6.3)$$

که در آنها $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, c_1$ و c_2 اعداد حقیقی ثابتی می باشند. برای اعمال روش IMLS، در ابتدا مجموعه نقاط ارزیابی $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ در بازه $[a, b]$ را طوری انتخاب می کنیم که داشته باشیم،

$$a = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_N = b.$$

البته نقاط می توانند به صورت منظم یا تصادفی انتخاب شوند. سپس $u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i$ را به جای u قرار می دهیم. بنابراین معادله (۱.۳) به معادله زیر تبدیل می شود،

$$u^h(x) = \mathcal{F} \left(x, \int_a^b K_1(x, t, u^h(t)) dt, \int_a^x K_2(x, t, u^h(t)) dt \right), \quad (7.3)$$

یا به طور معادل،

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i = \mathcal{F} \left(x, \int_a^b K_1(x, t, \sum_{i=1}^n \phi_i(t) u_i) dt, \int_a^x K_2(x, t, \sum_{i=1}^n \phi_i(t) u_i) dt \right). \quad (8.3)$$

اکنون باید حدود انتگرال را از بازه $[a, x]$ به بازه ثابت $[a, b]$ تبدیل کنیم که برای انجام آن از تغییر متغیر زیر استفاده می کنیم،

$$\xi(x, \theta) = \frac{x-a}{b-a} \theta + \frac{b-x}{b-a} a. \quad (9.3)$$

بنابر این معادله (۸.۳) به معادله زیر تبدیل می‌شود،

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i = \mathcal{F} \left(x, \int_a^b K_1(x, t, \sum_{i=1}^n \phi_i(t) u_i) dt, \int_a^b K_2^{\mathcal{T}}(x, \xi(x, \theta), \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi(x, \theta)) u_i) d\theta \right), \quad (10.3)$$

یا به طور معادل

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x) u_i = \mathcal{F} \left(x, \int_a^b K_1(x, \theta, \sum_{i=1}^n \phi_i(\theta) u_i) d\theta, \int_a^b K_2^{\mathcal{T}}(x, \xi(x, \theta), \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi(x, \theta)) u_i) d\theta \right), \quad (11.3)$$

که در آن $K_2^{\mathcal{T}}$ به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$K_2^{\mathcal{T}} := \frac{x-a}{b-a} K_2. \quad (12.3)$$

حال با قرار دادن نقاط ارزیابی $x_1, x_2, \dots, x_n$ به جای x در معادله (۱۱.۳)، دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید،

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x_j) u_i = \mathcal{F} \left(x_j, \int_a^b K_1(x_j, \theta, \sum_{i=1}^n \phi_i(\theta) u_i) d\theta, \int_a^b K_2^{\mathcal{T}}(x_j, \xi(x_j, \theta), \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi(x_j, \theta)) u_i) d\theta \right), \quad (13.3)$$

$j = 1, 2, \dots, n.$

با استفاده از یک روش انتگرال گیری عددی m_1 نقطه‌ای با ضرایب $\{\theta_k\}$ و وزنهای $\{\omega_k\}$ در بازه $[a, b]$ از معادله (۱۳.۳) داریم،

$$\sum_{i=1}^n \phi_i(x_j) \hat{u}_i = \mathcal{F} \left(x_j, \sum_{k=1}^{m_1} \omega_k K_1(x_j, \theta_k, \sum_{i=1}^n \phi_i(\theta_k) \hat{u}_i), \sum_{k=1}^{m_1} \omega_k K_2^{\mathcal{T}}(x_j, \xi(x_j, \theta_k), \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi(x_j, \theta_k)) \hat{u}_i) \right) \quad (14.3)$$

$j = 1, 2, \dots, n,$

در اینجا، $\hat{u}_i$ ها تقریبی برای u_i می‌باشند که در نهایت با انتخاب یک روش عددی مناسب برای حل دستگاه (۱۴.۳) به دست می‌آیند. سپس با جایگذاری در رابطه (۱۵.۳) می‌توان مقدار $u(x)$ محاسبه کرد،

$$u(x) \simeq u^h(x) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \hat{u}_i, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (15.3)$$

۳.۳ آنالیز خطا

در این بخش همگرایی روش پیشنهادی را بررسی می‌کنیم. چون برآورد خطای روش پیشنهادی با برآورد خطای روش IMLS مرتبط است لذا در ابتدا مختصری از مطالب مورد نیاز از برآورد

خطای روش IMLS بیان می‌شود که بر پایه مطالب مراجع [۱۲] و [۱۷] برای حالت یک‌بعدی می‌باشد. برای هر $x \in \Omega$ گوی،

$$B_x(y) = \{y \mid |y - x| \leq \mu\rho, y \in \Omega \subset \mathbb{R}\},$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $1 < \mu < 2$ مقداری ثابت می‌باشد. مجموعه H را به‌عنوان مجموعه زیرنویس‌های x به‌صورت $H = \{I \mid x_I \in \mathbf{X}, x_I \in B_x(y)\}$ تعریف می‌کنیم. عدد به اندازه کافی کوچک h را طوری در نظر می‌گیریم که، $\tau_x \subset H$ و $\tau_{x+h} \subset H$ باشند. در این صورت وقتی $x \notin \mathbf{X}$ و $w(x, x_I) \neq 0$ ثابت c_β وجود دارد به‌طوری که، $\left| \frac{d^\beta w(x, x_I)}{dx^\beta} \right| \leq \frac{c_\beta}{\rho_I^\beta}$ باشد. در روش پیشنهادی، توابع پایه‌ای را به‌صورت،

$$p_0(x) = 1, \quad p_1(x) = x, \quad \dots, \quad p_m(x) = x^m,$$

و همچنین مفروضات زیر را در نظر می‌گیریم.

فرض ۱.۳.۳. ثابت‌هایی مانند c_ε و c_I وجود دارند به طوری که به ترتیب در $\rho \leq c_I \rho_I$ و $\rho \leq c_\varepsilon \varepsilon$ صدق می‌کنند. این فرض بیانگر این است که برای $x \in \Omega$ تعداد نقاط پراکنده‌ای که در دامنه‌ی موثر x قرار دارند متناهی است.

فرض ۲.۳.۳. برای هر $x \in \Omega$ مجموعه $\tau_x \cap \tau_{x+h}$ حداقل $m+1$ عضو داشته باشد همچنین $C^d(\Omega)$ بیانگر مجموعه همه توابعی پیوسته و مشتق‌پذیر از مرتبه‌ی d روی Ω باشد که در آن d یک عدد صحیح مثبت می‌باشد. اکنون قضیه زیر را داریم،

قضیه ۱.۳.۳. اگر $u \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$ و فرض‌های (۱.۳.۳) و (۲.۳.۳) برقرار باشند آنگاه برای هر $x \in \Omega$ ثابتی مستقل از ρ مانند C وجود دارد به‌طوری‌که،

$$|u^h(x, y) - u(y)| \leq C \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)} \rho^{m+1}, \quad \forall y \in B_x(y),$$

و در حالت خاص $y = x$ داریم،

$$\|u^h(x) - u(x)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)} \rho^{m+1}. \quad (۱۶.۳)$$

برهان. برای مشاهده اثبات به مرجع [۱۷] مراجعه نمایید. $\square$

همچنین فرض می‌کنیم که انتگرال‌گیری عددی در خاصیت زیر صدق کند که برای مشاهده جزئیات بیشتر به مرجع [۱۸] مراجعه نمایید.

ویژگی QA ۱.۳.۳. عدد به اندازه کافی کوچک و مستقل از i و اندازه شبکه مانند η وجود داشته باشد به‌طوری‌که در رابطه زیر صدق کند،

$$\left| \int_\omega Q \, dx - \int_\omega^* Q \, dx \right| \leq \eta |\omega| \|Q\|_{L^\infty(\omega)}, \quad (۱۷.۳)$$

که در آن نماد $f^*(\cdot)$ بیانگر انتگرال گیری عددی و مقدار ثابت η یک کران بالا برای خطای انتگرال گیری عددی می باشد.

معادله انتگرال ولترا-فردهلم (۱.۳) را با شرایط (۳.۳) - (۲.۳) در نظر می گیریم و همچنین فرض می کنیم که $(b-a)(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2) \in [0, 1)$ برقرار باشد. عملگر انتگرالی $\mathcal{L}(u(x))$ را در فضای باناخ C^p به شکل زیر تعریف می کنیم،

$$\mathcal{L}(u(x)) = \mathcal{F} \left(x, \int_a^b K_1(x, t, u(t)) dt, \int_a^x K_2(x, t, u(t)) dt \right), \quad (18.3)$$

قضیه نقطه ثابت باناخ تضمین می کند که تحت شرایط (۳.۳) - (۲.۳) معادله انتگرال ولترا-فردهلم (۱.۳) دارای جواب یکتا می باشد.

فرض می کنیم که $u(x)$ جواب معادله (۱.۳)، $u^h(x)$ جواب معادله (۱۴.۳) و $u_*^h(x)$ جواب معادله (۱۴.۳) باشد. حال قضیه زیر را برای معادله هایی به فرم کلی (۱.۳) را مطرح و سپس آن را اثبات می کنیم.

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید $u \in C^{m+1}(\bar{\Omega})$ که در آن، Ω زیر مجموعه کراندار از $\mathbb{R}$ باشد و $\mathcal{F}$ ، K_1 و K_2 در شرایط معادله (۱.۳) صدق کنند و همچنین $[a, x] \subseteq \Omega = [a, b]$ و فرض های (۱.۳.۳) و (۲.۳.۳) برقرار و انتگرال عددی در رابطه (۱۷.۳) صدق کند. در این صورت داریم،

$$\|\mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mathcal{C}_1 \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \mathcal{C}_2 \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (19.3)$$

در نتیجه داریم،

$$\|u - u_*^h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mathcal{C}_1 \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \mathcal{C}_2 \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (20.3)$$

که در آن،

$$\mathcal{C}_1 = (b-a)(\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \eta$$

و

$$\mathcal{C}_2 = (b-a)((\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2) \eta + (\beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2)) \mathcal{C} \rho^{m+1}$$

برهان. با توجه به تعریف عملگر $\mathcal{L}$ می توان نوشت،

$$(21.3)$$

$$\|\mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mathcal{L}(u^h(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)}$$

سمت راست رابطه (۲۱.۳) شامل دو بخش می باشد که با به کارگیری قضیه (۱.۳.۳) و شرایط

(۳.۳) - (۲.۳) برای هر بخش داریم،

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} &= \left\| \mathcal{F} \left(x, \int_a^b K_\gamma(x, t, u(t)) dt, \int_a^x K_\gamma(x, t, u(t)) dt \right) \right. \\
 &\quad \left. - \mathcal{F} \left(x, \int_a^b K_\gamma(x, t, u^h(t)) dt, \int_a^x K_\gamma(x, t, u^h(t)) dt \right) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq \beta_\gamma \left\| \int_a^b K_\gamma(x, t, u(t)) dt - \int_a^b K_\gamma(x, t, u^h(t)) dt \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\quad + \beta_\gamma \left\| \int_a^x K_\gamma(x, t, u(t)) dt - \int_a^x K_\gamma(x, t, u^h(t)) dt \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq \beta_\gamma (b-a) \|K_\gamma(x, t, u(t)) - K_\gamma(x, t, u^h(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\quad + \beta_\gamma (b-a) \|K_\gamma(x, t, u(t)) - K_\gamma(x, t, u^h(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq (b-a) \beta_\gamma \gamma_\gamma \|u(t) - u^h(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + (b-a) \beta_\gamma \gamma_\gamma \|u(t) - u^h(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &= (b-a) (\beta_\gamma \gamma_\gamma + \beta_\gamma \gamma_\gamma) \|u(t) - u^h(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq (b-a) (\beta_\gamma \gamma_\gamma + \beta_\gamma \gamma_\gamma) \mathcal{C} \rho^{m+1} \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)},
 \end{aligned}$$

و همچنین داریم،

$$\begin{aligned}
 \|\mathcal{L}(u^h(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} &= \left\| \mathcal{F} \left(x, \int_a^b K_\gamma(x, t, u^h(t)) dt, \int_a^x K_\gamma(x, t, u^h(t)) dt \right) \right. \\
 &\quad \left. - \mathcal{F} \left(x, \int_a^{b^*} K_\gamma(x, t, u^h(t)) dt, \int_a^{x^*} K_\gamma(x, t, u^h(t)) dt \right) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq \beta_\gamma \left\| \int_a^b K_\gamma(x, t, u^h(t)) dt - \int_a^{b^*} K_\gamma(x, t, u^h(t)) dt \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\quad + \beta_\gamma \left\| \int_a^x K_\gamma(x, t, u^h(t)) dt - \int_a^{x^*} K_\gamma(x, t, u^h(t)) dt \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq \beta_\gamma (b-a) \eta \|K_\gamma(x, t, u^h(t))\|_{L^\infty(\Omega)} + \beta_\gamma (b-a) \eta \|K_\gamma(x, t, u^h(t))\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq (b-a) (\beta_\gamma c_\gamma + \beta_\gamma c_\gamma) \eta \|u^h\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &= (b-a) (\beta_\gamma c_\gamma + \beta_\gamma c_\gamma) \eta (\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u - u^h\|_{L^\infty(\Omega)}) \\
 &\leq (b-a) (\beta_\gamma c_\gamma + \beta_\gamma c_\gamma) \eta (\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \mathcal{C} \rho^{m+1} \|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}),
 \end{aligned}$$

با توجه به دو نامساوی قبل و رابطه (۲۱.۳) داریم،

$$\begin{aligned}
 & \|\mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mathcal{L}(u^h(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 & \leq (b-a)(\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2)\mathcal{C}\rho^{m+1}\|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 & + (b-a)(\beta_1c_1 + \beta_2c_2)\eta\left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \mathcal{C}\rho^{m+1}\|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}\right), \\
 & \leq (b-a)(\beta_1c_1 + \beta_2c_2)\eta\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 & + (b-a)\mathcal{C}\rho^{m+1}((\beta_1c_1 + \beta_2c_2)\eta + (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2))\|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 & = \mathcal{C}_1\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \mathcal{C}_2\|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}
 \end{aligned}$$

در نتیجه با بکارگیری خاصیت نقطه ثابت u و u_*^h می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned}
 \|u - u_*^h\|_{L^\infty(\Omega)} &= \|\mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq (b-a)(\beta_1c_1 + \beta_2c_2)\eta\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &+ (b-a)\mathcal{C}\rho^{m+1}((\beta_1c_1 + \beta_2c_2)\eta + (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2))\|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &= \mathcal{C}_1\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \mathcal{C}_2\|u^{(m+1)}\|_{L^\infty(\Omega)}
 \end{aligned}$$

□

۴.۳ نتایج عددی

در این بخش، چندین مثال برای نشان دادن قدرت روش پیشنهاد شده در تقریب، ارائه شده است. برای اندازه‌گیری دقت روش، ماکزیمم خطا به صورت زیر محاسبه شده است،

$$\text{Maximum error} : \|e\|_\infty = \max |u(j) - u_{\text{exact}}(j)|.$$

همچنین برای نشان دادن سرعت همگرایی روش جدید، از فرمول زیر استفاده کرده‌ایم،

$$\text{Ratio} = \frac{\|e^{N-1}\|_\infty}{\|e^N\|_\infty}.$$

در تمام محاسبات عددی این بخش، نقاط پراکنده به طور منظم در نظر گرفته شده و شعاع دامنه مؤثر برای نقطه x_i به صورت زیر تعیین می‌شود که در آن $d_{\max}$ یک عدد مثبت می‌باشد و طوری انتخاب می‌شود که ماتریس $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ معرفی شده در روش IMLS وارون پذیر باشد.

$$\rho_I = d_{\max} |X_I - X_{I-1}|.$$

در تمام مثال‌ها تابع وزن به فرم زیر در نظر گرفته شده است،

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = \begin{cases} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\|^{-\alpha}, & \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I\| \leq \rho_I, \\ 0, & \text{سایر.} \end{cases} \quad (22.3)$$

همچنین در محاسبه انتگرال از روش عددی گاوس-لژاندر ۵ یا ۷ نقطه‌ای استفاده شده و تمام محاسبات عددی با نرم افزار متلب صورت پذیرفته است.

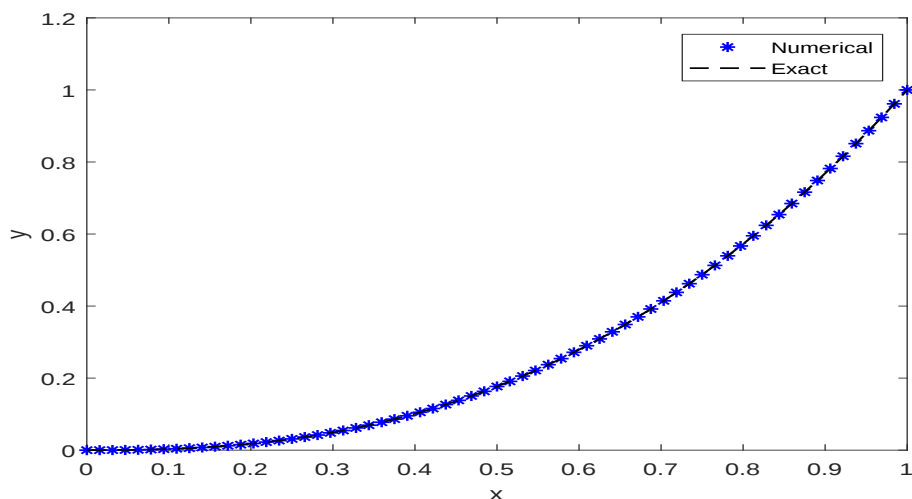
مثال ۱.۴.۳. معادله انتگرال فردهلم زیر را از [۱۹] در نظر می‌گیریم،

$$\lambda u(x) - \int_0^1 u(x) dx = x^2 \sqrt{x} - \frac{2}{35}, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

که برای $\lambda = 5$ جواب تحلیلی این معادله برابر $u(x) = x^2 \sqrt{x}$ می‌باشد. نتایج حاصل از روش و مقایسه پاسخ آن با جواب دقیق را می‌توان برای حالت خطی و درجه دو در جدول ۱.۳ و شکل ۱.۳ مشاهده نمود.

جدول ۱.۳: نتایج عددی برای m و N های متفاوت مثال ۱.۴.۳

$m = 2$			$m = 1$			N
Time	Ratio	$\ e\ _\infty$	Time	Ratio	$\ e\ _\infty$	
۱/۷۰	—	$7/49 \times 10^{-5}$	۱/۶۴	—	$1/10 \times 10^{-3}$	۵
۱/۷۱	۳/۵۷	$2/10 \times 10^{-5}$	۱/۶۶	۱/۵۲	$7/24 \times 10^{-4}$	۹
۱/۷۷	۹/۸۶	$2/13 \times 10^{-6}$	۱/۷۴	۲/۹۸	$2/43 \times 10^{-4}$	۱۷
۱/۹۲	۴/۵۳	$4/70 \times 10^{-7}$	۱/۸۳	۲/۶۸	$9/07 \times 10^{-5}$	۳۳
۲/۱۷	۱/۵۶	$3/02 \times 10^{-7}$	۲/۱۵	۹/۰۷	$1/00 \times 10^{-5}$	۶۵
۲/۸۰	۰/۹۶	$3/14 \times 10^{-7}$	۲/۷۳	۲/۲۴	$4/47 \times 10^{-6}$	۱۲۹



شکل ۱.۳: تقریب عددی از درجه ۲ با ۶۵ نقطه مثال ۱.۴.۳

جدول ۲.۳: نتایج مقایسه تقریب عددی دو روش بدون شبکه ۱.۴.۳

$m = 1(\text{MLS})$	$m = 1(\text{IMLS})$	N
$\ e\ _\infty$	$\ e\ _\infty$	
$1/04 \times 10^{-2}$	$1/10 \times 10^{-3}$	۵
$2/89 \times 10^{-3}$	$7/24 \times 10^{-4}$	۹
$7/61 \times 10^{-4}$	$2/43 \times 10^{-4}$	۱۷
$1/88 \times 10^{-4}$	$9/07 \times 10^{-5}$	۳۳
$5/01 \times 10^{-5}$	$1/00 \times 10^{-5}$	۶۵
$1/29 \times 10^{-5}$	$4/47 \times 10^{-6}$	۱۲۹

جدول مقایسه نتایج حاصل از تقریب عددی جواب این معادله با دو روش کمترین مربعات متحرک و روش کمترین مربعات متحرک درونیاب را می‌توان در جدول ۲.۳ مشاهده نمود.

مثال ۲.۴.۳. به عنوان مثال دوم، معادله انتگرال ولترا-فردهلم زیر را در نظر می‌گیریم،

$$u(x) = e^x - 1 - x + \int_0^x u(t) dt + \int_0^1 xu(t) dt,$$

جواب دقیق این معادله برابر $u(x) = xe^x$ می‌باشد. انتگرال عددی با گaus-لژاندر ۷ نقطه‌ای محاسبه شده است. نتایج حاصل از روش برای m و N متفاوت در جدول ۳.۳ و مقایسه مقدار عددی با مقدار تحلیلی جواب معادله و قدرمطلق خطا برای $m = 2$ و $N = 201$ نقطه را می‌توان در شکل ۲.۳ مشاهده نمود.

مثال ۳.۴.۳. [۲۵] معادله غیرخطی

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{4} \int_0^x (x-t) u^2(t) dt + \int_0^1 (1+t)u(t) dt,$$

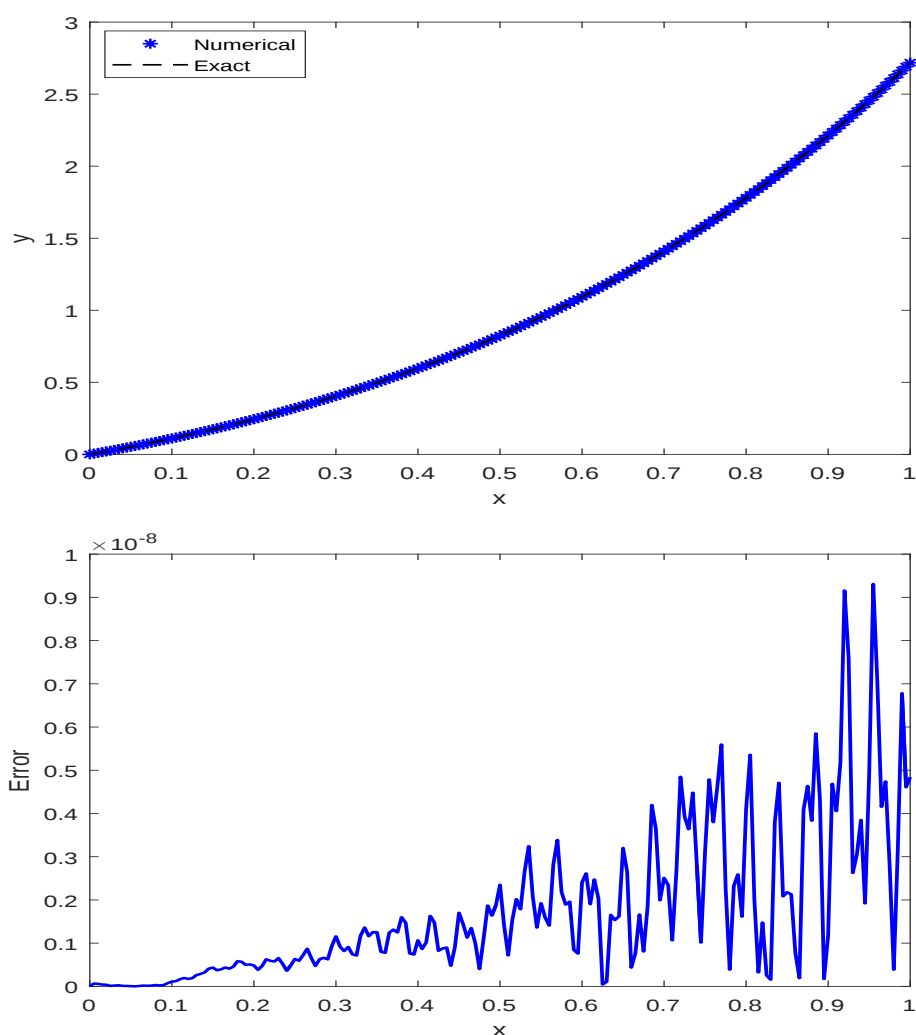
را در نظر بگیرید که در آن

$$f(x) = x^2 \sin x - \frac{1}{240}x^6 - \frac{1}{64} \left((2x^4 - 18x^2 + 15) \cos 2x + (-8x^3 + 24x) \sin 2x - 15 \right) - 6 \cos 1 + \sin 1 + 2,$$

و جواب تحلیلی این معادله برابر $u(x) = x^2 \sin x$ می‌باشد. نتایج حاصل روش عددی و ماکزیمم خطا برای مقادیر متفاوت m و N در جدول ۴.۳ ارائه شده است.

جدول ۳.۳: نتایج عددی برای m و N های متفاوت مثال ۲.۴.۳

$m = 2$			$m = 1$			N
Time	Ratio	$\ e\ _\infty$	Time	Ratio	$\ e\ _\infty$	
۱/۸۵	—	$7/90 \times 10^{-3}$	۱/۸۰	—	$3/53 \times 10^{-1}$	۵
۱/۹۸	۱۵/۱۶	$5/21 \times 10^{-4}$	۱/۸۸	۶/۵۲	$5/41 \times 10^{-2}$	۱۱
۲/۰۷	۵/۱۱	$1/02 \times 10^{-4}$	۲/۰۷	۳/۴۵	$1/57 \times 10^{-2}$	۲۱
۲/۴۱	۲/۳۲	$4/40 \times 10^{-5}$	۲/۲۸	۵/۰۶	$3/10 \times 10^{-3}$	۵۱
۳/۰۵	۱۸۰/۳۳	$2/44 \times 10^{-7}$	۲/۹۴	۵/۵۸	$5/56 \times 10^{-4}$	۱۰۱
۴/۷۱	۲۶/۶۴	$9/16 \times 10^{-9}$	۴/۶۱	۳/۹۷	$1/40 \times 10^{-4}$	۲۰۱



شکل ۲.۳: تقریب عددی از درجه ۲ با ۲۰۱ نقطه و قدرمطلق خطا برای مثال ۲.۴.۳

جدول ۴.۳: نتایج عددی برای m و N های متفاوت مثال ۳.۴.۳

$m = 2$			$m = 1$			N
Time	Ratio	$\ e\ _\infty$	Time	Ratio	$\ e\ _\infty$	
۱/۹۸	—	$1/14 \times 10^{-3}$	۱/۹۶	—	$1/34 \times 10^{-2}$	۵
۲/۰۱	۳/۷۲	$3/76 \times 10^{-4}$	۲/۰۰	۱/۶۳	$8/20 \times 10^{-3}$	۹
۲/۰۵	۳/۱۶	$1/19 \times 10^{-4}$	۲/۰۴	۱/۷۴	$4/70 \times 10^{-3}$	۱۳
۲/۱۷	۲۱/۱۰	$5/64 \times 10^{-6}$	۲/۱۶	۱/۵۵	$3/04 \times 10^{-4}$	۲۳
۲/۴۸	۴/۴۸	$1/26 \times 10^{-6}$	۲/۴۲	۱/۷۸	$1/71 \times 10^{-4}$	۴۵
۲/۷۷	۳/۴۸	$3/62 \times 10^{-7}$	۲/۷۴	۱/۵۳	$1/12 \times 10^{-4}$	۶۵

مثال ۴.۴.۳. معادله زیر را در نظر بگیرید،

$$u(x) = 1 - \int_0^x (x-t) u(t) dt + \int_0^\pi u(t) dt,$$

جواب تحلیلی این معادله برابر $u(x) = \cos x$ می باشد. نتایج عددی در جدول ۵.۳ ارائه شده است.

جدول ۵.۳: نتایج عددی برای m و N های متفاوت مثال ۴.۴.۳

$m = 2$			$m = 1$			N
Time	Ratio	$\ e\ _\infty$	Time	Ratio	$\ e\ _\infty$	
۱/۹۵	—	$5/10 \times 10^{-3}$	۱/۸۶	—	$3/75 \times 10^{-2}$	۷
۱/۹۸	۳/۱۹	$1/60 \times 10^{-3}$	۱/۸۷	۱/۶۲	$2/32 \times 10^{-2}$	۱۱
۲/۰۰	۱۱/۷۶	$1/36 \times 10^{-4}$	۱/۸۸	۴/۳۰	$5/40 \times 10^{-3}$	۲۱
۲/۰۶	۷/۴۷	$1/82 \times 10^{-5}$	۱/۹۷	۳/۸۶	$1/40 \times 10^{-3}$	۴۱
۲/۱۱	۱/۰۴	$1/75 \times 10^{-5}$	۱/۹۹	۱/۴۰	$1/00 \times 10^{-3}$	۵۱
۲/۵۸	۹/۷۲	$1/80 \times 10^{-6}$	۲/۳۶	۲/۷۲	$3/68 \times 10^{-4}$	۱۰۱

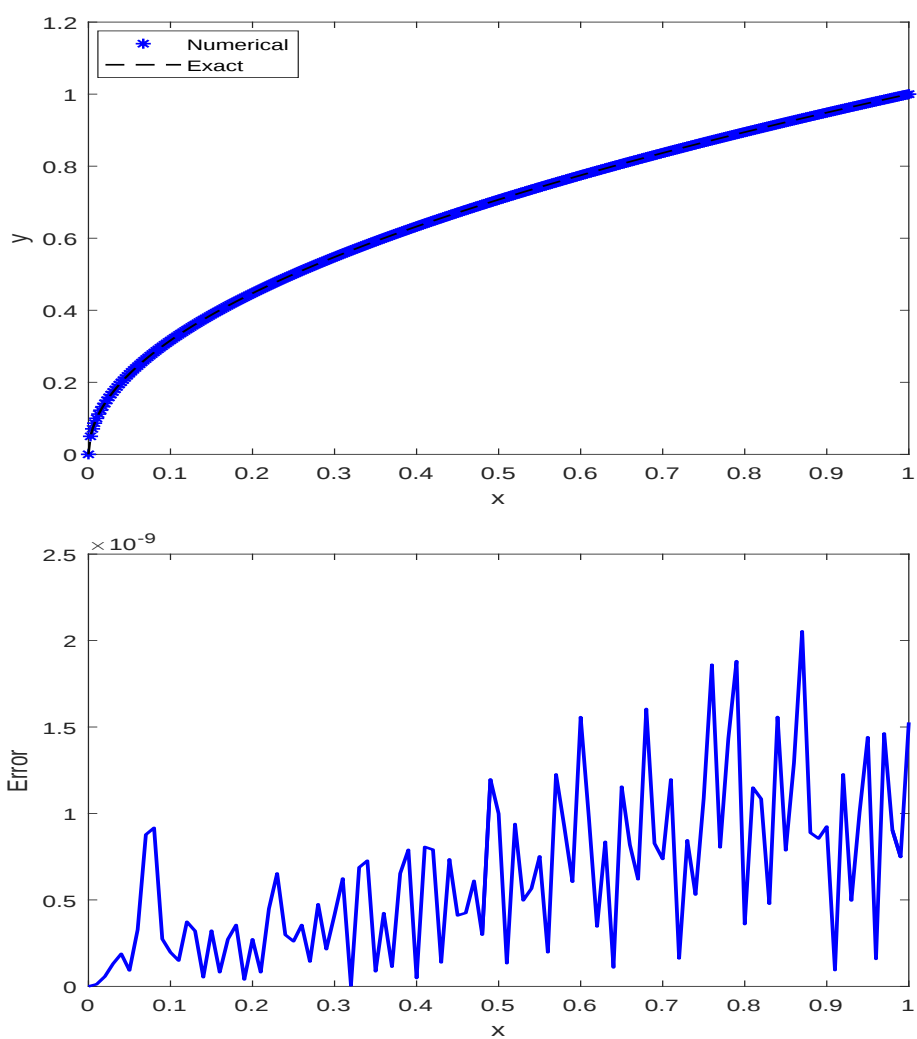
مثال ۵.۴.۳. به عنوان مثال آخر معادله انتگرال ولترا غیرخطی زیر را در نظر می گیریم،

$$u(x) = 2xe^{-x}(x+1) - 2x + \sqrt{x} + \int_0^x 2txe^{-u^2(t)} dt,$$

جواب تحلیلی آن برابر $u(x) = \sqrt{x}$ می باشد. نتایج حاصل از روش برای m و N متفاوت در جدول ۶.۳ و مقایسه مقدار عددی با مقدار تحلیلی جواب معادله و قدرمطلق خطا برای $m = 2$ و $N = 401$ نقطه را می توان در شکل ۳.۳ مشاهده نمود.

جدول ۶.۳: نتایج عددی برای m و N های متفاوت مثال ۵.۴.۳

$m = 2$			$m = 1$			N
Time	Ratio	$\ e\ _{\infty}$	Time	Ratio	$\ e\ _{\infty}$	
۲/۰۶	—	$7/90 \times 10^{-4}$	۲/۰۱	—	$4/90 \times 10^{-3}$	۵
۲/۰۸	۲/۲۶	$3/50 \times 10^{-4}$	۲/۰۲	۲/۷۲	$1/80 \times 10^{-3}$	۹
۲/۲۷	۱۵/۰۲	$2/33 \times 10^{-5}$	۲/۱۹	۸/۸۷	$2/03 \times 10^{-4}$	۲۱
۲/۶۵	۶/۲۸	$3/71 \times 10^{-6}$	۲/۵۵	۶/۰۱	$3/38 \times 10^{-5}$	۵۱
۳/۳۲	۱۴/۹۶	$2/48 \times 10^{-7}$	۳/۴۵	۳/۳۱	$1/02 \times 10^{-5}$	۱۰۱
۵/۵۸	۲/۷۳	$9/07 \times 10^{-8}$	۵/۷۳	۴/۰۲	$2/54 \times 10^{-6}$	۲۰۱
۳۰/۳۶	۳۷/۴۸	$2/42 \times 10^{-9}$	۲۹/۵۴	۴/۱۴	$6/14 \times 10^{-7}$	۴۰۱



شکل ۳.۳: تقریب عددی از درجه ۲ با ۴۰۱ نقطه و قدم مطلق خطا برای مثال ۵.۴.۳

فصل ۴

کاربرد روش‌های بدون شبکه در حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل

۱.۴ مقدمه

امروزه پذیرش و اجرای موفق ایده‌ها به گونه‌ای است که چشم انداز آن به سادگی قابل دسترسی نیست. بنابر این نیاز به مدل‌سازی ریاضی موضوع مورد نظر، امری ضروری می‌باشد. می‌دانیم که حل معادلات حاصل از مدل‌سازی ریاضی بسیاری از مسایل در زمینه‌های مختلف علوم به حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل منجر می‌شود [۳۳، ۳۴، ۳۵]. بنابراین حل عددی معادلات انتگرو-دیفرانسیل زمینه مناسبی برای تحقیق و ارائه روش عددی جدید برای علاقمندان می‌باشد. در [۳۶، ۳۷، ۳۸] چندجمله‌ای‌های تیلور برای حل گونه‌ای از معادلات انتگرو-دیفرانسیل بیان شده است. همچنین روش تجزیه‌ی آدیان در [۳۹]، روش گالرکین گسسته در [۴۰]، در [۴۱] روش IRBF و روش کمترین مربعات متحرک برای حل عددی معادله انتگرو-دیفرانسیل فردهلم یک‌بعدی در [۴۲] ارائه شده است. یک رده از معادلات انتگرو-دیفرانسیل دوبعدی که می‌توان مطرح کرد به شکل زیر می‌باشد [۴۳].

معادله انتگرو-دیفرانسیل ولترا غیرخطی دوبعدی از مرتبه $(m+n)$ به شکل،

$$f\left(x, y, u, u_x, u_y, \dots, \frac{\partial^{m+n} u(x, y)}{\partial x^m \partial y^n}\right) + \lambda \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y k(x, y, t, s, u(t, s)) dt ds = 0, \quad (1.4)$$

که در آن f و k توابعی معلوم و $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی مجهول در دامنه

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y\}$$

می‌باشد. لذا شکل کلی از معادله انتگرو-دیفرانسیل ولترا غیرخطی دوبعدی

$$g(x, y) = \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^n f_{rs}(x, y) u^{j_{rs}}(x, y) \frac{\partial^{r+s} u(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} + \lambda \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y k(x, y) v(t, s) u^p(t, s) dt ds, \quad p, j_{rs} \in \mathbb{Z}^+ \quad (2.4)$$

را در نظر بگیرید که در آن $r = 0, 1, \dots, m; s = 0, 1, \dots, n$ و $u(x, y)$ تابع مجهول و توابع $g(x, y), f_{rs}(x, y), k(x, y)$ و $v(x, y)$ توابعی معلوم و تحلیلی‌اند. این معادله دارای شرایط اولیه و مرزی مناسبی به شکل،

$$\text{شرایط اولیه} : \begin{cases} \frac{\partial^i u(x, y)}{\partial x^i} \big|_{(x, 0)} = \phi_i(x) \\ \frac{\partial^j u(x, y)}{\partial y^j} \big|_{(0, y)} = \psi_j(y) \end{cases} \quad (3.4)$$

$$\text{شرط مرزی} : u(x, y) \big|_{\partial\Omega} = \alpha \quad (4.4)$$

می‌باشد به طوریکه ϕ_i, ψ_j و α توابع تحلیلی معلومی هستند. در ادامه یک روش بدون شبکه برای حل رده‌ای از معادلات انتگرو-دیفرانسیل ارائه می‌دهیم و آنالیز خطای روش را بیان می‌کنیم. در پایان به خاطر برتری روش معرفی شده، آن را برای چند مثال در حالت دوبعدی نیز به کار می‌بریم.

۲.۴ حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم به روش MLS

در این بخش روش کمترین مربعات متحرک را برای حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم به شکل کلی زیر را ارائه می‌دهیم،

$$\begin{cases} u'(x) = \mathcal{F} \left(x, u(x), \int_a^x K_1(x, t, u(t)) dt, \int_a^b K_2(x, t, u(t)) dt \right), \\ u(a) = u_0, \end{cases} \quad (5.4)$$

که در آن u تابع مجهول، a, b اعداد حقیقی بوده و توابع K_1 و K_2 هسته نامیده می‌شوند. همچنین $\mathcal{F} : \mathbb{R} \times C^p \times C^p \times C^p \rightarrow C^p$ و $K_1, K_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C^p \rightarrow C^p$ نگاشت‌های پیوسته داده شده‌ای هستند که در شرایط زیر صدق می‌کنند،

$$\|\mathcal{F}(x, u_1, u_2, u_3) - \mathcal{F}(x, v_1, v_2, v_3)\| \leq \beta_1 \|u_1 - v_1\| + \beta_2 \|u_2 - v_2\| + \beta_3 \|u_3 - v_3\|, \quad (6.4)$$

$$\forall u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 \in C^p,$$

$$\|K_1(x, u(x), \theta_1) - K_1(x, u(x), \theta_2)\| \leq \gamma_1 \|\theta_1 - \theta_2\|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in C^p, \quad (7.4)$$

$$\|K_2(x, u(x), \theta_1) - K_2(x, u(x), \theta_2)\| \leq \gamma_2 \|\theta_1 - \theta_2\|, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in C^p, \quad (8.4)$$

$$\|K_1(x, u(x), \theta)\| \leq c_1 \|\theta\|, \quad \forall \theta \in C^p, \quad (9.4)$$

$$\|K_2(x, u(x), \theta)\| \leq c_2 \|\theta\|, \quad \forall \theta \in C^p, \quad (10.4)$$

که $c_1, \gamma_2, \gamma_1, \beta_3, \beta_2, \beta_1$ و c_2 مقادیر حقیقی ثابتی هستند. حال برای به کارگیری روش MLS، n نقطه گره‌ای از بازه $[a, b]$ مانند،

$$a = x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n = b$$

در نظر می‌گیریم، این نقاط می‌توانند به‌طور منظم یا تصادفی در دامنه مساله، پراکنده شوند. با توجه به معرفی روش MLS در فصل دو، می‌توان به جای u و u' به ترتیب از تقریب‌های

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) u_j, \quad u'^h(x) = \sum_{j=1}^n \phi_{j,x}(x) u_j \quad (11.4)$$

در رابطه (۵.۴) استفاده کرد یعنی،

$$u'^h(x) = \mathcal{F} \left(x, u^h(x), \int_a^x K_1(x, t, u^h(t)) dt, \int_a^b K_2(x, t, u^h(t)) dt \right), \quad (12.4)$$

با جایگذاری، u^h و u'^h از (۱۱.۴) در (۱۲.۴) داریم،

$$\sum_{j=1}^n \phi_{j,x}(x) u_j = \mathcal{F} \left(x, \sum_{j=1}^n \phi_j(x) u_j, \int_a^x K_1(x, t, \sum_{j=1}^n \phi_j(t) u_j) dt, \int_a^b K_2(x, t, \sum_{j=1}^n \phi_j(t) u_j) dt \right), \quad (13.4)$$

حال باید حدود انتگرال از بازه $[a, x]$ به بازه $[a, b]$ تبدیل شود. برای این منظور از تغییر متغیر مناسب زیر استفاده می‌کنیم،

$$\xi(x, \theta) = \frac{x-a}{b-a} \theta + \frac{b-x}{b-a} a. \quad (14.4)$$

با اعمال این تبدیل، رابطه (۱۳.۴) به شکل زیر تبدیل می‌شود،

$$\sum_{j=1}^n \phi_{j,x}(x) u_j = \mathcal{F} \left(x, \sum_{j=1}^n \phi_j(x) u_j, \int_a^b K_1^T(x, \xi(x, \theta), \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi(x, \theta)) u_i) d\theta, \int_a^b K_2(x, \theta, \sum_{j=1}^n \phi_j(\theta) u_j) d\theta \right), \quad (15.4)$$

که در آن،

$$K_1^T = \frac{x-a}{b-a} K_1. \quad (16.4)$$

حال با قرار دادن نقاط ارزیابی $x_1, x_2, \dots, x_n$ به جای x در معادله (۱۵.۴) دستگاه معادلات زیر به دست می‌آید،

$$\sum_{j=1}^n \phi_{j,x}(x_i) u_j = \mathcal{F} \left(x_i, \sum_{j=1}^n \phi_j(x_i) u_j, \int_a^b K_{\gamma}^T(x_i, \xi(x_i, \theta), \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi(x_i, \theta)) u_i) d\theta, \right. \\ \left. \int_a^b K_{\gamma}(x_i, \theta, \sum_{j=1}^n \phi_j(\theta) u_j) d\theta \right), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (17.4)$$

با یک روش انتگرال‌گیری عددی، انتگرال‌های رابطه (۱۷.۴) را می‌توان تقریب کرد. فرض کنیم $\hat{u}_i$ تقریبی برای u_i به واسطه به کارگیری، روش انتگرال‌گیری عددی باشد. در این صورت با استفاده از یک روش انتگرال‌گیری m_1 نقطه‌ای با ضرایب $\{\theta_k\}$ و وزن‌های $\{\omega_k\}$ در بازه $[a, b]$ ، از (۱۷.۴) رابطه (۱۸.۴) نتیجه می‌شود،

$$\sum_{j=1}^n \phi_{j,x}(x_i) \hat{u}_j = \mathcal{F} \left(x_i, \sum_{j=1}^n \phi_j(x_i) \hat{u}_j, \sum_{k=1}^{m_1} \omega_k K_{\gamma}^T(x_i, \xi(x_i, \theta_k), \sum_{i=1}^n \phi_i(\xi(x_i, \theta_k)) \hat{u}_i), \right. \\ \left. \sum_{k=1}^{m_1} \omega_k K_{\gamma}(x_i, \theta_k, \sum_{j=1}^n \phi_j(\theta_k) \hat{u}_j) \right), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18.4)$$

اکنون شکل ماتریسی مرتبط با شرط اولیه $u(a) = u_0$ را نوشته و به جای یک سطر از ماتریس متناظر دستگاه (۱۸.۴) قرار می‌دهیم. با به کارگیری یک روش عددی برای حل دستگاه غیرخطی (۱۸.۴) مقادیر $\hat{u}_j$ مشخص می‌گردند. سپس با جایگذاری این مقادیر در (۱۹.۴)، می‌توان مقدار $u(x)$ را محاسبه کرد.

$$u(x) \simeq u^h(x) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x) \hat{u}_j, \quad \forall x \in [a, b]. \quad (19.4)$$

۳.۴ آنالیز خطا

در این بخش به آنالیز خطای روش می‌پردازیم. لذا برای بررسی آن، ابتدا برآورد خطای روش MLS را بیان می‌کنیم. لوین^۱ در [۲۷]، خطای روش را با یک تابع وزن خاص برای یک تابع تحلیلی در بعد N و در نرم یکنواخت بررسی نموده است. در [۲۸] آرمنتانو^۲ و دورن^۳ تقریب خطا در نرم بینهایت را برای تابع و مشتقاتش در حالت یک‌بعدی به دست آورده‌اند. در [۲۹] آرمنتانو تقریب خطا در نرم بینهایت و نرم دو را برای حالت یک‌بعدی و ابعاد بالاتر به دست آورده و در [۳۰] زوپا^۴ تقریب خطا برای تقریب تابع و مشتقات اول و دوم آن را در نرم بینهایت به دست آورده است. که مطالب ارائه شده در این بخش بر پایه مطالب مراجع [۱۹] و [۳۰] می‌باشد.

همچنین فرض کنید Ω یک مجموعه باز کراندار در $\mathbb{R}^d$ و $\mathcal{Q}_N$ یک مجموعه دلخواه از N نقطه $\mathbf{x}_j \in \bar{\Omega}$ باشد که به عنوان گره به آنها اشاره خواهیم کرد،

$$\mathcal{Q}_N = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N\}, \quad \mathbf{x}_j \in \bar{\Omega}.$$

¹Levin

²Armentano

³Durn

⁴Zuppa

فرض کنید $\mathcal{I}_N := \{\Lambda_j\}_{j=1}^N$ یک پوشش باز متناهی از $\bar{\Omega}$ شامل N ابر Λ_j است به طوریکه، Λ_j و $\mathbf{x}_j \in \Lambda_j$ به نوعی پوششی به مرکز $\mathbf{x}_j$ است و

$$\bar{\Omega} \subset \bigcup_{j=1}^N \Lambda_j$$

شعاع h_j از Λ_j را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$h_j = \max_{\mathbf{x} \in \partial \Lambda_j} \{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|\}.$$

تابع u را در $\bar{\Omega}$ از رده $C^{q,1}$ می نامیم اگر و فقط اگر u از رده C^q در $\bar{\Omega}$ بوده و مشتقات جزئی $D^k u$ آن از مرتبه q ($|k| = q$) پیوسته لیب شیتز^۱ در $\bar{\Omega}$ باشد. شبه-نرم $|\cdot|_{q,1}$ به صورت زیر تعریف می شود [۳۰]،

$$|u|_{q,1} = \sup \left\{ \frac{|D^k u(\mathbf{x}) - D^k u(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} : \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \bar{\Omega}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}, |k| = q \right\}.$$

برای این که تقریب MLS به خوبی تعریف شود، نیاز داریم که مسأله کمینه سازی به ازای هر $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ دارای جوابی یکتا باشد و این معادل است با این که ماتریس $A(\mathbf{x})$ غیرتکین باشد. در [۳۰] برآورد خطا با ویژگی زیر برای دستگاه نقاط و توابع وزن $[Q_N, W_N]$ به دست آمده است.

ویژگی ۱.۳.۴. به ازای هر $\mathbf{x}$ متعلق به $\bar{\Omega}$ ، ماتریس $A(\mathbf{x})$ تعریف شده در تقریب MLS غیرتکین است.

قضیه ۱.۳.۴. ([۳۱، ۳۰]) شرط لازم برای این که به ازای هر $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ ماتریس $A(\mathbf{x})$ غیرتکین باشد این است که،

$$n = \text{card}(ST(\mathbf{x})) \geq \text{card}(\mathcal{P}_q) = m + 1,$$

که در آن مجموعه $ST(\mathbf{x})$ به صورت زیر تعریف می شود،

$$ST(\mathbf{x}) := \{j : w_j(\mathbf{x}) \neq 0\},$$

به عنوان مثال برای $\mathbf{c} \in \bar{\Omega}$ ، اگر $ST(\mathbf{c}) = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$ ، آنگاه اندازه مش $ST(\mathbf{c})$ به صورت زیر تعریف می شود،

$$h(ST(\mathbf{c})) := \max\{h_{j_1}, h_{j_2}, \dots, h_{j_k}\}$$

حال مفروضات زیر را در مورد پارامترها در نظر می گیریم،

فرض ۱.۳.۴. یک کران بالا از هم پوشانی ابرها،

$$\mathcal{M} = \sup_{\mathbf{c} \in \bar{\Omega}} \{\text{card}(ST(\mathbf{c}))\}.$$

فرض ۲.۳.۴. کرانه های بالای عدد شرط،

$$\mathcal{CB}_q = \sup_{\mathbf{c} \in \bar{\Omega}} \{\mathcal{CN}_q(ST(\mathbf{c}))\}, \quad q = 1, 2,$$

که اعداد $\mathcal{CN}_q(ST(\mathbf{c}))$ مقادیری برای نمایش کیفیت $ST(\mathbf{c})$ هستند که در قضیه ۷ در [۳۰] تعریف شده و قابل محاسبه هستند.

¹Lipschitz

فرض ۳.۳.۴. یک کران بالا از اندازه شبکه ستاره‌ها،

$$R = \sup_{c \in \bar{\Omega}} \{h(ST(c))\}.$$

فرض ۴.۳.۴. یک کران یکنواخت از مشتقات $\{w_j\}$ ، به‌طوری‌که،

$$\|D^\mu w_j\| \leq \frac{G_q}{R^{|\mu|}}, \quad 1 \leq |\mu| \leq q,$$

که در آن ثابت $G_q > 0$ ، $(q = 1, 2)$ می‌باشد.

فرض ۵.۳.۴. عددی چون $\lambda \geq 0$ وجود دارد که هر دو نقطه $x, y \in \bar{\Omega}$ را با یک منحنی قابل انعطاف مانند $\Gamma \in \bar{\Omega}$ به هم مرتبط می‌سازد به‌طوری‌که،

$$|\Gamma| \leq \lambda \|x - y\|.$$

همه این شرایط در [۳۰] توسط زوپا تایید شده‌است. اکنون قضیه (۲.۳.۴) را داریم،

قضیه ۲.۳.۴. ثابت‌های C_q ، $(q = 1, 2)$ مانند،

$$C_1 = C_1(\gamma, d, \mathcal{M}, G_1, CB_1),$$

$$C_2 = C_2(\gamma, d, \mathcal{M}, G_2, CB_1, CB_2),$$

وجود دارند به‌طوری‌که برای هر $u \in C^{q,1}(\bar{\Omega})$ داریم،

$$\|D^\mu u - D^\mu u^h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_q R^{q+1-|\mu|} |u|_{q,1}, \quad 0 \leq |\mu| \leq q. \quad (20.4)$$

همان‌طور که در [۳۰] مشخص شده، عدد $CN_q(ST(c))$ می‌تواند در نزدیکی نقاط مرزی بسیار بزرگ شود. این مشکل در تقریب خطای کلی با، $q = 2$ تقریباً رفع خواهد شد. همچنین برای ادامه فرض می‌کنیم که انتگرال‌گیری عددی در ویژگی زیر صدق کند [۳۲]،

$$\left| \int_{\omega} Q \, dx - \int_{\omega}^* Q \, dx \right| \leq \eta |\omega| \|Q\|_{L^\infty(\omega)}, \quad (21.4)$$

معادله انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم (۵.۴) را با شرایط (۶.۴)–(۲.۴) را در نظر می‌گیریم. عملگر انتگرالی $\mathcal{L}(u(x))$ را در فضای باناخ C^p برای $[a, x] \subseteq [a, b]$ ، به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم،

$$\mathcal{L}(u(x)) = u(a) + \int_a^x \mathcal{F} \left(t, u(t), \int_a^t K_1(t, s, u(s)) \, ds, \int_a^b K_2(t, s, u(s)) \, ds \right) dt, \quad (22.4)$$

قضیه نقطه ثابت باناخ تضمین می‌کند که تحت شرایط (۶.۴)–(۲.۴) معادله انتگرو-دیفرانسیل (۵.۴) دارای جواب یکتا می‌باشد.

فرض می‌کنیم که $u(x)$ جواب معادله (۵.۴)، $u^h(x)$ جواب معادله (۱۲.۴) و $u_*^h(x)$ جواب معادله (۱۸.۴) باشد. حال قضیه زیر را برای معادله‌هایی به‌شکل کلی (۵.۴) مطرح و سپس آن را اثبات می‌کنیم.

قضیه ۳.۳.۴. فرض کنید $u \in C^{q,1}(\bar{\Omega})$ که در آن Ω زیر مجموعه کراندار از $\mathbb{R}$ باشد و $\mathcal{F}$ ، K_1 و K_2 در شرایط معادله (۵.۴) صدق کنند و همچنین $[a, x] \subseteq \Omega = [a, b]$ و انتگرال عددی در رابطه (۲۱.۴) صدق کند. در اینصورت داریم،

$$\|\mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mathcal{M}_1 |u|_{q,1} + \mathcal{M}_2 \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (23.4)$$

در نتیجه داریم،

$$\|u - u_*^h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \mathcal{M}_1 |u|_{q,1} + \mathcal{M}_2 \|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad (24.4)$$

که در آن،

$$\mathcal{M}_1 = \left((b-a)\beta_1 + (b-a)^2(\gamma_1\beta_2 + \gamma_2\beta_3) + (b-a)^2\eta(c_1\beta_2 + c_2\beta_3) \right) C_q R^{q+1},$$

و

$$\mathcal{M}_2 = (b-a)^2\eta(c_1\beta_2 + c_2\beta_3),$$

برهان. با توجه به تعریف عملگر $\mathcal{L}$ می‌توان نوشت،

$$\|\mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|\mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\mathcal{L}(u^h(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} \quad (25.4)$$

سمت راست رابطه (25.4) شامل دو بخش است که با به کارگیری قضیه (2.3.4) و شرایط (8.4) - (2.4) برای هر بخش داریم،

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u^h(x))\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &= \left\| \int_a^x \mathcal{F} \left(t, u(t), \int_a^t K_1(t, s, u(s)) ds, \int_a^b K_2(t, s, u(s)) ds \right) dt \right. \\ & \quad \left. - \int_a^x \mathcal{F} \left(t, u^h(t), \int_a^t K_1(t, s, u^h(s)) ds, \int_a^b K_2(t, s, u^h(s)) ds \right) dt \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq (b-a) \left\| \mathcal{F} \left(t, u(t), \int_a^t K_1(t, s, u(s)) ds, \int_a^b K_2(t, s, u(s)) ds \right) \right. \\ & \quad \left. - \mathcal{F} \left(t, u^h(t), \int_a^t K_1(t, s, u^h(s)) ds, \int_a^b K_2(t, s, u^h(s)) ds \right) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq (b-a) \left(\beta_1 \|u(t) - u^h(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \beta_2 \left\| \int_a^t K_1(t, s, u(s)) ds - \int_a^t K_1(t, s, u^h(s)) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \beta_3 \left\| \int_a^b K_2(t, s, u(s)) ds - \int_a^b K_2(t, s, u^h(s)) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\ &\leq (b-a) \left(\beta_1 \|u(t) - u^h(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \beta_2 (b-a) \|K_1(t, s, u(s)) - K_1(t, s, u^h(s))\|_{L^\infty(\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \beta_3 (b-a) \|K_2(t, s, u(s)) - K_2(t, s, u^h(s))\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\ &\leq (b-a) (\beta_1 \|u(t) - u^h(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \beta_2 (b-a)\gamma_1 \|u(t) - u^h(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \beta_3 (b-a)\gamma_2 \|u(t) - u^h(t)\|_{L^\infty(\Omega)}) \\ &= (b-a) (\beta_1 + \beta_2\gamma_1(b-a) + \beta_3\gamma_2(b-a)) \|u(t) - u^h(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \\ &\leq (b-a) (\beta_1 + \beta_2\gamma_1(b-a) + \beta_3\gamma_2(b-a)) C_q R^{q+1} |u|_{q,1}, \end{aligned}$$

و همچنین داریم،

$$\begin{aligned}
 & \| \mathcal{L}(u^h(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x)) \|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &= \left\| \int_a^x \mathcal{F} \left(t, u^h(t), \int_a^t K_1(t, s, u^h(s)) ds, \int_a^b K_2(t, s, u^h(s)) ds \right) dt \right. \\
 &\quad \left. - \int_a^x \mathcal{F} \left(t, u^h(t), \int_a^{t*} K_1(t, s, u^h(s)) ds, \int_a^{b*} K_2(t, s, u^h(s)) ds \right) dt \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq (b-a) \left\| \mathcal{F} \left(t, u^h(t), \int_a^t K_1(t, s, u^h(s)) ds, \int_a^b K_2(t, s, u^h(s)) ds \right) \right. \\
 &\quad \left. - \mathcal{F} \left(t, u^h(t), \int_a^{t*} K_1(t, s, u^h(s)) ds, \int_a^{b*} K_2(t, s, u^h(s)) ds \right) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq (b-a) \left(\beta_2 \left\| \int_a^t K_1(t, s, u^h(s)) ds - \int_a^{t*} K_1(t, s, u^h(s)) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right. \\
 &\quad \left. + \beta_2 \left\| \int_a^b K_2(t, s, u^h(s)) ds - \int_a^{b*} K_2(t, s, u^h(s)) ds \right\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\
 &\leq (b-a) \left(\beta_2(b-a)\eta \|K_1(t, s, u^h(s))\|_{L^\infty(\Omega)} + \beta_2(b-a)\eta \|K_2(t, s, u^h(s))\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\
 &\leq (b-a) \left(c_1\beta_2(b-a)\eta \|u^h\|_{L^\infty(\Omega)} + c_2\beta_2(b-a)\eta \|u^h\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\
 &\leq (b-a)^2 \eta (c_1\beta_2 + c_2\beta_2) \|u^h\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq (b-a)^2 \eta (c_1\beta_2 + c_2\beta_2) \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u - u^h\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \\
 &\leq (b-a)^2 \eta (c_1\beta_2 + c_2\beta_2) \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + C_q R^{q+1} |u|_{q,1} \right)
 \end{aligned}$$

با توجه به دو نامساوی قبل و رابطه (۲۵.۴) داریم،

$$\begin{aligned}
 & \| \mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x)) \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \| \mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u^h(x)) \|_{L^\infty(\Omega)} + \| \mathcal{L}(u^h(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x)) \|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq (b-a) (\beta_1 + \beta_2\gamma_1(b-a) + \beta_2\gamma_2(b-a)) C_q R^{q+1} |u|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\quad + (b-a)^2 \eta (c_1\beta_2 + c_2\beta_2) \left(\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + C_q R^{q+1} |u|_{q,1} \right) \\
 &= \left((b-a)\beta_1 + (\beta_2\gamma_1 + \beta_2\gamma_2)(b-a)^2 + (b-a)^2 \eta (c_1\beta_2 + c_2\beta_2) \right) C_q R^{q+1} |u|_{q,1} \\
 &\quad + (b-a)^2 \eta (c_1\beta_2 + c_2\beta_2) \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &= \mathcal{M}_1 |u|_{q,1} + \mathcal{M}_2 \|u\|_{L^\infty(\Omega)}
 \end{aligned}$$

در نتیجه با به کارگیری خاصیت نقطه ثابت u و u_*^h می‌توان نوشت،

$$\begin{aligned}
 & \| u - u_*^h \|_{L^\infty(\Omega)} = \| \mathcal{L}(u(x)) - \mathcal{L}(u_*^h(x)) \|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &\leq \left((b-a)\beta_1 + (\beta_2\gamma_1 + \beta_2\gamma_2)(b-a)^2 + (b-a)^2 \eta (c_1\beta_2 + c_2\beta_2) \right) C_q R^{q+1} |u|_{q,1} \\
 &\quad + (b-a)^2 \eta (c_1\beta_2 + c_2\beta_2) \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \\
 &= \mathcal{M}_1 |u|_{q,1} + \mathcal{M}_2 \|u\|_{L^\infty(\Omega)}
 \end{aligned}$$

□

۴.۴ نتایج عددی

در این بخش، برای نشان دادن کارایی روش معرفی شده، چند معادله انتگرو-دیفرانسیل را با روش بیان شده حل می‌نماییم.

مثال ۱.۴.۴. معادله انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} u'(x) = 2e^x - 2 + \int_0^x u(t) dt + \int_0^1 u(t) dt, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

که جواب تحلیلی این معادله برابر $u(x) = xe^x$ می‌باشد. در ابتدا مراحل روش پیشنهادی را برای تقریب جواب این معادله در نقطه تست $x = 0.35$ با سه نقطه پراکنده در بازه $[0, 1]$ با چندجمله‌ای پایه‌ای از درجه یک و انتخاب انتگرال‌گیری عددی گاوس-لژاندر سه نقطه‌ای نشان می‌دهیم. سپس نتایج حاصل از به‌کارگیری روش عددی پیشنهادی را با تعداد نقاط پراکنده متفاوت در جدول ۱.۴ ارائه می‌دهیم. همچنین قدرمطلق خطا برای $N = 51$ و $m = 3$ را می‌توان در شکل ۱.۴ مشاهده نمود.

مجموعه نقاط پراکنده زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\mathbf{X} = \{0, 0.5, 1\} := \{x_1, x_2, x_3\},$$

با در نظر گرفتن،

$$u^h(x) = \sum_{j=1}^3 \phi_j(x) u_j, \quad u'^h(x) = \sum_{j=1}^3 \phi_{j,x}(x) u_j,$$

حال با جایگزینی در معادله انتگرو-دیفرانسیل داریم،

$$\sum_{j=1}^3 \left(\phi_{j,x}(x) - \int_0^x \phi_j(t) dt - \int_0^1 \phi_j(t) dt \right) u_j = 2e^x - 2,$$

با تغییر متغیر $t = xs$ که $t \in [0, x]$ و $s \in [0, 1]$ انتگرال ولترا را به فردهولم تبدیل می‌کنیم و با ادغام انتگرال‌ها، داریم،

$$\sum_{j=1}^3 \left(\phi_{j,x}(x) - \int_0^1 (x\phi_j(xs) + \phi_j(s)) ds \right) u_j = 2e^x - 2$$

چون نقاط پراکنده در تساوی بالا صدق کنند بنابر این،

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 \left(\phi_{j,x}(x_i) - \int_0^1 (x_i\phi_j(x_i s) + \phi_j(s)) ds \right) u_j = 2e^{x_i} - 2, \\ i = 1, 2, 3, \end{cases}$$

حال با به‌کارگیری انتگرال‌گیری عددی گاوس-لژاندر سه نقطه‌ای با نقاط گره و وزن‌های،

$$[\theta_k] := \begin{bmatrix} -7/7460 \times 10^{-1} \\ 0 \\ 7/7460 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \quad [\omega_k] := \begin{bmatrix} 5/5556 \times 10^{-1} \\ 8/8889 \times 10^{-1} \\ 5/5556 \times 10^{-1} \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, 3,$$

داریم،

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^3 \left(\phi_{j,x}(x_i) + \sum_{k=1}^3 \left(-\frac{1}{\pi} x_i \phi_j(x_i \theta_k) - \frac{1}{\pi} \phi_j(\theta_k) \right) \omega_k \right) u_j = 2e^{x_i} - 2, \\ i = 1, 2, 3, \end{cases} \quad (26.4)$$

با توجه به (۲۶.۴) و محاسبه ماتریس‌های مورد نیاز در روش پیشنهادی داریم،
ماتریس توابع ساختار در نقطه تست برای $j = 1, 2, 3$ برابر است با،

$$\mathbf{A} := [\phi_j(\circ/\pi 5)] = \begin{bmatrix} 4/8833 \times 10^{-1} & 3/3333 \times 10^{-1} & 1/8333 \times 10^{-1} \end{bmatrix},$$

ماتریس توابع ساختار در نقاط پراکنده برای $i, j = 1, 2, 3$ به شکل زیر است،

$$\mathbf{AA} := [\phi_j(x_i)]_{i,j} = \begin{bmatrix} 1 & \circ & \circ \\ 3/3333 \times 10^{-1} & 3/3333 \times 10^{-1} & 3/3333 \times 10^{-1} \\ \circ & \circ & 1 \end{bmatrix},$$

ماتریس مشتق توابع ساختار در نقاط پراکنده برای $i, j = 1, 2, 3$ به شکل زیر است،

$$\mathbf{A}_x = \mathbf{A}_{,1} := [\phi_{j,x}(x_i)]_{i,j} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & \circ \\ -1 & \circ & 1 \\ \circ & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

ماتریس توابع ساختار در نقاط گاوس-لژاندر برای $j, k = 1, 2, 3$ به شکل زیر است،

$$[\phi_j(\theta_k)]_{k,j} := \begin{bmatrix} 2/7698 \times 10^{-1} & 3/3333 \times 10^{-1} & 3/8968 \times 10^{-1} \\ \circ & 5/0000 \times 10^{-1} & 5/0000 \times 10^{-1} \\ \circ & 1/1270 \times 10^{-1} & 8/8730 \times 10^{-1} \end{bmatrix},$$

به علاوه،

$$\begin{cases} GK(i, j) := \sum_{k=1}^3 \left(-\frac{1}{\pi} x_i \phi_j(x_i \theta_k) - \frac{1}{\pi} \phi_j(\theta_k) \right) \omega_k, \\ i, j = 1, 2, 3, \end{cases}$$

$$GK = \begin{bmatrix} -3/2694 \times 10^{-1} & -3/4612 \times 10^{-1} & -3/2694 \times 10^{-1} \\ -6/2902 \times 10^{-1} & -4/9195 \times 10^{-1} & -3/7902 \times 10^{-1} \\ -6/5388 \times 10^{-1} & -6/9224 \times 10^{-1} & -6/5388 \times 10^{-1} \end{bmatrix},$$

$$F(i, j) := \phi_{j,x}(x_i) + GK(i, j), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

که در آن،

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/6290 & -4/9195 \times 10^{-1} & 6/2098 \times 10^{-1} \\ -6/5388 \times 10^{-1} & -2/6922 \times 10^{-1} & 1/3461 \end{bmatrix},$$

با توجه به بخش ناهمگن معادله انتگرو-دیفرانسیل مورد نظر داریم،

$$f(x) := 2e^x - 2, \quad f_i := \begin{bmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ f(x_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2974 \\ 3/4366 \end{bmatrix},$$

بنابر این،

$$U := \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \end{bmatrix}, \quad U = F^{-1} \times f_i = \begin{bmatrix} -1/7038 \times 10^{-17} \\ -3/8383 \times 10^{-1} \\ 1/7853 \end{bmatrix},$$

در نتیجه مقدار تقریبی و قدرمطلق خطای $u(0/35)$ با سه نقطه پراکنده و چندجمله‌ای پایه از درجه یک برابر است با،

$$u(0/35) \simeq u^h(0/35) = \sum_{j=1}^3 \phi_j(0/35) \hat{u}_j = A \times U = 1/9936 \times 10^{-1},$$

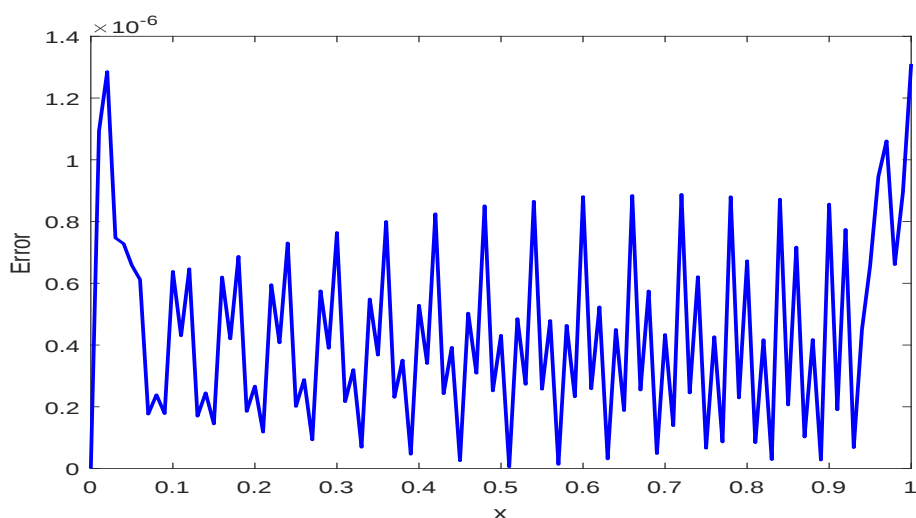
و

$$\text{قدرمطلق خطا} = |u(0/35) - u^h(0/35)| = 2/9733 \times 10^{-1},$$

جدول ۱.۴: نتایج عددی برای مثال ۱.۴.۴

$m = 3$	$m = 2$	$m = 1$	N
$\ e\ _\infty$	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _\infty$	
$1/10 \times 10^{-3}$	$6/78 \times 10^{-2}$	$3/29 \times 10^{-2}$	۱۱
$2/89 \times 10^{-4}$	$2/93 \times 10^{-2}$	$1/00 \times 10^{-2}$	۱۷
$1/31 \times 10^{-6}$	$5/70 \times 10^{-3}$	$8/19 \times 10^{-4}$	۵۱
$4/85 \times 10^{-8}$	$7/73 \times 10^{-4}$	$3/65 \times 10^{-4}$	۱۰۱

مثال ۲.۴.۴. معادله انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم غیرخطی زیر را از در نظر می‌گیریم،



شکل ۱.۴: قدرمطلق خطا برای تقریب از درجه ۳ با ۵۱ نقطه مثال ۱.۴.۴

$$\begin{cases} u'(x) = xe^{-x^2} - x + \frac{11}{6} + \int_0^x 2t x e^{-u^2(t)} dt - \int_0^1 (1+t)u(t) dt, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

که جواب تحلیلی این معادله برابر $u(x) = x$ می‌باشد. میزان خطای حاصل از روش برای m و N های متفاوت در جدول ۲.۴ آمده است. مقایسه مقدار عددی با مقدار تحلیلی جواب معادله و قدرمطلق خطا در شکل ۲.۴ ارائه شده است.

جدول ۲.۴: نتایج عددی برای مثال ۲.۴.۴

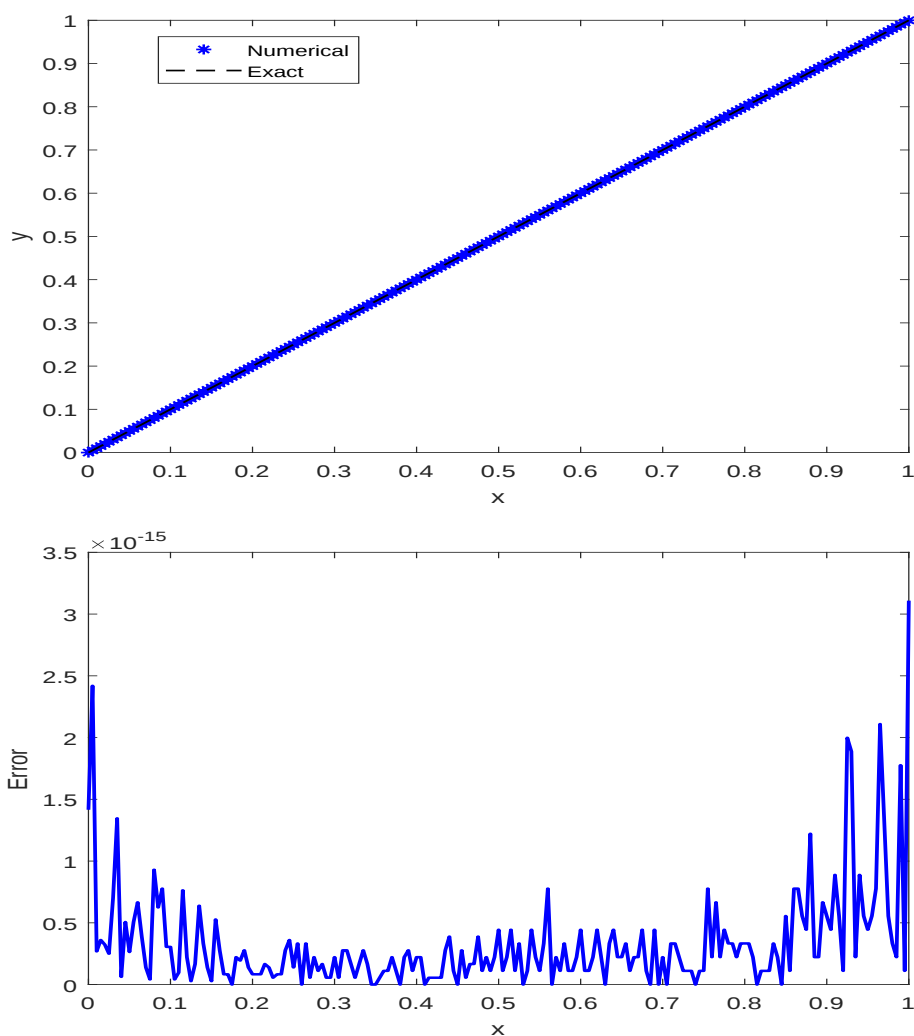
$m = 2$	$m = 1$	N
$\ e\ _{\infty}$	$\ e\ _{\infty}$	
$3/83 \times 10^{-15}$	$1/11 \times 10^{-15}$	۳
$3/11 \times 10^{-15}$	$8/88 \times 10^{-16}$	۵
$3/11 \times 10^{-15}$	$3/33 \times 10^{-16}$	۱۱

مثال ۳.۴.۴. معادله انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم غیرخطی

$$\begin{cases} u'(x) = f(x) + \frac{1}{6} \int_0^x (x-t) u^2(t) dt + \int_0^1 t u(t) dt, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

را در نظر بگیرید که در آن،

$$\begin{aligned} f(x) = & x^2 \cos x + 2x \sin x - \frac{1}{240} x^6 - \frac{1}{64} \left((2x^4 - 18x^2 + 15) \cos 2x \right. \\ & \left. + (-8x^3 + 24x) \sin 2x - 15 \right) - 5 \cos 1 + 3 \sin 1, \end{aligned}$$

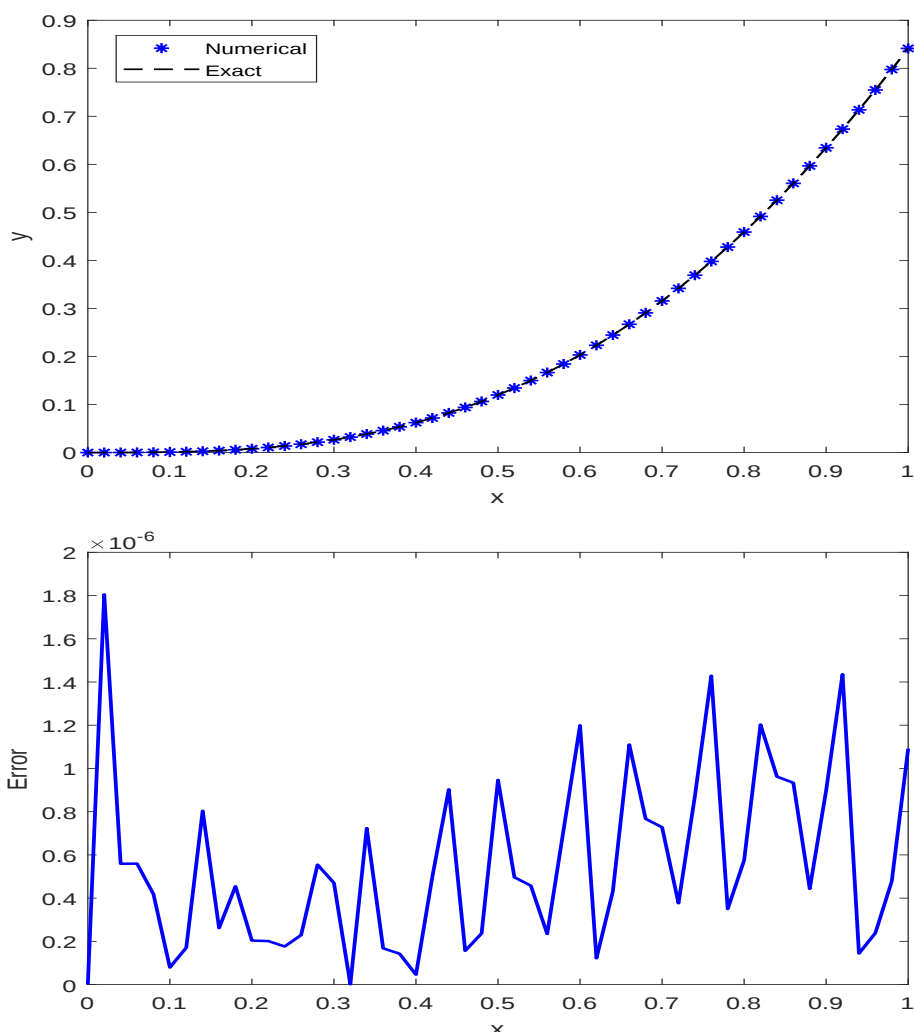


شکل ۲.۴: تقریب عددی از درجه ۲ با ۱۱ نقطه و قدرمطلق خطا برای مثال ۲.۴.۴

و جواب تحلیلی این معادله برابر $u(x) = x^2 \sin x$ می باشد. نتایج حاصل روش عددی و ماکزیمم خطا برای مقادیر متفاوت m و N در جدول ۳.۴ ارائه شده است.

جدول ۳.۴: نتایج عددی برای مثال ۳.۴.۴

$m = 3$	$m = 2$	$m = 1$	N
$\ e\ _{\infty}$	$\ e\ _{\infty}$	$\ e\ _{\infty}$	
$9/70 \times 10^{-3}$	$2/02 \times 10^{-1}$	$5/61 \times 10^{-2}$	۵
$1/10 \times 10^{-3}$	$4/11 \times 10^{-2}$	$1/68 \times 10^{-2}$	۹
$2/93 \times 10^{-5}$	$4/80 \times 10^{-3}$	$2/20 \times 10^{-3}$	۲۱
$1/81 \times 10^{-6}$	$1/10 \times 10^{-3}$	$3/80 \times 10^{-4}$	۵۱



شکل ۳.۴: تقریب عددی از درجه ۳ با ۵۱ نقطه و قدرمطلق خطا برای مثال ۳.۴.۴

مثال ۴.۴.۴. معادله انتگرو-دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم،

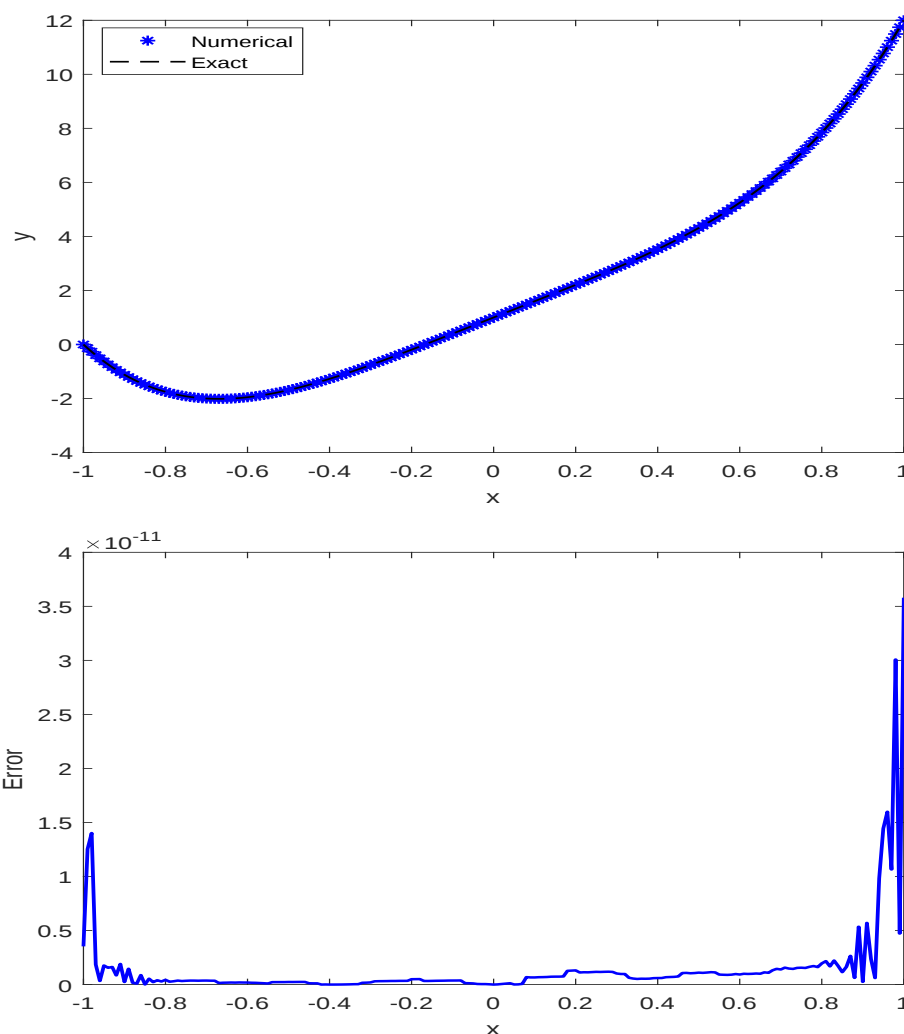
$$\begin{cases} u'(x) = 2 - 5x - 3x^2 + 2x^3 - x^5 + \int_0^x u(t) dt + \int_{-1}^1 (1+xt)u(t) dt, \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

که جواب تحلیلی این معادله برابر $u(x) = 1 + 6x + 5x^4$ می‌باشد. مقایسه مقدار عددی با مقدار تحلیلی جواب معادله و قدرمطلق خطا در شکل ۴.۴ ارائه شده است.

برای نشان دادن کارایی روش پیشنهادی در حل عددی رده‌ای از معادلات انتگرو-دیفرانسیل دوبعدی، مثال‌های پایانی را به این نوع معادلات اختصاص می‌دهیم.

مثال ۵.۴.۴. معادله انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم مرکب زیر را در نظر می‌گیریم،

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - \int_0^y \int_0^1 ysu(s,t) ds dt = 2x - \frac{1}{6}y^2 + \frac{1}{6}y^4, \\ u(0,y) = -y^2, \end{cases}$$



شکل ۴.۴: تقریب عددی از درجه ۴ با ۱۷ نقطه و قدرمطلق خطا برای مثال ۴.۴.۴

که جواب تحلیلی این معادله برابر $u(x, y) = x^2 - y^2$ می باشد. میزان خطای حاصل از روش برای m و N های متفاوت در جدول ۴.۴ آمده است. همچنین قدرمطلق خطا برای $N = 21 \times 21$ و $m = 2$ در شکل ۵.۴ ارائه شده است.

مثال ۶.۴.۴. به عنوان آخرین مثال، معادله انتگرو-دیفرانسیل ولترا دوبعدی زیر را در نظر می گیریم،

$$\phi(x, y) + \psi(x, y) = f(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq 1,$$

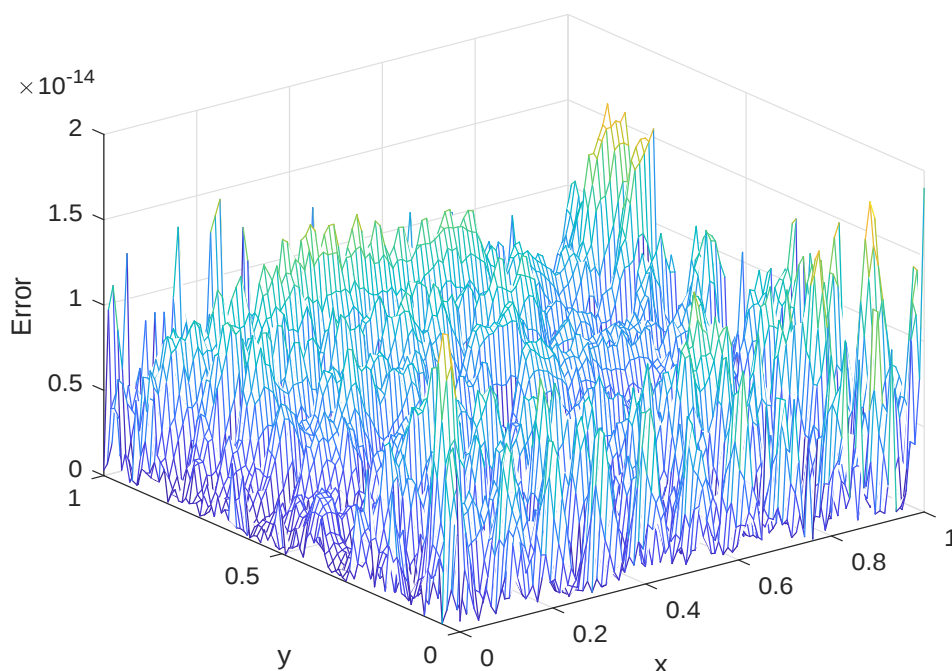
که در آن،

$$\phi(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \quad \psi(x, y) = - \int_0^x \int_0^y u(s, t) dt ds,$$

$$f(x, y) = -1 + e^x + e^y + e^{x+y},$$

جدول ۴.۴: نتایج عددی برای مثال ۵.۴.۴

$m = 2$	$m = 1$	N
$\ e\ _{\infty}$	$\ e\ _{\infty}$	
$2/39 \times 10^{-14}$	$1/42 \times 10^{-1}$	3×3
$1/14 \times 10^{-14}$	$1/68 \times 10^{-2}$	5×5
$1/25 \times 10^{-14}$	$4/70 \times 10^{-3}$	11×11
$2/15 \times 10^{-14}$	$5/66 \times 10^{-4}$	21×21



شکل ۵.۴: قدرمطلق خطا برای تقریب از درجه ۲ با 21×21 نقطه مثال ۵.۴.۴

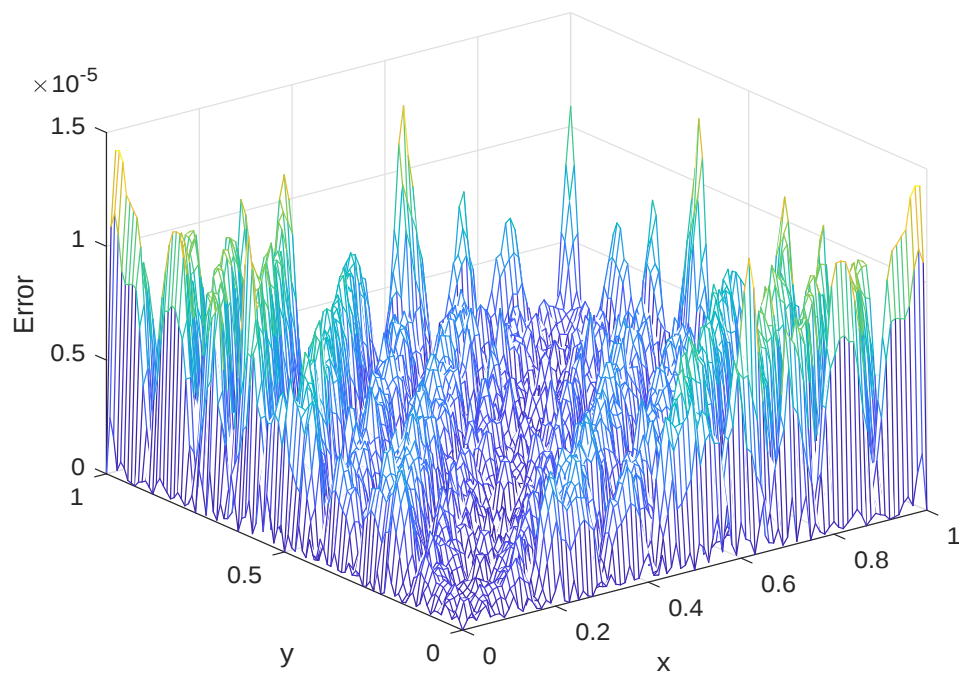
و شرایط اولیه معادله به صورت زیر می باشد،

$$\begin{cases} u(x, 0) = e^x, \\ u(0, y) = e^y, \end{cases}$$

که جواب تحلیلی این معادله برابر $u(x, y) = e^{x+y}$ می باشد. میزان خطای حاصل از روش برای m و N های متفاوت در جدول ۵.۴ آمده است. همچنین قدرمطلق خطا برای $N = 33 \times 33$ و $m = 3$ در شکل ۶.۴ ارائه شده است.

جدول ۵.۴: نتایج عددی برای مثال ۶.۴.۴

$m = 3$	$m = 2$	$m = 1$	N
$\ e\ _\infty$	$\ e\ _\infty$	$\ e\ _\infty$	
$2/60 \times 10^{-2}$	$1/08 \times 10^{-1}$	$9/16 \times 10^{-2}$	5×5
$1/80 \times 10^{-3}$	$1/23 \times 10^{-2}$	$1/06 \times 10^{-2}$	11×11
$3/24 \times 10^{-5}$	$9/50 \times 10^{-3}$	$6/10 \times 10^{-3}$	21×21
$1/42 \times 10^{-5}$	$4/20 \times 10^{-3}$	$2/40 \times 10^{-3}$	33×33



شکل ۶.۴: قدرمطلق خطا برای تقریب از درجه ۳ با 33×33 نقطه مثال ۶.۴.۴

نتیجه‌گیری و پیشنهاد برای کارهای آتی

از مجموعه مباحث مطرح شده در این رساله، می‌توانیم به این نتیجه برسیم که، روش‌های بدون شبکه، تابع مفروض را بر حسب مقادیر تابع در نقاط پراکنده تقریب می‌زنند و برتری این روش‌ها نسبت به روش‌های عناصر متناهی این است که به شکل هندسی دامنه وابسته نیستند و تعمیم ساده‌تر و کم‌هزینه‌تر به ابعاد بالاتر دارند. روش‌های بدون شبکه کمترین مربعات متحرک و کمترین مربعات متحرک درونیاب، از جمله روش‌های عددی زیبایی هستند که قادرند انواع مختلف معادلات انتگرال و معادلات انتگرو-دیفرانسیل بخصوص معادلات انتگرال و انتگرو-دیفرانسیل ولترا-فردهلم خطی و غیرخطی حل کنند. نتایج حاصل از حل معادلات انتگرال و معادلات انتگرو-دیفرانسیل با روش‌های پیشنهادی بیانگر این است که تقریب عددی با این روش‌های بسیار دقیق و نزدیک به جواب تحلیلی معادله می‌باشد. به عنوان کار تحقیقاتی آتی، که کار بر روی آنها آغاز شده است حل معادلات انتگرو-دیفرانسیل و حل دستگاه معادلات انتگرو-دیفرانسیل به روش کمترین مربعات متحرک درونیاب می‌باشد.

مراجع

- [۱] میرزایی د.، (۱۳۹۲)، ”آنالیز عددی پیشرفته” چاپ دوم، انتشارات دانشگاه اصفهان.
- [۲] عسگری م.، (۱۳۸۲)، پایان نامه ارشد: ”حل عددی معادلات انتگرال ولترا-فردهلم خطی مرکب با استفاده از روش هم محلی چبیشف”، دانشکده علوم-گروه ریاضی، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی.
- [۳] دارانیا پ.، (۱۳۹۰)، رساله دکتری: ”پیرایشی بر روش های عددی پیشرفته برای معادلات انتگرال و انتگرو-دیفرانسیل”، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز.
- [4] Atkinson K. E. and Weimin H. (2009), ”**Theoretical Numerical Analysis**”, Springer.
- [5] Jerri A. T. (1999), ”**Introduction to integral equations with applications**”, John Wiley & Sons.
- [6] Assari P., Asadi-Mehregan F. and Dehghan M. (2019), ”On the numerical solution of Fredholm integral equations utilizing the local radial basis function method” **International Journal of Computer Mathematics**, 96, 7, pp 1416-1443.
- [7] Mirzaei D. (2017), ”Direct approximation on spheres using generalized moving least squares” **BIT Numerical Mathematics**, 57, 4, pp 1041-1063.
- [8] Mohammadi V. and Dehghan M. (2020), ”Generalized moving least squares approximation for the solution of local and non-local models of cancer cell invasion of tissue under the effect of adhesion in one-and two-dimensional spaces” **Computers in Biology and Medicine**, 124, pp 103803.
- [9] Wazwaz A. M. (2015), ”**A First Course in Integral Equations**”, World Scientific Publishing Company.
- [10] Wendland H. (2004), ”**Scattered data approximation**”, Vol. 17, Cambridge university press.
- [11] Shepard D. (1968), ” A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced points” **in: Proc. 23rd Nat. Conf. ACM, ACM Press, New York**, pp 517-524.
- [12] Lancaster P. and Salkauskas K. (1981), ” Surfaces generated by moving least squares methods” **Mathematics of computation**, 37,155, pp 141-158.

- [13] Mirzaei D. and Dehghan M. (2010), " Meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approximation to the two dimensional sine-Gordon equation" **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 233,10, pp 2737-2754.
- [14] Belytschko T. , Yun Y.L. and Gu L. (1994), " Element-free Galerkin methods" **International journal for numerical methods in engineering**, 37,2, pp 229-256
- [15] Liu G.R.and Gu Y.T. (2005), "**An introduction to meshfree methods and their programming**", Springer Science & Business Media.
- [16] Mirzaei D. , Schaback R. and Dehghan M. (2012), " On generalized moving least squares and diffuse derivatives" **IMA Journal of Numerical Analysis**, 32,3, pp 983-1000.
- [17] Ju-Feng W. , Feng-Xin S. , Yu-Min C. and Huang A. (2014), " Error estimates for the interpolating moving least-squares method" **Applied Mathematics and Computation**, 245, pp 321-342.
- [18] Babuška I., Banerjee U., Osborn J. and Zhang Q. (2009), " Effect of numerical integration on meshless methods" **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 198,37-40, pp 2886–2897.
- [19] Mirzaei D. and Dehghan M. (2010), " A meshless based method for solution of integral equations" **Applied Numerical Mathematics**, 60,3, pp 245–262.
- [20] Dastjerdi H.L. and Maalek F.M. (2012), " Numerical solution of Volterra–Fredholm integral equations by moving least square method and Chebyshev polynomials" **Applied Mathematical Modelling**, 36,7, pp 3283–3288.
- [21] Adibi H. and Rismani A.M. (2010), " Numerical solution to a functional integral equations using the Legendre-spectral method" **Australian Journal of Basic and Applied Sciences**, 4,3, pp 481–486.
- [22] Yalçınbaş S. (2002), " Taylor polynomial solutions of nonlinear Volterra–Fredholm integral equations" **Applied Mathematics and Computation**, 127,2-3, pp 195–206.
- [23] Mustafa M. M. and Ghanim I. N. (2014), " Numerical solution of linear Volterra-Fredholm integral equations using Lagrange polynomials" **Mathematical Theory and Modeling**, 4,5, pp 137–146.
- [24] Yousefi S. A. , Lotfi A. and Dehghan M. (2009), " He's variational iteration method for solving nonlinear mixed Volterra–Fredholm integral equations" **Computers & Mathematics with Applications**, 58,11-12, pp 2172–2176.
- [25] Laeli Dastjerdi H. and Maalek Ghaini F. M. (1973), " TNumerical solution of Volterra–Fredholm integral equations by moving least square method and Chebyshev polynomials" **Applied Mathematical Modelling**, 36,7, pp 3283–3288.

-
- [26] Maleknejad K. , Almasieh H. and Roodaki M. (2010), " Triangular functions (TF) method for the solution of nonlinear Volterra–Fredholm integral equations" **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, 15,11, pp 3293–3298.
 - [27] Levin D. (1998), " The approximation power of moving least-squares" **Mathematics of computation**, 67,224, pp 1517–1531.
 - [28] Armentano M. G. and Durán R. G. (1973), " Error estimates for moving least square approximations" **Applied Numerical Mathematics**, 37,3, pp 397–416.
 - [29] Armentano M. G. (2001), " Error estimates in Sobolev spaces for moving least square approximations" **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 39,1, pp 38–51.
 - [30] Zuppa C. (2003), " Error estimates for moving least square approximations" **Bulletin of the Brazilian Mathematical Society**, 34,2, pp 231–249.
 - [31] Zuppa C. (2003), " Good quality point sets and error estimates for moving least square approximations" **Applied Numerical Mathematics**, 47,3-4, pp 575–585.
 - [32] Babuška I., Banerjee U., Osborn J. E. and Zhang Q. (2009), " Effect of numerical integration on meshless methods" **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 198,37-40, pp 2886–2897.
 - [33] Wazwaz A. M. (2011), "**Linear and nonlinear integral equations**", Springer.
 - [34] Delves L. and Mohamed J. (1985), "**Computational Methods for Integral Equations**, Cambridge University Press", Cambridge.
 - [35] Kress R., Maz'ya V. and Kozlov V. (1989), "**Linear integral equations**", Springer.
 - [36] Akyüz-Daşcıoğlu A. and Sezer M. (2007), " A Taylor polynomial approach for solving high-order linear Fredholm integro-differential equations in the most general form" **International Journal of Computer Mathematics**, 84, 4, pp 527–539.
 - [37] Bülbül B. and Sezer M. (2011), " Taylor polynomial solution of hyperbolic type partial differential equations with constant coefficients" **International Journal of Computer Mathematics**, 88, 3, pp 533–544.
 - [38] Yalçınbaş S. and Sezer M. (2000), " The approximate solution of high-order linear Volterra–Fredholm integro-differential equations in terms of Taylor polynomials" **Applied Mathematics and Computation**, 112, 2-3, pp 291–308.
 - [39] Maleknejad K. and Hadizadeh H. (1997), "**The numerical analysis of Adomian decomposition method for nonlinear Volterra integral and integro-differential equations**", International Journal of Engineering Science (English).
 - [40] Gholipour M. and Mokhtary P. (2015), "Discrete Galerkin Method for Higher Even-Order Integro-Differential Equations with Variable Coefficients" **Computational Methods for Differential Equations**, 3, 1, pp 36–44.

-
- [41] Biazar J. and Asadi M. A. (2015), "Indirect RBF for high-order integro-differential equations" **Journal of Advances in Mathematics and Computer Science**, 11, pp 1–16.
- [42] Dehghan M. and Salehi R. (2012), "The numerical solution of the non-linear integro-differential equations based on the meshless method" **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 236, 9, pp 2367–2377.
- [43] Darania P. , Shali J. A. and Ivaz K. (2011), "New computational method for solving some 2-dimensional nonlinear Volterra integro-differential equations" **Numerical Algorithms**, 57, 1, pp 125–147.

Aabstract

Many problems are modeled with ordinary differential equations or partial differential equations, we can transform most of them to integral or integro-differential equations with initial or boundary conditions. In order to solve these equations we require numeric methods, one of the methods of multi-variable approximation on global domains is approximation with the finite element method which takes place by meshing of the domain, this method is the base of many numeric methods particularly in solving partial differential equations.

There is another methods known as the meshfree methods, in these approachs meshing of the domain as finite elements is not used and instead of it the approximation is implemented based on a set of points which have been distributed in the region.

Easier generalization to higher dimensions is one of the advantages of the meshfree methods compared to the finite element method, in this thesis we study the meshfree methods of moving least squares and interpolating moving least squares to numerically solve some integral and nonlinear integro-differential equations.

Keywords: Integral equations, Volterra-Fredholm integro-differential equations, Harr space, moving least square .



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Numerical Analysis

**Numerical solution for a class of
two-dimensional integro- differential
equations by meshfree methods.**

By: Morteza Asgari

Supervisor:

Ali Mesforush

Advisor:

Alireza Nazemi

Fev 2021