

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری تحقیق در عملیات

بررسی مسائل مکان‌یابی دایره: تئوری و الگوریتم‌های بهین برای برخی مدل‌های نیمه ناخوشایند و مدل‌های معکوس

نگارنده: مهرانه غلامی

استاد راهنما

دکتر جعفر فتحعلی

بهمن ۱۳۹۹



مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

شماره:
تاریخ:
ویرایش:

پیوست شماره ۲

دانشکده: ریاضی

گروه: آمار

رساله دکتری: خانم مهرانه غلامی

تحت عنوان: بررسی مسائل مکان‌یابی دایره: تئوری و الگوریتم‌های بهین برای برخی مدل‌های نیمه ناخوشایند و مدل‌های معکوس

در تاریخ ۱۳۹۹/۱۱/۲۹ توسط کمیته تخصصی زیر جهت اخذ مدرک رساله دکتری ارزیابی گردید و با درجه عالی مورد پذیرش قرار گرفت.

امضاء	اساتید مشاور	امضاء	اساتید راهنما
-----	نام و نام خانوادگی: -----		نام و نام خانوادگی: دکتر جعفر فتحعلی
-----	نام و نام خانوادگی: -----	-----	نام و نام خانوادگی: -----

امضاء	نماینده تحصیلات تکمیلی	امضاء	اساتید داور
	نام و نام خانوادگی: دکتر سیدحیدر جعفری		نام و نام خانوادگی: دکتر مهرداد غزنوی
			نام و نام خانوادگی: دکتر محمدهادی نوری اسکندری
			نام و نام خانوادگی: دکتر مهدی زعفرانی



تقدیم به پدرم
کوهی استوار و حامی من در طول تمام زندگی

تقدیم به مادرم
سنگ صبوری که الفبای زندگی به من آموخت

تقدیم به همسرم
که در مسیر ناهموار زندگی واژه صبر را برایم به تصویر کشید
و برق امید چشمانش چراغ دلم را روشن کرد او که در سایه
همیاری و همدلی اش به این مقصد نائل شدم.

تقدیم به دلبندم
امید بخش جانم که آسایش او آرامش من است.

سپاس‌گزاری...

به نام آفریدگار پاک که انسان را از خاک آفرید و به واسطه عقل بر تمام موجودات رحمان داد و آنگاه دانش را وسیله تکامل عقل قرار داد. بزرگ پروردگار را سپاس که به ما استعداد آموختن عطا کرد.

تشکر قلبی و لسانی خود را از استاد عالی قدر جناب آقای دکتر جعفر فتحعلی که زحمت راهنمایی این رساله را عهده دار گردیدند و در تمامی مراحل انجام رساله از راهنمایی‌های مدبرانه ایشان استفاده نمودم ابراز می‌دارم و توفیقات روز افزون ایشان را توأم با صحت و سعادت خواستارم.

مهرانه غلامی

بهمن ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب **مهرانه غلامی** دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **بررسی مسائل مکان یابی دایره: تئوری و الگوریتم های بهین برای برخی مدل های نیمه ناخوشایند و مدل های معکوس**، تحت راهنمایی **جعفر فتحعلی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مهرانه غلامی

بهمن ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

به طور معمول، مسائل مکان‌یابی دایره با هدف کمترین مجموع و کمینه-بیشینه به ترتیب مربوط به یافتن یک دایره C در صفحه است به طوری که مجموع فاصله نقاط داده شده از محیط دایره و حداکثر فاصله نقاط داده شده تا محیط دایره به حداقل برسد. شعاع دایره می‌تواند ثابت یا متغیر باشد. ما در این پایان نامه مسئله معکوس را در نظر می‌گیریم، یعنی، یک دایره C داده می‌شود و می‌خواهیم مختصات یا وزن نقاط موجود را با حداقل هزینه اصلاح کنیم تا دایره داده شده بهینه باشد. ما مدل‌های ریاضی و برخی از ویژگی‌های این مسائل در حالتی که که دایره C در مقایسه با سایر دایره‌ها و یا در مقایسه با دایره‌های با شعاع r_0 بهترین دایره باشد را ارائه می‌کنیم. سپس روشی برای حل مدل‌های معکوس پیشنهاد می‌دهیم. علاوه بر این، ما مسئله مکان‌یابی دایره نیمه ناخوشایند را نیز بررسی می‌کنیم. زمانی با این مسائل روبرو می‌شویم که تسهیلات موجود برای برخی از مشتریان مطلوب و برای بقیه نامطلوب باشد. در این رساله، مسئله مکان‌یابی دایره با وزنهای مثبت و منفی و با استفاده از نرم اقلیدسی در نظر گرفته می‌شود که یک مسئله بهینه سازی غیرخطی است. ما نشان می‌دهیم که برخی خواص جواب مسائل مکان‌یابی دایره با وزنهای مثبت در مسائل نیمه ناخوشایند نیز برقرار است. سپس با کمک این خواص، روشی برای حل این مسائل ارائه می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مسئله مکان‌یابی دایره، مکان‌یابی دایره کمترین مجموع، مکان‌یابی دایره کمینه-بیشینه، مسئله معکوس، مسئله نیمه ناخوشایند.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Jafar Fathali, Mehraneh Gholami (2019), "The semi-obnoxious minisum circle location problem with Euclidean norm", **International Journal of Nonlinear Analysis and Applications (IJNNA)**, ISSN: 2008-6822 (electronic).
2. Mehraneh Gholami, Jafar Fathali (2019), "The semi-obnoxious minisum circle location problem with Euclidean norm", 12th International Conference of Iranian Operation Research Society, Mazandaran University of Science and Technology, Babol, Iran.
3. Mehraneh Gholami, Jafar Fathali (2020), "Mathematical models for the variable weights version of the inverse minimax circle location problem", **Journal of Mathematical Modelling**, 9(1), 137-144.
4. Mehraneh Gholami, Jafar Fathali, "The inverse minisum circle location problem", **Yugoslav Journal of Operation Research**, submitted.
5. Mehraneh Gholami, Jafar Fathali, "The inverse minimax circle location problem with variable coordinate", **International Journal of Industrial Mathematics**, submitted.

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
ش	پیشگفتار
۱	۱ تعاریف و مفاهیم اولیه
۱	۱.۱ مکان‌یابی
۳	۲.۱ مکان‌یابی دایره در صفحه
۴	۱.۲.۱ مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مربعات
۵	۲.۲.۱ مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مجموع با شعاع متغیر
۶	۳.۲.۱ مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مجموع با شعاع ثابت
۷	۴.۲.۱ مکان‌یابی دایره کمینه-بیشینه با شعاع ثابت و بدون وزن
۱۱	۵.۲.۱ مکان‌یابی دایره کمینه-بیشینه با شعاع ثابت و حالت وزن
۱۲	۶.۲.۱ مکان‌یابی دایره کمینه-بیشینه با شعاع متغیر و بدون وزن
۱۲	۷.۲.۱ مکان‌یابی دایره کمینه-بیشینه با شعاع متغیر و حالت وزن
۱۳	۳.۱ مسائل مکان‌یابی معکوس
۱۵	۱.۳.۱ مدل مکان‌یابی معکوس نوع حداقل هزینه
۱۷	۲.۳.۱ مسائل مکان‌یابی معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای
۱۸	۳.۳.۱ مدل مکان‌یابی ترفیع و تنزیل
۱۹	۴.۱ مسائل برنامه‌ریزی چند سطحی
۲۳	۲ معکوس مسائل مکان‌یابی دایره کمترین مجموع
۲۳	۱.۲ معکوس مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مجموع با شعاع متغیر
۳۱	۱.۱.۲ مثال عددی
۳۵	۲.۲ معکوس مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مجموع با شعاع ثابت

۳۹	۳	معکوس مسائل مکان‌یابی دایره با هدف کمینه- بیشینه
۳۹	۱.۳	معکوس دایره کمینه- بیشینه بدون وزن با شعاع ثابت و تغییر مختصات .
۴۳	۲.۳	معکوس دایره کمینه- بیشینه وزن دار با شعاع ثابت و تغییر وزن
۴۷	۳.۳	معکوس دایره کمینه- بیشینه بدون وزن با شعاع متغیر و تغییر مختصات
۴۸	۴.۳	معکوس دایره کمینه- بیشینه وزندار با شعاع متغیر و تغییر مختصات . .
۵۰	۵.۳	معکوس دایره کمینه- بیشینه وزندار با شعاع متغیر و تغییر وزن
۵۱	۴	مسائل مکان‌یابی نیمه‌ناخوشایند
۵۲	۱.۴	مسئله مکان‌یابی دایره نیمه‌ناخوشایند با هدف کمترین مجموع
۵۵	۲.۴	حل مکان‌یابی دایره‌ی کمترین مجموع نیمه‌ناخوشایند
۵۵	۱.۲.۴	الگوریتم بهینه‌سازی فاخته
۵۶	۲.۲.۴	الگوریتم فاخته برای مکان‌یابی دایره‌ی کمترین مجموع نیمه‌ناخوشایند
۵۸	۳.۴	مشاهدات عددی
۶۵		مراجع

فهرست تصاویر

۲۵	۱.۲	فضای شدنی مرکز، در یک مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مجموع . . .
۲۶	۲.۲	اعضای مجموعه A و L و H
۲۶	۳.۲	بررسی اعضای مجموعه L
۲۸	۴.۲	بررسی اعضای مجموعه H
۳۲	۵.۲	عمودمنصف‌های هر جفت از نقاط موجود
	۱.۴	فلوچارت الگوریتم COA برای حل مسائل مکان‌یابی دایره نیمه ناخوشایند
۵۹		با هدف کمترین مجموع
۶۳	۲.۴	مقایسه عملکرد الگوریتم‌های BJS و COA از دیدگاه مقدار هدف
۶۳	۳.۴	مقایسه عملکرد الگوریتم‌های BJS و COA از دیدگاه زمان اجرا

فهرست جداول

۱.۱	بررسی تمام سه‌تایی‌ها	۱۰
۱.۲	پارامترهای مسئله	۳۱
۲.۲	اطلاعات مربوط به اعضای مجموعه B	۳۲
۳.۲	اطلاعات مربوط به اعضای مجموعه L	۳۲
۴.۲	اطلاعات مربوط به اعضای مجموعه H	۳۳
۱.۴	نتایج حاصل از اجرای مسائل مجموعه A با وزن‌های مثبت و تعداد ۱۰ مشتری	۶۰
۲.۴	نتایج حاصل از اجرای مسائل مجموعه A با وزن‌های مثبت و تعداد ۲۰ مشتری	۶۱
۳.۴	نتایج حاصل از اجرای مسائل مجموعه A با وزن‌های مثبت و تعداد ۳۰ مشتری	۶۱
۴.۴	نتایج حاصل از اجرای مسائل مجموعه A با وزن‌های مثبت و تعداد ۴۰ مشتری	۶۲
۵.۴	نتایج حاصل از اجرای مسائل مجموعه A با وزن‌های مثبت و تعداد ۵۰ مشتری	۶۲
۶.۴	نتایج حاصل از اجرای الگوریتم COA برای مسائل مجموعه B	۶۴

پیشگفتار

مفهوم مکان‌یابی از گذشته دور در تصمیم‌گیری‌هایی نظیر انتخاب بهترین کار برای زندگی، بهترین مکان برای احداث روستاها، بهترین مکان برای ساختن خانه‌ها و غیره حضور داشته و انسان‌ها اینگونه مسائل را از روش‌های ابتکاری حل می‌کردند. چندین عامل باعث توجه فراوان به مسائل مکان‌یابی و بوجود آمدن تاریخچه عظیم آن شده است. اولاً، مسائل مکان‌یابی به طور مداوم در تمام سطوح برنامه‌ریزی‌های بشری از صنعت و انبارداری تا نهادهای دولتی حضور دارند. ثانیاً، تصمیم‌گیری‌های مکانی ماهیت استراتژیک دارند، یعنی اغلب آنها با منابع عظیمی از سرمایه سر و کار داشته و تأثیرات اقتصادی آنها بلند مدت می‌باشد، سوماً، اکثر مدل‌های مکان‌یابی به سختی قابل حل هستند. حتی نمونه‌های بزرگ مربوط به پایه‌ای‌ترین مدل‌ها نیز دارای پیچیدگی محاسباتی بالایی هستند. نهایتاً، شکل ساختاری مدل‌های مکان‌یابی (متغیرها، قیود و تابع هدف) بسته به نوع مسئله مکان‌یابی تحت مطالعه تعریف می‌شود، در نتیجه هیچ مدل جامعی برای مسائل مکان‌یابی وجود ندارد.

در آن چه که امروزه به عنوان مسائل مکان‌یابی شناخته می‌شود، مجموعه‌ای از نقاط به عنوان مکان مشتریان داده شده و هدف پیدا کردن بهترین مکان برای یک یا چندین سرویس دهنده است، به طوریکه با توجه به شرایط موجود بتوانند به بهترین شکل به مشتریان سرویس‌دهی کنند. از جمله کاربردهای مسائل مکان‌یابی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

مکان‌یابی انبارها در یک زنجیره تامین برای مینیمم‌سازی میانگین زمانی دسترسی فروشگاه‌ها به این انبارها

مکان‌یابی ایستگاه‌های آتش‌نشانی و مراکز اورژانس به منظور مینیمم‌سازی زمان دسترسی این مراکز به حوادث احتمالی شهر

مکان‌یابی کارخانه‌های مواد شیمیایی خطرناک برای به حداقل رساندن ضررهای ناشی از این کارخانه‌ها به مردم منطقه

مکان‌یابی مراکز پستی برای مینیمم‌سازی میانگین هزینه تحویل مرسولات پستی.

مولفه‌های اساسی یک مسئله مکان‌یابی عبارتند از:

- فضای تصمیم: فضای تصمیم برای استقرار سرویس‌دهنده‌ها به سه دسته زیر طبقه‌بندی می‌شود.

- (i) فضای پیوسته: فضای k -بعدی حقیقی و یا زیر فضای خاصی از آن
- (ii) فضای گسسته: مجموعه ای متناهی از مکان‌های مفروض
- (iii) فضای شبکه: مکان‌های کاندید برای سرویس دهنده‌ها و مکان‌های مفروض مشتریان روی یک شبکه (گراف) قرار دارند.
- تعداد سرویس دهنده‌ها: برای برخی از مسائل مکان‌یابی این تعداد از قبل معلوم بوده و برای برخی دیگر پس از حل مدل مشخص می‌گردد.
- مشتریان: یک مجموعه از مشتریان باید قبلاً روی برخی از نقاط فضای تصمیم مستقر شده باشند.
- اندازه فاصله: فاصله میان سرویس دهنده‌ها و مشتریان (و یا میان سرویس دهنده‌ها) را می‌توان توسط یکی از نوع‌های زیر سنجید:
 - نرم l_p ، $1 \leq p \leq \infty$
 - فاصله شبکه‌ای
 - فاصله همینگ
- تابع معیار: این تابع به فواصل میان مشتریان و سرویس دهنده‌ها وابسته بوده و کیفیت مکان‌های مورد نظر برای استقرار سرویس دهنده‌ها را معین می‌کند. توابع مقایسه مهم عبارتند از:
 - تابع کمترین مجموع^۱
 - تابع کمینه-بیشینه^۲
 - تابع بیشترین مجموع^۳
 - تابع بیشینه-کمینه^۴
- وزن‌ها: برای هر مشتری یک وزن اختصاص داده می‌شود که بیانگر میزان اهمیت آن مشتری در مسئله مکان‌یابی است.

بنابراین، انواع مختلفی از مسائل مکان‌یابی وجود دارد که برخی از مهم‌ترین آنها عبارتند از: مسئله مکان‌یابی میانه، مسئله مکان‌یابی مرکز، مسئله مکان‌یابی سرویس دهنده بدون ظرفیت، مسئله پوششی، مسئله تخصیص درجه دوم، مسئله مکان‌یابی هاب، مسئله مکان‌یابی سرویس دهنده آنلاین، مسئله مکان‌یابی پشتیبان، مسئله مکان‌یابی قابل اعتماد، مسئله

¹minsum

²minmax

³maxsum

⁴maxmin

مکان‌یابی سرویس دهنده ناخوشایند، مسئله مکان‌یابی سلسله مراتبی، مسئله مکان‌یابی رقابتی، مسئله مکان‌یابی انبار، مسئله مکان‌یابی تسهیلات پویا، مسئله مکان‌یابی چند معیاره، مسئله مکان‌یابی-مسیریابی، مسئله مکان‌یابی میانه مرتب، مسئله مکان‌یابی ترتیبی، مسئله مکان‌یابی شرطی، مسئله مکان‌یابی تصادفی. چهار مدل میانه، میانه ناخوشایند، مرکز و مرکز ناخوشایند جزو مسائل مهم و پرکاربردی هستند که نسبت به سایر مسائل مکان‌یابی حضور پررنگ‌تری در ادبیات تحقیقی مسائل مکان‌یابی دارند. اخیراً مسائل برنامه ریزی معکوس و وارون مورد توجه قرار گرفته‌اند. در مسئله بهینه‌سازی وارون، اعتباری برای بهبود پارامترهای مسئله داده می‌شود. هدف بهبود پارامترهای مسئله بگونه‌ای است که تابع هدف به بهترین مقدار ممکن برسد مشروط بر اینکه هزینه‌ها، از اعتبار داده شده تجاوز نکند.

در این رساله ابتدا در فصل ۱ انواع مدل‌های مسائل مکان‌یابی دایره و نیز روشهای حل این مسائل ارائه می‌شود. در فصل ۲ مدل معکوس مسئله مکان‌یابی دایره با هدف کمترین مجموع در دو حالت شعاع ثابت و متغیر بیان شده و سپس الگوریتمی برای حل این مدل‌ها پیشنهاد گردیده است. در فصل ۳ معکوس انواع مسائل مکان‌یابی دایره با هدف کمینه- بیشینه بیان شده است و نهایتاً در فصل ۴ مسئله مکان‌یابی دایره نیمه ناخوشایند با هدف کمترین مجموع تحت نرم اقلیدسی ارائه می‌شود.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ مکان‌یابی

ساده‌ترین مسئله مکان‌یابی^۱ مسئله فرما است، فرما^۲ در قرن هفدهم برای اولین بار این مسئله را به طور رسمی به صورت ریاضی فرمول‌بندی کرد که صورت زیر می‌باشد:

”برای سه نقطه مفروض در صفحه، نقطه چهارم را طوری پیدا کنید که مجموع فواصل آن تا سه نقطه داده شده تا حد ممکن کوچک باشد.”

اولین جواب (هندسی) این مسئله منتسب به توریچلی^۳ است. در ادامه، این مسئله با اختصاص وزن‌های مختلف به نقاط مفروض توسط وبر^۴ تعمیم یافت و به همین دلیل مسئله مذکور به مسئله فرما-وبر^۵ شهرت یافت. مسئله فرما-وبر به صورت زیر می‌باشد.

فرض کنید n نقطه $\mathbf{p}_j = (p_{1j}, p_{2j})$ ، $j = 1, \dots, n$ ، در صفحه موجود باشند و w_j وزن متناظر با نقطه $\mathbf{p}_j$ باشد. هدف یافتن نقطه‌ای مانند $\mathbf{x}$ است بطوریکه مجموع وزنی فاصله نقطه $\mathbf{x}$ تا نقاط موجود در صفحه کمینه شود. یعنی اگر فاصله $\mathbf{x}$ تا $\mathbf{p}_j$ را با $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)$ نمایش

¹Location Theory

²Fermat

³Torricelli

⁴Weber

⁵Fermat Weber

دهیم آن گاه مسئله بصورت زیر خواهد بود

$$\min \sum_{j=1}^n w_j d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j).$$

مسئله فوق را مسئله تک وسیله‌ای^۱ یا کمترین مجموع^۲ نیز گویند. تابع هدف این مسئله محدب است، لذا هر جواب بهینه موضعی یک جواب بهینه کلی است پس برای یافتن جواب این مسئله کافی است مشتق را برابر صفر قرار داده و نقطه می‌نیم موضعی را بیابیم. به این ترتیب مختصات نقطه $\mathbf{x} = (x, y)$ در روابط زیر صدق می‌کند.

$$x = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{w_j p_{1j}}{d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)}}{\sum_{j=1}^n \frac{w_j}{d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)}}, \quad y = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{w_j p_{2j}}{d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)}}{\sum_{j=1}^n \frac{w_j}{d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)}}$$

از نتیجه بدست آمده در می‌یابیم که x و y به $\mathbf{x}$ وابسته هستند، در نتیجه با یک روش تکرار ساده روبرو می‌شویم که الگوریتم وایزفیلد نامگذاری شده است. در این الگوریتم با شروع از یک نقطه اولیه دنباله تکرار مسیر را بدست آورده و به سمت جواب بهینه حرکت می‌کنیم. برای مطالعه بیشتر به [۴۲] مراجعه کنید.

اگر هدف یافتن نقطه $\mathbf{x}$ به قسمی باشد که فاصله وزنی $\mathbf{x}$ تا دورترین نقطه‌ی موجود در صفحه مینیمم شود آن گاه مسئله بصورت زیر می‌باشد

$$\min \max_{j=1, \dots, n} w_j d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j).$$

مسئله فوق را مسئله تک وسیله‌ای کمینه-بیشینه می‌نامند. هنگامی که همه وزن‌ها برابر یا یک باشد، مسئله کمینه-بیشینه، هم ارز با یافتن مرکز کوچکترین دایره‌ای است که تمام مشتریان را در برمی‌گیرد. این مسئله را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \min \quad & r \\ \text{s.t.} \quad & d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) \leq r \quad j = 1, \dots, n. \\ & r \geq 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

حال اگر به جای پیدا کردن یک نقطه به دنبال یافتن چند نقطه باشیم یعنی چند مکان برای وسیله‌های جدید بگونه‌ای پیدا کنیم که نزدیکترین نقطه را به نزدیکترین وسیله نسبت دهیم و بخواهیم مجموع وزنی فواصل را مینیمم کنیم، مسئله را مسئله چند وسیله‌ای^۳ با

¹Single facility location

²Minisum

³Multi facility location

کمترین مجموع و حالت دیگر آن را مسئله چند وسیله‌ای کمینه- بیشینه گویند. یعنی اگر $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ مجموعه وسایل جدید باشد که باید مکان‌یابی شوند و

$$d(X, p) = \min_{x_i \in X} d(x_i, p)$$

آن‌گاه مسائل فوق به ترتیب به صورت زیر نوشته می‌شوند

$$\min \sum_{j=1}^n w_j d(X, p_j).$$

و

$$\min \max_{j=1, \dots, n} w_j d(X, p_j).$$

ظهور نظریه مکان‌یابی مدرن در اواسط دهه ۱۹۶۰ میلادی همزمان با مقاله مشهور حکیمی [۳۷] در مورد مسئله میانه بود. برای مطالعه بیشتر در خصوص مفاهیم، مدل‌ها، روش‌های حل و کاربردهای مسائل مکان‌یابی به کتاب‌های مربوطه مانند [۲۸] مراجعه کنید.

۲.۱ مکان‌یابی دایره در صفحه

مسائل مکان‌یابی دایره^۱ از جمله مسائلی هستند که امروزه کاربردهای فراوانی دارند و توجه بسیاری را به خود جلب کرده‌اند. در این مسائل، هدف یافتن دایره‌ای است که محیط آن تا حد ممکن به مجموعه نقاط داده شده در صفحه نزدیک باشد. برای این منظور سه هدف را می‌توان اختیار کرد: کمینه‌سازی بیشترین فاصله از محیط دایره (مدل کمینه- بیشینه^۲)، کمینه‌سازی مجموع فاصله نقاط داده شده از محیط دایره (مدل کمترین مجموع^۳)، کمینه‌سازی مجموع مربعات فاصله نقاط داده شده از محیط دایره (مدل کمترین مربعات^۴).

مسائل مکان‌یابی دایره در فرایند کنترل کیفیت محصولاتی که باید شامل ویژگی‌هایی چون مدوری، همواری، استوانه‌ای و... باشند سهم قابل توجهی دارند. همچنین این مسائل در طراحی سیستم‌های آبیاری دایره‌ای، برش تنه‌ی درختان به منظور تولید تیر چراغ برق یا تلفن، ایجاد جاده‌ی کمربندی در شهرها و طراحی شبکه‌های حمل و نقل عمومی دایره‌ای به کار می‌روند.

در سال ۲۰۰۲ درزنر^۵ و همکارانش مسئله تعیین دایره در صفحه نسبت به تسهیلات موجود را بررسی و آن را به عنوان مدلی برای مسائل out of roundness پیشنهاد کردند [۲۴] در این مسائل تسهیلات موجود خیلی به هم نزدیک هستند. آن‌ها مقدماتاً با مدل کمینه- بیشینه سروکار داشتند. این مدل بعدها توسط بریمبرگ^۶ بررسی شد [۱۱].

^۱Circle Location Problem

^۲Minimax

^۳Minisum

^۴Least Square

^۵Drezner

^۶Brimberg

مدل کمترین مجموع بگونه‌ای که مجموع وزنی فاصله نقاط موجود و دایره کمینه گردد بعدها توسط بریمبرگ ارائه شد [۱۲]. در [۴۰] کریمکی^۱ مدل کمترین مجموع مکان‌یابی دایره را برای تخمین مسیر ذرات مطرح کرد. مسئله مکان‌یابی دایره روی کره در [۱۰] بررسی و کاربردهای آن در حوزه‌های مختلفی چون پزشکی و زیست‌شناسی بیان شده است. در سال ۲۰۰۵ مدلی گسسته از مسئله مکان‌یابی دایره توسط لابی^۲ و همکارانش ارائه شد، این مدل در طراحی تاسیسات دایره‌ای شکل مانند خطوط مترو یا شاهراه‌های دایره‌ای بکار می‌رود [۴۱]. در ادامه مدل ریاضی، ویژگی‌ها و روش‌های حل هر یک از این مسائل را با اقتباس از مراجع [۱۲، ۱۱] مرور می‌کنیم.

۱.۲.۱ مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مربعات

فرض کنید n نقطه $\mathbf{p}_j = (x_j, y_j)$ ، $j = 1, \dots, n$ ، در صفحه موجودند به طوری که w_j وزن نقطه $\mathbf{p}_j$ می‌باشد. در مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مربعات، هدف پیدا کردن مکان یک دایره مانند $C(\mathbf{x}, r)$ با مرکز $\mathbf{x} = (x, y)$ و شعاع r به گونه‌ای است که مجموع مربعات فاصله بین محیط دایره و نقاط موجود در صفحه کمینه گردد. یعنی

$$\min_{\mathbf{x}, r} F(C) = \sum_{j=1}^n [d_j(C)]^2 \quad (1.1)$$

که در آن $d_j(C)$ فاصله بین نقطه $\mathbf{p}_j$ و محیط دایره C می‌باشد. اگر نقطه $\mathbf{p}_j$ نقطه‌ای داخل دایره C باشد آن‌گاه $d_j(C) = r - d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)$ ، اگر $\mathbf{p}_j$ خارج دایره C باشد آن‌گاه $d_j(C) = d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r$ و اگر $\mathbf{p}_j$ روی دایره C باشد آن‌گاه $d_j(C) = 0$. که $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)$ بیانگر فاصله نقطه $\mathbf{p}_j$ تا مرکز دایره C یعنی $\mathbf{x}$ است. پس می‌توان نوشت.

$$d_j(C) = |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r| \quad j = 1, \dots, n.$$

بنابراین مسئله (۱.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\min_{\mathbf{x}, r} F(\mathbf{x}, r) = \sum_{j=1}^n (d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r)^2$$

با تعریف $d_j(x, y) = d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)$ مسئله فوق معادل مسئله زیر است.

$$\min_{x, y, r} F(x, y, r) = \sum_{j=1}^n [d_j(x, y) - r]^2 \quad (2.1)$$

در تمام این رساله تابع فاصله را اقلیدسی در نظر می‌گیریم.

لم ۱.۲.۱. [۲۴] شعاع دایره بهینه مسئله مکان‌یابی دایره با تابع هدف کمترین مربعات، میانگین فاصله نقاط موجود در صفحه تا مرکز دایره می‌باشد.

¹Karimäki

²Labbé

لم ۲.۲.۱. [۲۴] مرکز دایره بهینه $\mathbf{x} = (x, y)$ مسئله مکان‌یابی دایره با تابع هدف کمترین مربعات، نقطه‌ای است که واریانس فاصله نقاط موجود در صفحه تا آن کمینه می‌شود.

درزنر و همکارانش در [۲۴] یک روش تقریبی برای حل مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مربعات ارائه کرده‌اند که بر پایه روش نیوتن رافسون است، برای مطالعه بیشتر به این مقاله مراجعه کنید.

۲.۲.۱ مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مجموع با شعاع متغیر

فرض کنید n نقطه $\mathbf{p}_j = (x_j, y_j)$ ، $j = 1, \dots, n$ ، در صفحه موجود باشند و w_j وزن مثبت متناظر با نقطه $\mathbf{p}_j$ باشد. در مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مجموع، هدف یافتن مکان دایره‌ی مانند C است بطوریکه مجموع وزنی فاصله بین محیط دایره و نقاط موجود در صفحه کمینه گردد. یعنی

$$\min_{\mathbf{x}, r} F(\mathbf{x}, r) = \sum_{j=1}^n w_j |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r| \quad (۳.۱)$$

که در آن $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)$ بیانگر فاصله اقلیدسی نقطه $\mathbf{p}_j$ تا مرکز دایره C ، یعنی $\mathbf{x}$ است. با تعریف

$$J_+(C) = \{j : d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) > r\}$$

و

$$J_0(C) = \{j : d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) = r\}$$

و

$$J_-(C) = \{j : d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) < r\}$$

به ترتیب به عنوان نقاط بیرون، رو و درون دایره C ، تابع $|d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r|$ را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$|d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r| = \begin{cases} d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r & j \in J_+(C) \\ 0 & j \in J_0(C) \\ r - d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) & j \in J_-(C) \end{cases}$$

بنابراین مسئله (۳.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\min_{\mathbf{x}, r} F(\mathbf{x}, r) = \sum_{j \in J_-} w_j (r - d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)) + \sum_{j \in J_+} w_j (d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r)$$

قضیه ۱.۲.۱. [۱۲] جواب بهینه مسئله (۳.۱) حداقل از دو نقطه از نقاط موجود عبور می‌کند.

قضیه ۲.۲.۱. [۱۲] اگر $C(\mathbf{x}, r)$ جواب بهینه مسئله (۳.۱) باشد، آنگاه داریم

$$\left| \sum_{j \in J_-} w_j - \sum_{j \in J_+} w_j \right| \leq \sum_{j \in J_0} w_j$$

طبق قضیه ۱.۲.۱ برای یافتن جواب مسئله (۳.۱) کافی است تمامی عمودمنصف‌های هر جفت از نقاط موجود جستجو شود. بریمبرگ و همکارانش در [۱۲] روشی برای حل این مسئله برمبنای جستجوی عمودمنصف‌ها ارائه کرده‌اند. طبق این روش ابتدا مجموعه شامل نقاط تلاقی سه تا از عمودمنصف را یافته و با در نظر گرفتن این نقاط به عنوان مرکز دایره، شعاع را بدست آورده و مجموعه نقاط خارج و داخل دایره را مشخص می‌کنیم. سپس شرط قضیه ۲.۲.۱ را بررسی نموده و اگر شرط برقرار باشد آن گاه نقطه مورد نظر می‌تواند کاندیدی برای مرکز دایره بهینه باشد. در گام بعد، تمام قسمت‌هایی از عمودمنصف‌ها که بین نقاط تلاقی حداقل دو عمودمنصف واقع شده‌اند (پاره‌خط‌ها) و نیز قسمت‌های ابتدایی و انتهایی عمودمنصف‌ها (نیم‌خط‌ها) را بررسی می‌کنیم. حاصل جستجوهای گام دوم، مسائل بهینه‌سازی غیرخطی خواهد بود که با حل هر کدام، نقطه‌ای از نقاط کاندید برای مرکز بدست می‌آید. در نهایت بهترین نقطه از میان نقاط کاندید، به عنوان جواب بهینه مسئله (۳.۱) انتخاب می‌شود.

۳.۲.۱ مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مجموع با شعاع ثابت

هنگامی که شعاع دایره داده شده باشد، تنها متغیر تصمیم مسئله مکان‌یابی، مرکز دایره می‌باشد. در این حالت مسئله مکان‌یابی دایره بصورت زیر است

$$(PC_r) : \min F_r(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n w_j |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r_0| \quad (4.1)$$

قضیه ۳.۲.۱. [۱۲] اگر $\mathbf{x}^*$ جواب بهینه مسئله مکان‌یابی تک وسیله‌ای باشد و $d(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}_j) \geq r_0$ ، $j = 1, \dots, n$ ، آنگاه $\mathbf{x}^*$ جواب بهینه مسئله (PC_r) است.

قضیه ۴.۲.۱. [۱۲] فرض کنید E^* مجموعه جواب‌های بهینه مسئله مکان‌یابی تک وسیله‌ای باشد و

$$\underline{d} = \max_{\mathbf{x} \in E^*} \{ \min_{j=1, \dots, n} d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) \}$$

اگر $\underline{d} \geq r_0$ آنگاه برای هر جواب بهینه C_r^* از مسئله (PC_r) داریم $|J_0(C_r^*) \cup J_-(C_r^*)| \geq 1$.

قضیه ۵.۲.۱. [۱۲] اگر $C_{r_0}^*$ جواب بهینه‌ای از مسئله (PC_r) باشد که $J_0(C_{r_0}^*) = \emptyset$ آنگاه

$$\sum_{j \in J_+(C_{r_0}^*)} w_j > \sum_{j \in J_-(C_{r_0}^*)} w_j$$

قضیه ۶.۲.۱. [۱۲] فرض کنید $C(\mathbf{x}, r_0)$ دایره‌ای باشد که $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) < r_0$ ، $j = 1, \dots, n$ ، آنگاه $\mathbf{x}$ جواب بهینه مسئله (PC_r) نیست.

اگر جواب بهینه مسئله مکان‌یابی تک وسیله‌ای در قضیه ۳.۲.۱ صدق نکند طبق قضیه ۴.۲.۱ دایره بهینه باید شامل حداقل یک مشتری باشد، پس نقاط کاندید برای جواب مسئله

(PC_r) متعلق به کوچکترین چهارضلعی شامل تمام مشتریان با اضلاع موازی محورهای مختصات است که طول اضلاع آن از طرفین به اندازه r_0 افزایش یافته است. این چهارضلعی یک مستطیل است که به آن پوسته مستطیلی توسعه یافته میگویند. در نتیجه کافی است چهار ضلعی مورد نظر جستجو شود تا جواب بهینه بدست آید. بریمبرگ و همکارانش در [۱۲] این جستجو را با فرایند شاخه و کران BSSS^۱ [۳۸] انجام داده‌اند.

در این فرایند ابتدا چهار زیر مربع مساوی از کوچکترین مربع شامل تمام مشتریان که طول اضلاع آن از اطراف به اندازه r_0 افزایش یافته را در لیست مربع‌ها قرار داده و هر مربع Q_h از این لیست را در نظر می‌گیریم، برای هر یک از آن‌ها کران پایین $\underline{f}_h$ بصورت زیر محاسبه می‌شود

$$\underline{f}_h = \sum_{j=1}^n w_j \max \{0, \min\{r - \bar{d}_j, \underline{d}_j - r\}\}; \quad \underline{d}_j = \min_{\mathbf{x} \in G_h} d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j), \quad \bar{d}_j = \max_{\mathbf{x} \in G_h} d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) \quad (5.1)$$

که در آن G_h مجموعه شامل چهار گوشه‌ی مربع Q_h است. زیر مربع‌هایی که کران پایین آن‌ها از بهترین جواب موجود بیشتر است حذف می‌شوند همچنین زیرمربع‌های Q_h که به ازای $\mathbf{x} = \mathbf{s}_h$ در قضیه ۶.۲.۱ صدق می‌کنند یا آن‌هایی که $J_o^h = \emptyset$ و $\sum_{j \in J_+^h} w_j \leq \sum_{j \in J_-^h} w_j$ (زیرمربع‌هایی که به ازای $\mathbf{x} = \mathbf{s}_h$ در قضیه ۵.۲.۱ صدق نمی‌کنند). سپس برای مربع‌های باقی‌مانده زیرمربع‌های جدید به لیست مربع‌ها اضافه می‌گردد، الگوریتم تا زمانی که طول اضلاع مربع از مقدار ε کوچکتر نشده باشد، ادامه می‌یابد.

۴.۲.۱ مکان‌یابی دایره کمینه- بیشینه با شعاع ثابت و بدون وزن

فرض کنید n نقطه $\mathbf{p}_j = (x_j, y_j)$ ، $j = 1, \dots, n$ ، در صفحه و نیز $r_0 > 0$ موجود باشند. در مسئله مکان‌یابی دایره کمینه- بیشینه، هدف یافتن مرکز دایره‌ی C با شعاع r_0 است بطوریکه بیشترین فاصله بین محیط دایره و نقاط موجود در صفحه کمینه گردد. یعنی

$$\min_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = \max_{j=1, \dots, n} |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r_0| \quad (6.1)$$

که در آن $d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j)$ بیانگر فاصله اقلیدسی نقطه $\mathbf{p}_j$ تا مرکز دایره C ، یعنی $\mathbf{x}$ است. فرض کنید $\mathbf{x}_p$ جواب بهینه مسئله کمینه- بیشینه متناظر با $r_0 = 0$ باشد، یعنی $\mathbf{x}_p$ جواب بهینه مسئله تک وسیله‌ای با هدف کمینه- بیشینه است، این جواب دارای این ویژگی است که حداقل دو نقطه از نقاط موجود بیش‌ترین و کمترین فاصله را تا آن دارند. قرار دهید $r_{\max} = \max_j \{d(\mathbf{x}_p, \mathbf{p}_j)\}$ و $r_{\min} = \min_j \{d(\mathbf{x}_p, \mathbf{p}_j)\}$

قضیه ۷.۲.۱ [۱۱] فرض کنید $r_m = \frac{r_{\min} + r_{\max}}{2}$ اگر $r_0 \in [0, r_m]$ آنگاه $\mathbf{x}_p$ جواب بهینه مسئله (۶.۱) است.

¹big square small squar

اگر $r_o > r_m$ آنگاه لزوماً x_p جواب بهینه مسئله (۶.۱) نخواهد بود. فرض کنید $d_{ij} = d(p_i, p_j)$ و $d_{rs} = \max_{i < j} \{d_{ij}\} = d_{rs}$ و x_{rs} نقطه وسط پاره خط $[p_r, p_s]$ باشد.

قضیه ۸.۲.۱. [۱۱] اگر $g(x_{rs}) = \frac{d_{\max}}{3} - r_o$ ، آنگاه x_{rs} جواب بهینه مسئله (۶.۱) است.

تعریف ۱.۲.۱. [۱۱] زیرمجموعه‌ای از مشتریان که بیش‌ترین فاصله را تا دایره بهینه دارند، مجموعه نقاط گوشه‌ای^۱ (راسی) نسبت به این دایره نامیده و آن را با S نمایش می‌دهیم. نقاط گوشه‌ای نسبت به یک نقطه نیز زیر مجموعه‌ای از مشتریان که بیش‌ترین فاصله را تا این نقطه دارند می‌نامیم.

قضیه ۹.۲.۱. [۱۱] اگر $g(x_m) > \frac{d_{\max}}{3} - r_o$ ، آنگاه حداقل سه نقطه گوشه‌ای p_i, p_j و p_k وجود دارند. به عبارت دیگر زیرمجموعه‌ای از نقاط که بیش‌ترین فاصله را تا دایره بهینه دارند حداقل دارای سه عضو است، یعنی $|S| \geq 3$.

طبق قضیه فوق برای حل مسئله (۶.۱) کافی است تمام سه‌تایی‌های موجود از نقاط داده شده بررسی شوند. بریمبرگ و همکارانش در [۱۱] روشی برای حل این مسئله برمبنای جستجوی تمام سه‌تایی‌ها ارائه کرده‌اند که در ادامه آمده است.

فرض کنید سه تایی دلخواه (p_i, p_j, p_k) داده شده باشد. تمام x هایی را بیابید که $C = (x, r_o)$ و $d_i(C) = d_j(C) = d_k(C)$ ، مجموعه نقاط بدست آمده را با S_{ijk} نامگذاری کنید. دو حالت را در نظر می‌گیریم

۱. سه نقطه همگی داخل دایره C و یا خارج آن قرار دارند، در نتیجه

$$d(x, p_i) = d(x, p_j) = d(x, p_k).$$

طبق رابطه $d(x, p_i) = d(x, p_j)$ فاصله نقطه x تا p_i و p_j با هم برابر است پس x روی عمود منصف $[p_i, p_j]$ قرار دارد. به همین ترتیب از رابطه $d(x, p_j) = d(x, p_k)$ نتیجه می‌شود که روی عمود منصف $[p_k, p_j]$ قرار دارد. بنابراین x فصل مشترک عمود منصف خطوط $[p_i, p_j]$ و $[p_j, p_k]$ یعنی B_{ij} و B_{jk} است.

۲. یک نقطه مثلاً p_i یک سمت دایره قرار دارد و دو نقطه دیگر یعنی p_j و p_k طرف دیگر دایره قرار دارند. پس

$$d(x, p_i) - r_o = r_o - d(x, p_j) = r_o - d(x, p_k)$$

در نتیجه

$$d(x, p_j) = d(x, p_k) \text{ و } d(x, p_i) + d(x, p_j) = 2r_o$$

^۱extrem points

یعنی x روی B_{jk} قرار دارد و مجموع فاصله آن تا نقاط p_i و p_j برابر $2r_0$ است. با دوران و انتقال دستگاه مختصات بطوریکه محور طول‌ها روی B_{jk} قرار گیرد و مبدا مختصات به نقطه میانی پاره خط $[p_j, p_k]$ منتقل شود داریم

$$4(a^2 - 4r_0^2)x^2 + 4a(d_{jk}^2/4 - s^2 + 4r_0^2)x + (s^2 - 4r_0^2)^2 + (d_{jk}^2 - 8s^2 - 32r_0^2)d_{jk}^2/16 = 0 \quad (7.1)$$

که در آن $s = \sqrt{a^2 + b^2}$ و $x = (x, 0)$ ، $p_j = (0, d_{jk}/2)$ ، $p_i = (a, b)$ معادله درجه دوم فوق به راحتی حل می‌شود. این معادله با توجه به اینکه مقدار $\min_{x \in B_{jk}} \{d(x, p_i), d(x, p_j)\}$ کمتر، مساوی یا بیشتر از $2r_0$ باشد به ترتیب دارای دو ریشه حقیقی، یک ریشه و یا فاقد ریشه است.

برای هر سه‌تایی (p_i, p_j, p_k) تعداد اعضای مجموعه S_{ijk} حداکثر برابر $1 + 2 \times 3 = 7$ خواهد بود. طبق قضیه ۹.۲.۱ باید تمام سه‌تایی‌های (p_i, p_j, p_k) شمارش شود تا برای هریک مجموعه S_{ijk} بدست آید سپس بهترین نقطه کاندید از بین تمامی این مجموعه‌ها تعیین شود. در واقع

$$x^* \in \bigcup_{i=1}^{n-2} \bigcup_{j=i+1}^{n-1} \bigcup_{k=j+1}^n S_{ijk}$$

الگوریتم:

گام ۱: x_p یعنی جواب مسئله تک وسیله‌ای با هدف کمینه-بیشینه را بیابید. اگر $\max_j \{d(x_p, p_j)\} - r_0 = g(x_p)$ آنگاه $x^* = x_p$ والگوریتم خاتمه می‌یابد، در غیراینصورت S_0 زیرمجموعه‌ای از نقاط داده شده که نسبت به نقطه x_p کاندید نقاط راسی هستند را طبق تعریف ۱.۲.۱ یافته و قرار دهید $S = S_0$ و $x_c = x_p$ سپس به گام ۲ بروید.

گام ۲: زیرمجموعه‌ای از نقاط داده شده که کاندید نقاط راسی نسبت به x_c هستند را تعیین کرده آن را S_c بنامید و قرار دهید $S = S \cup S_c$.

گام ۳: مسئله کاهش یافته (مسئله روی S) را با در نظر گرفتن تمام سه‌تایی‌های (p_i, p_j, p_k) از مجموعه S و یافتن مجموعه‌های S_{ijk} حل کنید (توجه کنید در هر تکرار الگوریتم فقط سه‌تایی‌های جدید در نظر گرفته می‌شوند). بهترین نقطه کاندید از بین تمامی این مجموعه‌ها را به عنوان جواب جدید x_c در نظر بگیرید.

گام ۴: اگر مقدار تابع هدف به ازای x_c برای مسئله اصلی مشابه مقدار تابع هدف مسئله کاهش یافته است، توقف کنید و قرار دهید $x^* = x_c$ در غیراینصورت به گام دو بروید.

مثال

نقاط $p_1(0, 6)$ ، $p_2(0, -6)$ ، $p_3(5, 0)$ و $p_4(-5, 0)$ را به عنوان مشتری در نظر گرفته و جواب

مسئله ۶.۱ را برای حالت‌های $r_0 = 4, 6$ بررسی می‌کنیم. جواب مسئله تک وسیله‌ای با هدف کمینه- بیشینه طبق رابطه ۱.۱ بصورت $x_p = (0, 0)$ است و چون $r_{\max} = 6$ ، $r_{\min} = 5$ و $r_0 = 4 \in [0, r_m]$ پس طبق قضیه ۷.۲.۱ برای حالت $r_0 = 4$ جواب بهینه برابر با $(0, 0)$ است. برای حالت $r_0 = 6 > r_m$ داریم $d_{12} = 12$ و $x_{12} = (0, 0)$ چون $g(x_{12}) = 1 \neq \frac{d_{\max}}{4} - r_0$ طبق قضیه ۹.۲.۱ باید تمام سه تایی‌ها را جستجو کنیم. جدول ۱.۱ جواب‌های بدست آمده از حل مسائل مربوط به بررسی هر یک از سه تایی‌ها را نشان می‌دهد. به عنوان نمونه سه تایی (p_1, p_2, p_3) را بررسی می‌کنیم. برای این سه نقطه سه وضعیت زیر رخ می‌دهد:

۱. هر سه نقطه یا بیرون دایره بهینه قرار دارند یا درون آن. پس مرکز دایره مورد نظر، محل تلاقی عمودمنصف‌های $B_{12} : y = 0$ و $B_{23} : 12y + 10x = -11$ یعنی نقطه $(-1/1, 0)$ است. در اینصورت مقدار تابع هدف برابر است با $4/9$.

۲. نقطه p_3 درون (بیرون) دایره قرار دارد و نقاط p_1 و p_2 بیرون (درون) دایره. در نتیجه مرکز دایره بهینه که روی عمودمنصف $B_{12} : y = 0$ قرار دارد، از حل معادله $34x = 253$ بصورت $(\frac{253}{34}, 0)$ بدست می‌آید. مقدار تابع هدف به ازای این نقطه برابر با $8/7196$ است.

۳. نقطه p_2 درون (بیرون) دایره قرار دارد و نقاط p_1 و p_3 بیرون (درون) دایره. در نتیجه مرکز دایره بهینه که روی عمودمنصف $B_{13} : 12y - 10x = 11$ قرار دارد، از حل معادله درجه دوم $0 = 10/89 + 23/76y - 12/96y^2$ بصورت $(0/00004, 0/9167)$ بدست می‌آید. مقدار تابع هدف به ازای این نقطه برابر با $5/0833$ است.

۴. نقطه p_1 درون (بیرون) دایره قرار دارد و نقاط p_2 و p_3 بیرون (درون) دایره. در نتیجه مرکز دایره بهینه که روی عمودمنصف $B_{23} : 12y + 10x = -11$ قرار دارد، از حل معادله درجه دوم $0 = 10/89 + 23/76y + 12/96y^2$ بصورت $(0/00004, -0/9167)$ بدست می‌آید. مقدار تابع هدف به ازای این نقطه برابر با $5/0833$ است.

جدول ۱.۱: بررسی تمام سه تایی‌ها

دو نقطه داخل و یکی خارج						همه نقاط داخل		سه تایی‌ها
$g(x)$	x	$g(x)$	x	$g(x)$	x	$g(x)$	x	
۵/۰۸۳۳	(۰/۰۰۰۰۴, -۰/۹۱۶۷)	۵/۰۸۳۳	(۰/۰۰۰۰۴, ۰/۹۱۶۷)	۸/۷۱۹۶	($\frac{253}{34}, 0$)	۴/۹	(-۱/۱, ۰)	(p_1, p_2, p_3)
۵/۰۸۳۳	(-۰/۰۰۰۰۴, -۰/۹۱۶۷)	۵/۰۸۳۳	(۰/۰۰۰۰۴, ۰/۹۱۶۷)	۸/۷۱۹۶	($\frac{253}{34}, 0$)	۴/۹	(۱/۱, ۰)	(p_1, p_2, p_3)
۵۱۲۹.۹	(۰, $\frac{299}{36}$)	۳/۴۴۹۷	(۱/۴۳۲۲, ۲/۱۱۰۲)	۳/۴۴۹۷	(-۱/۴۳۲۲, ۲/۱۱۰۲)	۵/۹۱۶۷	(۰, $\frac{1}{12}$)	(p_1, p_2, p_3)
		۴/۰۰۴۲	(-۲/۹۶, -۱/۵۵)	۴/۰۰۴۲	(۲/۹۶, -۱/۵۵)			
۶/۴۶۰۵	(۰, $\frac{11}{12}$)	۳/۶۶۲۳	(-۲/۵۱۳۸, -۳/۰۱۱۵)	۳/۶۶۲۳	(۲/۵۱۳۸, -۳/۰۱۱۵)	۵/۹۱۶۷	(۰, $-\frac{1}{12}$)	(p_2, p_3, p_4)
		۴/۶۵۰۲	(۴/۰۴۱۶, ۲/۴۵۱۳)	۴/۶۵۰۲	(-۴/۰۴۱۶, ۲/۴۵۱۳)			

نقطه‌ای که کمترین مقدار هدف را داشته باشد جواب بهینه مسئله در حالت $r_0 = 6$ است. با توجه به جدول، نقاط $(-1/4322, 2/1102)$ و $(1/4322, 2/1102)$ با مقدار هدف $3/4497$ جواب بهینه این مسئله هستند.

۵.۲.۱ مکان‌یابی دایره کمینه- بیشینه با شعاع ثابت و حالت وزین

در حالتی که شعاع ثابت و هر نقطه p_j ، $j = 1, \dots, n$ دارای وزن مثبت w_j است، مدل مسئله به صورت زیر است.

$$\min_{\mathbf{x}} g(\mathbf{x}) = \max_{j=1, \dots, n} \{w_j |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r_0|\} \quad (8.1)$$

اگر در مدل فوق تمامی وزن‌ها برابر یک باشند، به مدل (۶.۱) می‌رسیم، همانطور که در قضیه ۷.۲.۱ مشاهده شد، در شرایطی خاص جواب مسئله تک وسیله‌ای کمینه- بیشینه می‌تواند جواب مسئله مکان‌یابی دایره کمینه- بیشینه بدون وزن باشد. اما این قضیه در مورد مکان‌یابی دایره با شعاع ثابت و حالت وزین صادق نیست. در هر صورت قضیه‌های ۸.۲.۱ و ۹.۲.۱ قابل تعمیم به این مسئله هستند.

زوج‌های $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j)$ که $d_{ij} = d(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j) > 2r_0$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\mathbf{x}_{ij}$ نقطه‌ای روی پاره‌خط $[\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j]$ باشد بطوریکه دایره $C(\mathbf{x}_{ij}, r_0)$ از نقاط $\mathbf{p}_i$ و $\mathbf{p}_j$ به یک فاصله است یعنی

$$g_{ij} = w_i(d(\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{p}_i) - r_0) = w_j(d(\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{p}_j) - r_0) \quad (9.1)$$

فرض کنید $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{p}_i + t_{ij}(\mathbf{p}_j - \mathbf{p}_i)$ با توجه به رابطه ۹.۱ داریم $t_{ij} = \frac{(r_0 w_i + w_j(d_{ij} - r_0))}{d_{ij}(w_i + w_j)}$. فرض کنید $\mathbf{x}_m = \mathbf{x}_{rs}$ و $g_L = \max\{g_{ij}; \forall i, j \ni d_{ij} > 2r_0\} = g_{rs}$

قضیه ۱۰.۲.۱. [۱۱] اگر $g(\mathbf{x}_m) = g_L$ آنگاه $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_m$ و $g^* = g(\mathbf{x}_m)$.

قضیه ۱۱.۲.۱. [۱۱] اگر $g(\mathbf{x}_m) > g_L$ آنگاه حداقل سه نقطه گوشه‌ای $\mathbf{p}_i$ ، $\mathbf{p}_j$ و $\mathbf{p}_k$ وجود دارند بطوریکه $w_i d_i(C^*) = w_j d_j(C^*) = w_k d_k(C^*)$.

طبق قضیه فوق به نظر می‌رسد برای یافتن جواب این نوع از مسئله مکان‌یابی کافی است فرایندی مشابه حالت بدون وزن بکار گرفته شود. اما متأسفانه زیر مسئله نظیر سه‌تایی دلخواه $(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k)$ برخلاف آنچه که در حالت بدون وزن مشاهده شد فاقد جوابی صریح است. در نتیجه در اینجا برای یافتن جواب نظیر هر سه‌تایی دلخواه از نقاط راسی S ، مسئله بهینه‌سازی زیر حل می‌شود

$$\min K$$

$$K \geq w_i^2 (r_0 - d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i))^2 \quad \forall i \in S \quad (10.1)$$

۶.۲.۱ مکان‌یابی دایره کمینه- بیشینه با شعاع متغیر و بدون وزن

هنگامی که در مسئله (۶.۱) شعاع ثابت نباشد، مسئله مکان‌یابی دایره بصورت زیر است

$$\min_{\mathbf{x}, r} g(\mathbf{x}, r) = \max_{j=1, \dots, n} |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r| \quad (11.1)$$

قضیه ۱۲.۲.۱. [۱۱] اگر $C^* = (\mathbf{x}^*, r^*)$ جواب بهینه مسئله (۱۱.۱) باشد و S مجموعه متناظر با نقاط گوشه‌ای نسبت به C^* ، آنگاه حداقل دو نقطه گوشه‌ای درون دایره C^* و دو نقطه بیرون آن واقع شده‌اند، بنابراین $|S| \geq 4$.

طبق قضیه فوق برای یافتن جواب مسئله (۱۱.۱) کافی است تمام چهارتایی‌های $(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l, \mathbf{p}_h)$ ، بررسی شود، تا نقاط کاندید برای مرکز و شعاع دایره بهینه بدست آید. فرض کنید $\mathbf{p}_k$ و $\mathbf{p}_j$ درون دایره C و $\mathbf{p}_l$ و $\mathbf{p}_h$ بیرون آن واقع شده باشند پس داریم

$$\max_{i=1, \dots, n} |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) - r| = r - d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) = r - d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_k) = d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_l) - r = d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_h) - r$$

از معادله فوق روابط زیر بدست می‌آید

$$\begin{cases} \max_{i=1, \dots, n} d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) = d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_l) \\ \min_{i=1, \dots, n} d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) = d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) \end{cases} \quad (12.1)$$

$$\begin{cases} d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) = d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_k) \\ d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_l) = d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_h) \\ r = \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_l)}{2} \end{cases} \quad (13.1)$$

$$j, k \in J_-(C) = \{i | d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) < r\}, \quad l, m \in J_+(C) = \{i | d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) > r\} \quad (14.1)$$

پس از بررسی تمام چهارتایی‌های ممکن، نقطه کاندیدی که بهترین مقدار تابع هدف را داشته باشد، جواب مسئله (۱۱.۱) خواهد بود.

۷.۲.۱ مکان‌یابی دایره کمینه- بیشینه با شعاع متغیر و حالت وزین

هنگامی که در مسئله (۱۱.۱) هر نقطه $\mathbf{p}_j$ ، $j = 1, \dots, n$ دارای وزن مثبت w_j باشد، مسئله مکان‌یابی به شکل زیر است

$$\min_{\mathbf{x}, r} g(\mathbf{x}, r) = \max_{j=1, \dots, n} \{w_j |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r|\} \quad (15.1)$$

قضیه ۱۳.۲.۱. [۱۱] اگر $C^* = (\mathbf{x}^*, r^*)$ جواب بهینه مسئله (۱۵.۱) باشد و S مجموعه نقاط گوشه‌ای متناظر با بیش‌ترین فاصله وزنی تا C^* ، آنگاه حداقل دو نقطه گوشه‌ای درون دایره C^* و دو نقطه بیرون آن واقع شده‌اند، $|S| \geq 4$.

طبق قضیه فوق بنظر می‌رسد فرایندی مشابه مسئله (۱۱.۱) برای یافتن جواب مسئله (۱۵.۱) لازم باشد، اما در اینجا نیز زیر مسئله‌های ایجاد شده برخلاف حالت بدون وزن دارای جواب صریح نخواهند بود در نتیجه برای هر چهارتایی دلخواه از نقاط راسی کاندید با مسئله‌ای مشابه مسئله (۸.۱) روبرو می‌شویم.

۳.۱ مسائل مکان‌یابی معکوس

فرض کنید مجموعه‌ای از سرویس دهنده‌ها از قبل در یک ناحیه مستقر شده و با گذشت زمان کارایی خود را از دست داده‌اند. با فرض اینکه امکان جاییابی مجدد برای این سرویس دهنده‌ها وجود نداشته باشد، به دنبال تغییر برخی از پارامترهای تاثیرگذار مسئله مکان‌یابی با توجه به برخی محدودیت‌ها هستیم به طوری که مکان‌های موجود سرویس دهنده‌ها بهین گشته یا بهبود یابد. این مسئله یک مسئله مکان‌یابی معکوس نامیده می‌شود.

در این بخش، ابتدا یک بیان کلی از مسئله مکان‌یابی معکوس را ارائه می‌کنیم سپس انواع مسائل مکان‌یابی معکوس معرفی می‌شوند.

در یک مسئله بهینه‌سازی کلاسیک با فرض معلوم بودن پارامترهای مسئله مانند هزینه‌ها، ظرفیت‌ها و ... به دنبال پیدا کردن یک جواب بهینه هستیم. اما برخلاف مسائل بهینه‌سازی کلاسیک، در یک مسئله معکوس یک جواب شدنی مسئله بهینه‌سازی تحت مطالعه مفروض بوده و به دنبال تعیین مقادیری جدید برای پارامترهای تاثیرگذار مسئله بهینه‌سازی تحت مطالعه به ارزانترین روش ممکن هستیم، به طوری که جواب شدنی مفروض با پارامترهای جدید بهینه گشته و یا بهبود یابد. یک کاربرد مهم مسائل معکوس در مکان‌یابی است: فرض کنید یک شبکه جاده‌ای و یک سرویس دهنده (مانند مرکز اورژانس) و تعدادی مشتری (مانند بیمارستان‌ها) در آن مفروض باشد. هدف این است که پارامترهای شبکه مانند طول جاده‌ها را با کمترین هزینه طوری اصلاح کنیم که بیشترین فاصله مرکز مفروض تا مشتریان در شبکه اصلاح شده مینیمم گردد. این مسئله یک مسئله مکان‌یابی مرکز معکوس است.

پیدایش مسائل بهینه‌سازی معکوس در سال ۱۹۹۲ توسط برتن^۱ و همکارش در مقاله [۲۰] بود که در آن مسئله کوتاهترین مسیر معکوس را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها سعی کردند تا با کمترین تغییر در طول یال‌ها، مسیری مشخص به عنوان کوتاهترین مسیر این مسئله شود. از آن زمان به بعد معکوس مسائل بهینه‌سازی مختلف از جمله مسائل مکان‌یابی مورد مطالعه محققان قرار گرفت. برای مطالعه بیشتر در زمینه مسائل بهینه‌سازی معکوس به [۳۹] مراجعه کنید. معکوس مسائل میانه توسط برکارد و همکارانش در [۱۵، ۱۶] و باروقی بناب و همکارانش در [۷] بررسی شده است.

برکارد و همکاران در [۱۶] یک الگوریتم $O(n \log n)$ برای معکوس مسئله یک میانه روی یک درخت پیشنهاد کردند و پیچیدگی زمانی این مسئله به صورت خطی توسط گالوی بهبود

¹Burton

یافته است [۲۹]. مسئله معکوس ۱- میانه در یک چرخه توسط برکارد و همکاران [۱۸] در نظر گرفته شده است آنها یک الگوریتم $O(n^2)$ برای این مسئله ارائه دادند. علیزاده و همکاران [۲] یک الگوریتم با پیچیدگی زمانی $O(n \log n)$ برای معکوس مسئله مکان‌یابی یک-مرکز پیشنهاد دادند. بعداً، علیزاده و برکارد [۳] نشان دادند که معکوس مسئله یک-مرکز را می‌توان در زمان $O(n^2)$ حل کرد.

معکوس مسائل یک میانه و یک مرکز روی درخت با نرم چیشیف و هامینگ به ترتیب توسط گوان و ژنگ در [۳۶] و گوان و سپاسیان در [۴۶] بررسی شده است. بعدها، سپاسیان و رهبرنیا [۵۰] معکوس مسئله ۱- میانه را با تغییر راس‌ها و طول درختان حل کردند. گوان [۴۵] یک الگوریتم برای جواب معکوس مسئله ۱ میانه با تغییر وزن راس‌ها در گراف‌های بلوکی ارائه داد.

اخیراً، نظری و همکاران [۴۳، ۴۴] معکوس مسئله دو میانه پشتیبان با تغییر طول یال‌ها و وزن رئوس در نظر گرفتند. علیزاده و همکاران [۱] و علیزاده و اعتماد [۴] به ترتیب چند الگوریتم ترکیبی برای معکوس مسائل میانه و مرکز ناخوشایند ارائه دادند.

فرض کنید $(X; d)$ یک فضای متریک با تابع فاصله $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ باشد. این فضای متریک می‌تواند یک شبکه یا فضای حقیقی $\mathbb{R}^k$ ، $k \geq 1$ ، باشد. همچنین فرض کنید (LOC) یک مسئله مکان‌یابی روی این فضای متریک بوده و $w \in \mathbb{R}^n$ بردار پارامترهای مسئله (LOC) باشد. به عنوان مثال w می‌تواند شامل وزن‌های راسی و/یا طول‌های یالی روی شبکه‌ها بوده و یا وزن نقاط و/یا مختصات نقطه‌ای روی فضای حقیقی $\mathbb{R}^k$ ، $k \geq 1$ ، باشد. به علاوه فرض کنید S_w مجموعه کلیه جواب‌های شدنی مسئله (LOC) تحت بردار پارامتر w بوده و $f(w, S)$ تابع هدف مسئله (LOC) برای جواب شدنی $S \in S_w$ باشد. با این مفروضات می‌توان مسئله (LOC) را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} (\text{LOC}) \quad & \min_w f(w, S) \\ \text{s.t.} \quad & S \in S_w \end{aligned}$$

به علاوه فرض کنید $S^* \in S_w$ جوابی مفروض از مسئله مکان‌یابی (LOC) باشد. هدف مسائل مکان‌یابی معکوس عبارت است از اصلاح بردار پارامتری w به $\bar{w}$ با توجه به برخی محدودیت‌ها به ارزان‌ترین روش ممکن، به طوری که جواب شدنی مفروض S^* برای مسئله (LOC) تحت بردار پارامتر جدید $\bar{w}$ بهین شده یا تا حد ممکن بهبود یابد.

فرض کنید c_i^+ هزینه متحمل شده از افزایش i امین مولفه w_i از بردار w به اندازه یک واحد بوده و c_i^- هزینه متحمل شده از کاهش w_i به اندازه یک واحد باشد. همچنین فرض کنید $g(c, \bar{w})$ تابع هزینه اصلاح بردار پارامتر w به $\bar{w}$ با بردار هزینه c باشد. از طرفی، ممکن است مجاز نباشیم که بردار w را به طور دلخواه اصلاح کنیم. از این رو فرض کنید B مجموعه محدودیت‌هایی باشد که بردار پارامتر جدید $\bar{w}$ باید در آنها صدق کند. در اکثر مطالعاتی که تاکنون روی مسائل مکان‌یابی معکوس صورت گرفته است، تابع هزینه $g(c, \bar{w})$ یک تابع خطی

به صورت

$$\sum_{i=1}^n \left(c_i^+ \max\{0, \bar{w}_i - w_i\} + c_i^- \max\{0, w_i - \bar{w}_i\} \right)$$

بوده و مجموعه B به صورت زیر تعریف شده است

$$B = \{\bar{w} : u^- \leq \bar{w} \leq u^+, u^-, u^+ \in \mathbb{R}^n\}$$

مسئله مکان‌یابی معکوس دارای کاربردهای فراوانی می‌باشد که در اینجا به یک مورد اشاره می‌گردد. ایستگاه قطار یک شهر را در نظر بگیرید که نمی‌تواند به جای دیگری منتقل شود. شهردار آن شهر باید برخی از پارامترهای سیستم شهری مانند خیابان‌ها یا خطوط حمل و نقل شهری را با کمترین هزینه طوری اصلاح کند که مکان کنونی ایستگاه قطار تبدیل به یک مکان ۱-مرکز شبکه متناظر با آن شهر گردد.

تا کنون سه نوع مدل مکان‌یابی متداول برای مسائل مکان‌یابی معکوس در ادبیات تحقیقی معرفی شده اند که عبارتند از:

مدل مکان‌یابی معکوس نوع حداقل هزینه^۱

مدل مکان‌یابی معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای^۲

مدل مکان‌یابی ترفیع و تنزیل^۳

در ادامه به تشریح مختصر این مدل‌ها به همراه تاریخچه‌ای از کارهای صورت گرفته و برخی رویکردهای جواب این مدل‌ها می‌پردازیم.

۱.۳.۱ مدل مکان‌یابی معکوس نوع حداقل هزینه

برای مسئله مکان‌یابی مفروض (LOC) در فضای متریک (X, d) با بردار پارامتر w ، مجموعه جواب‌های شدنی S_w ، تابع هدف $f(w, S)$ و یک جواب شدنی مفروض $S^* \in S_w$ ، مسئله مکان‌یابی معکوس نوع حداقل هزینه متناظر به صورت زیر فرمول‌بندی می‌گردد:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{w}} \quad & g(c, \bar{w}) \\ \text{s.t.} \quad & f(\bar{w}, S^*) \leq f(\bar{w}, S) \quad \forall S \in S_{\bar{w}} \\ & \bar{w} \in B \end{aligned} \quad (1.1)$$

که در آن $g(c, \bar{w})$ ، تابع هزینه مربوط به اصلاح بردار پارامتری w به $\bar{w}$ بوده و B مجموعه محدودیت‌هایی است که بردار اصلاح شده $\bar{w}$ باید در آن‌ها صدق کند. این مسئله بسته به نحوه تعریف تابع هزینه $g(c, \bar{w})$ و نوع مسئله مکان‌یابی کلاسیک (LOC)، یک مسئله بهینه‌سازی خطی یا غیرخطی است.

¹Inverse location problems

²Reverse location problems

³Up-and Drowngrading location problems

در سال ۲۰۰۴ برکارد و همکارانش مسئله ۱- میانه معکوس با تغییرات وزن مربوط به نقاط را در [۱۶] مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها ابتدا مسئله p - میانه معکوس گسسته را در فضای متریک (X, d) به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی فرمول‌بندی کردند و با توجه به متناهی بودن تعداد قیود و متغیرهای این مدل نتیجه گرفتند این مسئله در زمان چند جمله‌ای قابل حل است. آن‌ها در ادامه، مسئله ۱- میانه معکوس را روی درخت‌ها مورد بررسی قرار دادند و نتیجه گرفتند مسئله ۱- میانه معکوس نوع حداقل هزینه روی درخت را می‌توان توسط الگوریتمی شبه حریصانه در زمان $O(n \log n)$ حل نمود.

آن‌ها همچنین در ادامه یک معیار بهینگی برای ۱- میانه گسسته در صفحه ارائه نموده و بر این اساس الگوریتمی با زمان اجرای $O(n \log n)$ برای مسئله ۱- میانه معکوس در صفحه ارائه نمودند.

برای مسئله ۱- میانه معکوس با تغییرات وزن راسی روی دور گراف‌ها، همان مولفان [۱۸] نشان دادند که این مسئله را می‌توان به صورت یک مسئله برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای کراندار فرمول‌بندی کرد که در این فرمول‌بندی ماتریس قیود دارای ساختاری خاص است: ستون‌های این ماتریس را می‌توان به دو کلاس افراز کرد که در هر کلاس مولفه‌های ماتریس در هر سطر کاهش می‌یابند. آن‌ها از این خاصیت جالب بهره برده و مسئله را در زمان $O(n^2)$ حل نمودند.

در سال ۲۰۰۸ قلوی در پایان نامه اش [۲۹] مسئله ۱- میانه معکوس با تغییرات وزن راسی روی درخت را که قبلاً توسط برکارد و همکارانش برای آن الگوریتم $O(n \log n)$ ارائه شده بود، به صورت یک مدل کوله‌پشتی پیوسته فرمول‌بندی کرده و از این رو نشان داد که این مسئله دارای زمان اجرای خطی است.

باروقی و همکارانش در [۷] نشان دادند که مسئله p - میانه معکوس با تغییرات طول یالی روی شبکه‌های کلی NP - سخت است. لذا آن‌ها شبکه‌های خاصی چون درخت‌ها و گراف‌های ستاره را در نظر گرفته و الگوریتم‌های چند جمله‌ای برای آن‌ها ارائه دادند.

در اغلب مسائل مکان‌یابی معکوس حل شده، هزینه‌های اصلاح شبکه با نرم خطی اندازه‌گیری شده است. اما اخیراً نوع دیگری از فاصله به نام فاصله همینگ در مسائل بهینه‌سازی مطرح شده است که به صورت زیر تعریف می‌گردد.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند. فاصله همینگ میان a و b با نماد $H(a, b)$ معرفی شده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$H(a, b) = \begin{cases} 1 & a \neq b \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

گوان و ژنگ در [۳۶] مسئله ۱- میانه معکوس با تغییرات وزن راسی روی درخت را تحت فاصله همینگ مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نشان دادند این مسئله معادل با یک مسئله کوله‌پشتی صفر و یک بوده و در نتیجه NP - سخت است. آن‌ها همچنین در ادامه الگوریتمی را ارائه

دادند که مسئله ۱- میانه معکوس روی درخت تحت فاصله l_∞ را در زمان خطی حل می‌کند. باروکی و همکارانش [۶] مقاله‌ای در زمینه مسئله ۱- میانه معکوس با تغییر مختصات نقطه‌ای ارائه دادند که در آن ثابت نمودند در صورتی که فواصل بین نقاط با نرم خطی اندازه‌گیری شود، این مسئله NP-سخت است. آن‌ها همچنین ثابت کردند با فرض اینکه وزن نقاط یکسان باشد، مسئله ۱- میانه معکوس به d مسئله کوله‌پشتی کاهش یافته و در زمان $O(nd)$ قابل حل است. در ضمن ایشان ثابت نموده‌اند که این مسئله تحت نرم چبیشف در صفحه NP-سخت بوده و با نرم اقلیدسی در زمان $O(nd)$ قابل حل است.

۲.۳.۱ مسائل مکان‌یابی معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای

در این مسئله نیز فرض می‌شود $S^* \in S_w$ یک جواب شدنی مفروض مسئله مکان‌یابی (LOC) در فضای متریک (X, d) تحت بردار پارامتر w باشد. همچنین فرض می‌شود $B \in \mathbb{R}^+$ بودجه در نظر گرفته شده برای اصلاح پارامترهای w بوده و مجموعه B محدودیت‌هایی باشد که پارامترهای اصلاح شده باید در آن‌ها صدق کنند. با فرض این که $f(w, S^*)$ تابع هدف مسئله مکان‌یابی کلاسیک (LOC) به ازای جواب شدنی S^* بوده و $g(c, \bar{w})$ تابع هزینه مربوط به اصلاح پارامترهای w به $\bar{w}$ باشد، یک مسئله مکان‌یابی معکوس با محدودیت بودجه به صورت زیر فرمول‌بندی می‌گردد:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{w}} \quad & f(\bar{w}, S^*) \\ \text{s.t.} \quad & g(c, \bar{w}) \leq B, \\ & \bar{w} \in B \end{aligned} \quad (2.1)$$

دقت کنید که در این مسئله معکوس، هدف این نیست که یک جواب مفروض را تبدیل به یک جواب بهین کنیم بلکه می‌خواهیم مقدار تابع هدف مسئله کلاسیک را با توجه به محدودیت بودجه تا حد ممکن بهبود دهیم.

برمن و همکارانش برای اولین بار در سال ۱۹۹۲ مسئله ۱- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای روی یک درخت را مورد بررسی قرار داده و برای آن یک الگوریتم خطی ارائه دادند [۹]. در سال ۲۰۰۶ برکارد و همکارانش [۱۷] ثابت کردند مسئله ۱- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای با تغییرات طول یالی روی گراف‌های کلی NP-سخت است و برای دور گراف‌ها الگوریتمی خطی ارائه دادند. مسئله ۲- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای روی درخت‌ها نیز توسط برکارد و همکارانش مورد مطالعه قرار گرفت و برای آن یک الگوریتم $O(n \log n)$ ارائه شده است [۱۹]. در سال ۲۰۱۰ ونگ و همکارش مسئله ۲- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای روی دورها را به مسئله ۳- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای روی یک مسیر تبدیل کرده و از این طریق نشان دادند که این مسئله در زمان چندجمله‌ای قابل حل است [۵۲]. مسئله ۱- میانه معکوس نوع محدودیت بودجه‌ای با یک محدودیت اضافی روی

درخت‌ها توسط یانگ و همکارش در سال ۲۰۱۲ مورد بررسی قرار گرفته [۵۲] و ثابت شد که این مدل قابل تقسیم به دو زیر مسئله معادل بوده و این زیر مسئله‌ها را می‌توان به ترتیب توسط یک الگوریتم مینیمم برش و الگوریتم حریصانه حل نمود.

۳.۳.۱ مدل مکان‌یابی ترفیع و تنزیل

فرض کنید $B \in \mathbb{R}^+$ بودجه لازم برای اصلاح پارامترهای شبکه باشد. در یک مسئله ترفیع (تنزیل) متناظر مسئله مکان‌یابی کلاسیک (LOC)، هدف تغییر بردار پارامتر w به $\bar{w}$ است به طوری که مقدار هدف مسئله (LOC) تحت بردار پارامتر جدید $\bar{w}$ و با توجه به محدودیت بودجه تا حد ممکن بهتر (بدتر) شود. لذا می‌توان این مسئله را به صورت زیر فرمول‌بندی کرد:

$$\begin{aligned} \min(\max) \quad & f(\bar{w}, S) \\ \text{s.t.} \quad & g(c, \bar{w}) \leq B, \\ & \bar{w} \in \mathcal{B}, S \in \mathcal{S}_{\bar{w}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

که در آن B مجموعه محدودیت‌هایی است که بردار اصلاح شده $\bar{w}$ باید در آن‌ها صدق کند و $\mathcal{S}_{\bar{w}}$ مجموعه جواب‌های شدنی مسئله (LOC) تحت پارامترهای جدید $\bar{w}$ است.

توجه داشته باشید که در این نوع مسائل برخلاف مسائل معکوس قبلی، هیچ جواب شدنی خاصی از مسئله کلاسیک (LOC) برای بهبود مشخص نمی‌گردد. این نوع مسائل، ارتباط ضعیف‌تری با مسائل معکوس داشته ولی به دلیل اینکه در حوزه مسائل بهبود شبکه قرار می‌گیرند، می‌توان آن‌ها را جزو مسائل معکوس محسوب کرد.

گسنر^۱ مسئله ترفیع و تنزیل ۱-میانه را با تغییرات وزن راسی روی شبکه‌ها در نظر گرفته و برای مسئله ترفیع ۱-میانه یک الگوریتم $O(n^2)$ ارائه نمود [۳۰]. وی همچنین ثابت نمود که مسئله تنزیل ۱-میانه در زمان چند جمله‌ای قابل حل می‌باشد. در ضمن برای گراف خاص درخت، با استفاده از یک خاصیت تقعر، الگوریتمی با زمان اجرای $O(n \log n)$ ارائه نمود.

به علاوه وی در سال ۲۰۰۸ طی مطالعه‌ای دیگر، مسئله ترفیع و تنزیل ۱-مرکز با تغییرات وزن رئوس روی شبکه‌ها را بررسی کرده [۳۱] و نشان داد که مسئله ترفیع ۱-مرکز با معلوم بودن ماتریس فاصله در زمان $O(n^2)$ قابل حل است. در ضمن وی ثابت نمود که مسئله تنزیل ۱-مرکز روی گراف‌های کلی قویاً NP-سخت بوده ولی روی درخت‌ها در زمان $O(n^2)$ قابل حل است. در سال ۲۰۰۹ وی مسئله تنزیل ۱-میانه روی صفحه را تحت نرم منهتن مورد مطالعه قرار داد [۳۲]. در این مقاله مسئله مذکور از دید نظریه بازی‌ها مورد بررسی قرار گرفته و برای آن یک الگوریتم با زمان اجرای $O(n \log n^2)$ ارائه شده است.

¹Gassner

سپاسیان و رهبرنیا در سال ۲۰۱۴ ثابت کردند مسئله ترفیع p -میان به تغییرات وزن راسی روی گراف‌های کلی در زمان چند جمله‌ای قابل حل می‌باشد [۵۰]. در ضمن برای همین مسئله روی یک مسیر با هزینه‌های یکسان یک الگوریتم خطی ارائه دادند.

۴.۱ مسائل برنامه‌ریزی چند سطحی

مسائل بهینه‌سازی چند سطحی، مدل‌های برنامه‌ریزی ریاضی هستند که زیر مجموعه‌ای از متغیرهای آنها به عنوان جواب بهینه‌ای برای مسائل بهینه‌سازی دیگر است. یک مسئله برنامه‌ریزی دو سطحی^۱ که به اختصار آن را (BPP) نامگذاری کرده‌اند، یک نوع مسئله برنامه‌ریزی ریاضی است که یکی از محدودیت‌هایش بصورت یک مسئله بهینه‌سازی است. مسئله اصلی را مسئله سطح بالاتر یا رهبر نامیده و مسئله درونی را مسئله سطح پایین‌تر یا پیرو نامگذاری می‌کنند. شکل کلی این مسئله بصورت زیر است

$$\min_{x \in X} F(x, y) \quad (1.1)$$

s.t.

$$G(x, y) \leq 0 \quad (2.1)$$

$$\min_{y \in Y} f(x, y) \quad (3.1)$$

s.t.

$$g(x, y) \leq 0 \quad (4.1)$$

که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و $y \in \mathbb{R}^m$ به ترتیب متغیرهای سطح بالاتر و پایین‌تر، توابع $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathbb{R}$ و $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathbb{R}$ به ترتیب توابع هدف سطح بالاتر و پایین‌تر و $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathbb{R}^u$ و $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathbb{R}^l$ به ترتیب محدودیت‌های سطح بالاتر و پایین‌تر هستند.

مسائل برنامه‌ریزی دو سطحی برای اولین بار در سال ۱۹۷۳ معرفی شد و علاقه به آن در دهه ۸۰ میلادی افزایش یافت هنگامی که محققان به ارتباط قوی آن با مسائل استاکلبرگ در نظریه بازی (استاکلبرگ، ۱۹۵۲) پی بردند. در واقع، BPP و استاکلبرگ گاهی به جای هم استفاده می‌شود. علاوه بر این، برخی از مسائل مهم مانند کمینه-بیشینه، مسئله فروشنده دوره‌گرد، برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح، دو خطی و درجه دوم را می‌توان به عنوان BPP بیان کرد.

کاربردهای مختلفی برای برنامه‌ریزی دو سطحی گزارش شده است: عملیات نظامی، تولید میدانی، تصمیم‌گیری در بازاریابی، مکان‌یابی، مقررات زیست محیطی، تخصیص اعتبار، سیاست انرژی، مواد خطرناک، سیاست‌های اجتماعی و کشاورزی، قیمت‌گذاری برق، تولید روغن، ساختار شکل بهینه طراحی، علوم محیطی، کنترل بهینه، برنامه‌ریزی

¹Bilevel Programming Problem

شهری، خصوصی سازی در کشاورزی طراحی تحت عدم اطمینان، طراحی با تعادل شیمیایی، مهندسی متابولیسم، بهینه سازی شبکه لوله، قیمت تراکم ترافیک، مدیریت پارکینگ اتومبیل، آموزش شبکه های عصبی مصنوعی، طراحی شبکه جاده ای و غیره.

در بسیاری از کاربردها، زیر مسئله داخلی متناظر است با یک مسئله تعادل که بهترین شکل از یک رابطه کلی نابرابری، مکمل و یا هم ارزی است. این نوع مسائل به عنوان یک مسئله ریاضی با محدودیت های تعادل (MPEC) معرفی می شود.

یک مسئله دو سطحی در ساده ترین حالت ممکن که تمام توابع خطی و تمام متغیرها پیوسته باشند، NP-سخت است. یعنی هر چه اندازه مسئله (تعداد محدودیت ها و متغیرها) افزایش می یابد مسئله از نظر محاسباتی پیچیده می شود. همچنین ثابت شده است که تعیین اینکه آیا یک جواب مشخص برای BPP به صورت محلی بهینه است یا خیر نیز NP-سخت است.

مساله برنامه ریزی خطی دوسطحی (BLPP)، یک مساله بهینه سازی است که در آن متغیرهای تصمیم مقید به قرار گرفتن در مجموعه بهینه از مساله بهینه سازی سطح دوم می باشند و دارای متغیرهای پیوسته و توابع هدف خطی می باشد. هر مساله دو سطحی دارای دو مساله می باشد، مساله سطح بالا که به آن رهبر گویند و مساله سطح پایین که به آن پیرو گویند. مساله برنامه ریزی خطی که دارای حداقل یک متغیر دودویی باشد را مساله برنامه ریزی صحیح دو سطحی می گویند.

یک مساله برنامه ریزی دوسطحی یک مساله بهینه سازی سلسله مراتبی می باشد که محدودیت های آن تا اندازه ای به یک مساله بهینه سازی دیگر محدود می باشند. این مساله بهینه سازی سلسله مراتبی به طور طبیعی، در بسیاری از پدیده ها که فعالیت های سطح پایین به تصمیمات سطح بالا بستگی دارد، ظاهر می شود. ابتدا پیشرو تلاش می کند تا تابع هدفش را بهینه کند. پیرو تصمیم پیشرو را مشاهده کرده و تصمیمش را می گیرد. مسائل دوسطحی به طور وسیعی در مسائل مربوط به بهینه سازی به کاررفته اند. اکثر تحقیقات روی برنامه ریزی دوسطحی، بر مسائل خطی متمرکز شده است. از اواسط دهه ۱۹۷۰ که برنامه ریزی دوسطحی مورد توجه محققان قرار گرفته تا به امروز، بیش از بیست الگوریتم متفاوت برای حل این مسائل پیشنهاد شده است. در این میان رویکرد کان-تاکر بیشتر مورد استفاده قرار گرفته و الگوریتم انشعاب و کران نامیده می شود.

یک روش برای حل یک مسئله دو سطحی، تبدیل آن به یک مسئله تک سطح است. برای این منظور، اگر مسئله درونی یک مسئله محدب با متغیرهای پیوسته باشد، یک راه حل، جایگزینی آن با شرایط کاروش کوهن تاکر (KKT) است [۲۳]. که در این مورد، لازم است در رابطه با شرایط محدودیت احتیاط شود.

تابع لاگرانژ نظیر با مسئله درونی بصورت زیر است

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \sum_{i=1}^l \lambda_i g_i(x, y)$$

در نتیجه مدل زیر که هم ارز مدل اولیه مسئله دو سطحی فوق است بدست می‌آید

$$\min_{x \in X, y, \lambda} F(x, y) \quad (۵.۱)$$

s.t.

$$G(x, y) \leq ۰ \quad (۶.۱)$$

$$g(x, y) \leq ۰ \quad (۷.۱)$$

$$\lambda_i \leq ۰, \quad i = ۱, \dots, l \quad (۸.۱)$$

$$\lambda_i g_i(x, y) = ۰, \quad i = ۱, \dots, l \quad (۹.۱)$$

$$\nabla_y \mathcal{L}(x, y, \lambda) = ۰ \quad (۱۰.۱)$$

فصل ۲

معکوس مسائل مکان‌یابی دایره کمترین مجموع

در این فصل مسائل مکان‌یابی دایره معکوس با هدف کمترین مجموع را مدلسازی کرده و الگوریتم‌هایی برای حل این مسائل ارائه می‌دهیم. در پایان با حل یک مثال عددی روش حل این مسائل شرح داده می‌شود.

۱.۲ معکوس مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مجموع با شعاع متغیر

فرض کنید n نقطه $\mathbf{p}_j = (x_j, y_j)$ ، $j = 1, \dots, n$ ، با وزن‌های مثبت w_j در صفحه موجود باشند، می‌خواهیم با تغییر وزن نقاط داده شده با کمترین هزینه ممکن، دایره $C^*(\mathbf{p}^*, r^*)$ جواب بهینه مسئله (۳.۱) شود.

فرض کنید برای هر واحد افزایش و کاهش وزن w_j به ترتیب نیاز به هزینه c_j^+ و c_j^- باشد. همچنین فرض کنید مقدار کاهش و افزایش وزن w_j به ترتیب برابر q_j^- و q_j^+ باشد. بعلاوه q_j^+ و q_j^- باید در بازه‌های مشخصی باشند یعنی $u_j l_j \leq w_j + q_j^+ - q_j^- \leq$ که در آن و به ترتیب کران بالا و پایین مربوط به وزن جدید است. مدل معکوس مسئله (۳.۱) را می‌توان بصورت

زیر نوشت:

$$\min_{q_j^+, q_j^-} \sum_{j=1}^n (c_j^+ q_j^+ + c_j^- q_j^-) \quad (۱.۲)$$

$$\sum_{j=1}^n (w_j + q_j^+ - q_j^-) |d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_j) - r^*| \leq \sum_{j=1}^n (w_j + q_j^+ - q_j^-) |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r| \quad \text{for all } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}^+ \quad (۲.۲)$$

$$0 \leq q_j^+ \leq u_j^+ \quad j = 1, \dots, n \quad (۳.۲)$$

$$0 \leq q_j^- \leq u_j^- \quad j = 1, \dots, n. \quad (۴.۲)$$

توجه کنید در مسئله بالا اگر هزینه کاهش و افزایش هر وزن با هم برابر باشند، می‌توان به جای دو متغیر q_j^+ و q_j^- تنها از یک متغیر q_j استفاده کرد بطوریکه $u_j l_j \leq w_j + q_j \leq$ به این ترتیب تعداد متغیرهای مسئله معکوس نصف خواهد شد.

همانطور که مشاهده می‌شود متغیرهای مدل فوق q_j^+ ها و q_j^- ها هستند. چون رابطه (۲.۲) باید به ازای هر $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}^+$ برقرار باشد در نتیجه مدل فوق دارای تعداد نامتناهی قید است. در ادامه با توجه به مطالب ارائه شده در بخش ۲.۲.۱ سعی می‌شود این مدل به مدلی با تعداد متناهی قید تبدیل شود.

به ازای هر دایره $C = C(\mathbf{x}, r)$ فرض کنید

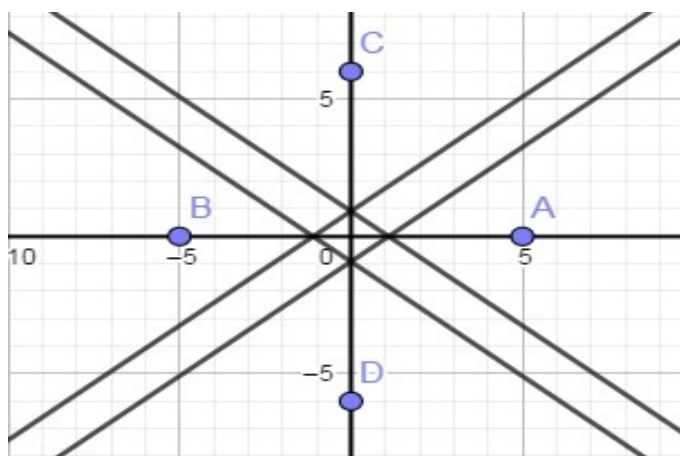
$$F_{\setminus}(C) = \sum_{j=1}^n (w_j + q_j^+ - q_j^-) |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r|$$

طبق قضیه ۱.۲.۱ دایره‌ای می‌تواند جواب بهینه مسئله (۳.۱) باشد که مرکزش روی حداقل یک عمودمنصف از جفت نقاط موجود واقع شده باشد. پس معادله تمام عمودمنصف‌های هر جفت از نقاط موجود را یافته اگر نقطه $\mathbf{p}^*$ روی هیچ یک از عمودمنصف‌ها واقع نشده باشد، مسئله معکوس فاقد جواب است. در شکل ۱.۲ چهار نقطه به عنوان مشتری مشخص شده است، فضای شدنی برای جواب بهینه مسئله دایره کمترین مجموع، شامل تمام عمودمنصف‌های هر جفت از این نقاط است که در این تصویر دیده می‌شود.

اگر مسئله معکوس جواب داشته باشد، ابتدا مجموعه B شامل نقاط تلاقی هر سه عمودمنصف را یافته و با در نظر گرفتن هر یک از نقاط $\mathbf{b}_i \in B, i = 1, \dots, |B|$ ، فاصله آنها را تا دو سر پاره‌خطی که این نقاط روی عمودمنصف آنها واقع شده را بدست آورده و آن را r_i^B نامگذاری می‌کنیم. با در نظر گرفتن دایره $C_i^B = C(\mathbf{b}_i, r_i^B)$ مجموعه نقاط خارج و داخل دایره یعنی $J_-(C_i^B)$ و $J_+(C_i^B)$ را مشخص می‌کنیم. در شکل برای هر $\mathbf{b}_i$ دو وضعیت ممکن است رخ دهد:

۱. شرط قضیه ۲.۲.۱ یعنی

$$\left| \sum_{j \in J_-(C_i^B)} (w_j + q_j^+ - q_j^-) - \sum_{j \in J_+(C_i^B)} (w_j + q_j^+ - q_j^-) \right| \leq \sum_{j \in J_0(C_i^B)} (w_j + q_j^+ - q_j^-)$$



شکل ۱.۲: فضای شدنی مرکز، در یک مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مجموع

برقرار است، در نتیجه دایره بدست آمده کاندیدی برای دایره بهینه است. اما چون

$$F_1(C^*) \leq F_1(C_i^B) \text{ باشیم باید داشته باشیم } F_1(C^*) \leq F_1(C_i^B)$$

۲. شرط قضیه ۲.۲.۱ برقرار نیست، در نتیجه دایره بدست آمده کاندیدی برای دایره بهینه نیست.

برای اعمال این دو وضعیت متغیر باینری y_i^B را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$y_i^B = \begin{cases} 0 & \text{شرط قضیه ۲.۲.۱ در دایره } C_i^B \text{ برقرار است} \\ 1 & \text{شرط قضیه ۲.۲.۱ در دایره } C_i^B \text{ برقرار نیست} \end{cases}$$

در نتیجه دو وضعیت فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\left| \sum_{j \in J_-(C_i^B)} \hat{w}_j - \sum_{j \in J_+(C_i^B)} \hat{w}_j \right| \leq \sum_{j \in J_0(C_i^B)} \hat{w}_j + M y_i^B \quad (5.2)$$

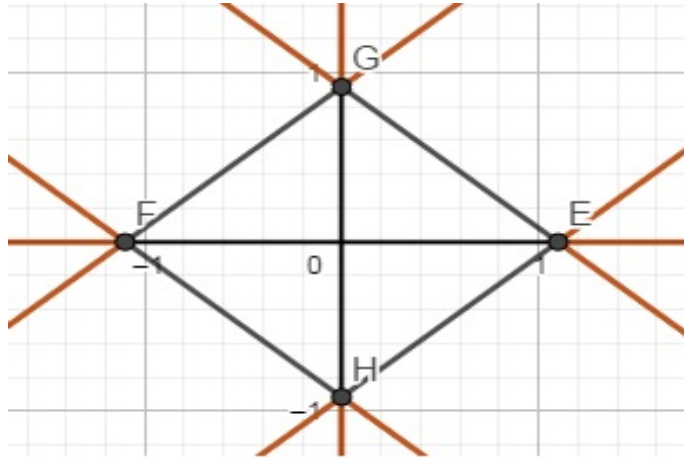
$$F_1(C^*) \leq F_1(C_i^B) + M y_i^B \quad (6.2)$$

$$y_i^B \in \{0, 1\}. \quad (7.2)$$

که در آن M عددی به اندازه کافی بزرگ است و $w_j + q_j^+ - q_j^- = \hat{w}_j$. توجه کنید، از آنجاییکه ضریب متغیرهای دودویی y_i^B در روابط (۵.۲) و (۶.۲) عددی بزرگ است، در حل مسئله بهینه‌سازی این متغیرها همواره مقدار یک را اختیار خواهند کرد جهت جلوگیری از این موضوع کافی است عبارت $M \sum_{i=1}^{|B|} y_i^B$ به تابع هدف مسئله معکوس اضافه شود.

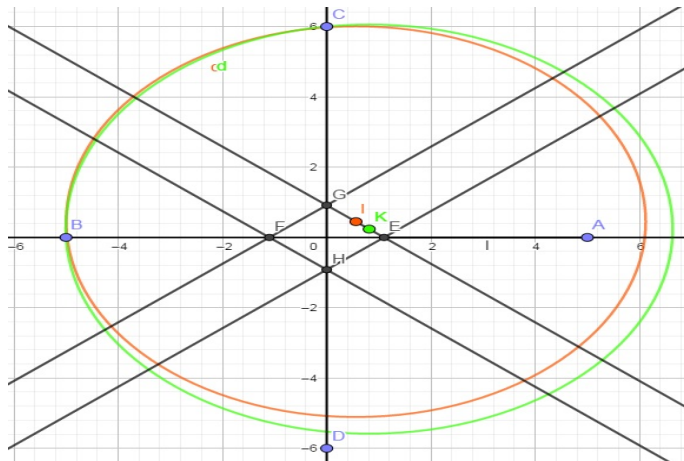
در مرحله بعد، تمام قسمت‌هایی از عمودمنصف‌ها که بین نقاط تلاقی حداقل دو عمودمنصف واقع شده‌اند را بررسی می‌کنیم. مجموعه شامل نقاط تلاقی حداقل دو عمودمنصف را A نامیده و فرض کنید L مجموعه شامل تمام پاره‌خط‌های ایجاد شده روی عمودمنصف‌ها باشد که

توسط دو نقطه تلاقی ایجاد شده است. در شکل ۲.۲ مجموعه A شامل نقاط E, F, G, H, O و مجموعه L شامل هشت پاره‌خط است که توسط اعضای مجموعه A تشکیل شده‌اند. فرض



شکل ۲.۲: اعضای مجموعه A و L و H

کنید $i = 1, \dots, |L|$, $l_i \in L$ ، قسمتی از عمودمنصف B_{rs} (عمود منصف نظیر پاره‌خط $[p_r p_s]$) باشد که بین نقاط تلاقی $a_m, a_t \in A$ واقع شده است. نقطه‌ای دلخواه از پاره‌خط $[a_m a_t]$ مثل a را به عنوان مرکز انتخاب کرده و $d(a, p_r)$ را به عنوان شعاع در نظر می‌گیریم، دایره C_i^L را تشکیل داده و مجموعه‌های $J_+(C_i^L)$ ، $J_-(C_i^L)$ و $J_0(C_i^L)$ را مشخص می‌کنیم. در شکل ۳.۲ دو نقطه I و K بطور دلخواه از پاره خط GE که قسمتی از عمود منصف خط گذرنده از نقاط B و C است به عنوان مرکز دایره انتخاب شده‌اند، شعاع هر یک از این دو دایره بگونه‌ای است که نقاط B و C روی این دایره‌ها قرار می‌گیرند. همانطور که از شکل مشخص است نقاط A و D به ترتیب درون و بیرون این دو دایره قرار دارند. بریمبرگ و همکارانش نشان داده‌اند برای هر نقطه دلخواه از یک پاره‌خط ایجاد شده روی عمود منصف دو مشتری، مجموعه نقاط درون و نیز مجموعه نقاط بیرون دایره‌های ایجاد شده با هم برابرند. دو وضعیت زیر ممکن است رخ



شکل ۳.۲: بررسی اعضای مجموعه L

دهد.

۱. شرط قضیه ۲.۲.۱ برقرار است، در نتیجه تمام نقاط پاره‌خط l_i در این قضیه صدق می‌کنند و نقاطی از آن که دارای کمترین مقدار هدف هستند کاندیدی برای دایره بهینه خواهند بود. این نقاط با حل مدل برنامه‌ریزی غیرخطی زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \min f_i(\lambda_i^L) = & \sum_{j \in J_+(C_i^L)} \hat{w}_j (d(\lambda_i^L \mathbf{a}_m + (1 - \lambda_i^L) \mathbf{a}_t, \mathbf{p}_j) - d(\lambda_i^L \mathbf{a}_m + (1 - \lambda_i^L) \mathbf{a}_t, \mathbf{p}_r)) \\ & + \sum_{j \in J_-(C_i^L)} \hat{w}_j (d(\lambda_i^L \mathbf{a}_m + (1 - \lambda_i^L) \mathbf{a}_t, \mathbf{p}_r) - d(\lambda_i^L \mathbf{a}_m + (1 - \lambda_i^L) \mathbf{a}_t, \mathbf{p}_j)) \\ \text{subject to } & 0 \leq \lambda_i^L \leq 1. \end{aligned}$$

از طرف دیگر چون $C^*(\mathbf{p}^*, r^*)$ دایره بهینه است پس برای جواب بهینه مسئله فوق یعنی λ_i^{L*} باید رابطه $F_1(C^*) \leq f_i(\lambda_i^{L*})$ نیز برقرار باشد.

۲. شرط قضیه ۲.۲.۱ برقرار نیست، در نتیجه هیچ یک از نقاط پاره‌خط l_i کاندیدی برای دایره بهینه نیست.

با تعریف متغیر باینری y_i^L ، دو وضعیت فوق را می‌توان بصورت زیر خلاصه کرد:

$$\left| \sum_{j \in J_-(C_i^L)} \hat{w}_j - \sum_{j \in J_+(C_i^L)} \hat{w}_j \right| \leq \sum_{j \in J_0(C_i^L)} \hat{w}_j + M y_i^L \quad (۸.۲)$$

$$F_1(C^*) \leq f_i(\lambda_i^L) + M y_i^L \quad \text{for all } 0 \leq \lambda_i^L \leq 1 \quad (۹.۲)$$

$$y_i^L \in \{0, 1\}. \quad (۱۰.۲)$$

توجه کنید رابطه (۹.۲) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$F_1(C^*) \leq \min_{0 \leq \lambda_i^L \leq 1} \{f_i(\lambda_i^L) + M y_i^L\}$$

در نتیجه روابط (۸.۲) تا (۱۰.۲) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$f_i(\lambda_i^{L*}) = \min \{f_i(\lambda_i^L) + M y_i^L\} \quad (۱۱.۲)$$

subject to

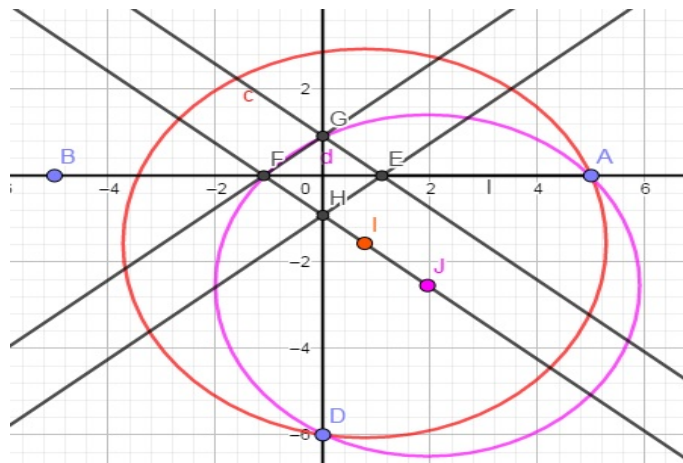
$$\left| \sum_{j \in J_-(C_i^L)} \hat{w}_j - \sum_{j \in J_+(C_i^L)} \hat{w}_j \right| \leq \sum_{j \in J_0(C_i^L)} \hat{w}_j + M y_i^L \quad (۱۲.۲)$$

$$0 \leq \lambda_i^L \leq 1 \quad (۱۳.۲)$$

$$y_i^L \in \{0, 1\}. \quad (۱۴.۲)$$

$$F_1(C^*) \leq f_i(\lambda_i^{L*}). \quad (۱۵.۲)$$

در مرحله بعد باید قسمت‌های ابتدایی و انتهایی عمودمنصف‌ها بررسی شوند. فرض کنید H مجموعه تمام نیم‌خط‌های ایجاد شده روی عمودمنصف‌ها باشد که نقاط انتهایی آن‌ها یکی از نقاط تلاقی متعلق به مجموعه A باشد. در شکل ۲.۲ نیم‌خط‌های قرمز رنگ همان اعضای مجموعه H هستند. فرض کنید نیم‌خط $h_i \in H$ ، $i = 1, \dots, |H|$ ، قسمتی از عمودمنصف دلخواه B_{rs} با نقطه انتهایی $a_m \in A$ باشد. نقطه‌ای دلخواه از این نیم‌خط مثل b را انتخاب کرده، $d(b, p_r)$ را به عنوان شعاع در نظر گرفته و دایره $C_b^{h_i}$ را تشکیل می‌دهیم سپس مجموعه‌های $J_+(C_i^H)$ ، $J_-(C_i^H)$ و $J_o(C_i^H)$ را مشخص می‌کنیم. در شکل ۴.۲ دو نقطه I و J بطور دلخواه از نیم‌خط شامل H که قسمتی از عمود منصف خط گذرنده از نقاط A و D است به عنوان مرکز دایره انتخاب شده‌اند، شعاع هر یک از این دو دایره بگونه‌ای است که نقاط A و D روی این دایره‌ها قرار می‌گیرند. همانطور که از شکل مشخص است نقاط B و C بیرون این دو دایره قرار دارند و هیچ یک از مشتریان درون آن دایره‌ها واقع نشده‌اند. بریمبرگ و همکارانش نشان داده‌اند برای هر نقطه دلخواه از یک نیم‌خط ایجاد شده روی عمود منصف دو مشتری، مجموعه نقاط درون و همچنین مجموعه نقاط بیرون دایره‌های ایجاد شده با هم برابرند.



شکل ۴.۲: بررسی اعضای مجموعه H

دو وضعیت زیر ممکن است رخ دهد.

۱. شرط قضیه ۲.۲.۱ برقرار است، در نتیجه تمام نقاط نیم‌خط h_i در این قضیه صدق کرده و نقاطی که کمترین مقدار هدف را دارند کاندیدی برای دایره بهینه هستند. این نقاط از حل مدل برنامه‌ریزی غیرخطی زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \min g_i(\lambda_i^H) = & \sum_{j \in J_+(C_i^H)} \hat{w}_j (d(\lambda_i^H \mathbf{b} + (1 - \lambda_i^H) \mathbf{a}_m, \mathbf{p}_j) - d(\lambda_i^H \mathbf{b} + (1 - \lambda_i^H) \mathbf{a}_m, \mathbf{p}_r)) \\ & + \sum_{j \in J_-(C_i^H)} \hat{w}_j (d(\lambda_i^H \mathbf{b} + (1 - \lambda_i^H) \mathbf{a}_m, \mathbf{p}_r) - d(\lambda_i^H \mathbf{b} + (1 - \lambda_i^H) \mathbf{a}_m, \mathbf{p}_j)) \\ \text{subject to } & \lambda_i^H \geq 0. \end{aligned}$$

از طرف دیگر چون $C^*(p^*, r^*)$ دایره بهینه است باید داشته باشیم $F_1(C^*) \leq g_i(\lambda_i^{H*})$.

۲. شرط قضیه ۲.۲.۱ برقرار نیست، در نتیجه هیچ یک از نقاط نیم‌خط h_i کاندیدی برای دایره بهینه نیست.

با تعریف متغیر باینری y_i^H ، دو وضعیت فوق را می‌توان بصورت زیر خلاصه کرد:

$$\left| \sum_{j \in J_-(C_i^H)} \hat{w}_j - \sum_{j \in J_+(C_i^H)} \hat{w}_j \right| \leq \sum_{j \in J_0(C_i^H)} \hat{w}_j + M y_i^H \quad (۱۶.۲)$$

$$F_1(C^*) \leq g_i(\lambda_i^H) + M y_i^H \quad \text{for all } \lambda_i^H \geq 0 \quad (۱۷.۲)$$

$$y_i^H \in \{0, 1\}. \quad (۱۸.۲)$$

رابطه (۱۷.۲) شامل تعداد نامتناهی قید است، مشابه آنچه که در بالا مشاهده شد می‌توان روابط فوق را بصورت زیر نوشت:

$$g_i(\lambda_i^{H*}) = \min \{g_i(\lambda_i^H) + M y_i^H\} \quad (۱۹.۲)$$

subject to

$$\left| \sum_{j \in J_-(C_i^H)} \hat{w}_j - \sum_{j \in J_+(C_i^H)} \hat{w}_j \right| \leq \sum_{j \in J_0(C_i^H)} \hat{w}_j + M y_i^H \quad (۲۰.۲)$$

$$\lambda_i^H \geq 0 \quad (۲۱.۲)$$

$$y_i^H \in \{0, 1\}. \quad (۲۲.۲)$$

$$F_1(C^*) \leq g_i(\lambda_i^{H*}) \quad (۲۳.۲)$$

در انتها با تعویض قید (۲.۲) در مدل معکوس که دارای تعداد نامتناهی قید است با تمام روابط (۵.۲) تا (۷.۲)، (۱۱.۲) تا (۱۵.۲) و (۱۹.۲) تا (۲۳.۲) مسئله معکوس به مسئله‌ای

چندسطحی زیر با تعداد متناهی قید تبدیل می‌شود.

$$\min \sum_{j=1}^n (c_j^+ q_j^+ + c_j^- q_j^-) + M \sum_{b_i \in B} y_i^B + M \sum_{l_i \in L} y_i^L + M \sum_{h_i \in H} y_i^H \quad (24.2)$$

$$\text{to subject} \quad (25.2)$$

$$\left| \sum_{j \in J_-(C_i^B)} \hat{w}_j - \sum_{j \in J_+(C_i^B)} \hat{w}_j \right| \leq \sum_{j \in J_0(C_i^B)} \hat{w}_j + M y_i^B, \quad b_i \in B \quad (26.2)$$

$$\left| \sum_{j \in J_-(C_i^L)} \hat{w}_j - \sum_{j \in J_+(C_i^L)} \hat{w}_j \right| \leq \sum_{j \in J_0(C_i^L)} \hat{w}_j + M y_i^L, \quad l_i \in L \quad (27.2)$$

$$\left| \sum_{j \in J_-(C_i^H)} \hat{w}_j - \sum_{j \in J_+(C_i^H)} \hat{w}_j \right| \leq \sum_{j \in J_0(C_i^H)} \hat{w}_j + M y_i^H, \quad h_i \in H \quad (28.2)$$

$$F_\lambda(C^*) \leq F_\lambda(C_i^B) + M y_i^B, \quad b_i \in B \quad (29.2)$$

$$F_\lambda(C^*) \leq \min_{0 \leq \lambda_i^L \leq 1} (f_i(\lambda_i^L) + M y_i^L), \quad l_i \in L \quad (30.2)$$

$$F_\lambda(C^*) \leq \min_{\lambda_i^H \geq 0} (g_i(\lambda_i^H) + M y_i^H), \quad h_i \in H \quad (31.2)$$

$$\hat{w}_j = w_j + q_j^+ - q_j^-, \quad j = 1, \dots, n \quad (32.2)$$

$$y_i^H \in \{0, 1\}, \quad h_i \in H \quad (33.2)$$

$$y_i^L \in \{0, 1\}, \quad l_i \in L \quad (34.2)$$

$$y_i^B \in \{0, 1\}, \quad b_i \in B \quad (35.2)$$

$$0 \leq q_j^+ \leq u_j^+, \quad j = 1, \dots, n \quad (36.2)$$

$$0 \leq q_j^- \leq u_j^-, \quad j = 1, \dots, n. \quad (37.2)$$

برای حل این مسئله کافی است هر یک از زیر مسائل بهینه‌سازی نظیر قیده‌ای (۳۰.۲) و (۳۱.۲) را به ازای مقدار اولیه q_j^+ و q_j^- حل کنیم

$$f_i(\lambda_i^{L*}) = \min(f_i(\lambda_i^L) + M y_i^L)$$

$$\left| \sum_{j \in J_-(C_i^L)} \hat{w}_j - \sum_{j \in J_+(C_i^L)} \hat{w}_j \right| \leq \sum_{j \in J_0(C_i^L)} \hat{w}_j + M y_i^L$$

$$y_i^L \in \{0, 1\}$$

$$0 \leq \lambda_i^L \leq 1$$

$$\begin{aligned}
 g_i(\lambda_i^{H*}) &= \min(g_i(\lambda_i^H) + My_i^H) \\
 \left| \sum_{j \in J_-(C_i^H)} \hat{w}_j - \sum_{j \in J_+(C_i^H)} \hat{w}_j \right| &\leq \sum_{j \in J_0(C_i^H)} \hat{w}_j + My_i^H \\
 y_i^H &\in \{0, 1\} \\
 \lambda_i^H &\geq 0.
 \end{aligned}$$

سپس با تعریف رابطه زیر

$$G^* = \min_{\substack{i=1, \dots, |L| \\ k=1, \dots, |H|}} (f_i(\lambda_i^{L*}), g_i(\lambda_i^{H*})). \quad (38.2)$$

رابطه $F_1(C^*) \leq G^*$ را جایگزین روابط (۳۰.۲) و (۳۱.۲) در مسئله معکوس می‌کنیم و مدل به دست آمده را حل می‌کنیم تا مقادیر جدید q_j^+ و q_j^- بدست آید. سپس G^* جدید را یافته و مجدداً مدل اصلی را حل می‌کنیم. این روند را تا زمانی که q_j^+ و q_j^- تغییر نکند ادامه می‌دهیم.

۱.۱.۲ مثال عددی

در این بخش مدل معکوس مسئله مکان‌یابی دایره که پارامترهای آن در جدول ۱.۲ آمده است، ارائه و حل می‌شود. در این مسئله هدف یافتن وزن‌های جدید $\hat{w}_j$ است، بگونه‌ای که دایره $C^*((0, \frac{11}{13}), \frac{6}{13})$ جواب بهینه این مسئله مکان‌یابی شود. مقدار M برابر با ۱۰۰۰ و مقدار اولیه متغیرهای q_j^- و q_j^+ برای حل زیرمسئله‌ها برابر با صفر در نظر گرفته شده است.

جدول ۱.۲: پارامترهای مسئله

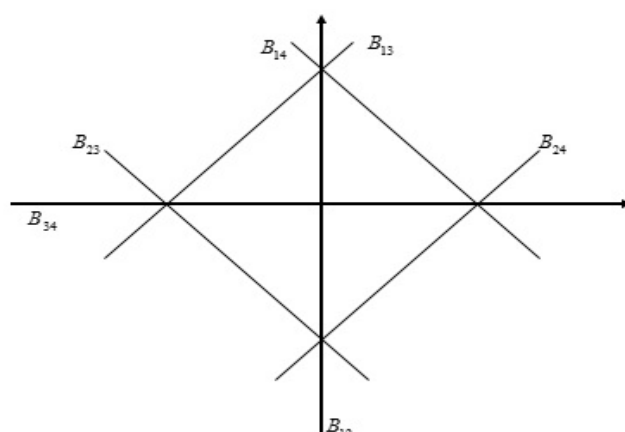
c_i^+	c_i^-	u_i^+	u_i^-	w_i	$p_i = (x_i, y_i)$	i
۱	۱	۹۰۰	۹۹	۱۰۰	$p_1 = (0, 6)$	۱
۱	۱	۹۰۰	۹۹	۱۰۰	$p_2 = (0, -6)$	۲
۱	۱	۹۹۹	۰/۵	۱	$p_3 = (5, 0)$	۳
۱	۱	۹۹۹	۰/۵	۱	$p_4 = (-5, 0)$	۴

ابتدا معادله عمودمنصف هر جفت از نقاط موجود را محاسبه می‌کنیم. از آنجاییکه $x^* \in B_{14} \cap B_{34}$ در نتیجه مسئله معکوس دارای جواب است. برای C^* داریم: $J_+(C^*) = \{1, 3, 4\}$ و $J_-(C^*) = \{2\}$ در نتیجه $F_1(C^*) = \frac{11}{6}(100 + q_1^+ - q_2^-)$. نقاط تلاقی هر سه تا از عمودمنصف‌ها (یعنی اعضای مجموعه B) و شعاع نظیر هر یک در جدول ۲.۲ آمده است.

جدول ۲.۲: اطلاعات مربوط به اعضای مجموعه B

i	b_i	r_i^B	$J(C_i^B)$	$J_-(C_i^B)$	$J_+(C_i^B)$
۱	$b_1 = (0, \frac{11}{13})$	$\frac{61}{13}$	$\{2\}$	$\{\}$	$\{1, 3, 4\}$
۲	$b_2 = (0, -\frac{11}{13})$	$\frac{61}{13}$	$\{1\}$	$\{\}$	$\{2, 3, 4\}$
۳	$b_3 = (1/1, 0)$	$6/1$	$\{\}$	$\{3\}$	$\{1, 2, 4\}$
۴	$b_4 = (-1/1, 0)$	$6/1$	$\{\}$	$\{4\}$	$\{1, 2, 3\}$

حال باید تمام پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌های روی عمودمنصف‌ها را بررسی کنیم (یعنی اعضای مجموعه L و H)، با توجه به شکل ۵.۲ تعداد پاره‌خط‌ها برابر ۸ و تعداد نیم‌خط‌ها برابر ۱۲ است، در نتیجه مدل معکوس شامل ۲۰ زیرمسئله خواهد بود. اطلاعات مربوط به پاره‌خط‌ها و نیم‌خط‌ها به ترتیب در جدول‌های ۳.۲ و ۴.۲ آمده است.



شکل ۵.۲: عمودمنصف‌های هر جفت از نقاط موجود

جدول ۳.۲: اطلاعات مربوط به اعضای مجموعه L

i	عمودمنصف	a_m	a_t	p_r	$J_+(C_i^L)$	$J_-(C_i^L)$	$J_0(C_i^L)$	جواب زیرمسئله متناظر $(f_i(\lambda_i^{L*}))$
۱	B_{12}	$(-1/1, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 6)$	$\{\}$	$\{3, 4\}$	$\{1, 2\}$	۲
۲	B_{12}	$(0, 0)$	$(1/1, 0)$	$(0, 6)$	$\{\}$	$\{3, 4\}$	$\{1, 2\}$	۲
۳	B_{13}	$(-1/1, 0)$	$(0, \frac{11}{13})$	$(0, 6)$	$\{2\}$	$\{3, 4\}$	$\{1\}$	۲/۲
۴	B_{13}	$(0, \frac{11}{13})$	$(1/1, 0)$	$(0, 6)$	$\{2\}$	$\{3, 4\}$	$\{1\}$	۲/۲
۵	B_{23}	$(-1/1, 0)$	$(0, -\frac{11}{13})$	$(0, -6)$	$\{1\}$	$\{3, 4\}$	$\{2\}$	۲/۲
۶	B_{23}	$(0, -\frac{11}{13})$	$(1/1, 0)$	$(0, -6)$	$\{1\}$	$\{3, 4\}$	$\{2\}$	۲/۲
۷	B_{34}	$(0, -\frac{11}{13})$	$(0, 0)$	$(5, 0)$	$\{1, 2\}$	$\{\}$	$\{3, 4\}$	۱۱۸۳/۳۳
۸	B_{34}	$(0, 0)$	$(0, \frac{11}{13})$	$(5, 0)$	$\{1, 2\}$	$\{\}$	$\{3, 4\}$	۱۱۸۳/۳۳

جدول ۴.۲: اطلاعات مربوط به اعضای مجموعه H

i	عمودمنصف	a_m	a	p_r	$J_+(C_i^H)$	$J_-(C_i^H)$	$J_0(C_i^H)$	جواب زیرمسئله متناظر $(g_i(\lambda_i^{H*}))$
۱	B_{12}	$(-1/1, 0)$	$(-2/1, 0)$	$(0, 6)$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$2/2$
۲	B_{12}	$(1/1, 0)$	$(2/1, 0)$	$(0, 6)$	$\{4\}$	$\{3\}$	$\{1, 2\}$	$2/2$
۳	B_{13}	$(-1/1, 0)$	$(-2/1, -0/83)$	$(0, 6)$	$\{ \}$	$\{2, 4\}$	$\{1, 3\}$	$2/2$
۴	B_{13}	$(0, \frac{11}{13})$	$(6, \frac{91}{13})$	$(0, 6)$	$\{2, 4\}$	$\{ \}$	$\{1, 3\}$	$183/33$
۵	B_{14}	$(0, \frac{11}{13})$	$(-1, 1/75)$	$(0, 6)$	$\{2, 3\}$	$\{ \}$	$\{1, 4\}$	$183/33$
۶	B_{14}	$(1/1, 0)$	$(6, -\frac{43}{13})$	$(0, 6)$	$\{ \}$	$\{2, 3\}$	$\{1, 4\}$	$2/2$
۷	B_{23}	$(-1/1, 0)$	$(-2/1, 0/83)$	$(0, -6)$	$\{ \}$	$\{1, 4\}$	$\{2, 3\}$	$2/2$
۸	B_{23}	$(0, -\frac{11}{13})$	$(6, -\frac{91}{13})$	$(0, -6)$	$\{1, 4\}$	$\{ \}$	$\{2, 3\}$	$183/33$
۹	B_{24}	$(0, -\frac{11}{13})$	$(1, -1/75)$	$(0, -6)$	$\{1, 3\}$	$\{ \}$	$\{2, 4\}$	$183/33$
۱۰	B_{24}	$(1/1, 0)$	$(2/1, 0/83)$	$(0, -6)$	$\{ \}$	$\{1, 3\}$	$\{2, 4\}$	$2/2$
۱۱	B_{34}	$(0, -\frac{11}{13})$	$(0, -\frac{22}{13})$	$(5, 0)$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3, 4\}$	$183/33$
۱۲	B_{34}	$(0, -\frac{11}{13})$	$(0, \frac{22}{13})$	$(5, 0)$	$\{2\}$	$\{1\}$	$\{3, 4\}$	$183/33$

در نتیجه با مسئله بهینه‌سازی خطی صحیح زیر روبرو می‌شویم:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{j=1}^4 (q_j^+ + q_j^-) + M \sum_{i=1}^4 y_i^B + M \sum_{i=1}^8 y_i^L + M \sum_{i=1}^{12} y_i^H \\
 & 1^{00} + q_1^+ - q_1^- + 1 + q_3^+ - q_3^- + 1 + q_4^+ - q_4^- \geq 1^{00} + q_1^+ - q_1^- - My_1^B \\
 & 1^{00} + q_1^+ - q_1^- + 1^{00} + q_3^+ - q_3^- + 1 + q_4^+ - q_4^- + 1 + q_3^+ - q_3^- \geq -My_1^B \\
 & F_1(C^*) \leq (1^{00} + q_1^+ - q_1^-) \left(\frac{11}{6} \right) + My_1^B \\
 & 1 + q_3^+ - q_3^- + 1^{00} + q_1^+ - q_1^- + 1 + q_4^+ - q_4^- \geq 1^{00} + q_1^+ - q_1^- - My_1^B \\
 & 1^{00} + q_1^+ - q_1^- + 1^{00} + q_3^+ - q_3^- + 1 + q_4^+ - q_4^- + 1 + q_3^+ - q_3^- \geq -My_1^B \\
 & F_1(C^*) \leq (1^{00} + q_1^+ - q_1^-) \left(\frac{11}{6} \right) + My_1^B \\
 & 1^{00} + q_1^+ - q_1^- + 1^{00} + q_3^+ - q_3^- + 1 + q_4^+ - q_4^- \geq 1 + q_3^+ - q_3^- - My_1^B \\
 & 1^{00} + q_1^+ - q_1^- + 1^{00} + q_3^+ - q_3^- + 1 + q_4^+ - q_4^- + 1 + q_3^+ - q_3^- \geq My_1^B \\
 & F_1(C^*) \leq (1 + q_3^+ - q_3^-) (2/3) + My_1^B \\
 & 1 + q_3^+ - q_3^- + 1^{00} + q_1^+ - q_1^- + 1^{00} + q_1^+ - q_1^- \geq 1 + q_3^+ - q_3^- - My_1^B \\
 & 1^{00} + q_1^+ - q_1^- + 1^{00} + q_3^+ - q_3^- + 1 + q_4^+ - q_4^- + 1 + q_3^+ - q_3^- \geq -My_1^B \\
 & F_1(C^*) \leq (1^{00} + q_1^+ - q_1^-) (2/3) + My_1^B \\
 & 1^{00} + p_1 - q_1 + 1^{00} + p_2 - q_2 + 1 + p_3 - q_3 + 1 + p_4 - q_4 \geq -My_1^L \\
 & 1^{00} + p_1 - q_1 + 1^{00} + p_2 - q_2 \geq 1 + p_3 - q_3 + 1 + p_4 - q_4 - My_1^L \\
 & 1^{00} + p_1 - q_1 + 1^{00} + p_2 - q_2 + 1 + p_3 - q_3 + 1 + p_4 - q_4 \geq -My_1^L \\
 & 1^{00} + p_1 - q_1 + 1^{00} + p_2 - q_2 \geq 1 + p_3 - q_3 + 1 + p_4 - q_4 - My_1^L
 \end{aligned}$$

$$\mathfrak{l}^{\circ\circ} + p_{\mathfrak{r}} - q_{\mathfrak{r}} + \mathfrak{l} + p_{\mathfrak{s}} - q_{\mathfrak{s}} \geq \mathfrak{l}^{\circ\circ} + p_{\mathfrak{l}} - q_{\mathfrak{l}} + \mathfrak{l} + p_{\mathfrak{f}} - q_{\mathfrak{f}} - My_{\lambda}^H$$

$$100 + p_1 - q_1 + 100 + p_2 - q_2 + 1 + p_4 - q_4 + 1 + p_3 - q_3 > -My_9^H$$

$$100 + p_1 - q_1 + 1 + p_3 - q_3 > 100 + p_2 - q_2 + 1 + p_4 - q_4 - My_9^H$$

$$100 + p_1 - q_1 + 100 + p_2 - q_2 + 1 + p_4 - q_4 + 1 + p_3 - q_3 \geq -My_9^H$$

$$100 + p_1 - q_1 + 1 + p_3 - q_3 \geq 100 + p_2 - q_2 + 1 + p_4 - q_4 - My_9^H$$

$$100 + p_1 - q_1 + 1 + p_3 - q_3 + 1 + p_4 - q_4 \geq 100 + p_2 - q_2 - My_9^H$$

$$100 + p_2 - q_2 + 1 + p_3 - q_3 + 1 + p_4 - q_4 \geq 100 + p_1 - q_1 - My_9^H$$

$$100 + p_1 - q_1 + 1 + p_3 - q_3 + 1 + p_4 - q_4 \geq 100 + p_2 - q_2 - My_9^H$$

$$100 + p_2 - q_2 + 1 + p_3 - q_3 + 1 + p_4 - q_4 \geq 100 + p_1 - q_1 - My_9^H$$

$$F_1(C^*) = \left(\frac{11}{6}\right)(100 + q_2^+ - q_2^-)$$

$$F_1(C^*) \leq 2$$

$$y_i^B \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 4$$

$$y_i^L \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 8$$

$$y_i^H \in \{0, 1\} \quad i = 1, \dots, 12$$

$$0 \leq q_j^+ \leq 900 \quad j = 1, 2, \quad 0 \leq q_j^+ \leq 999 \quad j = 3, 4$$

$$0 \leq q_j^- \leq 99 \quad j = 1, 2, \quad 0 \leq q_j^+ \leq 0/5 \quad j = 3, 4.$$

جواب این مسئله بهینه‌سازی عبارت است از: $q_1^- = \frac{1088}{11}, q_2^- = \frac{1088}{11}$ با مقدار هزینه $z = \frac{2176}{11}$. اکنون هر یک از زیرمسئله‌ها را با مقادیر q_j^+ و q_j^- بدست آمده از مسئله فوق حل می‌کنیم، تا مقادیر جدید λ_i^{L*} و λ_i^{H*} بدست آید، برای این مقادیر جدید داریم

$$G^* = \min_{\substack{i=1, \dots, |L| \\ k=1, \dots, |H|}} (f_i(\lambda_i^{L*}), g_i(\lambda_i^{H*})) = 2.$$

در نتیجه مسئله بهینه‌سازی خطی نظیر این مقادیر جدید مشابه مسئله مرحله قبل خواهد بود و مقادیر q_j^+ و q_j^- تغییر نخواهد کرد پس حل مسئله خاتمه یافته و جواب بدست آمده در گام قبل جواب بهینه مسئله معکوس می‌باشد. یعنی: $\hat{w}_1 = \frac{12}{11}, \hat{w}_2 = \frac{12}{11}, \hat{w}_3 = 1$ و $\hat{w}_4 = 1$.

۲.۲ معکوس مسئله مکان‌یابی دایره کمترین مجموع با

شعاع ثابت

برای مدل معکوس مسئله (PC_r) که در فصل ۱ و رابطه (۴.۱) معرفی شد، فرض کنید دایره $C^*(x^*, r_0)$ داده شده است. در اینجا باید با کمترین هزینه ممکن وزن نقاط موجود را بگونه‌ای تغییر دهیم که به ازای تمام دایره‌های به مرکز x و شعاع r_0 رابطه $F_r^w(x^*) \leq F_r^w(x)$ برقرار

باشد. در این رابطه

$$F_r^w(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \hat{w}_j |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r_0|.$$

به دلیل وجود چنین قیدی در مدل معکوس، این مدل دارای تعداد نامتناهی قید خواهد بود، در ادامه سعی می‌شود با استفاده از قضایای مطرح شده در بخش ۳.۲.۱ برای مسئله (PC_r) مدل معکوس به مدلی با تعداد متناهی قید تبدیل شود. در حالت کلی، برای نقطه داده شده بعنوان مرکز بهینه یکی از سه وضعیت زیر را داریم:

۱. اگر $\mathbf{x}^*$ در قضیه ۶.۲.۱ صدق کند یعنی به ازای هر j داشته باشیم $d(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}_j) < r_0$ آنگاه مسئله معکوس فاقد جواب است.

۲. طبق قضیه ۳.۲.۱ اگر برای هر $j = 1, \dots, n$ آنگاه $\mathbf{x}^*$ یعنی جواب بهینه مسئله (PC_r) همان جواب مسئله تک وسیله‌ای خواهد بود. پس مدل معکوس بصورت زیر است.

$$\min \sum_{j=1}^n (c_j^+ q_j^+ + c_j^- q_j^-) \quad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \hat{w}_j x^* \leq \sum_{j=1}^n \hat{w}_j x_j \quad (2.2)$$

$$\sum_{j=1}^n \hat{w}_j y^* \leq \sum_{j=1}^n \hat{w}_j y_j \quad (3.2)$$

$$\sum_{j \in j_+(C^*)} \hat{w}_j > \sum_{j \in j_-(C^*)} \hat{w}_j \quad \text{if } J_0(C^*) = \emptyset. \quad (4.2)$$

$$0 \leq q_j^+ \leq u_j^+ \quad j = 1, \dots, n \quad (5.2)$$

$$0 \leq q_j^- \leq u_j^- \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.2)$$

در حقیقت مدل فوق، مدل معکوس مسئله تک وسیله‌ای است که رابطه (۴.۲) با توجه به قضیه ۵.۲.۱ به آن اضافه شده است. این مدل در [۱۵] بررسی شده است و برای آن الگوریتمی ارائه شده که در زمان $O(n \log n)$ قابل حل است.

۳. اگر برای برخی از j ها $d(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}_j) \geq r_0$ و برای برخی دیگر $d(\mathbf{x}^*, \mathbf{p}_j) < r_0$ ، کوچکترین زیرمربع شامل همه نقاط $\mathbf{p}_j$ که از طرفین به اندازه r_0 گسترش یافته است را بدست می‌آوریم، مربع مفروض را به ۴ زیرمربع و هریک از آنها را نیز به چهار زیرمربع دیگر تقسیم می‌کنیم این کار تا جایی ادامه پیدا می‌کند که طول زیرمربع‌های جدید حداکثر برابر ϵ شود.

لیست L شامل اندیس تمام این زیرمربع‌هاست و برای هر زیرمربع Q_h ، مقدار s_h را می‌یابیم. اگر $\mathbf{x}^* \in Q_{h^*}$ باید $F_r^w(\mathbf{x}^*) \leq F_r^w(s_{h^*})$ و طبق قضیه ۵.۲.۱ اگر $J_0(C^*) = \emptyset$

آنگاه باید

$$\sum_{j \in j_+(C^*)} \hat{w}_j > \sum_{j \in j_-(C^*)} \hat{w}_j$$

مقدار تابع هدف مسئله (PC_r) به ازای نقطه مرکزی بقیه زیرمربع‌ها دو حالت دارد. که عبارتند از:

$$\text{حالت اول: } F_r^w(\mathbf{x}^*) \leq F_r^w(\mathbf{s}_h^*)$$

$$\text{حالت دوم: } F_r^w(\mathbf{x}^*) \geq F_r^w(\mathbf{s}_h^*)$$

در حالت اول که $\mathbf{x}^*$ جواب بهینه مسئله (PC_r) است. اما در حالت دوم برای اینکه $\mathbf{x}^*$ جواب بهینه مسئله (PC_r) باشد باید یکی از وضعیت‌های زیر برای هر Q_h که در نامساوی $F_r^w(\mathbf{s}_h) < F_r^w(\mathbf{x}^*)$ صدق می‌کند، رخ دهد.

الف) ۴.۲.۱ برای Q_h برقرار نیست یعنی $J_o(C_h) \cup J_-(C_h) = \emptyset$.

ب) ۶.۲.۱ برای Q_h برقرار است یعنی $d(\mathbf{s}_h, \mathbf{p}_j) < r_o$.

پ) ۵.۲.۱ برای Q_h برقرار نیست یعنی $\sum_{j \in J_+(C_h)} \hat{w}_j \leq \sum_{j \in J_-(C_h)} \hat{w}_j$.

بررسی وضعیت‌های الف و ب، به راحتی و با محاسبه $d(\mathbf{s}_h, \mathbf{p}_j)$ ممکن است، اگر زیر مربعی در هیچ یک از این دو وضعیت صدق نکند به لیست L' اضافه می‌شود آن‌گاه برای هر زیرمربع از این لیست، قید نظیر در وضعیت پ را داریم.

برای اعمال دو حالت فوق متغیرهای باینری زیر را تعریف می‌کنیم.

$$y_1^h = \begin{cases} 0 & \text{شرط } F_r^w(\mathbf{x}^*) \leq F_r^w(\mathbf{s}_h^*) \text{ در زیر مربع } Q_h \text{ برقرار است} \\ 1 & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

$$y_2^h = \begin{cases} 0 & \text{شرط } F_r^w(\mathbf{x}^*) \geq F_r^w(\mathbf{s}_h^*) \text{ در زیر مربع } Q_h \text{ برقرار است} \\ 1 & \text{در غیراینصورت} \end{cases}$$

در نتیجه مدل معکوس بصورت زیر خواهد بود.

$$\min \sum_{j=1}^n (c_j^+ q_j^+ + c_j^- q_j^-) \quad (۷.۲)$$

$$F_r^w(\mathbf{x}^*) \leq F_r^w(\mathbf{s}_h^*) \quad (۸.۲)$$

$$F_r^w(\mathbf{x}^*) - F_r^w(\mathbf{s}_h) \leq M y_1^h \quad h \in L \quad (۹.۲)$$

$$F_r^w(\mathbf{s}_h) - F_r^w(\mathbf{x}^*) \leq M y_1^h \quad h \in L \quad (۱۰.۲)$$

$$y_1^h + y_1^h = 1 \quad h \in L \quad (۱۱.۲)$$

$$\sum_{j \in J_+(C_h)} \hat{w}_j - \sum_{j \in J_-(C_h)} \hat{w}_j \leq M y_1^h \quad h \in L' \quad (۱۲.۲)$$

$$\sum_{j \in J_+(C^*)} \hat{w}_j > \sum_{j \in J_-(C^*)} \hat{w}_j \quad \text{if } J_o(C^*) = \emptyset \quad (۱۳.۲)$$

$$0 \leq q_j^+ \leq u_j^+ \quad j = 1, \dots, n \quad (۱۴.۲)$$

$$0 \leq q_j^- \leq u_j^- \quad j = 1, \dots, n. \quad (۱۵.۲)$$

فصل ۳

معکوس مسائل مکان‌یابی دایره با هدف کمینه-بیشینه

در این فصل معکوس مسائل مکان‌یابی دایره با هدف کمینه-بیشینه را مدل‌سازی می‌کنیم، ما این مدل‌ها را با تغییر وزن نقاط و یا تغییر مختصات نقاط داده شده بدست می‌آوریم.

۱.۳ معکوس دایره کمینه-بیشینه بدون وزن با شعاع ثابت و تغییر مختصات

فرض کنید n نقطه $\mathbf{p}_i = (x_{i1}, x_{i2})$ ، $i = 1, \dots, n$ ، در صفحه و نیز $r_0 > 0$ موجود باشند، می‌خواهیم با تغییر مختصات نقاط داده شده با کمترین هزینه ممکن، دایره $C^*(\mathbf{p}^*, r_0)$ جواب بهینه مسئله مکان‌یابی دایره با هدف کمینه-بیشینه (۶.۱) معرفی شده در بخش ۴.۲.۱ از فصل ۱ شود.

فرض کنید برای هر واحد افزایش مولفه x_{ij} نیاز به هزینه c_{ij}^+ و هر بار کاهش مولفه x_{ij} نیاز به هزینه c_{ij}^- باشد. همچنین فرض کنید مقداری که مولفه x_{ij} کاهش می‌یابد برابر q_{ij}^- و مقداری که افزایش می‌یابد برابر q_{ij}^+ باشد. بعلاوه q_{ij}^+ و q_{ij}^- باید در بازه‌های مشخصی باشند یعنی $0 \leq q_{ij}^- \leq u_{ij}^-$ و $0 \leq q_{ij}^+ \leq u_{ij}^+$.

قرار می‌دهیم: $\mathbf{q}_i^- = (q_{i1}^-, q_{i2}^-)^T$ ، $\mathbf{q}_i^+ = (q_{i1}^+, q_{i2}^+)^T$ ، $\mathbf{u}_i^- = (u_{i1}^-, u_{i2}^-)^T$ ، $\mathbf{u}_i^+ = (u_{i1}^+, u_{i2}^+)^T$

نقاط را می‌توان بصورت زیر نوشت:

در نتیجه مدل معکوس مسئله (۶.۱) با تغییر مختصات $\mathbf{c}_i^- = (c_{i1}^-, c_{i2}^-)^T$ و $\mathbf{c}_i^+ = (c_{i1}^+, c_{i2}^+)^T$

$$\min \sum_{i=1}^n (\mathbf{c}_i^{+T} \mathbf{q}_i^+ + \mathbf{c}_i^{-T} \mathbf{q}_i^-) \quad (1.3)$$

$$\max_i \{ |d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i^*) - r_0| \} \leq \max_i \{ |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i^*) - r_0| \} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.3)$$

$$\mathbf{p}_i^* = \mathbf{p}_i + \mathbf{q}_i^+ - \mathbf{q}_i^- \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^+ \leq \mathbf{u}_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^- \leq \mathbf{u}_i^- \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.3)$$

همانطور که مشاهده می‌شود مدل فوق دارای تعداد نامتناهی قید است. در ادامه با توجه به مطالب ارائه شده در بخش ۴.۲.۱ سعی می‌شود این مدل به مدلی با تعداد متناهی قید تبدیل شود.

طبق الگوریتم ارائه شده توسط بریمبرگ و همکارانش در [۱۲] که در بخش ۴.۲.۱ ارائه شد، جواب مسئله مکان‌یابی دایره کمینه- بیشینه یا همان جواب مسئله تک وسیله‌ای با هدف کمینه- بیشینه است و یا نقطه‌ای مانند $\mathbf{p}^*$ است با حداقل سه نقطه گوشه‌ای. در این حالت مقدار تابع هدف به ازای $\mathbf{p}^*$ از هر $\mathbf{x}$ دیگری که حداقل سه نقطه گوشه‌ای دارد بهتر است. اگر $\mathbf{p}^*$ همان جواب مسئله تک وسیله‌ای باشد، با معکوس مسئله تک وسیله‌ای کمینه- بیشینه به صورت زیر روبرو می‌شویم:

$$(P_0) \quad \min \sum_{i=1}^n (\mathbf{c}_i^{+T} \mathbf{q}_i^+ + \mathbf{c}_i^{-T} \mathbf{q}_i^-) \quad (6.3)$$

$$\max_i \{ d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i^*) \} \leq \max_i \{ d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i^*) \} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (7.3)$$

$$\mathbf{p}_i^* = \mathbf{p}_i + \mathbf{q}_i^+ - \mathbf{q}_i^- \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.3)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^+ \leq \mathbf{u}_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (9.3)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^- \leq \mathbf{u}_i^- \quad i = 1, \dots, n. \quad (10.3)$$

همانطور که مشاهده می‌شود مسئله فوق دارای تعداد نامتناهی قید است اما از آنجایی که جواب بهینه مسئله وبر با هدف کمینه- بیشینه دارای حداقل دو نقطه گوشه‌ای است که بیش‌ترین فاصله را تا نقطه بهینه دارند، کافی است تمام دوتایی‌های $(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k)$ بررسی شود. اگر دوتایی $(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k)$ بیش‌ترین فاصله را تا نقطه بهینه داشته باشد نقاط کاندید برای جواب مسئله وبر با هدف کمینه- بیشینه که آن را $\mathbf{x}_{jk}$ نامگذاری کرده‌ایم، در روابط زیر صدق خواهد کرد:

$$d(\mathbf{x}_{jk}, \mathbf{p}_j) = d(\mathbf{x}_{jk}, \mathbf{p}_k) \quad (11.3)$$

$$\max_{i=1, \dots, n} \{ d(\mathbf{x}_{jk}, \mathbf{p}_i) \} = d(\mathbf{x}_{jk}, \mathbf{p}_j). \quad (12.3)$$

توجه کنید p^* تنها می تواند برابر با یکی از x_{jk} ها باشد. برای این منظور متغیر دودویی y_{jk} را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$y_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{جواب بهینه است} \\ 0 & \text{جواب بهینه نیست} \end{cases}$$

و قیدهای زیر را به مسئله معکوس اضافه می کنیم

$$p^* = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n y_{jk} x_{jk}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n y_{jk} = 1$$

در نتیجه مسئله معکوس بصورت زیر اصلاح می شود:

$$(P_0) \quad \min \sum_{i=1}^n (c_i^{+T} q_i^+ + c_i^{-T} q_i^-) \quad (13.3)$$

$$d(x_{jk}, p_j^*) = d(x_{jk}, p_k^*) \quad \forall j < k = 1, \dots, n, \quad (14.3)$$

$$\max_{i=1, \dots, n} \{d(x_{jk}, p_i^*)\} = d(x_{jk}, p_j^*) \quad \forall j < k = 1, \dots, n, \quad (15.3)$$

$$\max_{i=1, \dots, n} \{d(p^*, p_i^*)\} \leq \max_i \{d(x_{jk}, p_i^*)\} \quad \forall j < k = 1, \dots, n, \quad (16.3)$$

$$p^* = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n y_{jk} x_{jk} \quad (17.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n y_{jk} = 1 \quad (18.3)$$

$$p_i^* = p_i + q_i^+ - q_i^- \quad i = 1, \dots, n, \quad (19.3)$$

$$0 \leq q_i^+ \leq u_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (20.3)$$

$$0 \leq q_i^- \leq u_i^- \quad i = 1, \dots, n, \quad (21.3)$$

$$y_{jk} \in \{0, 1\} \quad \forall j < k = 1, \dots, n. \quad (22.3)$$

اگر p^* جواب مسئله تک وسیله ای نباشد، پس تمام سه تایی های (p_j, p_k, p_l) را در نظر گرفته و مجموعه نقاط کاندید هر یک یعنی s_{jkl} را می یابیم. برای این منظور با چهار مسئله روبرو می شویم:

۱. سه نقطه همگی درون یا بیرون دایره قرار دارند، در نتیجه فاصله هر یک از این نقاط تا نقطه کاندید برای مرکز بهینه که ما آن را x_{jkl} نامگذاری کرده ایم، با هم برابر است. یعنی:

$$d(x_{jkl}^{(1)}, p_j) = d(x_{jkl}^{(1)}, p_k) = d(x_{jkl}^{(1)}, p_l) \quad (23.3)$$

این مسئله یا یک جواب دارد یا جواب ندارد، با تعریف متغیر باینری $y_{jkl}^{(1)}$ بصورت زیر

$$y_{jkl}^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{مسئله ۲۳.۳ جواب دارد} \\ 1 & \text{مسئله ۲۳.۳ جواب ندارد} \end{cases}$$

دو وضعیت فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_j) - d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_k)| \leq M y_{jkl}^{(1)} \quad (24.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_k) - d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_l)| \leq M y_{jkl}^{(1)} \quad (25.3)$$

که در آن M مقداری به اندازه کافی بزرگ است.

۲. نقاط $\mathbf{p}_j$ و $\mathbf{p}_k$ درون دایره و نقطه $\mathbf{p}_l$ بیرون دایره قرار دارند، این مسئله با توجه به اینکه $\min_{\mathbf{x} \in B_{jk}} \{d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_l) + d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_k)\}$ مساوی، بزرگتر یا کوچکتر از $2r_0$ باشد به ترتیب یک جواب دارد، یا دو جواب دارد و یا جواب ندارد. مشابه حالت فوق با تعریف متغیر باینری $y_{jkl}^{(2)}$ با مسئله زیر روبرو خواهیم شد:

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(2)}, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{x}_{jkl}^{(2)}, \mathbf{p}_k) - 2r_0| \leq M y_{jkl}^{(2)} \quad (26.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(2)}, \mathbf{p}_k) - d(\mathbf{x}_{jkl}^{(2)}, \mathbf{p}_l)| \leq M y_{jkl}^{(2)} \quad (27.3)$$

۳. نقاط $\mathbf{p}_j$ و $\mathbf{p}_l$ درون دایره و نقطه $\mathbf{p}_k$ بیرون دایره قرار دارند، مشابه حالت فوق می‌توان نوشت:

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(3)}, \mathbf{p}_j) + d(\mathbf{x}_{jkl}^{(3)}, \mathbf{p}_l) - 2r_0| \leq M y_{jkl}^{(3)} \quad (28.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(3)}, \mathbf{p}_k) - d(\mathbf{x}_{jkl}^{(3)}, \mathbf{p}_l)| \leq M y_{jkl}^{(3)} \quad (29.3)$$

۴. نقاط $\mathbf{p}_k$ و $\mathbf{p}_l$ درون دایره و نقطه $\mathbf{p}_j$ بیرون دایره قرار دارند، مشابه حالت فوق می‌توان نوشت:

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(4)}, \mathbf{p}_k) + d(\mathbf{x}_{jkl}^{(4)}, \mathbf{p}_l) - 2r_0| \leq M y_{jkl}^{(4)} \quad (30.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(4)}, \mathbf{p}_k) - d(\mathbf{x}_{jkl}^{(4)}, \mathbf{p}_j)| \leq M y_{jkl}^{(4)} \quad (31.3)$$

اگر $\mathbf{p}^*$ جواب مسئله m ام، $m = 1, \dots, 4$ ، حاصل از سه‌تایی $(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l)$ باشد، متغیر دودویی $t_{jkl}^{(m)}$ مقدار صفر و درغیراینصورت مقدار یک را اختیار می‌کند. بعلاوه $\mathbf{p}^*$ تنها می‌تواند برابر با یکی از $\mathbf{x}_{jkl}^{(m)}$ ها باشد در نتیجه داریم:

$$\mathbf{p}^* = \sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \sum_{m=1}^4 (1 - t_{jkl}^{(m)}) \mathbf{x}_{jkl}^{(m)} \quad (32.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n-2} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \sum_{m=1}^4 (1 - t_{jkl}^{(m)}) = 1 \quad (33.3)$$

در نتیجه مسئله معکوس بصورت زیر خواهد بود:

$$(P_1) \min_{\mathbf{q}_i^+, \mathbf{q}_i^-, y_{jkl}^{(m)}} \left\{ \sum_{i=1}^n (\mathbf{c}_i^{+T} \mathbf{q}_i^+ + \mathbf{c}_i^{-T} \mathbf{q}_i^-) + M \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \sum_{m=1}^f y_{jkl}^{(m)} \right\} \quad (34.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_j^*) - d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_k^*)| \leq My_{jkl}^{(1)} \quad \forall j < k < l, \quad (35.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_l^*) - d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_k^*)| \leq My_{jkl}^{(1)} \quad \forall j < k < l, \quad (36.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_j^*) + d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_k^*) - 2r_0| \leq My_{jkl}^{(1)} \quad \forall j < k < l, \quad (37.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_k^*) - d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_l^*)| \leq My_{jkl}^{(1)} \quad \forall j < k < l, \quad (38.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_j^*) + d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_l^*) - 2r_0| \leq My_{jkl}^{(1)} \quad \forall j < k < l, \quad (39.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_k^*) - d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_l^*)| \leq My_{jkl}^{(1)} \quad \forall j < k < l, \quad (40.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_k^*) + d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_l^*) - 2r_0| \leq My_{jkl}^{(1)} \quad \forall j < k < l, \quad (41.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_k^*) - d(\mathbf{x}_{jkl}^{(1)}, \mathbf{p}_j^*)| \leq My_{jkl}^{(1)} \quad \forall j < k < l, \quad (42.3)$$

$$\max_{i=1, \dots, n} \{|d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i^*) - r_0|\} \leq \max_{i=1, \dots, n} \{|d(\mathbf{x}_{jkl}^{(m)}, \mathbf{p}_i^*) - r_0|\} + M(y_{jkl}^{(m)} + t_{jkl}^{(m)}) \quad \forall j < k < l, \quad m = 1, \dots, f, \quad (43.3)$$

$$\left| \max_{i=1, \dots, n} \{|d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i^*) - r_0|\} - |d(\mathbf{x}_{jkl}^{(m)}, \mathbf{p}_j^*) - r_0| \right| \leq M(y_{jkl}^{(m)} + t_{jkl}^{(m)}) \quad \forall j < k < l, \quad m = 1, \dots, f, \quad (44.3)$$

$$\mathbf{p}^* = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \sum_{m=1}^f (1 - t_{jkl}^{(m)}) \mathbf{x}_{jkl}^{(m)} \quad (45.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n \sum_{m=1}^f (1 - t_{jkl}^{(m)}) = 1, \quad (46.3)$$

$$y_{jkl}^{(m)} \leq t_{jkl}^{(m)} \quad \forall j < k < l, \quad m = 1, \dots, f, \quad (47.3)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^+ \leq \mathbf{u}_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (48.3)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^- \leq \mathbf{u}_i^- \quad i = 1, \dots, n, \quad (49.3)$$

$$t_{jkl}^{(m)}, y_{jkl}^{(m)} \in \{0, 1\} \quad \forall j < k < l, \quad m = 1, \dots, f. \quad (50.3)$$

نهایتاً جواب مسئله معکوس، جوابی از مسائل (P_0) یا (P_1) خواهد بود که بهترین مقدار تابع هدف را داشته باشد.

۲.۳ معکوس دایره کمینه – بیشینه وزن دار با شعاع ثابت

و تغییر وزن

فرض کنید n نقطه $\mathbf{p}_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, \dots, n$ ، در صفحه با وزن نظیر $w_i > 0$ و نیز $0 < r_0$ موجود باشند، می‌خواهیم با تغییر وزن نقاط داده شده با کمترین هزینه ممکن، دایره $C^*(\mathbf{p}^*, r_0)$ جواب بهینه مسئله (۸.۱) شود که در بخش ۵.۲.۱ از فصل ۱ معرفی شد.

با همان مفروضات بخش ۱.۲ مدل معکوس مسئله (۸.۱) با تغییر وزن نقاط را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\min_{\mathbf{w}^+, \mathbf{w}^-} \sum_{i=1}^n (c_i^+ w_i^+ + c_i^- w_i^-) \quad (1.3)$$

$$\max_i \{w_i^* | d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i) - r_0 | \} \leq \max_i \{w_i^* | d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) - r_0 | \} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.3)$$

$$w_i^* = w_i + w_i^+ - w_i^- \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

$$0 \leq w_i^+ \leq u_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

$$0 \leq w_i^- \leq u_i^- \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.3)$$

همانطور که مشاهده می‌شود مدل فوق دارای تعداد نامتناهی قید است. در ادامه با توجه به مطالب ارائه شده در بخش ۵.۲.۱ از فصل ۱ سعی می‌شود این مدل به مدلی با تعداد متناهی قید تبدیل شود.

طبق مطالب ارائه شده در بخش ۵.۲.۱ جواب بهینه مسئله (۸.۱) یا بصورت $\mathbf{x}_{ij}$ است که در قضیه ۱۰.۲.۱ صدق می‌کند و یا نقطه‌ای مانند $\mathbf{p}^*$ است با حداقل سه نقطه گوشه‌ای، ضمناً مقدار تابع هدف به ازای $\mathbf{p}^*$ از هر $\mathbf{x}$ دیگری که حداقل سه نقطه گوشه‌ای دارد، بهتر است. در حالت اول، مجموعه $L = \{(i, j) | i < j, d_{ij} > 2r_0\}$ را تشکیل داده و برای هر $(i, j) \in L$ ، $\mathbf{x}_{ij}$ را بگونه‌ای که مطرح شد می‌یابیم، روابط ۷.۳ و ۸.۳ در مدل زیر $\mathbf{x}_{ij}$ ها را بدست می‌آورند. $\mathbf{p}^*$ می‌تواند یکی از این $\mathbf{x}_{ij}$ ها باشد با تعریف متغیرهای باینری y_{ij} و قیدهای زیر این امر ممکن می‌شود

$$\mathbf{p}^* = \sum_{(i,j) \in L} y_{ij} \mathbf{x}_{ij}$$

$$\sum_{(i,j) \in L} y_{ij} = 1$$

از طرف دیگر قیدهای ۹.۳ و ۱۰.۳ در مدل زیر از قضیه ۱۰.۲.۱ بدست آمده‌اند. در نتیجه مسئله

معکوس بصورت زیر خواهد بود:

$$(P_0) \quad \min \sum_{i=1}^n (c_i^+ w_i^+ + c_i^- w_i^-) \quad (6.3)$$

$$g_{ij} = w_i^* (d(\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{p}_i) - r_0) \quad \forall (i, j) \in L, \quad (7.3)$$

$$g_{ij} = w_j^* (d(\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{p}_j) - r_0) \quad \forall (i, j) \in L, \quad (8.3)$$

$$\max_{(i,j) \in L} \{w_i^* (d(\mathbf{x}_{ij}, \mathbf{p}_i) - r_0)\} = \sum_{(i,j) \in L} y_{ij} g_{ij} \quad (9.3)$$

$$\max_{i=1, \dots, n} \{w_i^* |d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i) - r_0|\} = \sum_{(i,j) \in L} y_{ij} g_{ij} \quad (10.3)$$

$$\mathbf{p}^* = \sum_{(i,j) \in L} y_{ij} \mathbf{x}_{ij} \quad (11.3)$$

$$\sum_{(i,j) \in L} y_{ij} = 1 \quad (12.3)$$

$$y_{ij} \in \{0, 1\} \quad (i, j) \in L \quad (13.3)$$

$$w_i^* = w_i + w_i^+ - w_i^- \quad i = 1, \dots, n, \quad (14.3)$$

$$0 \leq w_i^+ \leq u_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (15.3)$$

$$0 \leq w_i^- \leq u_i^- \quad i = 1, \dots, n. \quad (16.3)$$

اگر $\mathbf{p}^*$ بصورت $\mathbf{x}_{ij}$ ها نباشد، تمام سه‌تایی‌های $(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l)$ را در نظر گرفته و مجموعه نقاط کاندید هر یک را با استفاده از حل مسئله ۱۰.۱ یافته و آن را $\mathbf{x}_{ijk}$ می‌نامیم، $\mathbf{p}^*$ تنها می‌تواند برابر با یکی از این $\mathbf{x}_{jkl}$ ها باشد، در نتیجه با تعریف متغیر باینری y_{jkl} بصورت زیر (P_1) معکوس مسئله مکان‌یابی خواهد بود:

$$y_{jkl} = \begin{cases} 1 & \text{جواب بهینه است} \\ 0 & \text{جواب بهینه نیست} \end{cases}$$

$$(P_1) \min \sum_{i=1}^n (c_i^+ w_i^+ + c_i^- w_i^-) \quad (17.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \min K \\ K \geq w_j^{\circ} (r_{\circ} - d(\mathbf{x}_{jkl}, \mathbf{p}_j))^{\circ} \\ K \geq w_k^{\circ} (r_{\circ} - d(\mathbf{x}_{jkl}, \mathbf{p}_k))^{\circ} \\ K \geq w_l^{\circ} (r_{\circ} - d(\mathbf{x}_{jkl}, \mathbf{p}_l))^{\circ} \end{array} \right\} \quad \forall j < k < l \quad (18.3)$$

$$\left| \max_{i=1, \dots, n} \{w_i^* |d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i) - r_{\circ}| \} - w_j^* |d(\mathbf{x}_{jkl}, \mathbf{p}_j) - r_{\circ}| \right| \leq M y_{jkl} \quad \forall j < k < l, \quad (19.3)$$

$$\max_{i=1, \dots, n} \{w_i^* |d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i) - r_{\circ}| \} \leq \max_{i=1, \dots, n} \{w_i^* |d(\mathbf{x}_{jkl}, \mathbf{p}_i) - r_{\circ}| \} \quad \forall j < k < l, \quad (20.3)$$

$$\mathbf{p}^* = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n y_{jkl} \mathbf{x}_{jkl} \quad (21.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n y_{jkl} = 1, \quad (22.3)$$

$$y_{jkl} \in \{0, 1\} \quad \forall j < k < l, \quad (23.3)$$

$$w_i^* = w_i + w_i^+ - w_i^- \quad i = 1, \dots, n, \quad (24.3)$$

$$0 \leq w_i^+ \leq u_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (25.3)$$

$$0 \leq w_i^- \leq u_i^- \quad i = 1, \dots, n. \quad (26.3)$$

مدل فوق یک مدل برنامه‌ریزی دوسطحی است. نهایتاً جواب مسئله معکوس جوابی از مسائل (P_0) یا (P_1) خواهد بود که بهترین مقدار هدف را داشته باشد.

۳.۳ معکوس دایره کمینه- بیشینه بدون وزن با شعاع متغیر و تغییر مختصات

با همان مفروضات بخش ۱.۳ مدل معکوس مسئله (۱۱.۱) با تغییر مختصات نقاط را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\min \sum_{i=1}^n (\mathbf{c}_i^{+T} \mathbf{q}_i^+ + \mathbf{c}_i^{-T} \mathbf{q}_i^-) \quad (1.3)$$

$$\max_i \{ |d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i^*) - r^*| \} \leq \max_i \{ |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i^*) - r| \} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}^+ \quad (2.3)$$

$$\mathbf{p}_i^* = \mathbf{p}_i + \mathbf{q}_i^+ - \mathbf{q}_i^- \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^+ \leq \mathbf{u}_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^- \leq \mathbf{u}_i^- \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.3)$$

همانطور که مشاهده می‌شود مدل فوق دارای تعداد نامتناهی قید است. در ادامه با توجه به مطالب ارائه شده در بخش ۶.۲.۱ سعی می‌شود این مدل به مدلی با تعداد متناهی قید تبدیل شود.

طبق قضیه ۱۲.۲.۱ جواب مسئله ۱۱.۱ دایره‌ای مانند $C^* = (\mathbf{p}^*, r^*)$ است با حداقل چهار نقطه گوشه‌ای که مقدار تابع هدف به ازای C^* از مقدار آن به ازای هر دایره دیگری با حداقل چهار نقطه گوشه‌ای بهتر است. پس کافی است تمام چهارتایی‌های $(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l, \mathbf{p}_h)$ ، $j < k, l < h$ که در آن $j \neq l, k \neq h$ در نظر گرفته شود، بطوریکه $j, k \in J_-$ و $l, m \in J_+$ سپس با استفاده از روابط ۱۲.۱ و ۱۳.۱ دایره کاندید نظیر هر یک بصورت $C_{jklh} = (\mathbf{x}_{jklh}, r_{jklh})$ بدست آید، تنها می‌تواند برابر یکی از این دایره‌های کاندید باشد.

اگر روابطه ۱۲.۱ و ۱۳.۱ به ازای چهارتایی $(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l, \mathbf{p}_h)$ جواب داشته باشد متغیر دودویی y_{jklh} مقدار صفر و در غیراینصورت مقدار یک را اختیار می‌کند. ضمناً متغیر باینری t_{jklh} صفر خواهد بود اگر دایره C_{jklh} دایره بهینه باشد و در غیراینصورت برابر با یک می‌شود. به این ترتیب مدل معکوس بصورت زیر خواهد بود:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n (\mathbf{c}_i^{+T} \mathbf{q}_i^+ + \mathbf{c}_i^{-T} \mathbf{q}_i^-) + M \sum_{j=1, l=1}^{n-1} \sum_{\substack{k=j+1, \\ j \neq l, k \neq h}}^n y_{jklh} \right\} \quad (6.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_j^*) - d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_k^*)| \leq M y_{jklh} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (7.3)$$

$$|d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_l^*) - d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_h^*)| \leq M y_{jklh} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h \quad (8.3)$$

$$\left| r_{jklh} - \frac{d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_j^*) + d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_l^*)}{2} \right| \leq M y_{jklh} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (۹.۳)$$

$$\left| \max_{i=1, \dots, n} \{d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_i^*)\} - d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_l^*) \right| \leq M y_{jklh} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (۱۰.۳)$$

$$\left| \min_{i=1, \dots, n} \{d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_i^*)\} - d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_j^*) \right| \leq M y_{jklh} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (۱۱.۳)$$

$$\left| \max_{i=1, \dots, n} \{ |d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i^*) - r^*| \} - \max_{i=1, \dots, n} \{ |d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_i^*) - r_{jklh}| \} \right| \leq M(y_{jklh} + t_{jklh}) \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (۱۲.۳)$$

$$\mathbf{p}^* = \sum_{j=1, l=1}^{n-1} \sum_{\substack{k=j+1, \\ j \neq l, k \neq h}}^n (1 - t_{jklh}) \mathbf{x}_{jklh} \quad (۱۳.۳)$$

$$r^* = \sum_{j=1, l=1}^{n-1} \sum_{\substack{k=j+1, \\ j \neq l, k \neq h}}^n (1 - t_{jklh}) r_{jklh} \quad (۱۴.۳)$$

$$\sum_{j=1, l=1}^{n-1} \sum_{\substack{k=j+1, \\ j \neq l, k \neq h}}^n (1 - t_{jklh}) = 1 \quad (۱۵.۳)$$

$$y_{jklh} \leq t_{jklh} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (۱۶.۳)$$

$$t_{jklh}, y_{jklh} \in \{0, 1\} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (۱۷.۳)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^+ \leq \mathbf{u}_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (۱۸.۳)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^- \leq \mathbf{u}_i^- \quad i = 1, \dots, n. \quad (۱۹.۳)$$

۴.۳ معکوس دایره کمینه- بیشینه وزندار با شعاع متغیر و تغییر مختصات

معکوس مسئله ۱۱.۱ با همان مفروضات بخش ۱.۳ بصورت زیر خواهد بود:

$$\min \sum_{i=1}^n (\mathbf{c}_i^{+T} \mathbf{q}_i^+ + \mathbf{c}_i^{-T} \mathbf{q}_i^-) \quad (۱.۳)$$

$$\max_i \{w_i |d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i^*) - r^*|\} \leq \max_i \{w_i |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i^*) - r|\} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}^+ \quad (۲.۳)$$

$$\mathbf{p}_i^* = \mathbf{p}_i + \mathbf{q}_i^+ - \mathbf{q}_i^- \quad i = 1, \dots, n, \quad (۳.۳)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^+ \leq \mathbf{u}_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (۴.۳)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^- \leq \mathbf{u}_i^- \quad i = 1, \dots, n. \quad (۵.۳)$$

همانطور که مشاهده می‌شود مدل فوق دارای تعداد نامتناهی قید است. در ادامه با توجه به مطالب ارائه شده در بخش ۷.۲.۱ سعی می‌شود این مدل به مدلی با تعداد متناهی قید تبدیل شود.

طبق قضیه ۱۲.۲.۱ جواب مسئله ۱۱.۱ دایره‌ای مانند $C^* = (\mathbf{p}^*, r^*)$ است با حداقل چهار نقطه گوشه‌ای که مقدار تابع هدف به ازای C^* از مقدار آن به ازای هر دایره‌ی دیگری با

حداقل چهار نقطه گوشه‌ای بهتر است. پس کافی است تمام چهارتایی‌های $(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_k, \mathbf{p}_l, \mathbf{p}_h)$ ، که در آن $j < k, l < h$ ، $j, k \in J_-$ و $l, m \in J_+$ بطوریکه $j \neq l, k \neq h$ در نظر گرفته شود، با استفاده از مسئله بهینه‌سازی ۱۰.۱ دایره کاندید نظیر هر یک بصورت $C_{jklh} = (\mathbf{x}_{jklh}, r_{jklh})$ بدست می‌آید، C^* تنها می‌تواند برابر یکی از این دایره‌های کاندید باشد. اگر دایره C_{jklh} دایره بهینه باشد، y_{jklh} مقدار یک و در غیراینصورت مقدار صفر را اختیار می‌کند. به این ترتیب مدل معکوس بصورت زیر خواهد بود:

$$\min \sum_{i=1}^n (\mathbf{c}_i^{+T} \mathbf{q}_i^+ + \mathbf{c}_i^{-T} \mathbf{q}_i^-) \quad (۶.۳)$$

$$\left. \begin{aligned} \min \quad & K \\ & K \geq w_j^{\gamma} (r_{jklh} - d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_j^*))^{\gamma} \\ & K \geq w_k^{\gamma} (r_{jklh} - d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_k^*))^{\gamma} \\ & K \geq w_l^{\gamma} (r_{jklh} - d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_l^*))^{\gamma} \\ & K \geq w_h^{\gamma} (r_{jklh} - d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_h^*))^{\gamma} \end{aligned} \right\} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (۷.۳)$$

$$\left| \max_{i=1, \dots, n} \{w_i |d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_i^*) - r_{jklh}|\} - w_j |d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_j^*)| \right| \leq M y_{jklh} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (۸.۳)$$

$$\left| \max_{i=1, \dots, n} \{w_i |d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i^*) - r^*|\} - \max_{i=1, \dots, n} \{w_i |d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_i^*) - r_{jklh}|\} \right| \leq M y_{jklh} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (۹.۳)$$

$$\mathbf{p}^* = \sum_{j=1, l=1}^{n-1} \sum_{\substack{k=j+1, h=l+1 \\ j \neq l, k \neq h}}^n y_{jklh} \mathbf{x}_{jklh} \quad (۱۰.۳)$$

$$r^* = \sum_{j=1, l=1}^{n-1} \sum_{\substack{k=j+1, h=l+1 \\ j \neq l, k \neq h}}^n y_{jklh} r_{jklh} \quad (۱۱.۳)$$

$$\sum_{j=1, l=1}^{n-1} \sum_{\substack{k=j+1, h=l+1 \\ j \neq l, k \neq h}}^n y_{jklh} = 1 \quad (۱۲.۳)$$

$$y_{jklh} \in \{0, 1\} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (۱۳.۳)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^+ \leq \mathbf{u}_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (۱۴.۳)$$

$$0 \leq \mathbf{q}_i^- \leq \mathbf{u}_i^- \quad i = 1, \dots, n. \quad (۱۵.۳)$$

۵.۳ معکوس دایره کمینه- بیشینه وزندار با شعاع متغیر و تغییر وزن

معکوس مسئله ۱۱.۱ با همان مفروضات بخش ۲.۳ بصورت زیر خواهد بود:

$$\min \sum_{i=1}^n (c_i^+ w_i^+ + c_i^- w_i^-) \quad (1.3)$$

$$\max_i \{w_i^* | d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i) - r^* | \} \leq \max_i \{w_i^* | d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_i) - r | \} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}^+ \quad (2.3)$$

$$w_i^* = w_i + w_i^+ - w_i^- \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.3)$$

$$0 \leq w_i^+ \leq u_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

$$0 \leq w_i^- \leq u_i^- \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.3)$$

همانطور که مشاهده می‌شود مدل فوق دارای تعداد نامتناهی قید است. اما توجه به مطالب ارائه شده در بخش ۷.۲.۱ می‌توان این مدل را به مدلی با تعداد متناهی قید تبدیل کرد.

$$\min \sum_{i=1}^n (c_i^+ w_i^+ + c_i^- w_i^-) \quad (6.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \min K \\ K \geq w_j^* (r_{jklh} - d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_j))^2 \\ K \geq w_k^* (r_{jklh} - d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_k))^2 \\ K \geq w_l^* (r_{jklh} - d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_l))^2 \\ K \geq w_h^* (r_{jklh} - d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_h))^2 \end{array} \right\} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (7.3)$$

$$\left| \max_{i=1, \dots, n} \{w_i^* | d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i) - r^* | \} - w_j^* | d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_j) - r_{jklh} | \right| \leq M y_{jklh} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (8.3)$$

$$\max_{i=1, \dots, n} \{w_i^* | d(\mathbf{p}^*, \mathbf{p}_i) - r_{jklh} | \} \leq \max_{i=1, \dots, n} \{w_i^* | d(\mathbf{x}_{jklh}, \mathbf{p}_i) - r_{jklh} | \} \quad \forall j < k, l < h, j \neq l, k \neq h, \quad (9.3)$$

$$\mathbf{p}^* = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n y_{jklh} \mathbf{x}_{jklh} \quad (10.3)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^{n-1} \sum_{l=k+1}^n y_{jklh} = 1, \quad (11.3)$$

$$y_{jkl} \in \{0, 1\} \quad \forall j < k < l, \quad (12.3)$$

$$w_i^* = w_i + w_i^+ - w_i^- \quad i = 1, \dots, n, \quad (13.3)$$

$$0 \leq w_i^+ \leq u_i^+ \quad i = 1, \dots, n, \quad (14.3)$$

$$0 \leq w_i^- \leq u_i^- \quad i = 1, \dots, n. \quad (15.3)$$

فصل ۴

مسائل مکان‌یابی نیمه‌ناخوشایند

در سال‌های اخیر مسائل مکان‌یابی با وزن مثبت و منفی (مسائل نیمه‌ناخوشایند^۱ یا مسائل با جاذبه و دافعه^۲) مطرح شده است. زمانی با این مسائل روبرو می‌شویم که تسهیلات موجود برای برخی از مشتری‌ها ناخوشایند باشند. سرویس دهنده‌های ناخوشایند به سرویس دهنده‌هایی اطلاق می‌گردد که برخلاف سرویس دهنده‌های خوشایند باید تا حد ممکن از مشتریان دور باشند. نمونه چنین سرویس دهنده‌هایی شامل تاسیسات هسته‌ای، تجهیزات نظامی، تصفیه خانه‌ها، مکان‌های تخلیه زباله و غیره می‌باشند. این نوع مسائل مکان‌یابی اولین بار در سال ۱۹۷۵ توسط گولدمن [۳۳] معرفی شدند.

مسئله مکان‌یابی وبر با وزن مثبت و منفی برای اولین بار در سال ۱۹۸۵ توسط تلیر^۳ مطرح شد [۵۱]. در شبکه، اولین مدل مکان‌یابی با وزن مثبت و منفی مربوط به برکارد و کراپ است [۱۳]. پس از آن مسائل مکان‌یابی با وزن‌های مثبت و منفی توجه رو به رشدی را در ادبیات تحقیقی دریافت کرد ([۲۷]، [۲۶] و [۱۴] را ببینید). مسائل مکان‌یابی نیمه‌ناخوشایند پیوسته در مقالات [۵۴، ۴۷، ۲۵، ۸] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. گلپایگانی و همکاران نیز در [۳۴، ۳۵] مسئله مکان‌یابی خط نیمه‌ناخوشایند را بررسی کرده‌اند.

ما در این فصل به بررسی مسئله مکان‌یابی دایره نیمه‌ناخوشایند با هدف کمترین مجموع می‌پردازیم. ابتدا برخی از خواص این مسئله را بیان و اثبات می‌کنیم، سپس با استفاده از این

¹Semi-Obnoxious

²Problem with Attraction and Repulsion

³Tellier

خاصیت‌ها به حل مدل نیمه ناخوشایند می‌پردازیم.

۱.۴ مسئله مکان‌یابی دایره نیمه‌ناخوشایند با هدف کمترین مجموع

چارچوب کلی مسئله مکان‌یابی دایره نیمه ناخوشایند با هدف کمترین مجموع بصورت زیر است.

$$\min_{\mathbf{x}, r} F(\mathbf{x}, r) = \sum_{j=1}^n w_j |d(\mathbf{x}, \mathbf{p}_j) - r| \quad (1.4)$$

که در آن وزن‌های w_j می‌تواند مقادیر منفی نیز داشته باشند. در اینجا قضایایی را مطرح می‌کنیم که ویژگی‌های جواب این مسئله را بیان می‌کنند و در ادامه روشی برای حل این مسئله ارائه می‌دهیم.

فرض کنید $W = \sum_{j=1}^n w_j$ برابر با مجموع تمام وزن‌ها و $W_+(C) = \sum_{j \in J_+(C)} w_j$ ، $W_-(C) = \sum_{j \in J_-(C)} w_j$ و $W_0(C) = \sum_{j \in J_0(C)} w_j$ به ترتیب مجموع وزن نقاط درون، رو و بیرون دایره C باشند. واضح است در حالت ناخوشایند یعنی زمانی که تمام وزن‌ها منفی باشند مسئله نامتناهی خواهد بود یعنی شعاع دایره بهینه می‌تواند هر اندازه بزرگ باشد. به علاوه در حالت نیمه‌ناخوشایند با $W < 0$ مقدار تابع هدف با افزایش شعاع دایره، کاهش می‌یابد یعنی مسئله در این حالت نیز نامتناهی است. در نتیجه در اینجا فرض می‌شود $W > 0$.

لم ۱.۱.۴. اگر $C^*(\mathbf{X}^*, r^*)$ جواب مسئله مکان‌یابی دایره نیمه ناخوشایند با $W > 0$ باشد آنگاه $J_-(C^*) \cup J_0(C^*) \neq \emptyset$ و $J_+(C^*) \cup J_0(C^*) \neq \emptyset$.

برهان. فرض کنید $C(\mathbf{X}, r)$ دایره‌ای باشد که $J_+(C) \cup J_0(C) = \emptyset$ یا $J_-(C) \cup J_0(C) = \emptyset$ بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $J_+(C) \cup J_0(C) = \emptyset$ یعنی تمام نقاط موجود درون دایره C واقع شده‌اند. پس $W_-(C) = W > 0$. فرض کنید C' دایره‌ای باشد که با دایره‌ی C هم مرکز است اما شعاع آن به اندازه‌ی مقدار به حد کافی کوچک ϵ از r کمتر است بطوریکه همچنان $J_+(C') \cup J_0(C') = \emptyset$ ، آنگاه داریم

$$\begin{aligned} F(C') &= \sum_{\mathbf{p}_j \in J_-(C)} w_j (r - \epsilon - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X})) \\ &= \sum_{\mathbf{p}_j \in J_-(C)} w_j (r - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X})) - \epsilon \sum_{\mathbf{p}_j \in J_-(C)} w_j = F(C) - \epsilon W_-(C) \\ &< F(C). \end{aligned}$$

□

لذا C نمی‌تواند دایره بهینه باشد.

در حالت $W = 0$ نیز مشابه اثبات لم فوق می‌توان نشان داد جواب بهینه‌ای وجود دارد که $J_-(C^*) \cup J_0(C^*) \neq \emptyset$ و $J_+(C^*) \cup J_0(C^*) \neq \emptyset$.

لم ۲.۱.۴. برای مسئله مکان‌یابی دایره نیمه‌ناخوشایند با $W > 0$ جواب بهینه‌ای وجود دارد که حداقل از یک نقطه موجود می‌گذرد.

برهان. فرض کنید C دایره بهینه‌ای باشد که $J_0(C) = \emptyset$ ، از طرف دیگر طبق لم فوق داریم $J_0(C) = \emptyset$ و $W > 0$ در نتیجه $W_-(C) \neq 0$ و $W_+(C) \neq 0$. ابتدا نشان می‌دهیم $W_+(C) > W_-(C)$.

اگر $W_+(C) > W_-(C)$ می‌توان شعاع دایره C^* را به اندازه مقدار به حد کافی کوچک ϵ افزایش داد بطوریکه دایره C' از هیچ یک از نقاط موجود عبور نکند. لذا داریم:

$$\begin{aligned} F(C') &= \sum_{\mathbf{p}_j \in J_-(C)} w_j(r + \epsilon - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X})) + \sum_{\mathbf{p}_j \in J_+(C)} w_j(d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X}) - r - \epsilon) \\ &= \sum_{\mathbf{p}_j \in J_-(C)} w_j(r - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X})) + \sum_{\mathbf{p}_j \in J_+(C)} w_j(d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X}) - r) - \epsilon \left(\sum_{\mathbf{p}_j \in J_+(C)} w_j \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\mathbf{p}_j \in J_-(C)} w_j \right) \\ &= F(C) - \epsilon(W_+(C) - W_-(C)) \\ &< F(C). \end{aligned}$$

که با فرض بهینه بودن دایره C تناقض دارد.

اثبات در حالت $W_+(C) < W_-(C)$ مشابه بالاست. پس نتیجه می‌شود $W_+(C) = W_-(C)$ در این حالت با افزایش شعاع دایره یا کاهش آن به دایره C' می‌رسیم که حداقل از یک نقطه از نقاط موجود می‌گذرد، این کار مقدار تابع هدف را تغییر نخواهد داد و داریم

$$F(C') = F(C) - \epsilon(W_+(C) - W_-(C)) = F(C).$$

□

در نتیجه C' نیز دایره بهینه است.

در لم بعدی نشان می‌دهیم مجموع وزن تمام نقاطی که روی دایره بهینه واقع شده‌اند نا منفی است.

لم ۳.۱.۴. فرض کنید C^* جواب بهینه مسئله مکان‌یابی دایره نیمه‌ناخوشایند باشد و داشته باشیم $W_0(C^*) = \sum_{\mathbf{p}_j \in C^*} w_j$ آنگاه $W_0(C^*) \geq 0$.

برهان. فرض کنید C دایره‌ای باشد که $W_0(C) < 0$ ، بدون از دست دادن کلیت مطلب فرض کنید $W_-(C) > W_+(C)$ چون $W_0(C) < 0$ لذا $W_-(C) - W_+(C) - W_0(C) > 0$ فرض کنید C'

دایره‌ای باشد هم مرکز با دایره C که شعاع آن به اندازه مقدار به حد کافی کوچک ϵ از شعاع دایره C کوچک‌تر است بطوریکه C' شامل هیچ نقطه‌ای از نقاط موجود نمی‌باشد. آنگاه:

$$\begin{aligned} F(C') &= \sum_{\mathbf{p}_j \in J_+(C)} w_j(d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X}) - r + \epsilon) + \sum_{\mathbf{p}_j \in J_-(C)} w_j(r - \epsilon - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X})) + \\ &\quad \sum_{\mathbf{p}_j \in C} w_j(d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X}) - r + \epsilon) \\ &= \sum_{\mathbf{p}_j \in J_+(C)} w_j(d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X}) - r) + \sum_{\mathbf{p}_j \in J_-(C)} w_j(r - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X})) + \\ &\quad \sum_{\mathbf{p}_j \in C} w_j(d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X}) - r) - \epsilon(W_-(C) - W_+(C) - W_0(C)) \\ &= F(C) - \epsilon(W_-(C) - W_+(C) - W_0(C)) < F(C). \end{aligned}$$

□ لذا C نمی‌تواند دایره بهینه باشد.

لم ۴.۱.۴. فرض کنید C^* جواب بهینه مسئله مکان‌یابی دایره نیمه‌ناخوشایند با $W > 0$ باشد آنگاه $W_+(C^*) \leq \frac{W}{4}$ و $W_-(C^*) \leq \frac{W}{4}$.

برهان. فرض کنید C دایره‌ای باشد که $W_+(C) > \frac{W}{4}$ و نیز فرض کنید C' دایره‌ی هم مرکز با دایره C باشد که شعاع آن به اندازه مقدار کافی ϵ از شعاع دایره C بزرگتر باشد بطوریکه نقاط متعلق به $J_+(C)$ تغییر نکند. چون $W > 0$ لذا

$$W_+(C) > \frac{W}{4} = \frac{W_+(C) + W_-(C) + W_0(C)}{4} > 0,$$

و $W_+(C) > W_-(C) + W_0(C)$ در نتیجه $W_+(C) - W_-(C) - W_0(C) > 0$ آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} F(C') &= \sum_{\mathbf{p}_j \in J_+(C)} w_j(d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X}) - r - \epsilon) + \sum_{\mathbf{p}_j \in J_-(C)} w_j(r + \epsilon - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X})) + \\ &\quad \sum_{\mathbf{p}_j \in C} w_j(r + \epsilon - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X})) \\ &= \sum_{\mathbf{p}_j \in J_+(C)} w_j(d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X}) - r) + \sum_{\mathbf{p}_j \in J_-(C)} w_j(r - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X})) + \\ &\quad \sum_{\mathbf{p}_j \in C} w_j(r - d(\mathbf{p}_j, \mathbf{X})) - \epsilon(W_+(C) - W_-(C) - W_0(C)) \\ &= F(C) - \epsilon(W_+(C) - W_-(C) - W_0(C)) < F(C). \end{aligned}$$

□ لذا C نمی‌تواند دایره بهینه باشد. اثبات در حالت $W_+(C) < \frac{W}{4}$ نیز مشابه بالا است.

مسئله مکان‌یابی دایره نیمه‌ناخوشایند یک مسئله برنامه‌ریزی نامحدب است که نمی‌توان یک الگوریتم دقیق برای حل این مسئله ارائه کرد بنابراین در ادامه با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی فاخته^۱ و خواص مطرح شده برای مسئله مکان‌یابی دایره نیمه‌ناخوشایند، جوابهای نزدیک به جواب بهینه را می‌یابیم.

^۱Cuckoo Optimization Algorithm (COA)

۲.۴ حل مکان‌یابی دایره‌ی کمترین مجموع نیمه‌ناخوشایند

۱.۲.۴ الگوریتم بهینه‌سازی فاخته

الگوریتم بهینه‌سازی فاخته مانند سایر الگوریتم‌های تکاملی با یک جمعیت اولیه از فاخته‌ها شروع می‌شود. این فاخته‌های اولیه تخم‌هایی برای قرار دادن در لانه‌ی پرندگان میزبان دارند تعداد تخم‌هایی که به هر فاخته در تکرارهای مختلف الگوریتم اختصاص داده می‌شود توسط یک کران بالا و یک کران پایین محدود می‌شود. فاخته‌ها به دنبال مناسب‌ترین منطقه برای تخم‌گذاری هستند تا نرخ زنده ماندن تخم‌هایشان را بیشینه سازند. آنها در جایی با بیشترین فاصله از محل زندگی‌شان تخم‌گذاری می‌کنند، این فاصله بیشینه شعاع تخم‌گذاری ELR نامیده می‌شود.

در یک مسئله بهینه‌سازی هر تخم درون یک لانه جوابی از مسئله است و هر فاخته با تخم‌گذاری جوابهای جدیدی تولید می‌کند. در مسئله‌ای با حد بالا و پایین var_{hi} و var_{low} برای متغیرها، شعاع تخم‌گذاری هر فاخته با تعداد تخم‌های فعلی فاخته و تعداد کل تخم‌ها متناسب است. رابطه‌ای که اکثر محققان برای شعاع تخم‌گذاری استفاده می‌کنند بصورت زیر است.

$$ELR = \alpha \times \frac{\text{Number of current cuckoo's eggs}}{\text{Total number of eggs}} \times (var_{hi} - var_{low}),$$

که در آن α یک عدد صحیح برای کنترل بیشترین مقدار شعاع تخم‌گذاری است. پس از آنکه همه تخم‌های فاخته‌ها در لانه‌های پرنده‌های میزبان قرار گرفتند، بعضی از آنها که کمتر شبیه تخم‌های خود پرنده میزبان هستند توسط آنها شناسایی و بیرون انداخته می‌شود. بنابراین بعد از فرآیند تخم‌گذاری p درصد از تخم‌ها (معمولاً ۱۰) بامقادیر سود کمتر نابود می‌شوند. این تخم‌ها شانس برای رشد کردن ندارند. مابقی تخم‌ها در لانه‌های میزبان بزرگ می‌شوند، جوجه‌ها سر از تخم بیرون می‌آورند و پرندگان میزبان آنها را تغذیه می‌کنند. نکته جالب توجه دیگر در مورد تخم‌های فاخته این است که تنها یک تخم در هر لانه فرصت رشد می‌یابد. این به خاطر آن است که وقتی تخم فاخته می‌شکند و جوجه فاخته سر از تخم بیرون می‌آورد، تخم‌های پرنده میزبان را از لانه بیرون می‌اندازد. در صورتیکه تخم‌های پرنده میزبان زودتر از تخم فاخته بشکنند، جوجه فاخته بیشتر غذایی که پرنده میزبان به لانه می‌آورد را می‌خورد (چون جثه اش سه برابر بزرگتر است، باقی جوجه‌ها را کنار می‌زنند و بیشتر می‌خورد). بعد از چند روزی جوجه‌های خود پرنده میزبان می‌میرند و فقط جوجه‌های فاخته در لانه می‌ماند.

هنگامی که جوجه‌های فاخته رشد می‌کنند و بالغ می‌شوند، برای مدتی در منطقه و جامعه خودشان می‌مانند. اما وقتی به زمان تخم‌گذاری نزدیک می‌شود به محل زندگی جدید و بهتر مهاجرت می‌کنند.

در این محل‌ها تخم‌های فاخته شباهت بیشتری به تخم پرندگان میزبان دارند و غذای بیشتری برای جوجه‌های جدید وجود دارد.

پس از شکل گرفتن گروه‌های فاخته در مناطق مختلف، جامعه با بهترین مقدار سود به عنوان نقطه هدف برای سایر فاخته‌ها برگزیده می‌شود تا به آن مهاجرت کنند. وقتی فاخته‌های بالغ در تمام یک محیط زندگی می‌کنند، مشکل می‌توان تشخیص داد که کدام فاخته به کدام گروه تعلق دارد. برای حل این مشکل، گروه بندی فاخته‌ها به روش خوشه‌بندی k -means انجام می‌شود (در شبیه سازی مقدار ۳ تا ۵ برای k کافی به نظر می‌رسد). خوشه بندی k - میانگین با هدف پارتیشن‌بندی n مشاهدات به $k \leq n$ مجموعه $S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ است به طوری که مجموع مربع اختلاف از میانگین (یعنی واریانس) برای هر خوشه حداقل شود. تعریف دقیق ریاضی آن به این شکل است:

$$\arg \min_S \sum_{i=1}^k \sum_{\mathbf{x} \in S_i} \|\mathbf{x} - \mu_i\|^2 = \arg \min_S \sum_{i=1}^k |S_i| \text{Var}(S_i)$$

که در آن μ_i میانگین نقاط در S_i است.

اکنون که گروه‌های فاخته تشکیل شده‌اند، سود میانگین آنها محاسبه می‌شود. مقدار بیشینه این میانگین‌ها گروه هدف را تعیین می‌کند. در نتیجه بهترین محل زندگی برای این گروه، مقصد جدید فاخته‌های مهاجر است.

با توجه به این واقعیت که همیشه در جمعیت پرنده‌ها تعادل برقرار است، بنابراین عدد $N_{\max}$ تعداد بیشینه فاخته‌های زنده در محیط را کنترل و محدود می‌کند. این تعادل به علت محدودیت‌های غذایی، کشته شدن توسط شکارچیان و همچنین عدم توانایی و یافتن خانه مناسب برای تخم‌ها به وجود می‌آید. در مدلسازی پیشنهاد شده تنها تعداد $N_{\max}$ از فاخته‌ها که مقادیر سود بالاتری دارند، زنده بمانند و بقیه از بین بروند.

بعد از چند تکرار همه جمعیت فاخته‌ها به بهترین محل زندگی با بیشترین شباهت به تخم‌های پرندگان میزبان و نیز بیشترین منابع غذا مهاجرت می‌کنند. این محل زندگی بیشترین سود ممکن را ایجاد می‌کند. کمترین تلفات تخم در این محل زندگی رخ می‌دهد. همگرایی بیش از ۹۵ درصد فاخته‌ها به یک محل زندگی، پایان الگوریتم بهینه‌سازی فاخته خواهد بود. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به مقاله رجبیون [۴۸] در مورد الگوریتم بهینه‌سازی فاخته مراجعه کنید.

۲.۲.۴ الگوریتم فاخته برای مکان‌یابی دایره‌ی کمترین مجموع نیمه‌ناخوشایند

در این بخش الگوریتم COA را برای حل مسئله مکان‌یابی دایره نیمه ناخوشایند بررسی می‌کنیم. در این الگوریتم هر دایره $C_i((x, y), r)$ یک فاخته را نشان می‌دهد که محل اقامت آن نقطه (x, y, r) است. در گام اول n دایره بصورت تصادفی تولید می‌شود، بطوریکه هر دایره حداقل از دو نقطه از نقاط موجود می‌گذرد و در لم ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴ نیز صدق می‌کند. پس از آن به هر

فاخته مادر تعدادی تخم بطور تصادفی در بازه‌ای که از پیش تعیین شده است اختصاص داده می‌شود و شعاع تخم‌گذاری محاسبه می‌گردد. از آنجایی که در این مسئله کران بالا وجود ندارد محدوده تخم‌گذاری با کاهش یا افزایش شعاع جواب‌های بدست آمده کنترل می‌شود. در نتیجه ELR از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$ELR = \alpha \times \frac{\text{Number of current cuckoo's eggs}}{\text{Total number of eggs}}$$

پس از آن محل دقیق تخم‌ها با توجه به شعاع تخم‌گذاری مربوط به هر فاخته تعیین می‌شود. اکنون باید بررسی شود که آیا موقعیت تخم‌ها (دایره‌های جدید) در لم ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴ صدق می‌کند یا خیر؟ اگر هر یک از این لم‌ها برقرار نباشد شعاع دایره جدید افزایش یا کاهش داده می‌شود تا زمانی که لم‌ها برقرار شوند.

پس از آن در صورت یکسان بودن موقعیت دو تخم با هم، یکی از آن‌ها حذف می‌شود و جمعیت فاخته‌ها با حذف فاخته‌هایی که سود کمتری دارند با جمعیت ماکزیمم داده شده مطابقت می‌یابد. اکنون اگر جمعیت فاخته‌ها به شدت به هم نزدیک باشد الگوریتم خاتمه می‌یابد در غیراینصورت خوشه‌بندی انجام می‌شود. پس از آن، خوشه‌ای که شامل بهترین سود است در نظر گرفته می‌شود فاخته‌ای که بهترین سود را دارد (فاخته هدف)، مقصد مهاجرت بقیه فاخته‌ها در نظر گرفته می‌شود. پس از مهاجرت باید برقراری لم ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴ بررسی شود. سپس به هر فاخته بالغ چند تخم اختصاص داده شده و الگوریتم دوباره تکرار می‌شود.

مراحل اصلی این الگوریتم بصورت زیر است:

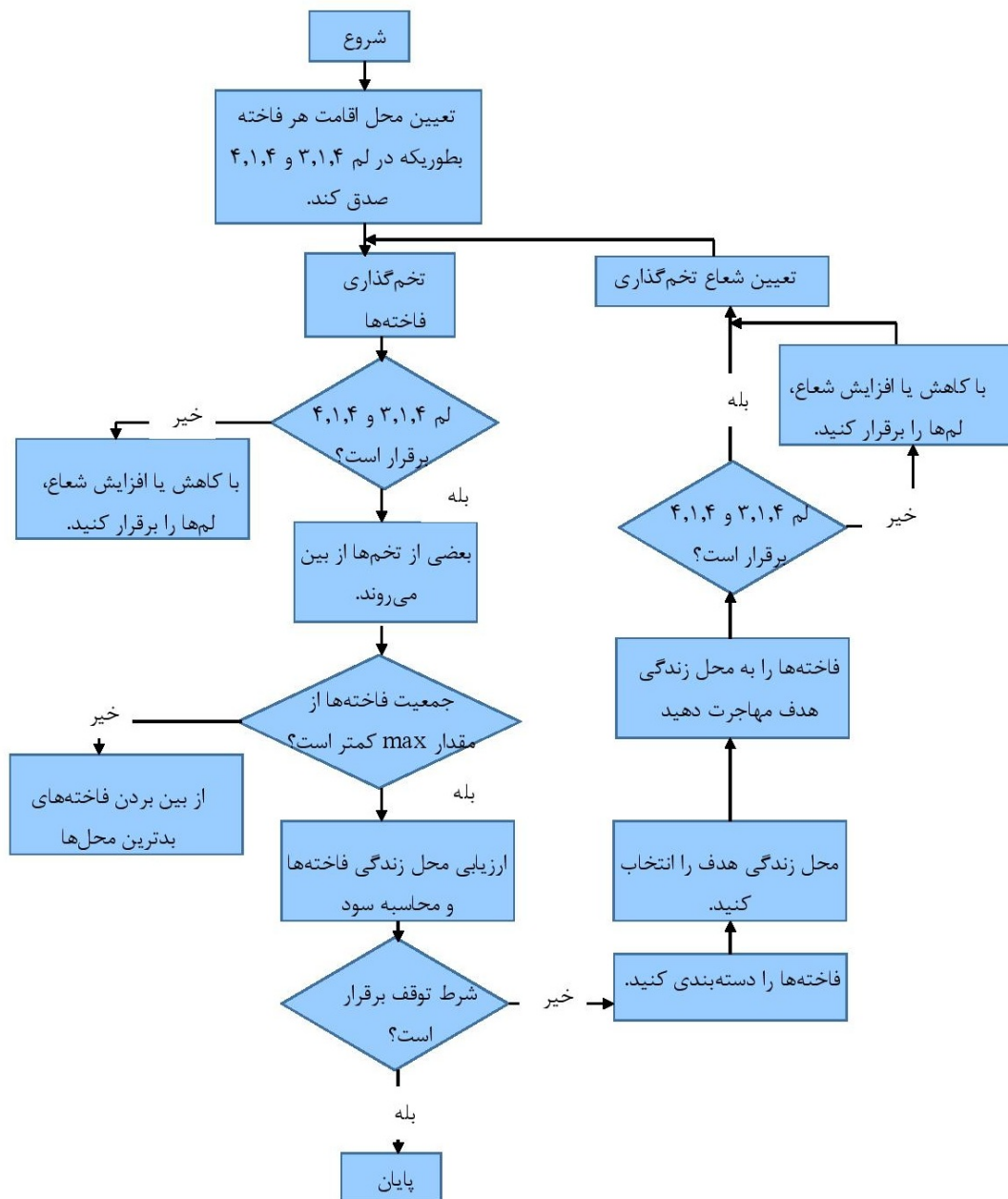
۱. محل اقامت هر فاخته را با دایره‌ای که حداقل از دو نقطه از نقاط موجود می‌گذرد و در لم ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴ نیز صدق می‌کند، تعیین کنید.
۲. به هر فاخته تعدادی تخم اختصاص دهید.
۳. ELR را برای هر فاخته مشخص کنید.
۴. به فاخته‌ها اجازه دهید در ELR مربوط به خود تخم‌گذاری کنند. اگر موقعیت تخم‌ها (دایره‌های جدید) در لم ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴ صدق نمی‌کند شعاع دایره جدید را افزایش یا کاهش دهید تا لم‌ها برقرار شوند.
۵. تخم‌هایی که توسط پرندگان میزبان شناسایی می‌شوند را از بین ببرید.
۶. اجازه دهید جوجه‌ها به دنیا بیایند و رشد کنند.
۷. محل زندگی هر فاخته بالغ جدید را ارزیابی کنید.
۸. حداکثر تعداد فاخته‌ها در محیط را محدود کنید و آنهایی که در بدترین محل‌ها زندگی می‌کنند را از بین ببرید.
۹. فاخته‌ها را دسته‌بندی کنید و بهترین گروه را بیابید و محل زندگی هدف را برگزینید.
۱۰. به جمعیت جدید فاخته‌ها اجازه مهاجرت به محل زندگی هدف بدهید. سپس برقراری لم ۳.۱.۴ و ۴.۱.۴ را بررسی کنید.
۱۱. اگر شرط توقف برقرار است متوقف شوید در غیراینصورت به مرحله ۲ بروید.

فلوچارت الگوریتم COA برای حل مسائل مکان‌یابی دایره نیمه‌ناخوشایند با هدف کمترین مجموع در تصویر ۱.۴ آمده است.

۳.۴ مشاهدات عددی

در این بخش الگوریتم پیشنهادی بهینه‌سازی فاخته برای حل مسئله مکان‌یابی دایره نیمه‌ناخوشایند را بررسی می‌کنیم. این الگوریتم روی دو مجموعه از مسائل نمونه، آزمایش شده است. در مجموعه اول A، ۵۰ مسئله مکان‌یابی تولید کرده‌ایم، ۱۰ مسئله با تعداد ۱۰ مشتری، ۱۰ مسئله با تعداد ۲۰ مشتری و ... ۱۰ مسئله با تعداد ۵۰ مشتری بطوریکه مختصات نقاط موجود به طور تصادفی بین ۰ و ۱۰۰۰ انتخاب شدند و وزن‌ها نیز برای تمام نقاط برابر با ۱ در نظر گرفته شده است. در مجموعه دوم B مسائل نمونه از کتابخانه ORLIB استخراج شده‌اند.

شکل ۱.۴: فلوچارت الگوریتم COA برای حل مسائل مکان‌یابی دایره نیمه ناخوشایند با هدف کمترین مجموع



تمام مسائل مجموعه A توسط الگوریتم COA و روش ارائه شده توسط بریمبرگ و همکاران در [۱۲] برای حل مسائل مکان‌یابی دایره با وزن‌های مثبت (روش BJS) حل شد. این الگوریتم‌ها در MATLAB نوشته شده و هر مسئله ۱۰ بار اجرا شد و میانگین نتایج ثبت شده‌اند. تمام این مسائل بر روی رایانه شخصی با پردازنده Intel Core i5، رم ۴ گیگابایت و پردازنده ۳.۲ گیگاهرتز انجام شد. شرط توقف می‌تواند تعداد تکرارها، حداکثر تعداد تکرار بین دو بهبود یا حداکثر زمان اجرا باشد. ما در الگوریتم ارائه شده شرط توقف را ۱۰۰ مرتبه تکرار مراحل

جدول ۱۰۴: نتایج حاصل از اجرای مسائل مجموعه A با وزن‌های مثبت و تعداد ۱۰ مشتری

زمان اجرا بر حسب ثانیه		مقدار تابع هدف				# test
BJS	COA	BJS	COA	f_{max}	f_{best}	
۲/۵۵۲	۱/۵۹۶۸۳۴۹	۱۰۱۰/۵۷۰۹۴۶۱	۱۰۱۰/۳۹۰۹۹۷	۱۰۱۰/۵۴۱۸۴۵	۱۰۱۰/۲۶۹۳۶۳	۱
۲/۵۴۴	۸/۹۷۲۰۷۴۸	۹۹۵/۸۶۳۴۰۸۳	۹۹۵/۸۵۹۰۶۱۷	۹۹۵/۸۶۲۸۹۳۴	۹۹۵/۸۵۲۶۹۱۱	۲
۲/۵۲۰	۱۰/۰۲۲۸۴۵۲	۷۸۳/۱۷۸۶۵۱۸	۷۸۳/۱۷۰۱۷۶۸	۷۸۳/۱۷۸۴۲۹۸	۷۸۳/۱۵۱۵۰۸۸	۳
۲/۵۷۰	۱۱/۱۶۱۴۵۹۴۴	۱۰۹۷/۴۰۸۰۵۹	۱۰۹۷/۳۸۶۹۴۵	۱۰۹۷/۴۰۵۷۴۹	۱۰۹۷/۳۴۵۳۷۷	۴
۲/۵۵۸	۳/۶۴۸۹۵۳۵	۸۳۶/۷۳۶۷۳۸۵۱	۸۳۶/۷۱۱۷۵۳۸	۸۳۶/۷۳۱۹۵۷	۸۳۶/۶۷۸۲۲۵۷	۵
۲/۵۷۰	۳/۹۶۷۶۲۴	۷۷۷/۵۸۴۳۵۸۵۹	۷۷۷/۵۲۵۳۲۲۸	۷۷۷/۵۸۴۰۱۵۹	۷۷۷/۴۸۴۷۷۳۱	۶
۲/۵۶۰	۱۰/۵۸۹۳۱۹۵	۸۵۴/۶۰۹۷۲۷۹	۸۵۴/۶۰۷۴۷۶	۸۵۴/۶۰۹۵۱۲۹	۸۵۴/۶۰۴۷۳۸۷	۷
۲/۶۰۵	۱۴/۶۸۴۷۹۳۲	۸۶۳/۳۶۸۵۶۵۴	۸۶۳/۳۶۹۰۴۹۷	۸۶۳/۳۸۹۹۷۴۴	۸۶۳/۳۵۰۳۸۳۴	۸
۲/۵۵۲	۶/۶۶۳۸۱۴۶	۹۱۷/۳۳۱۹۸۴۸	۹۱۷/۳۲۰۴۱۰۷	۹۱۷/۳۳۱۹۷۹	۹۱۷/۳۰۰۶۶۹۱	۹
۲/۵۸۰	۲/۹۳۳۸۷۰۶	۱۰۶۸/۶۰۲۴۷۸۳	۱۰۶۸/۵۵۶۴۲۳	۱۰۶۸/۵۹۵۹۵۵	۱۰۶۸/۴۳۹۲۱۱	۱۰

و یا ۲۰ مرتبه تکرار پس از آخرین بهبود، در نظر گرفته‌ایم. نتایج حاصل از اجرای مسائل مجموعه A در جدول‌های ۱۰۴ تا ۵۰۴ آمده است. در هر یک از این جدول‌ها ستون f_{best} و f_{max} به ترتیب بهترین و بدترین جواب بدست آمده توسط الگوریتم COA را نشان می‌دهند. ستون‌های نظیر COA و BJS به ترتیب میانگین مقدار تابع هدف بوسیله COA و مقدار تابع هدف با روش بریمبرگ و همکارانش را نشان می‌دهد. دو ستون انتهایی جدول نیز متوسط زمان اجرا بر حسب ثانیه را در هر یک از این دو الگوریتم نشان می‌دهد.

مقایسه عملکرد دو الگوریتم از دیدگاه مقدار تابع هدف و نیز زمان اجرا با استفاده از Dolan-More به ترتیب در شکل ۲۰۴ و ۳۰۴ نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رفت COA بسیار سریعتر از روش BJS کار می‌کند همچنین COA جواب‌هایی با همان کیفیت جواب‌های روش BJS بدست آورد. بنابراین از آنجا که الگوریتم دقیقی برای حالت نیمه ناخوشایند وجود ندارد، الگوریتم معرفی شده می‌تواند برای حل این مسائل مفید باشد. مسائل مجموعه دوم از کتابخانه ORLIB گرفته شده است. از آنجا که نتوانستیم هیچ مسئله نمونه‌ای برای مکان‌یابی پیوسته بیابیم اولین ۱۰ مسئله نمونه برای مسائل p-میانه را در ORLIB در نظر گرفته‌ایم که برای مسئله مکان‌یابی دایره با وزن‌های مثبت و منفی اصلاح شده است. به این ترتیب که هر دو راس مجاور از شبکه را به عنوان مختصات یک نقطه در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال، اگر $e(۲,۸)$ یک یال از شبکه‌ای در یک مسئله نمونه باشد نقطه $(۲,۸)$ به عنوان یکی از مشتریان مسئله نیمه ناخوشایند در نظر گرفته می‌شود. وزن نقاط نیز به طور تصادفی از مجموعه $\{-۱, ۱\}$ انتخاب شده است بطوریکه مجموع وزن تمام نقاط مقداری مثبت است.

نتایج در جدول ۶۰۴ ارائه شده است. در این جدول ستون با عنوان n تعداد نقاط را نشان می‌دهد. ستون‌ها با عنوان f و L_i به ترتیب مقدار متوسط هدف و میانگین تعداد تکرارهایی که الگوریتم در آنها متوقف شده است را نشان می‌دهند. به عنوان مثال $L_i = ۴۰$ و

جدول ۲.۴: نتایج حاصل از اجرای مسائل مجموعه A با وزن‌های مثبت و تعداد ۲۰ مشتری

زمان اجرا برحسب ثانیه		مقدار تابع هدف				# test
BJS	COA	BJS	COA	f_{max}	f_{best}	
۱۸/۶۰۹	۲/۱۲۲۴۰۷	۲۲۶۸/۸۹۱۶۹۹	۲۲۶۸/۸۶۳۷۹۳	۲۲۶۸/۸۹۸۰۰۳	۲۲۶۸/۸۱۶۵۸۴	۱
۱۸/۴۶۸	۹/۳۵۸۲۳۰۶	۲۱۴۴/۶۷۵۱۳۶	۲۱۴۴/۶۴۷۱۵	۲۱۴۴/۶۵۴۵۶۷	۲۱۴۴/۶۳۶۱۹۸	۲
۱۸/۵۲۱	۶/۸۱۷۹۸۷۴	۱۹۷۹/۷۹۳۹۳۵۱	۱۹۷۹/۷۸۶۴۵۲	۱۹۷۹/۷۹۱۴۲۸	۱۹۷۹/۷۶۸۷۷۴	۳
۱۸/۶۲۱	۸/۱۲۶۳۰۵۹	۱۶۱۰/۶۵۲۳۹۴۷	۱۶۱۰/۶۳۹۶۸۶	۱۶۱۰/۶۵۱۷۲۶	۱۶۱۰/۶۱۱۰۲۵	۴
۱۸/۵۷۳	۴/۹۲۰۵۶۲۵	۲۲۶۵/۹۷۷۹۹۶	۲۲۶۵/۹۴۹۹۰۳	۲۲۶۵/۹۷۷۲۱۵	۲۲۶۵/۹۰۸۶۷	۵
۱۸/۵۶۴	۳/۹۲۲۳۲۳۸	۲۰۷۶/۸۶۷۳۷۷	۲۰۷۶/۷۹۹۴۹۱	۲۰۷۶/۸۶۷۲۰۴	۲۰۷۶/۶۹۳۸۹۷	۶
۱۸/۷۶۲	۴/۶۳۱۳۲۶۵	۱۶۵۴/۱۴۴۷۴۰۹	۱۶۵۴/۱۱۰۶۰۸	۱۶۵۴/۱۴۱۱۹	۱۶۵۴/۰۳۸۵۷۳	۷
۱۸/۴۴۵	۱۴/۸۸۲۷۲۷۵	۱۵۸۳/۵۸۷۳۷۴۵	۱۵۸۳/۵۸۴۵۱۶	۱۵۸۳/۶۰۷۰۸۳	۱۵۸۳/۵۶۷۴۲۱	۸
۱۸/۶۲۹	۸/۲۸۳۷۰۶۷	۱۸۴۱/۸۶۴۱۳۵۰	۱۸۴۱/۸۴۸۳۶۷	۱۸۴۱/۸۶۲۰۰۷	۱۸۴۱/۸۲۲۵۴۵	۹
۱۸/۵۳۵	۱۱/۷۱۳۵۳۴۷	۲۲۴۵/۲۹۲۷۷۷۹	۲۲۴۵/۲۹۰۸۰۹	۲۲۴۵/۲۹۲۷۲۷	۲۲۴۵/۲۸۵۹۰۵	۱۰

جدول ۳.۴: نتایج حاصل از اجرای مسائل مجموعه A با وزن‌های مثبت و تعداد ۳۰ مشتری

زمان اجرا برحسب ثانیه		مقدار تابع هدف				# test
BJS	COA	BJS	COA	f_{max}	f_{best}	
۶۰/۹۹۳	۹/۷۱۰۲۸۱۵	۳۴۵۳/۵۵۵۶۱۳۱	۳۴۵۳/۴۸۴۳۸۴	۳۴۵۳/۵۰۲۴۹۴	۳۴۵۳/۴۴۰۸۲	۱
۶۱/۷۳۳	۵/۰۴۸۵۵۲۹	۲۸۷۸/۲۹۶۹۷۱۷	۲۸۷۸/۲۷۸۸۰۱	۲۸۷۸/۲۹۶۹۱۵	۲۸۷۸/۲۳۰۱۵۷	۲
۶۱/۳۴۱	۱۸/۲۲۲۰۲۰۲	۳۲۶۴/۹۷۱۹۵۶۹	۳۲۶۴/۹۶۰۱۷۱	۳۲۶۴/۹۷۰۰۴۳	۳۲۶۴/۹۴۲۹۵۲	۳
۶۲/۰۵۲	۹/۱۹۶۱۵۸۸	۳۳۶۲/۹۴۵۹۶۳۷	۳۳۶۲/۹۳۴۶۲۷	۳۳۶۲/۹۴۵۸۶۳	۳۳۶۲/۹۲۱۸۰۵	۴
۶۱/۷۹۰	۲۷/۶۲۸۹۶۴۸	۲۴۰۷/۴۲۰۰۲۵۴	۲۴۰۷/۴۰۶۳۰۳	۲۴۰۷/۴۱۸۷۱۴	۲۴۰۷/۳۷۴۲	۵
۶۱/۶۰۶	۱۷/۱۲۸۸۸۷۷	۲۷۱۶/۷۲۷۰۶۳۸	۲۷۱۶/۷۲۰۷۲۲	۲۷۱۶/۷۲۹۲۹۲	۲۷۱۶/۷۰۷۷۴۵	۶
۶۱/۵۸۶	۸/۴۱۱۴۳۶۴	۲۸۵۲/۰۹۶۶۰۳۲	۲۸۵۲/۰۸۴۲۴۵	۲۸۵۲/۰۹۶۲۷۵	۲۸۵۲/۰۶۶۲۶۹	۷
۶۱/۴۵۴	۲۲/۳۶۷۲۲۸۲	۲۹۸۸/۲۷۴۱۷۹۰	۲۹۸۸/۲۷۱۶۶۳	۲۹۸۸/۲۷۳۵۵۷	۲۹۸۸/۲۶۷۹۱۴	۸
۶۱/۵۶۴	۴/۸۸۰۱۲۱۴	۳۳۱۹/۰۲۲۶۲۸۸	۳۳۱۸/۹۶۴۷۲۵	۳۳۱۹/۰۲۱۳۰۵	۳۳۱۸/۹۰۲۲۷۳	۹
۶۲/۲۴۹	۱۱/۰۵۸۲۴۴۷	۳۶۲۴/۰۶۲۰۹۷۶	۳۶۲۴/۰۵۷۰۶	۳۶۲۴/۰۶۱۶۵۴	۳۶۲۴/۰۵۰۶۹۱	۱۰

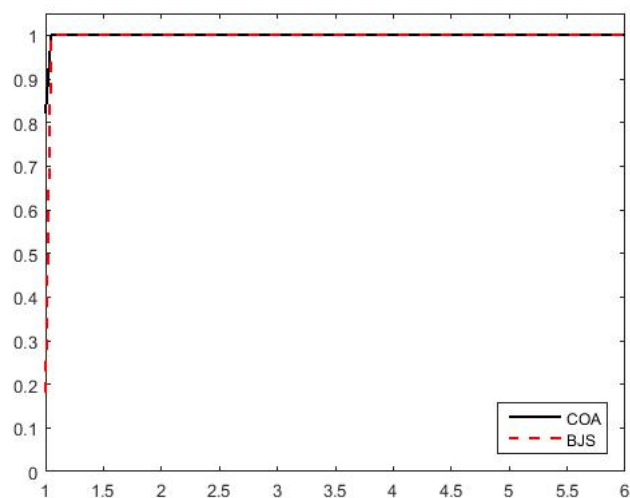
جدول ۴.۴: نتایج حاصل از اجرای مسائل مجموعه A با وزن‌های مثبت و تعداد ۴۰ مشتری

زمان اجرا بر حسب ثانیه		مقدار تابع هدف				# test
BJS	COA	BJS	COA	f_{max}	f_{best}	
۱۴۳/۸۳۵	۱۳/۸۴۰۱۶۷۹	۴۷۱۳/۸۳۷۰۷۶۴	۴۷۱۳/۸۲۵۶۶۷	۴۷۱۳/۸۳۶۵۰۲	۴۷۱۳/۸۰۶۶۶	۱
۱۴۳/۱۱۹	۱۱/۸۷۵۳۳۱۳	۴۳۲۹/۳۹۸۲۰۸۶	۴۳۲۹/۳۷۹۶۴۲	۴۳۲۹/۳۹۰۵۱۱	۴۳۲۹/۳۶۰۳۰۸	۲
۱۴۳/۰۹۶	۵۰/۵۴۲۸۵۰۵	۴۶۷۰/۰۴۵۶۷۳۶	۴۶۷۰/۰۴۳۹۵۱	۴۶۷۰/۰۴۵۵۹۱	۴۶۷۰/۰۴۱۴۷۸	۳
۱۴۴/۳۳۱	۱۲/۶۵۵۰۵۱۷	۴۹۰۱/۵۲۴۹۵۷۱	۴۹۰۱/۵۱۶۵۷۶	۴۹۰۱/۵۲۴۲۸۲	۴۹۰۱/۵۰۱۷۳۹	۴
۱۴۳/۸۱۷	۱۸/۷۲۴۴۷۹۹	۴۴۶۷/۰۸۵۲۱۳۷	۴۴۶۷/۰۷۸۰۵۹	۴۴۶۷/۰۸۴۷۱۸	۴۴۶۷/۰۶۴۷۱۴	۵
۱۴۴/۸۳۱	۴/۵۷۳۴۴۸	۴۵۲۱/۹۸۵۳۷۹۲	۴۵۲۱/۹۲۱۴۵	۴۵۲۱/۹۸۴۱۳۹	۴۵۲۱/۷۹۵۵۲۸	۶
۱۴۳/۶۰۶	۵۵/۰۲۳۲۲۳۶	۳۸۱۸/۳۵۷۵۳۸۲	۳۸۱۸/۳۵۶۰۹۷	۳۸۱۸/۳۵۷۴۷۴	۳۸۱۸/۳۵۳۰۷۵	۷
۱۴۳/۸۰۳	۶/۸۷۰۰۰۸۹	۳۸۳۴/۶۷۶۸۷۷۸	۳۸۳۴/۶۳۷۷۲۵	۳۸۳۴/۶۶۳۶۴۴	۳۸۳۴/۵۹۵۴۲۳	۸
۱۴۴/۳۵۸	۸/۱۲۵۶۲۹۸	۴۱۶۷/۸۲۳۶۲۷۲	۴۱۶۷/۸۰۴۴۸۶	۴۱۶۷/۸۲۱۷۷۷	۴۱۶۷/۷۷۷۰۹۹	۹
۱۴۵/۵۵۴	۱۱/۴۸۴۲۴۲۱	۴۲۲۲/۰۲۶۳۰۵۵	۴۲۲۲/۰۱۹۷۶۴	۴۲۲۲/۰۲۴۸۱۱	۴۲۲۲/۰۰۷۵۴۵	۱۰

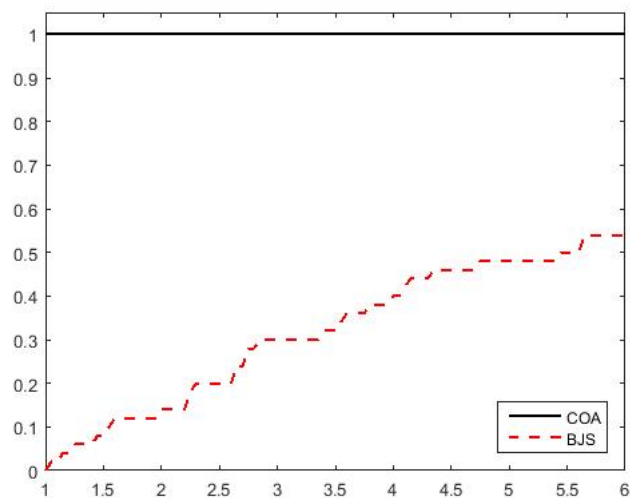
جدول ۵.۴: نتایج حاصل از اجرای مسائل مجموعه A با وزن‌های مثبت و تعداد ۵۰ مشتری

زمان اجرا بر حسب ثانیه		مقدار تابع هدف				# test
BJS	COA	BJS	COA	f_{max}	f_{best}	
۲۸۰/۰۰۹	۵۱/۶۷۹۳۸۴۸	۵۸۶۵/۴۶۲۹۴۴۳	۵۸۶۵/۴۵۴۶۵۳	۵۸۶۵/۴۶۰۶۶۵	۵۸۶۵/۴۴۷۹۰۳	۱
۲۷۰/۱۹۱	۱۸/۲۰۸۹۲۵۳	۵۳۰۶/۱۲۸۲۱۸۳	۵۳۰۶/۱۱۸۷۵۷	۵۳۰۶/۱۲۷۸۴۲	۵۳۰۶/۰۹۴۸۷۹	۲
۲۷۸/۹۵۶	۱۵/۵۸۰۷۴۱۱	۵۴۸۷/۴۸۴۹۴۵	۵۴۸۷/۴۷۷۰۰۳	۵۴۸۷/۴۸۴۵۰۵	۵۴۸۷/۴۶۹۷۰۴	۳
۲۷۹/۳۸۳	۹/۱۱۱۱۳۰۶	۶۰۸۷/۵۶۷۸۱۹۹	۶۰۸۷/۵۴۴۷۶	۶۰۸۷/۵۶۵۳۸۶	۶۰۸۷/۵۲۲۹۹۸	۴
۲۸۱/۰۲۳	۱۴/۷۹۶۴۴۱۸	۵۵۷۹/۷۰۱۰۵۷۴	۵۵۷۹/۶۹۶۰۸۲	۵۵۷۹/۷۰۰۳۷۹	۵۵۷۹/۶۸۴۱۲	۵
۲۷۹/۳۲۸	۱۲/۶۰۲۵۰۹۴	۵۷۶۹/۰۱۹۶۱۸۳	۵۷۶۹/۰۱۳۶۶۷	۵۷۶۹/۰۱۸۴۲	۵۷۶۹/۰۰۴۵۲۳	۶
۲۷۷/۷۲۹	۱۷/۵۰۲۰۴۸	۴۸۶۹/۲۹۶۴۹	۴۸۶۹/۲۸۶۹۵۵	۴۸۶۹/۲۹۵۰۹۱	۴۸۶۹/۲۷۹۸۹۳	۷
۲۷۸/۵۵۰	۷/۶۰۷۳۲۲۲	۵۷۰۵/۹۶۳۷۴۵۸	۵۷۰۵/۹۲۸۱۳۸	۵۷۰۵/۹۵۳۸۰۵	۵۷۰۵/۸۵۱۹۶۲	۸
۲۸۳/۱۸۴	۸/۶۹۶۹۶۰۵	۵۴۹۲/۸۵۸۲۰۰۸	۵۴۹۲/۸۱۹۰۵۳	۵۴۹۲/۸۵۲۷۱۶	۵۴۹۲/۷۴۲۱۱۸	۹
۲۸۲/۰۸۱	۷/۱۱۹۰۸۷۶	۵۸۷۲/۴۵۴۳۳۴۵	۵۸۷۲/۳۹۹۵۶	۵۸۷۲/۴۵۳۴۷۲	۵۸۷۲/۲۸۷۲۰۲	۱۰

شکل ۲.۴: مقایسه عملکرد الگوریتم‌های COA و BJS از دیدگاه مقدار هدف



شکل ۳.۴: مقایسه عملکرد الگوریتم‌های COA و BJS از دیدگاه زمان اجرا



$f = ۸۲۴/۵۵۵۶$ ، به این معنی است که مقدار هدف $f = ۸۲۴/۵۵۵۶$ پس از ۴۰ بار تکرار بدست آمده است یا بعد از گذشتن ۴۰ تکرار دیگر تغییری نداشته ستون آخر این جدول زمان اجرای (بر حسب ثانیه) الگوریتم نشان می‌دهد.

جدول ۶.۴: نتایج حاصل از اجرای الگوریتم COA برای مسائل مجموعه B

CPU time (s)	L_i	f	n	# Test
۶۴/۹۴۲۴	۴۱	۷۸۷/۳۱۶۱	۲۰۰	pmed۱
۱۱۹/۶۲۳۸	۳۷	۸۷۹/۳۶۷۵	۲۰۰	pmed۲
۵۴/۶۷۰۹	۴۰	۸۲۴/۵۵۵۶	۲۰۰	pmed۳
۱۰۶/۵۲۹۱	۴۱	۹۰۳/۷۹۴۶	۲۰۰	pmed۴
۱۵۶/۴۷۳۴	۴۱	۶۵۱/۲۶۹۵	۲۰۰	pmed۵
۲۸۲/۸۱۳	۳۶	۶۰۵۸/۲	۸۰۰	pmed۶
۳۲۱/۸۶۶	۳۶	۶۹۳۱/۴۱	۸۰۰	pmed۷
۳۷۰/۷۱۵	۳۸	۷۲۰۰/۳۳	۸۰۰	pmed۸
۲۴۱/۷۰۷	۳۵	۶۹۹۱/۶۳	۸۰۰	pmed۹
۲۰۵/۶۲۱	۳۶	۶۳۹۶/۳۵	۸۰۰	pmed۱۰

مراجع

- [1] Alizadeh B., Afrashteh E., Baroughi-Bonab F. (2018), "Combinatorial algorithms for some variants of inverse obnoxious median location problem on tree networks", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 178, 914-934.
- [2] Alizadeh B., Burkard R.E., Pferschy U. (2009), "Inverse 1-center location problems with edge length augmentation on trees", **Computing**, 86, 331-343.
- [3] Alizadeh B., Burkard R.E. (2011), "Combinatorial algorithms for inverse absolute and vertex 1-center location problems on trees", **Networks**, 58, 190-200.
- [4] Alizadeh B., Etemad R. (2018), "Optimal algorithms for inverse vertex obnoxious center location problems on graphs", **Theoretical Computer Science**, 707, 36-45.
- [5] Bard J.F. (1998), "**Practical bilevel optimization applications and algorithm**", Kluwer Academic Press.
- [6] Baroughi Bonab F., Burkard R.E., Alizadeh B. (2010), "Inverse median location problems with variable coordinates", **Central European Journal of Operations Research**, 18, 365-380.
- [7] Baroughi Bonab F., Burkard R.E., Gassner E. (2011), "Inverse p-median problems with variable edge lengths", **Mathematical Methods of Operations Research**, 73, 263-280.
- [8] Berman O., Wang Q. (2008), "Locating a semi-obnoxious facility with expropriation", **Computers and Operations Research**, 35, 392-403.
- [9] Berman O., Ingco D.I. and Odoni A.R. (1992), "Improving the location of minisum facilities through network modification". **Annals of Operations Research**, 40, 1-16.

-
- [10] Brimberg J., Juel H., Schöbel A. (2007), "Locating a circle on a sphere". **Operation Research**, 55, 782–791.
- [11] Brimberg J., Juel H., Schöbel A. (2009), "Locating a circle on the plane using the minimax criterion", **Stud. Locat. Anal.**, 17, 45–60.
- [12] Brimberg J., Juel H., and Schöbel A. (2009), "Locating a minisum circle in the plane", **Discrete Applied Mathematics**, 157, pp 901–912.
- [13] Burkard R. E., Krarup J. (1998), "A linear algorithm for the pos/neg-weighted 1-median problem on a cactus". **Computing**, 60, 193–215.
- [14] Burkard R. E., Cela E., Dollani H. (2000), "2-Median in trees with pos/neg weights". **Discrete Applied Mathematics**, 105, 51–71.
- [15] Burkard R. E., Galavii M., Gassner E. (2010), "The inverse Fermat–Weber problem", **European Journal of Operation Research**, 206 , 11-17.
- [16] Burkard R. E., Pleschiutchnig C., Zhang J. (2004), "Inverse median problems". **Discrete Optimization**, 1, 23-39
- [17] Burkard R. E., Gassner E., Hatzl J. (2006), "A linear time algorithm for the reverse 1-median problem on a cycle, **Networks**, 48, 16-23.
- [18] Burkard RE, Pleschiutchnig C, Zhang J (2007), "A linear time algorithm for the reverse 1-median problem on a cycle". **Discret Optimization**, 5, 242-253.
- [19] Burkard R. E., Gassner E., Hatzel J. (2008), "Reverse 2-median problems on trees". **Discrete Applied Mathematics**, 156, 1963-1976.
- [20] Burton D., Toint Ph. L. (1991), "On an instance of the inverse shortest path problem". **Mathematical Programming**, 53, 45-61.
- [21] Cai MC, Yang X, Zhang J (1999), "The complexity analysis of the inverse center location problem". **Journal of Global Optimization**, 15, 213-218.
- [22] Cappanera P., Gallo G., Maffioli F. (2003), "Discrete facility location and routing of obnoxious activities", **Discrete Applied Mathematics**, 133, 3–28.
- [23] Dempe, S. (2001). "**Discrete bilevel optimization problems.**" In: Technical Report D-04109, Institut für Wirtschaftsinformatik, Universität Leipzig, Leipzig, Germany

- [24] Drezner Z., Steiner G., and Wesolowsky G.O. (2002), "On the circle closest to a set of points", **Computers and Operations Research**, 29, pp 637–650.
- [25] Drezner Z. and Wesolowsky G.O. (1990), "The Weber problem on the plane with some negative weights", **INFOR: INFOR: Information Systems and Operational Research**, 29, 87–99.
- [26] Fathali J. (2007), "A genetic algorithm for the p-median problem with pos/neg weights", **Applied Mathematics and Computation**, 183, 1071-1083.
- [27] Fathali J., Kakhki H. T., Burkard R. E. (2006), "An ant colony algorithm for the pos/neg weighted p-median problem". **Central European Journal of Operations Research**, 14, 229–246.
- [28] Eiselt H. A. (2011), "**Foundation of Location Analysis**", Springer Verlag, New York.
- [29] Galavii M. (2008), "Inverse 1-median problems. Ph.D. Thesis", Institute of Optimization and Discrete Mathematics, Graz University of Technology, Graz, Austria.
- [30] Gassner E. (2007), "Up- and downgrading the 1-median in a network", Technical Report, 16, Graz University of Technology.
- [31] Gassner E. (2008), "Up- and downgrading the 1-center in a network", **European Journal of Operational Research**, 198, 370–377.
- [32] Gassner E. (2009), "A game-theoretic approach for downgrading the 1-median in the plane with Manhattan metric", **Annals of Operations Research**, 172, 393–404.
- [33] Goldman A. J., Dearing P. M. (1975), "Concepts of optimal location for partially noxious facilities", **ORSA Bul lettin**, 23.
- [34] Golpayegani M., Fathali J., and Khosravian I. (2014), "Median line locationproblem with positive and negative weights and Euclidean norm", **Neural Computing and Applications**, 24, 613–619.
- [35] Golpayegani M., Fathali J., and Moradi H. (2017), A particle swarm optimization method for semi-obnoxious line location problem with rectilinear norm, **Computers and Industrial Engineering**, 109, 71–78.

- [36] Guan X. C., Zhang B. W. (2012), "Inverse 1-median problem on trees under weighted Hamming distance", **Journal of Global Optimization**, 54, 75–82.
- [37] Hakimi S. L. (1964), "Optimum location of switching centers and the absolute centers and medians of a graph", **Operations Research**, 12, 450-459.
- [38] Hansen P., Peeters D., Richard D., and Thisse J.F. (1985), "The minisum and minimax location problems revisited". **Operations Research**, 33, 1251–1265.
- [39] Heuberger C. (2004), "Inverse optimization: a survey on problems, methods, and results". **J. Combinatorial Optimization**, 8, 329-361.
- [40] Karimäki V. (1991), "Effective circle fitting for particle trajectories". **Nucl InstrumMethods Phys ResA:Accel Spectrom Detect Assoc Equip**, 305, 187–192.
- [41] Labbé M., Laporte G., Rodriguez M. I., and Gonzalez J. J. S. (2005), "Locating median cycles in networks". **European Journal of Operational Research**, 160, 457–470.
- [42] Love R.F., Morris J.G., Wesolowsky G.O. (1988), "**Facilities Location Models and Methods**", vol. 7, Publications in Operations Research.
- [43] Nazari M., Fathali J., Nazari M., Varedi-Koulaei S.M. (2018), "Inverse of backup 2-median problems with variable edge lengths and vertex weight on trees and variable coordinates on the plane", **Production and Operations Management**, 9, 115-137.
- [44] Nazari M., Fathali J. (2018), "Reverse backup 2-median problem with variable coordinate of vertices", **Journal of Operational Research and Its Applications**, 15, 63-88.
- [45] Nguyen K.T. (2016), "Inverse 1-median problem on block graphs with variable vertex weights", **Journal of Optimization Theory and Applications**, 168, 944-957.
- [46] Nguyen K.T., Sepasian A.R. (2016), "The inverse 1-center problem on trees with variable edge lengths under Chebyshev norm and Hamming distance", **Journal of Combinatorial Optimization**, 32, 872-884.
- [47] Ohsawa Y., Tamura K. (2003), "Efficient location for a semi-obnoxious facility", **Annals of Operations Research**, 123, 173–188.

- [48] Rajabioun R. (2011), "Cuckoo optimization algorithm", **Applied Soft Computing**, 11, 5508–5518.
- [49] Sepasian A. R., Rahbarnia, F. (2015), "An $O(n \log n)$ algorithm for the inverse 1-median problem on trees with variable vertex weights and edge reductions", **Optimization**, 64, 595-602.
- [50] Sepasian A. R., Rahbarnia F. (2014), "Upgrading p-Median Problem on a Path", **Journal of Mathematical Modelling and Algorithms**, 14, 145-157.
- [51] Tellier, Luc-Normand, (1985), Économie spatiale: rationalité économique de l'espace habité, Chicoutimi, **L'Actualité économique**, 62 (1), 151–153.
- [52] Wang Q., Bai Y. (2010), "An Efficient Algorithm for Reverse 2-median Problem on A Cycle", **Journal of Networks**, 5(10), 1169-1176
- [53] Yang J, Jiangn J (2012), "Reverse 1-median problem with constraint in trees", The 2nd International Conference on Computer Application and System Modeling.
- [54] Yapicioglu H., Smith A.E., Dozier G. (2007), "Solving the semi-desirable facility location problem using bi-objective particle swarm", **European Journal of Operational Research**, 177, 733–749.
- [55] Jafar Fathali, Mehraneh Gholami (2019), "The semi-obnoxious minisum circle location problem with Euclidean norm", **International Journal of Nonlinear Analysis and Applications (IJNNA)**, ISSN: 2008-6822 (electronic).
- [56] Mehraneh Gholami, Jafar Fathali (2019), "The semi-obnoxious minisum circle location problem with Euclidean norm", 12th International Conference of Iranian Operation Research Society, Mazandaran University of Science and Technology, Babol, Iran.
- [57] Mehraneh Gholami, Jafar Fathali (2020), "Mathematical models for the variable weights version of the inverse minimax circle location problem", **Journal of Mathematical Modelling**, 9(1), 137-144.
- [58] Mehraneh Gholami, Jafar Fathali, "The inverse minisum circle location problem", **Yugoslav Journal of Operation Research**, submitted.

- [59] Mehraneh Gholami, Jafar Fathali, "The inverse minimax circle location problem with variable coordinate", **International Journal of Industrial Mathematics**, submitted.

Aabstract

Traditionally, the minisum and minimax circle location problems concern with finding a circle C in the plane such that the sum of the distances and maximum distance from the circumference of the circle to the given points is minimized, respectively. The radius of the circle can be fixed or variable. In this thesis we consider the inverse case, that is: a circle C is given and we want to modify the coordinate or weight of existing points with the minimum cost such that the given circle be optimal. Mathematical models and some properties of the cases that the circle C becomes optimal with comparing to all other circles, and the circle C becomes the best circle with comparing to the circles with radius r_0 are presented.

In addition to we investigate semi-obnoxious circle problem. When the facilities are desirable to a part of clients and undesirable to the rest of them, we face these kind of location problems. In this paper, we consider the minisum circle location problem with positive and negative weights using Euclidean norm which is a nonlinear optimization problem. We show that some properties of the minisum circle location problem with positive weights, also hold for the semi-obnoxious case.

Keywords:

Minisum Circle Location Problem, Minimax Circle Location Problem, Inverse Problem, Semi-Obnoxious Problem.



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Operation Research

**Investigations on circle location problems:
Theory and optimal algorithms for some
semi-obnoxious and inverse models**

By: Mehrane Gholami

Supervisor:
Jafar Fathali

February 2021