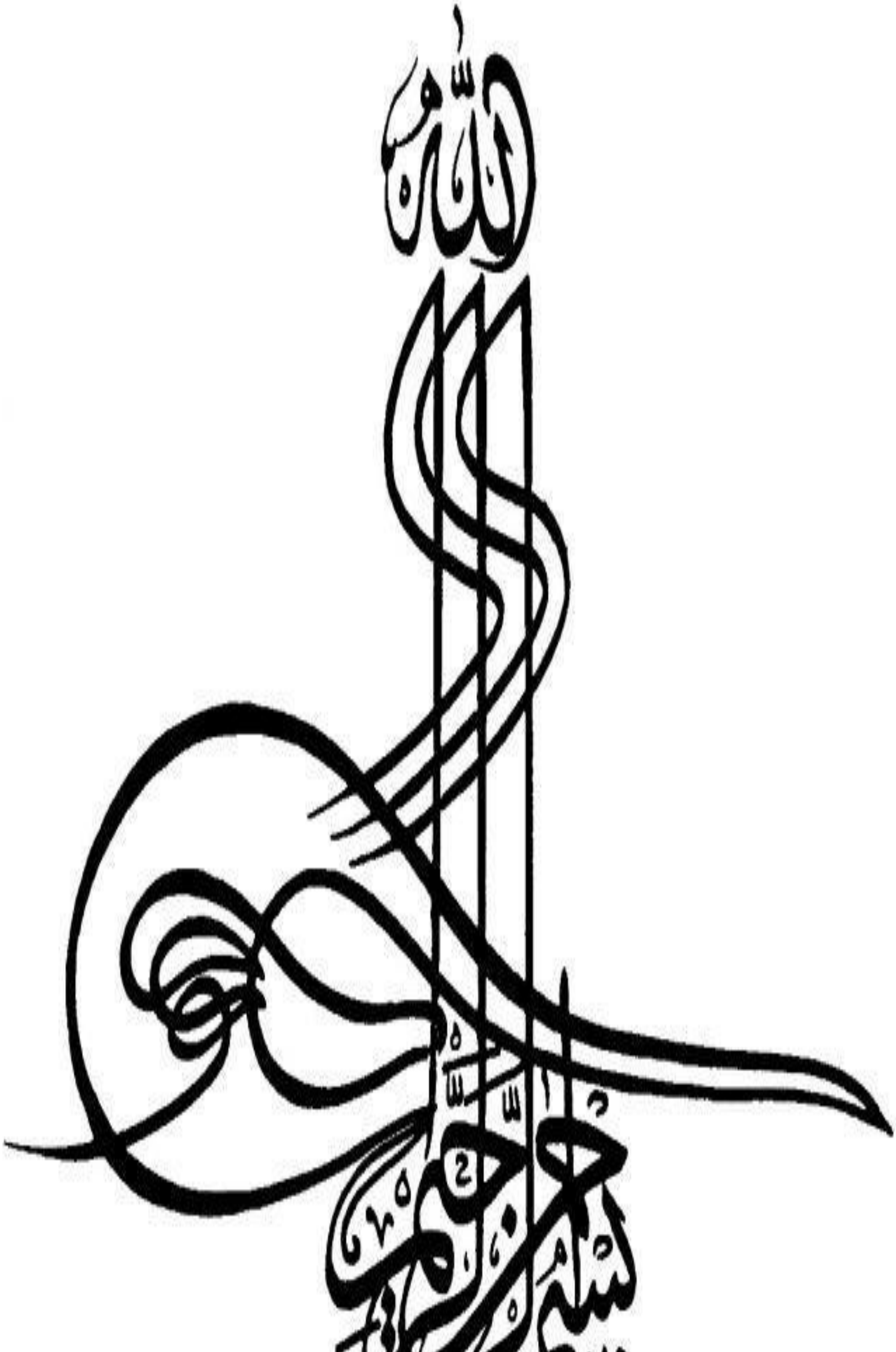

بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده : ریاضی

گروه : ریاضی کاربردی

مطالعه مفهوم احاطه گري در گراف هاي فازي

دانشجو :

سیده معصومه زرگر

استادراهنما :

دکتر صادق رحیمي شعرباف

استاد مشاور:

دکتر نادر جعفري راد

پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسي ارشد

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به:

پدر و مادرم

به پاس محبت هاي بي دريغ

و دعای خیرشان که بدرقه ی

راهم بود .

تقدیر و تشکر

در آغاز شکر خداوند متعال را به جای مي آورم که این توفیق را نصیب من کرد تا این پایان نامه را به اتمام برسانم. تشکر و قدردانی فراوان خدمت پدر و مادر عزیزم به خاطر تمامی زحماتی که در دوران پر فراز و نشیب زندگی ام متحمل شدند. زحمات استاد راهنمایم جناب آقای دکتر صادق رحیمي را ارج مینهم که با صبر و حوصله بسیار مرا در مسیر انجام

این پایان نامه هدایت فرمودند. از زحمات بي دريغ، و راهنمايي هاي ارزشمند استاد مشاورم جناب آقاي دکتر جعفري راد کمال تشکر را دارم. همچنین از مسئولین آموزش دانشکده رياضي که از هر گونه همکاری دريغ ننموده اند تشکر مي نمايم. از خداوند متعال توفيق روز افزون همه آنها را خواستارم.

چکیده

مفهوم احاطه گري در گراف هاي فازي، هم از نظر تئوري و هم کاربردي، بسيار ارزشمند مي باشد. در گراف فازي G با مجموعه رئوس V ، $D \subseteq V$ ، مجموعه احاطه گر فازي ناميده مي شود هرگاه هر رأس $v \in V - D$، توسط رأسي مانند $u \in D$ احاطه شده باشد. در بيشتر مسائلي که تاکنون در مورد احاطه گري در گراف ها مطرح شده است، داده ها و اطلاعات مربوط به مسئله دقيق و مشخص است و وجود رأس ها و يال هاي گراف به صورت قطعي مي باشد. در حالي که در دنياي واقعي ما نوعا با داده ها و اطلاعات غير قطعي مواجه هستيم. در گراف هاي فازي بر خلاف گراف هاي معمولي وجود رأس ها و يال ها بر اساس درجه تعلق نسبت داده شده به آنها مشخص مي شود. که مقدار درجه تعلق رأس ها و يال ها عددي بين صفر و يك مي

باشد. احاطه گری در گراف ها در حل مسائل شاخه های مختلف علوم کاربردی مانند مسائل مکانیابي مورد استفاده قرار مي گیرد. بدین ترتیب بررسي مفاهیم جدیدي مانند احاطه گري در گراف هاي فازي ضرورت پیدا مي کند. در فصل اول تعاریف و مفاهیم اولیه در گراف هاي فازي ارائه شده است. درفصل دوم پارامتر هاي مختلف احاطه گري در گراف فازي و کرانهایي از آنها مطرح شده است. همچنین تغیرات عدد احاطه گري فازي در اثر افزایش و کاهش رأس ها و یال ها بیان شده است. و نیز در این فصل مفهوم احاطه گري در ترکیب، ضرب دکارتي و ضرب مطلق گراف هاي فازي بررسي شده است. در فصل سوم احاطه گري فازي قوي و احاطه گري فازي ضعیف مطرح شده است. در فصل چهارم به معرفي مفاهیمي دیگر از گراف هاي فازي مانند عدد پوشش رأسي، عدد پوشش یالي و تطابق در گراف هاي فازي پرداخته و ارتباط برخي از این مفاهیم با عدد احاطه گر فازي مورد بررسي قرار گرفته است. در فصل پنجم ابتدا قضایاي جدیدي از احاطه گري در گراف هاي فازي را به اثبات مي رسانیم. در انتها کاربرد هایي از احاطه گري فازي در حل برخي از مسائل مانند مکان یابي مراکز خدماتي، تعیین ایستگاه هاي رادیویي، شبکه هاي کامپیوتر و ... را مطرح مي کنیم.

کلمات کلیدي : گراف هاي فازي، احاطه گري فازي، احاطه گري فازي قوي، احاطه گري فازي ضعیف، عدد پوشش رأسي، عدد پوشش یالي، تطابق.

فهرست مطالب

فصل دوم : مفهوم احاطه گري در گراف هاي فازي

فصل سوم :احاطه گري فازي قوي و ضعيف

فصل چهارم : معرفي ساير پارامتر ها در گراف فازي

فصل پنجم : قضايا و کاربرد هايي از احاطه گري در گراف هاي فازي

مقدمه

تعریف گراف هاي فازي نخستين بار توسط كافمن[1] و بر اساس روابط فازي ارائه شده توسط لطفي زاده مطرح شده است. اگر چه رزنفلد[2] ساير جزئيات مانند رئوس فازي، يال هاي فازي، مسير، دور، همبندي و ... را مطرح نمود [۲۰و۲۵]. اولين پيشنهاد ها در مورد مجموعه هاي احاطه گر به منشأ مسابقات شطرنج در حدود ۴۰۰ سال پيش برمي گردد. دراين مسابقات هدف قرار دادن مينيمم تعداد مهره هاي شطرنج مانند شاه وزير و... روي صفحه شطرنج بوده است به گونه اي كه تمامي مربع هاي صفحه را احاطه كنند. نحوه ي برخورد جامع و گسترده با مباني احاطه گري در گراف ها و همچنين برخي از موضوعات اوليه در اين زمينه توسط هاينس[3] و همكارانش در كتاب اصول احاطه گري در گراف مطرح شده است[۲۸]. ام سالستر[4] در سال ۱۹۹۸ مفهوم گراف هاي چند بخشي را به گراف هاي فازي چند بخشي گسترش داد[۲۱]. در همان سال اي.ساماساندرام[5] احاطه گري در گراف هاي فازي را تعريف نمود و كران هايي براي عدد احاطه گري فازي مطرح كرد [۶].

رشد سريع تحقيقات در زمينه احاطه گري در گراف هاي فازي تحت تأثير سه عامل زير مي باشد.

۱. تنوع در كاربرد هاي احاطه گري در هر دو زمينه ي تئوري و كاربردي و همچنين در مسائل مكانيابي
۲. تنوع گسترده پارامتر هاي مرتبط با احاطه گري كه مي توانند تعريف شوند.
۳. NP-Comp بودن مسائل پايه اي احاطه گري. اين مسائل با ساير مسائل NP-Complete مرتبط مي باشند و پيدا كردن

---

[1] Kaufmann
[2] Rosenfeld
[3] Haynes
[4] McAlister
[5] A. Somasundaram

راه حل زمان چند جمله اي تنها دركلاس هاي خاصي از گراف ها مفيد مي باشد [۶].

اي. ساماساندرام در سال ۲۰۰۴ مفاهيمي از احاطه گري در گراف هاي فازي مانند احاطه گري مستقل فازي، احاطه گري فازي كل و احاطه گري فازي همبند را معرفي كرد. وي در سال ۲۰۰۵ احاطه گري در تركيب و جمع و ضرب گراف هاي فازي را مطرح نمود [۷و۸]. علاوه بر اين پارامتر هاي ديگري از احاطه گري نيز با ابداع و ابتكار هاي مختلف بدست آمده است. تعريف مجموعه احاطه گر K-فاصله موثر فازي نيز در سال ۲۰۰۹ و توسط اي.ناگورگاني[۶] و آر.جهير[۷] ارائه شده است[۵]. احاطه گري قوي و ضعيف در گراف هاي غير فازي نخستين بار توسط پوشپا لاسا[۸] و سام پات كومار[۹] و در سال ۱۹۹۶ مطرح شد [۱۸]. چهارده سال بعد يعني در سال ۲۰۱۰ ناتاراجان[۱۰] و اي ياسوامي[۱۱] احاطه گري قوي و ضعيف در گراف هاي فازي را تعريف كردند [۱۲].

اميد است مطالب ارائه شده در اين پايان نامه مورد استفاده دانشجويان و محققان قرار گيرد.

---

[۶] A.Nagoorgani
[۷] R.Jahirhussain
[۸] Pushpa latha
[۹] Sampathkumar
[۱۰] Natarajan
[۱۱] Ayyaswamy

فصل اول

تعاریف اولیه

د ر گـر ا ف ها ي
فـا ز ي

۱-۱مقدمه

در این فصل گراف فازي و مفاهیم و تعاریف اولیه مانند مرتبه، اندازه، درجه همسایگي رأس، مسیر فازي، دور فازي و سایر پارامتر هاي مرتبط با گراف هاي فازي را مطرح خواهیم کرد [۱۴و۲و۱]. درادامه نیز تعاریفي از زیرگراف فازي، زیرگراف پوشا [۱۲]، متمم گراف فازي، گراف فازي کامل[۱۳]، گراف فازي دو بخشي[۱۴]، درخت و جنگل فازي ارائه خواهد شد [۲و۶].

۱-۲ تعاریف

تعریف۱-۲-۱: یك زیر مجموعه فازي از مجموعه ناتهي V، تابعي به شکل $\sigma : V \to [0,1]$ است. یك رابطه فازي روي V زیر مجموعه ي فازي از $V \times V$ مي باشد [۴].

تعریف۱-۲-۲: یك گراف فازي با مجموعه رئوس V ، به شکل دو تابع $\sigma : V \to [0,1]$ و $\mu : V \times V \to [0,1]$ تعریف مي شود که σ تابع عضویت رأس ها مي باشد و به هر رأس عددي بین صفر و یك نسبت مي دهد و μ تابع عضویت یال ها مي باشد و به هر یال عددي بین صفر و یك نسبت مي دهد به گونه اي که به ازاي هر $u,v \in V$ داریم :

$$\mu(u,v) \le \sigma(u) \wedge \sigma(v) \qquad (۱-۱)$$

که در آن $\sigma(u) \wedge \sigma(v)$ برابر مینیمم مقدار(σv) $\sigma(u)$ است. گراف فازي را معمولا با سه تایي $G = (V, \sigma, \mu)$ و یا $G = (\sigma, \mu)$ نشان مي دهند [۶].

[۱۲] spanning subgraph
[۱۳] complete fuzzy graph
[۱۴] bipartite fuzzy graph

تعریف۱-۲-۳: مرتبه p و اندازه q برای گراف فازی G عبارت اند از :

$$p = \sum_{v \in V} \sigma(v) \quad (۱-۲)$$

$$q = \sum_{uv \in V \times V} \mu(u,v) \quad (۱-۳)$$

تعریف۱-۲-۴: یال $e = uv$ در یک گراف فازی یال مؤثر[۱۵] نامیده می شود اگر $\mu(u,v) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$ [۶] .

تعریف۱-۲-۵: در گراف فازی G همسایگی رأس $v \in V$ به شکل زیر تعریف می شود [۶] .

$$N(v) = \{u \in V : \mu(u,v) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)\} \quad (۱-۴)$$

همچنین همسایگی بسته[۱۶] v برابر است با :

$$N[v] = \{v\} \cup N(v) \quad (۱-۵)$$

تعریف۱-۲-۶: اندازه فازی $D \subseteq V$ برابر است با :

$$|D|_f = \sum_{v \in D} \sigma(v) \quad (۱-۶)$$

تعریف۱-۲-۷: اندازه فازی $N(v)$، درجه همسایگی رأس v می باشد و با $d_N(v)$ نشان داده می شود. همچنین درجه مؤثر رأس v برابر است با مجموع وزن یال های مؤثر واقع شده روی آن که با $d_E(v)$ نشان داده می شود [۱۲] .

تعریف۱-۲-۸: مینیمم و ماکسیمم درجه همسایگی رأس های گراف فازی G، به ترتیب با نماد های $\delta_N(G)$ و $\Delta_N(G)$ نشان داده می شوند و به شکل زیر تعریف می شوند [۱۲] .

[۱۵] effective edge
[۱۶] closed neighbourhood

$$\delta_N(G)=\min\ \{d_N(v):v\in V\}$$ (۷-۱)

(۸-۱)

$$\Delta_N(G)=\max\ \{d_N(v):v\in V\}$$

تعریف۱-۲-۹: مینیمم و ماکسیمم درجه ي مؤثر رأس هاي گراف فازي G، به ترتیب با نمادهاي $\delta_E(G)$ و $\Delta_E(G)$ نشان داده مي شوند و به شکل زیر تعریف مي شوند [۱۲].

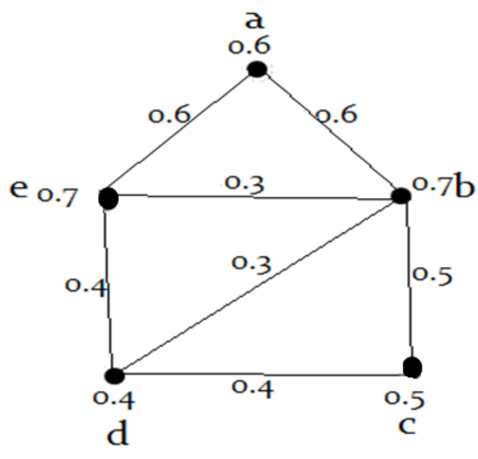
(۹-۱)

$$\delta_E(G)=\min\ \{d_E(v):v\in V\}$$

(۱۰-۱)

$$\Delta_E(G)=\max\ \{d_E(v):v\in V\}$$

مثال۱-۲-۱: در جدول (۱- ۱) مقادیر $d_N(v)$ براي رئوس گراف فازي G محاسبه شده است.



شکل۱- ۱، گراف فازي G

رأس	$N(v)$	$d_N(v)$
a	$\{b,e\}$	1.4
b	$\{a,c\}$	1.1
c	$\{b,d\}$	1.1
d	$\{c,e\}$	1.2
e	$\{a,d\}$	1

جدول۱- ۱: درجه همسايگي رئوس گراف فازي G

تعريف۱-۲-۱۰:

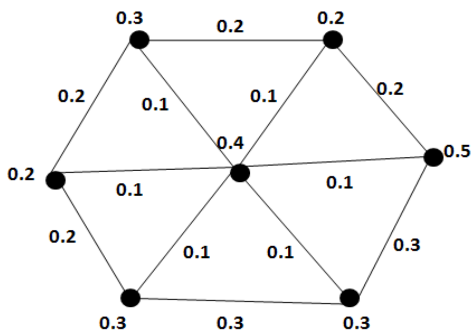
$$V_{\delta_N} = \{v \in V \ : \ d_N(v) = \delta_N(G)\} \qquad (۲-۱۱)$$

$$V_{\Delta_N} = \{v \in V \ : \ d_N(v) = \Delta_N(G)\} \qquad (۲-۱۲)$$

تعريف۱-۲-۱۱: در گراف فازي G، دو رأس u و v يكديگر را احاطه مي كنند هرگاه : $\mu(u,v) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$.[۶]

تعريف۱-۲-۱۲: رأس u در گراف فازي G رأس تنها [۱۷] ناميده مي شود هرگاه $N(u) = \varnothing$، يعني $\forall\, v \in V - \{u\}\ ,\ \mu(u,v) < \sigma(u) \wedge \sigma(v)$. [۵]

مثال۱-۲-۲: در گراف فازي داده شده در شكل (۱- ۳) رأس مركزي تنها مي باشد .



شكل۱- ۳، گراف فازي G

تعريف۱-۲-۱۳: يك مسيرفازي [۱۸] مانند P درگراف فازي G، دنباله اي از رأس هاي متمايز $x_0, x_1, \ldots, x_n$ است به گونه اي كه

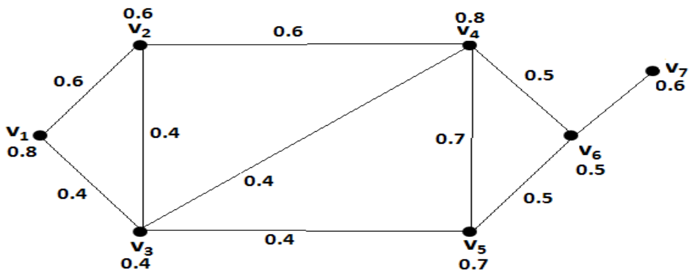
---
[۱۷] isolate vertex

برای $1\leq i\leq n$ باید $\mu(x_{i-1},x_i)>0$. $n\geq 1$ طول مسیر P نامیده می شود [۵] .

تعریف۱-۲-۱۴: در مسیر فازی P اگر $n\geq 3$ و $x_0=x_n$ باشد ، مسیر P یک دور فازی[۱۹] نامیده می شود [۵] .

تعریف۱-۲-۱۵: مسیر P ، مسیر مؤثر فازی نامیده می شود اگر هر یال از آن یک یال مؤثر باشد . مسیر مؤثر فازی شامل n رأس را با P_n نمایش می دهیم [۵] .

مثال ۱-۲-۳: گراف فازی G در شکل (۱-۴) را مشاهده کنید .



شکل ۱-۴، گراف فازی G

برخی از مسیرهای مؤثر فازی بین v_1 و v_4 عبارتند از: $v_1v_3v_4$ و $v_1v_2v_4$ و $v_1v_3v_2v_4$ و $v_1v_3v_5v_4v$ و $v_1v_3v_5v_6$ کوتاه ترین مسیرهای مؤثر عبارتند از: $v_1v_3v_4$ و $v_1v_2v_4$ که طول هر یک از آنها برابر ۲ است [۵] .

تعریف۱-۲-۱۶: مسیر مؤثر فازی P ، یک دور مؤثر فازی نامیده می شود اگر $n\geq 3$ و $x_0=x_n$. به طور مثال در شکل (۱-۴) مسیر $v_1v_3v_2v_1$ یک دور مؤثر فازی است [۵] .

تعریف۱-۲-۱۷: $G=(V,\sigma,\mu)$ ، گراف فازی فاقدمثلث بندی[۲۰] نامیده می شود هرگاه به ازای هر دو یال مؤثر uv و vw یال uw یک یال غیر مؤثر باشد و یا به عبارتی G فاقد دور مؤثر فازی به طول سه باشد .

---

[۱۸] fuzzy path
[۱۹] fuzzy cycle
[۲۰] triangle free

تعریف۱-۲-۱۸ : $G=(V,\sigma,\mu)$، گراف فازي همبند ناميده مي شود اگر بين هر دو رأس دلخواه از آن يك مسير مؤثر فازي وجود داشته باشد [۲] .

تعریف۱-۲-۱۹ : گراف فازي همبند فاقد دور مؤثر، يك درخت فازي مي باشد [۲] .

تعریف۱-۲- ۲۰ : يك جنگل فازي، گراف فازي فاقد دور مؤثر مي باشد [۷] .

تعریف۱-۲- ۲۱ : گراف فازي $H=(\tau,\upsilon)$، زيرگراف فازي $G=(\sigma,\mu)$ ناميده مي شود هرگاه به ازاي هر $u\in V$ ، $\tau(u)\le\sigma(u)$ و به ازاي هر $u,v\in V$ ، $\upsilon(u,v)\le\mu(u,v)$.

علاوه بر اين H يك زيرگراف پوشا است هر گاه $\forall u\in V$ ، $\tau(u)=\sigma(u)$ [۵] .

تعریف۱-۲- ۲۲ : زيرگراف پوشاي H در $G=(\sigma,\mu)$ كه يك جنگل نيز باشد ، جنگل پوشاي G ناميده مي شود [۷] .

تعریف۱-۲-۲۳ : در گراف فازي $G=(V,\sigma,\mu)$، گراف $G_1=(\sigma_1,\mu_1)$ زيرگراف القايي[۲۱] توليدشده توسط $S\subseteq V$ ناميده مي شود هرگاه، $\forall x\in S$ ، $\sigma_1(x)=\sigma(x)$ و $\forall(x,y)\in S\times S$ ، $\mu_1(x,y)=\mu(x,y)$. زيرگراف القايي توليد شده توسط S را با نماد $<S>$ ويا $G[S]$ نشان مي دهيم [۶] .

تعریف۱-۲-۲۴ : متمم گراف فازي[۲۲] G با $\bar{G}$ نشان داده مي شود و به صورت $\bar{G}=(\sigma,\bar{\mu})$ تعريف مي شود كه در آن $\bar{\mu}(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)-\mu(u,v)$ [۶] .

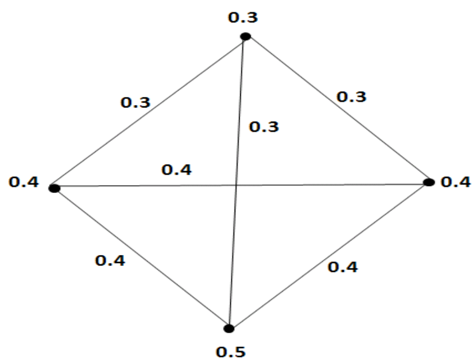
---

۲۱ induced subgraph
۲۲ complement of fuzzy graph

تعریف۱-۲-۲۵: فرض کنیم $G=(V,\sigma,\mu)$ یك گراف فازي باشد. اگر $E_1=\{(x,y)|\mu(xy)>0\}$ در این صورت گراف $G_1=(V,E_1)$، گراف زمینه [۲۳] G، نامیده مي شود [۷].

تعریف۱-۲-۲۶: $G=(V,\sigma,\mu)$، گراف فازي کامل نامیده مي شود هرگاه، $\forall uv\in V\times V$ داشته باشیم: $\mu(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$ و با نماد K_σ نشان داده مي شود [۶].

مثال ۱-۲-۴: گراف فازي G در شکل (۱-۵) یك گراف فازي کامل است.



شکل ۱-۵، گراف فازي G

تعریف۱-۲-۲۷: گراف فازي G، گراف فازي دو بخشي نامیده مي شود هرگاه بتوان مجموعه رئوس گراف را به دو مجموعه غیر تهي V_1 و V_2 به گونه اي تقسیم کرد که براي هر $v_1,v_2\in V_1$ و یا $v_1,v_2\in V_2$ داشته باشیم $\mu(v_1,v_2)=0$ [۲۱].

تعریف۱-۲-۲۸: اگر $F:X\to Y$ یك تابع باشد و $D\subseteq X$ در این صورت تحدید F در D به صورت $F|D:D\to Y$ که $F|D(x)=F(x)$ $\forall x\in D$ تعریف مي شود.

تعریف۱-۲-۲۹: $G=(V,\sigma,\mu)$، گراف فازي دو بخشي کامل نامیده مي شود اگر به ازاي هر $u\in V_1$ و $v\in V_2$ داشته باشیم

---
[۲۳] underlying graph

$\mu(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$. گراف فازي دو بخشي كامل با نماد K_{σ_1,σ_2} نشان داده مي شود كه σ_1 و σ_2 به ترتيب تحديد هاي σ در V_1 و V_2 مي باشند. در صورت مشخص بودن $|V_1|_f$ و $|V_2|_f$ گراف فازي دو بخشي كامل را با $K_{|V_1|_f,|V_2|_f}$ نشان مي دهند [۶].

فصل دوم

مفهوم احاطه گري درگراف هاي فازي

در این فصل پارامتر هایي مانند عدد احاطه گر فازي[۲۴]، عدد احاطه گر فازي همبند[۲۵]، مجموعه احاطه گر فازي مینیمال، عدد احاطه گر فازي مستقل[۲۶]، عدد احاطه گر فازي کل[۲۷]، و همچنین مجموعه احاطه گر K-فاصله مؤثر فازي[۲۸] را معرفي نموده و کران ها و قضایایي از آنها را مطرح مي کنیم. همچنین به بررسي تغیرات عدد احاطه گر فازي در اثر افزایش و کاهش رأس ها و یال ها مي پردازیم. در ادامه احاطه گري در ترکیب و ضرب گراف هاي فازي را مورد بررسي قرار مي دهیم.

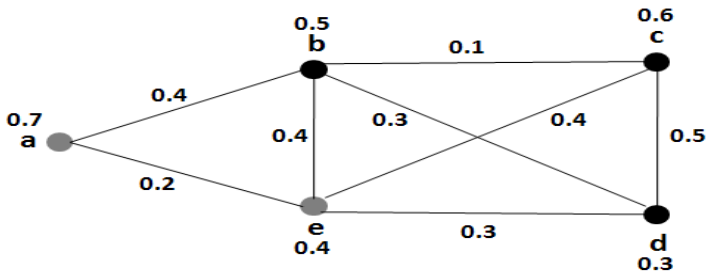
۲-۱ عدد احاطه گر فازي

تعریف۲-۱-۱: فرض کنیم $G=(V,\sigma,\mu)$ یك گراف فازي باشد. $D\subseteq V$، مجموعه احاطه گر فازي در گراف G نامیده مي شود، هرگاه براي هر رأس $v\in V-D$، رأسي مانند $u\in D$ وجود داشته باشد که $\mu(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$ [۲].

تعریف ۲-۱-۲: مینیمم اندازه فازي در میان تمامي مجموعه هاي احاطه گر فازي در گراف G، عدد احاطه گر فازي نامیده مي شود و با $\gamma_f(G)$ یا به اختصار γ_f نشان داده مي شود [۲].

نکته ۲-۱-۱: مجموعه احاطه گر فازي از اندازه γ_f را با γ_f-set نشان مي دهیم.

مثال۲-۱-۱: درگراف فازي G، در شکل (۲-۱) مرتبه، اندازه و عدد احاطه گر فازي را بدست آورده ایم.



شکل ۲-۱، گراف فازي G

---

[۲۴] fuzzy domination number
[۲۵] connected fuzzy domination number
[۲۶] independent fuzzy domination number
[۲۷] total fuzzy domination number
[۲۸] fuzzy effective distance k-dominating set

$P = 0.7 + 0.5 + 0.6 + 0.3 + 0.4 = 2.5$

$q = 0.4 + 0.1 + 0.5 + 0.3 + 0.2 + 0.4 + 0.3 + 0.4 = 2.6$

$\gamma_f = |\{a,e\}|_f = 0.7 + 0.4 = 1.1$

قضیه ۲-۱-۱: در گراف فازي K_σ ، $\gamma_f(K_\sigma) = \min_{v \in V} \sigma(v)$.

اثبات: از آنجاکه به ازاي هر $v \in V$ ، $\{v\}$مجموعه احاطه گر فازي براي K_σ مي باشد داريم : $\gamma_f(K_\sigma) = \min_{v \in V} \sigma(v)$ [۶] . ■

قضیه ۲-۱-۲: $\gamma_f \le P - \Delta_N(G)$

اثبات: فرض کنيم v رأسي از G باشد که $d_N(v) = \Delta_N(G)$. در اين صورت$V - N(v)$ يك مجموعه احاطه گر فازي در G مي باشد .
بنابر اين $\gamma_f \le |V - N(v)|_f = P - \Delta_N(G)$ [۶] . ■

نکته ۲-۱-۲:

۱) کران بالاي γ_fدر نامساوي فوق نمي تواند کاهش يابد زيرا به طور مثال براي گراف کاملK_σ ، رأس v با کمترين درجه عضويت، مجموعه احاطه گر فازي از اندازه مينيمم مي باشد . با توجه به اينکه گرافK_σ

يك گراف فازي کامل مي باشد درجه همسايگي هر رأس با مجموع درجه عضويت ساير رأس هاي گراف برابر خواهد بود و از آنجا که رأس v کمترين درجه عضويت را دارد لذا $d_N(v) = \Delta_N(K_\sigma)$ و $\gamma_f = \sigma(v) = P - \Delta_N(K_\sigma)$.

۲) واضح است که $\Delta_E \le \Delta_N$ و لذا $\gamma_f \le P - \Delta_E$ [۶] .

قضیه ۲-۱-۳: $\gamma_f(G)=p$ اگر و تنها اگر $\forall u,v \in V\ ;\ \mu(u,v)<\sigma(u)\wedge\sigma(v)$. منحصرا $\gamma_f(\bar{K}_\sigma)=p$.

اثبات: با توجه به تعریف عدد احاطه گر فازي اثبات بديهي است [۶]. ■

قضیه ۲-۱-۴: فرض كنيم $G=(\sigma,\mu)$ يك گراف فازي روي V باشد كه در شرط زير صدق مي كند. به ازاي هر دو رأس مجزاي $u,v\in V$ وجود دارد $w\in V$ به گونه اي كه $\mu(w,u)=\sigma(w)\wedge\sigma(u)$ و $\mu(w,v)=\sigma(w)\wedge\sigma(v)$. در اين صورت $\gamma_f\le\delta_N(G)$.

اثبات: فرض كنيم $v\in V$ رأسي از G باشد كه $d_N(v)=\delta_N(G)$. در اين صورت $N(v)$ يك مجموعه احاطه گر فازي از اندازه $\delta_N(G)$ در گراف G مي باشد زيرا طبق فرض هر رأس $u\notin N(v)$ با v مجزا بوده و توسط رأسي از $N(v)$ احاطه خواهد شد لذا $\gamma_f\le\delta_N(G)$ [۷]. ■

قضیه ۲-۱-۵: براي هر گراف فازي G، $\gamma_f+\bar{\gamma}_f\le 2p$. كه $\bar{\gamma}_f$ عدد احاطه گرفازي $\bar{G}$ مي باشد. همچنين تساوي برقرار است اگر و تنها اگر $\forall u,v\in V\ ;\ 0<\mu(u,v)<\sigma(u)\wedge\sigma(v)$.

اثبات: نا مساوي برقرار است چون $\bar{\gamma}_f\le p$ و $\gamma_f\le p$. براي اثبات قسمت دوم داريم:

$$\gamma_f=p\Leftrightarrow\left(\forall u,v\in V\ :\ \mu(u,v)<\sigma(u)\wedge\sigma(v)\right)$$

همچنين در گراف $\bar{G}$ خواهيم داشت:

$$\bar{\gamma}_f=\left(p\Leftrightarrow\forall u,v\in V\ :\ \sigma(u)\wedge\sigma(v)-\mu(u,v)<\sigma(u)\wedge\sigma(v)\right)$$

كه دو نامساوي فوق معادل است با $\mu(u,v)>0$. از اين رو $\gamma_f+\bar{\gamma}_f\le 2p$ اگر و تنها اگر $\forall u,v\in V;\ 0<\mu(u,v)<\sigma(u)\wedge\sigma(v)$ [۶]. ■

۲-۲ عدد احاطه گر فازي همبند

تعریف۲-۲-۱: مجموعه احاطه گر فازي D در گراف G، مجموعه احاطه گر فازي همبند ناميده مي شود هرگاه $G[D]$ يك زير گراف همبند از G باشد [۱۴] .

تعريف ۲-۲-۲: مينيمم اندازه فازي در ميان تمامي مجموعه هاي احاطه گر فازي همبند در گراف فازي G، عدد احاطه گرفازي همبند ناميده مي شودو با $\gamma_c(G)$ و يا به اختصار γ_C نشان داده مي شود [۱۴] .

نكته ۲-۲-۱: مجموعه احاطه گر فازي همبند با اندازه γ_C را با نشان γ_c-set مي دهيم .

۳-۲ مجموعه احاطه گر فازي مينيمال

تعريف۲-۳-۱: مجموعه احاطه گر فازي D در گراف G، مجموعه احاطه گر فازي مينيمال ناميده مي شود هرگاه براي هر $d \in D$، $D-\{d\}$ مجموعه احاطه گر فازي نباشد [۶] .

قضيه ۲-۳-۱: مجموعه احاطه گر فازي D در گراف G، مجموعه احاطه گر فازي مينيمال است اگر و تنها اگر براي هر $d \in D$ يكي از دو شرط زير رخ دهد :

۱- $N(d) \cap D = \varnothing$

۲- وجود داشته باشد $x \in V-D$ كه $N(x) \cap D = \{d\}$.

اثبات: $\Leftarrow$ فرض كنيم D مجموعه احاطه گر فازي مينيمال باشد و $d \in D$. در اين صورت $D_d = D-\{d\}$ مجموعه احاطه گر فازي نمي باشد از اين رو رأس $x \in V-D_d$ وجود دارد كه توسط هيچ رأسي از D_d احاطه نمي شود. اگر $x=d$ رابطه (۱) برقرار است و اگر $x \neq d$ رابطه (۲) برقرار است. زيرا x توسط هيچ رأسي از D_d احاطه نمي شود و چون D مجموعه احاطه گر فازي است پس رأس

d تنها رأسي از Dخواهد بودكه x را احاطه مي كند لذا $N(x)\cap D=\{d\}$.

$\Rightarrow$اثبات بديهي است[۶] . ■

قضيه ۲-۳-۲: فرض كنيم Gگراف فازي فاقد رأس تنها باشد. اگر D مجموعه احاطه گر فازي مينيمال در G باشد در اين صورت $V-D$ مجموعه احاطه گر فازي درگراف G مي باشد.

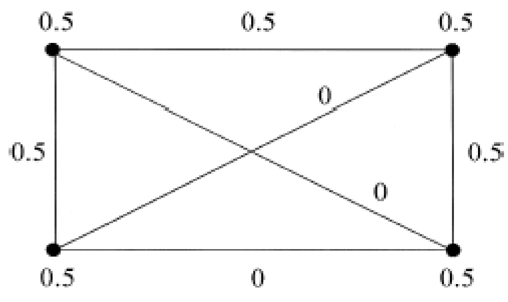
اثبات: فرض كنيم d رأس دلخواهي در D باشد. از آنجا كه G فاقد رأس تنها است، $N(d)\neq\varnothing$ و رأسي مانند $c\in N(d)$ وجود دارد كه بر اساس قسمت (۱) قضيه (۲-۲-۱)، $c\in V-D$. بنابر اين هر رأس از Dتوسط رأسي از $V-D$ احاطه مي شود. لذا $V-D$ مجموعه احاطه گر فازي مي باشد [۶] . ■

نتيجه ۲-۳-۱: براي هرگراف فازي فاقد رأس تنها $\gamma_f\le p/2$.

اثبات: هر گراف فازي فاقد رأس تنها داراي دو مجموعه احاطه گر فازي مجزا به صورتD و $V-D$ مي باشد كه حداقل يكي از آنها از اندازه فازي كمتر مساوي$p/2$ است لذا $\gamma_f\le p/2$ [۶] . ■

نتيجه ۲-۳-۲: فرض كنيم G يك گراف فازي باشد. اگر Gو $\bar{G}$ هر دو فاقد رأس تنها باشند $\gamma_f+\bar{\gamma}_f\le p$. علاوه بر اين تساوي رخ مي دهد اگر و تنها اگر $\gamma_f=\bar{\gamma}_f=p/2$ [۶] .

مثال ۲-۳-۱: براي گراف فازي G (شكل ۲-۲)، $P=2$ و $\gamma_f=\bar{\gamma}_f=1$ بنابر اين $\gamma_f+\bar{\gamma}_f=2$.



شكل ۲-۲، گراف فازي G

۲-۴ مجموعه احاطه گر مستقل فازي [29]

تعریف۲-۴-۱: فرض کنیم $G=(V,\sigma,\mu)$ يك گراف فازي باشد. زير مجموعه S در V، مجموعه مستقل فازي ناميده مي شود هرگاه $\forall u,v \in S: \ \mu(u,v) < \sigma(u) \wedge \sigma(v)$. در غير اين صورت S يك مجموعه فازي وابسته[30] ناميده مي شود [۳].

تعریف ۲-۴-۲: مجموعه احاطه گر فازي D در گراف G، مجموعه احاطه گر مستقل فازي ناميده مي شود هرگاه D يك مجموعه مستقل فازي باشد [۳].

تعریف ۲-۴-۳: مينيمم اندازه فازي در ميان تمامي مجموعه هاي احاطه گر مستقل فازي در گراف G، عدد احاطه گر مستقل فازي ناميده مي شود و اكثرا با نماد $\gamma_i(G)$ يا γ_i نشان داده مي شود. در برخي موارد عدد احاطه گر مستقل فازي با نماد $i(G)$ نيز نشان داده شده است. در اين تحقيق از نماد $\gamma_i(G)$ استفاده كرده ايم [۳و۴و۱۴].

قضيه ۲-۴-۱: اگر D مجموعه احاطه گر مستقل فازي در گراف G باشد در اين صورت D هم مجموعه احاطه گر فازي مينيمال و هم مجموعه مستقل فازي ماكسيمال مي باشد. بالعكس هر مجموعه مستقل فازي ماكسيمال در گراف G، مجموعه احاطه گر مستقل فازي مي باشد.

اثبات: $\Leftarrow$ اگر D مجموعه احاطه گر مستقل فازي در گراف G باشد آنگاه $\forall\ d \in D$, $D_d = D - \{d\}$ مجموعه احاطه گر فازي نمي

[29] fuzzy independent dominating set
[30] dependent fuzzy set

باشد. زیرا D مستقل فازي است و هيچ رأسي از D_d رأس d را احاطه نمي كند. همچنين براي $x \notin D$ از آنجا كه D، مجموعه احاطه گر فازي است و رأسي از D آن x را احاطه مي كند لذا $D \cup \{x\}$ مستقل فازي نخواهد بود. بنابر اين D مجموعه احاطه گر فازي مينيمال و همچنين مجموعه مستقل فازي ماكسيمال است.

$\Rightarrow$ فرض كنيم D مجموعه مستقل فازي ماكسيمال در گراف G باشد. در اين صورت به ازاي هر $x \in V\text{-}D$، $D \cup \{x\}$ مستقل فازي نمي باشد يعني x توسط رأسي از D احاطه مي شود. بنابر اين D مجموعه احاطه گر مستقل فازي مي باشد [۶]. ■

۲-۵ عدد احاطه گري فازي كل

تعريف ۲-۵-۱: فرض كنيم G يك گراف فازي فاقد رأس تنها باشد. $D \subseteq V$، مجموعه احاطه گر فازي كل ناميده مي شود هرگاه هر رأس V توسط رأسي از D احاطه شده باشد [۶].

تعريف ۲-۵-۲: مينيمم اندازه فازي در ميان تمامي مجموعه هاي احاطه گر فازي كل در گراف G، عدد احاطه گري فازي كل ناميده مي شود و با $\gamma_{ft}(G)$ و يا γ_{ft} نشان داده مي شود [۶].

قضيه ۲-۵-۱: براي هر گراف فازي فاقد رأس تنهاي G، $\gamma_{ft} = P$ اگر و تنها اگر هر رأس G داراي يك احاطه كننده ي يكتا باشد.

اثبات: $\Leftarrow$ اگر هر رأس G داراي يك احاطه كننده ي يكتا باشد در اين صورت V تنها مجموعه احاطه گر فازي كل در گراف G مي باشد، لذا $\gamma_{ft} = P$.

$\Rightarrow$ فرض كنيم $\gamma_{ft} = P$. اثبات به برهان خلف: فرض مي كنيم رأس $u \in V$ وجود داشته باشد به طوري كه دو احاطه كننده ي متمايز xy داشته باشد. در اين صورت $V - \{x\}$ مجموعه احاطه گر فازي كل در گراف G است كه $\gamma_{ft} < P$. لذا فرض خلف باطل و

هر رأس از G داراي يك احاطه كننده ي يكتا خواهد بود[۶] ■.

نتيجه ۲-۵-۱: اگر $\gamma_{ft} = P$ در اين صورت تعداد رئوس گراف G زوج مي باشد. زيرا طبق قضيه قبل هر رأس از گراف G داراي يك احاطه كننده ي يكتا ست[۶] .

قضيه ۲-۵-۲: فرض كنيم G گراف فازي فاقد رأس تنها باشد. در اين صورت $\gamma_{ft} + \bar{\gamma}_{ft} \leq 2P$ همچنين تساوي برقرار است اگر و تنها اگر

۱)تعداد رئوس گراف G زوج باشد. (به طور مثال $2n$)

۲)مجموعه S_1 از n يال مؤثر دو به دو مجزا در گراف G وجود داشته باشد.

۳) مجموعه S_2 از n يال مؤثر دو به دو مجزا در گراف $\bar{G}$ وجود داشته باشد.

۴)به ازاي هر $x,y \notin S_1 \cup S_2$ ، $0 < \mu(x,y) < \sigma(x) \wedge \sigma(y)$.

اثبات: از آنجا كه $\gamma_{ft} \leq P$ و $\bar{\gamma}_{ft} \leq P$ نامساوي برقرار است. علاوه بر اين $\gamma_{ft} + \bar{\gamma}_{ft} = 2P$ اگر و تنها اگر $\gamma_{ft} = \bar{\gamma}_{ft} = P$ و طبق نتيجه (۲-۵-۱) تعداد رئوس گراف زوج است. (به طور مثال $2n$) حال چون $\gamma_{ft} = P$ طبق قضيه (۲-۵-۱) هر رأس از G داراي يك احاطه كننده ي يكتا مي باشد. از آنجا كه G داراي $2n$ رأس است مجموعه S_1 از n يال مؤثر دو به دو مجزا در گراف G وجود دارد. به طور مشابه از $\bar{\gamma}_{ft} = P$ داريم مجموعه S_2 از n يال مؤثر دو به دو مجزا در گراف نيز $\bar{G}$ وجود دارد. علاوه بر اين اگر $x,y \notin S_1 \cup S_2$ در اين صورت با توجه به اينكه هر رأس از G داراي يك احاطه كننده ي يكتا است، xy يك يال غير مؤثر بوده و $0 \prec \mu(x,y) \prec \sigma(x) \wedge \sigma(y)$. لذا اثبات بديهي است[۶]. ■

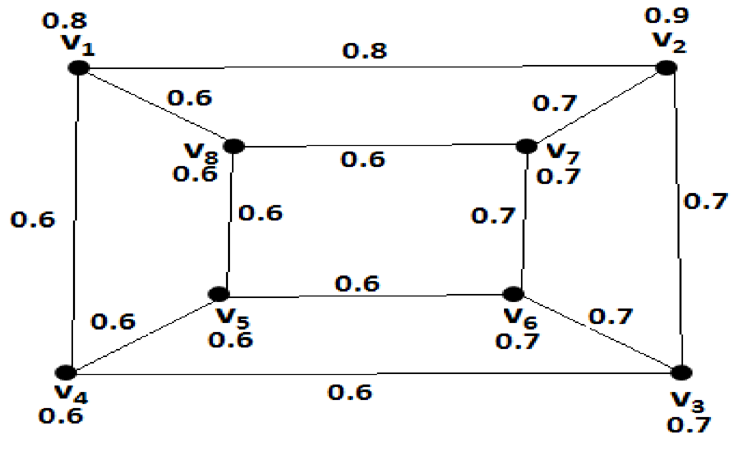
۲-۶ مجموعه احاطه گر K-فاصله مؤثر فازي[31]

تعريف۲-۶-۱: دو رأس u و v در گراف فازي G، در يك K-فاصله مؤثر فازي قرار دارند هرگاه مسيري شامل K يال مؤثر بين آنها وجود داشته باشد [۵] .

تعريف۲-۶-۲: $S \subseteq V$ در گراف فازي $G=(\sigma,\mu)$ مجموعه احاطه گر K- فاصله مؤثر فازي ناميده مي شود هرگاه هر رأس از $V-S$ با حداقل يكي از رأس هاي موجود در S در يك K- فاصله مؤثر فازي قرار داشته باشد [۵] .

نكته ۲-۶-۱: درگراف فازي $G=(V,\sigma,\mu)$ هر مجموعه احاطه گر فازي، يك مجموعه احاطه گر ۱- فاصله مؤثر فازي هستند .

مثال۲-۶-۱: در گراف فازي شكل (۲-۳) مجموعه احاطه گر ۲- فاصله مؤثر فازي $\{v_6,v_8\}$ مي باشد .



شكل۲-۳، گراف فازي G

۲-۷ تغييرات عدد احاطه گري در اثر افزايش و كاهش رأس

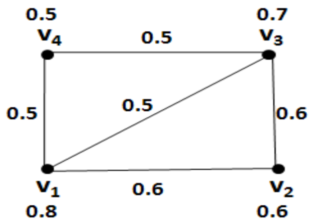
براي بررسي تغييرات عدد احاطه گري فازي در اثر افزايش و كاهش رأس ابتدا با چند مثال نشان مي دهيم كه با حذف

---

[31] fuzzy effective distance k-dominating set

رأس v در گراف فازي G، عدد احاطه گري فازي مي تواند افزايش و يا كاهش يافته و يا بدون تغيير بماند.

مثال ۲-۷-۱: درگراف فازي شكل (۲-۴) تغيرات ناشي از حذف هر رأس در عدد احاطه گري فازي نشان داده شده است.



شكل ۲- ۴، گراف فازي مثال ۲-۷-۱

$$\gamma_f(G)=\left|\{v_2,v_4\}\right|_f=\sigma(v_2)+\sigma(v_4)=1.1$$

$$\gamma_f(G-v_1)=\left|\{v_3\}\right|_f=\sigma(v_3)=0.7$$

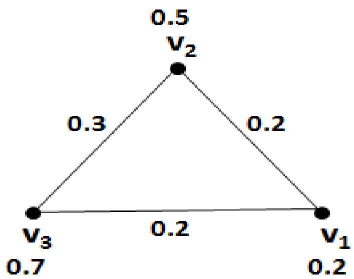
$$\gamma_f(G-v_2)=\left|\{v_4\}\right|_f=\sigma(v_4)=0.5$$

$$\gamma_f(G-v_3)=\left|\{v_1\}\right|_f=\sigma(v_1)=0.8$$

$$\gamma_f(G-v_4)=\left|\{v_2\}\right|_f=\sigma(v_2)=0.6$$

همان طور كه مشاهده مي شود در اين مثال حذف هر رأس عدد احاطه گري فازي را كاهش مي دهد.

مثال ۲-۷-۲: درگراف فازي شكل (۲- ۵) تغيرات ناشي از حذف رئوس مشخص شده است.



شكل ۲- ۵، گراف فازي مثال ۲-۷-۲

$$\gamma_f(G)=\left|\{v_1\}\right|_f=\sigma(v_1)=0.2$$

$$\gamma_f(G-v_1)=\left|\{v_2,v_3\}\right|_f=\sigma(v_2)+\sigma(v_3)=1.2$$

$$\gamma_f(G-v_2)=\left|\{v_1\}\right|_f=\sigma(v_1)=0.2$$

دراین مثال حذف رأس v_1 عدد احاطه گري فازي را افزایش مي دهد. همچنین مشاهده مي شود که حذف رأس v_2 عدد احاطه گري فازي را تغییر نمي دهد.

تعریف۲-۷-۱: مجموعه هاي V^0 و V^+ و V^- را به شکل زیر تعریف مي کنیم [۷] .

$$V^0=\{v\in V \mid \gamma_f(G-v)=\gamma_f(G)\} \qquad (۱-۲)$$

$$V^+=\{v\in V \mid \gamma_f(G-v)>\gamma_f(G)\} \qquad (۲-۲)$$

$$V^-=\{v\in V \mid \gamma_f(G-v)<\gamma_f(G)\} \qquad (۲-۳)$$

نکته ۲-۷-۱: اگر v یك رأس تنها در گراف فازي G باشد آنگاه $v\in V^-$.

قضیه ۲-۷-۱: فرض کنیم $G=(\sigma,\mu)$ یك گراف فازي روي V و $v\in V$ باشد. اگر یك γ_f-set مانند S شامل رأس v وجود داشته باشد که در شرایط زیر صدق کند در این صورت $v\in V^-$ خواهد بود.

۱) v در S یك رأس تنها باشد.

۲) اگر $u\in V-S$ و $\mu(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$، آنگاه $\exists\, w\in S-\{v\}$ که $\mu(uw)=\sigma(u)\wedge\sigma(w)$.

اثبات: اگر يك $\gamma_f -set$ مانند S وجود داشته باشد كه در شرايط قضيه فوق صدق كند در اين صورت $S-\{v\}$ يك مجموعه احاطه گر فازي براي $G-v$ است لذا $\gamma_f(G-v)\le\left|S-\{v\}\right|_f<\gamma_f(G)$ بنابر اين $v\in V^-$ [۷] . ■

نكته ۲-۷-۲: عكس قضيه (۲-۷-۱) برقرار نمي باشد. به طور مثال در گراف فازي شكل (۲-۴) تمامي رئوس در V^- مي باشند. در حالي كه v_1 v_3 عضو هيچ يك از $\gamma_f -set$ ها در G نمي باشند.

قضيه ۲-۷-۲: فرض كنيم $G=(\sigma,\mu)$ يك گراف فازي روي V باشد. اگر $v\in V^+$ باشد در اين صورت

۱) v رأس تنها در G نيست.

۲) v عضوي از هر $\gamma_f -set$ در G است.

اثبات:۱) اگر v يك رأس تنها در گراف باشد براي هر $\gamma_f -set$ مانند S در G داريم $v\in S$ و همچنين $S-\{v\}$ يك مجموعه احاطه گر فازي براي گراف $G-v$ مي باشد لذا $\gamma_f(G-v)<\gamma_f(G)$ يعني $v\in V^-$ كه با فرض اوليه در تناقض است پس (۱) برقرار است.

۲) اگر يك $\gamma_f -set$ مانند S در G وجود داشته باشد كه $v\notin S$ در اين صورت يك مجموعه احاطه گر فازي براي $G-v$ است بنابر اين $\gamma_f(G-v)<\gamma_f(G)$. كه با $v\in V^+$ در تناقض مي باشد [۷] . ■

۲-۸ تغييرات عدد احاطه گري در اثر كاهش و افزايش يال

تعريف۲-۸-۱: فرض كنيم $G=(\sigma,\mu)$ يك گراف فازي روي V باشد و $e=uv$ يالي از گراف باشد كه $\mu(uv)>0$. زير گراف پوشايي از G كه با قرار دادن $\mu(uv)=0$ بدست مي آيد، زيرگراف بدست آمده از حذف يال e ناميده مي شود و با $G-e$ نشان داده مي شود [۷] .

قضیه ۲-۸-۱: فرض کنیم $G=(\sigma,\mu)$ یك گراف فازي روي V باشد و براي هر يال مؤثر e در G داشته باشیم $\gamma_f(G-e)=\gamma_f(G)$. در این صورت براي هر يال موثر $e=uv$ يك γ_f-set مانند S در G وجود دارد كه در يكي از شرايط زير صدق مي كند.

۱) $u,v\in S$

۲) $u,v\in V-S$

۳) اگر $u\in S$ و $v\in V-S$ در این صورت $w\in S-\{u\}$ وجود دارد كه $\mu(vw)=\sigma(v)\wedge\sigma(w)$.

اثبات: فرض کنیم G فاقد يك γ_f-set باشد كه در يكي از شرايط فوق صدق كند. در این صورت هر γ_f-set مانند S در G، يك مجموعه احاطه گر فازي براي $G-e$ نمي باشد زيرا رئوس u,v در $G-e$ احاطه نمي شوند. علاوه بر این هر مجموعه احاطه گر فازي براي $G-e$، مجموعه احاطه گر فازي براي G نخواهد بود. لذا $\gamma_f(G-e)\neq\gamma_f(G)$ كه با فرض اوليه در تناقض مي باشد [۷]. ■

تعريف۲-۸-۲: فرض کنیم $G=(\sigma,\mu)$ يك گراف فازي روي V باشد و $e=uv$ يالي از G باشد كه $0\leq\mu(uv)<\sigma(u)\wedge\sigma(v)$. گراف فازي بدست آمده از G با جايگذاري كردن $\mu(uv)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$، گراف حاصل از افزايش يال e ناميده مي شود و با $G+e$ نشان داده مي شود [۷].

قضیه ۲-۸-۲: فرض کنیم $G=(\sigma,\mu)$ يك گراف فازي روي V باشد. در این صورت براي هر يال $e=uv$ كه $0\leq\mu(uv)<\sigma(u)\wedge\sigma(v)$ داریم $\gamma_f(G+e)=\gamma_f(G)$ اگر وتنها اگر $V^-=\varnothing$.

اثبات: $\Leftarrow$ فرض کنیم $\gamma_f(G+e)=\gamma_f(G)$ براي هر يال $e=uv$ كه $0\leq\mu(uv)<\sigma(u)\wedge\sigma(v)$. اگر $V^-\neq\varnothing$ در این صورت $\exists x\in V^-$ كه $\gamma_f(G-x)<\gamma_f(G)$. حال فرض کنیم S مجموعه احاطه گر فازي از اندازه $\gamma_f(G-x)$ در $G-\{x\}$ باشد لذا $|S|_f<\gamma_f(G)$. فرض کنیم $e=xy$

يالي از G باشد كه $y \in S$ و $0 \le \mu(xy) < \sigma(x) \wedge \sigma(y)$. با اضافه كردن يال مؤثر $e = xy$ به G رأس x نيز توسط S احاطه

خواهد شد . بنابراين S يك مجموعه احاطه گر فازي براي $G+e$ است كه $\gamma_f(G+e) < \gamma_f(G)$ و اين با فرض اوليه قضيه در تناقض مي باشد در نتيجه $V^- = \varnothing$.

$\Rightarrow$ فرض كنيم $V^- = \varnothing$. واضح است كه در هر گراف فازي با اضافه كردن يك يال مؤثر مانند e خواهيم داشت: $\gamma_f(G+e) \le \gamma_f(G)$. حال طبق فرض خلف اگر تساوي برقرار نباشد رئوس $u,v \in V$ وجود دارند كه $0 \le \mu(uv) < \sigma(u) \wedge \sigma(v)$ و $\gamma_f(G+uv) < \gamma_f(G)$. اگر S مينيمم مجموعه احاطه گر فازي براي $G+uv$ باشد از آنجا كه S مجموعه احاطه گر فازي براي G نيست پس بايد دقيقا يكي از دو رأس u يا v عضو S باشند . بدون خلل در اثبات فرض كنيم $u \in S$ و $v \notin S$. واضح است كه S، مجموعه احاطه گر فازي براي $G-v$ است پس $\gamma_f(G-v) < \gamma_f(G)$. لذا $v \in V^-$ كه با فرض در تناقض است[۷] . ■

۲- ۹ احاطه گري در تركيب گراف هاي فازي[۳۲]

تعريف ۲-۹-۱: فرض كنيم $G_1 = (\sigma_1, \mu_1)$ و $G_2 = (\sigma_2, \mu_2)$ به ترتيب دوگراف فازي روي V_1 و V_2 باشند . تركيب دو گراف فازي G_1 و G_2 يك گراف فازي روي $V_1 \times V_2$ مي باشد كه با نماد $G_1 o\, G_2$ نشان داده مي شود و به صورت زير تعريف مي شود [۸ و ۱۴] .

(۴-۲)

$$G_1 o\, G_2 = (\sigma_1\ o\ \sigma_2\ ,\ \mu_1\ o\ \mu_2)$$

(۵-۲)

$$\sigma_1\ o\ \sigma_2(u,v) = \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v)$$

32 composition of fuzzy graphs

(۶-۲)

$$\mu_1 o \mu_2((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \begin{cases} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2,v_2) & u_1=v_1 \ , \ u_2 \neq v_2 \\ \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_2(v_2) \wedge \mu_1(u_1,v_1) & \text{o.w} \end{cases}$$

قضیه ۲-۹-۱: فرض کنیم D_1 و D_2 به ترتیب مجموعه هاي احاطه گر فازي گراف هاي $G_1=(\sigma_1,\mu_1)$ و $G_2=(\sigma_2,\mu_2)$ باشند. در این صورت $\gamma_f\,(G_1 o\, G_2) \leq \left|D_1 \times D_2\right|_f$.

اثبات: فرض کنیم $(u,v) \notin D_1 \times D_2$. در این صورت یکي از سه حالت زیر برقرار مي باشد.

۱) $u \notin D_1$ و $v \in D_2$. چون D_1 مجموعه احاطه گر فازي گراف G_1 مي باشد $u_1 \in D_1$ وجود دارد که $\mu_1(u_1,u)=\sigma_1(u_1)\wedge\sigma_1(u)$. حال با در نظر گرفتن $(u_1,v) \in D_1 \times D_2$ داریم:

$$\mu_1 o \mu_2\big((u,v),(u_1,v)\big) = \sigma_2(v) \wedge \mu_1(u,u_1)$$

$$= \sigma_2(v) \wedge \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(u_1)$$

$$= \sigma_2(v) \wedge \sigma_1(u) \wedge \sigma_2(v) \wedge \sigma_1(u_1)$$

$$= \sigma_1 o \sigma_2(u,v) \wedge \sigma_1 o \sigma_2(u_1,v)$$

لذا (u,v) توسط $(u_1,v) \in D_1 \times D_2$ احاطه مي شود.

۲) $u \in D_1$ و $v \notin D_2$. چون D_2 مجموعه احاطه گر فازي گراف G_2 است $v_1 \in D_2$ وجود دارد که $\mu_2(v_1,v)=\sigma_2(v_1)\wedge\sigma_2(v)$. حال با در نظر گرفتن $(u,v_1) \in D_1 \times D_2$ داریم:

$$\mu_1 o \mu_2\big((u,v)\,,(u,v_1)\big)=\sigma_1(u)\wedge\mu_2(v,v_1)$$

$$=\sigma_1(u)\wedge\sigma_2(v)\wedge\sigma_2(v_1)$$

$$=\sigma_1(u)\wedge\sigma_2(v)\wedge\sigma_1(u)\wedge\sigma_2(v_1)$$

$$=\sigma_1 o \sigma_2(u,v)\ \wedge\ \sigma_1 o \sigma_2(u,v_1)$$

لذا (u,v) توسط $(u,v_1)\in D_1\times D_2$ احاطه مي شود.

۳) $u\notin D_1$ و $v\notin D_2$. دراين صورت $u_1\in D_1$ وجود دارد که $\mu_1(u_1,u)=\sigma_1(u_1)\wedge\sigma_1(u)$. همچنين

$v_1\in D_2$ وجود دارد که $\mu_2(v_1,v)=\sigma_2(v_1)\wedge\sigma_2(v)$. که $(u_1,v_1)\in D_1\times D_2$ داريم:

$$\mu_1 o \mu_2\big((u,v)\,,(u_1,v_1)\big)=\mu_1(u,u_1)\wedge\sigma_2(v)\wedge\sigma_2(v_1)$$

$$=\sigma_1(u)\wedge\sigma_1(u_1)\wedge\sigma_2(v)\wedge\sigma_2(v_1)$$

$$=\sigma_1(u)\wedge\sigma_2(v)\wedge\sigma_1(u_1)\wedge\sigma_2(v_1)$$

$$=\sigma_1 o \sigma_2(u,v)\ \wedge\ \sigma_1 o \sigma_2(u_1,v_1)$$

لذا (u,v) توسط $(u_1,v_1)\in D_1\times D_2$ احاطه مي شود. با توجه به سه حالت فوق $D_1\times D_2$ مجموعه احاطه گر فازي براي $G_1 o\, G_2$ مي باشد و $\gamma_f\,(G_1 o\, G_2)\le\left|D_1\times D_2\right|_f$ [۸]. ■

قضيه ۲-۹-۲: فرض کنيم $G_1=(\sigma_1,\mu_1)$ گراف فازي همبند باشد. همچنين فرض کنيم D_1 مجموعه احاطه گر فازي همبند G_1 باشد و D_2 مجموعه احاطه گر فازي گراف $G_2=(\sigma_2,\mu_2)$ باشد. در اين صورت $G_1 o\, G_2$ نيز همبند مي باشد و $\gamma_c\,(G_1 o\, G_2)\le\left|D_1\times D_2\right|_f$.

اثبات: فرض کنيم $(u,v)\,,\,(w,z)\in V_1\times V_2$ باشند . از آنجا که G_1 همبند مي باشد بين u و v مسيري مانند $P: u,x_1,x_2,...,x_{n-1},w$ وجود دارد . حال $P': (u,v),(x_1,v),(x_2,v),...,(x_{n-1},v),(w,z)$ يك مسير مؤثر فازي بين دو رأس (u,v) و (w,z) در $G_1 o\, G_2$ مي باشد . به استدلال مشابه $D_1\times D_2$ نيز همبند مي باشد . طبق قضيه (۲-۹-۱) $D_1\times D_2$ يك مجموعه احاطه گر فازي براي $G_1 o\, G_2$ مي باشد لذا

$\gamma_c(G_1 o\, G_2)\le \left|D_1\times D_2\right|_f$ [۱۴] . ■

۲- ۱۰ احاطه گري در ضرب دکارتي[33] گراف هاي فازي

تعريف۲-۱۰-۱: فرض کنيم $G_1=(\sigma_1,\mu_1)$ و $G_2=(\sigma_2,\mu_2)$ به ترتيب دو گراف فازي روي V_1 و V_2 باشند . ضرب دکارتي دو گراف فازي G_1 و G_2 يك گراف فازي روي $V_1\times V_2$ مي باشد که با نماد $G_1\square G_2$ نشان داده مي شود و به شکل زير تعريف مي شود [۸ و۱۴] .

(۲-۷)

$$G_1\square G_2=(\sigma_1\square\sigma_2\,,\,\mu_1\square\mu_2)$$

(۲-۸)

$$\sigma_1\square\sigma_2(u,v)=\sigma_1(u)\wedge\sigma_2(v)$$

[33] cartesian product

(۹-۲)

$$\mu_1 \square \mu_2((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = \begin{cases} \sigma_1(u_1) \wedge \mu_2(u_2,v_2) & u_1=v_1 \\ \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1,v_1) & u_2=v_2 \\ 0 & \text{o.w} \end{cases}$$

قضیه ۲-۱۰-۱: فرض کنیم D_1 و D_2 به ترتیب مینیمم مجموعه های احاطه گر فازي درگراف هاي $G_1=(\sigma_1,\mu_1)$ و $G_2=(\sigma_2,\mu_2)$ باشند. در این صورت رابطه زیر برقرار مي باشد.

$$\gamma_f(G_1 \square G_2) \le \min\left\{ \left|D_1 \times V_2\right|_f , \left|V_1 \times D_2\right|_f \right\}$$

اثبات: ابتدا نشان مي دهيم $D_1 \times V_2$ مجموعه احاطه گر فازي $G_1 \square G_2$ مي باشد. رأس $(u_1,u_2) \notin D_1 \times V_2$ را در نظر مي گيريم. از آنجا که D_1 مجموعه احاطه گر فازي در گراف G_1 مي باشد لذا $v_1 \in D_1$ وجود دارد که $\mu_1(u_1,v_1)=\sigma_1(u_1)\wedge\sigma_1(v_1)$. داريم $(v_1,u_2) \in D_1 \times V_2$ و

$$\mu_1 \square \mu_2((u_1,u_2),(v_1,u_2)) = \sigma_2(u_2) \wedge \mu_1(u_1,v_1)$$

$$= \sigma_2(u_2) \wedge \sigma_1(u_1) \wedge \sigma_1(v_1)$$

$$= \sigma_1 \square \sigma_2(u_1,u_2) \wedge \sigma_1 \square \sigma_2(v_1,u_2)$$

بنابراين (u_1,u_2) توسط $(v_1,u_2) \in D_1 \times V_2$ احاطه مي شود. لذا $D_1 \times V_2$ مجموعه احاطه گر فازي در $G_1 \square G_2$ مي باشد. به طور مشابه اثبات مي شود $V_1 \times D_2$ نيز مجموعه احاطه گر فازي در $G_1 \square G_2$ مي باشد. در نتيجه

$\gamma_f(G_1 \square G_2) \le \min\left\{ \left|D_1 \times V_2\right|_f , \left|V_1 \times D_2\right|_f \right\}$ [۸] . ■

قضیه ۲-۱۰-۲: فرض کنیم G_1 و G_2 دو گراف فازي همبند باشند و D_1 و D_2 به ترتیب مجموعه هاي احاطه گر فازي G_1 و G_2 باشند در این صورت:

۱) $G_1 \square G_2$ یك گراف فازي همبند است.

۲) اگر $G_1[D_1]$ همبند باشد آنگاه $\gamma_c(G_1 \square G_2) \le \left| D_1 \times V_2 \right|_f$.

۳) اگر $G_2[D_2]$ همبند باشد آنگاه $\gamma_c(G_1 \square G_2) \le \left| V_1 \times D_2 \right|_f$.

اثبات: براي اثبات مورد (۱) دو رأس متمایز (x_i , y_j) و (x_l , y_k) را $V_1 \times V_2$ در نظر مي گیریم. كافي است نشان دهیم یك مسیر مؤثر فازي بین این دو رأس دلخواه از $G_1 \square G_2$ وجود دارد. سه حالت زیر را در نظر مي گیریم:

حالت اول: $x_i = x_l$. در این صورت با توجه به همبندي G_2 یك مسیر مؤثر فازي بین دو رأس y_j و y_k مانند $P : y_j , y_{i_1} , y_{i_2} ,..., y_k$ وجود دارد به گونه اي كه براي هر دو رأس متوالي u و v در این مسیر $\mu_2(u,v) = \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v)$. حال از (۲- ۹) خواهیم داشت:

$$\mu_1 \square \mu_2\big((x_i ,u) , (x_i ,v)\big) = \sigma_1(x_i) \wedge \mu_2(u,v)$$

$$= \sigma_1(x_i) \wedge \sigma_2(u) \wedge \sigma_2(v)$$

$$= \sigma_1 \square \sigma_2(x_i ,u) \wedge \sigma_1 \square \sigma_2(x_i ,v)$$

لذا $P' : (x_i , y_j),(x_i , y_{i_1}),(x_i , y_{i_2}),...,(x_i , y_k)$ یك مسیر مؤثر فازي بین (x_i , y_j) و (x_l , y_k) خواهد بود و همبندي $G_1 \square G_2$ ثابت مي شود.

حالت دوم: $y_j = y_k$. با توجه به همبندي G_1 یك مسیر مؤثر فازي بین دو رأس x_i و x_l مانند $q : x_i , x_{i_1} , x_{i_2} ,..., x_l$ وجود دارد به گونه

اي که براي هر دو رأس متوالي u و v در اين مسير $\mu_1(u,v)=\sigma_1(u)\wedge\sigma_1(v)$. اکنون داريم:

$$\mu_1 \square \mu_2\big((u,y_j),(v,y_j)\big)=\sigma_2(y_j)\wedge\mu_1(u,v)$$

$$=\sigma_2(y_j)\wedge\sigma_1(u)\wedge\sigma_1(v)$$

$$=\sigma_1 \square \sigma_2(u,y_j)\wedge\sigma_1 \square \sigma_2(v,y_j)$$

لذا $P': (x_i,y_j),(x_{i_1},y_j),(x_{i_2},y_j),\ldots,(x_l,y_j)$ يک مسير مؤثر فازي بين (x_i,y_j) و (x_l,y_k) خواهد بود..

حالت سوم: $x_i\neq x_l$ و $y_j\neq y_k$. طبق حالت اول يک مسير مؤثر فازي يبن (x_i,y_j) و (x_i,y_k) وجود دارد. همچنين طبق حالت دوم يک مسير مؤثر فازي بين (x_i,y_j) و (x_l,y_j) خواهيم داشت. حال اجتماع اين دو مسير يک مسير مؤثر فازي بين (x_i,y_j) و (x_l,y_k) خواهد بود.

براي اثبات مورد (۲) و (۳) طبق قضيه (۲-۱۰-۱) $D_1\times V_2$ و $V_1\times D_2$ مجموعه هاي احاطه گر فازي در $G_1\square G_2$ مي باشند که همبندي $G_1\square G_2[D_1\times V_2]$ و $G_1\square G_2[V_1\times D]$ مشابه مورد (۱) ثابت مي شود [۱۴]. ■

قضيه ۲-۱۰-۳: فرض کنيم G_1گراف فازي فاقد رأس تنها باشد و D_1، مجموعه احاطه گر فازي کل G_1 باشد. در اين صورت $G_1\square G_2$ گراف فازي فاقد رأس تنها مي باشد و $\gamma_{ft}(G_1\square G_2)\leq |D_1\times V_2|_f$.

اثبات: فرض کنيم $(u,v)\in V_1\times V_2$ رأس دلخواهي از $G_1\square G_2$ باشد. D_1، مجموعه احاطه گر فازي کل در G_1 مي باشد پس بايد رأسي مانند $x\in D_1$ در وجود داشته باشد که $\mu_1(u,x)=\sigma_1(u)\wedge\sigma_1(x)$.

$$\mu_1 \square \mu_2\big((u,v),(x,v)\big) = \mu_1(u,x) \wedge \sigma_2(v)$$

$$= \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(x) \wedge \sigma_2(v)$$

$$= \sigma_1 \square \sigma_2(u,v) \wedge \sigma_1 \square \sigma_2(x,v)$$

بنابر این رأس (u,v) توسط رأس (x,v) احاطه مي شود لذا $G_1 \square G_2$ گراف فازي فاقد رأس تنها خواهد بود. همچنين با توجه به اينكه $(x,v) \in D_1 \times V_2$ لذا $D_1 \times V_2$ ، مجموعه احاطه گر فازي كل براي $G_1 \square G_2$ مي باشد و $\gamma_{ft}(G_1 \square G_2) \leq |D_1 \times V_2|_f$ [۱۴] . ■

نكته ۲-۱۰-۱: در شرايط مشابه $V_1 \times D_2$ نيز مجموعه احاطه گر فازي كل براي $G_1 \square G_2$ مي باشد.

قضيه ۲-۱۰-۴: فرض كنيم D_1 و D_2 به ترتيب مجموعه هاي احاطه گر فازي براي G_1 و G_2 باشند.

الف) $D_1 \times V_2$ ، مجموعه احاطه گر مستقل فازي براي $G_1 \square G_2$ مي باشد اگر D_1 مستقل فازي باشد و

$$\begin{cases} \mu_2(w,z) < \sigma_1(u) & u \in D_1,\ w,z \in V_2 \\ \mu_2(w,z) < \sigma_2(w) \wedge \sigma_2(z) & w,z \in V_2 \end{cases}$$

ب) $V_1 \times D_2$، مجموعه احاطه گر مستقل فازي براي $G_1 \square G_2$ مي باشد اگر D_2 مستقل فازي باشد و

$$\begin{cases} \mu_1(u,v) < \sigma_2(w) & u,v \in V_1,\ w \in D_2 \\ \mu_1(u,v) < \sigma_1(u) \wedge \sigma_1(v) & u,v \in V_1 \end{cases}$$

اثبات: الف) طبق قضيه (۲-۱۰-۱) ، $D_1 \times V_2$ مجموعه احاطه گر فازي در $G_1 \square G_2$ مي باشد. حال كافي است نشان دهيم هر دو رأس متمايز از $D_1 \times V_2$ مانند (x_1,y_1) و (x_2,y_2) يكديگر را احاطه نمي كنند. حالت هاي زير را در نظر مي گيريم:

حالت اول $x_1 = x_2$. از (۲- ۹) و (الف) داریم :

$$\mu_1 \circ \mu_2\big((x_1,y_1)\,,(x_2,y_2)\big) = \sigma_1(x_1) \wedge \mu_2(y_1,y_2)$$

$$< \sigma_1(x_1) \wedge \sigma_2(y_1) \wedge \sigma_2(y_2)$$

$$= \sigma_1 \circ \sigma_2(x_1,y_1) \wedge \sigma_1 \circ \sigma_2(x_2,y_2)$$

حالت دوم : $y_1 = y_2$. با توجه به استقلال D_1 و از (۲- ۹) حکم بصورت زیر به دست مي آيد .

$$\mu_1 \circ \mu_2\big((x_1,y_1)\,,(x_2,y_2)\big) = \sigma_2(y_1) \wedge \mu_1(x_1,x_2)$$

$$< \sigma_2(y_1) \wedge \sigma_1(x_1) \wedge \sigma_1(x_2)$$

$$= \sigma_1 \circ \sigma_2(x_1,y_1) \wedge \sigma_1 \circ \sigma_2(x_2,y_2)$$

حالت سوم : $x_1 \neq x_2$ و $y_1 \neq y_2$. دراین صورت از تعریف (۲- ۹)،

$$\mu_1 \circ \mu_2\big((x_1,y_1)\,,(x_2,y_2)\big) = 0$$

بنا بر این (x_1,y_1) و (x_2,y_2) یکدیگر را احاطه نمي كنند .

ب) طبق قضيه (۲-۱۰-۱) ، $V_1 \times D_2$ مجموعه احاطه گر فازي در $G_1 \circ G_2$ مي باشد . مشابه مورد الف، كافي است نشان دهيم هر دو رأس متمايز از $V_1 \times D_2$ مانند (x_1,y_1) و (x_2,y_2) يكديگر را احاطه نمي كنند . حالت هاي زير را در نظر مي گيريم :

حالت اول : $x_1 = x_2$. از استقلال D_2 داريم :

$$\mu_1 \circ \mu_2\big((x_1,y_1)\,,(x_2,y_2)\big) = \sigma_1(x_1) \wedge \mu_2(y_1,y_2)$$

$$< \sigma_1(x_1) \wedge \sigma_2(y_1) \wedge \sigma_2(y_2)$$

$$= \sigma_1 \circ \sigma_2(x_1,y_1) \wedge \sigma_1 \circ \sigma_2(x_1,y_2)$$

حالت دوم : $y_1 = y_2$. از رابطه (ب) داریم :

$$\mu_1 \circ \mu_2 \big((x_1, y_1), (x_2, y_2) \big) = \mu_1(x_1, x_2) \wedge \sigma_2(y_1)$$

$$< \sigma_1(x_1) \wedge \sigma_1(x_2) \wedge \sigma_2(y_1)$$

$$= \sigma_1 \circ \sigma_2(x_1, y_1) \wedge \sigma_1 \circ \sigma_2(x_2, y_2)$$

حالت سوم : $x_1 \neq x_2$ و $y_1 \neq y_2$. دراین صورت از تعریف (۲- ۹)،

$$\mu_1 \circ \mu_2 \big((x_1, y_1), (x_2, y_2) \big) = 0$$

بنابر این (x_1, y_1) و (x_2, y_2)یکدیگر را احاطه نمي کنند. و $V_1 \times D_2$، مجموعه احاطه گر مستقل فازي براي $G_1 \circ G_2$مي باشد. [۱۴] ■

قضيه ۲-۱۰-۵: اگر $S_1 \times S_2$، مجموعه احاطه گر فازي براي $G_1 \circ G_2$ باشد که $S_1 \subseteq V_1$ و $S_2 \subseteq V_2$. در اين صورت حداقل يکي از S_i ها با مجموعه مرجع خود برابر مي باشد.

اثبات: به برهان خلف فرض کنيم $S_1 \neq V_1$ و $S_2 \neq V_2$ باشند. رئوس $x \in V_1 - S_1$ و $y \in V_2 - S_2$ را در نظر مي گيريم. براي هر عضو از $S_1 \times S_2$ مانند (s_1, s_2)خواهيم داشت$\mu_1 \circ \mu_2 \big((s_1, s_2), (x, y) \big) = 0$. در نتيجه رأس$(x, y)$ توسط هيچ رأسي از $S_1 \times S_2$ احاطه نمي شود که با مجموعه احاطه گر فازي بودن$S_1 \times S_2$ در تناقض مي باشد لذا فرض خلف باطل و اثبات کامل مي شود [۱۴] . ■

۲- ۱۱ احاطه گري در ضرب مطلق[34] گراف هاي فازي

[34] categorical product

تعریف ۲-۱۱-۱: فرض کنیم $G_1=(V_1,\sigma_1,\mu_1)$ و $G_2=(V_2,\sigma_2,\mu_2)$ دو گراف فازي باشند. ضرب مطلق G_1 و G_2 یك گراف فازي روي $V_1\times V_2$ مي باشد و با نماد $G_1\times G_2$ نشان داده مي شود و به شكل زير تعريف مي شود [۸] .

(۲-۱۰)

$$G_1\times G_2=(\sigma_1\times\sigma_2\,,\,\mu_1\times\mu_2)$$

(۲-۱۱)

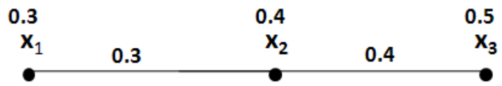
$$\sigma_1\times\sigma_2(u,v)=\sigma_1(u)\wedge\sigma_2(v)$$

(۲-۱۲)

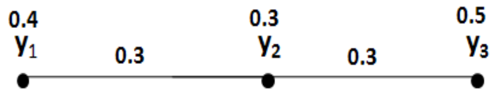
$$\mu_1\times\mu_2((u_1,u_2),(v_1,v_2))=\begin{cases}\mu_1(u_1,v_1)\wedge\mu_2(u_2,v_2) & u_1\neq v_1,u_2\neq v_2\\ 0 & o.w\end{cases}$$

نكته ۲-۱۱-۱: اگر D_1 و D_2 به ترتيب مجموعه هاي احاطه گر فازي براي گراف هاي $G_1=(V_1,\sigma_1,\mu_1)$ و $G_2=(V_2,\sigma_2,\mu_2)$ باشند با توجه به مثال نقض ارائه شده زير، $D_1\times D_2$ ضرورتا مجموعه احاطه گر فازي براي $G_1\times G_2$ نمي باشد.

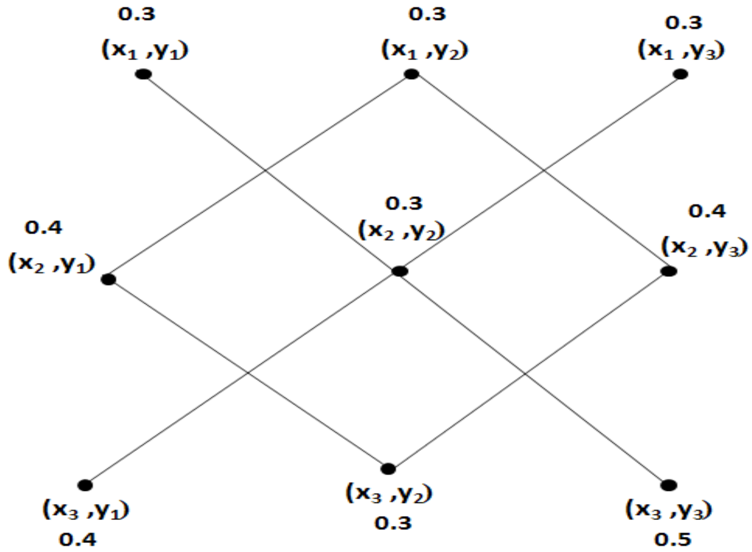
مثال ۲-۱۱-۱: گراف هاي فازي G_1 و G_2 و $G_1\times G_2$ بصورت زير داده شده است.



شكل ۲-۶، گراف فازي G_1



شکل ۲-۷، گراف فازي G_2



شکل ۲-۸، گراف فازي $G_1 \times G_2$

همچنین در گراف فازي $G_1 \times G_2$ با توجه به رابطه (۲-۱۲) به ازاي هر $u_1, v_1 \in V_1$ و $u_2, v_2 \in V_2$ خواهیم داشت :

$\mu_1 \times \mu_2 \big((u_1, u_2), (v_1, v_2) \big) = 0.3$.

حال مجموعه احاطه گر فازي $D_1 = \{x_1, x_3\}$ در G_1 و مجموعه احاطه گر فازي $D_2 = \{y_1, y_3\}$ در G_2 را در نظر مي گیریم . در این صورت $D_1 \times D_2 = \{(x_1, y_1), (x_1, y_3), (x_3, y_1), (x_3, y_3)\}$، مجموعه احاطه گر فازي براي $G_1 \times G_2$ نمي باشد . به عنوان مثال رأس (x_1, y_2) توسط این مجموعه احاطه نمي شود . $D = \{(x_2, y_2), (x_3, y_2), (x_1, y_2)\}$ مجموعه احاطه گر فازي از اندازه فازي مینیمم در $G_1 \times G_2$ مي باشد و $\gamma_f (G_1 \times G_2) = 0.9$ [۱۴] .

فصل

سوم

احاطه گري فازي قوي و ضعيف

احاطه گري فازي قوي[35] و احاطه گري فازي ضعيف[36] شاخه اي جديد در احاطه گري گراف هاي فازي مي باشد. دراين فصل ابتدا تعاريف اوليه و كران هايي از احاطه گري فازي قوي و ضعيف را كه در سال ۲۰۱۰ ارائه شده است مطرح مي كنيم. در ادامه به تعاريف و قضايايي از احاطه گري فازي قوي و ضعيف مستقل مي پردازيم.

۳-۱ احاطه گري فازي ضعيف

تعريف ۳-۱-۱: فرض كنيم u و v دو رأس از گراف فازي G باشند. رأس u در گراف G رأس v را به طور ضعيف احاطه مي كند هرگاه:

۱) $\mu(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$.

۲) $d_N(u)\le d_N(v)$ [۱۲] .

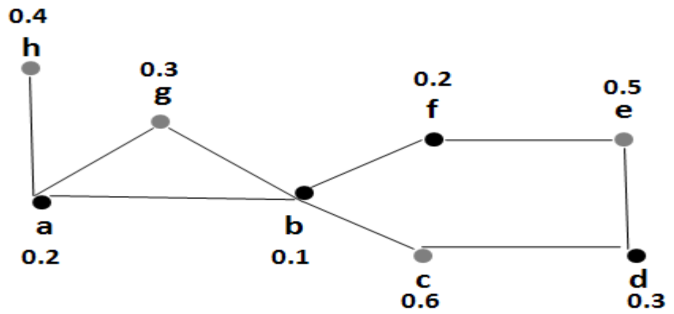
تعريف ۳-۱-۲: فرض كنيم $G=(V,\sigma,\mu)$ يك گراف فازي باشد. $D\subseteq V$، مجموعه احاطه گر فازي ضعيف ناميده مي شود هرگاه هر رأس $v\in V-D$ توسط رأسي مانند $u\in D$ احاطه ضعيف شده باشد. مجموعه احاطه گر فازي ضعيف را با نماد $wfd-set$ نشان مي دهيم [۱۲] .

تعريف ۳-۱-۳: مينيمم اندازه فازي در ميان تمامي مجموعه هاي احاطه گر فازي ضعيف در گراف فازي G ، عدد احاطه گر فازي ضعيف ناميده مي شود كه با نماد $\gamma_{wf}(G)$ و يا γ_{wf} نشان داده مي شود [۱۲] .

---

[35] strong fuzzy dominating set
[36] weak fuzzy dominating set

مثال۳-۱-۱: در گراف فازي شكل (۳-۱) با فرض اينكه تمامي يال ها ، مؤثر فازي باشند داريم :



شكل ۳-۱، گراف فازي مثال۳-۱-۱

ابتدا درجه همسايگي رئوس گراف فوق را محاسبه مي كنيم .

$d_N(a) = 0.8$ $d_N(b) = 1.3$
$d_N(c) = 0.4$ $d_N(d) = 1.1$
$d_N(e) = 0.5$ $d_N(f) = 0.6$
$d_N(g) = 0.3$ $d_N(h) = 0.2$

مجموعه $\{c,e,g,h\}$ مجموعه احاطه گر فازي ضعيف از اندازه فازي مينيمم مي باشند .

$$\gamma_{wf} = |\{h,c,g,e\}|_f = \sigma(h)+\sigma(c)+\sigma(g)+\sigma(e) = 1.8$$

قضيه ۳-۱-۱: براي گراف فازي G از مرتبه P داريم :

$$\gamma_f(G) \le \gamma_{wf}(G) \le P-\delta_N(G) \le P-\delta_E(G).$$

اثبات: از آنجا كه هر $wfd-set$ يك مجموعه احاطه گر فازي در گراف G مي باشد $\gamma_f(G) \le \gamma_{wf}(G)$. فرض كنيم $v \in V$ رأسي باشد كه $d_N(v) = \delta_N(G)$. $V-N(v)$ يك $wfd-set$ است زيرا v رئوس $N(v)$ را به طور ضعيف احاطه مي كند، بنا بر اين:

$$\gamma_{wf}(G) \le \left| V-N(v) \right|_f \le P-\delta_N(G).$$

علاوه بر اين براي هر رأس دلخواه $v \in V$ داريم:

$$d_E(v) = \sum_{u \in N(V)} \mu(u,v) \le \sum_{u \in N(V)} \sigma(u) = d_N(v)$$

لذا $\delta_E(G) \le \delta_N(G)$ و $P-\delta_N(G) \le P-\delta_E(G)$ [۱۲]. ■

قضيه ۳-۱-۲: در گراف فازي G اگر $v \in V_{\delta_N}$ و $V-N(v)$ مستقل فازي باشد در اين صورت $V-N(v) \subseteq V_{\delta_N}$.

اثبات: فرض كنيم $u \in V-N(v)$ رأسي دلخواه باشد. هر رأس $w \in N(u)$ بايد در $N(v)$ نيز باشد درغير اين صورت $w \in V-N(v)$ و از آنجا كه $u \in V-N(v)$، كه با مستقل فازي بودن $V-N(v)$ در تناقض مي باشد بنابراين $N(u) \subseteq N(v)$ و $d_N(u) \le d_N(v) = \delta_N(G)$ در نتيجه $u \in V_{\delta_N}$ و $V-N(v) \subseteq V_{\delta_N}$. [۱۲].
■

قضيه ۳-۱-۳: در گراف فازي G، $\gamma_{wf}(G) = P-\delta_N(G)$ اگر يكي از شرايط زير برقرار باشد :

۱) $\delta_N(G) = P-\sigma_1$

۲) $\delta_N(G) = P-(\sigma_1+\sigma_2)$

σ_1, σ_2 دو ماكسيمم درجه عضويت رأس هاي V_{δ_N} مي باشند.

اثبات: ۱) اگر $\delta_N(G) = P-\sigma_1$، در اين صورت رأس v كه $\sigma(v) = \sigma_1$ همه رئوس ديگر G را به طور ضعيف احاطه مي كند. فرض كنيم اينطور نباشد يعني $\exists u \in V$ كه توسط v احاطه ضعيف نمي شود، پس v حد اكثر $V-\{u,v\}$ رأس ديگر را احاطه ضعيف مي كند لذا $d_N(v) \le P-\sigma(u)-\sigma(v) = P-\sigma_1-\sigma(u)$ كه اين با $\delta_N(G) = P-\sigma_1$ در تناقض است. بنابراين $\{v\}$يك $wfd-set$ مي باشد و $\gamma_{wf}(G) = \sigma_1 = P-\delta_N(G)$.

۲) فرض كنيم v_1, v_2 دو رأس V_{δ_N} باشند كه يكديگر را احاطه نمي كنند و $\sigma(v_1) = \sigma_1$ و $\sigma(v_2) = \sigma_2$.

اگر $\delta_N(G)=P-(\sigma_1+\sigma_2)$ ، v_1 تمامي رئوس V به جز v_2 را احاطه ضعيف مي كند. زيرا در غير اين صورت اگر v_1 علاوه بر v_2 رأس v_3 را نيز احاطه ضعيف نكند حداكثر $V-\{v_1,v_2,v_3\}$ رأس ديگر را احاطه ضعيف خواهد كرد پس $d_N(v_1)\le P-\sigma(v_1)-\sigma(v_2)-\sigma(v_3)=P-(\sigma_1+\sigma_2+\sigma(v_3))$ كه اين با $\delta_N(G)=P-(\sigma_1+\sigma_2)$ در تناقض مي باشد. بالعكس v_2 تمامي رئوس V به جز v_1 را احاطه ضعيف خواهد كرد. اين ايجاب مي كند كه $\{v_1,v_2\}$ يك $wfd-set$ در گراف G باشد. واضح است كه هيچ يك از v_1 و v_2 نمي توانند به تنهاي يك $wfd-set$ در گراف G باشند. زيرا دو رأس فوق يكديگر را احاطه نمي كنند بنابراين $\gamma_{wf}(G)=\left|\{v_1,v_2\}\right|_f=\sigma_1+\sigma_2=P-\delta_N(G)$ [۱۲] . ■

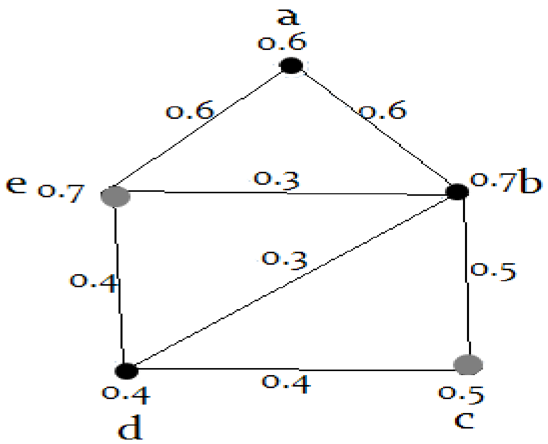
۳-۲ احاطه گري فازي ضعيف مستقل

تعريف۳-۲-۱: يك $wfd-set$ مانند D در گراف فازي G، مجموعه احاطه گر فازي ضعيف مستقل است هرگاه D مستقل فازي باشد و با نماد $IWFDS$[37] نشان داده مي شود [۱۲] .

تعريف ۳-۲-۲: مينيمم اندازه فازي در ميان تمامي مجموعه هاي احاطه گر فازي ضعيف مستقل را عدد احاطه گر فازي ضعيف مستقل مي نامند كه با نماد $i_{wf}(G)$ نشان داده مي شود [۱۲] .

مثال ۳-۲-۱: در گراف فازي شكل (۳-۲) عدد احاطه گر فازي ضعيف مستقل محاسبه شده است.

[37] independent weak fuzzy dominating set



شكل ٣-٢، گراف فازي مثال٣-٢-١

رأس	$N(v)$	$d_N(v)$
a	$\{b,e\}$	1.4
b	$\{a,c\}$	1.1
c	$\{b,d\}$	1.1
d	$\{c,e\}$	1.2
e	$\{a,d\}$	1

جدول ٣-١ محاسبه درجه همسايگي رئوس گراف فازي شكل ٣-٢

مجموعه $\{e,c\}$ مجموعه احاطه گر فازي ضعيف مستقل از اندازه فازي مينيمم مي باشد.

$$i_{wf}(G) = |\{e,c\}|_f = 0.7 + 0.5 = 1.2$$

نكته ٣-٢-١: واضح است كه هر مجموعه احاطه گر فازي ضعيف مستقل يك مجموعه احاطه گر فازي ضعيف مي باشد بنا بر اين $\gamma_{wf}(G) \le i_{wf}(G)$.

قضيه ٣-٢-١: اگر D يك $IWFDS$ در گراف فازي G باشد آنگاه $D \cap V_{\delta_N} \neq \varnothing$.

اثبات: فرض كنيم $v \in V_{\delta_N}$

باشد. از آنجا که D یك $IWFDS$ مي باشد یا $v \in D$ و یا رأسي مانند $u \in D$ وجود دارد که v را احاطه ضعیف مي کند. اگر $v \in D$، واضح است که $D \cap V_{\delta_N} \neq \emptyset$. حال اگر $v \notin D$ از آنجا که $d_N(v) = \delta_N(G)$ داریم $d_N(u) = d_N(v) = \delta_N(G)$ لذا $u \in V_{\delta_N}$ و $D \cap V_{\delta_N} \neq \emptyset$ [۱۲]. ■

قضیه ۳-۲-۲: براي گراف فازي G، $i_{wf}(G) \leq P - \delta_N(G)$.

اثبات: فرض کنیم D، یك $IWFDS$ درگراف G باشد. طبق قضیه (۳-۲-۱) داریم $D \cap V_{\delta_N} \neq \emptyset$. فرض کنیم $v \in D \cap V_{\delta_N}$ باشد. از آنجا که D مستقل فازي مي باشد و $v \in D$ داریم:

$$D \cap N(v) = \emptyset \Rightarrow D \subseteq V - N(v)$$

$$\Rightarrow |D|_f \leq |V - N(v)|_f$$

$$\Rightarrow i_{wf}(G) \leq P - \delta_N(G)$$

[۱۲]. ■

قضیه ۳-۲-۳: فرض کنیم G یك گراف فازي باشد. اگر $i_{wf}(G) = P - \delta_N(G)$ و $v \in V_{\delta_N}$ در این صورت $V - N(v)$ مستقل فازي مي باشند.

اثبات: به برهان خلف فرض کنیم $V - N(v)$ وابسته فازي باشد. با به کار بردن الگوریتم زیر یك $IWFDS$ از اندازه کمتر از $P - \delta_N(G)$ به دست مي آید که با رابطه $i_{wf}(G) = P - \delta_N(G)$ در تناقض مي باشد.

الگوریتم:

$S := N[v]$
$D := \{v\}$
$while\ S \neq V$
$begin$
$Let \quad u \in \{u \in V - S : d_N(u) is\ as\ small\ as\ possible\}$
$S := S \cup N[u]$
$D := D \cup \{u\}$
$end.$

در هر گام از الگوريتم فوق با افزودن u به D، مجموعه $N(u)$ از انتخاب بعدي حذف خواهد شد لذا Dمستقل فازي مي باشد. از طرفي با توجه به نحوه ي انتخاب u تمام رئوس $N(u)$توسط u احاطه ضعيف مي شوند. حال چون $V-N(v)$ طبق فرض وابسته فازي است لذا حداقل يك $u \in V-N(v)$ وجود دارد كه $N(u) \neq \emptyset$ و $d_N(u) \neq 0$ در اين صورت با حذف $N(u)$ از D، يك $IWFDS$ از اندازه كمتر از $P-\delta_N(G)$ به دست مي آيد [۱۲]. ■

قضيه ۳-۲-۴: فرض كنيم G يك گراف فازي باشد. در اين صورت $i_{wf}(G) = P - \delta_N(G)$ اگر و تنها اگر به ازاي هر $v \in V_{\delta_N}$، $V-N(v)$ مستقل فازي باشد.

اثبات: $\Leftarrow$ اگر $i_{wf}(G) = P - \delta_N(G)$ و $v \in V_{\delta_N}$ در اين صورت طبق قضيه (۳-۲-۳)، $V-N(v)$ مستقل فازي مي باشد.

$\Rightarrow$ فرض كنيم به ازاي هر $v \in V_{\delta_N}$، $V-N(v)$ مستقل فازي باشد. اگر D يك $IWFDS$ از اندازه فازي مينيمم در گراف G باشد در اين صورت طبق قضيه (۳-۲-۱) $D \cap V_{\delta_N} \neq \emptyset$ و $\exists v \in D \cap V_{\delta_N}$. چون $v \in D$ و D مستقل فازي است لذا $D \cap N(v) = \emptyset$. اما از آنجا كه D يك مجموعه احاطه گر فازي

است و با توجه به مستقل فازي بودن $V-N(v)$ تمامي رئوس اين مجموعه در D قرار دارند. بنابراين $D=V-N(v)$ يعني: $i_{wf}(G)=P-\delta_N(G)$ [۱۲] . ■

۳-۳ احاطه گري فازي قوي

تعريف ۳-۳-۱: فرض كنيم u و v دو رأس از گراف فازي $G=(V,\sigma,\mu)$ باشند. u رأس v را به طور قوي احاطه مي كند هرگاه:

۱) $\mu(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$.

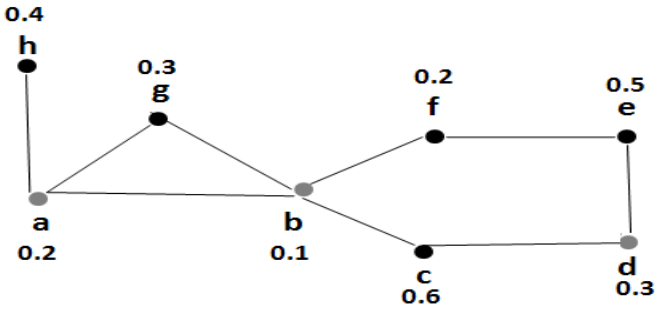
۲) $d_N(u)\geq d_N(v)$.

تعريف ۳-۳-۲: $D\subseteq V$ در گراف فازي $G=(V,\sigma,\mu)$، مجموعه احاطه گر فازي قوي ناميده مي شود هرگاه هر رأس $v\in V-D$ توسط رأسي مانند $u\in D$ به طور قوي احاطه شده باشد. مجموعه احاطه گر فازي قوي را با نماد $sfd-set$ [۳۸] نشان مي دهيم [۱۲] .

تعريف۳-۳-۳: مينيمم اندازه فازي در ميان تمامي مجموعه هاي احاطه گر فازي قوي، عدد احاطه گر فازي قوي ناميده مي شود، كه با نماد $\gamma_{sf}(G)$ و يا γ_{sf} نشان داده مي شود [۱۲] .

مثال۳-۳-۱: در گراف فازي شكل (۳-۳) با فرض اينكه $\forall uv\in E\ ;\ \mu(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$ عدد احاطه گر فازي قوي محاسبه شده است.

[38] strong fuzzy dominating set



شكل ۳-۳، گراف فازي مثال۳-۳-۱

$d_N(a) = 0.8$ $\qquad$ $d_N(b) = 1.3$
$d_N(c) = 0.4$ $\qquad$ $d_N(d) = 1.1$
$d_N(e) = 0.5$ $\qquad$ $d_N(f) = 0.6$
$d_N(g) = 0.3$ $\qquad$ $d_N(h) = 0.2$

مجموعه $\{a,b,d\}$ مجموعه احاطه گر فازي قوي از اندازه فازي مينيمم است.

$$\gamma_{sf} = |\{a,b,d\}|_f = \sigma(a)+\sigma(b)+\sigma(d) = 0.6\ .$$

قضيه ۳-۳-۱: فرض كنيم D مينيمم $sfd-set$ در گراف فازي G باشد. در اين صورت براي هر $v \in D$ همواره يكي از حالت هاي زير رخ مي دهد:

۱) هيچ رأسي از D به طور قوي v را احاطه نمي كند.

۲) $u \in V-D$ وجود دارد به گونه اي كه v تنها رأس از D باشد كه u را احاطه قوي مي كند.

اثبات: فرض كنيم هيچ يك از دو حالت فوق رخ ندهد. يعني $\exists v_1 \in D$ كه v را به طور قوي احاطه مي كند. همچنين به ازاي هر رأس $u \in V-D$ علاوه بر v، $\exists v_2 \in D$ كه u را به طور قوي احاطه مي كند. در اين صورت $D-\{v\}$ يك $sfd-set$ مي باشد كه با مينيمم بودن D در تناقض است[۱۲]. ■

قضيه ۳-۳-۲: براي گراف فازي از مرتبه P داريم :

$$\gamma_f(G) \le \gamma_{sf}(G) \le P - \Delta_N(G) \le P - \Delta_E(G).$$

اثبات: از آنجا كه هر $sfd-set$ يك مجموعه احاطه گر فازي در گراف G مي باشد لذا $\gamma_f(G) \le \gamma_{sf}(G)$.

فرض كنيم $u \in V$ باشد كه $d_N(u) = \Delta_N(G)$. $V - N(u)$ يك $sfd-set$ زيرا u رئوس $N(u)$ را احاطه قوي مي كند .

$$\gamma_{sf}(G) \le \left| V - N(u) \right|_f = P - \Delta_N(G).$$

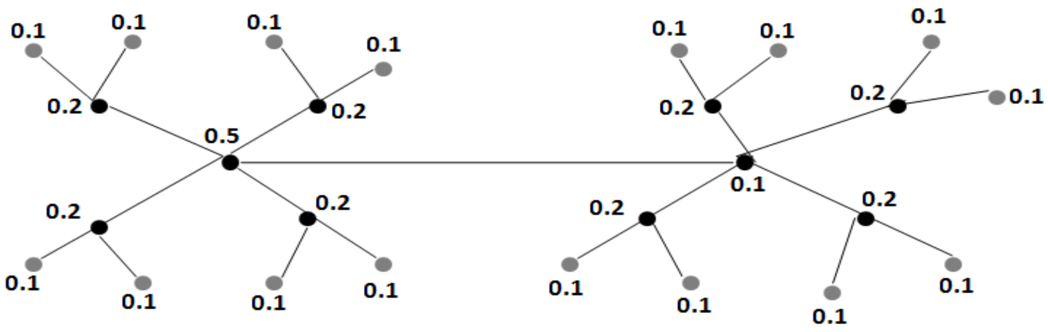
همچنين از آنجا كه براي هر رأس دلخواه $v \in V$ داريم :

$$d_E(v) = \sum_{u \in N(v)} \mu(u,v) \le \sum_{u \in N(v)} \sigma(u) = d_N(v)$$

لذا $\Delta_E(G) \le \Delta_N(G)$ و $P - \Delta_N(G) \le P - \Delta_E(G)$ [۱۲] . ■

نكته ۳-۳-۱: اگر D مينيمم $sfd-set$ باشد دراين صورت $V - D$ لزوما $wfd-set$ نمي باشد .

گراف فازي G در شكل (۳-۴) را با فرض اينكه $\forall uv \in E \; ; \mu(u,v) = \sigma(u) \wedge \sigma(v)$ مشاهده كنيد .



شكل ۳-۴، گراف فازي G

در اينجا تمامي رئوس غير آويزان مجموعه احاطه گر فازي قوي D را تشكيل مي دهند . در حالي كه رئوس $V - D$ نمي

توانند رئوس D را به طور ضعيف احاطه كنند. زيرا دو رأس مركزي توسط رئوس $V-D$ احاطه ي ضعيف نمي شوند. بنابراين $V-D$، $wfd-set$ درگراف G نمي باشد.

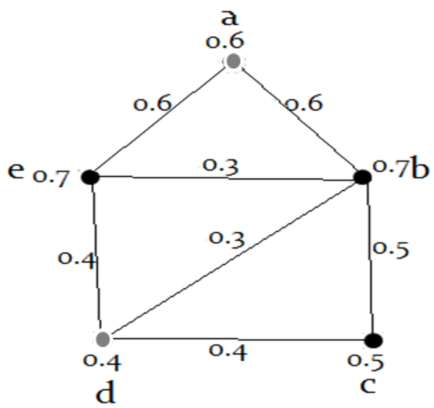
۳-۴ احاطه گري فازي قوي مستقل

تعريف۳-۴-۱: يك $sfd-set$ مانند D در گراف فازي $G=(V,\sigma,\mu)$، مجموعه احاطه گر فازي قوي مستقل است هرگاه D مستقل باشد و با نماد $ISFDS$[۳۹] نشان داده مي شود [۱۲].

تعريف ۳-۴-۲: مينيمم اندازه فازي در ميان تمامي مجموعه هاي احاطه گر فازي قوي، عدد احاطه گر فازي قوي مستقل ناميده مي شود كه با نماد $i_{sf}(G)$ نشان داده مي شود [۱۲].

نكته ۳-۴-۱: واضح است كه هر مجموعه احاطه گر فازي قوي مستقل يك مجموعه احاطه گر فازي قوي مي باشد بنا بر اين $\gamma_{sf}(G)\le i_{sf}(G)$.

مثال۳-۴-۱: در گراف فازي داده شده در شكل (۳-۵) عدد احاطه گري فازي قوي مستقل محاسبه شده است.



شكل۳-۵، گراف فازي مثال۳-۴-۱

[39] independent strong fuzzy dominating set

رأس	$N(v)$	$d_N(v)$
a	$\{b,e\}$	1.4
b	$\{a,c\}$	1.1
c	$\{b,d\}$	1.1
d	$\{c,e\}$	1.2
e	$\{a,d\}$	1

جدول ۳-۲، محاسبه درجه همسايگي رئوس گراف فازي شكل۳-۵

در اينجا $\{a,d\}$مجموعه احاطه گر فازي قوي از اندازه فازي مينيمم مي باشد.

$$i_{sf}(G)=|\{a,d\}|_f=0.6+0.4=1$$

قضيه ۳-۴-۱: اگر D يك $ISFDS$ در گراف فازي G باشد آنگاه $D\cap V_{\Delta_N}\neq\varnothing$.

اثبات: فرض كنيم $v\in V_{\Delta_N}$. از آنجا كه D يك $ISFDS$ مي باشد يا $v\in D$ و يا رأسي مانند $u\in D$ وجود دارد كه $\mu(u,v)=\sigma(u)\wedge\sigma(v)$ و $d_N(u)\geq d_N(v)$. اگر $v\in D$ حكم برقرار است. حال اگر $v\notin D$ از آنجا كه $d_N(v)=\Delta_N(G)$ داريم $d_N(u)=d_N(v)=\Delta_N(G)$، لذا $u\in V_{\Delta_N}$. در نتيجه $D\cap V_{\Delta_N}\neq\varnothing$ [۱۲]. ■

قضيه ۳-۴-۲: براي گراف فازي G، $i_{sf}(G)\leq P-\Delta_N(G)$.

اثبات: فرض كنيم D، يك $ISFDS$ در گراف فازي G باشد. طبق قضيه (۳-۴-۱) $D\cap V_{\Delta_N}\neq\varnothing$. فرض كنيم $v\in D\cap V_{\Delta_N}$ از آنجا كه D مستقل مي باشد:

$$D\cap N(v)=\varnothing\Rightarrow D\subseteq V-N(v)$$

$$\Rightarrow |D|_f\leq|V-N(v)|_f$$

$$i_{sf}(G)\leq|D|_f\leq|V-N(v)|_f\leq P-\Delta_N(G)$$

■. [۱۲]

قضيه ۳-۴-۳: در گراف فازي G اگر $i_{sf}(G)=P-\Delta_N(G)$ و $v\in V_{\Delta_N}$ در اين صورت $V-N(v)$ مستقل فازي است.

اثبات: به برهان خلف فرض كنيم $V-N(v)$ وابسته فازي باشد. با به كار بردن الگوريتم زير يك $ISFDS$ از اندازه كمتر $P-\Delta_N(G)$ به دست مي آيد كه با رابطه $i_{sf}(G)=P-\Delta_N(G)$ در تناقض است.

الگوريتم :

$$
\begin{aligned}
&S := N[v] \\
&D := \{v\} \\
&\textit{while } S \neq V \\
&\textit{begin} \\
&\textit{Let } u \in \{u \in V-S : d_N(u) \textit{ is as big as possible}\} \\
&S := S \cup N[u] \\
&D := D \cup \{u\} \\
&\textit{end.}
\end{aligned}
$$

با توجه به روند فوق در انتهاي الگوريتم، مجموعه D يك مجموعه احاطه گر فازي قوي مستقل مي باشد. از آنجا كه $V-N(v)$ وابسته فازي است لذا حداقل يك u متعلق به $V-S$ با ماكسيمم درجه همسايگي وجود دارد كه $d_N(u)\neq 0$. با حذف $N(u)$ از D، مجموعه احاطه گر فازي قوي مستقل از اندازه كمتر از $P-\Delta_N(G)$ بدست مي آيد [۱۲]. ■

قضيه ۳-۴-۴: فرض كنيم G يك گراف فازي باشد. در اين صورت $i_{sf}(G)=P-\Delta_N(G)$ اگر و تنها اگر به ازاي هر $v\in V_{\Delta_N}$، $V-N(v)$ فازي مستقل باشد.

اثبات: $\Leftarrow$ طبق قضيه (۳-۴-۳) حكم برقرار است.

$\Rightarrow$ فرض كنيم $V-N(v)$ به ازاي هر $v \in V_{\Delta_N}$ مستقل فازي باشد. اگر D يك $ISFDS$ از اندازه فازي مينيمم باشد طبق قضيه (۳-۴-۱) $D \cap V_{\Delta_N} \neq \varnothing$. لذا $\exists v \in D \cap V_{\Delta_N}$ و چون $v \in D$ و D مستقل فازي است لذا $D \cap N(v) = \varnothing$ و $D \subseteq V-N(v)$. از طرفي با توجه به اينكه $V-N(v)$ مستقل فازي است و D يك احاطه گر فازي است تمامي رئوس $V-N(v)$ در D قرار خواهند گرفت يعني:
$V-N(v) \subseteq D$ بنا بر اين $D = V-N(v)$ و $i_{sf}(G) = P - \Delta_N(G)$ [۱۲] . ■

فصل چهارم

معرفي ساير پارامتر ها درگراف فازي

در اين فصل به معرفي مفاهيمي چون عدد پوشش رأسي[۴۰]، عدد پوشش يالي[۴۱]، عدد استقلال فازي[۴۲] و تطابق[۴۳] درگراف هاي فازي مي پردازيم. سپس ارتباط برخي از اين پارامترها با احاطه گري فازي را مطرح مي كنيم.

۴-۱ معرفي پارامتر هايي در گراف فازي

تعريف ۴-۱-۱: فرض كنيم $G=(V,\sigma,\mu)$ يك گراف فازي باشد. $S\subseteq V$، مجموعه پوشش رأسي ناميده مي شود هرگاه براي هر يال مؤثر $e=uv$ در G حداقل يكي از دو رأس انتهايي e در S باشد [۷].

تعريف ۴-۱-۲: مينيمم اندازه فازي در ميان تمامي مجموعه هاي پوشش رأسي، عدد پوشش رأسي ناميده مي شود و با نماد $\alpha_0(G)$ يا α_0 نشان داده مي شود [۷].

تعريف ۴-۱-۳: مجموعه X از يال هاي مؤثر[۴۴] در گراف فازي $G=(V,\sigma,\mu)$، مجموعه پوشش يالي ناميده مي شود هرگاه هر رأس از V، رأس انتهايي يكي از يال هاي موجود در X باشد [۷].

تعريف ۴-۱-۴: مينيمم اندازه فازي در ميان تمامي مجموعه هاي پوشش يالي در $G=(V,\sigma,\mu)$، عدد پوشش يالي ناميده مي شود و با نماد $\alpha_1(G)$ يا α_1نشان داده مي شود [۷].

نكته ۴- ۱-۱: واضح است كه عدد پوشش يالي تنها براي گراف هاي فاقد رأس تنها تعريف مي شود.

تعريف ۴-۱-۵: مجموعه مستقل فازي S، مجموعه مستقل فازي ماكسيمال[۴۵] ناميده مي شود اگر به ازاي هر $v\in V-S$، $S\cup\{v\}$ مستقل فازي نباشد [۳].

---

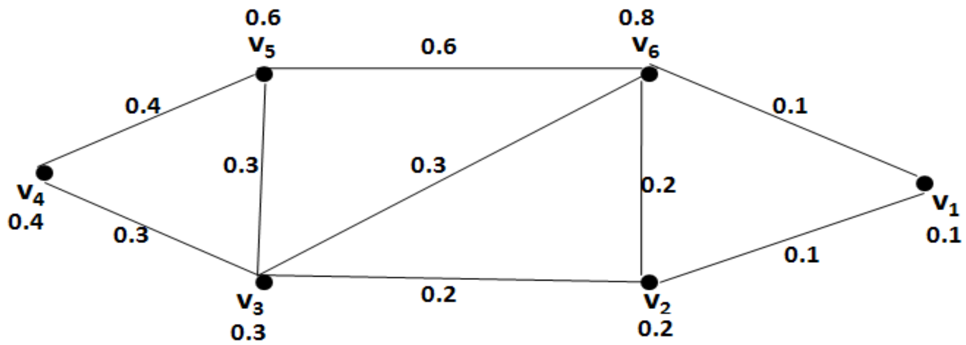
[۴۰] vertex covering number
[۴۱] edge covering number
[۴۲] fuzzy independence number
[۴۳] matching
[۴۴] effective edgge

تعريف ۴-۱-۶: ماكسيمم اندازه فازي در ميان تمامي مجموعه هاي مستقل فازي در $G=(V,\sigma,\mu)$، عدد استقلال فازي ناميده مي شود و با نماد $\beta_0(G)$ يا β_0 نشان داده مي شود [۳] .

تعريف ۴-۱-۷: مجموعه X از يال هاي مؤثر در گراف $G=(V,\sigma,\mu)$ كه هيچ دو يالي از X رأس مشترك نداشته باشند يك مجموعه مستقل يالي و يا تطابق ناميده مي شود [۵] .

تعريف۴-۱-۸: ماكسيمم اندازه فازي در ميان تمامي مجموعه هاي مستقل يالي در $G=(V,\sigma,\mu)$، عدد استقلال يالي ناميده مي شود و با نماد $\beta_1(G)$ يا β_1 نشان داده مي شود [۵] .

مثال ۴-۱-۱: در گراف فازي G در شكل زير مجموعه هاي متناظر با هر يك از تعاريف فوق نشان داده شده است.



شكل ۴- ۱، گراف فازي G

۱) $\{v_4,v_6\}$: مجموعه مستقل فازي با اندازه فازي ماكسيمم

$\beta_0(G)=\sigma(v_4)+\sigma(v_6)=1.2$.

۲) $\{v_1,v_2,v_3,v_5\}$: مجموعه پوشش رأسي با اندازه فازي مينيمم

$\alpha_0(G)=\sigma(v_1)+\sigma(v_2)+\sigma(v_3)+\sigma(v_5)=1.2$.

۳) $\{v_1 v_2, v_3 v_4$: مجموعه مستقل يالي با اندازه فازي ماكسيمم

---

٤٥ maximal fuzzy independent set

$\beta_1(G)=\mu(v_1v_2)+\mu(v_3v_4)+\mu(v_5v_6)=1$.

۴) $\{v_1v_6,v_2v_3,v_4v_5\}$: مجموعه پوشش يالي با مينيمم اندازه فازي $\alpha_1(G)=\mu(v_1v_6)+\mu(v_2v_3)+\mu(v_4v_5)=0.7$.

قضيه ۴-۱-۱: در گراف فازي $G=(V,\sigma,\mu)$، $S\subseteq V$ يك پوشش رأسي است اگر و تنها اگر $V-S$ مستقل فازي باشد.

اثبات: فرض كنيم $S\subseteq V$ باشد در اين صورت Sيك مجموعه پوشش رأسي است اگر و تنها اگر هر يال مؤثر G داراي حداقل يك انتها در S باشد. يعني $\forall\ u,v\in V-S:\ \mu(uv)<\sigma(u)\wedge\sigma(v)$ ،
در اين صورت Sپوشش رأسي است اگر و تنها اگر بين هيچ دو رأسي از $V-S$ يال مؤثر وجود نداشته باشد و $V-S$ مجموعه مستقل فازي باشد [۷] . ■

قضيه ۴-۱-۲: براي گراف فازي $G=(V,\sigma,\mu)$ داريم : $\alpha_0+\beta_0=P$

اثبات: فرض كنيم S يك مجموعه پوشش رأسي با اندازه فازي α_0 باشد. در اين صورت طبق قضيه (۴-۱-۱)، $V-S$ مجموعه مستقل فازي با اندازه $P-\alpha_0$ است. لذا $P-\alpha_0\le\beta_0$. از طرف ديگر اگر S مجموعه مستقل فازي از اندازه β_0 باشد در اين صورت رئوس انتهايي تمامي يال هاي مؤثر در $V-S$ قرار دارند و $V-S$ يك مجموعه پوشش رأسي با اندازه $P-\beta_0$ خواهد بود كه $\alpha_0\le P-\beta_0$.

بنابراين $\alpha_0+\beta_0=P$ [۷] . ■

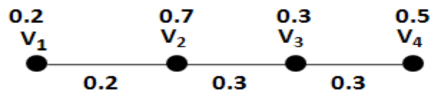
نكته ۴-۱-۲: براي هر گراف غير فازي و فاقد رأس تنها $\alpha_1+\beta_1=P$. اين رابطه در گراف هاي فازي برقرار نمي باشد. به طور مثال در شكل (۴-۱) داريم : $\alpha_1+\beta_1=1.7$ در حالي كه $P=2.4$.

۴-۲ ارتباط بين $\gamma_f(G)$ و $\beta_2(G)$

تعريف۴-۲-۱: تطابق M در گراف فازي G، تطابق ماكسيمال[46] ناميده مي شود هرگاه به ازاي هر يال مؤثر $e \notin M$ مجموعه $M \cup \{e\}$ يك تطابق نباشد [۷] .

تعريف۴-۲-۲: تطابق ماكسيمال M، ۲- ماكسيمال ناميده مي شود، هرگاه با حذف يك يال از M و اضافه كردن دو يال مؤثر خارج از M به آن تطابق ديگري در گراف فازي $G=(V,\sigma,\mu)$ بدست نيايد [۷] .

مثال۴-۲-۱: مسير مؤثر P_4 را در نظر بگيريد.



شكل ۴-۲ مسير مؤثر P_4

در اينجا $\{v_2v_3\}$يك تطابق ماكسيمال مي باشد. حال با حذف v_2v_3 از تطابق و اضافه كردن v_1v_2 و v_3v_4 به آن تطابق ديگري در P_4 حاصل مي شود لذا تطابق ماكسيمال $\{v_2v_3\}$، ۲- ماكسيمال نمي باشد.

تعريف۴-۲-۳: فرض كنيم $M=\{v_1v'_1, v_2v'_2, \ldots, v_kv'_k\}$ يك تطابق ۲- ماكسيمال در گراف فازي Gباشد. وزن تطابق ۲- ماكسيمال M به صورت $W(M)=\sum_{i=1}^{k}(\sigma(v_i)\vee\sigma(v'_i))$ تعريف مي شود. $\sigma(v_i)\vee\sigma(v'_i)$برابر ماكسيمم مقدار $\sigma(v_i)$ و $\sigma(v'_i)$ است[۷] .

[46] maximal matching

تعريف۴-۲-۴ : $\beta_2(G)=\min\{W(M)\}$ كه مينيم روي همه تطابق هاي۲- ماكسيمال در گراف فازي $G=(V,\sigma,\mu)$ ، گرفته شده است[۷] .

قضيه ۴-۲-۱ : در گراف فازي فاقد رأس تنهاي $G=(V,\sigma,\mu)$ ، $\gamma_f(G)\le\beta_2(G)$.

اثبات: فرض كنيم $M=\{v_1v'_1,v_2v'_2,...,v_kv'_k\}$ تطابق ۲- ماكسيمال در G باشدكه $\beta_2(G)=W(M)$. قرارمي دهيم $V(M)=\{v_1,v'_1,v_2,v'_2,...,v_k,v'_k\}$. از آنجا كه M يك تطابق ماكسيمال در گراف است، $V-V(M)=\{u_1,u_2,...,u_r\}$ مجموعه مستقل رأسي مي باشد . چون G فاقد رأس تنها است هر رأس از $V-V(M)$ حداقل با يك رأس از $V(M)$ مجاور مي باشد . حال مجموعه احاطه گر S را به شكل زير مي سازيم . براي هر $u_i\in V-V(M)$ ، رأس $u'_i\in V(M)$ را به گونه اي انتخاب مي كنيم كه $u_iu'_i$ يك يال مؤثر باشد حال u'_i را در S قرار مي دهيم . همچنين براي $1\le i\le k$ ، اگر $S\cap\{v_i,v'_i\}=\varnothing$ باشد v_i را در S قرار مي دهيم . واضح است كه S يك مجموعه احاطه گر فازي است. حال اگر براي برخي از j ها ، هردوي $v_j,v'_j\in S$ ، در اين صورت وجود دارند $u_r,u_s\in V-V(M)$ كه u_rv_j, $v_jv'_j$, v'_ju_s يال هاي مؤثر در G هستند . حال $\{(M-\{v_jv'_j\})\cup\{u_rv_j,v'_ju_s\}\}$ يك تطابق از G مي باشد ، كه با ۲- ماكسيمال بودن M در تناقض است از اين رو S دقيقا شامل يكي از رئوس در هر بخش از $\{v_j,v'_j\}$ مي باشد . لذا Sمجموعه احاطه گر فازي با اندازه حداكثر $\beta_2(G)$ خواهد بود ، لذا $\gamma_f(G)\le\beta_2(G)$ [۷] . ■

۴-۳ ارتباط بين $\gamma_f(G)$ و $\varepsilon(F)$

تعريف۴-۳-۱ : براي هر جنگل پوشاي F در $G=(V,\sigma,\mu)$ ، $\varepsilon(F)=\sum\sigma(v)$ تعريف مي شود كه مجموع روي رئوس آويزان v در

Fمي باشد كه v رأس انتهايي يك يال مؤثر از F نيز باشد .حال $\varepsilon = \max \varepsilon(F)$ را تعريف مي كنيم كه ماكسيمم روي تمامي جنگل هاي پوشاي Fدر G مي باشد [۷] .

قضيه ۴-۳-۱: در هر گراف فازي $G = (V, \sigma, \mu)$، $\gamma_f = P - \varepsilon$.

اثبات: فرض كنيم Fجنگل پوشايي در G باشد . مجموعه X شامل رئوس آويزان v در F كه رأس انتهايي يك يال مؤثر نيز باشند را در نظر مي گيريم . $V - X$ يك مجموعه احاطه گر فازي از اندازه $P - \varepsilon(F)$ مي باشد . از اين رو $\gamma_f \le P - \varepsilon(F) \le P - \varepsilon$.

براي اثبات طرف دوم تساوي فرض كنيم S يك $\gamma_f - set$ در G باشد . و فرض كنيم F_s جنگل پوشاي زير گراف القايي$G[S]$ باشد . از آنجا كه S يك مجموعه احاطه گر فازي برايG مي باشد لذا براي هر رأس v در $V - S$ رأس$v' \in S$ وجود دارد به گونه اي كه $\mu(vv') = \sigma(v) \wedge \sigma(v')$. فرض كنيم F زير گرافي از G

باشد كه از اضافه كردن مجموعه رئوس$V - S$ و يالهايvv' بين S و $V - S$ به جنگل F_s بدست مي آيد . دراين صورتF، جنگل پوشايي در G مي باشد كه $|V - S|_f \ge P - \gamma_f$ $\varepsilon(F) \ge$. بنابراين $\varepsilon \ge P - \gamma_f$ لذا $\gamma_f = P - \varepsilon$ [۷] . ■

فصل پنجم

قضایا و کاربرد هایی از احاطه گری در گراف های فازی

۵- ۱ مقدمه

يكي از مسائلي كه تحت عنوان مسأله احاطه گري مطرح مي شود، مساله يافتن كم هزينه ترين تعداد مراكز يا تاسيساتي است كه تمام مناطق موجود در يك محدوده را در كوتاه ترين زمان ممكن پوشش دهند. مسائلي نظير ايجاد ايستگاههاي آتش نشاني و مراكز اورژانس از اين نوع مي باشند. براي مثال ايستگاههاي آتش نشاني بايستي در مكان‌هايي تاسيس گردند كه در صورت آتش سوزي، نزديكترين ايستگاه آتش نشاني به محل آتش سوزي بتواند در حداقل مدت به آن سرويس داده و حريق را مهار نمايد.

تعيين محل مناسب براي استقرار تجهيزات يا مراكز خدماتي در يك شبكه موضوع مهمي بوده و در چند دهه اخير توجه بسياري را به خود جلب كرده است. تصميمات مربوط به مكان‌يابي در مسائل گوناگوني اعم از بخش هاي دولتي و خصوصي ظاهر مي گردند. در قسمت خصوصي، مراكز صنعتي وكارخانجات براي استقرار دفاتر خود در سطح شهر، تعيين محل مراكز توزيع و... نياز به اتخاذ تصميم دارند و در بخش دولتي نيز همان طور كه اشاره شد تعيين مراكزي از قبيل ايستگاههاي آتش نشاني، اورژانس و ... از اهميت ويژه اي برخوردار است.

در اين فصل ابتدا قضايايي از احاطه گري در گراف هاي فازي را عنوان كرده و به اثبات مي رسانيم. سپس كاربرد هايي از احاطه گري فازي در حل برخي از مسائل را مطرح مي كنيم و به مقايسه ي ديدگاه فازي و غير فازي در حل مسائل مي پردازيم.

۵-۲ قضايايي از احاطه گري در گراف هاي فازي

قضيه ۵-۲-۱: براي هر گراف فازي همبند $G=(V,\sigma,\mu)$ با بيش از دو رأس يك مجموعه احاطه گر فازي مانند S وجود خواهد داشت به گونه اي كه متمم آن يعني $V-S$ نيز مجموعه احاطه گر فازي در G باشد.

اثبات: از آنجا كه G همبند است داراي يك درخت پوشاي فازي مانند T مي باشد. $u\in V$ را در نظر مي گيريم. رئوس T را به دو مجموعه مجزاي S و S' افراز مي كنيم به گونه اي كه S شامل رئوسي از T باشد كه تعداد يال هاي مؤثر بين آنها و u زوج است و S' شامل رئوسي از T باشد كه تعداد يال هاي مؤثر بين آنها و u فرد است. دراين صورت واضح است كه S و $S'=V-S$ مجموعه هاي احاطه گر فازي در Gمي باشند. ■

تعريف۵-۲-۱: فرض كنيم $G=(V,\sigma,\mu)$ يك گراف فازي باشد. $S\subseteq V$ يك پايگاه فازي[۴۷] ناميده مي شود هرگاه به ازاي هر $u,v\in S$ داشته باشيم $N(u)\cap(V-S)=N(v)\cap(V-S)$ به اين معنا كه رئوسي از $V-S$ كه توسط u احاطه مي شوند با رئوسي از $V-S$ كه توسط v احاطه مي شوند برابراند. هر پايگاه بايد حداقل شامل دو رأس باشد.

قضيه ۵-۲-۲: اگر S يك γ_f-set و يك پايگاه فازي در $G=(V,\sigma,\mu)$ باشد در اين صورت S يك مجموعه مستقل فازي است.

اثبات: فرض كنيم Sيك γ_f-set و يك پايگاه فازي در G باشد. حال اگردو رأس u و v در S يكديگر را احاطه كنند با توجه به اينكه S يك پايگاه فازي است رئوسي در $V-S$ كه توسط u احاطه مي شوند با رئوسي در $V-S$ كه توسط v احاطه مي شوند برابراند. لذا $S-\{u\}$ نيز يك مجموعه احاطه گر فازي در G است كه با γ_f-set، بودن Sدر تناقض است. ■

---

[۴۷] fuzzy status

قضيه ۵-۲-۳: در گراف فازي G، $\gamma_f(G) \le \beta_0(G)$.

اثبات: اگر D مجموعه مستقل فازي ماكسيمال در گراف G باشد. در اين صورت به ازاي هر $x \in V - D$، $D \cup \{x\}$ مستقل فازي نيست. يعني x توسط رأسي از D احاطه مي شود. بنابر اين D يك مجموعه احاطه گر فازي در G است. لذا ■.

$\gamma_f(G) \le |D|_f \le \beta_0(G)$

قضيه ۵-۲-۴: $\gamma_f(K_{\sigma_1,\sigma_2}) \le \min_{u \in V_1} \sigma(u) + \min_{v \in V_2} \sigma(v)$.

اثبات: فرض كنيم K_{σ_1,σ_2} گراف فازي دو بخشي كامل با دو بخش V_1 و V_2 باشد. در اين صورت $v \in V_1$ كه $\sigma(v) = \min_{u \in V_1} \sigma(u)$ تمامي رئوس V_2 را احاطه مي كند. همچنين $w \in V_2$ كه $\sigma(w) = \min_{u \in V_2} \sigma(u)$ تمامي رئوس V_1 را احاطه مي كند. لذا $\{v,w\}$ مجموعه احاطه گر فازي در K_{σ_1,σ_2} خواهد بود و $\gamma_f(K_{\sigma_1,\sigma_2}) \le \min_{u \in V_1} \sigma(u) + \min_{v \in V_2} \sigma(v)$. ■

قضيه ۵-۲-۵: درگراف فازي K_{σ_1,σ_2} و K_σ داريم : $\gamma_f(G) = \gamma_c(G)$.

اثبات: در گراف هاي K_{σ_1,σ_2} و K_σ هر مجموعه احاطه گر فازي، يك مجموعه احاطه گر فازي همبند مي باشد و برعكس هر مجموعه احاطه گر فازي همبند، يك مجموعه احاطه گر فازي مي باشد لذا $\gamma_f(G) = \gamma_c(G)$.

قضيه ۵-۲-۶: اگر H يك زيرگراف پوشاي همبند از گراف فازي Gباشد آنگاه، $\gamma_c(G) \le \gamma_c(H)$.

اثبات: فرض كنيم H زيرگراف پوشاي همبند Gباشد. در اين صورت هر مجموعه احاطه گر فازي همبند در H مجموعه احاطه گر فازي همبند در Gنيز خواهد بود و $\gamma_c(G) \le \gamma_c(H)$. ■

قضيه ۵-۲-۷: فرض كنيم $G=(V,\sigma,\mu)$ يك گراف فازي همبند باشد. براي هر درخت پوشاي T در G قرار مي دهيم، $\varepsilon(T) = \sum \sigma(v)$ كه مجموع روي رئوس آويزان v در T مي باشد كه v رأس انتهايي يك يال مؤثر از T نيز باشد. حال $\varepsilon_T = \max \varepsilon(T)$ را تعريف مي كنيم كه ماكسيمم روي تمامي درخت هاي پوشاي Tدر G مي باشد. در اين صورت $\gamma_c(G) = P - \varepsilon_T$.

اثبات: فرض كنيم T درخت پوشايي در G باشد. مجموعه X شامل رئوس آويزان v در T كه رأس انتهايي يك يال مؤثر نيز باشند را در نظر مي گيريم. در اين صورت $T-X$ يك مجموعه احاطه گر فازي همبند از اندازه $P-\varepsilon(T)$ مي باشد. لذا $\gamma_c \le P-\varepsilon(T) \le P-\varepsilon_T$.

براي اثبات طرف دوم نامساوي فرض كنيم S يك γ_c-set در گراف G باشد. طبق فرض $G[S]$ همبند مي باشد. حال فرض كنيم T_S درخت پوشاي زير گراف القايي $G[S]$ باشد. از آنجا كه S يك مجموعه احاطه گر فازي در G مي باشد لذا براي هر رأس v در $V-S$ رأس $v' \in S$ وجود داردكه vرا احاطه مي كند. با اضافه كردن مجموعه رئوس $V-S$ و يالهاي vv' بين S و $V-S$ به T_s درخت پوشاي Tدر G بدست مي آيد. دراين صورت $\varepsilon \ge \varepsilon(T) \ge |V-S|_f \ge P-\gamma_c$. لذا $\gamma_c(G) = P-\varepsilon_T$. ■

قضيه ۵-۲-۸: فرض كنيم D يك $wfd-set$ از اندازه فازي مينيمم در گراف فازي $G=(V,\sigma,\mu)$ باشد. در اين صورت براي هر $v \in D$ همواره يكي از حالت هاي زير رخ مي دهد:

۱) هيچ رأسي از D به طور ضعيف v را احاطه نمي كند.
۲) وجود دارد $u \in V-D$ به گونه اي كه v تنها رأس از D باشد كه u را احاطه ي ضعيف مي كند.

اثبات: به برهان خلف فرض كنيم هيچ يك از دو حالت فوق رخ ندهد. در اين صورت $\exists v_1 \in D$ كه v را به طور ضعيف احاطه مي كند. همچنين براي هر رأس $u \in V-D$ كه توسط v احاطه ي ضعيف مي شود
$\exists\ v_2 \in D$ كه u را به طور ضعيف احاطه مي كند. در اين صورت $D-\{v\}$ يك $wfd-set$ مي باشد كه با مينيمم بودن D در تناقض است. لذا فرض خلف باطل و حكم برقرار مي باشد. ■

قضيه ۵-۲-۹: درگراف فازي همبند و فاقد مثلث بندي $G=(V,\sigma,\mu)$ اگر $i_{wf}(G)=P-\delta_N(G)$ آنگاه $G \in \{K_{\sigma_1}\} \cup \{K_{\delta_N, P-\delta_N}\}$.

اثبات: فرض كنيم $i_{wf}(G)=P-\delta_N(G)$. اگر $\delta_N(G)=0$ آنگاه $G=\bar{K}_{\sigma_1}$ و حكم برقرار است اگر $\delta_N(G)>0$ باشد رأس $v \in V_{\delta_N}$ را در نظر مي گيريم طبق قضيه (۳-۲-۳) $V-N(v)$ مستقل فازي است. همچنين از آنجا كه G فاقد مثلث بندي مي باشد $N(v)$ نيز مستقل فازي خواهد بود. در اين صورت طبق قضيه (۳-۱-۲) $V-N(v) \subseteq V_{\delta_N}$. چون $\delta_N(G)=|N(v)|_f$ پس هر رأس از $V-N(v)$ با تمامي رئوس $N(v)$ مجاور مي باشد. لذا $G=K_{P-\delta_N, \delta_N}$.
■

قضيه ۵-۲-۱۰: فرض كنيم G يك گراف فازي باشد. $\gamma_{sf}(G)=P-\Delta_N(G)$ اگر و تنها اگر هر $v \in V_{\Delta_N}$ در شرايط زير صدق كند.
۱) $V-N(v)$ مستقل فازي باشد.

۲) اگر $u \in N(v)$ رأس x در $V-N(v)$ را احاطه قوي كرد آنگاه $\sigma(u) \geq \sigma(x)$.

اثبات: $\Rightarrow$ اگر $\gamma_{sf}(G) = P - \Delta_N(G)$.

به برهان خلف فرض كنيم براي $v \in V_{\Delta_N}$، $V-N(v)$ مستقل نباشد. يعني $\exists u,w \in V-N(v)$ كه $\mu(u,w) = \sigma(u) \wedge \sigma(w)$. بدون خلل در اثبات فرض كنيم $d_N(w) \geq d_N(u)$ يعني w رأس u را احاطه قوي مي كند. در اين صورت $V-(N(v) \cup \{w\})$ يك مجموعه احاطه گر فازي قوي از اندازه $P - \Delta_N(G) - \sigma(w)$ مي باشد كه با فرض اوليه در تناقض است.

اگر $u \in N(v)$ وجود داشته باشد كه رأس x در $V-N(v)$ را احاطه قوي كند و $\sigma(u) < \sigma(x)$. حال $\{V-(N(v) \cup \{x\})\} \cup \{u\}$ يك مجموعه احاطه گر فازي قوي از اندازه $P - \Delta_N(G) - \sigma(x) + \sigma(u)$ مي باشد كه $P - \Delta_N(G) - \sigma(x) + \sigma(u) < P - \Delta_N(G)$ كه به فرض اوليه در تناقض است.

$\Rightarrow$ فرض كنيم D يك $sfd-set$ از اندازه فازي مينيمم باشد. D شامل حداقل يك رأس از V_{Δ_N} مي باشد زيرا در غير اين صورت رئوس اين مجموعه احاطه قوي نمي شوند. حال فرض كنيم v رأسي از D باشد كه $v \in V_{\Delta_N}$. در اين صورت طبق (۱)، $V-N(v)$ مستقل فازي مي باشد. از طرفي $V-N(v)$ يك $sfd-set$ كه طبق (۲) با جايگزين رئوس $N(v)$ در $V-N(v)$ عدد احاطه گري فازي قوي افزايش مي يابد. لذا $\gamma_{sf}(G) = P - \Delta_N(G)$. ■

۵- ۳ كاربرد هايي از احاطه گري در گراف هاي فازي

۵-۳-۱مكانيابي مراكز ارائه خدمات

در اين مسأله هدف تعيين موقعيت براي احداث ايستگاه آتشنشاني، پليس، اورژانس و يا هر مركز ارائه خدمت ديگري مي باشد كه انتخاب موقعيت براي احداث اين مكانها

به عوامل مختلفي همچون هزينه ساخت، ارائه خدمات در سريع ترين زمان ممكن، جمعيت مناطق مورد نظر و ... بستگي دارد. با مدل كردن مسأله روي گراف فازي رأس ها بيانگر شهرها و يالها بيانگر جاده هاي بين شهرها مي باشند. فرض كنيم به ازاي هر $v_i,v_j \in V$، $\mu(v_i,v_j)$ درجه عضويت يال بين رأس ها v_i و v_j باشد كه نشان دهنده ميزان و كيفيت ارائه خدمات بين دو رأس خواهد بود. و فرض كنيم $\sigma(v_i)$ درجه عضويت متناظر با رأس v_i باشد كه نشان دهنده درجه حضور مركز مورد نظر در اين رأس مي باشد. پس از جمع آوري داده ها و اطلاعات اوليه از يك مسأله توابع عضويت σ و μ بر اساس تكنيك هاي آماري و استاندارد خاص[۱۱و۲۴و۲۹] تعيين مي شوند و به هر رأس و يال درجه عضويت متناسب با آن را نسبت مي دهند. در برخي موارد نيز توابع عضويت σو μ بر اساس نظر متخصصان مربوطه تعيين مي شوند. پس از مدل سازي براي حل مسأله مكانيابي فوق كافي است مجموعه احاطه گر فازي از اندازه فازي مينيمم را بيابيم. به طور مثال كاربرد اين مفهوم را در مسأله مكانيابي مراكز اورژانس مطرح مي كنيم.

۵-۳-۲ مسأله مكانيابي مراكز اورژانس

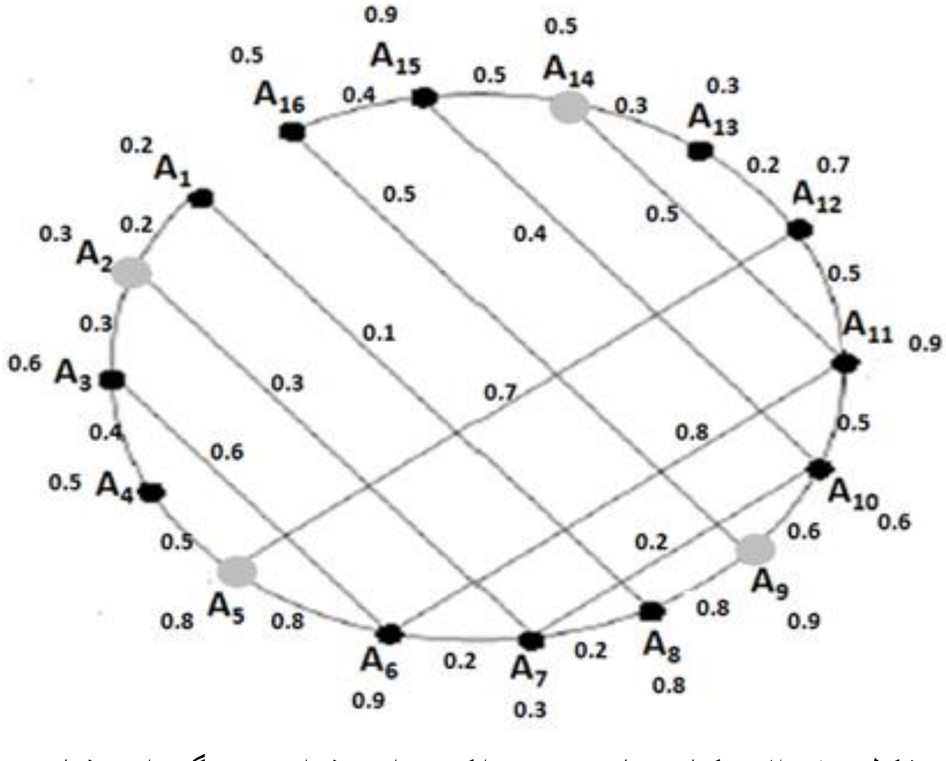
فرض كنيم مي خواهيم برنامه اي را براي ايجاد مراكز اورژانس در يك منطقه طراحي كنيم كه مناسب ترين تعداد ممكن مراكز اورژانس ايجاد شوند به گونه اي كه تمامي عوامل مؤثر در ساخت يك مركز اورژانس در نظر گرفته شده باشند. نقاط تعيين شده جهت احداث مراكز اورژانس بايد تمامي منطقه راپوشش دهند. يك منطقه بزرگ به شكل مربع را به ۱۶منطقه كوچكتر (شكل ۵- ۱) تقسيم مي كنيم.

A_1	A_8	A_9	A_{16}

A_2	A_7	A_{10}	A_{15}
A_3	A_6	A_{11}	A_{14}
A_4	A_5	A_{12}	A_{13}

شكل ۵- ۱ مكانيابي مراكز اورژانس

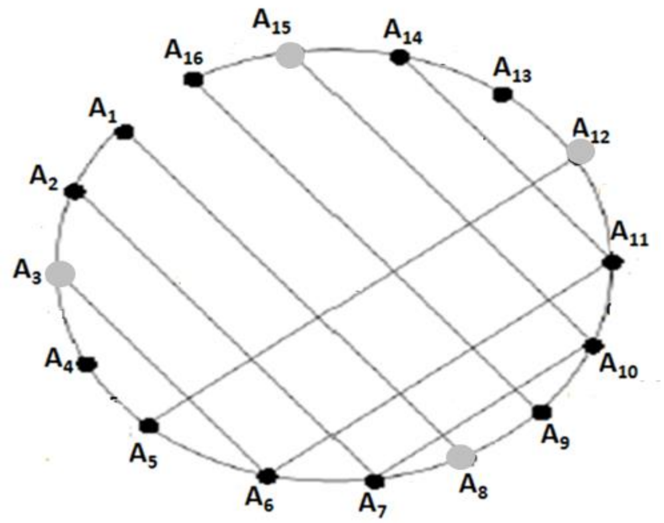
مركز *اورژانس* واقع شده در هر مربع علاوه بر منطقه واقع شده درداخل خود مربع به مناطقي كه داراي مرز مشترك با مربع باشند نيز مي تواند خدمات اورژانسي ارائه دهد. مسأله را روي يك گراف فازي مدل سازي مي كنيم. هر منطقه كوچك بيانگر رأس گراف و مرز مشترك بين مناطق بيانگر يال بين رأس ها مي باشد.گراف فازي حاصل در شكل (۵-۲) نشان داده شده است.



شكل ۵-۲ مكانيابي مراكز اورژانس، گراف فازي

در گراف فازي شكل (۵-۲)درجه عضويت هر رأس به نوعي درجه ساخت مركز اورژانس در منطقه را نشان مي دهد كه به عواملي مانند جمعيت منطقه، ميزان وقوع حوادث طبيعي و

غير طبيعي مانند سيل و زلزله و تصادفات در منطقه، هزينه هاي لازم براي ساخت مركز اورژانس و مواردي از اين قبيل بستگي خواهد داشت. همچنين درجه عضويت يال ها ميزان خدمات رساني يك منطقه به منطقه مجاورش را نشان مي دهد كه به عواملي چون راه هاي ارتباطي موجود بين دو منطقه، وضعيت ترافيكي اين راه ها، ميزان مسافت طي شده بين دو منطقه، زمان تقريبي رسيدن خدمات اورژانسي از يك منطقه به منطقه مجاور آن و ...بستگي خواهد داشت.بنا بر اين براي حل مسأله كافي است مجموعه احاطه گر فازي از اندازه فازي مينيمم را پيدا كنيم. مناسب ترين مراكز اورژانس براي پوشش كل منطقه عبارت اند از: $\{A_5,A_{14},A_9,A_2\}$ و $\gamma_f(G)=2$. حال مسأله فوق را روي گراف غير فازي بررسي كنيم.



شكل ۵-۳ مكانيابي مراكز اورژانس، گراف غير فازي

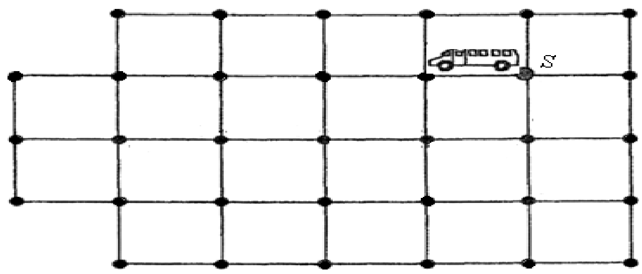
با مدل كردن مسأله روي گراف غير فازي و بدون در نظر گرفتن درجه عضويت رأس ها و يالها همان طور كه در شكل (۵-۳) مشخص شده است $A=\{A_3,A_8,A_{12},A_{15}\}$ مجموعه احاطه گر مينيمم با $|A|_f=3$ مي باشد. و اين در حالي است $\gamma_f(G)=2.5$.

همانطور كه در اين مثال مشاهده مي شود در گراف هاي فازي

با توجه به اعمال شدن شرايط و ويژگي هاي محيطي در حل مسأله پاسخ مناسب تري بدست خواهد آمد [۵] .

۵-۳-۳مسير يابي اتوبوس

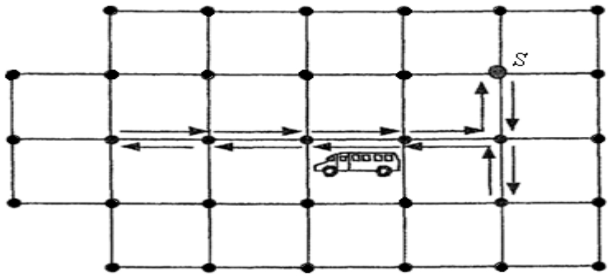
امروزه اكثر مدارس و شركت ها براي حمل و نقل دانش آموزان و كاركنان خود از اتوبوس استفاده مي كنند. به عنوان مثال درگراف شكل (۵-۴) نقشه خيابان ها و تقاطع هاي بخشي از يك شهرستان را مشاهده مي كنيد. در اين گراف رئوس بيانگر تقاطع ها و يال هاي گراف بيانگر خيابان ها مي باشند. در اين جا فرض بر اين است كه تمامي خيابان ها داراي دو مسير رفت و برگشت باشند و گراف فاقد يال هاي جهت دار مي باشد.



شكل ۵-۴ مسير يابي اتوبوس

فرض كنيم مدرسه و يا شركت مورد نظر اين شهرستان در رأس S واقع شده باشد. هيچ دانش آموزي و يا كارمندي نبايد بيشتر از دو يال را براي رسيدن به ايستگاه اتوبوس پياده طي كند. در اينجا مسأله انتخاب كمترين تعداد از رأس ها به عنوان ايستگاه اتوبوس مي باشد كه بتوانند كار جابجايي را در تمام منطقه انجام دهند. با توجه به اينكه مجموعه ايستگاه هاي انتخاب شده جهت حركت اتوبوس را مشخص مي كنند بايد يك مجموعه احاطه گر ۲- فاصله اي همبند را بيابيم. يعني هر رأس خارج از مجموعه انتخابي بايد حداقل با يك رأس از مجموعه فاصله اي كمتر از سه يال داشته باشد. در شكل (۵-۵) كمترين تعداد ايستگاه هايي

كه براي جابجايي كل ناحيه مي توان در نظر گرفت و مسير حركت اتوبوس مشخص شده است.



شكل۵-۵مسير حركت اتوبوس در گراف غير فازي

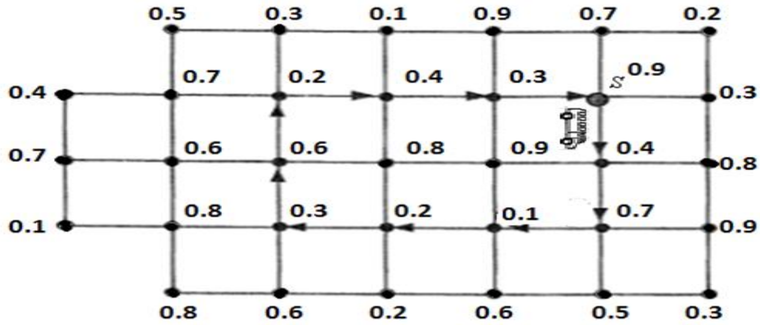
در واقع براي حل مسأله آن را روي گراف غير فازي مدل سازي كرده ايم. در اين گراف با در نظر گرفتن مينيمم مجموعه احاطه گر به عنوان كمترين تعداد ايستگاه هاي مورد نياز براي حمل و نقل موارد زير در نظر گرفته نمي شوند.

- زمان و ميزان سوخت مصرفي براي رسيدن اتوبوس از يك تقاطع به تقاطي ديگر.
- حداكثر تعداد مسافران داخل اتوبوس در واحد زمان.

- حداكثر فاصله اي كه فرد براي رسيدن به ايستگاه بايد پياده طي كند.
- مسافت طي شده توسط اتوبوس بين تقاطع هاي مختلف.
- زمان تقريبي توقف در هر ايستگاه و...

با حال مسأله را روي يك گراف فازي مدل سازي مي كنيم. درجه عضويت يال ها و رأس ها بر اساس زمان و مسافت حركت از يك رأس به رأس ديگر به صورت پياده روي و يا توسط اتوبوس، تعداد مسافران منتقل شده، زمان تقريبي توقف در هر ايستگاه، و ميزان سوخت مصرفي اتوبوس در هر مسير... تعيين مي شود. كافي است به دنبال مجموعه احاطه گر ۲- فاصله مؤثر فازي همبند از اندازه فازي مينيمم باشيم. با اعمال درجه عضويت هاي تعيين شد توسط متخصصان كه بر اساس داده هاي جمع آوري شده در يك دوره زماني مي باشد گراف

فازي شكل (۵-۶) را خواهيم داشت. در اين مثال تمامي يال ها مؤثر مي باشند و از نوشتن درجه عضويت روي آنها صرفه نظر شده است. مجموعه احاطه گر ۲- فاصله مؤثر فازي همبند از اندازه فازي مينيمم ($\gamma_c(G)=۴,۱$) و مسير حركت اتوبوس نيزدر گراف فازي شكل (۵-۶) نشان داده شده است.



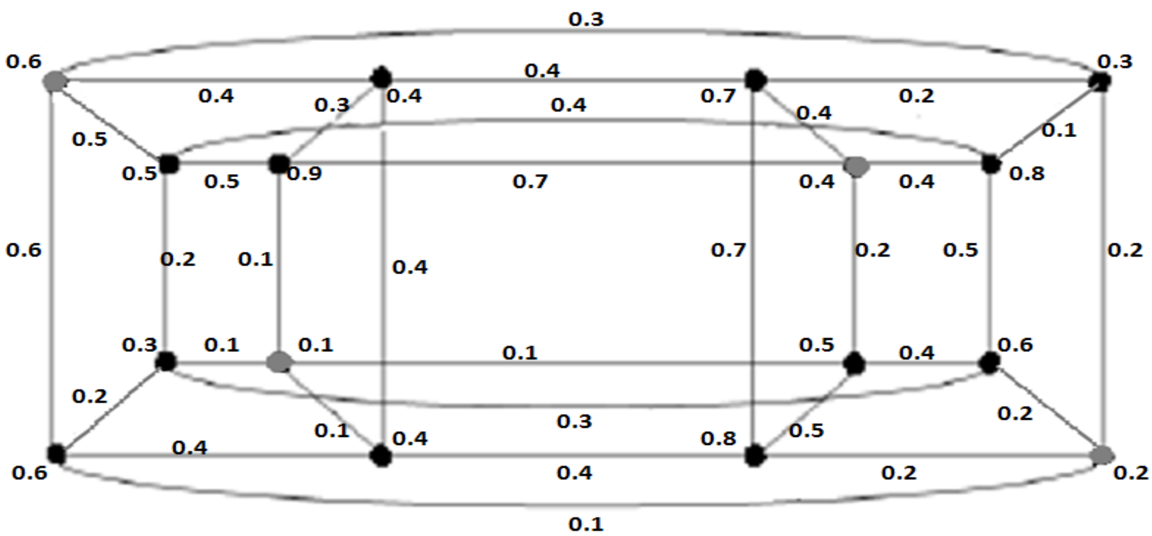
شكل۵-۶ مسير حركت اتوبوس در گراف فازي

با انتخاب مسير حركت نشان داده شده در شكل (۵-۶) ممكن است اتوبوس در ايستگاه هاي بيشتري توقف داشته باشد اما با كارايي بهتري عمل خواهد كرد به طور مثال در مدت زمان كمتر و با طي مسافت كمتري كار جابجايي مسافران را انجام خواهد داد. همچنين با توجه به بالا بودن هزينه سوخت مصرفي اتوبوس اطمينان خواهيم داشت كه اين مسأله در برنامه ريزي مسير حركت اتوبوس در نظر گرفته شده است[۲۸] .

۵-۳-۴ شبكه ارتباطي كامپيوتر

يك شبكه ارتباطي كامپيوتري با ۱۶ كامپوتر را در نظر بگيريد. رأس ها در اين مدل بيانگر كامپيوتر ها و يالها بيانگر پيوند ارتباطي مستقيم بين كامپيوتر ها مي باشند. مسأله در يافت اطلاعات از تمامي كامپيوتر ها مي باشد به گونه اي كه بيشترين حجم اطلاعات و در كمترين زمان ممكن در اختيار ما قرار گيرد. هر كامپوتر مي تواند در زمان معين حجم محدودي از اطلاعات را به كامپيوتر مجاور خود

انتقال دهد. همچنين كامپيوتر هاي مختلف پردازش اطلاعات را در زمان هاي متفاوتي انجام مي دهند. رأس ها و يال ها بر اساس حجم اطلاعاتي كه در واحد زمان منتقل مي كنند درجه بندي شده اند. هدف انتخاب مجموعه كوچكي از كامپيوتر ها است تا ساير كامپيوتر ها اطلاعات خود را به يكي از كامپيوتر هاي داخل مجموعه ارسال كنند و دريافت اطلاعات در اين شبكه كامپيوتري در كمترين زمان ممكن انجام شود. بنابر اين كافي است به دنبال مجموعه احاطه گر فازي از اندازه فازي مينيمم باشيم.



شكل ۵-۷ مجموعه احاطه گر فازي از اندازه مينيمم در شبكه كامپيوتري

در شكل (۵-۷) رأس هايي كه كمرنگتر مي باشند مجموعه احاطه گر فازي از اندازه فازي مينيمم را نشان مي دهند. در صورتي كه مسأله فوق را روي گراف هاي غير فازي مدل سازي كنيم با در نظر گرفتن گراف

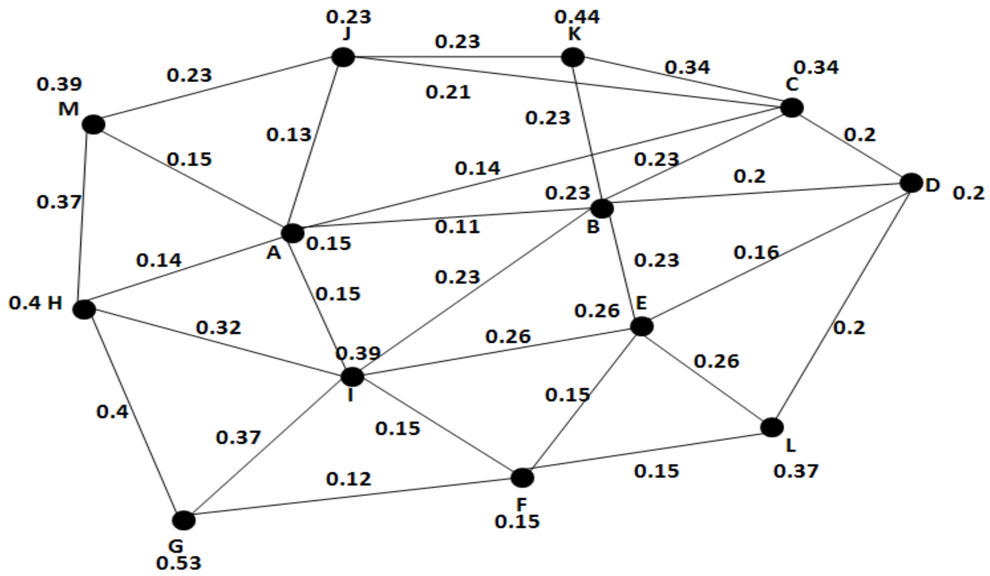
Q_4و انتخاب مينيمم مجموعه احاطه گر ممكن است تعداد كامپيوتر هاي انتخاب شده براي پوشش كل شبكه كمتر از ۴ كامپيوتر باشند اما با توجه به اينكه سرعت انتقال و

پردازش اطلاعات در کامپيوتر هاي مختلف نظر گرفته نمي شود ممکن است اتلاف زمان بيشتري را داشته باشيم [۲۸] .

۵-۳-۵ ايستگاه هاي راديويي

مجموعه اي از روستا ها را در بخشهاي مختلفي از يك كشور داريم. مي خواهيم در برخي از اين روستا ها مكان هايي براي قرار دادن ايستگاه هاي راديويي انتخاب كنيم به گونه اي كه اخبار از اين ايستگاه ها به تمامي روستا ها مخابره شوند. هر ايستگاه راديويي داراي برد محدودي در انتشار امواج مي باشد و با توجه به پر هزينه بودن تأسيس اين ايستگاهها مي خواهيم كمترين تعداد مورد نياز جهت پوشش كل روستا ها را احداث نماييم. در گراف فازي شكل (۵-۸) رأس ها نشان دهنده روستا ها مي باشند و و يال ها روستا هاي داراي مرز مشترك با هم را نشان مي دهند.

ايستگاه راديويي واقع شده در هر روستا علاوه بر خود آن مي تواند قسمت هايي از روستا هاي مجاور آن را نيز پوشش دهد. تجربه نشان داده است شرايط جغرافيايي و آب وهوايي هر منطقه در كيفيت و كارايي ايستگاههاي راديويي تأثير گذار مي باشد. پس از تخمين هزينه ساخت ايستگاه راديويي در هر روستا و بررسي شرايط محيطي و همچنين برد هر ايستگاه راديويي درجه عضويت رأس ها و يال ها تعيين مي شود.



شكل۵-۸ گراف فازي ايستگاه هاي راديويي

در اين مسأله $\{A,B,F,J,H\}$ مجموعه احاطه گر فازي از اندازه فازي مينيمم مي باشد. لذا مناسب ترين مكان ها جهت احداث ايستگاه هاي راديويي كه براي پوشش كل روستا ها كافي باشند و همچنين كمترين هزينه را داشته باشند روستا هاي $\{A,B,F,J,H\}$ مي باشند [۲۸] .

۵-۳-۶ كنترل ترافيك

فرض كنيم G يك گراف باشد كه بيانگر شبكه جاده هاي يك شهر مي باشد. و رئوس نشان دهنده ي تقاطع ها و يالها نشان دهنده ي جاده ي بين تقاطع ها باشند. بر اساس داده هاي آماري كه نشان دهنده ي تعداد وسايل نقليه عبور كننده از جاده ها در يك پيك زماني خاص مي باشند توابع عضويت μ,σ به ترتيب روي مجموعه رئوس و يالهاي گراف G ساخته مي شوند. اين توابع بر اساس تكنيك هاي استاندارد ارائه شده [۱۱و۲۴و۲۹]در نظر گرفته مي شوند. در گراف فازي بدست آمده از اين مدل سازي مجموعه احاطه گر فازي قوي D بيان كننده ي مجموعه ي تقاطع ها با بيشترين ترافيك نسبت به ساير تقاطع هاي خارج از D مي باشد كه اين تقاطع ها توسط يك جاده با جريان ترافيك سنگين به

تقاطعي از D متصل مي باشند [۱۲] .

نتیجه گیري و پیشنهادات

یکی از کار های موثر در گسترش اکثر شاخه های علوم، توسعه مفاهیم قطعی به مفاهیم فازی است. در واقع با نگاه فازي به مسائل، عوامل و شرایط محیطي اثر گذار بر یك مسئله که در حالت قطعي نادیده گرفته مي شوند نیز در نظر گرفته خواهند شد. مفهوم احاطه گري در گراف ها نیز یکي از مسائلي است که اخیرا از دیدگاه فازي مورد مطالعه و بررسي قرار گرفته است. مقایسه حالت قطعي و فازي نشان مي دهد که حل بسیاري از مسائل در حالت فازي نسبت به حالت قطعي به واقعیت نزدیکتر بوده و از دقت بیشتري برخوردار مي باشد. مسئله احاطه گري در گراف هاي فازي یکي از مسائل NP-Completeمي باشد لذا الگوریتم هاي زمان چند جمله اي براي حل این مسائل وجود ندارند. با توجه به اهمیت مفهوم احاطه گري در بخش هاي کاربردي و مسائل مکانیابي در این پایان نامه به این مفهوم پرداخته شده است و براي پارامتر هاي احاطه گري در گراف هاي فازي کران هاي مناسبي مطرح شده است.در ادامه پیشنهاداتي را براي علاقه مندان به تحقیق در زمینه احاطه گري در گراف هاي فازي مطرح مي کنیم.

۱)بسیاري از پارامترهاي احاطه گري در گرف ها مانند احاطه گري k لایه اي، α-احاطه گري، احاطه گري همبند خارجي، احاطه گري دوري و... در گراف هاي فازي قابل بررسي و گسترش دادن مي باشند. همچنین گسترش کاربرد این مفاهیم از گراف هاي غیر فازي به گراف هاي فازي نیز بسیار مفید خواهد بود.

۲) به نظر مي رسد احاطه گري در گراف به شکل هاي مختلفي قابل تعریف کردن باشد.به طور مثال عدد احاطه گري فازي در گراف هاي معمولي و یا عدد احاطه گر غیر فازي در گراف هاي فازي و... که پرداختن به این موضوع و دسته بندي

کردن انواع احاطه گري هاي ممکن يکي از کارهاي قابل انجام مي باشد.

۳) و در آخر پيشنهادي براي دانشجويان آمار، در بخش کاربردي احاطه گري در گراف هاي فازي درجه عضويت رأس ها و يال ها در بيشتر موارد بر اساس نظر کارشناسان و متخصصان تعيين مي شوند و تنها در موارد محدودي توابع عضويت خاص تعريف شده اند. دانشجويان رشته آمار مي توانند به تعريف و تعيين توابع عضويت کلي در زمينه هاي مختلف بپردازند.

مراجع

[1] A.Nagoorgani, Basheer Ahamed, "Order and size in fuzzy graph", Bulletin of Pure and Applied Sciences, 22E, (2003), 145-148.

[2] A. Nagoorgani, V.T .Chandrasekaran, " Domination in fuzzy graph", Advances in fuzzy sets andsystems, (2006), 17-26.

[3] A. Nagoorgani, R.Jahir Hussian, "Fuzzy independent dominating set", Advances in fuzzy sets and Systems 2(1) (2007), 99-108.

[4] A.Nagoorgani, P.Vadivel, "Relations between the Parameters of Independent Domination and Irredundance in Fuzzy Graph", International Journal of Algorithms, Computing and Mathematics, (2009).

[5] A.Nagoorgani, R.Jahirhussain, "Fuzzy Effective Distance K-Dominating Sets and their Applications", International Journal of Algorithms, Computing and MathematicsVolume 2, Number 3, August (2009).

[6] A.Somasundaram and S.Somasundaram, "Domination in fuzzy graphs-I",Pattern recognition Letters 19(1998), 787–791.

[7] A.Somasundaram, "Domination in Fuzzy Graph-II", Journal of Fuzzy Mathematics , (2004).

[8] A.Somasundaram, "Domination in Product of Fuzzy Graphs", Intenational Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, (2005) , pp. 195–204.

[9] Bhutani, K.R., and Rosenfeld, "Fuzzy End Nodes in Fuzzy Graphs", Information Sciences,Volume 152, June (2003), 323-326.

[10] Bhutani, K.R., and Rosenfeld, A., "Strong Arcs in Fuzzy Graphs", Information Sciences, 152 (2003), 319-322.

[11] Bobrowicz, C.Choulet, A. Haurat, F. Sandoz, M.Tebaa, "A method to build membership functions — Application tonumericalrsymbolic interface building". In: Proc. 3rd Internat.Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge Based System, Paris. (1990).

[12] C.Natarajan and S.K.Ayyaswamy, "On Strong(Weak) Domination in Fuzzy Graphs", International Journal of Mathematical and Statistical Sciences 2:1 (2010).

[13] C.V.R.Harinarayanan, S.Subbiah, " A Note on Strong Domination in Graphs", (2010) 34:91-100.

[14] D.A.Mojdeh, B.Ashrafi, "On Domination in Fuzzzy Graphs", Advances in Fuzzy Mathematics, (2008), pp. 1-10.

[15] Domke et. al, "On Parameters Related to Strong and Weak Domination in

Graphs", Discrete Mathematics 258 (2002), 1-11.

[16] D.Rautenbach, "Bounds on the Strong Domination Number", Discrete Math .215(2000), 201-212.

[17] D.Rautenbach, " Bounds on the Weak Domination Number", Austral. J .Combin.18(1998), 245-251.

[18] E.Sampathkumar, L.Pushpa latha,"Strong, Weak Domination and Domination Balance in a Graph", Discrete Math. 161(1996), 235-242.

[19] J.N. Mordeson, and P.S.Nair, "Fuzzy graphs and Fuzzy Hypergraphs", Physica-Verlag, Heidelberg, (1998); Second edition, (2001).

[20] Kaufmann, "Introduction à la théorie des sous-ensembles flous", 1o Elémentsthéoriques de base. Paris: Masson et Cie. (1976).

[21] K.L.N. McAlister, "Fuzzy Intersection Graphs", Comp. Math. (1988), pp. 871–886.

[22]M. Shimura, "Fuzzy Sets and their Applications", Aca-demic Press, New York.

[23] Prabir Bhattacharya, "Some Remarks on Fuzzy Graphs", Pattern Recognition Lett. 6(1987), 297-302.

[24]Reha Civanlar, H.Joel Trussel, "Constructing membership functions using statistical data", Fuzzy Sets and Systems, (1986), 1–13.

[25] Rosenfeld, Fuzzy graphs in: Zadeh, L.A., Fu, K.S., Shimura, M (eds), "Fuzzy Sets and Their Applications", Academic Press, New York, (1975).

[26] R.T.Yeh, S.Y.Bang "Fuzzy Relations, Fuzzy Graphs and their Application to Clustering Analysis". In: L.A. Zadeh, (1975).

[27] Sampathkumar, "(1, k) – Domination in a Graph", Jour. Math. Phy. Sci., (1988), 613 – 619.

[28] T. Haynes, S.T .Hedetniemi, P.J.Slater, "Fundamentals of Domination in Graph", Marcel Deckker, NewYork, (1998).

[29] Torgas, R.Swain, C.Revelle, and Bergman, "The Location of emergency servicefacilities", Ops. Res, (1971).

[30]Zimmermann, "Fuzzy Set Theory- and Its Applica-
Lions", Kluwer-Nijhoff, Dordrecht, (1985).

نمادها

اندازه گراف فازی ص۵	q
بیشترین درجه موثر رأس ص۶	$\Delta_E(G)$
بیشترین درجه همسایگی رأس ص۵	$\Delta_N(G)$
ترکیب دو گراف فازی G_2 و G_1 ص۲۵	$G_1 o G_2$
درجه عضویت رأس ص۴	$\sigma(v)$
درجه عضویت رأس در گراف $G_1 o G_2$ ص۲۵	$\sigma_1 \; o \; \sigma_2$
درجه عضویت رأس در گراف $G_1 \Box G_2$ ص۲۸	$\sigma_1 \Box \sigma_2$
درجه عضویت رأس در گراف $G_1 \times G_2$ ص۳۴	$\sigma_1 \times \sigma_2$
درجه عضویت یال ص۴	$\mu(u,v)$
درجه عضویت یال در گراف $G_1 o G_2$ ص۲۵	$\mu_1 \, o \, \mu_2$
درجه عضویت یال در گراف $G_1 \Box G_2$ ص۲۸	$\mu_1 \Box \mu_2$
درجه عضویت یال در گراف $G_1 \times G_2$ ص۳۴	$\mu_1 \times \mu_2$
درجه همسایگی رأس v ص۵	$d_N(v)$
درجه مؤثر رأس v ص۶	$d_E(v)$
زیرگراف القایی تولید شده توسط S ص۹	$G[S]$, <S>
ضرب دکارتی دو گراف فازی ص۲۸	$G_1 \Box G_2$
ضرب مطلق دو گراف فازی ص۳۴	$G_1 \times G_2$
عدد استقلال رأسی ص۵۳	$\beta_0(G)$

عدد استقلال یالی ص۵۳	$\beta_1(G)$
عدد احاطه گر فازی ص۱۲	$\gamma_f(G)\,,\,\gamma_f$
عدد احاطه گر فازی $\bar{G}$ ص۱٤	$\bar{\gamma}_f$
عدد احاطه گر فازی ضعیف ص ۳۷	$\gamma_{wf}(G)\,,\,\gamma_{wf}$
عدد احاطه گر فازی ضعیف مستقل ص ٤۰	$i_{wf}(G)$
عدد احاطه گر فازی قوی ص٤٤	$\gamma_{sf}(G)\,,\,\gamma_{sf}$
عدد احاطه گر فازی قوی مستقل ص٤۷	$i_{sf}(G)$
عدد احاطه گر مستقل فازی ص۱۷	$\gamma_i(G)$،$(i(G))$
عدد احاطه گر فازی همبند ص۱۵	$\gamma_C(G)$
عدد احاطه گر فازی کل ص۱۸	$\gamma_{ft}(G)\,,\,\gamma_{ft}$
عدد پوشش رأسی ص۵۲	$\alpha_0(G)$
عدد پوشش یالی ص۵۲	$\alpha_1(G)$
کمترین درجه موثر رأس ص٦	$\delta_E(G)$
کمترین درجه همسایگی رأس ص٦	$\delta_N(G)$
گراف فازی دو بخشی کامل ص۱۰	K_{σ_1,σ_2}
گراف فازی کامل ص۱۰	K_σ
متمم گراف فازی G ص۹	$\bar{G}$
مجموع وزن رأس های آویزان جنگل پوشای فازی ص٥٦	ε_F
مجموع وزن رأس های آویزان درخت پوشای فازی ص ٦۱	ε_T

مجموعه احاطه گر فازی از اندازه γ_f ص۱۲	$\gamma_f - Set$
مجموعه احاطه گر فازی ضعیف ص۳۷	$wfd - set$
مجموعه احاطه گر فازی قوی ص٤٤	$sfd - set$
مجموعه احاطه گر فازی قوی مستقل ص٤٧	$ISFDS$
مجموعه احاطه گر فازی ضعیف مستقل ص٤٠	$IWFDS$
مجموعه احاطه گر فازی همبند از اندازه γ_cص۱۵	$\gamma_c - Set$
مجموعه رئوس با بیشترین درجه همسایگی ص۷	V_{Δ_N}
مجموعه رئوس با کمترین درجه همسایگی ص۷	V_{δ_N}
مرتبه گراف فازی ص۵	P
مسیر مؤثر فازی با nرأس ص۸	P_n
مینیم وزن در تطابق های ۲- ماکسیمال ص۵۵	$\beta_2(G)$
نماد منطقی مینیمم ص٤	$\wedge$
نماد منطقی ماکسیمم ص۵۵	$\vee$
همسایگی باز رأس ص۵	$N(v)$
همسایگی بسته رأس ص۵	$N[v]$

واژه نامه

واژه نامه فارسي به انگليسي

استقراء.......

....

....

induction..

اجتماع..

....

....

union...............

القايي....

....

....

....

induced

انقباض..

....

contraction..

پوشا..

....

....

spanning........

تساوي..

....

....

equality

تـركيـب.............................
....
composition...................................

تـطا بـق.............................
....
....
matching

تـنــها ....
....
....
....
isolate

جنــگل ....
....
....
forest.............

درجه ....
....
....
degree............

دنـبـا لــه ....
....
....
sequence

دو
بــخشي..............................

. . . .
bipartite . . . .

دوگان . . . .
. . . .
. . . .
. . . .
dual . . . .

رأس . . . .
. . . .
. . . .
vertex . . . .

زوج . . . .
. . . .
. . . .
even . . . .

واژه نامه فارسي به انگليسي

زير
گراف . . . .
. . . .
. . . .
subgraph

شكل . . . .
. . . .
. . . .
fig . . . .

ضرب
دكارتي . . . .

. . . .
cartesian product . . . .

ضرب
مطلق . . . .
. . . .
categorical product . . . .

فاصله
. . . .
. . . .
distance . . . .

فاصله
مؤثر . . . .
. . . .
effective distance . . . .

فاقد
دور . . . .
. . . .
. . . .
acyclic . . . .

قطري . . . .
. . . .
. . . .
diagonal

كران . . . .
. . . .
. . . .
bound . .

کران بالا ....
....
upper bound ....

کران پایین
....
....
lower bound ....

کل ....
....
....
total ....

گراف ....
....
....
graph ...

گراف زمینه ....
....
underlying graph ....

گراف جهت دار ....
....
directed graph ....

گراف کامل ....

. . . .

complete graph . . . .

واژه نامه فارسي به انگليسي

متمايز . . . .
. . . .
. . . .

distinct

متمم گراف

فازي . . . .

complement of . . . .

fuzzy graph

مثلثي . . . .
. . . .
. . . .

triangle . . . . . .

مستقل . . . .
. . . .

independent . . . .

مسير . . . .
. . . .
. . . .

path . . . .

مجاور . . . .
. . . .
. . . .

join . . . .

مجاور ....
....
....
adjacent

مطلق..
....
categorical............................

معکوس.......

....
....
inverse..........................

وابسته.....................................
....
....
dependent.

وزن..
....
....
wight.............

وقوع..
....
....
incidence....

همبند.......................................
....
....
connected..

همسايگي ....

....

neighbourhood ....

يال ....

....

....

edge ....

واژه نامه انگليسي به فارسي

فاقد

دور ....

....

acyclic ....

مجاور ....

....

adjacent ....

دو

بخشي ....

....

bipartite ....

كران ....

....

....

bound

ضرب

دكارتي ....

cartesian product

ضرب مطلق

categorical product

گراف کامل

complete graph

متمم گراف فازي

complement of fuzzy graph

ترکیب

composition

همبند

connected

انقباض

contraction

درجه

degree

وابسته .... dependent

قطري .... diagonal

گراف جهت دار .... directed graph

فاصله .... distance

متمايز .... distinct

دوگان .... dual

يال .... edge

فاصله

مؤثر ....

....

effective distance ....

تساوي ....

....

equality ....

زوج ....

....

....

even

شكل ....

....

....

fig

جنگل ....

....

forest ....

گراف ....

....

graph ....

وقوع ....

....

....

incidence

مستقل ....
....
independent ....

القايي ....
....
....
induced

استقراء ....
....
induction ....

معكوس ....
....
inverse ....

تنها ....
....
....
isolate . . .

مجاور ....
....
....
join . . . . . .

واژه نامه انگليسي به فارسي

كران پايين
....
....
lower bound ....

تطابق ....
....
matching ....

همسايگي ....
....
neighbourhood ....

مسير ....
....
....
path ......

دنباله ....
....
....
sequence

پوشا ....
....
....
spanning

زير
گراف ....
....
subgraph ....

مثلثي ....
....
....
triangle

کل ....
....
....
total

گراف
زمینه ....
....
underlying graph ....

اجتماع ....
....
....
union ...

کران
بالا ....
....
upper bound ....

رأس ....
....
....
vertex ...

وزن ....
....
....
wight ......

Abstract

The concept of domination in fuzzy graphs is very rich both in theoretical develipments and applications. since most of the problems that have discuss in the graphs of the data is accurate and clear. While in application information and data are uncertain that these numbers are different value. In fuzzy graphs vertices and edges denoted by membership degree thats a number between zero and one. so The definition of new concepts such as domination in fuzzy graphs will be necessary. The concept of domination in fuzzy graphs in various branches of applied science is used such to locate problems. In this paper we have introduced the concepts of domination in fuzzy graphs and discussed some of applications. In the first chapter, we have presented basic definitions and concepts in fuzzy graphs. In the second chapter have been different parameters of the domination in fuzzy graphs and some bounds of them. Also represent the effect of the removal of a vertex or edge of G on its domination number. In this chapter introduce the concepts of domination in composition and cartesian and categorical of fuzzy graphs. In the third chapter present the strong fuzzy domination number and weak fuzzy domination number. In the Chapter IV introduces another concepts of fuzzy graph as a vertex cover number , edge cover number, and matching. And the relationship of these concepts with fuzzy dominating number have been studied. In Chapter Five in the first presented some theorems of domination in fuzzy graphs and provered them then discussed some applications of domination in fuzzy graphs for solveing the problems that study in absolute model.

Key words : Fuzzy Graphs, Fuzzy Domination, Strong Fuzzy Domination, Weak Fuzzy Domination, Vertex Covering Number, Edge Covering Number, Matching.

Shahrood University of Technology

Mathematical College

Mathematical Group

Study on Domination in Fuzzy Graphs

Master 's Thesis:

Seyyd Masume Zargar

Supervisor:

Dr.Sadegh Rahimi

Consulting:

Dr.nader Jafarirad

September 2011