

patterns,decorations.pathreplacing

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری ریاضی کاربردی-نظریه گراف

بررسی برخی صورت‌های تابعی احاطه‌گری جهشی در گراف‌ها

نگارنده: الهه شعبانی

استاد راهنما
دکتر نادر جعفری راد

استادان مشاور

دکتر عبدالله آل‌هوز
دکتر ابوالفضل پور عیدی

بهمن ماه ۱۳۹۹

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم:

همه کسانی که لحظه‌ای بعد انسانی و وجدانی خود را فراموش نمی‌کنند و بر آستان گران سنگ انسانیت سر فرود می‌آورند و انسان را با همه تفاوت‌هایش ارج می‌نهند.

و تقدیم به پدر و مادر عزیزم

که الفبای انسانیت و چگونه زیستن را به من آموختند.

سپاسگذاری

بر خود لازم و واجب میدانم که از پدر و مادر عزیز و
مهربانم که در مسیر ناهموار زندگی واژه صبر را برایم به
تصویر کشیده اند و در تمام مراحل زندگی یار و پشتیبانم
بوده‌اند، از صمیم قلب تقدیر و تشکر نمایم .

و همچنین از اساتید محترم :

جناب آقای دکتر نادر جعفری راد (استاد راهنما)

جناب آقای دکتر عبدالله آل هوز (استاد مشاور)

جناب آقای دکتر ابوالفضل پورعیدی (استاد مشاور)

سرکار خانم دکتر متیا شاینا (استاد راهنمای مربوطه در
دوره فرصت مطالعاتی)

و همچنین تمام کسانی که طی مدت تحصیل و نگارش و
ارائه این پایان نامه بنده را مورد لطف و عنایت خود قرار
دادند کمال سپاس و قدردانی را دارم.

تعهد نامه

اینجانب الهه شعبانی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده رساله با عنوان بررسی برخی صورت‌های تابعی احاطه‌گری جهشی در گراف‌ها، تحت راهنمایی دکتر نادر جعفری راد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این رساله تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ رسیده است.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

الهه شعبانی

بهمن ماه ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

یک زیرمجموعه S از رئوس گراف G یک مجموعه احاطه‌گر جهشی نامیده می‌شود، هرگاه برای هر رأس $v \in V(G) - S$ رأسی مانند $u \in S$ وجود داشته باشد به طوری که $d(u, v) = 2$. عدد احاطه‌گر جهشی گراف G کمترین اندازه در بین همه مجموعه‌های احاطه‌گر جهشی گراف G می‌باشد و آن را با $\gamma_h(G)$ نشان می‌دهند. مجموعه احاطه‌گر جهشی از گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر مستقل جهشی گویند، هرگاه برای هر دوتایی $v, w \in S$ ، $d(v, w) \neq 2$. همچنین تابع $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر رأس $v \in V(G)$ با شرط $f(v) = 0$ رأسی مانند $u \in N_2(v)$ وجود داشته باشد به طوری که $f(u) = 2$. وزن یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی f مجموع $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$ می‌باشد. کمترین وزن بین تمام توابع احاطه‌گر رومی جهشی روی گراف G را عدد احاطه‌گر رومی جهشی گراف G گوئیم و با $\gamma_{hR}(G)$ نمایش می‌دهیم. برای تابع احاطه‌گر رومی جهشی f در گراف G ، V_i^f مجموعه‌ای از رئوس گراف G با وزن i تحت f می‌باشد. بنابراین تابع احاطه‌گر رومی جهشی f را می‌توان با سه تایی (V_0^f, V_1^f, V_2^f) نشان داد. یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ را تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی گویند، هرگاه برای هر دو تایی $v, w \in V_1^f \cup V_2^f$ ، $d(v, w) \neq 2$. در این رساله پیچیدگی مسأله احاطه‌گر مستقل جهشی، مسأله احاطه‌گر رومی جهشی و مسأله احاطه‌گر مستقل رومی جهشی را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که هر یک از سه مسأله بالا حتی برای گراف‌های دوبخشی مسطح و گراف‌های وتری مسطح نیز NP -کامل است. همچنین همه گراف‌های G از مرتبه n با $\gamma_{hR}(G) = n$ یا $\gamma_{hR}(G) = n - 1$ و همه درختان T با $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1$ و $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$ را مشخص می‌کنیم.

کلمات کلیدی: مجموعه احاطه‌گر جهشی، تابع احاطه‌گر رومی جهشی، گراف، درخت.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. N. Jafari Rad and E. Shabani, On the Complexity of some Hop Domination Parameters, *Electronic Journal of Graph Theory and Application*, **7** (1) (2019), 74-86.
2. E. Shabani, N. Jafari Rad, A. Poureidi and A. Alhevaz, On Hop Roman Domination in Trees, *accepted in Ars Combinatoria* (2018).
3. E. Shabani, N. Jafari Rad and A. Poureidi, Graphs with Large Hop Roman Domination Number, *Computer Science Journal of Moldova*, **27** 1(79),(2019).

نتایج مربوط به دوره فرصت مطالعاتی در دانشگاه اتاوا- کانادا

1. E. Shabani, and M. Šajna, On the Directed Oberwolfach Problem with variable cycle lengths, <https://arxiv.org/abs/2009.08731>.
2. Elaheh Shabani, Mateja Šajna, On the directed Oberwolfach Problem with variable cycle lengths, 13th Annual Ottawa Math Conference, June 2020.

فهرست مطالب

پیشگفتار	لیست تصاویر	ی
۱	تعاریف و مقدمات	۱
۱.۱	مقدمه	۱
۲.۱	تعاریف و مفاهیم اولیه	۱
۳.۱	احاطه‌گری در گراف‌ها	۴
۱.۳.۱	مجموعه‌های احاطه‌گر	۵
۲.۳.۱	توابع احاطه‌گر	۵
۴.۱	تاریخچه و کاربردهایی از مجموعه‌ها و توابع احاطه‌گر	۷
۲	پیچیدگی احاطه‌گر جهشی	۹
۱.۲	مقدمه	۹
۲.۲	پیچیدگی محاسباتی	۹
۳.۲	پیچیدگی عدد احاطه‌گر جهشی	۱۲
۴.۲	پیچیدگی احاطه‌گر مستقل جهشی	۱۲
۵.۲	پیچیدگی تابع احاطه‌گر رومی جهشی	۱۷
۶.۲	پیچیدگی احاطه‌گر مستقل رومی جهشی	۲۱
۳	تابع احاطه‌گر جهشی روی گراف‌ها	۲۵
۱.۳	مقدمه	۲۵
۲.۳	خواصی از تابع احاطه‌گر رومی جهشی	۲۵
۱.۲.۳	مقدمه	۲۵
۲.۲.۳	خواص تابع احاطه‌گر رومی جهشی	۲۵
۳.۳	گراف‌های با عدد احاطه‌گر رومی جهشی بزرگ	۲۹
۱.۳.۳	مقدمه	۲۹

۲۹	گراف‌های G با $\gamma_{hR}(G) = n$	۲.۳.۳
۳۱	گراف‌های G با $\gamma_{hR}(G) = n - 1$	۳.۳.۳
۴۳	تابع احاطه‌گر جهشی رومی در درختان	۴
۴۳	مقدمه	۱.۴
۴۳	درختان T با $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1$	۲.۴
۴۴	درختان T با $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$	۳.۴
۴۴	مقدمه	۱.۳.۴
۴۵	خانواده $\mathcal{R}$	۲.۳.۴
۴۹	اثبات قضیه ۱.۳.۴	۳.۳.۴
۵۷	تجزیه دوری گراف‌های کامل	۵
۵۷	مقدمه	۱.۵
۵۷	تعاریف و مفاهیم اولیه	۲.۵
۵۹	مساله اوبروولفاش جهت‌دار	۳.۵
۶۰	مساله اوبروولفاش جهت‌دار با دورهای از طول‌های یکسان	۱.۳.۵
۶۰	مساله اوبروولفاش جهت‌دار با دورهای از طول‌های متفاوت	۲.۳.۵
۸۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	
۸۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	
۹۱	مراجع	
۹۴	نمایه	

لیست تصاویر

۸	نقشه امپراطوری روم.	۱.۱
۱۳	گراف H حاصل از گراف $G = P_3$ در اثبات قضیه ۱.۴.۲.	۱.۲
۱۵	گراف H حاصل از گراف $G = P_3$ در اثبات قضیه ۲.۴.۲.	۲.۲
۱۸	گراف H حاصل از گراف $G = P_3$ در اثبات قضیه ۱.۵.۲.	۳.۲
۲۰	گراف H حاصل از گراف $G = C_3$ در اثبات قضیه ۲.۵.۲.	۴.۲
۳۴	خانواده $\mathcal{F}$	۱.۳
۴۶	مثال هایی از درختان T_i برای $i = 1, 2, \dots, 5$	۱.۴
۶۲	$(\vec{C}_4, \vec{C}_5)$ -عامل R از K_9^*	۱.۵
۶۳	$(\vec{C}_3, \vec{C}_3, \vec{C}_5)$ -عامل R از K_{11}^*	۲.۵
۶۴	$(\vec{C}_2, \vec{C}_7)$ -عامل های R و R' از K_9^*	۳.۵
۶۵	یک $(\vec{C}_2, \vec{C}_8)$ -عامل از K_{10}^*	۴.۵
۷۲	۱-عامل های F_1 و F_2 از K_{24}	۵.۵
۷۶	۱-عامل های F_1 و F_2 از K_{34}	۶.۵
۸۰	۱-عامل های F_1 و F_2 از K_{30}	۷.۵

پیشگفتار

توابع و مجموعه‌های احاطه‌گر از مسائل مشترک بین رشته‌های ریاضی و علوم کامپیوتر می‌باشند. این موضوعات دارای کاربردهای فراوانی در شبکه‌های پیچیده می‌باشند. از جمله این شبکه‌ها می‌توان به شبکه‌های اجتماعی، شبکه‌های حمل و نقل، مکان‌یابی آنتن‌های مخابرات، شبکه‌های حسگر بی‌سیم و ... اشاره کرد. با توجه به جذابیت و کاربردها، این مباحث موضوع تحقیق بسیاری از محققان در زمینه گراف و علوم کامپیوتر می‌باشند.

زیرمجموعه S از رئوس گراف G یک مجموعه احاطه‌گر جهشی نامیده می‌شود هرگاه برای هر رأس $v \in V(G) - S$ رأسی مانند $u \in S$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $d(u, v) = 2$. عدد احاطه‌گری جهشی گراف G ، $\gamma_h(G)$ ، برابر با اندازه کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر جهشی در گراف G می‌باشد. همچنین تابع $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر رأس $v \in V(G)$ با شرط $f(v) = 0$ ، رأسی مانند $u \in N_2(v)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $f(u) = 2$. وزن یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی f برابر است با $f(V) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$. عدد احاطه‌گری رومی جهشی گراف G را با $\gamma_{hR}(G)$ نشان داده و برابر با کوچکترین وزن در میان وزن‌های توابع احاطه‌گر رومی جهشی روی گراف G می‌باشد. در این رساله عدد احاطه‌گر جهشی، عدد احاطه‌گر رومی جهشی، و پارامترهای وابسته به آن‌ها که در رساله تعریف شده‌اند را مورد مطالعه و بررسی قرار می‌دهیم.

به‌طور خلاصه، در فصل اول این رساله به ذکر تعاریف و مفاهیم مورد نیاز، مانند مجموعه احاطه‌گر، مجموعه احاطه‌گر جهشی، مجموعه احاطه‌گر مستقل جهشی، تابع احاطه‌گر رومی، احاطه‌گری رومی جهشی و احاطه‌گر مستقل رومی جهشی می‌پردازیم. در بخش آخر تاریخچه توابع و مجموعه‌های احاطه‌گر رومی و برخی از کاربردهای آن‌ها را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، ابتدا در بخش ۲.۲، در مورد نظریه پیچیدگی صحبت می‌کنیم. در بخش ۳.۲، نتایج ارائه شده در مورد پیچیدگی مسأله تصمیم‌گیری احاطه‌گر جهشی را بیان می‌کنیم. سپس در بخش‌های ۴.۲، ۵.۲ و ۶.۲، به ترتیب، به بررسی پیچیدگی مسأله عدد احاطه‌گر مستقل جهشی، تابع احاطه‌گر رومی جهشی و تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی می‌پردازیم. ما نشان می‌دهیم که این مسائل حتی برای گراف‌های دوبخشی مسطح و گراف‌های وتري مسطح نیز NP -کامل هستند.

در فصل سوم، ابتدا در بخش ۲.۳، خواصی از تابع احاطه‌گر رومی جهشی را بیان می‌کنیم.

سپس در بخش ۳.۳، گراف‌های با عدد احاطه‌گر رومی جهشی n یا $n - 1$ را مشخص می‌کنیم. در فصل چهارم، ابتدا در بخش ۲.۴، درختان T با $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1$ را مشخص می‌کنیم. سپس در بخش ۳.۴، همه درختان T که رابطه $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$ برای آن‌ها برقرار است را مشخص می‌کنیم.

در فصل پنجم، به بیان موضوع مورد مطالعه و پژوهش دانشجو در دوره فرصت مطالعاتی در دانشگاه اتاوا-کانادا تحت سرپرستی پروفسور متیا شاینا پرداخته شده است.

فصل ۱

تعاریف و مقدمات

۱.۱ مقدمه

در این فصل پس از بیان تعاریف اولیه و مفاهیم مقدماتی در نظریه‌ی گراف، به بحث پیرامون مجموعه‌های احاطه‌گر جهشی و توابع احاطه‌گر رومی جهشی و پارامترهای وابسته به آنها، به ویژه پارامترهایی که در این رساله بیان می‌شوند، می‌پردازیم. در بخش پایانی این فصل به بیان تاریخچه و کاربردهایی از مجموعه‌های احاطه‌گر و توابع احاطه‌گر رومی می‌پردازیم. تعاریف ارائه شده در این فصل و سایر مفاهیم مرتبط با گراف براساس مرجع [۹] است.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

گراف^۱ $G = (V(G), E(G))$ عبارت است از مجموعه‌ی متناهی و ناتپی $V(G)$ ، و خانواده $E(G)$ از دوتایی‌های نامرتب از اعضای $V(G)$. هر عضو $V(G)$ یک **رأس**^۲ و هر عضو $E(G)$ یک **یال**^۳ نامیده می‌شود. تعداد رأس‌ها، یعنی $|V(G)|$ ، **مرتبه**^۴ گراف نامیده شده و با نماد $n(G)$ مشخص می‌شود. $|E(G)|$ نیز **اندازه**^۵ گراف نامیده شده و با نماد $m(G)$ نمایش داده می‌شود. همچنین هر یال $\{u, v\} \in E(G)$ را با $uv \in E(G)$ مشخص کرده و اگر $e = uv \in E(G)$ می‌گوییم u و v با

^۱ Graph

^۲ Vertex

^۳ Edge

^۴ Order

^۵ Size

هم مجاور هستند. اگر دو سر یک یال بر هم منطبق باشند آن را **طوقه**^۶ می‌نامند. دو یال با رئوس ابتدا و انتهای یکسان را **یال‌های موازی**^۷ می‌نامند. **گراف ساده**^۸، گرافی است که یال موازی و طوقه نداشته باشد، همچنین گرافی که مجموعه رأس‌های آن متناهی باشد، **گراف متناهی**^۹ نامیده می‌شود. **همسایگی باز**^{۱۰} رأس v با نماد $N_G(v)$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از مجموعه رئوس مجاور با v در گراف G ، یعنی $N_G(v) = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$. همچنین **همسایگی بسته**^{۱۱} رأس v با نماد $N_G[v]$ نمایش داده می‌شود و عبارت است از $N_G[v] = \{u \in V(G) \mid uv \in E(G)\} \cup \{v\}$. همه رئوس با فاصله k از رأس v در گراف G را با $N_k(v)$ نشان می‌دهند و اجتماع مجموعه $N_k(v)$ با رأس v را با $N_k[v]$ نشان می‌دهند، و به عبارتی $N_k[v] = N_k(v) \cup \{v\}$. **درجه**^{۱۲} رأس v که با نماد $\deg_G(v)$ نمایش داده می‌شود، برابر با تعداد همسایه‌های رأس v در گراف G است. همچنین **درجه جهشی**^{۱۳} رأس v در گراف G با $\deg_h(v)$ نشان داده می‌شود و برابر با تعداد رئوس با فاصله ۲ از رأس v می‌باشد. **ماکسیمم درجه**^{۱۴} و **مینیمم درجه**^{۱۵} رئوس گراف G را به ترتیب با نماد $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نمایش داده می‌شوند. **یک رأس منفرد**^{۱۶}، رأسی است که با هیچ رأس دیگری مجاور نباشد. **یک برگ**^{۱۷} (**رأس آویزان**^{۱۸}) رأسی از درجه یک است. و رأسی که در همسایگی یک رأس آویزان باشد **رأس پشتیبان**^{۱۹} نامیده می‌شود. مجموعه برگ‌های گراف G با نماد $L(G)$ و مجموعه رئوس پشتیبان آن با نماد $S(G)$ نشان داده می‌شود. یک رأس **پشتیبان قوی**^{۲۰} نامیده می‌شود هرگاه دارای حداقل دو همسایه برگی باشد. برای هر رأس پشتیبان x مجموعه‌ی همه‌ی برگ‌های همسایه آن با L_x نمایش داده می‌شود. منظور از **زیرتقسیم کردن** یال uv در گراف G افزودن رأس جدید w به گراف G و جایگزینی یال uv با مسیر uvw است.

برای هر زیرمجموعه S از $V(G)$ ، $G[S]$ ، **زیرگراف القایی**^{۲۱} توسط S ، زیرگراف ماکسیمال از G با مجموعه رئوس S را مشخص می‌کند. برای یک زیرمجموعه S از رأس‌های گراف G ، $G - S$ گراف به‌دست آمده از G با حذف رأس‌های S است. اگر $S = \{v\}$ آن‌گاه برای راحتی $G - S$ را به‌صورت $G - v$ نمایش می‌دهیم.

یک گراف غیر بدیهی^{۲۲} گرافی از مرتبه حداقل ۲ می‌باشد. **گراف کامل**^{۲۳}، گرافی است که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک یال وجود داشته باشد. یک گراف کامل از مرتبه n ، دارای n رأس و $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است که آن را با نماد K_n نمایش می‌دهند. فرض کنید G گرافی n رأسی باشد. در این صورت **مکمل**^{۲۴} (یا متمم) گراف G که با نماد $\bar{G}$ نمایش داده می‌شود، گرافی

^۶ Loop^۷ Parallel edges^۸ Simple graph^۹ Finite graph^{۱۰} Open neighborhood^{۱۱} Closed neighborhood^{۱۲} Degree^{۱۳} Hop-degree^{۱۴} Maximum degree^{۱۵} Minimum degree^{۱۶} Isolated vertex^{۱۷} Leaf^{۱۸} Pendant vertex^{۱۹} Support vertex^{۲۰} Strong support^{۲۱} Induced subgraph^{۲۲} Non-trivial graph^{۲۳} Complete graph^{۲۴} Complement

است با مجموعه رئوس $V(G)$ به طوری که هر دو رأس مانند u و v در $\bar{G}$ مجاور هستند اگر و فقط اگر در G مجاور نباشند. **گراف منتظم**^{۲۵} گرافی است که درجه‌ی تمام رئوس آن یکسان باشد. گراف منتظمی که درجه هر رأس آن k باشد، گراف k -منتظم می‌گوییم. تعداد یال‌های گراف k -منتظم برابر $q = \frac{nk}{2}$ می‌باشد.

گراف دوبخشی^{۲۶} گرافی است که مجموعه رأس‌های آن به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های گراف G در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y ، که در آن هر رأس X به تمام رئوس Y وصل شده باشد، **گراف دوبخشی کامل**^{۲۷} نامیده می‌شود. اگر $|X| = n$ و $|Y| = m$ آن‌گاه گراف دوبخشی کامل با بخش‌های X و Y را با نماد $K_{n,m}$ نمایش می‌دهیم. **گراف وتری**^{۲۸} گرافی است که شامل هیچ دور القایی به طول حداقل ۴ نباشد.

گراف مسطح^{۲۹} گرافی است که می‌توان آن را در یک صفحه رسم کرد به گونه‌ای که یال‌هایش یکدیگر را تنها در رأس‌ها قطع کنند. **گراف دوبخشی مسطح**^{۳۰} گرافی است که هم دوبخشی و هم مسطح باشد. همچنین گرافی که هم مسطح و هم وتری باشد را **گراف وتری مسطح**^{۳۱} گویند. یک **گشت**^{۳۲} به طول k ، یک دنباله متناوب $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ از رأس‌ها و یال‌هاست، به طوری که برای هر $i = 1, \dots, k$ یک یال باشد. **یک مسیر**^{۳۳} گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت فهرست مرتبی از رأس‌های متمایز $v_0, v_1, \dots, v_n$ در نظر می‌گیریم، به طوری که برای هر $i = 1, \dots, n$ یک یال $e_i = v_{i-1}v_i$ باشد. یک مسیر n رأسی را با P_n نمایش می‌دهیم. مسیری که رأس ابتدای آن u و رأس انتهایی آن v باشد را یک (u, v) -مسیر می‌گویند. یک **دور**^{۳۴} گشت بسته‌ای به طول حداقل سه است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری دیگری نداریم. یک دور n رأسی را با C_n نشان می‌دهیم.

گراف همبند^{۳۵} نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو رأس متمایز u و v ، مسیری از u به v موجود باشد. فرض کنید u و v رأس‌های گراف G باشند. در این صورت **فاصله**^{۳۶} بین u و v که آن را با نماد $d_G(u, v)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v در گراف G . **قطر**^{۳۷} یک گراف، $diam(G)$ ، طول مسیر بین دو رأسی است که بیشترین فاصله ممکن را دارند. هر مسیر بین دو رأس با فاصله $diam(G)$ را یک مسیر قطری گویند. کوتاه‌ترین دور موجود در گراف G را **کمر**^{۳۸} گراف گویند و طول این دور را با نماد $g(G)$ نمایش می‌دهند. هر گراف همبند فاقد دور، **درخت**^{۳۹} نام دارد. هر زیرگراف القایی همبند یک درخت را نیز

^{۲۵} Bipartite graph^{۲۶} Regular graph^{۲۷} Complete bipartite graph^{۲۸} Chordal graph^{۲۹} Planar Graph^{۳۰} planar bipartite Graph^{۳۱} planar chordale Graph^{۳۲} Walk^{۳۳} Path^{۳۴} Cycle^{۳۵} Connected graph^{۳۶} Distance^{۳۷} Diameter^{۳۸} Girth^{۳۹} Tree

زیردرخت^{۴۰} گویند. یک درخت ریشه‌دار^{۴۱} درختی است که یک رأس آن از بقیه رئوس متمایز شده باشد. رأس متمایز شده ریشه درخت^{۴۲} نامیده می‌شود. اگر T یک درخت ریشه‌دار باشد، آن‌گاه زیردرخت ریشه‌دار در رأس v را با نماد T_v نمایش می‌دهیم. اگر $u \in N_{T_v}(v)$ باشد، گوییم u فرزند^{۴۳} v و v پدر^{۴۴} u است. یک ستاره دوگانه^{۴۵} گرافی است که از اتصال رئوس مرکزی دو ستاره $k_{1,p}$ و $k_{1,q}$ با یک یال به دست می‌آید. بنابراین یک ستاره دوگانه، درختی با دقیقاً دو رأس غیربرگ می‌باشد.

۳.۱ احاطه‌گری در گراف‌ها

یکی از مهم‌ترین مفاهیم مطرح شده در نظریه‌ی گراف مفهوم احاطه‌گری^{۴۶} است. مطالعه در مورد انتخاب کمترین تعداد وزیران در صفحه‌ی شطرنج به‌طوری که روی تمام صفحه احاطه داشته باشند به سال ۱۸۶۲ برمی‌گردد که توسط دیانیچ^{۴۷} مطرح شد. این مسأله پس از آن در شکل‌های متفاوت و با سایر مهره‌های شطرنج نیز عنوان شد و برادران یاگلوب^{۴۸} آن‌ها را در سال ۱۹۶۴ در قالب کتابی بررسی نمودند. این مسأله‌ها که برخی از آن‌ها همچنان حل نشده باقی مانده‌اند در واقع خاستگاه اصلی مفهوم احاطه‌گری هستند. اولین بار در سال ۱۹۵۸ کلاود برگ^{۴۹} در کتاب خود در نظریه‌ی گراف، مفهومی به نام ضریب پایداری خارجی^{۵۰} تعریف نمود. بعدها در سال ۱۹۶۲ اویستین اور^{۵۱} برای همین مفهوم در کتاب خود از واژه‌ی مجموعه احاطه‌گر^{۵۲} استفاده کرد و از آن پس تحت همین عنوان شناخته شد و مورد بررسی قرار گرفت. در اواسط دهه‌ی هشتاد کوکاینه^{۵۳} و هدت نیه‌می^{۵۴} کارهای انجام شده برای این مفهوم را جمع‌آوری کرده و مفهوم اندازه‌ی کوچکترین مجموعه احاطه‌گر در گراف G را بکار بردند و با نماد $\gamma(G)$ نمایش دادند. پس از این مقاله مفهوم احاطه‌گری در اشکال گوناگونی تعریف و تعمیم یافت به‌طوری که امروزه به یکی از مهم‌ترین و جذاب‌ترین مباحث در نظریه‌ی گراف تبدیل شده است.

مجموعه‌های احاطه‌گر و توابع احاطه‌گر دو بخش اصلی این تعمیم‌ها را به خود اختصاص داده‌اند. هدف اصلی در اغلب این موارد به‌دست آوردن اندازه‌ی کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر یا یافتن کمترین وزن ممکن برای توابع احاطه‌گر می‌باشد. در این بخش ما مجموعه‌ها و توابع احاطه‌گر مورد نیاز در این رساله را بیان می‌کنیم.

^{۴۰} Subtree

^{۴۱} Rooted tree

^{۴۲} Root of the tree

^{۴۳} Child

^{۴۴} Father

^{۴۵} Double star

^{۴۶} Domination

^{۴۷} De Jaenisch

^{۴۸} Yaglom

^{۴۹} Claude Berge

^{۵۰} Coefficient of external stability

^{۵۱} Oystein Ore

^{۵۲} Dominating set

^{۵۳} Cockayne

^{۵۴} Hedentniemi

۱.۳.۱ مجموعه‌های احاطه‌گر

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V به‌طوری‌که $|V| = n$ ، و مجموعه یال‌های E باشد. مجموعه $S \subseteq V$ را یک **مجموعه‌ی احاطه‌گر** می‌نامیم، هرگاه برای هر رأس $v \in V$ ، $|N[v] \cap S| \geq 1$. مینیمم اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه‌گر در گراف G را **عدد احاطه‌گری** آن مجموعه نامیده و با $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود. به یک مجموعه‌ی احاطه‌گر G با اندازه‌ی $\gamma(G)$ ، یک **$\gamma(G)$ -مجموعه** گفته می‌شود.

تعمیم‌های مختلفی از مجموعه‌های احاطه‌گر ارائه شده است. در ادامه ما به تعدادی از این تعمیم‌ها به ویژه آن‌هایی که در این رساله مورد نیاز می‌باشند، اشاره می‌کنیم. آياسوامی^{۵۵} و ناتاراجان^{۵۶} [۶]، یکی دیگر از پارامترهای احاطه‌گری به نام احاطه‌گری جهشی را معرفی کردند. سپس این پارامتر در مقالاتی مانند [۲۴، ۵، ۲۱] مورد مطالعه قرار گرفت.

تعریف ۲.۳.۱. زیرمجموعه S از رئوس گراف G ، یک **مجموعه احاطه‌گر جهشی**^{۵۷} نامیده می‌شود هرگاه برای هر رأس $v \in V(G) - S$ ، رأسی مانند $u \in S$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $d(u, v) = 2$. **عدد احاطه‌گری جهشی**^{۵۸} گراف G ، $\gamma_h(G)$ ، برابر با اندازه کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر جهشی در گراف G می‌باشد.

تعریف ۳.۳.۱. مجموعه $S \subseteq V(G)$ را یک **مجموعه احاطه‌گر مستقل جهشی**^{۵۹} نامند، هرگاه S یک مجموعه احاطه‌گر جهشی باشد و هیچ دو رأسی از آن در فاصله ۲ از یکدیگر نباشند. **عدد احاطه‌گری مستقل جهشی**^{۶۰} را با نماد $\gamma_{hi}(G)$ نشان داده و برابر با اندازه کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر مستقل جهشی در گراف G می‌باشد.

۲.۳.۱ توابع احاطه‌گر

فرض کنید S یک مجموعه احاطه‌گر باشد. تابع $f: V \rightarrow \{0, 1\}$ با ضابطه $f(v) = 1$ برای هر $v \in S$ و در غیر این صورت $f(v) = 0$ را در نظر بگیرید. بوضوح این تابع متناظر با مجموعه احاطه‌گر S می‌باشد. حال فرض کنید برد این تابع مجموعه دیگری غیر از مجموعه $\{0, 1\}$ باشد. در این حالت رأسی که مقدار غیر صفر تحت این تابع می‌گیرد، عضو مجموعه احاطه‌گر جدید می‌باشد و همچنین این تابع، روش احاطه‌گری بر دیگر رئوس را نیز مشخص می‌کند. بنابراین با این نگرش انواع مختلفی از احاطه‌گری حاصل می‌شود. این نوع از احاطه‌گری را توابع احاطه‌گر گویند. در ادامه مفهوم تابع احاطه‌گر رومی، **تابع احاطه‌گر رومی جهشی**^{۶۱} و **تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی**^{۶۲} را بیان خواهیم کرد.

^{۵۵} Ayyaswamy

^{۵۶} Natarajan

^{۵۷} Hop dominating set

^{۵۸} Hop domination number

^{۵۹} Hop independent dominating set

^{۶۰} Hop independent domination number

^{۶۱} Hop Roman dominating function

^{۶۲} Hop Roman independent dominating function

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنید $G = (V(G), E(G))$ یک گراف باشد.

در این صورت تابع $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ ، یک **تابع احاطه گر رومی**^{۶۳} نامیده می شود هرگاه به ازای هر رأس $v \in V(G)$ با شرط $f(v) = 0$ رأسی مانند $u \in N(v)$ وجود داشته باشد به طوری که $f(u) = 2$. به عبارت دیگر، یک تابع احاطه گر رومی، یک رنگ آمیزی از رؤوس گراف با رنگ های $\{0, 1, 2\}$ می باشد به طوری که هر رأس با رنگ ۰ همسایه حداقل یک رأس با رنگ ۲ باشد. وزن تابع احاطه گر رومی f برابر است با $f(V) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$. هر تابع احاطه گر رومی مانند f را می توان با افزایی به صورت $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ نمایش داد. در این افزای به ازای هر $i = 0, 1, 2$ داریم: $V_i^f = \{v \in V(G) \mid f(v) = i\}$. وزن تابع f را می توان از تساوی $f(V) = |V_1^f| + 2|V_2^f|$ محاسبه نمود. **عدد احاطه گری رومی**^{۶۴} گراف G را با $\gamma_R(G)$ نشان داده و برابر با کوچکترین وزن در میان وزن های توابع احاطه گر رومی روی گراف G می باشد.

احاطه گری رومی اولین بار در سال ۱۹۹۹ توسط استوارت در [۳۲] مطالعه شد و سپس مورد توجه ریاضی دانان زیادی قرار گرفت و در مقالات زیادی از جمله [۱۴] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفت. تاکنون انواع مختلفی از احاطه گری رومی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته اند [۱۹، ۳۴، ۲۵، ۳۱]. در این رساله ما دو تعمیم از تابع احاطه گر رومی به نام احاطه گر رومی جهشی و احاطه گر مستقل رومی جهشی را به صورت زیر تعریف می کنیم.

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید $G = (V(G), E(G))$ یک گراف باشد. تابع $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ یک **تابع احاطه گر رومی جهشی**^{۶۵} نامیده می شود هرگاه به ازای هر رأس $v \in V(G)$ با شرط $f(v) = 0$ رأسی مانند $u \in N_2(v)$ وجود داشته باشد به طوری که $f(u) = 2$. وزن یک تابع احاطه گر رومی جهشی f برابر است با $f(V) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$. هر تابع احاطه گر رومی جهشی مانند f را می توان با افزایی به صورت $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ نمایش داد. در این افزای به ازای هر $i = 0, 1, 2$ داریم: $V_i^f = \{v \in V(G) \mid f(v) = i\}$. **عدد احاطه گری رومی جهشی**^{۶۶} گراف G را با $\gamma_{hR}(G)$ نشان داده و برابر با کوچکترین وزن در میان وزن های توابع احاطه گر رومی جهشی روی گراف G می باشد.

تعریف ۶.۳.۱. تابع احاطه گر رومی جهشی $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ یک **تابع احاطه گر مستقل رومی جهشی**^{۶۷} نامیده می شود هرگاه برای هر دو رأس $u, v \in V_1^f \cup V_2^f$ ، $d(u, v) \neq 2$. وزن یک تابع احاطه گر مستقل رومی جهشی f برابر است با $f(V) = \sum_{v \in V(G)} f(v)$. **عدد احاطه گری مستقل رومی جهشی**^{۶۸} گراف G را با $\gamma_{hRI}(G)$ نشان داده می شود و برابر با کوچکترین وزن در میان وزن های توابع احاطه گر مستقل رومی جهشی روی گراف G می باشد.

^{۶۳} Roman dominating function

^{۶۴} Roman domination number

^{۶۵} Hop Roman dominating function

^{۶۶} Hop Roman domination number

^{۶۷} Hop Roman independent dominating

function

^{۶۸} Hop Roman independent domination number

۴.۱ تاریخچه و کاربردهایی از مجموعه‌ها و توابع احاطه‌گر

در سال‌های اخیر مفهوم احاطه‌گری در گراف‌ها به دلیل کاربردهای زیاد آن در زمینه‌های مختلف همچون علوم کامپیوتر و شبکه‌های الکترونیکی مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته و رشد چشمگیری داشته است. در این بخش به تاریخچه و کاربردهای مجموعه‌ها و توابع احاطه‌گر رومی می‌پردازیم.

به نظر می‌رسد که بازی شطرنج الهام بخش مفهوم احاطه‌گری بوده است. در این بازی هدف احاطه شدن مربع‌های صفحه شطرنج با مهره‌های شطرنج می‌باشد. طبق قوانین بازی شطرنج، وزیر قادر است در جهت عمودی، افقی و مورب به تعداد دلخواه حرکت کند. این مفهوم برای نخستین بار توسط دیانیچ در سال ۱۸۶۲ روی صفحه‌ی شطرنج مورد استفاده قرار گرفت تا حداقل تعداد وزیر مورد نیاز برای پوشش یک صفحه شطرنج را تعیین کند. اما بعدها به‌عنوان بحث نظری در نظریه گراف‌ها بررسی و مطالعه گردید. در سال ۱۸۹۲ بال^{۶۹} در [۲۸] مسأله کمترین تعداد مهره‌های وزیر مورد نیاز جهت قرار گرفتن روی صفحه‌ی شطرنج به قسمی که هر خانه‌ای مورد حمله‌ی یک وزیر قرار گرفته و هیچ وزیری مورد حمله‌ی وزیر دیگری نباشد را مطرح کرد. این مسأله به مسأله‌ی ۵-وزیر مشهور شد. در این مسأله خانه وزیر مورد نظر، یک رأس و مربع‌هایی که وزیر می‌تواند در آن‌ها حرکت کند، رئوس مجاور با آن در نظر گرفته شده است.

مفهوم احاطه‌گری همراه با اقسام متنوع آن، گستره‌ی وسیعی از مطالعات در زمینه گراف را به خود اختصاص داده است. برگ^{۷۰} و آر^{۷۱} نخستین کسانی بودند که به بیان مفهوم احاطه‌گری در گراف‌ها پرداختند و در ادامه تعمیم‌های زیادی از این پارامتر با توجه به کاربردهای مختلف از آن بیان شده است. از کاربردهای مجموعه‌های احاطه‌گر می‌توان در مخابرات برای نصب دکل‌های آنتن در مناطقی از شهر یا انتخاب بهترین مکان‌ها برای احداث بیمارستان یا مراکز آتش‌نشانی و ... اشاره نمود. به‌عنوان مثال، فرض کنید قرار است در مناطقی از شهر دکل‌های مخابرات نصب شود به‌طوری‌که به تمامی نقاط شهر آنتن دهی مناسب انجام شده و همچنین از نظر اقتصادی نیز مقرون به صرفه باشد. یعنی با انتخاب کمترین نقاط برای نصب دکل به هدف مورد نظر دست پیدا کنیم. برای این منظور مناطق مختلف شهر را به‌عنوان رئوس گراف در نظر می‌گیریم و با توجه به برد آنتن دهی، در صورت نصب دکل در هر منطقه، آن مناطقی که آنتن دهی می‌شوند را با خطوطی به آن متصل می‌کنیم و به این ترتیب یال‌های گراف مورد نظر را رسم کرده و گرافی طراحی می‌کنیم.

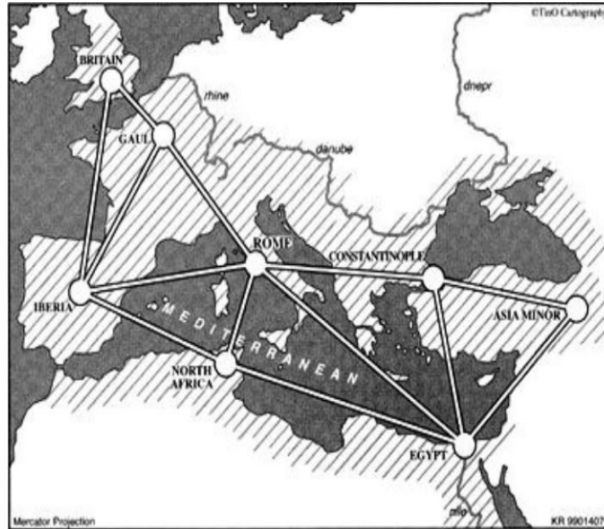
در ادامه به بیان تاریخچه توابع احاطه‌گر رومی می‌پردازیم. پیشینه این موضوع به استقرار واحدهای ارتش امپراطوری روم در قرن چهارم بعد از میلاد بر می‌گردد.

در حدود قرن چهارم قبل از میلاد مسیح امپراطوری روم مورد حمله قرار گرفت. نقشه امپراطوری روم را در شکل ۱.۱ می‌توانید ببینید. مدل ریاضی ما یک گراف $G = (V, E)$ با

^{۶۹}W. W Rouse Ball

^{۷۰}Berge

^{۷۱}Ore



شکل ۱.۱: نقشه امپراتوری روم.

مجموعه رئوس V و مجموعه یال های E است. هر رأس در گراف ما نمایشگر یک ناحیه در امپراتوری روم است و دو رأس با یک یال به هم متصل هستند اگر نقاط متناظرشان مجاور باشند. امپراتور کنستانتین مجبور شد که چهار ارتش خود را در هشت منطقه استقرار دهد تا از امپراتوری در مقابل این حملات دفاع کند. او می خواست طوری هر واحد ارتش را در این هشت منطقه استقرار دهد، که هر منطقه توسط یک یا دو واحد ارتش استقرار یافته در همان منطقه محافظت شود و یا در مجاورت یک منطقه با دو واحد ارتش باشد به طوری که در مواقع حمله یک واحد ارتش از این منطقه به منطقه بی دفاع فرستاده شود. امپراتور کنستانتین تصمیم گرفت که دو واحد ارتش در روم و دو واحد دیگر در قسطنطنیه استقرار پیدا کنند. بدین ترتیب تنها بریتانیا در مواقع حمله بی دفاع بود و به همین دلیل بعد از مدتی امپراتوری روم کنترل بریتانیا را از دست داد. مطمئناً دلایل بسیار زیاد و پیچدهای برای این موضوع وجود دارد که نمی توان آنها را با این مدل ساده توضیح داد. با این وجود استوارت در [۳۲] به درستی استدلال می کند که اگر امپراتور کنستانتین درک ریاضی قویتری داشت، شاید امپراتوری روم در مدت زمان بیشتری می توانست بریتانیا را حفظ کند.

فصل ۲

پیچیدگی احاطه گر جهشی

۱.۲ مقدمه

در این فصل ابتدا در بخش ۲.۲ در مورد نظریه پیچیدگی صحبت می‌کنیم. سپس در بخش ۳.۲ نتایج ارائه شده در مورد پیچیدگی مسأله تصمیم‌گیری احاطه‌گری جهشی را بیان می‌کنیم. و در بخش‌های ۴.۲، ۵.۲ و ۶.۲، به ترتیب، به بررسی پیچیدگی مسأله احاطه‌گری مستقل جهشی، تابع احاطه‌گر رومی جهشی، و تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی می‌پردازیم. ما نشان می‌دهیم مسأله تصمیم‌گیری برای هر سه مسأله فوق، حتی برای گراف‌های دوبخشی مسطح و گراف‌های وتری مسطح، NP -کامل هستند. برای بررسی پیچیدگی این مسائل از کاهش این مسائل به مسأله پوشش رأسی که در زیر بیان شده است، استفاده می‌کنیم.

مسأله پوشش رأسی.

نمونه: گراف غیرتهی G و عدد صحیح مثبت k .

سوال: آیا G دارای پوشش رأسی از اندازه حداکثر k می‌باشد؟

۲.۲ پیچیدگی محاسباتی

همان‌طور که در فصل ۱ ذکر شد، مجموعه‌های احاطه‌گر جهشی دارای کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف می‌باشند. بنابراین بررسی چگونگی حل این مسائل بسیار مهم می‌باشد.

در این بخش، سختی حل این مسائل بررسی می‌شود. نظریه پیچیدگی محاسباتی، شاخه‌ای از نظریه محاسبات در ریاضی و علوم کامپیوتر است که به بررسی دشواری حل مسائل، به صورت الگوریتمی می‌پردازد. بسیاری از این مسائل، مسائل بهینه‌سازی هستند. معمولاً می‌توان یک مسئله بهینه‌سازی را به شکل یک مسئله تصمیم‌گیری درآورد. بررسی سختی حل یک مسئله به طور مستقیم در مسائل بهینه‌سازی به کار نمی‌رود، بلکه سخت بودن مسئله تصمیم‌گیری متناظر با مسئله بهینه‌سازی از نظر پیچیدگی زمانی بررسی می‌شود. بنابراین، نشان دادن این که مسئله‌ای سخت است یا خیر، ما را به ناحیه مسائل تصمیم‌گیری محدود می‌کند. به طور کلی، مسائل تصمیم‌گیری با توجه به مرتبه زمانی حل خود، به دسته‌های متفاوتی تقسیم می‌شوند. دسته‌ای از آن‌ها مسائلی می‌باشند که برای حل آنها الگوریتم یا الگوریتم‌هایی با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای یافت شده است. این مسائل کلاس الگوریتم‌های معین یا الگوریتم‌های قطعی را تشکیل می‌دهند. این مسائل به **کلاس P** ^۱ تعلق دارند. لازم به ذکر است که **الگوریتم زمانی چندجمله‌ای**^۲، الگوریتمی است که در بدترین حالت، پیچیدگی زمانی آن تابع چندجمله‌ای از اندازه ورودی باشد. به طور خاص، کلاس P ، شامل تمام مسائلی می‌باشد که در زمان $O(n^k)$ قابل حل می‌باشند، جاییکه k یک عدد ثابت و n اندازه ورودی برای مساله می‌باشد. دسته دیگر از مسائل در **کلاس NP** ^۳ قرار دارند که شامل تمام مسائل تصمیم‌گیری است که می‌توان در زمان چندجمله‌ای درستی یک جواب داده شده برای مساله را بررسی و تایید کرد. بعنوان مثال، مساله دور همیلتنی در گراف جهتدار $D = (V, E)$ در نظر بگیرید. دنباله رئوس $\langle v_1, v_2, \dots, v_{|V|} \rangle$ از رأس‌های گراف D را بعنوان یک جواب داده شده برای این مساله در نظر بگیرید. آنگاه می‌توان در زمان چندجمله‌ای بررسی کرد و نشان داد که برای هر $i = 1, 2, \dots, |V| - 1$ ، $(v_i, v_{i+1}) \in E$ و همچنین $(v_{|V|}, v_1) \in E$.

بدیهی است که کلاس P زیرکلاس NP است. مهم‌ترین سؤالی که برای این کلاس‌ها در این نظریه وجود دارد این است که آیا $NP = P$. این باور گسترده وجود دارد که این تساوی نمی‌تواند درست باشد. X یک **مساله NP -سخت**^۴ است اگر هر مساله $Y \in NP$ به مساله X کاهش پیدا کند. همچنین، یک **مساله NP -کامل**^۵ است اگر متعلق به خانواده NP باشد و در عین حال NP -سخت نیز باشد. کلاس NP -کامل زیرکلاس کلاس‌های NP و NP -سخت است. در واقع کلاس NP -کامل فصل مشترک کلاس‌های NP و NP -سخت را تشکیل می‌دهد.

مساله NP -کامل اولین بار توسط کوک^۶ در سال ۱۹۷۱ مطرح شد [۱۶]. در این مقاله کوک ثابت کرد که مساله صدق پذیری^۷ یک مساله NP -کامل است. در سال ۱۹۷۲ کارپ^۸ بیست و یک مساله از مسائل ترکیبیاتی را در رده مسائل NP -کامل قرار داد [۲۳].

^۱ Polynomial^۲ Polynomial-time algorithm^۳ Non-deterministic Polynomial^۴ NP-hard^۵ NP-complete^۶ Cook^۷ Satisfiability^۸ Karp

برای نشان دادن اینکه آیا یک مسئله NP -کامل است یا نه، از مفهوم کاهش^۹ استفاده می‌کنیم.

برای درک بهتر مفهوم کاهش پذیری بین مسائل، فرض کنید X و Y دو مسئله باشند. مسئله X به مسئله Y کاهش پیدا می‌کند اگر و فقط اگر چنانچه یک الگوریتم معین با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای برای Y وجود داشته باشد، آنگاه بتوان با به کارگیری الگوریتم معین با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای که Y را حل می‌کند، X را با الگوریتمی معین و در زمان چندجمله‌ای حل کرد. در این رساله برای نشان دادن اینکه آیا یک مسئله NP -کامل است یا نه از مفهوم کاهش استفاده می‌کنیم. اجازه دهید یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری مانند A را در نظر بگیریم که می‌خواهیم آن را در پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای $O(n^k)$ حل کنیم. ورودی را به یک مسئله‌ی خاص به‌عنوان «نمونه‌ای» از این مسئله فراخوانی می‌کنیم. به‌عنوان مثال در مسئله‌ی مسیر، یک نمونه می‌تواند یک گراف خاص G باشد با دو رأس خاص u و v از G و مقداری مشخص برای پارامتر k . حال فرض می‌کنیم که یک مسئله‌ی تصمیم‌گیری دیگری با نام B داریم و می‌دانیم که این مسئله راه‌حلی در پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای دارد. درنهایت فرض می‌کنیم رویه‌ای داریم که هر نمونه a از مسئله‌ی A را به نمونه b از مسئله‌ی B با خصوصیات زیر تبدیل می‌کند یا «کاهش می‌دهد». عملیات کاهش دارای پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای است. جواب‌های هر دو مسئله یکسان است؛ یعنی جواب مسئله‌ی a «بلی» است اگر و فقط اگر جواب مسئله‌ی b «بلی» باشد. این رویه را الگوریتم کاهشی با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای می‌نامیم که روشی را برای حل مسئله‌ی A در پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای فراهم می‌کند. پس کلاً سه مرحله داریم:

- نمونه‌ی a از مسئله‌ی A را با استفاده از «الگوریتم کاهشی» با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای به نمونه‌ی b از مسئله‌ی B تغییر شکل می‌دهیم.
- الگوریتم تصمیم‌گیری با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای برای مساله B را بر روی نمونه‌ی b اجرا می‌کنیم.
- از جوابی که برای b به‌دست آورده‌ایم به‌عنوان جوابی برای مسئله‌ی a استفاده می‌کنیم. تا زمانی که هر یک از این مراحل دارای پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای است هر سه مرحله باهم نیز دارای پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای خواهد بود و می‌توانیم بگوییم که راهی با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای برای تصمیم‌گیری روی مسئله‌ی a پیدا کرده‌ایم. به عبارت دیگر، با «کاهش» مسئله‌ی A به مسئله‌ی B ، ما از سادگی B برای اثبات سادگی A استفاده کرده‌ایم.

در ادامه پیچیدگی محاسباتی هر یک از مسایل احاطه‌گری مستقل جهشی، تابع احاطه‌گر رومی جهشی، و تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی را با کاهش هر یک از این مسایل به مساله تصمیم‌گیری پوشش رأسی، که یک مساله NP -کامل است، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

^۹Reduction

۳.۲ پیچیدگی عدد احاطه گر جهشی

مسأله تصمیم گیری احاطه گر جهشی به صورت زیر می باشد:

مسأله احاطه گر جهشی.

نمونه: گراف غیر تهی G و عدد صحیح مثبت k .

سوال: آیا G دارای یک مجموعه احاطه گر جهشی از اندازه حداکثر k می باشد؟

هنینگ^{۱۰} و جعفری راد^{۱۱} با استفاده از کاهش مسأله تصمیم گیری احاطه گر جهشی به مسأله تصمیم گیری پوشش رأسی، پیچیدگی مسأله احاطه گر جهشی را بررسی کردند و نتایج زیر را ارائه دادند.

قضیه ۱.۳.۲. [۲۱] مسأله احاطه گر جهشی حتی برای گراف های دوبخشی مسطح یک مسأله NP -کامل است.

قضیه ۲.۳.۲. [۲۱] مسأله احاطه گر جهشی حتی برای گراف های وتری مسطح یک مسأله NP -کامل است.

۴.۲ پیچیدگی احاطه گر مستقل جهشی

مسأله تصمیم گیری زیر را در نظر بگیرید:

مسأله احاطه گر مستقل جهشی.

نمونه: گراف غیر تهی G و عدد صحیح مثبت k .

سوال: آیا گراف G دارای مجموعه احاطه گر مستقل جهشی از اندازه حداکثر k می باشد؟

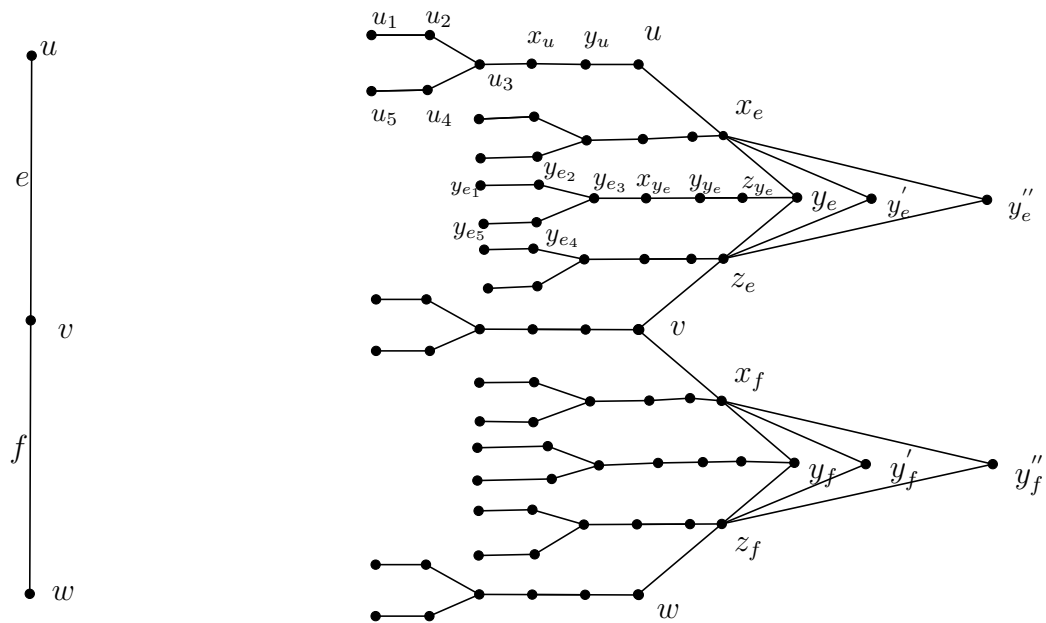
نشان می دهیم که این مسأله حتی برای گراف های دوبخشی مسطح یا گراف های وتری مسطح نیز NP -کامل است.

قضیه ۱.۴.۲. مسأله احاطه گر مستقل جهشی برای گراف های دوبخشی مسطح، NP -کامل است.

برهان. مسأله احاطه گر مستقل جهشی یک مسأله NP می باشد، زیرا در زمان چند جمله ای می توان صحت یک نمونه داده شده از مسأله را بررسی کرد. حال مسأله احاطه گر مستقل جهشی را به مسأله پوشش رأسی کاهش داده، و نشان می دهیم یکی از این مسائل داری جواب است، اگر و فقط اگر دیگری دارای جواب باشد.

^{۱۰}Henning

^{۱۱}Jafari Rad



شکل ۱.۲: گراف H حاصل از گراف $G = P_3$ در اثبات قضیه ۱.۴.۲. (a) G (b) H

فرض کنید G یک گراف دوبخشی مسطح همبند از مرتبه n_G و اندازه $m_G \geq 2$ باشد. همچنین فرض کنید H گرافی باشد که از گراف G به صورت زیر حاصل می‌شود. هر یال $e = uv \in E(G)$ را سه بار تقسیم می‌کنیم. فرض کنید رئوس x_e, y_e, z_e رئوس حاصل از تقسیم یال e باشند به طوری که u مجاور x_e ، v مجاور z_e و y_e مجاور هر دو رأس x_e و z_e باشند. برای هر رأس $v \in V(G) \cup \{x_e, z_e \mid e \in E(G)\}$ ، مسیر پنج رأسی $P_5^v : v_1 v_2 \dots v_5$ را اضافه می‌کنیم و رأس v_3 را به رأس v اضافه می‌کنیم و سپس یال $v_3 v$ را دو بار تقسیم می‌کنیم. فرض کنید x_v و y_v دو رأس حاصل از دو بار تقسیم یال $v_3 v$ باشند به طوری که x_v مجاور v_3 و y_v مجاور v باشد. برای هر رأس $v \in \{y_e \mid e \in E(G)\}$ مسیر $P_5^v : v_1 v_2 \dots v_5$ را متصل می‌کنیم و رأس v_3 را به رأس v وصل می‌کنیم و سپس یال $v_3 v$ را سه بار تقسیم می‌کنیم. فرض کنید x_v, y_v, z_v رئوس حاصل از سه بار تقسیم یال $v_3 v$ باشند به طوری که x_v مجاور v_3 ، z_v مجاور v و y_v مجاور هر دو رأس x_v و z_v باشد. در پایان برای هر یال $e = uv \in E(G)$ دو رأس جدید y'_e و y''_e را اضافه می‌کنیم و هر یک از این دو رأس را به هر دو رأس x_e و z_e وصل می‌کنیم. گراف حاصل H دارای مرتبه $n_H = 8n_G + 27m_G$ و تعداد یال $m_H = 7n_G + 30m_G$ می‌باشد. در شکل ۱.۲، گراف H حاصل از گراف $G = P_3$ نشان داده شده است.

در ادامه نشان می‌دهیم که گراف G دارای مجموعه رئوس پوششی از اندازه حداکثر k می‌باشد اگر و فقط اگر H دارای یک مجموعه احاطه‌گر مستقل جهشی از اندازه حداکثر $k + 2n_G + 6m_G$ باشد. ابتدا فرض کنید که گراف G دارای مجموعه پوشش رأسی S_G از اندازه

حداکثر k باشد. قرار دهید

$$S_H = S_G \cup \{v_3, v_4 \mid v \in S_G\} \cup \{x_v, v_3 \mid v \in ((V(G) - S_G) \cup \{x_e, z_e, y_e \mid e \in E(G)\})\}.$$

برای هر دوتایی $d(a, b) \neq 2, a, b \in S_H$ نشان می دهیم که S_H یک مجموعه احاطه گر مستقل جهشی از اندازه حداکثر $k + 2n_G + 6m_G$ می باشد. بوضوح هر رأس از مجموعه $\{y_e, y'_e, y''_e : e \in E(G)\}$ توسط S_G احاطه جهشی می شود. همچنین برای هر رأس $v \in S_G$ ، هر عضو از مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_5\} \cup \{x_v, y_v\}$ توسط مجموعه $\{v_3, v_4\}$ به صورت جهشی احاطه می شوند. برای هر رأس $v \in V(G) - S_G$ ، اعضای مجموعه $\{v_1, v_2, \dots, v_5\} \cup \{x_v, y_v, v\}$ توسط مجموعه $\{v_3, x_v\}$ به صورت جهشی احاطه می شوند. برای هر یال $e \in E(G)$ ، اعضای مجموعه $\{y_{e1}, y_{e2}, \dots, y_{e5}\} \cup \{x_{y_e}, y_{y_e}, z_{y_e}\}$ توسط مجموعه $\{y_{e3}, x_{y_e}\}$ به صورت جهشی احاطه می شوند. برای هر یال $e \in E(G)$ ، اعضای مجموعه $\{x_{e1}, x_{e2}, \dots, x_{e5}\} \cup \{x_{x_e}, y_{x_e}, x_e\}$ توسط مجموعه $\{x_{e3}, x_{x_e}\}$ به صورت جهشی احاطه می شوند. در پایان برای هر یال $e \in E(G)$ ، اعضای مجموعه $\{z_{e1}, z_{e2}, \dots, z_{e5}\} \cup \{x_{z_e}, y_{z_e}, z_e\}$ توسط مجموعه $\{z_{e3}, x_{z_e}\}$ به صورت جهشی احاطه می شوند. در نتیجه مجموعه S_H یک مجموعه احاطه گر مستقل جهشی از اندازه حداکثر $k + 2n_G + 6m_G$ می باشند.

حال فرض کنید که گراف H دارای مجموعه احاطه گر مستقل جهشی S_H از اندازه حداکثر $k + 2n_G + 6m_G$ باشد. بوضوح برای هر رأس v به طوری که $v \in V(G) \cup \{x_e, z_e, y_e \mid e \in E(G)\}$ و برای هر رأس v به طوری که $|S_H \cap \{v_1, v_5, v_3\}| \geq 1$ و $|S_H \cap \{v_2, v_4, x_v\}| \geq 1$ به علاوه برای هر یال $e = uv \in E(G)$ داریم

$$S_H \cap (\{v, u, y_e, y'_e, y''_e\} \cup \{y_v \mid v \in \{x_e, z_e, y_e \mid e \in E(G)\}\}) \neq \emptyset.$$

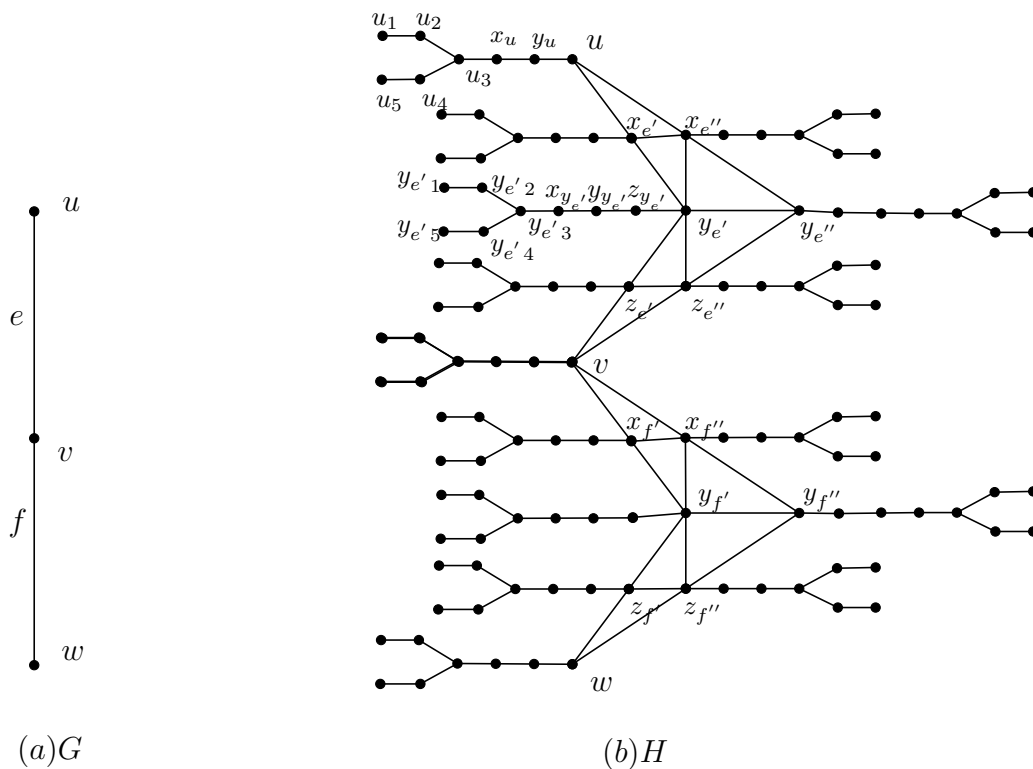
اگر برای یال $e = uv \in E(G)$ داشته باشیم $S_H \cap \{v, u\} = \emptyset$ ، آن گاه یک رأس از مجموعه $S_H \cap (\{y_e, y'_e, y''_e\} \cup \{y_v \mid v \in \{x_e, z_e, y_e \mid e \in E(G)\}\})$ حذف می کنیم و دقیقاً یکی از رئوس u یا v را به S_H اضافه می کنیم. بنابراین می توانیم فرض کنیم که برای هر یال $e = uv \in E(G)$ $S_H \cap \{v, u\} \neq \emptyset$. بنابراین $S_G = S_H \cap V(G)$ یک مجموعه پوششی برای گراف G از اندازه حداکثر $|S_H| - 2n_G - 6m_G$ می باشد. لذا گراف G دارای پوشش رأسی از اندازه حداکثر k می باشد. بنابراین اثبات کامل است. $\square$

در ادامه به بررسی پیچیدگی این مسأله در گراف های وتری مسطح می پردازیم.

قضیه ۲.۴.۲. مسأله تصمیم گیری احاطه گر مستقل جهشی برای گراف های وتری مسطح NP -کامل است.

برهان. همانطور که در اثبات قضیه ۱.۴.۲ بیان شده است، مسأله احاطه گر مستقل جهشی یک مسأله NP -کامل است. حال مسأله احاطه گر مستقل جهشی را به مسأله پوشش رأسی کاهش می دهیم و لذا یکی از این مسائل داری جواب است اگر و فقط اگر دیگری دارای جواب باشد.

فرض کنید G یک گراف وتری مسطح از مرتبه n_G و اندازه $m_G \geq 2$ باشد. فرض کنید H گرافی باشد که از گراف G به صورت زیر به دست می آید: ابتدا هر یال $e = vu \in E(G)$ را با یک یال دوگانه $e' = uv$ و $e'' = uv$ جایگزین می کنیم. سپس هر یک از دو یال e' و e'' را سه بار تقسیم می کنیم. فرض کنید $x_{e'}, y_{e'}, z_{e'}$ رئوس حاصل از سه بار تقسیم یال e' باشند، و $x_{e''}, y_{e''}, z_{e''}$ رئوس حاصل از سه بار تقسیم یال e'' باشند به طوری که $x_{e'}$ و $x_{e''}$ مجاور به رأس u ، رئوس $z_{e'}$ و $z_{e''}$ مجاور رأس v ، رأس $y_{e'}$ مجاور رئوس $x_{e'}$ و $z_{e'}$ ، رأس $y_{e''}$ مجاور رئوس $x_{e''}$ و $z_{e''}$ باشد. سپس یال های $x_{e'}x_{e''}$ ، $y_{e'}y_{e''}$ ، $z_{e'}z_{e''}$ ، $y_{e'}x_{e''}$ و $y_{e''}z_{e'}$ را اضافه می کنیم. در ادامه برای هر رأس $v \in V(G) \cup \{x_{e'}, x_{e''}, z_{e'}, z_{e''} \mid e \in E(G)\}$ مسیر پنج رأسی $P_5^v : v_1v_2...v_5$ را اضافه می کنیم و رأس v_3 را به رأس v وصل می کنیم، سپس یال v_3v را دوبار تقسیم می کنیم. فرض کنید x_v و y_v دو رأس حاصل از تقسیم یال v_3v باشند به طوری که x_v مجاور v_3 و y_v مجاور v می باشد. برای هر رأس $v \in \{y_{e'}, y_{e''} \mid e \in E(G)\}$ مسیر پنج رأسی $P_5^v : v_1v_2...v_5$ را اضافه می کنیم و سپس رأس v_3 را به رأس v وصل می کنیم و سپس یال v_3v را سه بار تقسیم می کنیم. فرض کنید x_v ، y_v و z_v رئوس حاصل از تقسیم یال v_3v باشند به طوری که x_v مجاور رأس v_3 ، z_v مجاور v و y_v مجاور هر دو رأس x_v و z_v باشد. گراف حاصل شده H یک گراف وتری مسطح از مرتبه $n_H = 8n_G + 50m_G$ و اندازه $7n_G + 57m_G$ می باشد. در شکل ۲.۲، گراف H حاصل از گراف $G = P_3$ نشان داده شده است. در ادامه نشان می دهیم که گراف G



شکل ۲.۲: گراف H حاصل از گراف $G = P_3$ در اثبات قضیه ۲.۴.۲.

دارای یک پوشش رأسی از اندازه حداکثر k می باشد اگر و فقط اگر گراف H دارای یک مجموعه احاطه گر مستقل جهشی از اندازه حداکثر $k + 2n_G + 12m_G$ باشد. ابتدا فرض کنید که G دارای پوشش رأسی S_G از اندازه حداکثر k باشد. قرار دهید

$$S_H = S_G \cup \{v_3, v_4 \mid v \in S_G\} \cup \{v_3, x_v \mid v \in ((V(G) - S_G) \cup \{x_{e'}, x_{e''}, z_{e'}, z_{e''}, y_{e'}, y_{e''} \mid e \in E(G)\})\}.$$

برای هر دو تایی $a, b \in S_H$ داریم $d(a, b) \neq 2$. نشان می دهیم که S_H یک مجموعه احاطه گر مستقل جهشی از اندازه حداکثر $k + 2n_G + 12m_G$ می باشد. هر رأس در $\{y_{e'}, y_{e''} : e \in E(G)\}$ توسط مجموعه S_G به صورت جهشی احاطه می شود. برای هر رأس $v \in S_G$ ، اعضای $\{v_1, v_2, \dots, v_5\} \cup \{x_v, y_v\}$ توسط مجموعه $\{v_3, v_4\}$ به صورت جهشی احاطه می شوند. برای هر یال $e \in E(G)$ ، اعضای مجموعه $\{y_{e'_1}, y_{e'_2}, \dots, y_{e'_5}\} \cup \{y_{e''_1}, y_{e''_2}, \dots, y_{e''_5}\}$ به صورت جهشی احاطه می شوند. همچنین برای هر یال $e \in E(G)$ ، اعضای مجموعه $\{y_{e'_3}, x_{y_{e'}}$ توسط مجموعه $\{y_{e''_1}, y_{e''_2}, \dots, y_{e''_5}\} \cup \{x_{y_{e''}}, y_{y_{e''}}, z_{y_{e''}}\}$ به صورت جهشی احاطه می شوند. برای هر یال $e \in E(G)$ ، اعضای مجموعه $\{x_{e'_1}, x_{e'_2}, \dots, x_{e'_5}\} \cup \{x_{e''_1}, x_{e''_2}, \dots, x_{e''_5}\}$ و هر رأس در مجموعه $\{x_{e'_3}, x_{x_{e'}}$ توسط مجموعه $\{x_{e''_3}, x_{x_{e''}}\}$ به صورت جهشی احاطه می شوند. برای هر یال $e \in E(G)$ ، اعضای $\{z_{e'_1}, z_{e'_2}, \dots, z_{e'_5}\} \cup \{x_{z_{e'}}, y_{z_{e'}}, z_{e'}\}$ توسط مجموعه $\{z_{e''_1}, z_{e''_2}, \dots, z_{e''_5}\} \cup \{x_{z_{e''}}, y_{z_{e''}}, z_{e''}\}$ به صورت جهشی احاطه می شوند. بنابراین S_H یک مجموعه احاطه گر مستقل جهشی از اندازه حداکثر $k + 2n_G + 12m_G$ می باشد.

حال فرض کنید که H دارای مجموعه احاطه گر مستقل جهشی S_H از اندازه حداکثر

$$k + 2n_G + 12m_G \text{ باشد.}$$

برای هر رأس $v \in V(G) \cup \{x_{e'}, x_{e''}, z_{e'}, z_{e''}, y_{e'}, y_{e''} \mid e \in E(G)\}$

$$|S_H \cap \{v_1, v_5, v_3\}| \geq 1$$

و همچنین برای هر رأس $v \in V(G) \cup \{x_{e'}, x_{e''}, z_{e'}, z_{e''}, y_{e'}, y_{e''} \mid e \in E(G)\}$

$$|S_H \cap \{v_2, v_4, x_v\}| \geq 1.$$

به علاوه برای هر یال $e = uv \in E(G)$ داریم

$$S_H \cap (\{v, u, y_{e''}, y_{e'}\} \cup \{y_v \mid v \in \{x_{e'}, x_{e''}, z_{e'}, z_{e''}, y_{e'}, y_{e''} \mid e \in E(G)\} \cup \{z_{y_{e'}}, z_{y_{e''}} : e \in E(G)\}) \neq \emptyset.$$

اگر برای یال $e = uv \in E(G)$ $S_H \cap \{v, u\} = \emptyset$ باشد، آن گاه یک رأس از مجموعه

$$S_H \cap (\{y_{e''}, y_{e'}\} \cup \{y_v \mid v \in \{x_{e'}, x_{e''}, z_{e'}, z_{e''}, y_{e'}, y_{e''} \mid e \in E(G)\} \cup \{z_{y_{e'}}, z_{y_{e''}} : e \in E(G)\})$$

حذف می کنیم و دقیقاً یکی از دو رأس u یا v را به مجموعه S_H اضافه می کنیم. بنابراین می توان

فرض کرد که برای هر یال $e = uv \in E(G)$ $S_H \cap \{v, u\} \neq \emptyset$. بنابراین $S_G = S_H \cap V(G)$

پوشش رأسی برای گراف G از اندازه حداکثر $|S_H| - 2n_G - 12m_G$ می باشد. لذا G دارای پوشش

رأسی از اندازه حداکثر k می باشد. بنابراین اثبات قضیه کامل است. $\square$

۵.۲ پیچیدگی تابع احاطه‌گر رومی جهشی

در این بخش پیچیدگی مسأله تابع احاطه‌گر رومی جهشی مورد بررسی قرار می‌گیرد. مسأله تصمیم‌گیری زیر را در نظر بگیرید:

مسأله تابع احاطه‌گر رومی جهشی.

نمونه: گراف غیرتهی G و عدد صحیح مثبت k .

سوال: آیا گراف G دارای تابع احاطه‌گر رومی جهشی از اندازه حداکثر k می‌باشد؟

در ادامه نشان می‌دهیم که مسأله تابع احاطه‌گر رومی جهشی حتی برای گراف‌های دوبخشی مسطح و گراف‌های وتری مسطح نیز NP -کامل است.

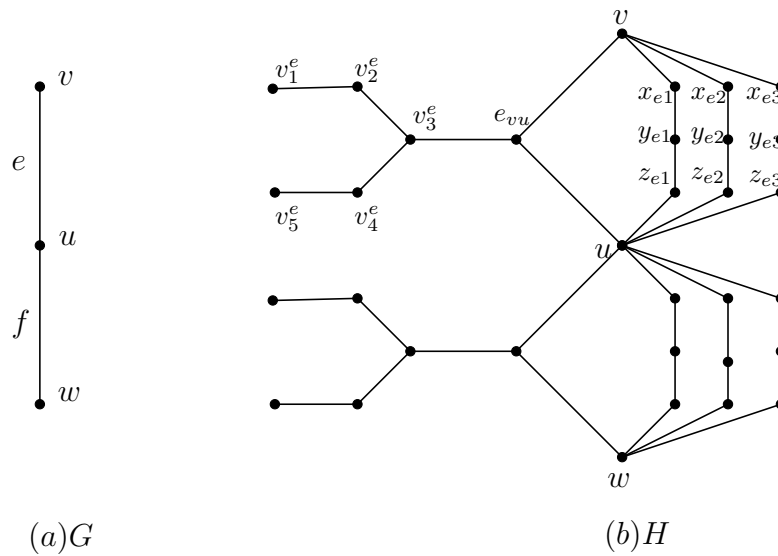
قضیه ۱.۵.۲. مسأله تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای گراف‌های دوبخشی مسطحی NP -کامل است.

برهان. مسأله تابع احاطه‌گر رومی جهشی یک مسأله NP است، زیرا می‌توان در زمان چندجمله‌ای به سوال یک نمونه از این مسأله پاسخ داد. حال مسأله تابع احاطه‌گر رومی جهشی را به مسأله پوشش رأسی کاهش می‌دهیم و لذا یکی از این مسائل داری جواب است اگر و فقط اگر دیگری دارای جواب باشد.

فرض کنید G یک گراف همبند دوبخشی مسطح از مرتبه n_G و اندازه $m_G \geq 2$ باشد. همچنین فرض کنید که H گرافی باشد که از گراف G به صورت زیر به دست می‌آید: ابتدا هر یال $e = vu \in E(G)$ را به یال سه گانه $e_1 = vu, e_2 = vu, e_3 = vu$ تبدیل می‌کنیم و سپس هر یک از یال‌های e_1, e_2, e_3 را سه بار تقسیم می‌کنیم. فرض کنید رئوس $x_{e_i}, y_{e_i}, z_{e_i}$ رأس‌هایی باشند که از تقسیم هر یال e_i برای $i = 1, 2, 3$ ، حاصل می‌شوند به طوری که رأس x_{e_i} مجاور رأس v ، رأس z_{e_i} مجاور رأس u ، و همچنین برای $i = 1, 2, 3$ ، $d(y_{e_i}, v) = d(y_{e_i}, u) = 2$. برای هر یال $e = vu \in E(G)$ ، رأس جدید e_{vu} و مسیر $P_5^e : v_1^e v_2^e \dots v_5^e$ را اضافه می‌کنیم و رأس e_{vu} را به رئوس v و v_3^e متصل می‌کنیم. گراف به دست آمده H دارای مرتبه $n_H = n_G + 15m_G$ و اندازه $m_H = 19m_G$ می‌باشد. در شکل ۳.۲، گراف H حاصل از گراف $G = P_3$ نشان داده شده است. با توجه به اینکه G همبند و مسطح می‌باشد، گراف H نیز همبند و مسطح می‌باشد به علاوه با توجه به روش ساخت، دوبخشی بودن گراف H واضح است. بنابراین H یک گراف دوبخشی مسطح همبند می‌باشد.

در ادامه نشان می‌دهیم که گراف G دارای پوشش رأسی از اندازه حداکثر k می‌باشد اگر و فقط اگر گراف H دارای یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی از وزن حداکثر $2k + 4m_G$ باشد. ابتدا فرض کنید که G دارای پوشش رأسی S_G از اندازه حداکثر k باشد. قرار دهید

$$S_H = S_G \cup \bigcup_{e=uv \in E(G)} \{v_3^e, e_{vu}\}.$$



شکل ۳.۲: H حاصل از گراف $G = P_3$ در اثبات قضیه ۱.۵.۲.

نشان می‌دهیم که $f = (V(H) - S_H, \emptyset, S_H)$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف H از اندازه حداکثر $2k + 4m_G$ می‌باشد. برای هر یال $e = vu \in E(G)$ ، رأس v_3^e رؤس v_1^e, v_5^e و u در گراف H را احاطه رومی جهشی می‌کند. همچنین رأس e_{vu} رؤس v_2^e, v_4^e و همسایه‌های v و u در گراف H را احاطه رومی جهشی می‌کند. برای هر یال $e \in E(G)$ با توجه به اینکه S_G یک پوشش رأسی برای گراف G می‌باشد، رؤس y_{e1}, y_{e2}, y_{e3} توسط مجموعه S_G در گراف H احاطه رومی جهشی می‌شوند. بنابراین تابع f یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف H از وزن حداکثر $2k + 4m_G$ می‌باشد.

در ادامه فرض کنید که $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف H از وزن حداکثر $2k + 4m_G$ باشد. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که f یک γ_{hR} -تابع برای گراف H می‌باشد.

اگر برای یال $e \in E(G)$ باشد، $f(v_1^e) + f(v_3^e) + f(v_5^e) \leq 1$ ، آن‌گاه v_1^e یا v_5^e توسط تابع f احاطه رومی جهشی نمی‌شوند، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e \in E(G)$ ، $f(v_1^e) + f(v_3^e) + f(v_5^e) \geq 2$. همچنین اگر برای یال $e \in E(G)$ ، $f(v_2^e) + f(v_4^e) + f(e_{vu}) \leq 1$ باشد، آن‌گاه رأس v_2^e یا رأس v_4^e توسط تابع f احاطه رومی جهشی نمی‌شوند، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e \in E(G)$ ، $f(v_2^e) + f(v_4^e) + f(e_{vu}) \geq 2$.

حال فرض کنید برای یال $e \in E(G)$ ، $f(v_2^e) + f(v_4^e) + f(e_{vu}) \geq 3$. در این صورت تابع g با ضابطه $g(v) = f(v)$ و در غیر این صورت $g(v) = 0$ ، $g(v_4^e) = 0$ ، $g(v_2^e) = 0$ ، $g(e_{vu}) = 2$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف H با وزن کمتر از $\gamma_{hR}(H)$ می‌باشد، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e \in E(G)$ ، $f(v_2^e) + f(v_4^e) + f(e_{vu}) = 2$. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که برای هر یال $e \in E(G)$ ، $f(v_1^e) + f(v_3^e) + f(v_5^e) = 2$.

اگر یال $e \in E(G)$ وجود داشته باشد به طوری که برای $i = 1, 2, 3$ ، $f(x_{e_i}) > 0$ یا $f(z_{e_i}) > 0$ ، آن گاه تابع g با ضابطه $g(v_2^e) = g(v_4^e) = 0$ ، $g(e_{vu}) = 2$ ، $g(z_{e_i}) = g(x_{e_i}) = 0$ برای هر $i = 1, 2, 3$ و در غیر این صورت $g(z) = f(z)$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای گراف H از وزن $g(V) < f(V)$ می‌باشد، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e \in E(G)$ و برای $i = 1, 2, 3$ ، $f(z_{e_i}) = f(x_{e_i}) = 0$.

اگر یال $e = uv \in E(G)$ وجود داشته باشد به طوری که برای هر $i = 1, 2, 3$ ، $f(y_{e_i}) > 0$ ، آن گاه تابع g با ضابطه $g(u) = 2$ ، $g(y_{e_1}) = g(y_{e_2}) = g(y_{e_3}) = 0$ و در غیر این صورت $g(z) = f(z)$ ، یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی با وزن کمتر از $f(V)$ می‌باشد، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e = uv \in E(G)$ عدد صحیح $i \in \{1, 2, 3\}$ وجود دارد به طوری که $f(y_{e_i}) = 0$. با توجه به اینکه y_{e_i} توسط تابع f احاطه رومی جهشی می‌شود، نتیجه می‌گیریم که $f(u) = 2$ یا $f(v) = 2$. در این صورت می‌توان دید که برای هر $j \in \{1, 2, 3\} - \{i\}$ ، $f(y_{e_j}) = 0$. لذا هر یال $e = uv \in E(G)$ دارای حداقل یک رأس در مجموعه V_2^f می‌باشد. بنابراین $S_G = V_2^f \cap V(G)$ یک پوشش رأسی برای گراف G از اندازه حداکثر $\frac{1}{2}(\gamma_{HR}(H) - 4m_G)$ می‌باشد. بنابراین اثبات کامل است. $\square$

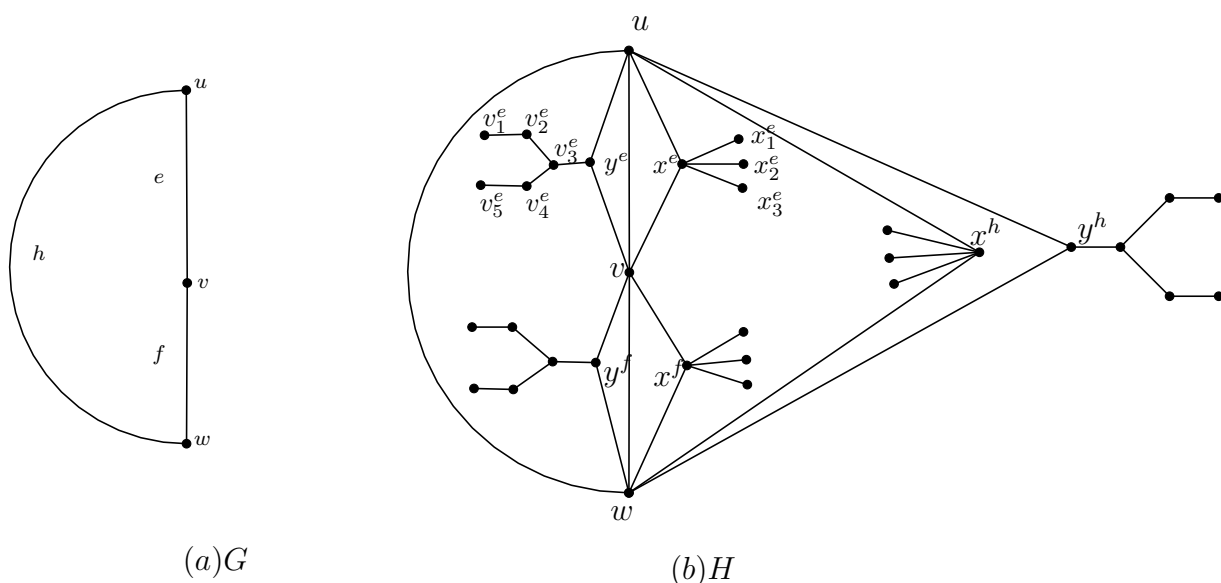
در قضیه بعدی پیچیدگی این مسأله را روی گراف‌های وتری مسطح بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲.۵.۲. مسأله تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای گراف‌های وتری مسطح NP -کامل است.

برهان. مسأله تابع احاطه‌گر رومی جهشی یک مسأله NP است، زیرا به راحتی می‌توان در زمان چند جمله‌ای به سوال یک نمونه از این مسأله پاسخ داد. حال مسأله تابع احاطه‌گر رومی جهشی را به مسأله پوشش رأسی کاهش می‌دهیم و لذا یکی از این مسائل دارای جواب است اگر و فقط اگر دیگری دارای جواب باشد.

فرض کنید G گرافی وتری مسطح همبند از مرتبه n_G و اندازه $m_G \geq 2$ باشد. فرض کنید H گرافی باشد که از گراف G به صورت زیر حاصل می‌شود. برای هر یال $e = uv \in E(G)$ دو رأس جدید x^e و y^e را اضافه می‌کنیم و هر کدام از آن‌ها را به هر دو رأس u و v وصل می‌کنیم. سپس سه برگ x_1^e, x_2^e و x_3^e را به رأس x^e اضافه می‌کنیم. در ادامه یک P_5 -مسیر $v_1^e v_2^e v_3^e v_4^e v_5^e$ را اضافه می‌کنیم و رأس v_3^e را به رأس y^e وصل می‌کنیم. گراف حاصل شده H دارای مرتبه $n_H = n_G + 10m_G$ و اندازه $m_H = 13m_G$ می‌باشد. در شکل ۴.۲، گراف H حاصل از گراف $G = C_3$ نشان داده شده است.

نشان می‌دهیم که گراف G دارای پوشش رأسی از اندازه حداکثر k می‌باشد اگر و فقط اگر گراف H دارای یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی از وزن حداکثر $2k + 4m_G$ باشد. ابتدا فرض



شکل ۴.۲: H حاصل از گراف $G = C_3$ در اثبات قضیه ۲.۵.۲.

کنید که گراف G دارای پوشش رأسی S_G از اندازه حداکثر k باشد. قرار دهید

$$S_H = S_G \cup \bigcup_{e=uv \in E(G)} \{v_3^e, y^e\}.$$

برای هر یال $e = uv \in E(G)$ رأس v_3^e رؤس $v_1^e, v_2^e, v_4^e, v_5^e$ و u در گراف H را احاطه جهشی می‌کند. همچنین رأس y^e رؤس v_1^e, v_2^e, v_4^e و x^e را احاطه جهشی می‌کند. از طرفی با توجه به پوشش رأسی بودن مجموعه S_G برای گراف G می‌توان دید که برای هر یال $e \in E(G)$ رؤس x_1^e, x_2^e و x_3^e توسط مجموعه S_G احاطه جهشی می‌شوند. بنابراین مجموعه S_H یک مجموعه احاطه‌گر رومی جهشی برای گراف G است و همچنین تابع $f = (V(H) - S_H, \emptyset, S_H)$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی از اندازه حداکثر $2k + 4m_G$ برای گراف H می‌باشد.

در ادامه فرض کنید که $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای گراف H از اندازه حداکثر $2k + 4m_G$ باشد. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنیم که f یک $\gamma_{hR}(H)$ -تابع می‌باشد. اگر برای یال $e \in E(G)$ ، $f(v_1^e) + f(v_3^e) + f(v_5^e) \leq 1$ باشد، آن‌گاه رأس v_1^e یا رأس v_5^e توسط تابع f احاطه رومی جهشی نمی‌شوند، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e \in E(G)$ ، $f(v_1^e) + f(v_3^e) + f(v_5^e) \geq 2$ است. اگر برای یال $e \in E(G)$ ، $f(v_2^e) + f(v_4^e) + f(y^e) \leq 1$ باشد، آن‌گاه رأس v_2^e یا رأس v_4^e توسط تابع f احاطه رومی جهشی نمی‌شوند، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e \in E(G)$ ، $f(v_2^e) + f(v_4^e) + f(y^e) \geq 2$ است.

حال فرض کنید برای یال $e \in E(G)$ ، $f(v_2^e) + f(v_4^e) + f(y^e) \geq 3$ باشد. در این صورت تابع g با ضابطه $g(v) = f(v)$ و در غیر این صورت $g(v) = 0$ ، $g(y^e) = 2$ ، $g(v_2^e) = g(v_4^e) = 0$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی با وزن کمتر از $f(V)$ می‌باشد، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e \in E(G)$ ، $f(v_2^e) + f(v_4^e) + f(y^e) = 2$ است. همچنین می‌توان نشان داد که برای هر یال

$$f(v_1^e) + f(v_3^e) + f(v_5^e) = 2, e \in E(G)$$

اگر یال $e = uv \in E(G)$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $i = 1, 2, 3$ ، $f(x_i^e) > 0$ باشد، آن‌گاه تابع g با ضابطه $g(x_i^e) = 0$ برای هر $i = 1, 2, 3$ و $g(u) = 2$ در غیر این صورت $g(z) = f(z)$ ، یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی با وزن کمتر از $f(V)$ می‌باشد، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e = uv \in E(G)$ عدد صحیح $i \in \{1, 2, 3\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x_i^e) = 0$. اگر برای هر یال $e \in E(G)$ ، $f(x_1^e) + f(x_2^e) + f(x_3^e) \geq 3$ باشد، آن‌گاه می‌توان تابع احاطه‌گر رومی جهشی g با وزن کمتر از $f(V)$ روی گراف H تعریف کرد، که یک تناقض است.

$$f(x_1^e) + f(x_2^e) + f(x_3^e) \leq 2, e \in E(G)$$

بنابراین برای هر یال $e \in E(G)$ با $f(x_1^e) + f(x_2^e) + f(x_3^e) = 0$ داریم $f(u) = 2$ یا $f(v) = 2$. فرض کنید که برای یال $e \in E(G)$ ، $f(x_1^e) + f(x_2^e) + f(x_3^e) > 0$.

ابتدا فرض کنیم $f(x_1^e) + f(x_2^e) + f(x_3^e) = 1$. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $f(x_1^e) = 1$. در این صورت $f(u) = 2$ یا $f(v) = 2$. در این صورت با تغییر وزن رأس x_1^e به 0، یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی با وزن کمتر از $\gamma_{hR}(H)$ حاصل می‌شود، که یک تناقض است. بنابراین $f(x_1^e) + f(x_2^e) + f(x_3^e) > 1$ و لذا $f(x_1^e) + f(x_2^e) + f(x_3^e) = 2$. مثل قبل می‌توان دید که برای $i = 1, 2, 3$ ، $f(x_i^e) \neq 1$. بنابراین عدد صحیح $i \in \{1, 2, 3\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(x_i^e) = 2$. در این صورت $f(u) = f(v) = 0$. حال ما رأس x_i^e را جایگزین یکی از دو رأس u یا v در V_2^f می‌کنیم. در این صورت نتیجه می‌شود که $S_G = V_2^f \cap V(G)$ پوشش رأسی از گراف G از اندازه حداکثر $\frac{1}{2}(\gamma_{hR}(H) - 4m_G)$ می‌باشد. بنابراین G دارای پوشش رأسی از اندازه حداکثر k می‌باشد و لذا اثبات قضیه کامل است. $\square$

۶.۲ پیچیدگی احاطه‌گر مستقل رومی جهشی

در این بخش به بررسی پیچیدگی مسأله تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی می‌پردازیم. مسأله تصمیم‌گیری زیر را در نظر بگیرید:

مسأله تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی

نمونه: گراف غیرتهی G و عدد صحیح مثبت k .

سوال: آیا گراف G دارای تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی از اندازه حداکثر k می‌باشد؟

در ادامه نشان می‌دهیم که این مسأله حتی برای گراف‌های دوبخشی مسطح و گراف‌های وتری مسطح NP -کامل است. ابتدا پیچیدگی این مسأله روی گراف‌های دوبخشی مسطح را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۶.۲. مسأله تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی برای گراف‌های دوبخشی مسطح NP -کامل است.

برهان. فرض کنید G یک گراف از مرتبه n_G و اندازه m_G باشد. همچنین فرض کنید H گراف همبند دوبخشی مسطح ساخته شده در قضیه ۱.۴.۲ باشد. نشان می‌دهیم که گراف G دارای پوشش رأسی از اندازه حداکثر k می‌باشد اگر و فقط اگر گراف H دارای یک تابع احاطه گر مستقل رومی جهشی از اندازه حداکثر $2k + 4n_G + 12m_G$ باشد. ابتدا فرض کنید که گراف G دارای پوشش رأسی S_G از اندازه حداکثر k باشد. قرار دهید $f = (V(H) - S_H, \emptyset, S_H)$ که در آن مجموعه S_H مجموعه احاطه گر مستقل جهشی ساخته شده در اثبات قضیه ۱.۴.۲ می‌باشد. در این صورت تابع f یک تابع احاطه گر مستقل رومی جهشی برای گراف H از اندازه $2k + 4n_G + 12m_G$ می‌باشد. لذا گراف H دارای یک تابع احاطه گر مستقل رومی جهشی از اندازه حداکثر $2k + 4n_G + 12m_G$ می‌باشد.

در ادامه فرض کنید که $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ یک تابع احاطه گر مستقل رومی جهشی برای گراف H از اندازه حداکثر $2k + 4n_G + 12m_G$ باشد. نشان می‌دهیم که گراف G دارای پوشش رأسی از اندازه حداکثر k می‌باشد. بدون از دست دادن کلیت، می‌توان فرض کرد که f یک $\gamma_{hRI}(H)$ -تابع است.

اگر برای رأس $v \in V(G) \cup \{x_e, z_e, y_e \mid e \in E(G)\}$ داشته باشیم $f(v_1) + f(v_3) + f(v_5) \leq 1$ ، آن‌گاه رأس v_1 یا رأس v_5 توسط تابع f احاطه مستقل رومی جهشی نمی‌شوند، که یک تناقض است. بنابراین برای هر رأس از مجموعه $V(G) \cup \{x_e, z_e, y_e \mid e \in E(G)\}$ خواهیم داشت $f(v_1) + f(v_3) + f(v_5) \geq 2$. اگر برای رأس $v \in V(G) \cup \{x_e, z_e, y_e \mid e \in E(G)\}$ داشته باشیم $f(v_2) + f(v_4) + f(x_v) \leq 1$ ، آن‌گاه رأس v_2 یا رأس v_4 توسط تابع f احاطه رومی نمی‌شوند، که یک تناقض است. بنابراین برای هر رأس از مجموعه $V(G) \cup \{x_e, z_e, y_e \mid e \in E(G)\}$ خواهیم داشت $f(v_2) + f(v_4) + f(x_v) \geq 2$. اگر برای یک رأس از مجموعه $V(G) \cup \{x_e, z_e, y_e \mid e \in E(G)\}$ داشته باشیم $f(v_2) + f(v_4) + f(x_v) \geq 3$ ، آن‌گاه تابع g با ضابطه $g(v_2) = g(v_4) = 0, g(x_v) = 2$ و در غیر این صورت $g(v) = f(v)$ ، یک تابع احاطه گر مستقل رومی جهشی با وزن کمتر از $f(V)$ می‌باشد، که یک تناقض است.

بنابراین برای هر رأس $v \in V(G) \cup \{x_e, z_e, y_e \mid e \in E(G)\}$ داریم $f(v_2) + f(v_4) + f(x_v) = 2$ ، همچنین می‌توان نشان داد که برای هر رأس از مجموعه $V(G) \cup \{x_e, z_e, y_e \mid e \in E(G)\}$ داریم $f(v_1) + f(v_3) + f(v_5) = 2$.

اگر یال $e = uv \in E(G)$ وجود داشته باشد به طوری که $f(y_e) > 0$ ، $f(y'_e) > 0$ و $f(y''_e) > 0$ ، آن‌گاه تابع g با ضابطه $g(y_e) = g(y'_e) = g(y''_e) = 0, g(u) = 2$ و در غیر این صورت $g(v) = f(v)$ ، یک تابع احاطه گر مستقل رومی جهشی با وزن کمتر از $f(V)$ می‌باشد، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e = uv \in E(G)$ حداقل یک رأس $v \in \{y_e, y'_e, y''_e\}$ وجود دارد به طوری که $f(v) = 0$. اگر برای یال $e \in E(G)$ داشته باشیم $f(y_e) + f(y'_e) + f(y''_e) \geq 3$ ، آن‌گاه تابع احاطه گر مستقل رومی جهشی g با وزن کمتر از $f(V)$ وجود دارد، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e \in E(G)$ داریم $f(y_e) + f(y'_e) + f(y''_e) \leq 2$. برای هر یال $e \in E(G)$ با $f(y_e) + f(y'_e) + f(y''_e) = 0$ داریم $f(v) = 2$ یا $f(u) = 2$. فرض کنید که برای یال $e \in E(G)$ داریم $f(y_e) + f(y'_e) + f(y''_e) > 0$.

همچنین فرض کنید که $f(y_e) + f(y'_e) + f(y''_e) = 1$. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که $f(y_e) = 1$. در این صورت $f(u) = 2$ یا $f(v) = 2$ و با تغییر وزن رأس y_e به 0 یک تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی با وزن کمتر از $\gamma_{hRI}(H)$ حاصل می‌شود، که یک تناقض است. بنابراین $f(y_e) + f(y'_e) + f(y''_e) > 1$ و لذا $f(y_e) + f(y'_e) + f(y''_e) = 2$. مشابه قبل می‌توان دید که $f(y_e) \neq 1, f(y'_e) \neq 1, f(y''_e) \neq 1$ و بنابراین رأس $z \in \{y_e, y'_e, y''_e\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $f(z) = 2$. در این صورت $f(u) = 0$ و $f(v) = 0$. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که $f(y_e) = 2$. حال رأس y_e را با یکی از دو رأس u یا v در مجموعه V_2^f جایگزین می‌کنیم. بنابراین نتیجه می‌گیریم که مجموعه $S_G = V_2^f \cap V(G)$ پوشش رأسی برای گراف G از اندازه حداکثر $\frac{1}{2}(\gamma_{hRI}(H) - 4n_G - 12m_G)$ می‌باشد. بنابراین G دارای پوشش رأسی از اندازه حداکثر k می‌باشد و لذا اثبات کامل است. $\square$

در ادامه پیچیدگی مسأله تصمیم‌گیری تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی روی گراف‌های وتری مسطح بررسی می‌شود.

قضیه ۲.۶.۲. مسأله تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی برای گراف‌های وتری مسطح NP -کامل است.

برهان. فرض کنید G یک گراف از مرتبه n_G و اندازه m_G باشد. همچنین فرض کنید H گراف وتری مسطح همبند ساخته شده در قضیه ۲.۴.۲ باشد. نشان می‌دهیم که گراف G دارای پوشش رأسی از اندازه حداکثر k می‌باشد اگر و فقط اگر گراف H دارای یک تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی از اندازه حداکثر $2k + 4n_G + 24m_G$ باشد. ابتدا فرض کنید که گراف G دارای پوشش رأسی S_G از اندازه حداکثر k باشد. قرار دهید $f = (V(H) - S_H, \emptyset, S_H)$ که در آن مجموعه S_H مجموعه احاطه‌گر مستقل جهشی ساخته شده در اثبات قضیه ۲.۴.۲ می‌باشد. در این صورت تابع f یک تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی برای گراف H از اندازه $2k + 4n_G + 24m_G$ می‌باشد. لذا گراف H دارای یک تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی از اندازه حداکثر $2k + 4n_G + 24m_G$ می‌باشد.

در ادامه فرض کنید که $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ یک تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی برای گراف H از اندازه حداکثر $2k + 4n_G + 24m_G$ باشد. نشان می‌دهیم که گراف G دارای پوشش رأسی از اندازه حداکثر k می‌باشد. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که f یک $-\gamma_{hRI}(H)$ -تابع است. اگر برای هر رأس $v \in V(G) \cup \{x'_e, z'_e, x''_e, z''_e, y'_e, y''_e \mid e \in E(G)\}$ داشته باشیم $f(v_1) + f(v_3) + f(v_5) \leq 1$ ، آن‌گاه رأس v_1 یا رأس v_5 توسط تابع f احاطه رومی جهشی نمی‌شود، که یک تناقض است. لذا برای هر رأس $v \in V(G) \cup \{x'_e, z'_e, x''_e, z''_e, y'_e, y''_e \mid e \in E(G)\}$ داریم $f(v_1) + f(v_3) + f(v_5) \geq 2$.

اگر برای هر رأس $v \in V(G) \cup \{x'_e, z'_e, x''_e, z''_e, y'_e, y''_e \mid e \in E(G)\}$ داشته باشیم $f(v_2) + f(v_4) + f(v_6) \leq 1$ ، آن‌گاه رأس v_2 یا رأس v_4 توسط تابع f احاطه رومی جهشی نمی‌شوند که یک تناقض است. بنابراین برای هر رأس از مجموعه $V(G) \cup \{x'_e, z'_e, x''_e, z''_e, y'_e, y''_e \mid e \in E(G)\}$

$f(v_2) + f(v_4) + f(x_v) \geq 2$. اگر $f(v_2) + f(v_4) + f(x_v) \geq 3$ باشد، آن گاه تابع g با ضابطه $g(v) = f(v)$ و در غیر این صورت $g(v) = 0$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف H با وزن کمتر از $f(V)$ می باشد، که یک تناقض است. بنابراین برای هر رأس از مجموعه $V(G) \cup \{x_{e'}, z_{e'}, x_{e''}, z_{e''}, y_{e'}, y_{e''} \mid e \in E(G)\}$ داریم $f(v_2) + f(v_4) + f(x_v) = 2$. همچنین می توان نشان داد که برای رأس $v \in V(G) \cup \{x_{e'}, z_{e'}, x_{e''}, z_{e''}, y_{e'}, y_{e''} \mid e \in E(G)\}$ داریم $f(v_1) + f(v_3) + f(v_5) = 2$.

برای هر رأس $z \in \{y_v \mid v \in \{x_{e'}, z_{e'}, x_{e''}, z_{e''}, y_{e'}, y_{e''} \mid e \in E(G)\}\}$ می توان نتیجه گرفت که $f(z) = 0$ ، زیرا در غیر این صورت یک تابع احاطه گر مستقل رومی جهشی با وزن کمتر از $f(V)$ به دست می آید، که یک تناقض است. به طریق مشابه می توان نشان داد که برای هر رأس $z \in \{z_v \mid v \in \{y_{e'}, y_{e''} \mid e \in E(G)\}\}$ ، $f(z) = 0$. اگر برای یال $e = uv \in E(G)$ داریم $f(v) + f(y_{e'}) + f(y_{e''}) \leq 1$ و $f(u) + f(y_{e'}) + f(y_{e''}) \leq 1$ یا $y_{e''}$ توسط تابع f احاطه رومی جهشی نمی شوند، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e = uv \in E(G)$ یا $f(u) + f(y_{e'}) + f(y_{e''}) \geq 2$ و یا $f(v) + f(y_{e'}) + f(y_{e''}) \geq 2$. اگر برای یال $e = uv \in E(G)$ داریم $f(u) + f(y_{e'}) + f(y_{e''}) \geq 3$ یا $f(v) + f(y_{e'}) + f(y_{e''}) \geq 3$ باشد، آن گاه تابع احاطه گر مستقل رومی جهشی g با وزن کمتر از $f(V)$ وجود دارد، که یک تناقض است. بنابراین برای هر یال $e \in E(G)$ داریم $f(u) + f(y_{e'}) + f(y_{e''}) \leq 2$ و $f(v) + f(y_{e'}) + f(y_{e''}) \leq 2$. با توجه به اینکه برای هر یال $e = uv \in E(G)$ داریم $f(u) + f(y_{e'}) + f(y_{e''}) \geq 2$ یا $f(v) + f(y_{e'}) + f(y_{e''}) \geq 2$ ، نتیجه می گیریم که برای هر یال $e = uv \in E(G)$ داریم $f(u) + f(y_{e'}) + f(y_{e''}) = 2$ یا $f(v) + f(y_{e'}) + f(y_{e''}) = 2$. با توجه به اینکه برای هر یال $e \in E(G)$ داریم $d(y_{e'}, y_{e''}) = 1$ ، نتیجه می گیریم که $f(y_{e'}) \neq 2$ و $f(y_{e''}) \neq 2$ و لذا $f(y_{e'}) = f(y_{e''}) = 1$ یا $f(y_{e'}) = f(y_{e''}) = 0$. برای هر یال $e = uv \in E(G)$ با $f(y_{e'}) = f(y_{e''}) = 0$ داریم $f(u) = 2$ یا $f(v) = 2$. فرض کنید که برای یال $e = uv \in E(G)$ داریم $f(y_{e'}) = f(y_{e''}) = 1$ ، در این صورت $f(u) = f(v) = 0$ و با تغییر وزن رئوس $y_{e'}$ و $y_{e''}$ به 0 و تغییر وزن یکی از رئوس u یا v به 2، یک $\gamma_{hRI}(H)$ -تابع g به دست می آید به طوری که $g(u) = 2$ یا $g(v) = 2$. بنابراین نتیجه می گیریم که $S_G = V_2^f \cap V(G)$ پوشش رأسی برای گراف G از اندازه حداکثر $\frac{1}{2}(\gamma_{hRI}(H) - 4n_G - 24m_G)$ می باشد. بنابراین G دارای پوشش رأسی از اندازه حداکثر k می باشد و لذا اثبات کامل است. $\square$

فصل ۳

تابع احاطه‌گر جهشی روی گراف‌ها

۱.۳ مقدمه

در این فصل ابتدا در بخش ۲.۳ خواص پایه‌ای از توابع احاطه‌گر رومی جهشی را بیان می‌کنیم. سپس در بخش ۳.۳ گراف‌های با عدد احاطه‌گر رومی جهشی بزرگ را بررسی می‌کنیم.

۲.۳ خواصی از تابع احاطه‌گر رومی جهشی

۱.۲.۳ مقدمه

در این بخش در مورد خواص و ویژگی‌های تابع احاطه‌گر رومی جهشی صحبت می‌کنیم. بویژه در مورد کران‌های عمومی عدد احاطه‌گر رومی جهشی و همچنین مقایسه این پارامتر با دیگر پارامترهای گراف مثل عدد احاطه‌گر جهشی و عدد احاطه‌گر رومی می‌پردازیم.

۲.۲.۳ خواص تابع احاطه‌گر رومی جهشی

با استفاده از تعریف به راحتی می‌توان درستی گزاره زیر را اثبات کرد.

گزاره ۱.۲.۳. فرض کنید $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ یک γ_{hR} -تابع برای گراف G باشد. در این صورت

(a) اگر $w \in V_1^f$ ، آن گاه $|N_2(w) \cap V_1^f| \leq 1$.

(b) اگر $w \in V_1^f$ ، آن گاه $N_2(w) \cap V_2^f = \emptyset$.

(c) اگر $w \in V_0^f$ ، آن گاه $|N_2(w) \cap V_1^f| \leq 2$.

(d) مجموعه $V_1^f \cup V_2^f$ یک مجموعه احاطه گر جهشی برای گراف G می باشد.

(e) برای هر رأس $v \in V_2^f$ ، $epn_2(v, V_2^f) \neq \emptyset$.

(f) اگر $v \in V_2^f$ و همچنین $N_2(v) \cap V_2^f \neq \emptyset$ ، آن گاه $|epn_2(v, V_2^f)| \geq 2$.

برای $k \geq 1$ گراف $Dist(G; k)$ ، گرافی با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های $\{uv \mid d_G(u, v) = k\}$ می باشد. به راحتی از تعریف می توان گزاره زیر را نتیجه گرفت.

گزاره ۲.۲.۳. فرض کنید G یک گراف باشد، در این صورت

$$\gamma_{hR}(G) = \gamma_R(Dist(G; 2)).$$

کوکاین^۱ و همکاران کران پایین زیر را بر اساس مرتبه و ماکسیمم درجه برای عدد احاطه گر رومی ارائه داده اند.

گزاره ۳.۲.۳ ([۱۵]). اگر G گرافی از مرتبه n باشد، آن گاه

$$\gamma_R(G) \geq \frac{2n}{\Delta(G) + 1}.$$

همچنین چمبرز^۲ و همکاران کران بالای زیر را برای عدد احاطه گر رومی بر اساس مرتبه و ماکسیمم درجه بدست آوردند.

گزاره ۴.۲.۳ ([۱۳]). فرض کنید G گرافی از مرتبه n و $\Delta(G) \geq 1$ باشد. در این صورت

$$\gamma_R(G) \leq n - \Delta(G) + 1.$$

با توجه به اینکه $\Delta_h(G) = \Delta(Dist(G; 2))$ می باشد از گزاره های ۳.۲.۳، ۲.۲.۳ و ۴.۲.۳ می توان گزاره زیر را نتیجه گرفت.

گزاره ۵.۲.۳. فرض کنید G گرافی از مرتبه n با $\Delta_h(G) \geq 1$ باشد. در این صورت

$$\frac{2n}{\Delta_h(G) + 1} \leq \gamma_{hR}(G) \leq n - \Delta_h(G) + 1.$$

گزاره های زیر برای اثبات نتایج آینده مفید می باشند.

گزاره ۶.۲.۳ ([۶]). برای هر گراف همبند G از مرتبه n ، $\gamma_h(G) = n$ اگر و فقط اگر $G = K_n$.

گزاره ۷.۲.۳ ([۲۱]). اگر G گرافی از مرتبه n با $\delta_h(G) \geq 1$ باشد، آن گاه

$$\gamma_h(G) \leq \frac{n}{2}.$$

در ادامه ما کرانهای بالا و پایینی برای عدد احاطه گر رومی جهشی بر اساس عدد احاطه گر جهشی ارائه می دهیم.

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید G یک گراف باشد. در این صورت

$$\gamma_h(G) \leq \gamma_{hR}(G) \leq 2\gamma_h(G).$$

به علاوه تساوی برای کران پایین برقرار است اگر و فقط اگر G گرافی کامل باشد.

برهان. فرض کنید G یک گراف باشد و S یک $\gamma_h(G)$ -مجموعه باشد. بوضوح تابع $f = (V(G) - S, \emptyset, S)$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف G می باشد. در این صورت $f(V) = 2|S| = 2\gamma_h(G)$ و لذا $\gamma_{hR}(G) \leq 2\gamma_h(G)$.

حال فرض کنید $g = (V_0^g, V_1^g, V_2^g)$ یک $\gamma_{hR}(G)$ -تابع باشد. از گزاره ۱.۲.۳ نتیجه می شود که $V_1^g \cup V_2^g$ یک مجموعه احاطه گر جهشی برای گراف G می باشد. بنابراین $\gamma_h(G) \leq |V_1^g| + |V_2^g| \leq |V_1^g| + 2|V_2^g| = \gamma_{hR}(G)$.

لذا نتیجه می گیریم که

$$\gamma_h(G) \leq \gamma_{hR}(G) \leq 2\gamma_h(G).$$

حال فرض کنید که $\gamma_h(G) = \gamma_{hR}(G)$ داریم

$$\gamma_h(G) \leq |V_1^g| + |V_2^g| \leq |V_1^g| + 2|V_2^g| = \gamma_{hR}(G).$$

بنابراین نتیجه می گیریم که $|V_2^g| = 0$ و لذا $|V_0^g| = 0$.

پس $V_1^g = V(G)$ و لذا $\gamma_h(G) = \gamma_{hR}(G) = |V_1^g| = |V(G)| = n$. طبق گزاره ۶.۲.۳ هر مولفه ای از G یک گراف کامل است و همچنین بوضوح عدد احاطه گر رومی جهشی هر گراف کاملی برابر مرتبه آن گراف است. بنابراین اثبات کامل است. $\square$

به راحتی می توان دید که کران بالای ارائه شده در قضیه ۱.۲.۳ برای مسیرهای P_4 و P_6 قابل دستیابی است. گراف G را **گراف جهشی رومی**^۳ گویند هرگاه $\gamma_{hR}(G) = 2\gamma_h(G)$.

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید G یک گراف باشد. در این صورت $\gamma_{hR}(G) = 2\gamma_h(G)$ اگر و فقط اگر $\gamma_{hR}(G)$ -تابع f وجود داشته باشد به طوری که $|V_1^f| = 0$.

برهان. فرض کنید برای گراف G ، $\gamma_{hR}(G) = 2\gamma_h(G)$ و S یک $\gamma_h(G)$ -مجموعه باشد. بوضوح تابع $f = (V(G) - S, \emptyset, S)$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف G از وزن $2\gamma_h(G)$ می باشد. چون $\gamma_{hR}(G) = 2\gamma_h(G)$ ، پس f یک $\gamma_{hR}(G)$ -تابع می باشد که $|V_1^f| = 0$.

حال فرض کنید که $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ یک $\gamma_{hR}(G)$ -تابع باشد و $|V_1^f| = 0$. در این صورت $\gamma_{hR}(G) = 2|V_2^f|$. طبق قسمت (d) از گزاره ۱.۲.۳، مجموعه احاطه گر جهشی برای گراف G می‌باشد. بنابراین $\gamma_h(G) \leq |V_2^f| = \gamma_{hR}(G)/2$ و لذا $2\gamma_h(G) \leq \gamma_{hR}(G)$. از قضیه ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود که $\gamma_{hR}(G) \leq 2\gamma_h(G)$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$\gamma_{hR}(G) = 2\gamma_h(G).$$

□

طبق قضیه ۱.۲.۳ داریم $\gamma_h(G) \leq \gamma_{hR}(G)$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر برای عدد صحیح مثبت n ، $G = K_n$. بنابراین اگر G یک گراف همبند غیر کامل باشد، آن‌گاه $\gamma_{hR}(G) \geq \gamma_h(G) + 1$. در قضیه بعدی خاصیت مهمی از گراف‌هایی که این کران برای آن‌ها قابل دستیابی است را بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه n باشد به طوری که $G \neq K_n$. در این صورت $\gamma_{hR}(G) = \gamma_h(G) + 1$ اگر و فقط اگر رأس $v \in V(G)$ وجود داشته باشد به طوری که $\deg_h(v) = n - \gamma_h(G)$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم که گراف G دارای رأس v باشد به طوری که $\deg_h(v) = n - \gamma_h(G)$. قرار دهید $V_2 = \{v\}$ ، $V_1 = V(G) - N_2[v]$ و $V_0 = N_2(v)$. بوضوح تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف G با وزن $f(V) = \gamma_h(G) + 1$ می‌باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $\gamma_{hR}(G) \leq \gamma_h(G) + 1$. چون $G \neq K_n$ ، از قضیه ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود که $\gamma_{hR}(G) = \gamma_h(G) + 1$. بنابراین $\gamma_{hR}(G) = \gamma_h(G) + 1$.

حال فرض کنید که $\gamma_{hR}(G) = \gamma_h(G) + 1$ و $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک $\gamma_{hR}(G)$ -تابع باشد. از قسمت d گزاره ۱.۲.۳ نتیجه می‌شود که $V_1 \cup V_2$ یک مجموعه احاطه گر جهشی برای گراف G می‌باشد و لذا $\gamma_h(G) \leq |V_1| + |V_2|$. بوضوح $\gamma_{hR}(G) = \gamma_h(G) + 1 = |V_1| + 2|V_2|$. اگر $|V_2| \geq 2$ ، آن‌گاه $|V_1| + |V_2| \leq \gamma_h(G) - 1$ و لذا $\gamma_h(G) \leq \gamma_h(G) - 1$ ، که یک تناقض است. بنابراین $|V_2| \leq 1$.

فرض کنید $|V_2| = 0$. در این صورت $V_1 = V(G)$ و لذا $\gamma_{hR}(G) = n$ و $\gamma_h(G) = n - 1$. اگر $\delta_h(G) \geq 1$ ، آن‌گاه از گزاره ۷.۲.۳ نتیجه می‌گیریم که $n = \gamma_{hR}(G) = \gamma_h(G) + 1 \leq \frac{n}{2} + 1$. بنابراین $n \leq 2$ و لذا G گرافی کامل است، که یک تناقض است. بنابراین $\delta_h(G) = 0$. فرض کنید v رأسی از گراف G باشد به طوری که $\deg_h(v) = \delta_h(G) = 0$. با توجه به اینکه G یک گراف همبند است، پس v مجاور هر رأسی از مجموعه $V(G) - \{v\}$ می‌باشد. بنابراین فاصله بین هر دو رأس از $V(G)$ حداکثر دو می‌باشد. همچنین از کامل نبودن گراف G نتیجه می‌شود که رأس w در مجموعه $V(G) - \{v\}$ وجود دارد به طوری که $\deg_h(w) \geq 1$. بوضوح $V(G) - N_2(w)$ یک مجموعه احاطه گر جهشی برای گراف G می‌باشد و $|V(G) - N_2(w)| \leq n - 1$. از $\gamma_h(G) = n - 1$ نتیجه می‌شود که $V(G) - N_2(w)$ یک $\gamma_h(G)$ -مجموعه می‌باشد. بنابراین $\deg_h(w) = n - \gamma_h(G)$.

حال فرض کنید $V_2 = \{v\}$. در این صورت $|V_1| = \gamma_h(G) - 1$. بوضوح $N_2(v) \cap V_1 = \emptyset$ و لذا $V_0 = N_2(v)$. بنابراین

$$\deg_h(v) = |N_2(v)| = |V_0| = n - |V_1| - |V_2| = n - (\gamma_h(G) - 1) - 1 = n - \gamma_h(G).$$

□

۳.۳ گراف‌های با عدد احاطه‌گر رومی جهشی بزرگ

۱.۳.۳ مقدمه

در این بخش ما گراف‌های با عدد احاطه‌گر رومی جهشی n و $n - 1$ را مشخص می‌کنیم.

۲.۳.۳ گراف‌های G با $\gamma_{hR}(G) = n$

در این بخش همه گراف‌های G از مرتبه n و $\gamma_{hR}(G) = n$ را مشخص می‌کنیم. برای این منظور خانواده‌ای از گراف‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{G}$ خانواده‌ای از گراف‌های G باشد به طوری که G از دنباله‌ای از گراف‌های $G_0, G_1, \dots, G_k$ ($k \geq 1$) بدست می‌آید که در آن G_0 یک گراف کامل یا $G_0 = \overline{K_2}$ می‌باشد. همچنین $G = G_k$ و در صورتی که $k \geq 1$ باشد، آن‌گاه G_{i+1} برای $i = 0, 1, \dots, k - 1$ ، به طور بازگشتی از گراف G_i با عملگر زیر حاصل می‌شود. **عملگر $\mathcal{O}$** . دو رأس جدید اضافه کنید و هر کدام از این رئوس را به همه رئوس گراف G_i وصل کنید.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه n باشد. در این صورت $\gamma_{hR}(G) = n$ اگر و فقط اگر $G \in \mathcal{G} \cup \{P_4, K_n\}$.

برهان. ($\Rightarrow$) برای اثبات از استقراء روی مرتبه گراف G ، n ، به طوری که $\gamma_{hR}(G) = n$ استفاده می‌کنیم. اگر $n \leq 2$ ، آن‌گاه بوضوح G گرافی کامل است و لذا گام پایه استقراء برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که $n \geq 3$. فرض کنید حکم استقراء برای همه گراف‌های با مرتبه کمتر از n برقرار است. همچنین فرض کنید G گرافی از مرتبه n با $\gamma_{hR}(G) = n$ باشد. از گزاره ۵.۲.۳، نتیجه می‌شود که $\Delta_h(G) \leq 1$. بنابراین $diam(G) \leq 3$. اگر $diam(G) = 1$ باشد، آن‌گاه G یک گراف کامل است و لذا حکم برقرار است.

حال فرض کنید که $diam(G) = 2$ و $v_1 v_2 v_3$ یک مسیر قطری در گراف G باشد. ابتدا فرض کنید که رأس $v \in N(v_1)$ وجود دارد به طوری که $v \notin N(v_3)$. با توجه به اینکه $diam(G) = 2$ ، نتیجه می‌گیریم که $v \in N_2(v_3)$. در این صورت $\deg_h(v_3) \geq 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین $N(v_1) \subseteq N(v_3)$ و به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $N(v_3) \subseteq N(v_1)$. لذا نتیجه می‌شود که $N(v_1) = N(v_3)$. اگر سه رأس $a, b, c \in N(v_1)$ وجود داشته باشد به طوری که $a \notin N(b) \cup N(c)$

آن‌گاه $\deg_h(a) \geq 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین هر رأس از $N(v_1)$ مجاور حداقل $|N(v_1)| - 2$ رأس از مجموعه $N(v_1)$ می‌باشد و لذا $\delta(G[N(v_1)]) \geq |N(v_1)| - 2$. اگر $\delta(G[N(v_1)]) = |N(v_1)| - 1$ باشد، آن‌گاه $G[N(v_1)]$ گرافی کامل است. بنابراین G از زیرگراف القایی $G[N(v_1)]$ با عملگر $\mathcal{O}$ بدست می‌آید و لذا $G \in \mathcal{G}$.
بنابراین فرض می‌کنیم که $\delta(G[N(v_1)]) = |N(v_1)| - 2$. فرض کنید $G' = G[N(v_1)]$. اگر $|V(G')| = 2$ باشد، آن‌گاه $G' = \overline{K_2}$ و لذا G از گراف $\overline{K_2}$ با عملگر $\mathcal{O}$ حاصل می‌شود و بنابراین $G \in \mathcal{G}$. حال فرض کنید که $|V(G')| \geq 3$. همچنین فرض کنید که $\gamma_{hR}(G') \leq |V(G')| - 1$. اگر f یک $\gamma_{hR}(G')$ -تابع باشد، آن‌گاه $g = (V_0^f, V_1^f \cup \{v_1, v_3\}, V_2^f)$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف G با $g(V) \leq |V(G')| + 1$ می‌باشد. بنابراین $\gamma_{hR}(G) \leq n - 1$ ، که یک تناقض است. بنابراین $\gamma_{hR}(G') = |V(G')|$. با توجه به فرضیات استقراء $G' \in \mathcal{G}$ یا $G' \in \{P_4, K_n\}$. از $\delta(G') = |V(G')| - 2$ نتیجه می‌گیریم که $G' \in \mathcal{G}$. بنابراین G از گراف $G' \in \mathcal{G}$ با عملگر $\mathcal{O}$ بدست می‌آید و لذا $G \in \mathcal{G}$.

حال فرض کنید که $\text{diam}(G) = 3$ و یک مسیر قطری در گراف G باشد. فرض کنید که $G \neq P_4$. فرض کنید $v \in V(G) - V(P)$. بوضوح v نمی‌تواند مجاور هر دو رأس v_1 و v_4 باشد. بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد که $v_1 \notin N(v)$. با توجه به اینکه $\text{diam}(G) = 3$ و G گرافی همبند است، نتیجه می‌شود که $N(v) \cap \{v_2, v_3\} \neq \emptyset$. اگر $v_2 \in N(v)$ باشد، آن‌گاه $\deg_h(v_1) \geq 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین $v_3 \in N(v)$ و لذا $\deg_h(v_2) \geq 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین $V(G) - V(P) = \emptyset$ و لذا $G = P_4$.

($\Leftarrow$) فرض کنید که $G \in \mathcal{G} \cup \{P_4, K_n\}$. نشان می‌دهیم که $\gamma_{hR}(G) = n$. اگر $G = K_n$ یا $G = P_4$ باشد، آن‌گاه به آسانی می‌توان دید که $\gamma_{hR}(G) = n$. حال فرض کنید که $G \in \mathcal{G}$. در این صورت دنباله‌ای از گراف‌های $G_0, G_1, \dots, G_k$ ، $(k \geq 1)$ وجود دارد به‌طوری‌که G_0 گرافی کامل یا $G_0 = \overline{K_2}$ می‌باشد و $G = G_k$. همچنین اگر $k \geq 1$ باشد، آن‌گاه G_{i+1} برای $i = 0, \dots, k - 1$ به طریق بازگشتی از گراف G_i با عملگر $\mathcal{O}$ حاصل می‌شود. با استقراء روی k نشان می‌دهیم که $\delta(G) = |V(G)| - 2 = n - 2$. اگر $k = 1$ باشد، آن‌گاه $G = C_4$ یا G از گراف کامل K_{n-2} به‌دست می‌آید و به وضوح، $\delta(G) = n - 2$. بنابراین گام پایه استقراء برقرار است. حال فرض کنید که $k \geq 2$ و حکم برای همه گراف‌های $G \in \mathcal{G}$ که از دنباله‌ای از گراف‌ها با طول حداکثر $k - 1$ ساخته می‌شوند، برقرار باشد. فرض کنید که $G' = G_{k-1}$. طبق فرضیات استقراء $\delta(G') = |V(G')| - 2$. می‌دانیم که گراف G از گراف G' با عملگر $\mathcal{O}$ بدست می‌آید. فرض کنید x و y دو رأس جدیدی باشند که با اضافه کردن آن‌ها به گراف G' ، گراف G با استفاده از عملگر $\mathcal{O}$ به‌دست می‌آید. در این صورت بوضوح $d(x, y) = 2$ و $\deg(x) = \deg(y) = |V(G')| = n - 2$. حال فرض کنید برای رأس $x' \in V(G')$ ، $\deg_{G'}(x') = \delta(G') = |V(G')| - 2$. در این صورت $\deg_G(x') = \delta(G') + 2 = |V(G')| = n - 2$. بنابراین $\delta(G) = n - 2$.

حال با برهان خلف فرض کنید که $\gamma_{hR}(G) \leq n - 1$. از گزاره ۵.۲.۳ نتیجه می‌شود که $\Delta_h(G) \leq 2$. اگر $\Delta_h(G) = 2$ ، آن‌گاه رأس $w \in V(G)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\deg_h(w) = 2$.

بنابراین $\deg(w) \leq n - 3$ ، که با $\delta(G) = n - 2$ در تناقض است. بنابراین $\Delta_h(G) = 1$. از گزاره ۵.۲.۳ نتیجه می‌شود که $\gamma_{hR}(G) = n$ ، که یک تناقض است. بنابراین $\gamma_{hR}(G) = n$ و لذا حکم برقرار است. $\square$

۳.۳.۳ گراف‌های G با $\gamma_{hR}(G) = n - 1$

در این بخش همه گراف‌های G از مرتبه n با $\gamma_{hR}(G) = n - 1$ مشخص می‌شوند. برای این منظور خانواده‌ای از گراف‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود. فرض کنید $\mathcal{G}$ خانواده‌ای از گراف‌ها باشد که در زیربخش ۲.۳.۳ تعریف شده است، و فرض کنید گراف G' یک گراف کامل و یا عضوی از خانواده‌ی $\mathcal{G}$ باشد. حال فرض کنید $\mathcal{G}^*$ خانواده‌ای از گراف‌های G باشد که از گراف G' با یکی از عملگرهای زیر به دست می‌آید:

عملگر $\mathcal{O}_1$: سه رأس جدید اضافه کنید و هرکدام از این رؤس را به همه رؤس گراف G' وصل کنید.

عملگر $\mathcal{O}_2$: ابتدا مسیر $P_2 : v_1 v_2$ و رأس جدید v اضافه کنید. سپس رأس v را به هر رأس G' اضافه کنید. در صورتی که $|V(G')| \geq 2$ باشد، هر رأس از $V(P_2)$ را به حداقل $|V(G')| - 1$ رأس از G' وصل کنید. اگر $G' \in \mathcal{G}$ باشد و x و y دو رأس از گراف G' با $d(x, y) = 2$ باشند، آن‌گاه شرایط زیر برقرار باشند:

$$1. \{x, y\} \subseteq (N(v_1) \cup N(v_2))$$

۲. اگر $x \notin N(v_1) \cap N(v_2)$ یا $y \notin N(v_1) \cap N(v_2)$ باشد، آن‌گاه v_1 و v_2 مجاور به تمام رؤس مجموعه $N_{G'}(x)$ باشند.

لم ۱.۳.۳. اگر $G \in \mathcal{G}^*$ باشد، آن‌گاه $\gamma_{hR}(G) = |V(G)| - 1$.

برهان. فرض کنید $G \in \mathcal{G}^*$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. از گراف G' با عملگر $\mathcal{O}_1$ به دست آمده باشد.

فرض کنید G از گراف G' با اضافه کردن سه رأس x, y, z و متصل کردن آن‌ها به هر رأس از G' به دست آمده باشد. بوضوح فاصله بین هر دو رأس از رؤس $\{x, y, z\}$ برابر دو می‌باشد. فرض کنید f' یک $\gamma_{hR}(G')$ -تابع باشد. از قضیه ۱.۳.۳ نتیجه می‌شود که $f'(V) = |V(G')|$. در این صورت تابع g با ضابطه $g(x) = 2$ ، $g(y) = g(z) = 0$ و در غیر این صورت $g(u) = f'(u)$ ، یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای گراف G از وزن $f'(V) + 2$ می‌باشد.

بنابراین $\gamma_{hR}(G) \leq f'(V) + 2 = |V(G')| + 2 = |V(G)| - 1$. از طرف دیگر فرض کنید که f یک $\gamma_{hR}(G)$ -تابع باشد. در این صورت $f(x) + f(y) + f(z) \geq 2$ ، زیرا در غیر این صورت حداقل دو رأس از $\{x, y, z\}$ توسط f احاطه رومی جهشی نمی‌شوند، که یک تناقض است. در این صورت بوضوح $f|_{V(G')}$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای گراف G' می‌باشد. پس

بنابراین $\gamma_{hR}(G) = f(V) \geq |V(G')| + 2 = |V(G)| - 1$ و $\sum_{u \in V(G')} f(u) \geq \gamma_{hR}(G') = |V(G')|$
 $\gamma_{hR}(G) = |V(G)| - 1$

حالت ۲. از گراف G با عملگر $\mathcal{O}_2$ به دست آمده باشد.

فرض کنید v رأس اضافه شده و $P_2 - v_1v_2$ مسیر اضافه شده به گراف G' متناظر با عملگر $\mathcal{O}_2$ باشند. بوضوح فاصله بین هر رأس $V(P_2)$ و رأس v برابر با دو می باشد. فرض کنید f' یک $\gamma_{hR}(G')$ -تابع باشد. از قضیه ۱.۳.۳ نتیجه می شود که $f'(V) = |V(G')|$. در این صورت تابع g با ضابطه $g(v) = 2$ ، $g(v_1) = g(v_2) = 0$ و در غیر این صورت $g(z) = f'(z)$ ، یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف G با وزن $f'(V) + 2$ می باشد. بنابراین
 $\gamma_{hR}(G) \leq f'(V) + 2 = |V(G')| + 2 = |V(G)| - 1$

ادعای ۱. $\gamma_{hR}(G)$ -تابع f وجود دارد به طوری که $f(v) + f(v_1) + f(v_2) \geq 2$ و
 $\sum_{u \in V(G')} f(u) \geq |V(G')|$

اثبات ادعای ۱: فرض کنید که حداقل یک رأس از $V(P_2)$ مجاور هر رأس از G' باشد. فرض کنید g یک $\gamma_{hR}(G)$ -تابع باشد.

در این صورت می توان فرض کرد که $g(v) + g(v_1) + g(v_2) \geq 2$ ، در غیر این صورت حداقل یک رأس از مجموعه $\{v, v_1, v_2\}$ توسط تابع g احاطه رومی جهشی نمی شود، که یک تناقض است. اگر دو رأس v_1 و v_2 مجاور همه رئوس گراف G' باشند، آن گاه بوضوح $g|_{V(G')}$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف G' می باشد. در این صورت $\sum_{u \in V(G')} g(u) \geq \gamma_{hR}(G') = |V(G')|$. بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت فرض می کنیم که v_1 مجاور همه رئوس گراف G' و v_2 مجاور $|V(G')| - 1$ رأس از گراف G' می باشد. فرض کنید a رأسی از G' باشد به طوری که $a \notin N(v_2)$. بوضوح $a \in N_2(v_2)$. اگر $g(a) \neq 0$ باشد، آن گاه $g|_{V(G')}$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف G' می باشد. بنابراین $\sum_{u \in V(G')} g(u) \geq \gamma_{hR}(G') = |V(G')|$. حال فرض کنید که $g(a) = 0$. توجه کنید که در این حالت a توسط رأسی از $V(G') - \{a\}$ یا توسط v_2 احاطه رومی جهشی می شود. اگر a توسط رأسی از $V(G') - \{a\}$ احاطه رومی جهشی شود، آن گاه $g|_{V(G')}$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف G' می باشد. بنابراین $\sum_{u \in V(G')} g(u) \geq \gamma_{hR}(G') = |V(G')|$. در ادامه فرض کنید که a توسط رأس v_2 احاطه رومی جهشی می شود. در این حالت می توان دید که $g(v_2) = 2$ ، $g(v) = 0$ و $g(v_1) = 1$. در این صورت با تغییر $g(v)$ به ۲، $g(a)$ به ۱، $g(v_1)$ و $g(v_2)$ به ۰، یک $\gamma_{hR}(G)$ -تابع g' به دست می آید به طوری که $g'(v) + g'(v_1) + g'(v_2) \geq 2$ و $g'|_{V(G')}$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف G' می باشد. بنابراین می توان نتیجه گرفت که $\sum_{u \in V(G')} g'(u) \geq \gamma_{hR}(G') = |V(G')|$

در ادامه فرض کنید که هر رأس از $V(P_2)$ مجاور دقیقاً $|V(G')| - 1$ رأس از G' باشد. ابتدا فرض کنید که a رأسی از گراف G' باشد به طوری که $a \notin N(v_1) \cup N(v_2)$. بوضوح مشاهده می شود که $d(a, v_1) = d(a, v_2) = 2$. در این صورت از عملگر $\mathcal{O}_2$ نتیجه می شود که a مجاور هر رأسی از $V(G') - \{a\}$ می باشد. فرض کنید که g یک $\gamma_{hR}(G)$ -تابع باشد. فرض کنید $g(v) + g(v_1) + g(v_2) \leq 1$ ، آن گاه بوضوح $g(v) = 1$ و دو رأس v_1 و v_2 توسط a احاطه رومی

جهشی می‌شوند. بنابراین $g(a) = 2$. در این صورت با تغییر $g(a)$ به 1 و $g(v)$ به 2، $\gamma_{hR}(G)$ -تابع، g' حاصل می‌شود به‌طوری‌که $g'(v) + g'(v_1) + g'(v_2) \geq 2$ و $g'|_{V(G')}$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای گراف G' می‌باشد. بنابراین $\sum_{u \in V(G')} g'(u) \geq \gamma_{hR}(G') = |V(G')|$.

حال فرض کنید که a, b دو رأس از $V(G')$ باشند به‌طوری‌که $a \neq b$ ، $a \notin N(v_1)$ و $b \notin N(v_2)$. بوضوح $d(a, v_1) = d(b, v_2) = 2$. در این حالت از عملگر $\mathcal{O}_2$ نتیجه می‌شود که a و b مجاور هر رأس از $V(G') - \{a, b\}$ می‌باشند، و همچنین $1 \leq d(a, b) \leq 2$. فرض کنید g یک $\gamma_{hR}(G)$ -تابع باشد. اگر $g(v) + g(v_1) + g(v_2) \leq 1$ باشد، آن‌گاه $g(v) = 1$ و $g(a) = g(b) = 2$. در این صورت با تغییر $g(a)$ و $g(b)$ به 1 و $g(v)$ به 2، یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای گراف G با وزن کمتر از g به‌دست می‌آید، که یک تناقض است. بنابراین $g(v) + g(v_1) + g(v_2) \geq 2$. حال فرض کنید که $\sum_{u \in V(G')} g(u) < |V(G')|$. در این صورت رأس $u \in V(G')$ وجود دارد به‌طوری‌که $g(u) = 0$ و فقط با یک رأس از $\{v_1, v_2\}$ احاطه رومی جهشی می‌شود. در این حالت $u = a$ یا $u = b$. اگر $g(a) = g(b) = 0$ باشد، آن‌گاه $g(v_1) = g(v_2) = 2$ و بوضوح $g(v) = 0$. در این صورت با تغییر $g(v)$ به 2، $g(v_1)$ و $g(v_2)$ به 0 و همچنین $g(a)$ و $g(b)$ به 1، یک $\gamma_{hR}(G)$ -تابع g' به‌دست می‌آید به‌طوری‌که $g'(v) + g'(v_1) + g'(v_2) \geq 2$ و همچنین $g'|_{V(G')}$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای گراف G' می‌باشد. در این صورت $\sum_{u \in V(G')} g'(u) \geq \gamma_{hR}(G') = |V(G')|$. حال فرض کنید که $g(a) = 0$ و $g(b) \neq 0$. در این صورت بوضوح $g(v_1) = 2$ و $g(v) = 0$. فرض کنید که $g(v_2) = 0$ باشد، در این صورت $g(b) = 2$. بنابراین با تغییر $g(v)$ به 2، $g(v_1)$ و $g(v_2)$ به 0 و $g(a)$ و $g(b)$ به 1، یک $\gamma_{hR}(G)$ -تابع g' به‌دست می‌آید به‌طوری‌که $g'(v) + g'(v_1) + g'(v_2) \geq 2$ و همچنین $g'|_{V(G')}$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای گراف G' می‌باشد. بنابراین

$$\sum_{u \in V(G')} g'(u) \geq \gamma_{hR}(G') = |V(G')|.$$

در ادامه فرض کنید که $g(v_2) \neq 0$. در این حالت $g(v_2) = 1$. در این صورت با تغییر $g(v)$ به 2، $g(v_1)$ و $g(v_2)$ به 0 و $g(a)$ به 1، یک $\gamma_{hR}(G)$ -تابع g' به‌دست می‌آید به‌طوری‌که $g'(v) + g'(v_1) + g'(v_2) \geq 2$ و همچنین $g'|_{V(G')}$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای گراف G' می‌باشد. بنابراین $\sum_{u \in V(G')} g'(u) \geq \gamma_{hR}(G') = |V(G')|$.
 حال از ادعای 1 نتیجه می‌شود که $|V(G)| - 1 = 2 + |V(G')| \leq \gamma_{hR}(G)$. بنابراین

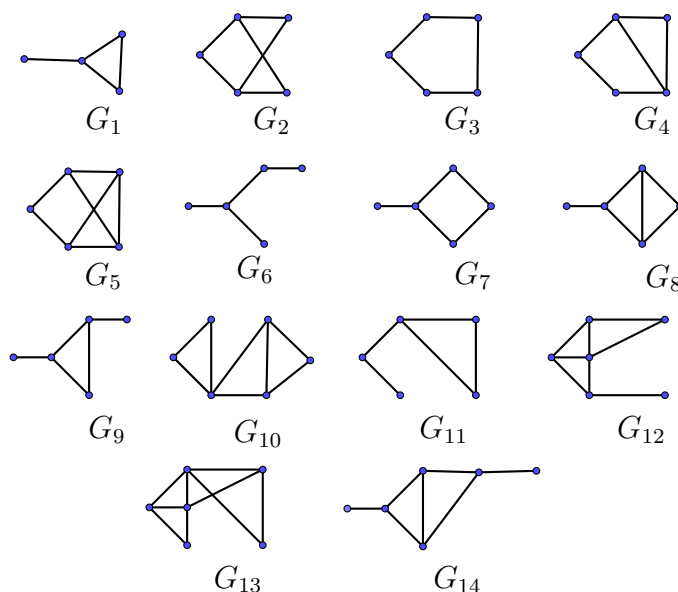
□

$$\gamma_{hR}(G) = |V(G)| - 1$$

فرض کنید $\mathcal{F}$ خانواده‌ای از گراف‌ها باشد که در شکل ۱.۳ نشان داده شده‌اند.

قضیه ۲.۳.۳. اگر G یک گراف همبند از مرتبه n باشد، آن‌گاه $\gamma_{hR}(G) = n - 1$ اگر و فقط اگر $G \in \mathcal{G}^* \cup \mathcal{F} \cup \{P_5\}$.

برهان. ($\Leftarrow$) فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه n و $\gamma_{hR}(G) = n - 1$ باشد. اگر $\Delta_h(G) \geq 3$ باشد، آن‌گاه از گزاره ۵.۲.۳ نتیجه می‌شود که $\gamma_{hR}(G) \leq n - 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین $\Delta_h(G) \leq 2$. حال فرض کنید که $\Delta_h(G) = 1$ ، در این صورت از گزاره ۵.۲.۳ نتیجه می‌شود



شکل ۱.۳: خانواده‌ی $\mathcal{F}$.

که $\gamma_{hR}(G) = n$ ، که یک تناقض است. بنابراین $\Delta_h(G) = 2$. فرض کنید v رأسی از G با $\deg_h(v) = \Delta_h(G) = 2$ قرار دهید $N_2(v) = \{v_1, v_2\}$ و $G' = G[N(v)]$.

ادعای ۱. اگر برای دو رأس متمایز z و w از گراف G ، $\deg_h(z) = \deg_h(w) = 2$ ، آن‌گاه $N_2(z) \cap N_2(w) \neq \emptyset$.

اثبات ادعای ۱. فرض کنید z, w دو رأس متمایز از گراف G باشند به‌طوری‌که $\deg_h(z) = \deg_h(w) = 2$. با برهان خلف فرض کنید که $N_2(z) \cap N_2(w) = \emptyset$. در این صورت تابع f با ضابطه $f(z) = f(w) = 2$ ، $f(x) = 0$ برای $x \in N_2(z) \cup N_2(w)$ و در غیر این صورت $f(u) = 1$ ، یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف G با وزن $n - 2$ می‌باشد. بنابراین $\gamma_{hR}(G) \leq n - 2$ ، که یک تناقض است. ♦

ادعای ۲. $\delta(G') \geq |V(G')| - 2$.

اثبات ادعای ۲. اگر سه رأس $a, b, c \in V(G')$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $\deg_h(a) \geq 2$ ، $a \notin N(b) \cup N(c)$ و $N_2(a) = \{b, c\}$. بنابراین $\deg_h(a) = 2$ و $\deg_h(b) = \deg_h(c) = 2$. چون $N_2(a) \cap N_2(b) = \emptyset$ و $N_2(a) \cap N_2(c) = \emptyset$ ، با توجه به ادعای ۱ به تناقض می‌رسیم. بنابراین هر رأس از مجموعه G' مجاور به حداقل $|V(G')| - 2$ رأس از گراف G' می‌باشد. لذا $\delta(G') \geq |V(G')| - 2$. ♦

با توجه به اینکه $\gamma_{hR}(G) = n - 1$ ، نتیجه می‌شود که $\text{diam}(G) \geq 2$. فرض کنید که $\text{diam}(G) \geq 5$ و $P : u_1 u_2 u_3 u_4 u_5 u_6 \dots u_d$ یک مسیر قطری از گراف G باشد. در این صورت $u_2, u_6 \in N_2(u_4)$ و $u_1, u_5 \in N_2(u_3)$. از $\Delta_h(G) = 2$ نتیجه می‌شود که $\deg_h(u_3) = \deg_h(u_4) = 2$. که با ادعای ۱ در تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $2 \leq \text{diam}(G) \leq 4$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. $diam(G) = 2$. بوضوح $V(G) - (N_2(v) \cup N[v]) = \emptyset$. با توجه به ادعای 2 زیرحالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

زیرحالت ۱.۱. $\delta(G') = |V(G')| - 1$. در این صورت G' گرافی کامل است.

فرض کنید که $v_1 v_2 \notin E(G)$. توجه کنید که $d(v_1, v_2) = 2$. اگر $|V(G')| = 1$ باشد، آن‌گاه هر رأس از $N_2(v)$ مجاور رأسی از G' می‌باشد و لذا G از G' با عملگر $\mathcal{O}_1$ به‌دست می‌آید. بنابراین فرض کرده که $|V(G')| \geq 2$. اگر حداقل یک رأس از $N_2(v)$ مجاور حداکثر $|V(G')| - 1$ رأس از G' باشد، آن‌گاه با $\Delta_h(G) = 2$ در تناقض است. بنابراین هر دو رأس v_1 و v_2 مجاور به هر رأسی از $V(G')$ می‌باشند. بنابراین G از گراف G' با عملگر $\mathcal{O}_1$ به‌دست می‌آید. در ادامه فرض کنید که $v_1 v_2 \in E(G)$. اگر $|V(G')| = 1$ باشد، آن‌گاه v_1 و v_2 مجاور رأسی از گراف G' می‌باشند. بنابراین $G = G_1 \in \mathcal{F}$. بنابراین فرض کرده که $|V(G')| \geq 2$. در این صورت می‌توان دید که حداکثر یک رأس x از $N(v)$ وجود دارد به طوری که $d(v_1, x) = 2$. همچنین حداکثر یک رأس y از $N(v)$ وجود دارد به طوری که $d(v_2, y) = 2$. بنابراین v_1 و v_2 مجاور حداقل $|V(G')| - 1$ رأس از گراف G' می‌باشند. بنابراین G از G' با عملگر $\mathcal{O}_2$ به‌دست می‌آید و لذا $G \in \mathcal{G}^*$.

زیرحالت ۱.۲. $\delta(G') = |V(G')| - 2$.

بوضوح $|V(G')| \geq 2$. فرض کنید که $|V(G')| \geq 3$. ابتدا نشان می‌دهیم که $G' \in \mathcal{G}$. با برهان خلف فرض کنید که $\gamma_{hR}(G') \leq |V(G')| - 1$. فرض کنید f یک $\gamma_{hR}(G')$ -تابع باشد. در این صورت تابع g با ضابطه $g(v) = 2$ ، $g(v_1) = g(v_2) = 0$ و در غیر این صورت $g(z) = f(z)$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای تابع G با وزن 2 می‌باشد. بنابراین $\gamma_{hR}(G) \leq f(V) + 2 \leq |V(G')| - 1 + 2 = |V(G')| + 1$. از $|V(G)| = |V(G')| + 3$ نتیجه می‌شود که $\gamma_{hR}(G) \leq |V(G)| - 2 = n - 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین $\gamma_{hR}(G') = |V(G')| - 2$. **۱.۳.۳** نتیجه می‌شود که $G' \in \mathcal{G} \cup \{P_4, K_{n-3}\}$. از $\delta(G') = |V(G')| - 2$ نتیجه می‌شود که $G' \neq P_4$ و $G' \neq K_{n-3}$. بنابراین $G' \in \mathcal{G}$. فرض کنید که $v_1 v_2 \notin E(G)$. در این صورت حداکثر یک رأس $N(v) \cup \{v_2\}$ در فاصله دو از v_1 وجود دارد، در غیر این صورت $\deg_h(v_1) > 2$ ، که یک تناقض است. با توجه به اینکه $diam(G) = 2$ ، داریم $d(v_1, v_2) = 2$. در این صورت نتیجه می‌گیریم که v_1 مجاور همه رؤس G' می‌باشد. به طریق مشابه v_2 مجاور هر رأسی از G' می‌باشد. بنابراین G از گراف G' با عملگر $\mathcal{O}_1$ به‌دست می‌آید و لذا $G \in \mathcal{G}^*$. حال فرض کنید که $v_1 v_2 \in E(G)$. در این حالت اگر رأس $z \in V(G')$ وجود داشته باشد به طوری که $z \notin N(v_1)$ ، آن‌گاه $d(z, v_1) = 2$. به طریق مشابه اگر $z \notin N(v_2)$ ، آن‌گاه $d(z, v_2) = 2$. بنابراین v_1 و v_2 مجاور حداقل $|V(G')| - 1$ رأس از G' می‌باشند. فرض کنید برای رأس $u \in V(G')$ ، $\deg_{G'}(u) = \delta(G') = |V(G')| - 2$. همچنین فرض کنید w رأسی از G' باشد به طوری که $w \notin N(u)$. بوضوح $d_{G'}(u, w) = 2$. در این صورت $u, w \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در غیر این صورت اگر $u \notin N(v_1) \cup N(v_2)$ یا $w \notin N(v_1) \cup N(v_2)$ باشد، آن‌گاه $\deg_h(u) > 2$ یا $\deg_h(w) > 2$ ، که یک تناقض است. حال فرض کنید که $u \notin N(v_1) \cap N(v_2)$. در این صورت چون $u \in N(v_1) \cup N(v_2)$ یا $u \in N(v_2)$ بدون از دست دادن کلیت فرض کنید

که $u \in N(v_1)$ و $u \notin N(v_2)$. در این حالت v_1 مجاور هر رأسی از $N_{G'}(u)$ می‌باشد، در غیر این صورت $\deg_h(v_1) = \deg_h(u) = 2$ ، $N_2(v_1) \cap N_2(u) = \emptyset$ که با توجه به ادعای 1 یک تناقض است. همچنین v_2 مجاور هر رأسی از $N_{G'}(u)$ می‌باشد، در غیر این صورت $\deg_h(v_2) > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین G از گراف $G' \in \mathcal{G}$ با عملگر $\mathcal{O}_2$ به دست می‌آید. بنابراین $G \in \mathcal{G}^*$. حال فرض کنید که $|V(G')| = 2$. در این صورت $G' = \overline{K_2}$. اگر $v_1 v_2 \notin E(G)$ باشد، آن‌گاه v_1 و v_2 مجاور همه رئوس G' می‌باشند، چون در غیر این صورت دو رأس با فاصله سه یا چهار از یکدیگر وجود دارد، که با $diam(G) = 2$ در تناقض است. لذا $G = G_2 \in \mathcal{F}$. بنابراین فرض می‌کنیم که $v_1 v_2 \in E(G)$. در این حالت هر رأس از $V(G')$ مجاور حداقل یک رأس از $N_2(v)$ می‌باشد چون در غیر این صورت دو رأس با فاصله سه از یکدیگر در گراف G وجود دارد، که با $diam(G) = 2$ در تناقض است. از طرف دیگر هر رأس از $N_2(v)$ مجاور حداقل یک رأس از $V(G')$ می‌باشد. بنابراین نتیجه می‌شود که $G \in \{G_3, G_4, G_5\}$ و لذا $G \in \mathcal{F}$.

حالت ۲. $diam(G) = 3$.

با توجه به ادعای 2 زیرحالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

۲.۱. $\delta(G') = |V(G')| - 1$. در این صورت G' یک گراف کامل است.

فرض کند که $|V(G')| \geq 3$. به راحتی می‌توان دید که v_1 و v_2 مجاور حداقل $|V(G')| - 1$ رأس از گراف G' می‌باشند و همچنین $N(v_1) \cap N(v_2) \neq \emptyset$. فرض کنید $v_1 v_2 \notin E(G)$ ، در این صورت $d(v_1, v_2) = 2$. اگر رأس $z \in N(v)$ وجود داشته باشد به طوری که $z \notin N(v_1)$ ، آن‌گاه $z \in N_2(v_1)$. بنابراین $\deg_h(v_1) \geq 3$ ، که یک تناقض است. لذا v_1 مجاور همه رئوس مجموعه $N(v)$ می‌باشد. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که v_2 مجاور هر رأسی از مجموعه $N(v)$ می‌باشد. در این حالت فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد. چون $diam(G) = 3$ ، می‌توان فرض کرد که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. توجه کنید که در این حالت رأس z از مجموعه $V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ وجود دارد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت $\deg_h(z) \geq 3$ ، که یک تناقض است. در ادامه فرض کنید که $v_1 v_2 \in E(G)$. در این حالت v_1 و v_2 مجاور حداقل $|V(G')| - 1$ رأس از گراف G' می‌باشند. بنابراین فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد. چون $diam(G) = 3$ ، می‌توان فرض کرد که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. توجه کنید که در این حالت رأس z از مجموعه $V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ وجود دارد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت از ادعای 1 و یا $\Delta_h(G) = 2$ به تناقض می‌رسیم. بنابراین نتیجه می‌شود که $|V(G')| \leq 2$.

فرض کند که $|V(G')| = 1$. قرار دهید $V(G') = \{w\}$. در این صورت v_1 و v_2 مجاور رأس w می‌باشند و فاصله بین هر دو رأس از مجموعه $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد. چون $diam(G) = 3$ ، می‌توان فرض کرد که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. فرض کنید z رأسی از $V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ باشد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت فرض کنید که رأس $z' \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ وجود دارد به طوری که $z' \neq z$. اگر $z' \in N(v_1) \cup N(v_2)$ ، آن‌گاه $z, z' \in N_2(w)$ و با توجه به اینکه $\Delta_h(G) = 2$ ، داریم $\deg_h(w) = 2$. در این صورت با ادعای 1 به

تناقض می‌رسیم. بنابراین $z' \in N(z) - \{v_1, v_2\}$ در این صورت بوضوح $d(v, z') = 4$ ، که یک تناقض است. بنابراین $|V(G) - (N[v] \cup N_2(v))| \leq 1$. از $diam(G) = 3$ ، می‌توان نتیجه گرفت که $|V(G) - (N[v] \cup N_2(v))| = 1$. حال فرض کنید که $v_1 v_2 \notin E(G)$ در این صورت به راحتی می‌توان دید که $G \in \{G_6, G_7\}$ و اگر $v_1 v_2 \in E(G)$ ، آنگاه $G \in \{G_8, G_9\}$. بنابراین $G \in \mathcal{F}$.

در ادامه فرض کنید که $|V(G')| = 2$. در این صورت $G' = K_2$. فرض کنید که $v_1 v_2 \notin E(G)$. اگر یک رأس از $N_2(v)$ مجاور دو رأس از G' ، آن‌گاه رأس دیگر $N_2(v)$ نیز مجاور دو رأس از G' می‌باشند، زیرا در غیر این صورت از $\Delta_h(G) = 2$ به تناقض می‌رسیم. توجه کنید که در این حالت برای هر دو رأس $a, b \in N[v] \cup N_2(v)$ ، $d(a, b) \leq 2$. از $diam(G) = 3$ ، می‌توان فرض کرد که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. فرض کنید z رأسی از مجموعه $V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ باشد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت $\deg_h(z) \geq 2$. از $\Delta_h(G) = 2$ نتیجه می‌شود که $\deg_h(z) = 2$. در این صورت $N_2(z) = N(v)$ ، که با توجه به ادعای 1 به تناقض می‌رسیم. بنابراین هر رأس از $N_2(v)$ مجاور یک رأس از G' می‌باشد.

اگر $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) \neq \emptyset$ ، آن‌گاه $\deg_h(v_1) = \deg_h(v_2) > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین خواهیم داشت $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) = \emptyset$ و $d(v_1, v_2) = 3$. اگر $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$ ، آن‌گاه از ادعای 1 یا این حقیقت که $diam(G) = 3$ می‌باشد به تناقض می‌رسیم. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) = \emptyset$. لذا $G = G_9 \in \mathcal{F}$.

حال فرض کنید که $v_1 v_2 \in E(G)$. اگر حداقل یک رأس از $N_2(v)$ مجاور دو رأس از $N(v)$ باشد، آن‌گاه برای هر دوتایی $a, b \in N[v] \cup N_2(v)$ ، $d(a, b) \leq 2$. چون $diam(G) = 3$ ، بنابراین می‌توان فرض کرد که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. فرض کنید z رأسی از $V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ باشد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت $\deg_h(z) \geq 2$. چون $\Delta_h(G) = 2$ ، نتیجه می‌شود که $\deg_h(z) = 2$. در این حالت با توجه به ادعای 1 به تناقض می‌رسیم. بنابراین هر رأس از $N_2(v)$ مجاور یک رأس از $V(G')$ می‌باشد. اگر $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) = \emptyset$ ، آن‌گاه برای هر دو تا عضو $a, b \in N[v] \cup N_2(v)$ ، $d(a, b) \leq 2$.

بنابراین فرض می‌کنیم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. فرض کنید z رأسی از مجموعه $V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ باشد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت بوضوح $\deg_h(z) = 2$ و با توجه به ادعای 1 به تناقض می‌رسیم. بنابراین $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) \neq \emptyset$. فرض کنید که $\{x\} = N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2)$. بوضوح برای هر جفت $a, b \in N[v] \cup N_2(v)$ ، $d(a, b) \leq 2$. چون $diam(G) = 3$ ، بنابراین می‌توان فرض کرد که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. فرض کنید z رأسی از $V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ باشد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. فرض کنید رأس z' وجود دارد به طوری که $z' \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ و همچنین $z \neq z'$.

اگر $z' \in N(v_1) \cup N(v_2)$ ، آن‌گاه $\deg_h(x) = 2$ و $N_2(x) \cap N_2(v) = \emptyset$ ، که با ادعای 1 یک تناقض است. بنابراین $z' \in N(z) - \{v_1, v_2\}$ ، و در این حالت بوضوح $d(z', v) = 4$ ، که یک تناقض است. بنابراین $|V(G) - (N[v] \cup N_2(v))| \leq 1$. اگر z مجاور تنها یک رأس از $N_2(v)$ ، آن‌گاه بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که z فقط مجاور v_1 می‌باشد. در این صورت

$\deg_h(v_2) = 3$ ، که یک تناقض است. بنابراین $G = G_{10} \in \mathcal{F}$ و $z \in N(v_1) \cap N(v_2)$.

۲.۲. زیر حالت ۲. $\delta(G') = |V(G')| - 2$.

بوضوح $|V(G')| \geq 2$. فرض کنید که $|V(G')| \geq 4$. همچنین فرض کنید که x رأسی از G' باشد به طوری که $\deg_{G'}(x) = |V(G')| - 2$ و y رأس دیگری از G' باشد به طوری که $y \notin N_{G'}(x)$. می‌توان دید که $d(x, y) = 2$ و $N_{G'}(x) = N_{G'}(y)$. نشان می‌دهیم اگر رأس $a \in V(G')$ وجود داشته باشد به طوری که $a \notin N(v_1)$ ، آن‌گاه $d(a, v_1) = 2$. اگر $a = x$ ، آن‌گاه حداقل یک رأس از $N_{G'}(x)$ مجاور رأس v_1 می‌باشد، زیرا در غیر این صورت $\deg_h(v_1) > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $d(a, v_1) = 2$. در ادامه فرض کنید که $a \in N_{G'}(x)$. اگر $\{x, y\} \cap N(v_1) = \emptyset$ ، آن‌گاه $\deg_h(v_1) > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین $\{x, y\} \cap N(v_1) \neq \emptyset$ و لذا $d(a, v_1) = 2$. اگر دو رأس $a, b \in V(G')$ وجود داشته باشد به طوری که $a, b \notin N(v_1)$ ، آن‌گاه $\deg_h(v_1) > 2$ ، که یک تناقض است. لذا v_1 و v_2 مجاور حداقل $|V(G')| - 1$ رأس از G' می‌باشند و بوضوح $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) \neq \emptyset$. حال توجه کنید که $d(v_1, v_2) \leq 2$. در این صورت بوضوح فاصله هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد. چون $\text{diam}(G) = 3$ ، بنابراین فرض می‌کنیم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. فرض کنید z رأسی از $V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ باشد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت بوضوح $\deg_h(z) > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین $|V(G')| \leq 3$.

حال فرض کنید که $|V(G')| = 2$. در این صورت $G' = \overline{K_2}$. فرض کنید $V(G') = \{x, y\}$ و $v_1 v_2 \notin E(G)$. اگر v_1 و v_2 مجاور دو رأس از $V(G')$ باشند، آن‌گاه فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد. چون $\text{diam}(G) = 3$ می‌توان فرض کرد که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. فرض کنید z رأسی از $V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ باشد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت بوضوح $\deg_h(z) = 2$ و $N_2(z) \cap N_2(v) = \emptyset$ ، که با ادعای ۱ یک تناقض است. بنابراین حداقل یک رأس در $N_2(v)$ وجود دارد به طوری که مجاور فقط یک رأس از G' می‌باشد. اگر v_1 مجاور دو رأس از $V(G')$ باشد و v_2 مجاور فقط یک رأس از $V(G')$ باشد، آن‌گاه $d(v_2, x) = 3$ یا $d(v_2, y) = 3$. نشان می‌دهیم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) = \emptyset$. با برهان خلف فرض کنید که رأس $z \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ وجود دارد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت از ادعای ۱ یا این حقیقت که $\text{diam}(G) = 3$ ، به تناقض می‌رسیم. لذا نتیجه می‌گیریم که $G = G_7 \in \mathcal{F}$. حال فرض کنید که هر رأس از $N_2(v)$ مجاور یک رأس از G' باشد. اگر v_1 مجاور x و v_2 مجاور رأس y باشد، آن‌گاه $d(v_1, v_2) = 4$ ، که یک تناقض است. بنابراین هر دو رأس از $N_2(v)$ مجاور دقیقاً یک رأس از G' می‌باشند. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که v_1 و v_2 مجاور رأس x می‌باشند. بوضوح $d(y, v_1) = d(y, v_2) = 3$. در این صورت به راحتی می‌توان دید که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) = \emptyset$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $G = G_6 \in \mathcal{F}$.

حال فرض کنید که $v_1 v_2 \in E(G)$. اگر حداقل یک رأس از $N_2(v)$ وجود داشته باشد به طوری که مجاور دو رأس از G' باشد، آن‌گاه فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد. چون $\text{diam}(G) = 3$ ، فرض می‌کنیم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. فرض کنید z

رأسی از $V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ باشد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت بوضوح $\deg_h(z) = 2$ و طبق ادعای 1 به تناقض می‌رسیم. لذا نتیجه می‌گیریم که هر رأس از $N_2(v)$ مجاور یک رأس از G' می‌باشد. اگر v_1 مجاور x و v_2 مجاور y باشد، آن‌گاه فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد و به راحتی می‌توان دید که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) = \emptyset$. بنابراین هر دو رأس v_1 و v_2 مجاور دقیقاً یک رأس از G' می‌باشند. در این حالت دو رأس در $N[v] \cup N_2(v)$ وجود دارد به طوری که فاصله بین آن‌ها سه می‌باشد و همچنین به راحتی می‌توان دید که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) = \emptyset$ لذا $G = G_{11} \in \mathcal{F}$.

در ادامه فرض کنید که $|V(G')| = 3$. در این صورت G' مسیری با طول دو می‌باشد. فرض کنید G' متناظر مسیر $P : xyu$ باشد. فرض کنید که $v_1v_2 \notin E(G)$. اگر یکی از رؤوس $N_2(v)$ مجاور همه رؤوس G' باشد، آن‌گاه بوضوح رأس دیگر $N_2(v)$ نیز مجاور همه رؤوس G' می‌باشد. حال فرض کنید که هر دو رأس از $N_2(v)$ مجاور هر رأس از $V(G')$ باشند، آن‌گاه فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد. چون $\text{diam}(G) = 3$ ، می‌توان فرض کرد که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. فرض کنید z رأسی از $V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ باشد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت بوضوح $\deg_h(z) > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین هر رأس از $N_2(v)$ مجاور حداکثر دو رأس از G' می‌باشد. اگر هر رأس از $N_2(v)$ مجاور دو رأس از G' باشد، آن‌گاه بوضوح $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) \neq \emptyset$ و لذا $d(v_1, v_2) = 2$. بنابراین درجه جهشی از هر رأس از $N_2(v)$ بیشتر از دو می‌باشد، که یک تناقض است. بنابراین حداقل یک رأس از $N_2(v)$ مجاور تنها یک رأس از G' می‌باشد. فرض کنید که دو رأس از $N_2(v)$ مجاور یک رأس از G' باشند. در این صورت به راحتی می‌توان دید که $y \notin N(v_1) \cup N(v_2)$ و همچنین $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) = \emptyset$. بنابراین اگر v_1 مجاور رأس x باشد، آن‌گاه v_2 مجاور رأس u می‌باشد. در این صورت $d(v_1, v_2) = 4$ که با $\text{diam}(G) = 3$ در تناقض است. بنابراین یک رأس از $N_2(v)$ مجاور رأسی از G' می‌باشد و رأس دیگر مجاور به دو رأس از G' می‌باشند. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که v_1 مجاور دو رأس از G' باشد و v_2 مجاور تنها یک رأس از G' باشد. در این صورت بوضوح $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) = \emptyset$ و مثل قبل می‌توان دید که v_2 مجاور رأس y نیست. توجه کنید که در این حالت $d(v_1, v_2) = 3$ و به راحتی می‌توان دید که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) = \emptyset$ لذا نتیجه می‌گیریم که $G = G_{12} \in \mathcal{F}$.

حال فرض کنید که $v_1v_2 \in E(G)$. اگر هر رأسی از $N_2(v)$ مجاور حداقل دو رأس از G' باشد، آن‌گاه فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد. چون $\text{diam}(G) = 3$ ، بنابراین می‌توان فرض کرد که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. فرض کنید z رأسی از $V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ باشد به طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت $\deg_h(z) > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین حداقل یک رأس از $N_2(v)$ مجاور تنها یک رأس از G' می‌باشد. توجه کنید که در این حالت هر رأسی از $N_2(v)$ مجاور حداکثر دو رأس از G' می‌باشد. اگر دو رأس v_1 و v_2 مجاور یک رأس از G' باشند، آن‌گاه $y \notin N(v_1) \cup N(v_2)$ ، زیرا در غیر این صورت $\deg_h(v_1) \geq 3$ و $\deg_h(v_2) \geq 3$ ، که یک تناقض است. همچنین $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) \neq \emptyset$ و در غیر این صورت

$\deg_h(v_1) > 2$ و $\deg_h(v_2) > 2$. بنابراین v_1 و v_2 مجاور دقیقا یک رأس از $\{x, u\}$ می‌باشند و لذا $G = G_{10} \in \mathcal{F}$. حال فرض کنید که یک رأس از $N_2(v)$ مجاور دو رأس از G' باشد و رأس دیگر از $N_2(v)$ مجاور یک رأس از G' باشند. بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که v_2 مجاور یک رأس از G' می‌باشد. در این صورت $y \notin N(v_2)$ ، زیرا در غیر این صورت $\deg_h(v_2) \geq 3$ ، که یک تناقض است. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که v_2 مجاور رأس u می‌باشد. اگر $u \notin N(v_1)$ ، آن‌گاه $\{x, y\} = N_{G'}(v_1)$ و می‌توان دید که $\deg_h(v_2) \geq 3$ ، که یک تناقض است. بنابراین $u \in N(v_1)$. در ادامه فرض کنید که $x \in N(v_1)$. در این صورت به راحتی می‌توان دید که $\deg_h(v_2) > 2$ که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $N_{G'}(v_1) = \{y, u\}$ و $N_{G'}(v_2) = \{u\}$. توجه کنید که در این حالت $d(x, v_2) = 3$ و می‌توان دید که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) = \emptyset$. بنابراین $G = G_{13} \in \mathcal{F}$.

حالت ۳. $diam(G) = 4$.

طبق ادعای ۲، زیرحالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

زیرحالت ۳.۱. $\delta(G') = |V(G')| - 1$. در این صورت G' یک گراف کامل است.

فرض کنید که $|V(G')| \geq 3$. بوضوح هر رأس از $N_2(v)$ مجاور حداقل $|V(G')| - 1$ رأس از گراف G' می‌باشد. همچنین v_1 مجاور حداقل $|V(G') \cup \{v_2\}| - 1$ رأس از $V(G') \cup \{v_2\}$ می‌باشد زیرا در غیر این صورت اگر دو رأس $a, b \in V(G') \cup \{v_2\}$ وجود داشته باشند به‌طوری که $a, b \notin N(v_1)$ ، آن‌گاه $\deg_h(v_1) > 2$ ، که یک تناقض است. به طریق مشابه می‌توان دید که v_2 مجاور حداقل $|V(G') \cup \{v_1\}| - 1$ رأس از مجموعه $V(G') \cup \{v_1\}$ می‌باشد. بوضوح در این حالت فاصله هر دو رأس از مجموعه $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد. از $diam(G) = 4$ نتیجه می‌گیریم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. در این صورت رأس $z \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ وجود دارد به‌طوری که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. توجه کنید که در این حالت $\deg_h(z) \geq 2$ و لذا از $\Delta_h(G) = 2$ یا ادعای ۱ به تناقض می‌رسیم. بنابراین فرض می‌کنیم که $|V(G')| \leq 2$.

ابتدا فرض کنید که $|V(G')| = 2$ ، در این صورت به راحتی می‌توان دید که فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر سه می‌باشد. با توجه به اینکه $diam(G) = 4$ ، می‌توانیم فرض کنیم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. در این حالت از $\Delta_h(G) = 2$ یا ادعای ۱ به تناقض می‌رسیم.

بنابراین فرض می‌کنیم که $|V(G')| = 1$. قرار دهید $V(G') = \{z\}$. در این صورت v_1 و v_2 مجاور رأس z می‌باشند و فاصله بین هر دو رأس از مجموعه $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد. از $diam(G) = 4$ می‌توان نتیجه گرفت که رأس $y \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ وجود دارد به‌طوری که $d(y, v_1) = 2$ یا $d(y, v_2) = 2$. در این حالت اگر $v_1 v_2 \notin E(G)$ باشند، آن‌گاه درجه جهشی حداقل یک رأس از $N_2(v)$ بیشتر از دو می‌باشد، که یک تناقض است. بنابراین $v_1 v_2 \in E(G)$. حال فرض کنید که $y \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ رأسی با فاصله دو از v_1 باشد و همچنین $v_1 x y$ مسیر بین رئوس v_1 و y باشد. اگر $x \notin N(v_2)$ ، آن‌گاه $\deg_h(x) = \deg_h(v_1) = 2$ و $N_2(x) \cap N_2(v_1) = \emptyset$ ، که با ادعای ۱ در تناقض است. بنابراین $x \in N(v_2)$. اگر رأس

$x' \in N(v_2) \cup N(v_1)$ و $x' \neq x$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $x' \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ آن‌گاه $\deg_h(z) = 2$ و $N_2(z) \cap N_2(v) = \emptyset$ که با توجه به ادعای 1 به تناقض می‌رسیم. با توجه به اینکه $y \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ و $y \neq x$ ، نتیجه می‌گیریم که $y \notin N(v_2)$ و همچنین $\text{diam}(G) = 4$ نتیجه می‌شود که $N(y) - \{x\} = \emptyset$ و y یک برگ می‌باشد. از طرف دیگر $N(x) - N_2(v) = \{y\}$ ، زیرا در غیر این صورت $\deg_h(v_1) \geq 3$ و همچنین $\deg_h(v_2) \geq 3$ ، که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $G = G_{14} \in \mathcal{F}$. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $y \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ رأسی با فاصله دو از v_2 می‌باشد و لذا $G = G_{14} \in \mathcal{F}$.

۳.۲. زیرحالت $\delta(G') = |V(G')| - 2$

بوضوح $|V(G')| \geq 2$. فرض کنید که $|V(G')| \geq 4$. همچنین فرض کنید که x رأسی از $V(G')$ باشد به‌طوری‌که $\deg_{G'}(x) = |V(G')| - 2$ و y رأسی از G' باشد به‌طوری‌که $y \notin N_{G'}(x)$. در این صورت می‌توان دید که $d(x, y) = 2$ و $N_{G'}(x) = N_{G'}(y)$. نشان می‌دهیم که اگر رأس $a \in V(G')$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a \notin N(v_1)$ ، آن‌گاه $d(a, v_1) = 2$. اگر $a = x$ باشد، آن‌گاه حداقل یک رأس از $N_{G'}(x)$ مجاور رأس v_1 وجود دارد زیرا در غیر این صورت $\deg_h(v_1) > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $d(a, v_1) = 2$. در ادامه فرض کنید که $a \in N_{G'}(x)$. اگر $\{x, y\} \cap N(v_1) = \emptyset$ باشد، آن‌گاه $\deg_h(v_1) > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین $\{x, y\} \cap N(v_1) \neq \emptyset$ و لذا $d(a, v_1) = 2$. اگر دو رأس $a, b \in V(G')$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که $a, b \notin N(v_1)$ ، آن‌گاه $\deg_h(v_1) > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که v_1 مجاور حداقل $|V(G')| - 1$ رأس از G' می‌باشد. با یک استدلال مشابه می‌توان نشان داد که v_2 مجاور حداقل $|V(G')| - 1$ رأس از G' می‌باشد. بوضوح $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) \neq \emptyset$. در این صورت فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر 2 می‌باشد. فرض می‌کنیم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$ ، در این صورت رأس $z \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ وجود دارد به‌طوری‌که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. توجه کنید که در این حالت $\deg_h(z) > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) = \emptyset$ و لذا می‌توان فرض کرد که $|V(G')| \leq 3$.

ابتدا فرض می‌کنیم که $|V(G')| = 3$. در این صورت G' یک مسیر از طول دو می‌باشد. فرض کنید G' مسیر xyu باشد. فرض کنید که حداقل یک رأس از $N_2(v)$ مجاور حداقل دو رأس از G' باشد. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید که v_1 مجاور حداقل دو رأس از G' باشد. در این صورت بوضوح فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر 3 می‌باشد. بنابراین فرض می‌کنیم که حداقل یک رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ وجود دارد که مجاور رأس v_1 یا v_2 می‌باشد. اگر z مجاور رأس v_1 باشد، آن‌گاه $\deg_h(z) \geq 2$ ، که از ادعای 1 یا این حقیقت که $\Delta_h(G) = 2$ به تناقض می‌رسیم. بنابراین z مجاور رأس v_2 می‌باشد. در این حالت v_2 مجاور حداقل یک رأس از G' می‌باشد. در این صورت به آسانی از ادعای 1 یا این حقیقت که $\Delta_h(G) = 2$ می‌باشد به تناقض می‌رسیم. بنابراین هر رأس از $N_2(v)$ مجاور یک رأس از G' می‌باشد. در این صورت می‌توان دید که $y \notin N(v_1) \cup N(v_2)$. اگر $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) \neq \emptyset$

آن‌گاه فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر سه می‌باشد. بنابراین می‌توان فرض کرد که رأس $z \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ وجود دارد که مجاور v_1 یا v_2 می‌باشد. فرض کنید $x \in N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2)$. در این صورت $\deg_h(x) = 2$ و $N_2(x) = \{u, z\}$. بنابراین $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) = \emptyset$ و از ادعای 1 به تناقض می‌رسیم. بنابراین $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) = \emptyset$. آن‌گاه بوضوح $\deg_h(v_1) > 2$ و $\deg_h(v_2) > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین $v_1 v_2 \notin E(G)$. در این صورت $d(v_1, v_2) = 4$ و بوضوح $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) = \emptyset$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $G = G_{14} \in \mathcal{F}$.

در ادامه فرض کنید که $|V(G')| = 2$. در این صورت $G' = \overline{K_2}$. قرار دهید $V(G') = \{x, y\}$. بوضوح رئوس v_1 و v_2 مجاور حداقل یک رأس از گراف G' می‌باشند. اگر هر رأس از مجموعه $N_2(v)$ مجاور دو رأس از G' باشد، آن‌گاه بوضوح فاصله بین هر دو رأس از مجموعه $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد. با توجه به اینکه $diam(G) = 4$ ، می‌توانیم فرض کنیم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. در این صورت رأس $z \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ وجود دارد به‌طوری‌که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این حالت $\deg_h(z) \geq 2$ و از ادعای 1 یا این حقیقت که $\Delta_h(G) = 2$ ، به تناقض می‌رسیم. بنابراین حداقل یک رأس در مجموعه $N_2(v)$ وجود دارد به طوری که مجاور تنها یک رأس از گراف G' می‌باشد. فرض کنید که یک رأس از $N_2(v)$ مجاور دو رأس از $V(G')$ باشد و دیگر رئوس مجاور تنها یک رأس از گراف G' باشند. در این صورت فاصله بین هر دو رأس از مجموعه $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر دو می‌باشد. از $diam(G) = 4$ می‌توانیم فرض کنیم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. در این صورت رأس $z \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ وجود دارد به‌طوری‌که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این حالت $\deg_h(z) \geq 2$ و از ادعای 1 و این حقیقت که $\Delta_h(G) = 2$ ، به تناقض می‌رسیم. بنابراین هر رأس از $N_2(v)$ مجاور تنها یک رأس از G' می‌باشد. فرض کنید که $v_1 v_2 \in E(G)$. در این حالت فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر 3 می‌باشد. می‌توانیم فرض کنیم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. در این صورت رأس $z \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ وجود دارد به‌طوری‌که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این صورت به آسانی از ادعای 1 یا این حقیقت که $\Delta_h(G) = 2$ می‌باشد به تناقض می‌رسیم. بنابراین $v_1 v_2 \notin E(G)$. فرض کنید که $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) \neq \emptyset$ ، در این صورت فاصله بین هر دو رأس از $N[v] \cup N_2(v)$ حداکثر سه می‌باشد. بنابراین فرض می‌کنیم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) \neq \emptyset$. در این صورت رأس $z \in V(G) - (N[v] \cup N_2(v))$ وجود دارد به‌طوری‌که $z \in N(v_1) \cup N(v_2)$. در این حالت به آسانی از ادعای 1 به تناقض می‌رسیم. لذا $N_{G'}(v_1) \cap N_{G'}(v_2) = \emptyset$ و $d(v_1, v_2) = 4$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $V(G) - (N[v] \cup N_2(v)) = \emptyset$ و لذا $G = P_5$.

($\Rightarrow$) فرض کنید که $G \in \mathcal{G}^* \cup \mathcal{F} \cup \{P_5\}$. بوضوح می‌توان دید که اگر $G = P_5$ یا $G \in \mathcal{F}$ ، آن‌گاه $\gamma_{hR}(G) = n - 1$. در ادامه فرض کنید که $G \in \mathcal{G}^*$. در این صورت از لم ۱.۳.۳ نتیجه گرفته می‌شود که $\gamma_{hR}(G) = n - 1$.

□

فصل ۴

تابع احاطه گر جهشی رومی در درختان

۱.۴ مقدمه

در این فصل رابطه عدد احاطه گر جهشی رومی با عدد احاطه گر جهشی یک درخت را بررسی می‌کنیم. با توجه به قضیه ۱.۲.۳ می‌دانیم که برای هر درخت T ، $\gamma_{hR}(T) \geq \gamma_h(T) + 1$. ما در بخش ۲.۴، درختان T با $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1$ را مشخص می‌کنیم. سپس در بخش ۳.۴، همه درختان T که رابطه $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1$ برای آن‌ها برقرار است را مشخص می‌کنیم.

۲.۴ درختان T با $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1$

در قضیه ۳.۲.۳، نشان دادیم که اگر G یک گراف همبند از مرتبه n باشد به طوری که $G \neq K_n$ ، آن‌گاه $\gamma_{hR}(G) = \gamma_h(G) + 1$ اگر و فقط اگر رأس $v \in V(G)$ وجود داشته باشد به طوری که $\deg_h(v) = n - \gamma_h(G)$. در اینجا می‌خواهیم همه درختان T با $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1$ را مشخص کنیم.

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید T درختی از مرتبه حداقل سه باشد. در این صورت $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1$ اگر و فقط اگر T یک ستاره باشد.

برهان. ابتدا فرض کنید T یک ستاره باشد. فرض کنید v رأس مرکزی ستاره T و رأس u برگ

از درخت T باشد. در این صورت مجموعه $D = \{u, v\}$ یک مجموعه احاطه گر جهشی از گراف G می باشد. بنابراین $\gamma_h(T) \leq 2$. بوضوح $2 \leq \gamma_h(T)$ و لذا نتیجه می گیریم که $\gamma_h(T) = 2$. از طرف دیگر تابع f با ضابطه $f(u) = 2, f(v) = 1$ و برای هر برگ $f(z) = 0, z \neq u$ یک تابع احاطه گر رومی جهشی برای گراف G با وزن $f(V) = 2 + 1 = \gamma_h(T) + 1$ می باشد. بنابراین $\gamma_{hR}(T) \leq \gamma_h(T) + 1$. از قضیه ۱.۲.۳ نتیجه می شود که $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1$.
 حال فرض کنید که $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1$ و تابع $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع باشد. بوضوح $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1 = |V_1^f| + 2|V_2^f|$. اگر $|V_2^f| \geq 2$ ، آن گاه $|V_1^f| + |V_2^f| \leq \gamma_h(T) - 1$. از گزاره ۱.۲.۳ قسمت (d) نتیجه می شود که $\gamma_h(T) \leq |V_1^f| + |V_2^f|$ و لذا $\gamma_h(T) \leq \gamma_h(T) - 1$ ، که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می گیریم که $|V_2^f| \leq 1$.
 فرض کنید $|V_2^f| = 0$. در این صورت $V_1^f = V(T)$ و $\gamma_{hR}(T) = n$. اگر $\delta_h(T) \geq 1$ ، آن گاه از گزاره ۷.۲.۳ نتیجه می گیریم که $n = \gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1 \leq \frac{n}{2} + 1$ و لذا $n \leq 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین $\delta_h(T) = 0$. فرض کنید v رأسی از درخت T باشد به طوری که $\deg_h(v) = \delta_h(T) = 0$. بوضوح v مجاور هر رأسی از مجموعه $V(T) - \{v\}$ می باشد. بنابراین T یک ستاره است.

فرض کنید $V_2^f = \{u\}$. بوضوح $N(u) \subseteq V_1^f$ و $|N(u)| \leq 2$. اگر $\deg(u) = 2$ ، آن گاه با تغییر وزن هر رأس از $N(u)$ به ۲ و دیگر رئوس به ۰، $\gamma_{hR}(T)$ -تابع g بدست می آید که $|V_2^g| = 2$ ، که یک تناقض است. فرض کنید که $N(u) = \{z\}$. اگر $w \in N_2(z)$ ، آن گاه $f(w) = 1$ و لذا با تغییر وزن $f(z)$ به ۲ و $f(w)$ به ۰ یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع g به دست می آید که $|V_2^g| = 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین هر رأس از $N(z)$ یک برگ است و لذا T یک ستاره است. $\square$

۳.۴ درختان T با $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$

۱.۳.۴ مقدمه

در این بخش هدف ما مشخص کردن همه درختان T با $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$ می باشد. فرض کنید S زیرمجموعه ای از رئوس گراف G باشد و $v \in S$. در این صورت S -همسایه جهشی بیرونی^۱ از رأس v را با $epn_2(v, S)$ نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود.

$$epn_2(v, S) = \{w \in V(G) - S \mid N_2(w; G) \cap S = \{v\}\}.$$

در این بخش ما ابتدا در زیربخش ۲.۳.۴ خانواده ای $\mathcal{R}$ از درختان را تعریف می کنیم و سپس در زیربخش ۳.۳.۴ قضیه زیر که هدف اصلی این بخش می باشد را اثبات می کنیم.

قضیه ۱.۳.۴. اگر T درختی از مرتبه $n \geq 4$ باشد، آن گاه $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$ اگر و فقط اگر $T \in \mathcal{R}$.

^۱ S -external hop neighborhood

۲.۳.۴ خانواده $\mathcal{R}$

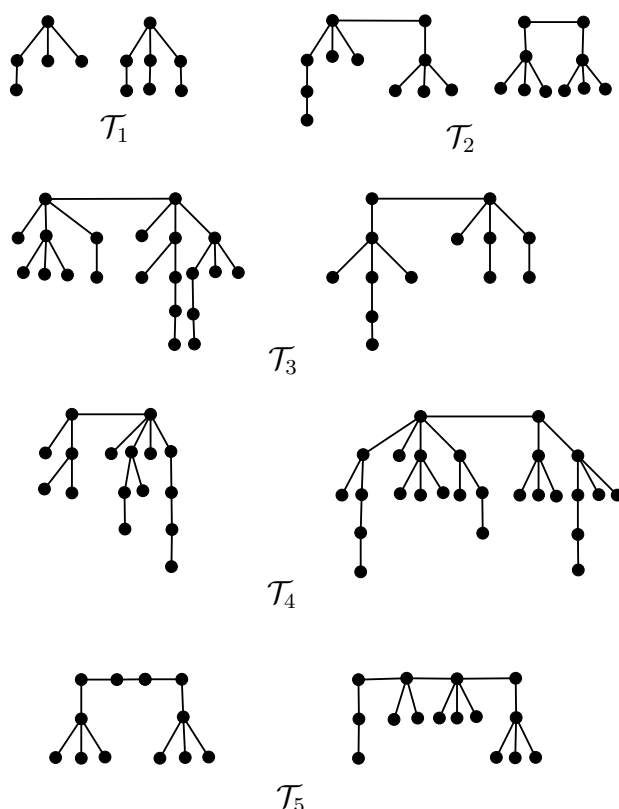
به منظور مشخص کردن همه درختان T با $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$ ، ابتدا خانواده‌ای از درختان را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

● **خانواده $\mathcal{T}_1$.** فرض کنید $\mathcal{T}_1$ خانواده‌ای از درختان ریشه‌دار باشد به‌طوری‌که ریشه، دارای درجه حداقل دو باشد و هر برگ با فاصله حداکثر دو از ریشه باشد و حداقل یک برگ از آن دارای فاصله دقیقاً دو از ریشه باشد.

● **خانواده $\mathcal{T}_2$.** فرض کنید $\mathcal{T}_2^0$ خانواده‌ای از درختان باشد که هر برگ دارای فاصله حداکثر سه از ریشه باشد، حداقل یک فرزند از ریشه برگ نباشد، هر فرزند x از ریشه دارای حداکثر یک فرزند غیر برگ باشد و چنین فرزندی دارای درجه دو باشد. فرض کنید $\mathcal{T}_2$ خانواده‌ای از درختان T باشد به‌طوری‌که از دو درخت $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_2^0$ با متصل کردن ریشه درخت T_1 به درخت T_2 به‌دست آید.

● **خانواده $\mathcal{T}_3$.** فرض کنید $\mathcal{T}_3^1$ خانواده‌ای از درختان ریشه‌دار باشد به‌طوری‌که هر برگ دارای فاصله یک، دو یا چهار از ریشه باشد، حداقل یک برگ در فاصله دقیقاً چهار از ریشه باشد، اگر x فرزند غیربرگی از ریشه باشد، آن‌گاه دارای دقیقاً یک فرزند از درجه برابر دو باشد و همچنین هر رأس با فاصله سه از ریشه دارای درجه دو باشد. فرض کنید $\mathcal{T}_3^2$ خانواده‌ای از درختان ریشه‌دار باشد به‌طوری‌که هر برگ در فاصله حداکثر دو از ریشه باشد و حداقل یک برگ دارای فاصله دو با ریشه باشد. فرض کنید $\mathcal{T}_3$ خانواده‌ای از درختان T باشد به‌طوری‌که از دو درخت $T_1 \in \mathcal{T}_3^1$ و $T_2 \in \mathcal{T}_3^2$ با وصل کردن ریشه درخت T_1 به ریشه درخت T_2 به‌دست آید.

● **خانواده $\mathcal{T}_4$.** فرض کنید $\mathcal{T}_4^1$ خانواده‌ای از درختان ریشه‌دار باشد به‌طوری‌که ریشه دارای درجه حداقل دو باشد، هر برگ دارای فاصله حداکثر چهار از ریشه باشد، حداقل یک برگ در فاصله دقیقاً چهار از ریشه باشد، حداقل یک فرزند غیر برگ x از ریشه وجود داشته باشد به‌طوری‌که حداکثر یک فرزند از x برگ نباشد و این فرزند رأس پشتیبانی از درجه دو باشد، اگر x یک برگ با فاصله چهار از ریشه باشد و مسیر بین x و ریشه w باشد، آن‌گاه $\deg(x_1) = \deg(x_2) = 2$ ، اگر x یک برگ با فاصله سه از ریشه باشد و مسیر بین x و ریشه w باشد، آن‌گاه $\deg(x_1) = 2$ ؛ برای هر فرزند x از ریشه حداکثر یکی از فرزندان دارای درجه بیشتر از یک باشد و در صورت وجود، درجه آن دو باشد. فرض کنید $\mathcal{T}_4^2$ خانواده‌ای از همه درختان ریشه‌دار باشد به‌طوری‌که هر برگ در فاصله حداکثر چهار از ریشه باشد، حداقل یک فرزند غیر برگ x از ریشه وجود داشته باشد و حداکثر یک فرزند از x غیر برگ باشد و چنین فرزندی یک رأس پشتیبان از درجه دو باشد، اگر x یک برگ با فاصله چهار از ریشه باشد و مسیر بین رأس x و



شکل ۱.۴: مثال‌هایی از درختان T_i برای $i = 1, 2, \dots, 5$.

ریشه w باشد، آن‌گاه $\deg(x_1) = \deg(x_2) = 2$ ، اگر x یک برگ با فاصله سه از ریشه باشد و مسیر بین رأس x و ریشه w باشد، آن‌گاه $\deg(x_1) = 2$ ، برای هر فرزند x از ریشه حداکثر یک فرزند از x دارای درجه بیشتر از یک باشد و در صورت وجود دارای درجه دو باشد. فرض کنید T_4 خانواده‌ای از درختان T باشد به طوری که T از دو درخت $T_1 \in T_4^1$ و $T_2 \in T_2^2$ با متصل کردن ریشه درخت T_1 به ریشه درخت T_2 بدست می‌آید.

● **خانواده T_5 .** فرض کنید T_5 خانواده‌ای از همه درختان T باشد که از ستاره دوگانه با رئوس مرکزی v و w با وصل کردن برگی از رأس v به رأس مرکزی ستاره K_{1,t_1} برای $t_1 \geq 1$ و همچنین وصل کردن برگی از رأس w به رأس مرکزی ستاره K_{1,t_2} برای $t_2 \geq 1$ بدست آید.

دو مثال از درختان T_i برای هر $i = 1, 2, \dots, 5$ در شکل ۱.۴ نشان داده شده است.

حال قرار دهید $\mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^5 T_i$.

برای اثبات نتایج اصلی در این بخش، گزاره زیر مفید می‌باشد.

گزاره ۱.۳.۴ ([۶]). فرض کنید P_n یک مسیر n رأسی باشد، در این صورت

$$\gamma_h(P_n) = \begin{cases} 2r & \text{if } n = 6r \\ 2r + 1 & \text{if } n = 6r + 1 \\ 2r + 2 & \text{if } n = 6r + s; 2 \leq s \leq 5. \end{cases}$$

لم ۱.۳.۴. اگر $T \in \mathcal{R}$ ، آن گاه $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$.

برهان. فرض کنید که $T \in \mathcal{R}$. ابتدا فرض کنید که $T \in \mathcal{T}_1$. فرض کنید x ریشه درخت T باشد. فرض کنید $y \in N(x)$. بوضوح $\{x, y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا $\gamma_h(T) \leq 2$. همچنین بوضوح $\gamma_h(T) \geq 2$ و لذا $\gamma_h(T) = 2$. از طرف دیگر تابع f با ضابطه $f(u) = 0$ ، $f(x) = f(y) = 2$ برای $u \in V(T) - \{x, y\}$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا $\gamma_{hR}(T) \leq 4 = 2 + \gamma_h(T)$. در این صورت از قضایای ۱.۲.۳ و ۱.۲.۴ نتیجه گرفته می‌شود که $\gamma_{hR}(T) = 4$. در نتیجه $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$.

حال فرض کنید که $T \in \mathcal{T}_2$. بنابراین درخت T از درختان $\mathcal{T}_2^0$ با $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_2^0$ و وصل کردن ریشه آن‌ها به دست می‌آید. فرض کنید v ریشه درخت T_1 ، w ریشه درخت T_2 باشند و T با متصل کردن v با w به دست می‌آید. فرض کنید که $(N_3(v) - N_2(w)) \cup (N_3(w) - N_2(v)) \neq \emptyset$ و قرار دهید $\{x_1, \dots, x_t\} = (N_3(v) - N_2(w)) \cup (N_3(w) - N_2(v))$. برای $i = 1, 2, \dots, t$ فرض کنید $y_i \in N(v) \cup N(w)$ و $d(y_i, x_i) = 2$. با توجه به ساختار درختان $T \in \mathcal{T}_2$ ، برای هر $i = 1, 2, \dots, t$ دقیقاً یک زوج x_i, y_i وجود دارد به طوری که $x_i, y_i \in (N_3(v) - N_2(w)) \cup (N_3(w) - N_2(v))$ و $d(y_i, x_i) = 2$. به راحتی می‌توان دید که $\{x_1, \dots, x_t\} \cup \{v, w\}$ یک مجموعه احاطه‌گر جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا $\gamma_h(T) \leq t + 2$. فرض کنید D یک $\gamma_h(T)$ -مجموعه باشد. برای $i = 1, 2, \dots, t$ ، D شامل حداقل یک رأس از مجموعه $\{x_i, y_i\}$ می‌باشد. به علاوه D شامل حداقل یک رأس از مجموعه $N_2[v] - N(w)$ و همچنین شامل حداقل یک رأس از مجموعه $N_2[w] - N(v)$ می‌باشد. بنابراین $|D| \geq 2 + t$. در نتیجه $\gamma_h(T) = 2 + t$. از طرف دیگر تابع f با ضابطه $f(x_i) = 1$ ، $f(w) = f(v) = 2$ برای $i = 1, 2, \dots, t$ و در غیر این صورت $f(u) = 0$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا نتیجه می‌گیریم که $\gamma_{hR}(T) \leq 4 + t = 2 + \gamma_h(T)$. حال از قضایای ۱.۲.۳ و ۱.۲.۴ نتیجه می‌گیریم که $\gamma_{hR}(T) = 2 + \gamma_h(T)$. در ادامه فرض کنید که $(N_3(v) - N_2(w)) \cup (N_3(w) - N_2(v)) = \emptyset$. بوضوح $\{v, w\}$ یک مجموعه احاطه‌گر جهشی برای درخت T است و لذا $\gamma_h(T) \leq 2$. از $\gamma_h(T) \geq 2$ نتیجه می‌گیریم که $\gamma_h(T) = 2$. از طرف دیگر تابع f با ضابطه $f(v) = f(w) = 2$ و در غیر این صورت $f(u) = 0$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا $\gamma_{hR}(T) \leq 4$. حال از قضایای ۱.۲.۳ و ۱.۲.۴ نتیجه می‌شود که $\gamma_{hR}(T) = 4$. بنابراین $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$.

در ادامه فرض کنید که $T \in \mathcal{T}_3$. در این صورت T از دو درخت $T_1 \in \mathcal{T}_3^1$ و $T_2 \in \mathcal{T}_3^2$ با وصل کردن ریشه درخت T_1 به ریشه درخت T_2 بدست می‌آید. فرض کنید w ریشه درخت T_1 و v ریشه درخت T_2 باشد. بوضوح $N_4(w) \neq \emptyset$. فرض کنید که $N_4(w) = \{x_1, \dots, x_t\}$ برای

هر $i = 1, 2, \dots, t$ ، قرار دهید $z_i \in N(u_i) - \{x_i\}$ ، $u_i \in N(x_i)$ و $y_i \in N(z_i) - \{u_i\}$. با توجه به ساختار خانواده‌ی $\mathcal{T}_3^1$ ، برای هر $i = 1, 2, \dots, t$ دقیقاً یک چهارتایی (x_i, u_i, z_i, y_i) وجود دارد. بوضوح می‌توان دید که $\{v, w\} \cup \{u_i, x_i : i = 1, 2, \dots, t\}$ یک مجموعه احاطه‌گر جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا $\gamma_h(T) \leq 2 + 2t$. فرض کنید D یک $\gamma_h(T)$ -مجموعه باشد. برای هر $i = 1, 2, \dots, t$ ، D شامل حداقل یک رأس از $\{x_i, z_i\}$ و حداقل یک رأس از $\{u_i, y_i\}$ می‌باشد. چون $N_2(v) - N(w) \neq \emptyset$ ، پس D شامل حداقل یک رأس از مجموعه $N_2[v] - N(w)$ می‌باشد. به علاوه مجموعه D شامل حداقل یک رأس از مجموعه $N(v)$ می‌باشد. بنابراین $|D| \geq 2 + 2t$ و لذا $\gamma_h(T) = 2 + 2t$. از طرف دیگر تابع f با ضابطه $f(w) = f(v) = 2$ ، $f(x_i) = f(u_i) = 1$ ، برای $i = 1, 2, \dots, t$ و در غیر این صورت $f(u) = 0$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا $\gamma_{hR}(T) \leq 4 + 2t = 2 + \gamma_h(T)$. بنابراین $\gamma_{hR}(T) \leq 2 + \gamma_h(T)$. حال از قضایای ۱.۲.۳ و ۱.۲.۴ نتیجه می‌گیریم که $\gamma_{hR}(T) = 2 + \gamma_h(T)$.

در ادامه فرض کنید که $T \in \mathcal{T}_4$. در این صورت $T_1 \in \mathcal{T}_4^1$ و $T_2 \in \mathcal{T}_4^2$ با متصل کردن ریشه درخت T_1 به ریشه درخت T_2 بدست می‌آید. فرض کنید w ریشه درخت T_1 و v ریشه درخت T_2 باشد. بوضوح $(N_4(w) - N_3(v)) \cup (N_4(v) - N_3(w)) \neq \emptyset$. فرض کنید $(N_4(w) - N_3(v)) \cup (N_4(v) - N_3(w)) = \{x_1, \dots, x_t\}$. برای هر $i = 1, 2, \dots, t$ ، قرار دهید $z_i \in N(u_i) - \{x_i\}$ ، $u_i \in N(x_i)$ و $y_i \in N(z_i) - \{u_i\}$. با توجه به ساختار خانواده‌ی $\mathcal{T}_4^1$ برای هر $i = 1, 2, \dots, t$ دقیقاً یک چهارتایی (x_i, u_i, z_i, y_i) وجود دارد. فرض کنید که $((N_3(w) - N_2(v)) \cup (N_3(v) - N_2(w))) \cap L(T) \neq \emptyset$.

قرار دهید

$$((N_3(w) - N_2(v)) \cup (N_3(v) - N_2(w))) \cap L(T) = \{x'_1, \dots, x'_{t'}\}.$$

برای $i = 1, 2, \dots, t'$ فرض کنید $y'_i \in N(v) \cup N(w)$ و $\deg(y'_i, x'_i) = 2$. با توجه به ساختار درخت $T \in \mathcal{T}_4$ ، برای هر $i = 1, 2, \dots, t'$ ، دقیقاً یک جفت x'_i, y'_i وجود دارد به طوری که $x'_i \in ((N_3(w) - N_2(v)) \cup (N_3(v) - N_2(w))) \cap L(T)$ و $d(y'_i, x'_i) = 2$. بوضوح $\{v, w\} \cup \{u_i, x_i : i = 1, 2, \dots, t\} \cup \{x'_i : i = 1, 2, \dots, t'\}$ یک مجموعه احاطه‌گر جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا $\gamma_h(T) \leq 2 + t' + 2t$. فرض کنید D یک $\gamma_h(T)$ -مجموعه می‌باشد. برای هر $i = 1, 2, \dots, t$ ، مجموعه D شامل حداقل یک رأس از مجموعه $\{x_i, z_i\}$ و شامل حداقل یک رأس از مجموعه $\{u_i, y_i\}$ می‌باشد. برای $i = 1, 2, \dots, t'$ ، مجموعه D شامل حداقل یک رأس از مجموعه $\{x'_i, y'_i\}$ می‌باشد. چون $N_2(v) - N(w) \neq \emptyset$ ، پس D شامل حداقل یک رأس از مجموعه $N_2[v] - N(w)$ نیز می‌باشد. به علاوه چون $N_2(w) - N(v) \neq \emptyset$ ، مجموعه D شامل حداقل یک رأس از مجموعه $N_2[w] - N(v)$ می‌باشد. بنابراین $|D| \geq 2 + t' + 2t$ و لذا $\gamma_h(T) = 2 + t' + 2t$. از طرف دیگر تابع f با ضابطه $f(w) = f(v) = 2$ ، $f(x_i) = f(u_i) = 1$ ، برای $i = 1, 2, \dots, t$ ، $f(x'_i) = 1$ برای $i = 1, 2, \dots, t'$ و در غیر این صورت $f(u) = 0$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا نتیجه می‌گیریم که $\gamma_{hR}(T) \leq 4 + t' + 2t = 2 + \gamma_h(T)$. بنابراین

$\gamma_{hR}(T) \leq 2 + \gamma_h(T)$. حال از قضایای ۱.۲.۳ و ۱.۲.۴ نتیجه می‌گیریم که $\gamma_{hR}(T) = 2 + \gamma_h(T)$. در ادامه فرض کنید که $((N_3(v) - N_2(w)) \cup (N_3(w) - N_2(v))) \cap L(T) = \emptyset$. به راحتی می‌توان دید که $\{v, w\} \cup \{u_i, x_i : i = 1, 2, \dots, t\}$ یک مجموعه احاطه‌گر جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا $\gamma_h(T) \leq 2 + 2t$. فرض کنید D یک $\gamma_h(T)$ -مجموعه می‌باشد. برای هر $i = 1, 2, \dots, t$ مجموعه D شامل حداقل یک رأس از مجموعه $\{x_i, z_i\}$ و حداقل یک رأس از مجموعه $\{u_i, y_i\}$ می‌باشد. چون $N_2(v) - N(w) \neq \emptyset$ ، پس D شامل حداقل یک رأس از مجموعه $N_2[v] - N(w)$ می‌باشد. به علاوه از این حقیقت که $N_2(w) - N(v) \neq \emptyset$ نتیجه می‌گیریم که D شامل حداقل یک رأس از مجموعه $N_2[w] - N(v)$ می‌باشد. بنابراین، $|D| \geq 2 + 2t$ و لذا $\gamma_h(T) = 2 + 2t$. از طرف دیگر تابع f با ضابطه $f(u) = 0$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا $\gamma_{hR}(T) \leq 4 + 2t = 2 + \gamma_h(T)$. بنابراین $\gamma_{hR}(T) \leq 2 + \gamma_h(T)$. حال از قضایای ۱.۲.۳ و ۱.۲.۴ نتیجه می‌گیریم که $\gamma_{hR}(T) = 2 + \gamma_h(T)$.

در پایان فرض کنید $T \in \mathcal{T}_5$. در این صورت T از یک ستاره دوگانه با رئوس مرکزی v و w با متصل کردن برگ u از v به رأس مرکزی x از یک ستاره K_{1,t_1} برای $t_1 \geq 1$ ، و متصل کردن برگ z از w به رأس مرکزی y از ستاره K_{1,t_2} برای $t_2 \geq 1$ بدست می‌آید. به راحتی می‌توان دید که $\{x, y, u, z\}$ یک مجموعه احاطه‌گر جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا $\gamma_h(T) \leq 4$. از طرف دیگر چون $\text{diam}(T) = 7$ می‌باشد از گزاره ۱.۳.۴ نتیجه می‌گیریم که $4 = \gamma_h(P_8) \leq \gamma_h(T)$. بنابراین $\gamma_h(T) = 4$. از طرف دیگر تابع f با ضابطه $f(u) = f(z) = 2$ ، $f(x) = f(y) = 1$ و در غیر این صورت $f(u) = 0$ یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا نتیجه می‌گیریم که $\gamma_{hR}(T) \leq 6 = 2 + \gamma_h(T)$. بنابراین $\gamma_{hR}(T) \leq 2 + \gamma_h(T)$. حال از قضایای ۱.۲.۳ و ۱.۲.۴ نتیجه می‌شود که $\gamma_{hR}(T) = 2 + \gamma_h(T)$. $\square$

۳.۳.۴ اثبات قضیه ۱.۳.۴

از لم ۱.۳.۴ نتیجه می‌گیریم که برای هر درخت $T \in \mathcal{R}$ ، $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$. حال فرض کنید که T درختی از مرتبه $n \geq 4$ باشد و $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع باشد به طوری که $|V_2^f|$ بیشترین مقدار ممکن باشد. با ادعای زیر روند اثبات را ادامه می‌دهیم:

ادعای ۱. $|V_2^f| = 2$.

اثبات ادعای ۱. فرض کنید که $|V_2^f| \geq 3$. در این صورت $|V_1^f| + 6 \leq |V_1^f| + 2|V_2^f| = \gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$ و لذا نتیجه می‌گیریم که $|V_1^f| \leq \gamma_h(T) - 4$. از $|V_2^f| \geq 3$ نتیجه می‌شود که $|V_1^f| + |V_2^f| \leq \gamma_h(T) - 1$ و لذا $\gamma_h(T) \leq \gamma_h(T) - 1$ ، که یک تناقض است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $|V_2^f| \leq 2$. فرض کنید که $|V_2^f| = 0$. در این صورت $V_1^f = V(T)$ و $\gamma_{hR}(T) = n$. از گزاره ۷.۲.۳ داریم $n = \gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2 \leq n/2 + 2$ و لذا $n \leq 4$. بنابراین $n = 4$. از قضیه ۱.۲.۴ نتیجه می‌شود که درخت T ستاره نیست. بنابراین $T = P_4$. در این صورت با دادن

وزن 2 به هر برگ از مسیر P_4 و 0 به هر رأس پشتیبان P_4 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع g به دست می آید به طوری که $|V_2^g| > |V_2^f|$ ، که با انتخاب f در تناقض است. در ادامه فرض کنید که $|V_2^f| = 1$. قرار دهید $V_2^f = \{v\}$. در این صورت $N(v) \subseteq V_1^f$. اگر $\deg(v) \geq 2$ باشد، آن گاه با تغییر وزن یک رأس از $N(v)$ به 2 و رؤس دیگر به 0، یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع جدید g به دست می آید به طوری که $|V_2^g| > |V_2^f|$ ، که با انتخاب تابع f در تناقض است. بنابراین $\deg(v) = 1$. قرار دهید $u \in N(v)$. هر رأس از $N(u) - \{v\}$ دارای وزن 0 تحت تابع f می باشد. اگر رأس u' در فاصله دو از u وجود داشته باشد، آن گاه $f(u') = 1$. در این صورت با تغییر $f(u')$ به 0 و $f(u)$ به 2 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع جدید g بدست می آید به طوری که $|V_2^g| > |V_2^f|$ ، که با انتخاب تابع f در تناقض است. در نتیجه یک ستاره می باشد که با قضیه ۱.۲.۴ در تناقض است. بنابراین نتیجه می گیریم که $|V_2^f| = 2$.

◇

در این صورت $|V_1^f| = \gamma_h(T) - 2$. فرض کنید $V_2^f = \{v, w\}$. اگر $epn_2(v, V_2^f) = \emptyset$ ، آن گاه با تغییر وزن $f(v)$ به 1 یک تابع احاطه گر رومی جهشی با وزن کمتر از $\gamma_{hR}(T)$ بدست می آید که یک تناقض است. بنابراین $epn_2(v, V_2^f) \neq \emptyset$ و به طریق مشابه $epn_2(w, V_2^f) \neq \emptyset$. برای ادامه اثبات از دو لم زیر به نام های لم ۲.۳.۴ و لم ۳.۳.۴ که در آن ها دو حالت $vw \in E(T)$ یا $vw \notin E(T)$ بررسی می شوند، استفاده می کنیم.

لم ۲.۳.۴. اگر $vw \in E(T)$ باشد، آن گاه $T \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{T}_3 \cup \mathcal{T}_4$.

برهان. فرض کنید $vw \in E(T)$. ابتدا فرض کنید که $V_1^f = \emptyset$. فرض کنید که $\deg(v) = 1$. در این صورت $\deg(w) > 1$ ، چون $n \geq 4$. توجه کنید که $epn_2(w, V_2^f) \neq \emptyset$. فرض کنید $z \in epn_2(w, V_2^f)$ و $x \in N(z) \cap N(w)$. بوضوح $z \in V_0^f$. نشان می دهیم که z یک برگ است. فرض کنید که $\deg(z) \geq 2$ و $z' \in N(z) - \{x\}$. در این صورت $f(z') = 0$ و لذا $z' \in N_2(v) \cup N_2(w)$. بنابراین T دارای یک دور می باشد که با درخت بودن T در تناقض است. بنابراین هر رأس با فاصله دو از w یک برگ می باشد. بنابراین $T \in \mathcal{T}_1$.

بنابراین در ادامه فرض می کنیم که $\deg(v) \geq 2$ و $\deg(w) \geq 2$. اگر $epn_2(v, V_2^f) = N(w)$ و $epn_2(w, V_2^f) = N(v)$ ، آن گاه T یک ستاره دوگانه است و لذا $T \in \mathcal{T}_1$. بنابراین بدون کاسته شدن از کلیت فرض می کنیم که $epn_2(v, V_2^f) - N(w) \neq \emptyset$. فرض کنید که $epn_2(w, V_2^f) - N(v) = \emptyset$. در این صورت هر رأس از مجموعه $N(w) - \{v\}$ یک برگ است. به راحتی می توان دید که هر رأس از مجموعه $epn_2(v, V_2^f) - N(w)$ یک برگ است. بنابراین هر برگ از T در فاصله حداکثر دو از v می باشد و حداقل یک برگ با فاصله دو از رأس v وجود دارد. بنابراین $T \in \mathcal{T}_1$. در ادامه فرض کنید که $epn_2(w, V_2^f) - N(v) \neq \emptyset$. مثل قبل مشاهده می کنیم که هر رأس از $epn_2(w, V_2^f) - N(v)$ یک برگ می باشد. حال فرض کنید T_1 مولفه ای از $T - vw$ ، شامل v و T_2 مولفه ای از $T - vw$ ، شامل w می باشد. بوضوح می توان دید که $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_2^0$ ، v ریشه T_1 و w ریشه درخت T_2 می باشد. بنابراین درخت T از درختان $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_2^0$ با متصل کردن ریشه v از درخت T_1 به ریشه w از درخت T_2 بدست می آید. بنابراین $T \in \mathcal{T}_2$.

در ادامه فرض کنید که $V_1^f \neq \emptyset$. اگر سه رأس $x, x_1, x_2 \in V_1^f$ وجود داشته باشند به طوری که $x_1, x_2 \in N(x)$ ، آن گاه با تغییر $f(x_1)$ به 0 و تغییر $f(x_2)$ به 2 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع جدید g حاصل می شود که $|V_2^g| > 2$ ، که یک تناقض است. بنابراین هر مولفه از $T[V_1^f]$ مسیر K_2 یا تک رأسی K_1 می باشد. بوضوح $V_1^f \cap (N(v) \cup N(w)) = V_1^f \cap (N_2(v) \cup N_2(w)) = \emptyset$. بنابراین هر رأس از هر K_1 -مولفه از $T[V_1^f]$ مجاور یک رأس در $(N_2(v) - N(w)) \cup (N_2(w) - N(v))$ می باشد و هر رأس از هر K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ مجاور یک رأس از مجموعه $(N_2(v) - N(w)) \cup (N_2(w) - N(v))$ می باشد. اگر یک رأس از V_1^f مجاور حداقل دو رأس از V_0^f باشد، آن گاه T دارای یک دور است، که یک تناقض است. بنابراین هر رأس از V_1^f مجاور دقیقاً یک رأس از V_0^f می باشد. به علاوه دقیقاً یک رأس از هر K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ مجاور یک رأس از V_0^f می باشد. اگر دو رأس $x, y \in V_1^f$ با یک همسایه مشترک در V_0^f وجود داشته باشد، آن گاه با تغییر $f(x)$ به 2 و تغییر $f(y)$ به 0 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع جدید g حاصل می شود که $|V_2^g| > |V_2^f|$ که با انتخاب f در تناقض است. بنابراین هیچ دو رأسی از V_1^f دارای همسایه مشترک در V_0^f نمی باشند.

ادعای 2. برای هر رأس $z \in V_0^f$ ، $|N_2(z) \cap V_1^f| \leq 1$.

اثبات ادعای 2. فرض کنید $z \in V_0^f$. اگر دو رأس $x, y \in V_1^f$ وجود داشته باشد به طوری که $x, y \in N_2(z)$ ، آن گاه با تغییر $f(x)$ و $f(y)$ به 0 و تغییر $f(z)$ به 2 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع جدید g بدست می آید به طوری که $|V_2^g| > |V_2^f|$ ، که با انتخاب f در تناقض است. بنابراین برای هر رأس $z \in V_0^f$ ، $|N_2(z) \cap V_1^f| \leq 1$.

نشان می دهیم که $N_2(w) - N(v) \neq \emptyset$ و $N_2(v) - N(w) \neq \emptyset$.

با توجه به اینکه $V_1^f \neq \emptyset$ و هر رأس از هر K_1 -مولفه از $T[V_1^f]$ مجاور یک رأس از مجموعه $(N_2(v) - N(w)) \cup (N_2(w) - N(v))$ می باشد و دقیقاً یک رأس از هر K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ مجاور دقیقاً یک رأس از مجموعه $(N_2(v) - N(w)) \cup (N_2(w) - N(v))$ می باشد، نتیجه می گیریم که $(N_2(v) - N(w)) \cup (N_2(w) - N(v)) \neq \emptyset$. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید که $N_2(w) - N(v) \neq \emptyset$. فرض کنید که $N_2(v) - N(w) = \emptyset$ و $x \in V_1^f$. در این صورت x مجاور به یک رأس $y \in N_2(w) - N(v)$ می باشد. فرض کنید $z \in N(w) \cap N(y)$. در این صورت با تغییر $f(z)$ به 0 و تغییر $f(x)$ به 2 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع جدید g بدست می آید، که یک تناقض است. بنابراین $N_2(v) - N(w) \neq \emptyset$. حالت های زیر را در نظر می گیریم.

فرض کنید V_1^f یک مجموعه مستقل باشد. مشابه قبل، مشاهده می شود که هر رأس از V_1^f مجاور به دقیقاً یک رأس از $(N_2(v) - N(w)) \cup (N_2(w) - N(v))$ می باشد، بنابراین هر رأس از V_1^f در فاصله سه از v و یا w می باشد. با توجه به ادعای ۲ نتیجه می گیریم که هر رأس غیربرگ از $N(w) - v$ دارای حداکثر یک همسایه غیر برگ بجز w می باشد، و در صورت وجود چنین رأسی، درجه آن برابر دو می باشد. به طور مشابه، با توجه به ادعای ۲، هر رأس غیر برگ از $N(v) - w$ دارای حداکثر یک همسایه غیر برگ بجز v می باشد، و در صورت وجود چنین رأسی، درجه آن برابر دو خواهد بود. اکنون فرض کنید T_1 مولفه ای از $T - vw$ ، شامل v باشد، و

T_2 مولفه $T - vw$ شامل w باشد. آن گاه T_1 درخت ریشه دار با ریشه v ، و T_2 درخت ریشه دار با ریشه w می باشد. دقت کنید که هر برگ از T_1 در فاصله حداکثر سه از v می باشد، و چون $N_2(w) - N(v) \neq \emptyset$ ، بنابراین $T_1 \in \mathcal{T}_2^0$. به طور مشابه، $T_2 \in \mathcal{T}_2^0$. بنابراین T از $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_2^0$ با وصل کردن ریشه v از T_1 به ریشه w از T_2 به دست می آید. در نتیجه $T \in \mathcal{T}_2$.

در ادامه فرض کنید که V_1^f یک مجموعه مستقل نباشد. در این صورت $T[V_1^f]$ دارای حداقل یک K_2 -مولفه می باشد. شبیه به قبل می توان دید که دقیقاً یک رأس از هر K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ مجاور یک رأس از V_0^f می باشد. بنابراین رأس غیر برگ $x \in (N(w) \cup N(v)) - \{v, w\}$ وجود دارد به طوری که x دارای یک همسایه غیربرگی z می باشد که z مجاور یک رأس از یک K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ می باشد. طبق ادعای ۲، x دارای دقیقاً یک همسایه غیربرگی است که مجاور یک رأس از یک K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ می باشد و همچنین z دارای درجه دو است. چون $x \in (N(w) \cup N(v)) - \{v, w\}$ ، بدون کاسته شدن از کلیت می توان فرض کرد که $x \in N(w) - \{v\}$. حالت های زیر را در نظر می گیریم:

حالت ۱. هر رأس غیربرگی $x' \in N(w) - \{v\}$ دارای یک همسایه غیربرگی غیر از w مثل z' به طوری که z' مجاور یک رأس از یک K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ باشد.

طبق ادعای ۲، z' یک رأس منحصر به فرد با این خاصیت می باشد و همچنین z' دارای درجه دو می باشد. توجه کنید که $N_2(v) - N(w) \neq \emptyset$. نشان می دهیم که هر رأس از $N_2(v) - N(w)$ یک برگ است. فرض کنید برخی از رئوس $N_2(v) - N(w)$ برگ نیست. فرض کنید $x_1, \dots, x_t \in N_2(v) - N(w)$ رئوس غیر برگ باشند. برای $i = 1, 2, \dots, t$ ، فرض کنید $y_i \in V_1^f \cap N(x_i)$ و $u_i \in N(v) \cap N(x_i)$. توجه کنید که برای $i = 1, 2, \dots, t$ ، y_i رأسی از یک K_1 -مولفه از $T[V_1^f]$ یا رأسی از یک K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ می باشد بنابراین هر رأس y_i یک برگ و یا یک رأس پشتیبان می باشد. فرض کنید $t_1 = |\{y_1, y_2, \dots, y_t\} \cap L(T)|$ و $t_2 = |\{y_1, y_2, \dots, y_t\} \cap S(T)|$ که برای آن $t_1 + t_2 = t$. فرض کنید $u'_1, \dots, u'_{t'} \in N(w) - \{v\}$ رئوس غیر برگ باشند. برای $i = 1, 2, \dots, t'$ ، قرار دهید $x'_i \in N(u'_i) - \{w\}$ ، $y'_i \in V_1^f \cap N(x'_i)$ و $z'_i \in V_1^f \cap N(y'_i)$. توجه کنید که برای z'_i ، $i = 1, 2, \dots, t'$ یک برگ می باشد. مشاهده می شود که $t_1 + 2t_2 + 2t' = |V_1^f|$ و همچنین مجموعه رئوس زیر

$$\{v\} \cup \{u_i | i = 1, 2, \dots, t_1\} \cup \{x_i, u_i | i = 1, 2, \dots, t_2\} \cup \{x'_i, u'_i | i = 1, 2, \dots, t'\}$$

یک مجموعه احاطه گر جهشی برای درخت T از اندازه $|V_1^f| + 1 = 1 + t_1 + 2t_2 + 2t' = |D|$ می باشد و لذا $\gamma_h(T) = \gamma_{hR}(T) - 3 = \gamma_h(T) - 1$ ، که یک تناقض است. بنابراین هر رأس از $N_2(v) - N(w)$ یک برگ است. فرض کنید T_1 مولفه ای از $T - vw$ شامل v و T_2 مولفه ای از $T - vw$ شامل w باشد. بوضوح هر برگ از T_2 در فاصله یک، دو یا چهار از w می باشد و T_2 دارای حداقل یک برگ با فاصله چهار از w می باشد. فرض کنید $x \in N_4(w)$ و مسیر $xyzww$ بین دو رأس x و w باشد. طبق ادعای ۲، $\deg(y) = \deg(z) = 2$. از ادعای ۲ و فرضیات حالت ۱، هر رأس از $N_3(w) - N_2(v)$ دارای درجه دو می باشد. بنابراین $T_2 \in \mathcal{T}_3^1$ و w ریشه درخت T_2

می‌باشد. همچنین بوضوح هر برگ از درخت T_1 در فاصله حداکثر دو از رأس v می‌باشد و مثل قبل مشاهده می‌کنیم که $N_2(v) - N(w) \neq \emptyset$. بنابراین T_1 دارای حداقل یک برگ با فاصله دو از رأس v است. در نتیجه $T_2 \in \mathcal{T}_3^2$ و v ریشه درخت T_1 است. لذا T از درخت $T_1 \in \mathcal{T}_3^1$ و درخت $T_2 \in \mathcal{T}_3^2$ با متصل کردن ریشه‌های آن‌ها بدست می‌آید. بنابراین $T \in \mathcal{T}_3$.

حالت ۲. رأس غیر برگ $x' \in N(w) - \{v\}$ وجود دارد به طوری که هیچ یک از همسایه‌های غیر برگ x' مجاور یک رأس از یک K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ نباشد.

در این صورت برای هر رأس $z', z' \in N(x') - \{w\}$ یک برگ یا یک رأس پشتیبان با درجه دو می‌باشد و همچنین حداکثر یک رأس $z' \in N(x') - \{w\}$ وجود دارد به طوری که z' یک رأس پشتیبان از درجه دو است.

نشان می‌دهیم که رأس غیربرگ $a \in N(v) - \{w\}$ وجود دارد به طوری که یا هر رأس از $N(a) - \{v\}$ یک برگ است یا a مجاور دقیقاً یک رأس پشتیبان از درجه دو است. فرض کنید که برای هر رأس غیر برگ $a \in N(v) - \{w\}$ رأس غیر برگ $b \in N(a) - \{v\}$ وجود داشته باشد به طوری که b مجاور یک رأس از یک K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ باشد. طبق ادعای ۲، یک رأس منحصر به فرد با این خاصیت می‌باشد و همچنین b دارای درجه دو می‌باشد. فرض کنید $x_1, x_2, \dots, x_t \in N(w) - \{v\}$ رئوسی باشند که برگ نیستند و هر کدام دارای یک همسایه غیر برگی مجاور به یک رأس از یک K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ می‌باشند. طبق ادعای ۲، x_i دارای دقیقاً یک همسایه غیر برگی مجاور به یک رأس از یک K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ می‌باشد. برای $i = 1, 2, \dots, t$ ، فرض کنید y_i همسایه غیر برگی x_i غیر از w باشد، $z_i \in V_1^f \cap N(y_i)$ و $u_i \in V_1^f \cap N(z_i)$. فرض کنید $x'_1, x'_2, \dots, x'_{t_1} \in N(w) - \{v\}$ رئوسی باشند که برگ نیست و یک رأس غیر برگ $y'_i \in N(x'_i) - \{w\}$ مجاور یک K_1 -مولفه از $T[V_1^f]$ می‌باشد. برای $i = 1, 2, \dots, t_1$ ، فرض کنید $z'_i \in V_1^f$ ، K_1 -مولفه‌هایی از $T[V_1^f]$ باشند که مجاور رأس y'_i هستند. طبق ادعای ۲، برای $y'_i, i = 1, 2, \dots, t_1$ منحصر به فرد است و y'_i دارای درجه دو می‌باشد. فرض کنید $a_1, \dots, a_{t'}$ همسایه‌های غیربرگی از v غیر از w باشند به طوری که برای $i = 1, 2, \dots, t'$ ، a_i دارای همسایه غیربرگی غیر از v باشد. برای $i = 1, 2, \dots, t'$ ، فرض کنید $b_i \in N(a_i) - \{v\}$ همسایه غیر برگی از a_i باشد که مجاور یک رأس از یک K_2 -مولفه از $T[V_1^f]$ می‌باشد. طبق ادعای ۲، برای $b_i, i = 1, 2, \dots, t'$ منحصر به فرد است. توجه کنید که $2t + 2t' + t_1 = |V_1^f|$. در این صورت $\{w\} \cup \{y_i, x_i | i = 1, 2, \dots, t\} \cup \{x'_i | i = 1, 2, \dots, t_1\} \cup \{a_i, b_i | i = 1, 2, \dots, t'\}$ یک مجموعه احاطه‌گر جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا

$\gamma_h(T) \leq 1 + t_1 + 2t + 2t' = 1 + |V_1^f| = \gamma_{hR}(T) - 3 = \gamma_h(T) - 1$ که یک تناقض است. بنابراین v دارای یک همسایه غیر برگی v' می‌باشد به طوری که یا هر رأس از $N(v') - \{w\}$ یک برگ است و یا v' دارای همسایه غیر برگ است که مجاور یک رأس از یک K_1 -مولفه از $T[V_1^f]$ می‌باشد. فرض کنید T_1 مولفه‌ای از $T - vw$ شامل v و T_2 مولفه‌ای از $T - vw$ شامل w باشد. بوضوح هر برگ از T_2 در فاصله حداکثر چهار از w می‌باشد و $(N_4(w) - N_3(v)) \neq \emptyset$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $T_2 \in \mathcal{T}_4^1$. توجه کنید که w ریشه درخت T_2 می‌باشد. همچنین بوضوح هر

برگ از درخت T_1 در فاصله حداکثر چهار از v می‌باشد و لذا نتیجه می‌گیریم که $T_1 \in \mathcal{T}_4^2$. توجه کنید که ریشه درخت T_1 می‌باشد. بنابراین T از درختان $T_2 \in \mathcal{T}_4^1$ و $T_1 \in \mathcal{T}_4^2$ با متصل کردن v و w بدست می‌آید. در نتیجه $T \in \mathcal{T}_4$. $\square$

لم ۳.۳.۴. اگر $vw \notin E(T)$ ، آن‌گاه $T \in \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_5$.

برهان. فرض کنید که $vw \notin E(T)$. بوضوح $d(v, w) \geq 2$. ابتدا نشان می‌دهیم که $d(v, w) = 3$. فرض کنید که $d(v, w) = 2$ و $P : vuv$ مسیری با طول دو بین v و w باشد. به راحتی می‌توان دید که $N(v) \subseteq V_1^f$. اگر $\deg(v) \geq 2$ باشد، آن‌گاه با تغییر وزن یک رأس از $N(v)$ به 2 و دیگر رئوس به صفر 0 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع g بدست می‌آید به طوری که $|V_2^g| > |V_2^f|$ ، که با انتخاب f در تناقض است. بنابراین $\deg(v) = 1$. به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $\deg(w) = 1$. بنابراین هر رأس از $epn_2(v, V_2^f) = N(u) - \{v, w\}$ مجاور u می‌باشد و لذا $epn_2(v, V_2^f) = N(u) - \{v, w\}$ و به طریق مشابه $epn_2(w, V_2^f) = N(u) - \{v, w\}$. اگر یک رأس u' در فاصله دو از u وجود داشته باشد، آن‌گاه $f(u') = 1$. در این صورت با تغییر $f(u')$ به 0 و $f(u)$ به 2 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع g بدست می‌آید به طوری که $|V_2^g| > |V_2^f|$ ، که با انتخاب f در تناقض است. بنابراین هر رأس از $N(u)$ یک برگ است و لذا T یک ستاره است. که با گزاره ۱.۲.۴ در تناقض است. بنابراین $d(v, w) \geq 3$. حال فرض کنید که $d(v, w) \geq 6$ و $P : v = v_1v_2v_3\dots w$ یک مسیر از طول حداقل 6 بین v و w باشد. در این صورت $f(v_2) = 1$ ، $f(v_3) = 0$ ، $f(v_4) = 1$. با تغییر $f(v_4)$ به 0 و $f(v_2)$ به 2 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع جدید g بدست می‌آید به طوری که $|V_2^g| > |V_2^f|$ ، که با انتخاب f در تناقض است. بنابراین $d(v, w) \leq 5$. فرض کنید $d(v, w) = 4$ و $P : v = v_1v_2v_3v_4v_5 = w$ مسیر از طول 4 بین v و w باشد. در این صورت $f(v_2) = f(v_4) = 1$ ، $f(v_3) = 0$. با تغییر $f(v_4)$ به 0 و تغییر $f(v_2)$ به 2 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع جدید g با $|V_2^g| > |V_2^f|$ بدست می‌آید که با انتخاب f در تناقض است. بنابراین $d(v, w) \neq 4$. حال فرض کنید که $d(v, w) = 5$ و $P : v = v_1v_2v_3v_4v_5v_6 = w$ یک مسیر از طول 5 بین v و w باشد. در این صورت $f(v_2) = f(v_5) = 1$ و $f(v_3) = f(v_4) = 0$. اگر $\deg(v) \geq 2$ و $x \in N(v) - \{v_2\}$ باشد، آن‌گاه $f(x) = 1$. در این صورت با تغییر $f(x)$ به 0 و تغییر $f(v_2)$ به 2 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع جدید g بدست می‌آید به طوری که $|V_2^g| > |V_2^f|$ ، که با انتخاب f در تناقض است. بنابراین $\deg(v) = 1$ و به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $\deg(w) = 1$. در این صورت با تغییر $f(v)$ ، $f(w)$ ، $f(v_2)$ و $f(v_5)$ به 0 و $f(v_3)$ و $f(v_4)$ به 2 یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی با وزن کمتر از $\gamma_{hR}(T)$ بدست می‌آید که یک تناقض است. بنابراین $d(v, w) \neq 5$ و لذا $d(v, w) = 3$.

فرض کنید $P : vuzw$ مسیری بین v و w باشد. از $v \in V_2^f$ نتیجه می‌شود که $N(v) - \{u\} \subseteq V_1^f$. اگر $\deg(v) \geq 3$ باشد، آن‌گاه با تغییر وزن یک رأس از $N(v) - \{u\}$ به 2 و تغییر وزن دیگر رئوس به 0 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع جدید g بدست می‌آید به طوری که $|V_2^g| > |V_2^f|$ ، که با انتخاب f در تناقض است. بنابراین $\deg(v) \leq 2$ و به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $\deg(w) \leq 2$.

فرض کنید که $\deg(w) = 2$. قرار دهید $N(w) - \{z\} = \{y\}$. نشان می‌دهیم که $\deg(y) > 1$. فرض کنید که y یک برگ است. اگر $\deg(v) = 1$ ، آن‌گاه $D = \{u, z\}$ یک مجموعه احاطه‌گر جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا $\gamma_h(T) = |V_1^f| + 2 < |D|$ ، که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $\deg(v) = 2$. در این صورت $D = \{v, u, z\}$ یک مجموعه احاطه‌گر جهشی برای درخت T می‌باشد و لذا $\gamma_h(T) = |V_1^f| + 2 < |D|$ ، که یک تناقض است. بنابراین y برگ نیست. در ادامه نشان می‌دهیم که هر رأس از $N(y) - \{w\}$ یک برگ است. فرض کنید رأس $y' \in N(y) - \{w\}$ وجود دارد به طوری که y' برگ نیست. همچنین فرض کنید که z مجاور رأس y' باشد. در این صورت $f(z) = 1$. با توجه به اینکه $f(y) = 1$ می‌باشد با تغییر وزن z به 0 و تغییر وزن y به 2 یک $\gamma_{hR}(T)$ -تابع جدید g بدست می‌آید به طوری که $|V_2^g| > |V_2^f|$ ، که با انتخاب f در تناقض است. بنابراین هر رأس از $N(y) - \{w\}$ یک برگ است. فرض کنید که $\deg(v) = 1$. در این صورت هر رأس از $N(u) - \{z, v\}$ یک برگ است، زیرا در غیر این صورت مجموعه احاطه‌گر جهشی D با $\gamma_h(T) = |V_1^f| + 2 < |D|$ وجود دارد که یک تناقض است. با توجه به اینکه $f(z) = 0$ می‌باشد از ادعای 2 نتیجه می‌شود که هر رأس از $N(z) - \{u, w\}$ یک برگ است. در این صورت $\{z, w\}$ یک مجموعه احاطه‌گر جهشی با اندازه کمتر از $\gamma_h(T)$ می‌باشد که یک تناقض است. بنابراین $\deg(v) = 2$. فرض کنید $N(v) - \{u\} = \{y'\}$. شبیه به قبل نتیجه می‌شود که هر رأس از $N(y') - \{v\}$ یک برگ است. از ادعای 2 به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که $(N(u) - \{z, v\}) \cup (N(z) - \{u, w\})$ یک برگ است. در این صورت $T \in \mathcal{T}_5$. در ادامه فرض کنید که $\deg(w) = 1$. اگر $\deg(v) = 2$ باشد، آن‌گاه مشابه قبل به تناقض می‌رسیم. بنابراین $\deg(v) = 1$. اگر $N_2(u) - N(z) \neq \emptyset$ و $u' \in N_2(u) - N(z)$ ، آن‌گاه $f(u') = 1$. در این صورت با تغییر $f(v)$ به 0، تغییر $f(u)$ به 2، تغییر $f(z)$ به 2، تغییر $f(w)$ به 0 و تغییر $f(u')$ به 0 یک تابع احاطه‌گر رومی جهشی با وزن کمتر از $\gamma_{hR}(T)$ بدست می‌آید که یک تناقض است. بنابراین $N_2(u) - N(z) = \emptyset$ و به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $N_2(z) - N(u) = \emptyset$. بنابراین T یک ستاره دوگانه است و لذا $T \in \mathcal{T}_1$. $\square$

فصل ۵

تجزیه دوری گراف‌های کامل

۱.۵ مقدمه

مطالب این فصل به موضوع مطالعاتی دانشجو در دوره فرصت مطالعاتی در دانشگاه اتاوا-کانادا تحت سرپرستی پروفسور متیا شاینا^۱ اختصاص دارد. در این دوره مطالعاتی، تجزیه دوری گراف‌های کامل مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. در بخش ۲.۵ این فصل به بیان تعاریف اولیه و مفاهیم مقدماتی مربوط به تجزیه دوری گراف‌ها، تاریخچه و نتایج مربوط به مساله اوبروولف‌اش پرداخته می‌شود. در بخش ۳.۵ نتایج و قضایای مربوط به مساله اوبروولف‌اش جهت‌دار ارائه می‌گردد. تمامی تعاریف و مفاهیم و قضایای ارائه شده در این فصل بر اساس مرجع [۳۰] می‌باشد.

۲.۵ تعاریف و مفاهیم اولیه

در نظریه گراف، **گراف جهت‌دار**^۲ $D = (V, E)$ عبارت است از مجموعه متناهی و ناتهی V ، و خانواده E از دوتایی‌های مرتب از اعضای V . هر عضو V یک رأس و هر عضو E یک **کمان**^۳ نامیده می‌شود. در گراف جهت‌دار D ، دوتایی مرتب $(x, y) \in E$ در واقع یک کمان از رأس x به رأس y می‌باشد که متفاوت از دوتایی مرتب (y, x) می‌باشد. فرض کنید D یک گراف جهت‌دار

^۱Mateja Šajna

^۲Arc

^۳Digraph

با n رأس باشد. برای هر $2 \leq m \leq n$ ، دور جهت‌دار^۴ از طول m در D با نماد $\vec{C}_m$ نمایش داده می‌شود. H یک زیرگراف جهت‌دار فراگیر^۵ از گراف جهت‌دار D می‌باشد، اگر $V(H) = V(D)$ و همچنین $E(H) \subseteq E(D)$. یک ۲-عامل جهت‌دار^۶ از گراف جهت‌دار D ، یک زیرگراف جهت‌دار فراگیر از D متشکل از اجتماع مجزایی از دورهای جهت‌دار می‌باشد. گراف جهت‌دار متقارن کامل^۷ با تعداد رئوس برابر n با نماد K_n^* نمایش داده می‌شود و گراف جهت‌داری می‌باشد که برای هر کمان متعلق $E(K_n^*)$ ، معکوس آن کمان نیز متعلق به $E(K_n^*)$ باشد. فرض کنید $m_1, m_2, \dots, m_t$ اعداد صحیحی باشند که $2 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_t \leq n$ و $m_1 + m_2 + \dots + m_t = n$ ، آنگاه یک $(\vec{C}_{m_1}, \vec{C}_{m_2}, \dots, \vec{C}_{m_t})$ -عامل از گراف جهت‌دار D ، یک ۲-عامل جهت‌دار شامل t دور جهت‌دار مجزا، به ترتیب از طول‌های $m_1, m_2, \dots, m_t$ می‌باشد. مجموعه $\mathcal{G} = \{G_1, G_2, \dots, G_t\}$ از زیرگراف‌های گراف G به‌طوری‌که برای هر $i \neq j$ ، روابط $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$ و $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \dots \cup E(G_t) = E(G)$ برقرار باشد یک تجزیه^۸ از گراف G خواهد بود. چنانچه هر یک از زیرگراف‌های $G_1, G_2, \dots, G_t$ یک دور باشد، $\mathcal{G}$ تجزیه دوری^۹ گراف G نامیده می‌شود. یک تجزیه از گراف جهت‌دار D به $(\vec{C}_{m_1}, \vec{C}_{m_2}, \dots, \vec{C}_{m_t})$ -عامل‌ها یک $(\vec{C}_{m_1}, \vec{C}_{m_2}, \dots, \vec{C}_{m_t})$ -عامل بندی^{۱۰} از گراف D نامیده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۵. فرض کنید G یک گراف باشد. مجموعه S به‌طوری‌که $S \subseteq E(G)$ ، رأس $x \in V(G)$ را t بار پوشش می‌دهد اگر x یکی از رئوس انتهایی دقیقاً t یال از S باشد.

تعریف ۲.۲.۵. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد و $S \subseteq \mathbb{Z}^*$. گراف جهت‌دار دورانی^{۱۱} $\vec{X}(n; S)$ با مجموعه همبندی S ، گراف جهت‌داری است با مجموعه رئوس $\{u_i : i \in \mathbb{Z}_n\}$ ، و از هر رأس u_i به u_j یک کمان وجود دارد اگر و تنها اگر $j - i \in S$. کمان (u_i, u_j) ، کمان از تفاضل^{۱۲} $j - i$ در $\mathbb{Z}_n$ نامیده می‌شود.

تعریف ۳.۲.۵. فرض کنید D_1 و D_2 دو گراف جهت‌دار رأس مجزا باشند. آنگاه $D_1 \bowtie D_2$ گراف جهت‌داری است که از اجتماع دو گراف D_1 و D_2 و همچنین تمامی یال‌های ممکن از D_1 به D_2 و همچنین تمامی یال‌های ممکن از D_2 به D_1 ساخته می‌شود.

در ادامه به بیان تاریخچه مساله اوبروولفاش^{۱۳} و نتایج به‌دست آمده توسط ریاضیدانان مختلف در این زمینه می‌پردازیم. مساله اوبروولفاش برای اولین بار توسط رینگل در سال ۱۹۶۷ در یک کنفرانس در اوبروولفاش در کشور آلمان مطرح شد. در این کنفرانس این سوال مطرح شد که آیا امکان پذیر است که n -تا از شرکت‌کننده‌گان در این کنفرانس در $\frac{n-1}{2}$ شب متوالی در اطراف

^۴Directed Cycle

^۵Spanning Subdigraph

^۶Directed 2-Factor

^۷Complete Symmetric Digraph

^۸Decomposition

^۹Cycle Decomposition

^{۱۰}Factorization

^{۱۱}Circulant Digraph

^{۱۲}Difference

^{۱۳}Oberwolfach Problem

t میز گرد با اندازه‌های مشخص به طوری که مجموع صندلی‌های موجود در اطراف این میزها برابر با n و n یک عدد فرد باشد، بنشینند به طوری که هر شرکت کننده فقط یک بار در کنار هر یک از شرکت کننده‌گان دیگر بنشینند؟ زمانی که میزها از طول‌های $m_1, m_2, \dots, m_t$ باشند، مساله با نماد $OP(m_1, m_2, \dots, m_t)$ نمایش داده می‌شود. زمانیکه n یک عدد زوج می‌باشد، مساله مشابه، مدل همسرگزینی^{۱۴} نامیده می‌شود که در ادامه به بیان آن می‌پردازیم. بر اساس مساله مدل همسرگزینی آیا امکانپذیر است که $n = 2k$ شرکت کننده، شامل k زوج در $k-1$ شب متوالی بر روی t میز گرد، جاییکه میزها از اندازه‌های $m_1, m_2, \dots, m_t$ و $m_1 + m_2 + \dots + m_t = n$ نشانده شوند به طوری که هر شرکت کننده دقیقاً یک بار در کنار هر یک از شرکت کننده‌های دیگر بجز همسر خود بنشینند؟

مساله اوبروولفاش اصلی معادل با تجزیه گراف کامل به ۲-عامل‌های متناظر در نظر گرفته می‌شود. اگرچه از سال ۱۹۶۷ تاکنون حالت‌های زیادی از این مساله حل شده است، اما مساله اصلی اوبروولفاش هنوز حل نشده باقی مانده است.

مساله اوبروولفاش با دورهای از طول‌های یکسان به طور کامل حل شده است [۲۶، ۲۲، ۳، ۴]. در این مقالات نشان داده شده است که مساله $OP(m, m, \dots, m)$ برای هر n و m جاییکه n بر m بخشپذیر باشد و $n \neq 6, 12$ و $m \neq 3$ جواب دارد. مساله اوبروولفاش در حالتی که دورها دارای طول‌های متفاوت می‌باشند به صورت جزیی حل شده است. برای نت^{۱۵} و دنزیگر^{۱۶} [۱۰] نشان داده اند که $OP(m_1, m_2, \dots, m_t)$ برای هر n و هر $m_1, m_2, \dots, m_t$ زوج جواب دارد. تریتا^{۱۷} [۳۳] ثابت کرده است برای حالتی که $t = 2$ بجز در حالتی که هر دو میز از اندازه ۳ و یا یکی از میزها از اندازه ۴ و دیگری از اندازه ۵ باشد، مساله اوبروولفاش دارای جواب می‌باشد. سایر نویسندگان [۲، ۱۷] ثابت کرده اند که $OP(m_1, m_2, \dots, m_t)$ بجز برای $OP(3, 3, 3, 3)$ ، $OP(3, 3)$ ، $OP(4, 5)$ و $OP(3, 3, 5)$ که تنها استثنائات شناخته شده هستند، برای هر $n \leq 40$ دارای جواب می‌باشد. گلاک^{۱۸} و همکاران اخیراً ثابت کردند که مساله اوبروولفاش برای n های بزرگ دارای جواب می‌باشد.

۳.۵ مساله اوبروولفاش جهت‌دار

در این بخش به بررسی و بیان مساله اوبروولفاش جهت‌دار^{۱۹} پرداخته خواهد شد. مساله اوبروولفاش جهت‌دار در واقع حالت جهت‌دار مساله اوبروولفاش معروف می‌باشد. در مساله اوبروولفاش جهت‌دار به این موضع پرداخته می‌شود که آیا امکان پذیر است که هر شرکت کننده دقیقاً یک بار در سمت راست هر یک از شرکت کننده‌گان دیگر بنشینند؟ مساله اوبروولفاش جهت‌دار وقتی که میزها از اندازه‌های $m_1, m_2, \dots, m_t$ و $m_1 + m_2 + \dots + m_t = n$ می‌باشند با

^{۱۴}Spouse- Avoiding Variant

^{۱۵}Bryant

^{۱۶}Danziger

^{۱۷}Traetta

^{۱۸}Glock

^{۱۹}Directed Oberwolfach Problem

نماد $OP^*(m_1, m_2, \dots, m_t)$ نشان داده می‌شود.

۱.۳.۵ مساله اوبروولفاش جهت‌دار با دورهای از طول‌های یکسان

مساله اوبروولفاش جهت‌دار در حالتی که همه دورها از اندازه ۳ باشند توسط برماند^{۲۰} و همکاران در [۸]، و در حالتی که همه دورها از اندازه ۴ باشند، بجز برای حالتی که $n = 12$ ، توسط بنت^{۲۱} و ژانگ^{۲۲} در [۷] حل شده است. سپس ادامس^{۲۳} و براینت^{۲۴} در [۱] حالت $n = 12$ مورد بررسی قرار دادند.

قضیه‌های زیر خلاصه‌ای از نتایجی است که تاکنون برای مساله اوبروولفاش جهت‌دار با دورهای از طول‌های یکسان به‌دست آمده است.

قضیه ۱.۳.۵. [۸] مساله $OP^*(3, 3, \dots, 3)$ دارای جواب می‌باشد اگر و تنها اگر n بر ۳ بخشپذیر باشد و همچنین $n \neq 6$.

قضیه ۲.۳.۵. [۱، ۷] مساله $OP^*(4, 4, \dots, 4)$ دارای جواب می‌باشد اگر و تنها اگر n بر ۴ بخشپذیر باشد و همچنین $n \neq 4$.

قضیه ۳.۳.۵. [۱۲] فرض کنید m و n اعداد صحیحی باشند به‌طوری که $5 \leq m \leq n$. آنگاه:

۱. فرض کنید m عددی زوج و یا m و n هر دو فرد باشند. آنگاه $OP^*(m, m, \dots, m)$ دارای جواب می‌باشد اگر و تنها اگر n بر m بخشپذیر باشد و همچنین $(m, n) \neq (6, 6)$.

۲. اگر $OP^*(m, m)$ دارای جواب باشد، آنگاه $OP^*(m, m, \dots, m)$ دارای جواب است هرگاه $n \equiv 0 \pmod{2m}$.

قضیه ۴.۳.۵. [۱۱] فرض کنید m یک عدد صحیح فرد و $5 \leq m \leq 49$. آنگاه $OP^*(m, m, \dots, m)$ دارای جواب است هرگاه $n \equiv 0 \pmod{2m}$.

در ادامه به بیان نتایج به‌دست آمده برای مساله اوبروولفاش جهت‌دار با دورهای از طول‌های متفاوت، پرداخته خواهد شد.

۲.۳.۵ مساله اوبروولفاش جهت‌دار با دورهای از طول‌های متفاوت

در این بخش به بررسی وجود یک $OP^*(m_1, m_2, \dots, m_t)$ -عامل‌بندی از گراف K_n^* پرداخته می‌شود. بوضوح شرط لازم برای وجود چنین عامل‌بندی این است که برای هر $i = 1, 2, \dots, t$ ، شرط

^{۲۰}Bermond

^{۲۱}Bennett

^{۲۲}Zhang

^{۲۳}Adams

^{۲۴}Bryant

مساله اوبروولفاش جهت‌دار ۶۱
 به آسانی می‌توان ثابت کرد که اگر $2 \leq m_i \leq n$ و $m_1 + m_2 + \dots + m_t = n$ برقرار باشد. به آسانی می‌توان ثابت کرد که اگر
 مساله اوبروولفاش برای هر n فرد و دوره‌های از طول $m_1, m_2, \dots, m_t$ دارای جواب باشد، آنگاه
 مساله اوبروولفاش جهت‌دار برای هر n فرد و دوره‌های از طول‌های $m_1, m_2, \dots, m_t$ دارای جواب
 می‌باشد.

لم ۱.۳.۵. [۳۰] اگر $OP(m_1, m_2, \dots, m_t)$ دارای یک جواب باشد و n عددی فرد باشد، آنگاه
 $OP^*(m_1, m_2, \dots, m_t)$ دارای جواب خواهد بود.

یک جواب برای $OP^*(m_1, m_2, \dots, m_t)$ با در نظر گرفتن دو کپی از هر ۲-عامل در جوابی از
 $OP(m_1, m_2, \dots, m_t)$ و جهت‌دار کردن هر دور، در هر دو ۲-عامل در نظر گرفته شده در دو جهت
 مختلف بدست می‌آید.

مساله اوبروولفاش جهت‌دار ابتدا برای حالت‌هایی که با استفاده از لم ۱.۳.۵ قابل حل
 نبودند مورد بررسی قرار گرفته است. مساله اوبروولفاش جهت‌دار برای دو حالت شناخته
 شده مساله اوبروولفاش با طول‌های دوری متفاوت که جوابی برای آنها وجود ندارد و طول هر
 دور بیشتر از ۲ می‌باشد مورد بررسی قرار گرفته است. سپس به بررسی حالت‌هایی از مساله
 اوبروولفاش جهت‌دار که شامل حداقل یک دور از طول ۲ می‌باشند پرداخته شده است. در
 ادامه به بیان نتایج به‌دست آمده برای این مساله می‌پردازیم.

قضیه ۵.۳.۵. [۳۰] یک $(\vec{C}_4, \vec{C}_5)$ -عامل‌بندی از K_9^* وجود دارد.

برهان. گراف K_9^* را متناظر با گراف $K_8^* \boxtimes K_1^*$ در نظر گرفته به‌طوری‌که $V(K_1^*) = \{u_\infty\}$ و K_8^*
 متناظر با گراف جهت‌دار دورانی $\vec{X}(8; S)$ با مجموعه رئوس $\{u_i : i \in \mathbb{Z}_8\}$ و مجموعه همبندی
 $S = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, 4\}$ می‌باشد. برای هر $i \in \mathbb{Z}_8$ ، کمان‌های به شکل (u_i, u_∞) و (u_∞, u_i) ، به
 ترتیب، کمان‌های از تفاضل ∞ و $-\infty$ نامیده می‌شوند. جایگشت $\rho = (u_0 u_1 \dots u_7)(u_\infty)$ را
 در نظر بگیرید.

دوره‌های جهت‌دار C_0 و C_1 ، به ترتیب، از طول‌های ۵ و ۴ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

$$C_0 = u_1 u_2 u_\infty u_6 u_4 u_1,$$

$$C_1 = u_0 u_7 u_3 u_5 u_0.$$

مشاهده می‌شود که $R = \{C_0, C_1\}$ یک $(\vec{C}_4, \vec{C}_5)$ -عامل از K_9^* (تصویر ۱.۵)، شامل دقیقاً یک
 کمان از هر تفاضل در مجموعه

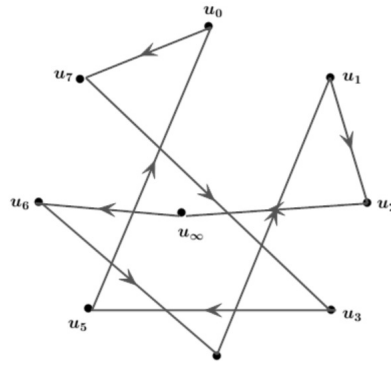
$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, 4, \pm \infty\}$$

می‌باشد. با توجه به ویژگی‌های R ، نتیجه گرفته می‌شود که

$$\{\rho^i(R) : i \in \mathbb{Z}_8\}$$

یک $(\vec{C}_4, \vec{C}_5)$ -عامل‌بندی از K_9^* می‌باشد.

□



شکل ۱.۵: $(\vec{C}_4, \vec{C}_5)$ -عامل R از K_9^* .

قضیه ۶.۳.۵. [۳۰] یک $(\vec{C}_3, \vec{C}_3, \vec{C}_5)$ -عامل‌بندی از K_{11}^* وجود دارد.

برهان. گراف K_{11}^* را متناظر با گراف $K_{10}^* \bowtie K_1^*$ در نظر گرفته به‌طوری‌که $V(K_1^*) = \{u_\infty\}$ و K_{10}^* متناظر با گراف جهت‌دار دورانی $\vec{X}(10; S)$ با مجموعه رئوس $\{u_i : i \in \mathbb{Z}_{10}\}$ و مجموعه همبندی $S = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 5\}$ می‌باشد. برای هر $i \in \mathbb{Z}_{10}$ ، کمان‌های (u_∞, u_i) و (u_i, u_∞) به ترتیب، کمان‌های از تفاضل ∞ و $-\infty$ نامیده می‌شوند. جایگشت $\rho = (u_0 u_1 \dots u_9)(u_\infty)$ را در نظر بگیرید.

دورهای جهت‌دار C_0, C_1, C_2 به ترتیب از طول‌های ۳، ۳ و ۵ را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$C_0 = u_0 u_1 u_3 u_0,$$

$$C_1 = u_2 u_7 u_\infty u_2,$$

$$C_2 = u_4 u_8 u_6 u_9 u_5 u_4.$$

مشاهده می‌گردد که $R = \{C_0, C_1, C_2\}$ یک $(\vec{C}_3, \vec{C}_3, \vec{C}_5)$ -عامل از K_{11}^* ، شامل دقیقاً یک کمان از هر تفاضل در مجموعه زیر می‌باشد (تصویر ۲.۵).

$$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, 5, \pm \infty\}.$$

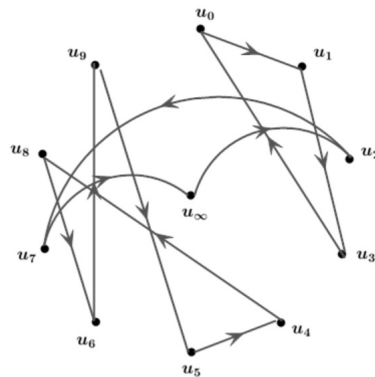
با توجه به ویژگی‌های R می‌توان نتیجه گرفت که

$$\{\rho^i(R) : i \in \mathbb{Z}_{10}\}$$

یک $(\vec{C}_3, \vec{C}_3, \vec{C}_5)$ -عامل‌بندی از K_{11}^* می‌باشد.

□

قضیه ۷.۳.۵. [۳۰] برای هر عدد صحیح $n \geq 5$ ، گراف جهت‌دار K_n^* دارای یک $(\vec{C}_2, \vec{C}_{n-2})$ -عامل‌بندی می‌باشد.



شکل ۲.۵: $(\vec{C}_3, \vec{C}_3, \vec{C}_5)$ -عامل R از K_{11}^* .

برهان. حالت ۱. فرض کنید n عدد صحیح فرد باشد به طوری که $n \geq 7$. فرض کنید $\ell = \frac{n-3}{2}$ ، و K_n^* را متناظر با گراف جهت دار $K_2^* \boxtimes K_{2\ell+1}^*$ در نظر بگیرید به طوری که $V(K_2^*) = \{u_{\infty_1}, u_{\infty_2}\}$ و گراف $K_{2\ell+1}^*$ یک گراف جهت دار دورانی $\vec{X}(2\ell+1; S)$ با مجموعه رئوس $\{u_i : i \in \mathbb{Z}_{2\ell+1}\}$ و مجموعه همبندی $S = \{\pm d : d = 1, 2, \dots, \ell\}$ می باشد. برای هر $i \in \mathbb{Z}_{2\ell+1}$ و $j \in \{1, 2\}$ ، کمان های (u_i, u_{∞_j}) و (u_{∞_j}, u_i) ، به ترتیب، کمان هایی از تفاضل ∞_j و $-\infty_j$ نامیده می شوند. تفاضل کمان های $(u_{\infty_1}, u_{\infty_2})$ و $(u_{\infty_2}, u_{\infty_1})$ تعریف نشده باقی می ماند. جایگشت $\rho = (u_0 u_1 \dots u_{2\ell})(u_{\infty_1})(u_{\infty_2})$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $k = \lfloor \frac{\ell}{2} \rfloor$ آن گاه گشت بسته جهت دار C را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$C = u_0 u_{-1} u_1 \dots u_{-k} u_k u_{-(k+2)} u_{k+1} \dots u_{-\ell} u_{\ell-1} u_{\ell} u_{\infty_2} u_0.$$

به آسانی می توان نشان داد که C در حقیقت یک دور جهت دار به طول $(2\ell+1)$ و شامل دقیقاً یک کمان از هر تفاضل در مجموعه زیر می باشد.

$$\{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(\ell-1), \ell, \pm\infty_2\}.$$

همچنین دور C' مجزا از دور جهت دار C به صورت زیر

$$C' = u_{-(k+1)} u_{\infty_1} u_{-(k+1)}$$

در نظر بگیرید. بنابراین $R = \{C, C'\}$ یک $(\vec{C}_2, \vec{C}_{n-2})$ -عامل از K_n^* ، شامل دقیقاً یک کمان از هر تفاضل در مجموعه

$$D = \{\pm 1, \pm 2, \dots, \pm(\ell-1), \ell, \pm\infty_1, \pm\infty_2\}$$

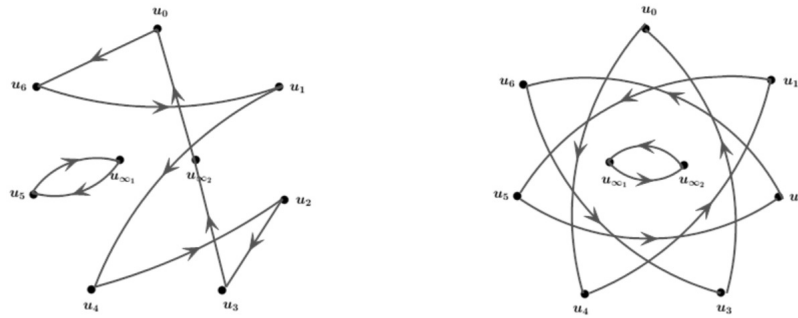
می باشد.

سپس دور های جهت دار C'' و C''' ، به ترتیب، به طول های $(2\ell+1)$ و ۲ را به صورت در نظر بگیرید.

$$C'' = u_0 u_{-\ell} u_1 u_{-(\ell-1)} u_2 \dots u_{-2} u_{\ell-1} u_{-1} u_{\ell} u_0$$

$$C''' = u_{\infty_1} u_{\infty_2} u_{\infty_1}.$$

مشاهده می‌گردد که $R' = \{C''', C'''\}$ یک $(\vec{C}_2, \vec{C}_{n-2})$ -عامل از K_n^* شامل تمام کمان‌های از تفاضل $-\ell$ ، و همچنین دو کمان از تفاضل تعریف نشده می‌باشد. بعنوان مثال، شما می‌توانید $(\vec{C}_2, \vec{C}_7)$ -عامل‌های R و R' از K_9^* را در تصویر ۳.۵ ببینید.



شکل ۳.۵: $(\vec{C}_2, \vec{C}_7)$ -عامل‌های R و R' از K_9^* .

با توجه به ویژگی‌های R و R' ، می‌توان نتیجه گرفت

$$\{\rho^i(R) : i \in \mathbb{Z}_{2\ell+1}\} \cup \{R'\}$$

یک $(\vec{C}_2, \vec{C}_{n-2})$ -عامل‌بندی از K_n^* می‌باشد.

حالت ۲. فرض کنید n عدد صحیح زوج و یا $n = 5$ باشد.

گراف K_n^* را متناظر با گراف $K_{n-1}^* \boxtimes K_1^*$ به‌طوری‌که مجموعه رئوس K_1^* برابر $\{u_\infty\}$ و K_{n-1}^* گراف جهت‌دار دورانی $\vec{X}(n-1; S)$ با مجموعه رئوس $\{u_i : i \in \mathbb{Z}_{n-1}\}$ و مجموعه همبندی $S = \mathbb{Z}_{n-1}^*$ می‌باشد در نظر بگیرید. برای هر $i \in \mathbb{Z}_{n-1}$ ، کمان‌های (u_i, u_∞) و (u_∞, u_i) ، به ترتیب، کمان‌های از تفاضل ∞ و $-\infty$ نامیده می‌شوند. جایگشت $\rho = (u_0 u_1 \dots u_{n-2})(u_\infty)$ را در نظر بگیرید.

ابتدا فرض کنید $n = 5$. دورهای جهت‌دار C_0, C_1, C'_0 و C'_1 ، به ترتیب، با طول‌های ۳، ۳، ۲ و ۲ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

$$C_0 = u_0 u_1 u_2 u_0 \quad C_1 = u_3 u_2 u_1 u_3$$

$$C'_0 = u_3 u_\infty u_3 \quad C'_1 = u_0 u_\infty u_0.$$

مشاهده می‌شود که هر یک از $R_0 = \{C_0, C'_0\}$ و $R_1 = \{C_1, C'_1\}$ یک $(\vec{C}_2, \vec{C}_3)$ -عامل از K_5^* می‌باشد. فرض کنید R_2 و R_3 به ترتیب از R_0 و R_1 ، با اضافه کردن ۲ واحد به اندیس هر یک از رئوس به دست آیند. به آسانی می‌توان ثابت کرد که $\{R_0, R_1, R_2, R_3\}$ یک $(\vec{C}_2, \vec{C}_3)$ -عامل‌بندی از K_5^* می‌باشد.

سپس فرض کنید n یک عدد صحیح زوج باشد. فرض کنید $k = \lceil \frac{n-4}{4} \rceil$ ، گشت بسته جهت‌دار C_0 را به‌صورت زیر در نظر بگیرید.

$$C_0 = u_0 u_{-1} u_1 \dots u_{-k} u_k u_{-(k+2)} u_{k+1} \dots u_{-\frac{n-2}{2}} u_{\frac{n-4}{2}} u_{\frac{n-2}{2}} u_0.$$

به آسانی می‌توان ثابت کرد که C_0 در حقیقت یک دور جهت‌دار از طول $(n-2)$ ، شامل دقیقاً یک کمان از هر تفاضل در مجموعه زیر می‌باشد.

$$\left\{ \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n-2}{2} \right\}.$$

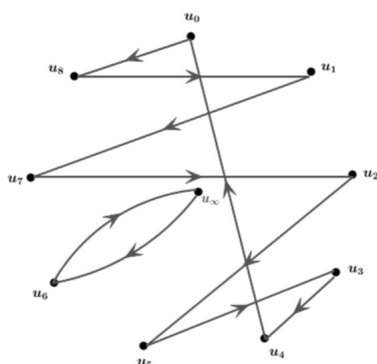
همچنین مشاهده می‌شود که دور C_0 مجزا از دور جهت‌دار

$$C_1 = u_{-(k+1)} u_{\infty} u_{-(k+1)}$$

می‌باشد. بنابراین $R = \{C_0, C_1\}$ یک $(\vec{C}_2, \vec{C}_{n-2})$ -عامل از K_n^* ، شامل دقیقاً یک کمان از هر تفاضل در مجموعه

$$\left\{ \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{n-2}{2}, \pm \infty \right\} = \mathbb{Z}_{n-1}^* \cup \{\pm \infty\}$$

می‌باشد. برای مثال، می‌توانید $(\vec{C}_2, \vec{C}_8)$ -عامل R از K_{10}^* را در تصویر ۴.۵ ببینید.



شکل ۴.۵: یک $(\vec{C}_2, \vec{C}_8)$ -عامل از K_{10}^* .

با توجه به ویژگی‌های R می‌توان نتیجه گرفت که

$$\{\rho^i(R) : i \in \mathbb{Z}_{n-1}\}$$

□

یک $(\vec{C}_2, \vec{C}_{n-2})$ -عامل‌بندی از K_n^* می‌باشد.

بعنوان یک نتیجه از قضیه ۷.۳.۵، می‌توان یک جواب کامل برای مساله اوبروولفاش جهت‌دار با $t=2$ و n فرد به دست آورد.

نتیجه ۱.۳.۵. فرض کنید $2 \leq m \leq n-2$ و n یک عدد صحیح فرد باشد. آنگاه K_n^* دارای یک $(\vec{C}_m, \vec{C}_{n-m})$ -عامل‌بندی است اگر و تنها اگر $(m, n) \neq (3, 6)$.

برهان. اگر $m=2$ ، آنگاه با توجه به قضیه ۷.۳.۵، به وضوح K_n^* دارای یک $(\vec{C}_m, \vec{C}_{n-m})$ -عامل‌بندی می‌باشد. فرض کنید $m \geq 3$. تریتا [۳۳] ثابت کرده است که مساله اوبروولفاش با $t=2$ ، بجز برای حالتی که هر دو میز از طول ۳، و یا حالتی که یکی از میزها از طول ۴ و میز دیگر از طول ۵ باشد، دارای جواب می‌باشد. بنابراین، $OP(m, n-m)$ بجز برای حالت‌های

۵.۳.۵ قضیه ۱.۳.۵ سپس لم باشد. دارای جواب می‌باشد. $(m, n) = (4, 9)$ و $(m, n) = (3, 6)$ نتیجه می‌دهند که $OP^*(m, n - m)$ دارای جواب می‌باشد اگر و تنها اگر $(m, n) \neq (3, 6)$.

□

در ادامه مساله اوبروولف‌اش برای حالتی که دارای t دور به طول ۲ و یک دور به طول ۳، به طوری که $n = 2t + 3$ ، مورد بررسی قرار گرفته است.

دستورالعمل ۱. فرض کنید k عدد صحیح مثبت و $L = \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{k}{2} \rfloor\}$.

مجموعه $\{x_i : i \in \mathbb{Z}_k\} \cup \{y_i : i \in \mathbb{Z}_k\}$ به عنوان مجموعه رئوس گراف K_{2k} در نظر بگیرید. برای هر $i \in \mathbb{Z}_k$ و هر $d \in L$ ، $x_i x_{i+d}$ و $y_i y_{i+d}$ ، به ترتیب، یال‌های همسان چپ و همسان راست از طول d نامیده می‌شوند. یال‌های به فرم $x_i y_{i+d}$ ، برای هر $i, d \in \mathbb{Z}_k$ ، یال‌های مرکب از تفاضل d نامیده می‌شوند.

فرض کنید S یک زیر مجموعه از مجموعه یال‌های K_{2k} باشد. آنگاه مجموعه‌های $\mathcal{V}(S)$ و $\mathcal{L}(S), \mathcal{R}(S), \mathcal{M}(S), \mathcal{X}(S)$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(S) &= \{d \in L : x_i x_{i+d} \in S, \ i \in \mathbb{Z}_k\}, \\ \mathcal{R}(S) &= \{d \in L : y_i y_{i+d} \in S, \ i \in \mathbb{Z}_k\}, \\ \mathcal{M}(S) &= \{d \in \mathbb{Z}_k : x_i y_{i+d} \in S, \ i \in \mathbb{Z}_k\}, \\ \mathcal{X}(S) &= \{i \in \mathbb{Z}_k : x_i u \in S, \ u \in V(K_{2k})\}, \\ \mathcal{V}(S) &= \{i \in \mathbb{Z}_k : y_i u \in S, \ u \in V(K_{2k})\}.\end{aligned}$$

لم ۲.۳.۵. فرض کنید ℓ یک عدد صحیح مثبت باشد. فرض کنید $K_{4\ell}$ دارای ۱-عامل‌های F_1 و F_2 باشد به طوری که:

- (i) F_1 و F_2 جمعا، شامل دقیقا یک یال همسان چپ و یک یال همسان راست به ازای هر طول d ، همچنین دقیقا یک یال مرکب به ازای هر تفاضل d باشند،
 - (ii) هر یک از F_1 و F_2 شامل دقیقا یک یال همسان از طول ℓ باشند.
- آنگاه $K_{4\ell+1}^*$ دارای یک $(\vec{C}_2, \dots, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$ -عامل بندی می‌باشد.

برهان. گراف $K_{4\ell+1}^*$ را متناظر با گراف $K_{4\ell}^* \bowtie K_1^*$ در نظر گرفته به طوری که $V(K_1^*) = \{u_\infty\}$ و $V(K_{4\ell}^*) = V(K_{4\ell})$. کمان‌های (x_i, x_{i+d}) و (y_i, y_{i+d}) ، برای $d = 1, \dots, 2\ell - 1$ ، به ترتیب، کمان‌های همسان چپ و همسان راست از تفاضل d نامیده می‌شوند. کمان‌های (x_i, y_{i+d}) و (y_{i+d}, x_i) ، برای $d = 0, 1, \dots, 2\ell - 1$ ، به ترتیب، کمان‌های مرکب چپ و مرکب راست از تفاضل d نامیده می‌شوند. همچنین کمان‌های (x_i, u_∞) و (y_i, u_∞) ، به ترتیب، کمان‌های چپ و راست از تفاضل ∞ ، و کمان‌های (u_∞, x_i) و (u_∞, y_i) ، به ترتیب، کمان‌های چپ و راست از تفاضل $-\infty$ نامیده می‌شوند. جایگشت زیر را در نظر بگیرید.

$$\rho = (x_0 x_1 \dots x_{2\ell-1})(y_0 y_1 \dots y_{2\ell-1})(u_\infty)$$

فرض کنید که F_1 و F_2 ، ۱-عامل‌هایی از $K_{4\ell}$ باشند به‌طوری‌که شرایط (i) و (ii) برای آن‌ها برقرار است. فرض کنید F'_1 و F'_2 ، به ترتیب، از F_1 و F_2 ، با جایگزین کردن هر یال uv ، بجز یال‌های همسان از طول ℓ ، با دور جهت‌دار uvu ، و همچنین جایگزین کردن هر یال همسان uv از طول ℓ با دور جهت‌دار $uvu_\infty u$ به‌دست آمده باشند. چون F_1 و F_2 ، ۱-عامل‌های $K_{4\ell}$ می‌باشند و هر یک از F_1 و F_2 شامل دقیقاً یک یال همسان از طول ℓ می‌باشند، به وضوح F'_1 و F'_2 ، $(\vec{C}_2, \dots, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$ -عامل‌های $K_{4\ell+1}^*$ می‌باشند. مشاهده می‌شود که هر یک از یال‌های همسان از طول d در $K_{4\ell}$ ، به‌طوری‌که $d \neq \ell$ ، با دو کمان با نقاط انتهایی یکسان و جهت‌های مخالف جایگزین شده‌اند، به عبارتی دیگر، با کمان‌هایی از تفاضل‌های همسان d و $-d$ جایگزین شده‌اند. به‌طور مشابه، هر یال مرکب از تفاضل d با دو کمان با نقاط انتهایی یکسان اما جهت‌های مخالف جایگزین شده‌اند، به عبارتی دیگر، با یال‌های مرکب چپ و مرکب راست از تفاضل d جایگزین شده‌اند. همچنین هر یال همسان چپ (راست) از طول ℓ ، یک کمان همسان چپ (راست) از تفاضل ℓ ، یک کمان چپ (راست) از تفاضل ∞ ، و یک کمان چپ (راست) از تفاضل $-\infty$ تولید کرده است. بنابراین F'_1 و F'_2 ، شامل دقیقاً یک کمان همسان چپ و یک کمان همسان راست از هر تفاضل در مجموعه

$$\{1, \dots, 2\ell - 1\},$$

و دقیقاً یک کمان مرکب چپ و یک کمان مرکب راست از هر تفاضل در مجموعه

$$\{0, 1, \dots, 2\ell - 1\},$$

و همچنین، دقیقاً یک کمان چپ و یک کمان راست از تفاضل $\pm\infty$ می‌باشند. با توجه به ویژگی‌های F'_1 و F'_2 ، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\{\rho^i(F'_1) : i \in \mathbb{Z}_{2\ell}\} \cup \{\rho^i(F'_2) : i \in \mathbb{Z}_{2\ell}\}$$

□

یک $(\vec{C}_2, \dots, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$ -عامل بندی از $K_{4\ell+1}^*$ می‌باشد.

لم ۳.۳.۵. فرض کنید ℓ یک عدد صحیح مثبت باشد. فرض کنید $K_{4\ell+2}$ دارای ۱-عامل‌های F_1 و F_2 باشد به‌طوری‌که

(i) اجتماع یال‌های F_1 و F_2 ، شامل دقیقاً یک یال همسان چپ و یک یال همسان راست به ازای هر طول، و دقیقاً یک یال مرکب به ازای هر تفاضل، بجز تفاضل 0 باشد،

(ii) F_1 و F_2 هر کدام شامل دقیقاً یک یال مرکب از تفاضل 0 باشند.

آن‌گاه، $K_{4\ell+3}^*$ دارای یک $(\vec{C}_2, \dots, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$ -عامل بندی می‌باشد.

برهان. $K_{4\ell+3}^*$ را متناظر با گراف $K_{4\ell+2}^* \bowtie K_1^*$ در نظر بگیرید به‌طوری‌که $V(K_1^*) = \{u_\infty\}$ و $V(K_{4\ell+2}^*) = V(K_{4\ell+2})$. کمان‌های (x_i, x_{i+d}) و (y_i, y_{i+d}) ، برای $d = 1, \dots, 2\ell$ ، به ترتیب، کمان‌های همسان چپ و راست از تفاضل d نامیده می‌شوند. کمان‌های (x_i, y_{i+d}) و (y_{i+d}, x_i) ، برای $d = 0, 1, \dots, 2\ell$ ، به ترتیب، کمان‌های همسان چپ و راست از تفاضل d نامیده می‌شوند.

همچنین کمان‌های (x_i, u_∞) و (y_i, u_∞) ، به ترتیب، کمان‌های چپ و راست از تفاضل ∞ ، و کمان‌های (u_∞, x_i) و (u_∞, y_i) ، به ترتیب، کمان‌های چپ و راست از تفاضل $-\infty$ نامیده می‌شوند. جایگشت $\rho = (x_0 x_1 \dots x_{2\ell})(y_0 y_1 \dots y_{2\ell})(u_\infty)$ را در نظر بگیرید.

فرض کنید F_1 و F_2 ، ۱-عامل‌هایی از $K_{4\ell+2}$ باشند به‌طوری‌که در فرض‌های (i) و (ii) صدق می‌کنند. فرض کنید F'_1 و F'_2 به ترتیب از F_1 و F_2 ، با جایگزین کردن هر یال uv ، بجای یال‌های مرکب از تفاضل 0، با دور جهت‌دار uvu ، و همچنین جایگزین کردن یک از یال‌های مرکب از تفاضل 0، با دور جهت‌دار $uvu_\infty u$ ، و جایگزین کردن یال دیگر با دور جهت‌دار $vu u_\infty v$ به‌دست آمده باشند. چون F_1 و F_2 ، ۱-عامل‌های $K_{4\ell+2}$ هستند و هر یک از F_1 و F_2 شامل دقیقاً یک یال مرکب از تفاضل 0 می‌باشد، بوضوح F'_1 و F'_2 ، $(\vec{C}_2, \dots, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$ ، عامل‌های $K_{4\ell+2}^*$ می‌باشند. همچنین مشاهده می‌شود که هر یال همسان از طول d در مجموعه یال‌های $K_{4\ell+2}$ با کمان‌هایی با نقاط انتهایی یکسان اما جهت‌های مخالف جایگزین شده‌اند، به عبارتی با کمان‌های همسان از تفاضل d و $-d$ جایگزین شده‌اند. به‌طور مشابه، هر یال مرکب از تفاضل d ، به‌طوری‌که $d \neq 0$ ، با کمان‌هایی با نقاط انتهایی یکسان و جهت‌های مخالف یکدیگر جایگزین شده‌اند، به عبارتی دیگر، با کمان‌های مرکب چپ و راست از تفاضل d جایگزین شده‌اند.

مشاهده می‌شود که یک یال مرکب از تفاضل 0، به یک کمان مرکب چپ از تفاضل 0، یک کمان راست از تفاضل ∞ ، و یک کمان چپ از تفاضل $-\infty$ تبدیل شده است، در حالیکه یال مرکب دیگر از تفاضل 0، یک کمان مرکب راست از تفاضل 0، یک کمان چپ از تفاضل ∞ ، یک کمان راست از تفاضل $-\infty$ تولید کرده است.

بنابراین F'_1 و F'_2 ، شامل دقیقاً یک کمان همسان چپ و همسان راست از هر تفاضل در مجموعه

$$\{1, \dots, 2\ell\}$$

و دقیقاً یک کمان مرکب چپ و راست از هر تفاضل در مجموعه

$$\{0, 1, \dots, 2\ell\}$$

و همچنین دقیقاً یک کمان چپ و راست از تفاضل $\pm\infty$ می‌باشند.

با توجه به ویژگی‌های F'_1 و F'_2 می‌توان نتیجه گرفت که

$$\{\rho^i(F'_1) : i \in \mathbb{Z}_{2\ell+1}\} \cup \{\rho^i(F'_2) : i \in \mathbb{Z}_{2\ell+1}\}$$

□

یک $(\vec{C}_2, \dots, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$ -عامل‌بندی از $K_{4\ell+1}^*$ می‌باشد.

قضیه ۸.۳.۵. اگر $n \geq 5$ و $n \equiv 1, 3, 7 \pmod{8}$ ، آنگاه K_n^* دارای یک $(\vec{C}_2, \dots, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$ -عامل‌بندی می‌باشد.

برهان. کافی است نشان داده شود که K_{n-1} دارای ۱-عامل‌های F_1 و F_2 می‌باشد به‌طوری‌که در فرضیات لم ۲.۳.۵ و یا لم ۳.۳.۵ صدق می‌کنند. آنگاه با توجه به لم‌های ۲.۳.۵ و ۳.۳.۵، می‌توان نتیجه گرفت که K_n^* دارای یک $(\vec{C}_2, \dots, \vec{C}_2, \vec{C}_3)$ -عامل‌بندی می‌باشد.

مطابق با دستورالعمل ۱، رأس های K_{n-1} را نام گذاری کرده و برای هر $S \subseteq E(K_{n-1})$ ، مجموعه های $\mathcal{V}(S), \mathcal{L}(S), \mathcal{R}(S), \mathcal{M}(S), \mathcal{X}(S)$ را نیز تعریف کنید.

حالت ۱. فرض کنید $n \equiv 1 \pmod{8}$. بنابراین برای هر عدد صحیح زوج ℓ ، خواهیم داشت $n = 4\ell + 1$. در ادامه نشان داده می شود که $K_{4\ell}$ دارای ۱-عامل های F_1 و F_2 می باشد، به طوری که در فرضیات لم ۲.۳.۵ صدق می کنند. زیرمجموعه های زیر از مجموعه یالی گراف $K_{4\ell}$ را در نظر بگیرید.

$$A_1 = \{x_i y_{\ell-i} : i = 1, 2, \dots, \ell - 1\},$$

$$A_2 = \{x_i y_{\ell-1-i} : i = \ell + 1, \ell + 2, \dots, 2\ell - 2\},$$

$$A_3 = \{x_0 x_{2\ell-1}, y_0 y_\ell, x_\ell y_{2\ell-1}\}.$$

فرض کنید $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. مشاهده می شود که

$$\mathcal{X}(A_1) = \{1, 2, \dots, \ell - 1\},$$

$$\mathcal{X}(A_2) = \{\ell + 1, \dots, 2\ell - 2\},$$

$$\mathcal{X}(A_3) = \{0, \ell, 2\ell - 1\},$$

$$\mathcal{V}(A_1) = \{1, 2, \dots, \ell - 1\},$$

$$\mathcal{V}(A_2) = \{\ell + 1, \dots, 2\ell - 2\},$$

$$\mathcal{V}(A_3) = \{0, \ell, 2\ell - 1\}.$$

بنابراین $\mathcal{X}(A) = \mathcal{V}(A) = \mathbb{Z}_{2\ell}$ ، و هر رأس از $K_{4\ell}$ را دقیقاً یک بار پوشش می دهد. بنابراین A یک تطابق کامل می باشد و زیرگراف $F_1 = (V, A)$ یک ۱-عامل از $K_{4\ell}$ می باشد. همچنین مشاهده می شود که تمام مجموعه های $\mathcal{L}(A_1), \mathcal{L}(A_2), \mathcal{R}(A_1)$ و $\mathcal{R}(A_2)$ تهی می باشند، در حالی که

$$\mathcal{M}(A_1) = \{0, 2, 4, \dots, \ell - 2, \ell + 2, \ell + 4, \dots, 2\ell - 2\},$$

$$\mathcal{M}(A_2) = \{1, 3, \dots, \ell - 3, \ell + 3, \ell + 5, \dots, 2\ell - 1\}.$$

و همچنین برای مجموعه A_3 خواهیم داشت

$$\mathcal{M}(A_3) = \{\ell - 1\},$$

$$\mathcal{R}(A_3) = \{\ell\},$$

$$\mathcal{L}(A_3) = \{1\}.$$

بنابراین F_1 یک ۱-عامل از $K_{4\ell}$ می باشد، شامل دقیقاً یک یال همسان چپ از هر طول در مجموعه

$$\mathcal{L}(A) = \{1\}$$

دقیقا یک یال همسان راست از هر طول در مجموعه

$$\mathcal{R}(A) = \{\ell\}$$

و دقیقا یک یال مرکب از هر تفاضل در مجموعه

$$\mathcal{M}(A) = \{0, 1, 2, \dots, \ell - 1, \ell + 2, \ell + 3, \dots, 2\ell - 1\}$$

می‌باشد.

در ادامه دومین ۱-عامل را به دست می‌آوریم. زیر مجموعه‌های زیر از مجموعه یالی $K_{4\ell}$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} B_1 &= \left\{ x_i x_{2\ell-i} : i = 1, 2, \dots, \frac{\ell}{2} - 1 \right\}, \\ B_2 &= \left\{ x_i x_{2\ell-i-1} : i = \frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2} + 1, \dots, \ell - 2 \right\}, \\ B_3 &= \left\{ y_i y_{\ell-i} : i = 1, 2, \dots, \frac{\ell}{2} - 1 \right\}, \\ B_4 &= \left\{ y_i y_{\ell-1-i} : i = \ell, \ell + 1, \dots, \frac{3\ell}{2} - 1 \right\}, \\ B_5 &= \left\{ x_0 x_\ell, x_{\ell-1} y_0, x_{\frac{3\ell}{2}} y_{\frac{\ell}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

فرض کنید $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$. مشاهده می‌شود که تمام مجموعه‌های $\mathcal{X}(B_3)$ ، $\mathcal{X}(B_4)$ و $\mathcal{Y}(B_1), \mathcal{Y}(B_2)$ تهی می‌باشند، در حالیکه

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(B_1) &= \left\{ 1, 2, \dots, \frac{\ell}{2} - 1, \frac{3\ell}{2} + 1, \dots, 2\ell - 1 \right\}, \\ \mathcal{X}(B_2) &= \left\{ \frac{\ell}{2}, \frac{\ell}{2} + 1, \dots, \ell - 2, \ell + 1, \dots, \frac{3\ell}{2} - 1 \right\}, \\ \mathcal{Y}(B_3) &= \left\{ 1, 2, \dots, \frac{\ell}{2} - 1, \frac{\ell}{2} + 1, \dots, \ell - 1 \right\}, \\ \mathcal{Y}(B_4) &= \left\{ \ell, \ell + 1, \dots, 2\ell - 1 \right\}, \\ \mathcal{X}(B_5) &= \left\{ 0, \ell - 1, \ell, \frac{3\ell}{2} \right\}, \\ \mathcal{Y}(B_5) &= \left\{ 0, \frac{\ell}{2} \right\}. \end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{X}(B) = \mathcal{Y}(B) = \mathbb{Z}_{2\ell}$ ، و B هر رأس از مجموعه رئوس $K_{4\ell}$ را دقیقا یک بار پوشش می‌دهد. بنابراین B یک تطابق کامل می‌باشد و زیرگراف $F_2 = (V, B)$ یک ۱-عامل از $K_{4\ell}$ می‌باشد.

همچنین مشاهده می شود که

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(B_1) &= \{2, 4, \dots, \ell - 2\}, \\ \mathcal{L}(B_2) &= \{3, 5, \dots, \ell - 1\}, \\ \mathcal{R}(B_3) &= \{2, 4, \dots, \ell - 2\}, \\ \mathcal{R}(B_4) &= \{1, 3, \dots, \ell - 1\}, \\ \mathcal{L}(B_5) &= \{\ell\}, \\ \mathcal{M}(B_5) &= \{\ell, \ell + 1\},\end{aligned}$$

در حالیکه تمام مجموعه های $\mathcal{M}(B_3), \mathcal{M}(B_2), \mathcal{M}(B_1), \mathcal{L}(B_4), \mathcal{L}(B_3), \mathcal{R}(B_5), \mathcal{R}(B_2), \mathcal{R}(B_1)$ و $\mathcal{M}(B_4)$ تهی می باشند.

بنابراین F_2 یک ۱-عامل از $K_{4\ell}$ می باشد، شامل دقیقا یک یال همسان چپ از هر طول در مجموعه

$$\mathcal{L}(B) = \{2, 3, \dots, \ell\},$$

دقیقا یک یال همسان راست از هر طول در مجموعه

$$\mathcal{R}(B) = \{1, 2, \dots, \ell - 1\},$$

و دقیقا یک یال مرکب از هر تفاضل در مجموعه

$$\mathcal{M}(B) = \{\ell, \ell + 1\}.$$

مشاهده می شود که F_1 و F_2 ، شامل دقیقا یک یال همسان چپ و دقیقا یک یال همسان راست از هر طول در مجموعه

$$\{1, 2, \dots, \ell\}$$

و دقیقا یک یال مرکب از هر تفاضل در مجموعه

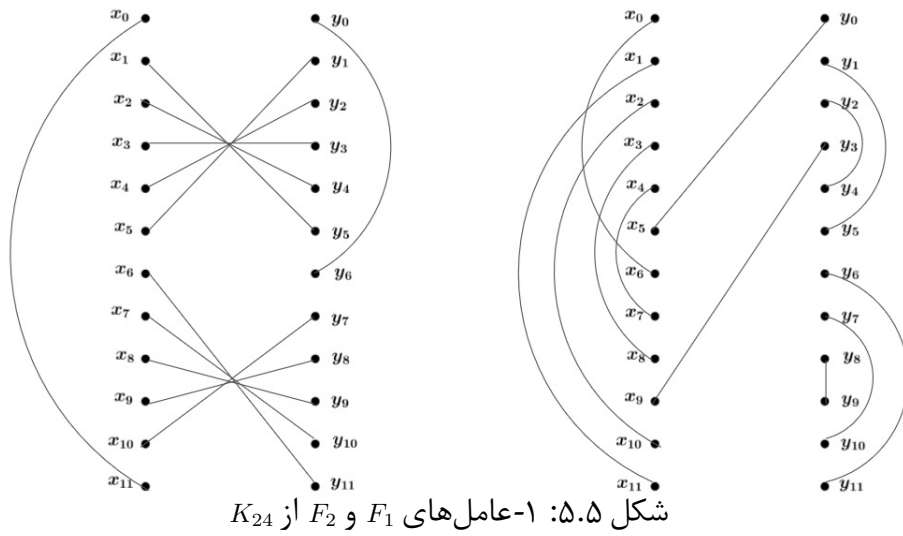
$$\{0, 1, 2, \dots, 2\ell - 1\}$$

می باشند.

همچنین مشاهده می شود که هر یک از F_1 و F_2 شامل دقیقا یک یال همسان از طول ℓ می باشند.

بنابراین F_1 و F_2 ، ۱-عامل هایی از $K_{4\ell}$ می باشند به طوری که در فرضیات لم ۲.۳.۵ صدق می کنند. برای یک مثال، ۱-عامل های F_1 و F_2 از K_{24} در شکل ۵.۵ قابل مشاهده است.

حالت ۲. فرض کنید $n \equiv 3 \pmod{8}$. در این صورت برای یک عدد صحیح مثبت ℓ ، خواهیم داشت $n = 4\ell + 3$. در این حالت، نشان داده می شود که $K_{4\ell+2}$ دارای دو تا ۱-عامل می باشد که در فرضیات لم ۳.۳.۵ صدق می کنند.



زیرمجموعه‌های زیر از مجموعه یالی گراف $K_{4\ell+2}$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ x_i y_{\ell-i} : i = 1, 2, \dots, \frac{\ell}{2} - 1, \frac{\ell}{2} + 1, \dots, \ell - 1 \right\}, \\ A_2 &= \left\{ x_i y_{3\ell+1-i} : i = \ell + 1, \ell + 2, \dots, 2\ell \right\}, \\ A_3 &= \left\{ x_0 y_0, x_{\frac{\ell}{2}} x_{\ell}, y_{\frac{\ell}{2}} y_{\ell} \right\}. \end{aligned}$$

فرض کنید $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. مشاهده می‌شود که

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(A_1) &= \left\{ 1, 2, \dots, \frac{\ell}{2} - 1, \frac{\ell}{2} + 1, \dots, \ell - 1 \right\}, \\ \mathcal{X}(A_2) &= \left\{ \ell + 1, \ell + 2, \dots, 2\ell \right\}, \\ \mathcal{X}(A_3) &= \left\{ 0, \frac{\ell}{2}, \ell \right\}, \\ \mathcal{Y}(A_1) &= \left\{ 1, 2, \dots, \frac{\ell}{2} - 1, \frac{\ell}{2} + 1, \dots, \ell - 1 \right\}, \\ \mathcal{Y}(A_2) &= \left\{ \ell + 1, \ell + 2, \dots, 2\ell \right\}, \\ \mathcal{Y}(A_3) &= \left\{ 0, \frac{\ell}{2}, \ell \right\}. \end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{X}(A) = \mathcal{Y}(A) = \mathbb{Z}_{2\ell+1}$. همچنین مشاهده می‌شود که A هر رأس x_i و y_i از $K_{4\ell+2}$ را دقیقاً یک بار پوشش می‌دهد. بنابراین زیر گراف $F_1 = (V, A)$ یک ۱-عامل از $K_{4\ell+2}$ می‌باشد.

همچنین مشاهده می شود که برای مجموعه های A_1 ، A_2 و A_3 روابط زیر برقرار است

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(A_1) &= \{2, 4, \dots, \ell - 4, \ell - 2, \ell + 3, \ell + 5, \dots, 2\ell - 3, 2\ell - 1\}, \\ \mathcal{M}(A_2) &= \{1, 3, \dots, \ell - 3, \ell - 1, \ell + 2, \ell + 4, \dots, 2\ell - 2, 2\ell\}, \\ \mathcal{M}(A_3) &= \{0\}, \\ \mathcal{L}(A_3) &= \left\{\frac{\ell}{2}\right\}, \\ \mathcal{R}(A_3) &= \left\{\frac{\ell}{2}\right\},\end{aligned}$$

در حالیکه تمام مجموعه های $\mathcal{L}(A_1)$ ، $\mathcal{R}(A_1)$ ، $\mathcal{L}(A_2)$ و $\mathcal{R}(A_2)$ تهی می باشند. بنابراین

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A) &= \left\{\frac{\ell}{2}\right\}, \\ \mathcal{R}(A) &= \left\{\frac{\ell}{2}\right\}, \\ \mathcal{M}(A) &= \mathbb{Z}_{2\ell+1} - \{\ell, \ell + 1\}.\end{aligned}\tag{۱}$$

در ادامه، دومین ۱-عامل را بدست می آوریم. ابتدا تعریف می کنیم

$$j = \begin{cases} \frac{\ell-10}{4} & \text{if } \ell \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{3\ell-8}{4} & \text{if } \ell \equiv 0 \pmod{4}.\end{cases}$$

زیرمجموعه های زیر از مجموعه یالی $K_{4\ell+2}$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}B_1 &= \{y_i y_{2\ell-2-i} : i = 0, 1, \dots, j\}, \\ B_2 &= \{y_i y_{2\ell-i} : i = j + 3, j + 4, \dots, \ell - 1\}, \\ B_3 &= \{x_i x_{2\ell-2-i} : i = 0, 1, \dots, j\}, \\ B_4 &= \{x_i x_{2\ell-i} : i = j + 3, j + 4, \dots, \ell - 1\}, \\ B_5 &= \{x_{j+1} x_{j+2}, y_{j+1} y_{j+2}, x_{2\ell-1} y_{2\ell-1}, x_\ell y_{2\ell}, x_{2\ell} y_\ell\}.\end{aligned}$$

زیر حالت ۱-۲. فرض کنید $\ell \geq 8$ و $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$. مشاهده می شود که

تمام مجموعه های $\mathcal{X}(B_1)$ ، $\mathcal{X}(B_2)$ ، $\mathcal{Y}(B_3)$ و $\mathcal{Y}(B_4)$ تهی می باشند، در حالیکه

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(B_1) &= \{0, 1, \dots, j, 2\ell - j - 2, 2\ell - j - 1, \dots, 2\ell - 2\}, \\ \mathcal{Y}(B_2) &= \{j + 3, j + 4, \dots, \ell - 1, \ell + 1, \dots, 2\ell - j - 3\}, \\ \mathcal{X}(B_3) &= \{0, 1, \dots, j, 2\ell - j - 2, 2\ell - j - 1, \dots, 2\ell - 2\}, \\ \mathcal{X}(B_4) &= \{j + 3, j + 4, \dots, \ell - 1, \ell + 1, \dots, 2\ell - j - 3\}, \\ \mathcal{X}(B_5) &= \{j + 1, j + 2, \ell, 2\ell - 1, 2\ell\}, \\ \mathcal{Y}(B_5) &= \{j + 1, j + 2, \ell, 2\ell - 1, 2\ell\}.\end{aligned}$$

چون $\ell \geq 8$ ، بنابراین $0 \leq j \leq \ell - 4$. در نتیجه $\mathcal{X}(B) = \mathcal{Y}(B) = \mathbb{Z}_{2\ell+1}$ ، به عبارتی، B هر رأس x_i و y_i از $K_{4\ell+2}$ را دقیقاً یک بار پوشش می‌دهد. بنابراین B یک تطابق کامل می‌باشد، و زیر گراف $F_2 = (V, B)$ یک ۱-عامل از $K_{4\ell+2}$ خواهد بود. مشاهده می‌شود که اگر $\ell \equiv 2 \pmod{4}$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(B_1) &= \left\{3, 5, \dots, \frac{\ell}{2} - 2\right\}, \\ \mathcal{R}(B_2) &= \left\{2, 4, \dots, \ell\right\} \cup \left\{\frac{\ell}{2} + 2, \frac{\ell}{2} + 4, \dots, \ell - 1\right\}, \\ \mathcal{L}(B_3) &= \left\{3, 5, \dots, \frac{\ell}{2} - 2\right\}, \\ \mathcal{L}(B_4) &= \left\{2, 4, \dots, \ell\right\} \cup \left\{\frac{\ell}{2} + 2, \frac{\ell}{2} + 4, \dots, \ell - 1\right\},\end{aligned}$$

در حالیکه تمام مجموعه‌های $\mathcal{M}(B_3)$ ، $\mathcal{M}(B_2)$ ، $\mathcal{M}(B_1)$ ، $\mathcal{R}(B_4)$ ، $\mathcal{R}(B_3)$ ، $\mathcal{L}(B_2)$ ، $\mathcal{L}(B_1)$ و $\mathcal{M}(B_4)$ تهی می‌باشند.

و اگر $\ell \equiv 0 \pmod{4}$ ، آن‌گاه

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(B_1) &= \left\{3, 5, \dots, \ell - 1\right\} \cup \left\{\frac{\ell}{2} + 2, \frac{\ell}{2} + 4, \dots, \ell\right\}, \\ \mathcal{R}(B_2) &= \left\{2, 4, \dots, \frac{\ell}{2} - 2\right\}, \\ \mathcal{L}(B_3) &= \left\{3, 5, \dots, \ell - 1\right\} \cup \left\{\frac{\ell}{2} + 2, \frac{\ell}{2} + 4, \dots, \ell\right\}, \\ \mathcal{L}(B_4) &= \left\{2, 4, \dots, \frac{\ell}{2} - 2\right\},\end{aligned}$$

در حالیکه تمام مجموعه‌های $\mathcal{M}(B_3)$ ، $\mathcal{M}(B_2)$ ، $\mathcal{M}(B_1)$ ، $\mathcal{R}(B_4)$ ، $\mathcal{R}(B_3)$ ، $\mathcal{L}(B_2)$ ، $\mathcal{L}(B_1)$ و $\mathcal{M}(B_4)$ تهی می‌باشند.

مشاهده می‌شود که در هر دو حالت فوق

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(B_5) &= \mathcal{L}(B_5) = \{1\}, \\ \mathcal{M}(B_5) &= \{0, \ell, \ell + 1\}.\end{aligned}$$

بنابراین $F_2 = (V, B)$ یک ۱-عامل از $K_{4\ell+2}$ می‌باشد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(B) &= L - \left\{\frac{\ell}{2}\right\}, \\ \mathcal{R}(B) &= L - \left\{\frac{\ell}{2}\right\}, \\ \mathcal{M}(B) &= L - \{0, \ell, \ell + 1\}.\end{aligned}\tag{۲}$$

در این مرحله فرض کنید $\ell < 8$. دقت کنید که در این حالت $\ell \in \{2, 4, 6\}$.

زیر حالت ۲-۲. فرض کنید $\ell = 6$ و $B = B_2 \cup B_4 \cup B_5$. آن‌گاه مشاهده می‌گردد که

در حالیکه $\mathcal{X}(B_2) = \mathcal{Y}(B_4) = \emptyset$

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(B_4) &= \mathcal{Y}(B_2) = \{2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\}, \\ \mathcal{X}(B_5) &= \mathcal{Y}(B_5) = \{0, 1, 6, 11, 12\}.\end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{X}(B) = \mathcal{Y}(B) = \mathbb{Z}_{13}$ ، و $F_2 = (V, B)$ یک ۱-عامل از K_{26} می باشد. مشاهده می شود که $\mathcal{L}(B_2), \mathcal{R}(B_4), \mathcal{M}(B_2)$ و $\mathcal{M}(B_4)$ تماماً تهی می باشند، درحالیکه

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(B_2) = \mathcal{L}(B_4) &= \{2, 4, 5, 6\}, \\ \mathcal{R}(B_5) = \mathcal{L}(B_5) &= \{1\}, \\ \mathcal{M}(B_5) &= \{0, 6, 7\}.\end{aligned}$$

درنتیجه در این حالت نیز (۲) برقرار است.

زیر حالت ۲-۳. فرض کنید $\ell = 4$ و $B = B_1 \cup B_3 \cup B_5$. آن گاه

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}(B_1) = \mathcal{X}(B_3) &= \{0, 1, 5, 6\}, \\ \mathcal{Y}(B_5) = \mathcal{X}(B_5) &= \{2, 3, 4, 7, 8\},\end{aligned}$$

درحالیکه $\mathcal{Y}(B_3) = \mathcal{X}(B_1) = \emptyset$.

به وضوح $\mathcal{X}(B) = \mathcal{Y}(B) = \mathbb{Z}_9$ ، بنابراین $F_2 = (V, B)$ یک ۱-عامل از K_{18} می باشد. مشاهده می شود که $\mathcal{R}(B_3), \mathcal{L}(B_1), \mathcal{M}(B_1)$ و $\mathcal{M}(B_3)$ تماماً تهی می باشند، درحالیکه

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(B_1) = \mathcal{L}(B_3) &= \{3, 4\}, \\ \mathcal{R}(B_5) = \mathcal{L}(B_5) &= \{1\}, \\ \mathcal{M}(B_5) &= \{0, 4, 5\}.\end{aligned}$$

درنتیجه در این حالت نیز (۲) برقرار می باشد.

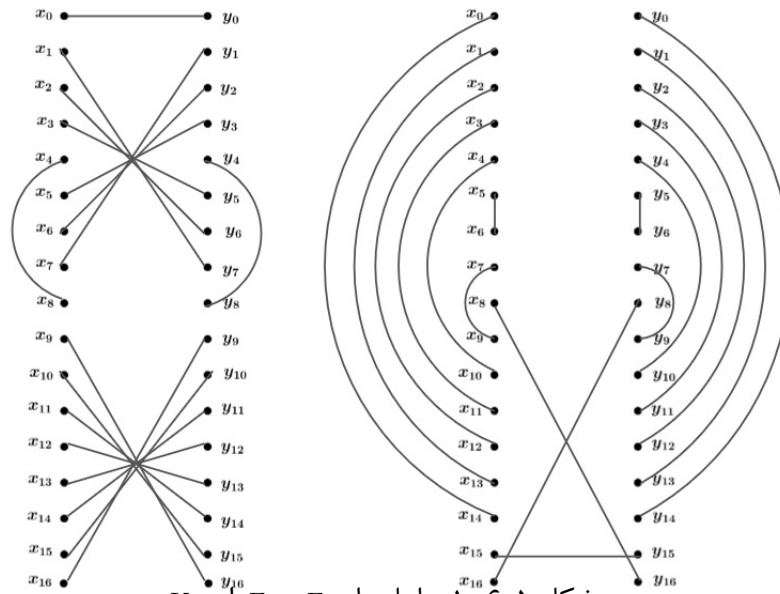
زیر حالت ۲-۴. فرض کنید $\ell = 2$ و مجموعه B را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$B = \{x_0x_2, y_0y_2, x_1y_3, x_3y_1, x_4y_4\}.$$

به آسانی می توان نشان داد که $F_2 = (V, B)$ یک ۱-عامل از K_{10} می باشد و رابطه (۲) برقرار خواهد بود.

از روابط (۱) و (۲) می توان نتیجه گرفت که در تمام حالت ها F_1 و F_2 هر دو، شامل دقیقاً یک یال همسان چپ و یک یال همسان راست از هر طول در L ، و دقیقاً یک یال مرکب از هر تفاضل در $\mathbb{Z}_{2\ell+1}^*$ می باشند. همچنین مشاهده می شود که هر یک از F_1 و F_2 شامل دقیقاً یک یال مرکب از تفاضل ۰ می باشند. بنابراین F_1 و F_2 ، ۱-عامل هایی از $K_{4\ell+2}$ می باشند که در فرضیات لم ۳.۳.۵ صدق می کنند. برای مثال، ۱-عامل های F_1 و F_2 از K_{34} در شکل ۶.۵ ترسیم شده اند.

حالت ۳. فرض کنید $n \equiv 7 \pmod{8}$. آن گاه برای هر عدد صحیح فرد ℓ ، خواهیم داشت $n = 4\ell + 3$. در این مرحله بازهم به ساخت ۱-عامل های F_1 و F_2 از $K_{4\ell+2}$ می پردازیم به طوری که در فرضیات لم ۳.۳.۵ صدق کنند.



شکل ۵.۶: ۱-عامل‌های F_1 و F_2 از K_{34}

ابتدا فرض کنید که $\ell > 1$. زیرمجموعه‌های زیر از مجموعه یالی گراف $K_{4\ell+2}$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x_i y_{\ell-i} : i = 1, 2, \dots, \ell - 1\}, \\ A_2 &= \left\{x_i y_{\ell-i} : i = \ell + 1, \ell + 2, \dots, \frac{3\ell - 1}{2}, \frac{3\ell + 3}{2}, \frac{3\ell + 5}{2}, \dots, 2\ell\right\}, \\ A_3 &= \left\{x_0 y_0, x_\ell x_{\frac{3\ell+1}{2}}, y_\ell y_{\frac{3\ell+1}{2}}\right\}. \end{aligned}$$

فرض کنید $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. مشاهده می‌شود که

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(A_1) = \mathcal{Y}(A_1) &= \{1, 2, \dots, \ell - 1\}, \\ \mathcal{X}(A_2) = \mathcal{Y}(A_2) &= \left\{\ell + 1, \ell + 2, \dots, \frac{3\ell - 1}{2}, \frac{3\ell + 3}{2}, \frac{3\ell + 5}{2}, \dots, 2\ell\right\}, \\ \mathcal{X}(A_3) = \mathcal{Y}(A_3) &= \left\{0, \ell, \frac{3\ell + 1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{X}(A) = \mathcal{Y}(A) = \mathbb{Z}_{2\ell+1}$ ، و هر رأس از $K_{4\ell+2}$ را دقیقاً یک بار پوشش می‌دهد. بنابراین A یک تطابق کامل و $F_1 = (V, A)$ یک ۱-عامل از $K_{4\ell+2}$ می‌باشد.

مشاهده می‌شود که تمام مجموعه‌های $\mathcal{L}(A_1)$ ، $\mathcal{L}(A_2)$ ، $\mathcal{R}(A_1)$ و $\mathcal{R}(A_2)$ تهی می‌باشند،

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(A_1) &= \{1, 3, \dots, \ell - 2, \ell + 3, \ell + 5, \dots, 2\ell\}, \\ \mathcal{M}(A_2) &= \{2, 4, \dots, \ell - 1, \ell + 2, \ell + 4, \dots, 2\ell - 1\}, \\ \mathcal{M}(A_3) &= \{0\}, \\ \mathcal{L}(A_3) &= \left\{\frac{\ell + 1}{2}\right\}, \\ \mathcal{R}(A_3) &= \left\{\frac{\ell + 1}{2}\right\}.\end{aligned}$$

بنابراین $F_1 = (V, A)$ یک ۱-عامل از $K_{4\ell+2}$ با ویژگی های زیر می باشد.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A) &= \left\{\frac{\ell + 1}{2}\right\}, \\ \mathcal{R}(A) &= \left\{\frac{\ell + 1}{2}\right\}, \\ \mathcal{M}(A) &= \mathbb{Z}_{2\ell+1} - \{\ell, \ell + 1\}.\end{aligned}\tag{۳}$$

در ادامه، دومین ۱-عامل را می سازیم. بدین منظور، دو زیرحالت زیر را در نظر بگیرید.
زیر حالت ۱-۳. $\ell \equiv 1 \pmod{4}$.

زیر مجموعه های زیر از مجموعه یالی $K_{4\ell+2}$ را به صورت زیر تعریف کنید.

$$\begin{aligned}B_1 &= \left\{x_i x_{2\ell-2-i} : i = 0, 1, \dots, \frac{\ell-9}{4}\right\}, \\ B_2 &= \left\{x_i x_{2\ell-i} : i = \frac{\ell+3}{4}, \frac{\ell+7}{4}, \dots, \ell-1\right\}, \\ B_3 &= \left\{y_i y_{2\ell-2-i} : i = 0, 1, \dots, \frac{\ell-9}{4}\right\}, \\ B_4 &= \left\{y_i y_{2\ell-i} : i = \frac{\ell+3}{4}, \frac{\ell+7}{4}, \dots, \ell-1\right\}, \\ B_5 &= \left\{x_{\frac{\ell-5}{4}} x_{\frac{\ell-1}{4}}, y_{\frac{\ell-5}{4}} y_{\frac{\ell-1}{4}}, x_{\ell} y_{2\ell}, x_{2\ell-1} y_{2\ell-1}, x_{2\ell} y_{\ell}\right\}.\end{aligned}$$

ابتدا فرض کنید $\ell \geq 9$. فرض کنید $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$. مشاهده می شود در حالیکه تمام مجموعه های $\mathcal{X}(B_1), \mathcal{X}(B_4), \mathcal{X}(B_3)$ و $\mathcal{V}(B_2)$ تهی هستند، داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(B_1) = \mathcal{V}(B_3) &= \left\{0, 1, \dots, \frac{\ell-9}{4}, \frac{7\ell+1}{4}, \frac{7\ell+5}{4}, \dots, 2\ell-2\right\}, \\ \mathcal{X}(B_2) = \mathcal{V}(B_4) &= \left\{\frac{\ell+3}{4}, \frac{\ell+7}{4}, \dots, \ell-1, \ell+1, \ell+2, \dots, \frac{7\ell-3}{4}\right\}, \\ \mathcal{X}(B_5) = \mathcal{V}(B_5) &= \left\{\frac{\ell-5}{4}, \frac{\ell-1}{4}, \ell, 2\ell-1, 2\ell\right\}.\end{aligned}$$

بنابراین $\mathcal{X}(B) = \mathcal{V}(B) = \mathbb{Z}_{2\ell+1}$ و B هر رأس از $K_{4\ell+2}$ را دقیقاً یک بار پوشش می دهد. در نتیجه $F_2 = (V, B)$ یک ۱-عامل از $K_{4\ell+2}$ می باشد.

مشاهده می شود در حالیکه تمامی مجموعه های $\mathcal{M}(B_1), \mathcal{L}(B_4), \mathcal{L}(B_3), \mathcal{R}(B_2), \mathcal{R}(B_1)$

$\mathcal{M}(B_4)$ و $\mathcal{M}(B_3)$ ، $\mathcal{M}(B_2)$ تهی هستند، داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(B_1) = \mathcal{R}(B_3) &= \left\{3, 5, \dots, \frac{\ell-3}{2}\right\}, \\ \mathcal{L}(B_2) = \mathcal{R}(B_4) &= \left\{2, 4, \dots, \ell-1\right\} \cup \left\{\frac{\ell+5}{2}, \frac{\ell+9}{2}, \dots, \ell\right\}, \\ \mathcal{L}(B_5) = \mathcal{R}(B_5) &= \{1\}, \\ \mathcal{M}(B_5) &= \{0, \ell, \ell+1\}.\end{aligned}$$

بنابراین $F_2 = (V, B)$ یک ۱-عامل از $K_{4\ell+2}$ می‌باشد به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(B) &= L - \left\{\frac{\ell+1}{2}\right\}, \\ \mathcal{R}(B) &= L - \left\{\frac{\ell+1}{2}\right\}, \\ \mathcal{M}(B) &= \{0, \ell, \ell+1\}.\end{aligned}\tag{۴}$$

سپس فرض کنید $\ell < 9$. در این حالت $\ell = 5$ می‌باشد. فرض کنید $B = B_2 \cup B_4 \cup B_5$. مشاهده می‌شود درحالی‌که $\mathcal{Y}(B_2)$ و $\mathcal{X}(B_4)$ تهی می‌باشند روابط زیر برقرار است.

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(B_2) = \mathcal{Y}(B_4) &= \{2, 3, 4, 6, 7, 8\}, \\ \mathcal{X}(B_5) = \mathcal{Y}(B_5) &= \{0, 1, 5, 9, 10\}.\end{aligned}$$

بوضوح $F_2 = (V, B)$ یک ۱-عامل از K_{22} می‌باشد. مشاهده می‌شود که

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(B_2) &= \mathcal{R}(B_4) = \{2, 4, 5\}, \\ \mathcal{L}(B_5) &= \mathcal{R}(B_5) = \{1\}, \\ \mathcal{M}(B_5) &= \{0, 5, 6\},\end{aligned}$$

درحالی‌که $\mathcal{L}(B_4)$ ، $\mathcal{R}(B_2)$ و $\mathcal{M}(B_2)$ و $\mathcal{M}(B_4)$ تماماً تهی می‌باشند. در این حالت نیز (۴) برقرار است.

زیر حالت ۲-۳. $\ell \equiv 3 \pmod{4}$. ابتدا فرض کنید $\ell \geq 7$. زیر مجموعه‌های زیر از مجموعه یالی گراف $K_{4\ell+2}$ را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}B_1 &= \left\{x_i x_{2\ell-i} : i = 0, 1, \dots, \frac{\ell-3}{4}, \frac{3\ell+3}{4}, \frac{3\ell+7}{4}, \dots, \ell-1\right\}, \\ B_2 &= \left\{x_i x_{2\ell-i-1} : i = \frac{\ell+1}{4}, \frac{\ell+5}{4}, \dots, \frac{3\ell-5}{4}\right\}, \\ B_3 &= \left\{y_i y_{2\ell-i} : i = 0, 1, \dots, \frac{\ell-3}{4}, \frac{3\ell+3}{4}, \frac{3\ell+7}{4}, \dots, \ell-1\right\}, \\ B_4 &= \left\{y_i y_{2\ell-i-1} : i = \frac{\ell+1}{4}, \frac{\ell+5}{4}, \dots, \frac{3\ell-5}{4}\right\}, \\ B_5 &= \left\{x_{\frac{3\ell-1}{4}} y_{\frac{7\ell-1}{4}}, x_\ell y_\ell, x_{\frac{7\ell-1}{4}} y_{\frac{3\ell-1}{4}}\right\}.\end{aligned}$$

فرض کنید $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5$. مشاهده می شود که $\mathcal{X}(B_3)$, $\mathcal{Y}(B_2)$, $\mathcal{Y}(B_1)$ و $\mathcal{X}(B_4)$ تماما تهی می باشند، درحالیکه

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(B_1) = \mathcal{Y}(B_3) &= \left\{0, 1, \dots, \frac{\ell-3}{4}, \frac{3\ell+3}{4}, \frac{3\ell+7}{4}, \dots, \ell-1\right\} \cup \\ &\quad \left\{\ell+1, \ell+2, \dots, \frac{5\ell-3}{4}, \frac{7\ell+3}{4}, \frac{7\ell+7}{4}, \dots, 2\ell\right\},\end{aligned}$$

$$\mathcal{X}(B_2) = \mathcal{Y}(B_4) = \left\{\frac{\ell+1}{4}, \frac{\ell+5}{4}, \dots, \frac{3\ell-5}{4}, \frac{5\ell+1}{4}, \frac{5\ell+5}{4}, \dots, \frac{7\ell-5}{4}\right\},$$

$$\mathcal{X}(B_5) = \mathcal{Y}(B_5) = \left\{\frac{3\ell-1}{4}, \ell, \frac{7\ell-1}{4}\right\}.$$

بنابراین $\mathcal{X}(B) = \mathcal{Y}(B) = \mathbb{Z}_{2\ell+1}$ و B هر رأس از $K_{4\ell+2}$ را دقیقا یک بار پوشش می دهد. در این صورت $F_2 = (V, B)$ یک ۱-عامل از $K_{4\ell+2}$ می باشد. مشاهده می شود که

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(B_1) &= \mathcal{R}(B_3) = \left\{1, 3, \dots, \frac{\ell-1}{2}\right\} \cup \left\{2, 4, \dots, \frac{\ell-3}{2}\right\}, \\ \mathcal{L}(B_2) &= \mathcal{R}(B_4) = \left\{\frac{\ell+5}{2}, \frac{\ell+9}{2}, \dots, \ell-1\right\} \cup \left\{\frac{\ell+3}{2}, \frac{\ell+7}{2}, \dots, \ell\right\}, \\ \mathcal{M}(B_5) &= \{0, \ell, \ell+1\}\end{aligned}$$

درحالیکه مجموعه های $\mathcal{R}(B_5)$ و $\mathcal{L}(B_5)$, $\mathcal{L}(B_4)$, $\mathcal{L}(B_3)$, $\mathcal{R}(B_2)$, $\mathcal{R}(B_1)$ تماما تهی می باشند. بنابراین $F_2 = (V, B)$ یک ۱-عامل از $K_{4\ell+2}$ می باشد که در (۴) صدق می کند. برای $\ell < 7$ ، داریم $\ell = 3$. فرض کنید

$$B = \{x_0x_6, x_1x_4, y_0y_6, y_1y_4, x_2y_5, x_3y_3, x_5y_2\}.$$

به آسانی می توان ثابت کرد که $F_2 = (V, B)$ یک ۱-عامل از K_{15} می باشد که در (۴) صدق می کند.

بنابراین در تمام حالت ها با $\ell > 1$ ، ۱-عامل های F_1 و F_2 ساخته شده اند به طوری که در ویژگی های (۳) و (۴) صدق میکنند.

در پایان فرض کنید که $\ell = 1$. در این صورت

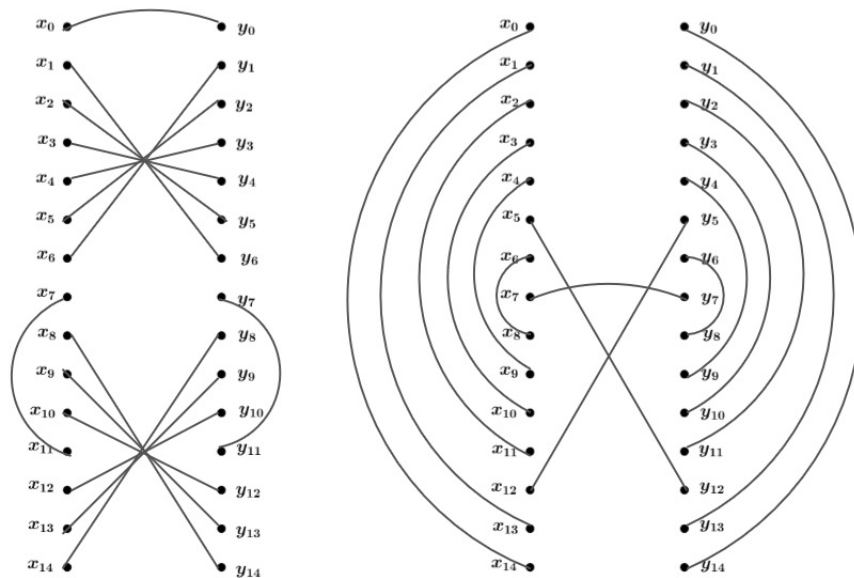
$$\begin{aligned}A &= \{x_0y_0, x_1x_2, y_1y_2\}, \\ B &= \{x_0y_2, x_1y_1, x_2y_0\}.\end{aligned}$$

به آسانی می توان نشان داد که $F_1 = (V, A)$ و $F_2 = (V, B)$ دو ۱-عامل از K_7 می باشند به طوری که

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(A) &= \mathcal{R}(A) = \{1\}, \\ \mathcal{M}(A) &= \{0\}, \\ \mathcal{M}(B) &= \{0, 1, 2\},\end{aligned}$$

در حالیکه $\mathcal{L}(B)$ و $\mathcal{R}(B)$ تهی هستند.

در نتیجه، در تمام حالت‌ها F_1 و F_2 هردو، شامل دقیقاً یک یال همسان از هر طول در L ، و دقیقاً یک یال مرکب از هر تفاضل در $\mathbb{Z}_{2\ell+1}^*$ ، و همچنین هر یک از F_1 و F_2 شامل دقیقاً یک یال مرکب از تفاضل 0 می‌باشند. بنابراین، F_1 و F_2 دو ۱-عامل از $K_{4\ell+2}$ می‌باشند به‌طوری‌که فرضیات لم ۳.۳.۵ برای آنها برقرار می‌باشد. برای مثال، ۱-عامل‌های F_1 و F_2 از K_{30} در شکل ۷.۵ قابل مشاهده است.



شکل ۷.۵: ۱-عامل‌های F_1 و F_2 از K_{30}

□

در لم زیر نشان داده شده است که ساختار استفاده شده در قضیه ۸.۳.۵، نمی‌تواند برای حالت $n \equiv 5 \pmod{8}$ مورد استفاده قرار گیرد.

لم ۴.۳.۵. اگر $n \equiv 5 \pmod{8}$ ، آن‌گاه ۱-عامل‌های F_1 و F_2 از K_{n-1} به‌طوری‌که فرضیات لم ۲.۳.۵ برای آنها برقرار باشد، وجود ندارد.

برهان. فرض کنید $n \equiv 5 \pmod{8}$. آن‌گاه برای عدد صحیح فرد ℓ ، خواهیم داشت $n = 4\ell + 1$. با فرض خلف فرض کنید که ۱-عامل‌های F_1 و F_2 از $K_{4\ell}$ وجود دارند به‌طوری‌که فرضیات لم ۲.۳.۵ برای آنها برقرار است.

برای $i \in \{1, 2\}$ ، پارامترهای زیر را تعریف کنید:

$$\begin{aligned}\varepsilon_i^o &= \left| \left\{ x_j : x_j y_{j+d} \in E(F_i), j, d \in \mathbb{Z}_{2\ell}, j \equiv 1 \pmod{2}, d \equiv 0 \pmod{2} \right\} \right|, \\ \varepsilon_i^e &= \left| \left\{ x_j : x_j y_{j+d} \in E(F_i), j, d \in \mathbb{Z}_{2\ell}, j \equiv 0 \pmod{2}, d \equiv 0 \pmod{2} \right\} \right|, \\ \omega_i^o &= \left| \left\{ x_j : x_j y_{j+d} \in E(F_i), j, d \in \mathbb{Z}_{2\ell}, j \equiv 1 \pmod{2}, d \equiv 1 \pmod{2} \right\} \right|, \\ \lambda_i &= \left| \left\{ x_j x_{j+d} \in E(F_i) : j \in \mathbb{Z}_{2\ell}, d \in L, d \equiv 1 \pmod{2} \right\} \right|, \\ \rho_i &= \left| \left\{ y_j y_{j+d} \in E(F_i) : j \in \mathbb{Z}_{2\ell}, d \in L, d \equiv 1 \pmod{2} \right\} \right|.\end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که چون $\ell \equiv 1 \pmod{2}$ ، تعداد کل یال‌های همسان چپ و همسان راست از طول فرد در $K_{4\ell}$ ، به ترتیب، برابر است با

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 &= \frac{\ell + 1}{2} \\ \rho_1 + \rho_2 &= \frac{\ell + 1}{2}.\end{aligned}\tag{۵}$$

سپس فرض کنید مجموعه A ، مجموعه رأس‌های x_j با j فرد باشد. مشاهده می‌شود که برای هر $i = 1, 2$ داریم $A = A'_i \cup A''_i$ به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}A'_i &= \left\{ x_j : x_j y_{j+d} \in E(F_i), j, d \in \mathbb{Z}_{2\ell}, j \equiv 1 \pmod{2} \right\}, \\ A''_i &= \left\{ x_j : x_j x_{j\pm d} \in E(F_i), j \in \mathbb{Z}_{2\ell}, d \in L, j \equiv 1 \pmod{2} \right\}.\end{aligned}$$

به‌طور مشابه، فرض کنید B مجموعه رأس‌های y_j ، با j زوج باشد. آنگاه برای هر $i = 1, 2$ خواهیم داشت $B = B'_i \cup B''_i$ به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}B'_i &= \left\{ y_j : x_j y_{j+d} \in E(F_i), j, d \in \mathbb{Z}_{2\ell}, j \equiv 0 \pmod{2} \right\}, \\ B''_i &= \left\{ y_j : y_j y_{j\pm d} \in E(F_i), j \in \mathbb{Z}_{2\ell}, d \in L, j \equiv 0 \pmod{2} \right\}.\end{aligned}$$

مشاهده می‌شود که $|A| = |A'_i| + |A''_i|$ و $|B| = |B'_i| + |B''_i|$. همچنین، برای هر $i = 1, 2$ ،

$$\begin{aligned}|A'_i| &= \varepsilon_i^o + \omega_i^o \\ |B'_i| &= \varepsilon_i^e + \omega_i^o.\end{aligned}$$

دقت کنید که تعداد رأس‌های x_j با j فرد، که به‌وسیله یال‌های همسان چپ از طول زوج در F_i ، برای هر $i = 1, 2$ پوشش داده شده است، عددی زوج می‌باشد. بنابراین،

$$|A''_i| \equiv \lambda_i \pmod{2}.$$

به‌طور مشابه، تعداد رأس‌های y_j با j زوج، به‌طوری‌که با یال‌های همسان راست از طول زوج در F_i ، برای هر $i = 1, 2$ پوشش داده شده است، عددی زوج می‌باشد. بنابراین،

$$|B''_i| \equiv \rho_i \pmod{2}.$$

در نتیجه، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 |A'_1| + |A''_1| &\equiv \varepsilon_1^o + \omega_1^o + \lambda_1 \equiv 1 \pmod{2}, \\
 |B'_1| + |B''_1| &\equiv \varepsilon_1^e + \omega_1^o + \rho_1 \equiv 1 \pmod{2}, \\
 |A'_2| + |A''_2| &\equiv \varepsilon_2^o + \omega_2^o + \lambda_2 \equiv 1 \pmod{2}, \\
 |B'_2| + |B''_2| &\equiv \varepsilon_2^e + \omega_2^o + \rho_2 \equiv 1 \pmod{2}.
 \end{aligned} \tag{۶}$$

با جمع کردن معادلات در (۶) و استفاده از (۵)، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\varepsilon_1^o + \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^o + \varepsilon_2^e \equiv 0 \pmod{2}.$$

از طرف دیگر، تعداد یال‌های مرکب از تفاضل زوج در F_1 و F_2 جمعاً برابر است با

$$\varepsilon_1^o + \varepsilon_1^e + \varepsilon_2^o + \varepsilon_2^e = \ell \equiv 1 \pmod{2}$$

که یک تناقض می‌باشد.

□

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Size	اندازه
Leaf	برگ
Maximum degree	بیشترین درجه
Father	پدر
Complexity	پیچیدگی
Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی
Hop Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی جهشی
Hop Roman independent dominating function	تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی
Difference	تفاضل
Decomposition	تجزیه
Cycle Decomposition	تجزیه دوری
Degree	درجه
Hop-degree	درجه جهشی
Tree	درخت
Rooted tree	درخت ریشه‌دار
Cycle	دور
Directed Cycle	دور جهت‌دار
Vertex	رأس
Support degree	رأس پشتیبان
Strong support vertex	رأس پشتیبان قوی
Central vertex	رأس مرکزی
Isolated vertex	رأس منفرد
Root of the tree	ریشه درخت
Subdivision	زیرتقسیم
Subtree	زیردرخت
Induced subgraph	زیرگراف القایی

Spanning Subdigraph	زیرگراف جهت‌دار فراگیر
Star	ستاره
Double star	ستاره دوگانه
Loop	طوقه
Distance	فاصله
Directed 2-Factor	۲-عامل جهت‌دار
Factorization	عامل‌بندی
Domination number	عدد احاطه‌گر
Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی
Hop domination number	عدد احاطه‌گر جهشی
Hop independent domination number	عدد احاطه‌گر مستقل جهشی
Hop Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی جهشی
Hop Roman independent domination number	عدد احاطه‌گر رومی مستقل جهشی
Child	فرزند
Sharp	قابل دستیابی
Diameter	قطر
Arc	کمان
Girth	کمر
Minimum degree	کمترین درجه
Graph	گراف
hop-Roman Graph	گراف جهشی رومی
Digraph	گراف جهت‌دار
Circulant Digraph	گراف جهت‌دار دورانی
Complete Symmetric Digraph	گراف جهت‌دار متقارن کامل
Trivial graph	گراف بدیهی
Regular graph	گراف منظم
Bipartite graph	گراف دو بخشی
Complete bipartite graph	گراف دوبخشی کامل
Complement graph	گراف مکمل
Simple graph	گراف ساده
Complete graph	گراف کامل
Finite graph	گراف متناهی
Planar graph	گراف مسطح
planar bipartite Graph	گراف مسطح دوبخشی

Chordal graph	گراف وتری
planar chordale Graph	گراف وتری مسطح
Connected graph	گراف همبند
Walk	گشت
Adjacent	مجاور
Dominating set	مجموعه احاطه‌گر
Hop dominating set	مجموعه احاطه‌گر جهشی
Hop independent dominating set	مجموعه احاطه‌گر مستقل جهشی
Order	مرتبه
Oberwolfach Problem	مساله اوبروولفاش
Directed Oberwolfach Problem	مساله اوبروولفاش جهت‌دار
Path	مسیر
NP-complete problem	مساله NP -کامل
Open neighborhood	همسایه باز
Closed neighborhood	همسایه بسته
external hop neighborhood	همسایه جهشی بیرونی
Edge	یال
Parallel edge	یال موازی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Arc	کمان
Adjacent	مجاور
Bipartite graph	گراف دو بخشی
Central vertex	رأس مرکزی
Child	فرزند
Chordal graph	گراف وتری
Circulant Digraph	گراف جهت‌دار دورانی
Closed neighborhood	همسایه بسته
Complement graph	گراف مکمل
Complete bipartite graph	گراف دوبخشی کامل
Complete graph	گراف کامل
Complete Symmetric Digraph	گراف جهت‌دار متقارن کامل
Complexity	پیچیدگی
Connected graph	گراف همبند
Cycle	دور
Cycle Decomposition	تجزیه دوری
Degree	درجه
Decomposition	تجزیه
Diameter	قطر
Digraph	گراف جهت‌دار
Difference	تفاضل
Directed Cycle	دور جهت‌دار
Directed 2-Factor	۲-عامل جهت‌دار
Directed Oberwolfach Problem	مساله اوبروولفاش جهت‌دار
Distance	فاصله
Dominating set	مجموعه احاطه‌گر

Domination number	عدد احاطه‌گر
Double star	ستاره دوگانه
Edge	یال
external hop neighborhood	همسایه جهشی بیرونی
Father	پدر
Factorization	عامل‌بندی
Finite graph	گراف متناهی
Girth	کمر
Graph	گراف
Hop-degree	درجه جهشی
Hop dominating set	مجموعه احاطه‌گر جهشی
Hop domination number	عدد احاطه‌گر جهشی
Hop independent domination number	عدد احاطه‌گر مستقل جهشی
Hop independent dominating set	مجموعه احاطه‌گر مستقل جهشی
Hop Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی جهشی
Hop Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی جهشی
hop-Roman Graph	گراف جهشی رومی
Hop Roman independent dominating function	تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی
Hop Roman independent domination number	عدد احاطه‌گر مستقل رومی جهشی
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Isolated vertex	رأس منفرد
Leaf	برگ
Loop	طوقه
Maximum degree	بیشترین درجه
Minimum degree	کمترین درجه
NP-complete problem	مسأله NP -کامل
Oberwolfach Problem	مسأله اوبروولفاش
Open neighborhood	همسایه باز
Order	مرتبه
Parallel edge	یال موازی
Path	مسیر
planar bipartite Graph	گراف مسطح دوبخشی
planar chordale Graph	گراف وتری مسطح
Planar graph	گراف مسطح

Regular graph	گراف منظم
Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی
Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی
Rooted tree	درخت ریشه‌دار
Root of the tree	ریشه درخت
Sharp	قابل دستیابی
Simple graph	گراف ساده
Size	اندازه
Spanning Subdigraph	زیرگراف جهت‌دار فراگیر
Star	ستاره
Strong support vertex	رأس پشتیبان قوی
Subdivision	زیرتقسیم
Subtree	زیردرخت
Support degree	رأس پشتیبان
Tree	درخت
Trivial graph	گراف بدیهی
Vertex	رأس
Walk	گشت

مراجع

- [1] P. Adams and D. Bryant, Resolvable directed cycle systems of all indices for cycle length 3 and 4; *Unpublished*.
- [2] P. Adams and D. Bryant, Two-factorisations of complete graphs of orders fifteen and seventeen, *Australas. J. Combin.*, **35** (2006), 113-118.
- [3] B. Alspach and R. Häggkvist, Some observations on the Oberwolfach problem, *J. Graph Theory*, **9** (1985), 177-187.
- [4] B. Alspach, P. J. Schellenberg, D. R. Stinson and D. Wagner, The Oberwolfach problem and factors of uniform odd length cycles, *J. Combin. Theory Ser. A*, **52** (1989), 20-43.
- [5] S. K. Ayyaswamy, B. Krishnakumari, C. Natarajan and Y. B. Venkatakrisnan, Bounds on the hop domination number of a tree, *Proc. Math. Sci.*, **125** (2015), 449-455.
- [6] S. K. Ayyaswamy and C. Natarajan, Hop domination in graphs, *Manuscript*.
- [7] F. E. Bennett and X. Zhang, Resolvable Mendelsohn designs with block size 4, *Aequ. Math.*, **40** (1990), 248-260.
- [8] J.-C. Bermond, A. Germa and D. Sotteau, Resolvable decomposition of K_n^* , *J. Combin. Theory Ser. A*, **26** (1979), 179-185.
- [9] J. Bondy and U. Murty, *Graph Theory with Applications*, Elsevier, North-Holland, 1976.
- [10] D. Bryant and P. Danziger, On bipartite 2-factorizations of $K_n - I$ and the Oberwolfach problem, *J. Graph Theory*, **68** (2011), 22-37.

-
- [11] A. Burgess, N. Francetić and M. Šajna. On the directed Oberwolfach problem with equal cycle lengths: the odd case, *Australas. J. Combin.*, **71** (2018), 272-292.
 - [12] A. Burgess and M. Šajna, On the directed Oberwolfach problem with equal cycle lengths, *Electron. J. Combin.*, **21** (2014), 1-15.
 - [13] E. W. Chambers, B. Kinnarsley, N. Prince and D. B. West, *Extremal problems for Roman domination*, *SIAM J. Discrete Math.*, **23** (2009), 1575-1586.
 - [14] E. J. Cockayne, P. M. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi and S. T. Hedetniemi, On Roman domination in graphs, *Discrete Math.*, **278** (2004), 11-22.
 - [15] E. J. Cockayne, P. J. P. Grobler, W. R. Grundlingh, J. Munganga and J. H. van Vuuren, Protection of a graph, *Util. Math.*, **67** (2005), 19-32.
 - [16] S. A. Cook. The complexity of theorem-proving procedures, *In Proceedings of the third annual ACM symposium on theory of computing*, (1971), 151-158.
 - [17] A. Deza, F. Franek, W. Hua, M. Meszka and A. Rosa, Solutions to the Oberwolfach problem for orders 18 to 40, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, **74** (2010), 95-102.
 - [18] M. R. Garey and D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-completeness*, Freeman, New York, 1979.
 - [19] A. Hansberg and L. Volkmann, Upper bounds on the k -domination number and k -Roman-domination number, *Discrete Appl. Math.*, **157** (2009), 1634-1639.
 - [20] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, New York, 1998.
 - [21] M. A. Henning and N. Jarfari Rad, On 2-Step and Hop dominating sets in graphs, *Graphs Combin.*, **33** (2017), 913-927.
 - [22] D. G. Hoffman and P. J. Schellenberg, The existence of C_k -factorizations of $K_{2n} - F$, *Discrete Math.*, **97** (1991), 243-250.
 - [23] R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, *Complexity of Computer Computations*, **40** (1972), 85-103.
 - [24] C. Natarajan and S. K. Ayyaswamy, Hop domination in graphs-II, *An. Stt. Univ. Ovidius Constanta*, **23** (2015), 187-199.

- [25] R. Pushpam and P. Sampath, Restrained Roman domination in graphs, *Trans. Comb.*, **4** (2015), 1-17.
- [26] D. K. Ray-Chudhuri and M. Wilson, The existence of resolvable block designs, *A Survey of Combinatorial Theory*, (1973), 361-375.
- [27] C. S. ReVelle and K. E. Rosing, Defendens imperium Romanum: A classical problem in military strategy, *Amer. Math. Monthly*, **107** (2000), 585-594.
- [28] W. W. Rouse Ball, *Mathematical recreation and problems of past and present times*, Macmillan and Company, (1892).
- [29] E. Shabani, N. Jafari Rad and A. Poureidi, Hop Roman domination in graphs, *Unpublished*.
- [30] E. Shabani and M. Šajna, On the directed Oberwolfach problem with variable cycle lengths, <https://arxiv.org/abs/2009.08731>, (2020).
- [31] X. Song and X. Wang, Roman domination number and domination number of a tree, *Chinese Quart. J. Math.*, **21** (2006) 358-367.
- [32] I. Stewart, Defend the roman empire!, *Sci. Amer.*, **281** (1999), 136-139.
- [33] T. Traetta, A complete solution to the two-table Oberwolfach problems, *J. Combin. Theory Ser. A*, **120** (2013), 984-997.
- [34] H. M. Xing, X. Chen and X. G. Chen, A note on Roman domination in graphs, *Discrete Math.*, **306** (2006), 3338-3340.

نمایه

- S -همسایه جهشی بیرونی، ۴۶
- $\gamma(G)$ -مجموعه، ۵
- الگوریتم زمانی چندجمله‌ای، ۱۰
- تابع احاطه‌گر رومی، ۶
- تابع احاطه‌گر رومی جهشی، ۶
- تابع احاطه‌گر مستقل رومی جهشی، ۶
- تجزیه، ۵۸
- تجزیه دوری، ۵۸
- تفاضل، ۵۸
- مسأله NP -کامل، ۱۰
- پشتیبان قوی، ۲
- احاطه‌گری، ۴
- اندازه، ۱
- برگ، ۲
- درجه، ۲
- درجه جهشی، ۲
- درخت، ۴
- درخت ریشه‌دار، ۴
- دور، ۳
- دور جهت‌دار، ۵۸
- رأس، ۱
- رأس آویزان، ۲
- رأس منفرد، ۲
- رأس پشتیبان، ۲
- ریشه درخت، ۴
- زیر تقسیم، ۲
- زیرگراف القابی، ۲
- زیرگراف جهت‌دار فراگیر، ۵۸
- زیرگراف جهت‌دار متقارن کامل، ۵۸
- زیردرخت، ۴
- ستاره مضاعف، ۴
- صدق پذیری، ۱۰
- طوقه، ۲
- ۲-عامل جهت‌دار، ۵۸
- عامل بندی، ۵۸
- عدد احاطه‌گری، ۵
- عدد احاطه‌گری جهشی، ۵
- عدد احاطه‌گری رومی، ۶
- عدد احاطه‌گری رومی جهشی، ۶
- عدد احاطه‌گری مستقل جهشی، ۵
- عدد احاطه‌گری مستقل رومی جهشی، ۶
- فاصله، ۳
- فرزند، ۴
- قطر، ۳
- ماکسیمم درجه، ۲
- مجموعه احاطه‌گر، ۵
- مجموعه احاطه‌گر جهشی، ۵
- مجموعه احاطه‌گری مستقل جهشی، ۵
- مرتبه، ۱
- مسأله NP -سخت، ۱۰
- مساله اوبروولفاش، ۵۹
- مساله اوبروولفاش جهت‌دار، ۵۹

- مسیر، ۳
- مینیمم درجه، ۲
- همسایگی باز، ۲
- همسایگی بسته، ۲
- پدر، ۴
- کاهش، ۱۰
- کمان، ۵۸
- کمر، ۳
- گراف، ۱
- گراف وتری، ۳
- گراف جهشی رومی، ۲۷
- گراف جهت دار، ۵۷
- گراف جهت دار دورانی، ۵۸
- گراف دوبخشی سطح، ۳
- گراف دوبخشی، ۳
- گراف دوبخشی کامل، ۳
- گراف ساده، ۲
- گراف غیربدیهی، ۲
- گراف متناهی، ۲
- گراف سطح، ۳
- گراف منتظم، ۳
- گراف مکمل، ۲
- گراف همبند، ۳
- گراف وتری سطح، ۳
- گراف کامل، ۲
- گشت، ۳
- یال، ۱
- یال های موازی، ۲

Abstract

A subset S of vertices of a graph G is a hop dominating set (HDS) if every vertex outside S is at distance two from a vertex of S . A subset S of vertices of a graph G is a hop independent dominating set if S is a HDS and for any pair $v, w \in S$, $d(v, w) \neq 2$. The hop domination number of G , $\gamma_h(G)$, is the minimum cardinality of a hop dominating set of G . The hop independent domination number of G is the minimum cardinality of a hop independent dominating set of G . A hop Roman dominating function (HRDF) is a function $f : V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ having the property that for every vertex $v \in V$ with $f(v) = 0$ there is a vertex u with $f(u) = 2$ and $d(u, v) = 2$. The weight of a HRDF f is the sum $f(V) = \sum_{v \in V} f(v)$. The minimum weight of a HRDF on G is called the hop Roman domination number of G and is denoted by $\gamma_{hR}(G)$. For a HRDF f in a graph G , we denote by V_i^f the set of all vertices of G with label i under f . Thus a HRDF f can be represented by a triple (V_0^f, V_1^f, V_2^f) . A HRDF $f = (V_0^f, V_1^f, V_2^f)$ is a hop Roman independent dominating function (HRIDF) if for any pair $v, w \in V_1^f \cup V_2^f$, $d(v, w) \neq 2$. In this thesis, we study the complexity of hop independent dominating problem, the hop Roman domination function problem and hop Roman independent domination function problem, and show that decision problem for each of the above three problems is NP-complete even when restricted to planar bipartite graphs or planar chordal graphs. Also, we characterize all graphs G of order n with $\gamma_{hR}(G) = n$ or $\gamma_{hR}(G) = n - 1$. Finally, we characterize all trees T for which $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 1$ or $\gamma_{hR}(T) = \gamma_h(T) + 2$.

Keywords:

hop dominating set, hop Roman dominating function, graph, tree.



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Applied Mathematics-Graph Theory

Some functional versions of hop domination in graphs

By: Elaheh Shabani

Supervisor:
Nader Jafari Rad

Advisors:
Dr. Abdollah Alhevaz
Dr. Abolfazl Poureidi

February 2021