

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد بهینه سازی

حل مسائل برنامه ریزی کسری خطی تماما فازی با استفاده از برنامه ریزی خطی چند هدفه

نگارنده: الهام مهدی زاده

استادان راهنما

دکتر مهرداد غزنوی
دکتر نعمت الله تقی نژاد

بهمن ۱۳۹۹

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم الهام مهدی زاده با شماره دانشجویی ۹۷۱۵۹۳۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش بهینه سازی تحت عنوان حل مسائل برنامه ریزی کسری خطی تماماً فازی با استفاده از برنامه ریزی خطی چندهدفه که در تاریخ ۱۳۹۹/۱۱/۲۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☐ الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹ ☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۸			
☐ ج) درجه خوب: نمره ۱۷/۹۹-۱۶ ☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۵/۹۹-۱۴			
☐ ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد			
نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی			
عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر مهرداد غزنوی	دانشیار	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر نعمت الله تقی نژاد	استادیار	
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سمیه مفاری	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر جعفر فتحعلی	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر محمدهادی نوری اسکندری	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



مادر مهربانم
ای شوق زیبای نفس کشیدنم
ای روح مهربان هستی‌ام
ای رنگ شادی‌هایم
عمری خستگی‌ها را به جان خریدی
اکنون این شادی تقدیم تو باد.

سپاس‌گزاری...

پروردگارا شکرگزارم که یک بار دیگر چشمانم زیبایی دیگر از دنیایت را دید
خداوندا شکرگزارم که یک بار دیگر فرصت پیشرفت را به من عطا کردی.
با سپاس فراوان، تشکر و قدردانی از استاد گرامی جناب دکتر مهرداد غزنوی برای
حمایت‌ها و زحمات‌شان و استاد گرانقدر جناب دکتر نعمت‌الله تقی‌نژاد که با صبر و
حوصله و کمک‌های بی‌دریغ و تلاش فراوان زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را برعهده
گرفتند.

الهام مهدی‌زاده

بهمن ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب الهام مهدی زاده دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **حل مسائل برنامه ریزی کسری خطی تماماً فازی با استفاده از برنامه ریزی خطی چند هدفه**، تحت راهنمایی مهرداد غزنوی و نعمت الله تقی نژاد متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

الهام مهدی زاده

بهمن ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در بسیاری از مسائل بهینه‌سازی نسبت اهداف از بهینه‌سازی هر هدف به تنهایی دید و بینش بهتری ارائه می‌دهد یا شرایط مساله به گونه‌ای است که باید نسبت اهداف بهینه شود. یکی از ابزارهای کارا و متداول در مواجهه با این مسائل بکارگیری برنامه‌ریزی کسری خطی است، اما از آنجایی که مقادیر مشاهده شده در جهان واقعی به دلیل اطلاعات ناقص یا غیرقابل دستیابی نادقیق و مبهم می‌باشند، یک روش کارا برای نمایش مقادیر نادقیق و مبهم استفاده از اعداد فازی است و بدین ترتیب یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی فازی به وجود می‌آید. در چند دهه‌ی اخیر محققین و پژوهشگران زیادی تحقیقات خود را صرف ایجاد روش‌های جدید و کارا برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی کردند. در این پایان‌نامه ابتدا شرح برنامه‌ریزی فازی را ارائه خواهیم داد، و در ادامه به بررسی برنامه‌ریزی کسری فازی خواهیم پرداخت و سپس دو روش جدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با در نظر گرفتن اعداد فازی دوزنقه‌ای بیان خواهیم کرد. روش اول، حل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با اعداد دوزنقه‌ای با قیود نامساوی است که ابتدا به برنامه‌ریزی خطی چندهدفه تبدیل و سپس با روش الفبایی حل می‌شود. روش دوم، حل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با اعداد دوزنقه‌ای با در نظر گرفتن متغیر کمکی و تبدیل قیود نامساوی به قیود مساوی است در نهایت با ارائه مثال‌هایی روش‌های پیشنهادی را با روش‌های حل دیگر مقایسه خواهیم کرد و مطلوبیت روش‌ها را می‌سنجیم.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی فازی، برنامه‌ریزی کسری، برنامه‌ریزی کسری تماماً فازی، برنامه‌ریزی خطی چندهدفه، اعداد فازی دوزنقه‌ای، جواب بهینه، روش الفبایی.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. مقاله اول

۲. مقاله دوم

۳. مقاله سوم

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر	
ق	فهرست جداول	
۱	۱ نظریه مجموعه‌های فازی	
۱	۱.۱ منطق فازی	
۳	۲.۱ کاربردهای منطق فازی	
۴	۳.۱ تعاریف پایه‌ای	
۶	۱.۳.۱ اعداد فازی	
۸	۴.۱ حساب فازی	
۹	۱.۴.۱ عملیات پیشنهادی توسط چن و چن	
۹	۵.۱ روش الفبایی	
۱۰	۶.۱ رتبه‌بندی اعداد فازی	
۱۱	۱.۶.۱ روش مقایسه‌ی یاگر	
۱۲	۲.۶.۱ روش مقایسه‌ی ابراهیم‌نژاد	
۱۲	۳.۶.۱ روش مقایسه‌ی داس و همکاران	
۱۲	۴.۶.۱ روش مقایسه‌ی ریماک	
۱۳	۵.۶.۱ روش مقایسه‌ی داس	
۱۵	۲ برنامه‌ریزی خطی فازی	
۱۵	۱.۲ مقدمه	
۱۹	۲.۲ روش حل FFLP	
۲۰	۳.۲ مثال عددی	
۲۵	۳ برنامه‌ریزی کسری	
۲۵	۱.۳ برنامه‌ریزی کسری خطی	
۲۵	۱.۱.۳ مقدمه	

۲۹	۲.۱.۳	مدل برنامه‌ریزی کسری خطی
۳۱	۳.۱.۳	مثال عددی
۳۳	۲.۳	برنامه‌ریزی کسری فازی
۳۳	۱.۲.۳	مقدمه
۳۶	۲.۲.۳	روش حل
۳۹	۳.۲.۳	مثال عددی
۴۵	۴	روش‌های جدید برای حل برنامه‌ریزی کسری فازی
۴۶	۱.۴	شرح روش اول
۵۰	۲.۴	مثال عددی:
۵۷	۳.۴	شرح روش دوم
۶۱	۴.۴	مثال عددی:
۶۹	۵	نتیجه‌گیری
۷۱		مراجع

فهرست تصاویر

۱.۱	عدد فازی LR غیرنرمال	۷
-----	------------------------	---

فهرست جداول

۲۱		داده‌های مساله‌ی ترکیب تولید	۱.۲
۳۲		ضرایب فنی	۱.۳
۳۲		مقادیر حاصل از برنامه‌ریزی کسری	۲.۳
۴۲		تامین گیاهان	۳.۳
۴۲		تقاضای مقصد	۴.۳
۴۳		تقاضای مقصد	۵.۳
۴۳		هزینه حمل‌ونقل	۶.۳
۵۴		فرآورده‌های لبنی	۱.۴
۵۴		تقاضای مقصد	۲.۴
۵۴		تقاضای محصولات مقصد	۳.۴
۵۵		هزینه حمل‌ونقل	۴.۴

فصل ۱

نظریه مجموعه‌های فازی

۱.۱ منطق فازی

منطق فازی، نخستین بار بطور مکتوب توسط پرفسور لطفی‌زاده^۱ در مقاله‌ای با عنوان “مجموعه‌های فازی” در سال ۱۹۶۵ معرفی شد، که بطور جدی در مقابل منطق دودویی ارسطویی قرار گرفت. وی در این مقاله چیزی را که برتراند راسل^۲، جان لو کاسیه ویچ^۳، ماکس بلک^۴ و دیگران آن را ابهام یا چند ارزشی نامیده بودند، “فازی” نامید [۱۲۴]. هدف اولیه وی در آن زمان، توسعه مدلی کارآمدتر برای توصیف فرآیند پردازش زبان‌های طبیعی بود. او مفاهیم و اصطلاحاتی همچون مجموعه‌های فازی، رویدادهای فازی، اعداد فازی و فازی‌سازی را وارد علوم ریاضی و مهندسی کرد.

منطق فازی در واقع شکل تکامل یافته و عمومی شده منطق کلاسیک است. منطق فازی چند ارزشی است یعنی ارزش درستی هر گزاره می‌تواند عددی بین صفر و یک باشد. لذا قضاوت تقریبی و نادقیق با بکارگیری منطق فازی ممکن می‌شود و به‌طور کلی، مهمترین مزیت منطق فازی کاربرد آن در بیان عقاید و نظرات مبهم است. به این جمله دقت کنید: “این ماشین خوب است.” هیچ قاعده‌ای برای خوب بودن ماشین بیان نشده تا آن را اندازه بگیریم بلکه این

¹Zadeh

²Bertrand Russell

³Lucasie Wttch

⁴Max Black

تنها یک عبارت بیانی و ناشی از احساس است. ما در زندگی روزمره به وفور از این جملات استفاده می‌کنیم. کاربرد این منطق در مسائل تصمیم‌گیری بسیار حائز اهمیت است و در مباحث کیفی بسیار کاراتر از ابزارهای معمولی ریاضیات است.

مسائل دنیای واقعی معمولاً ساختار پیچیده‌ای دارند که به دلیل وجود ابهام و عدم قطعیت در تعریف و درک آنها است. از زمانی که انسان توانست فکر کند همواره با ابهام در مسائل مختلف اجتماعی، تکنیکی و اقتصادی مواجه بوده است. حتی اختراع کامپیوتر و توسعه کاربردی آن در تحلیل دنیای واقعی نیز نتوانست مشکل ابهام و عدم قطعیت را حل کند.

در بیان و تحلیل کامل یک مسئله نیاز به اطلاعات کافی و دقیق است، حال اگر به دلایل مختلف اطلاعات کافی و دقیق در دسترس نباشد چه باید کرد؟ پاسخ این سوال بهره‌گیری از ظرفیت استدلال تقریبی انسان است؛ قابلیتی که کامپیوتر از آن بی‌بهره است. انسان علی‌رغم اطلاعات نادقیق و ناکافی در مواجهه با مسائل پیچیده دنیای واقعی، رفتار و ماهیت سیستم را به طور تقریبی درک و تحلیل می‌کند.

حال سوال اصلی این است: آیا راهی وجود دارد که کامپیوتر نیز همانند انسان بتواند به طور تقریبی مسائل را با اطلاعات نادقیق و ناکافی درک و تحلیل نماید؟ برای پاسخ به این سوال، باید به اصل ناسازگاری پروفیسور لطفی زاده که در سال ۱۹۷۳ مطرح گردید؛ توجه کرد: هر چه میزان آگاهی از یک سیستم افزایش یابد پیچیدگی سیستم کاهش یافته و دقت درک و تحلیل سیستم کاهش یابد، دقت روش مدل‌سازی افزایش یافته و لذا ابزار مفیدی برای تحلیل سیستم مهیا می‌شود.

برای سیستم‌هایی که پیچیدگی آنها کم و عدم قطعیت نیز ناچیز است می‌توان با استفاده از معادلات ریاضی ماهیت و رفتار سیستم را به طور دقیق مدل‌سازی و تحلیل کرد. برای سیستم‌هایی که پیچیدگی آنها کمی بیشتر است و عدم قطعیت نیز نسبتاً زیاد است دیگر نمی‌توان تحلیل قطعی و دقیقی از سیستم داشت. در این سیستم‌ها امکان استفاده از روش‌های ابتکاری مدرن مانند شبکه عصبی و هوش مصنوعی وجود دارد. در شبکه‌های عصبی بدلیل قابلیت یادگیری سیستم، عدم قطعیت به مرور کاهش یافته و قابلیت تحلیل موثر سیستم افزایش می‌یابد.

سرانجام برای سیستم‌هایی با پیچیدگی بالا و عدم قطعیت زیاد که اطلاعات کافی و دقیقی نیز در دسترس نیست رویکرد استدلال تقریبی فازی مطرح می‌شود که به سیستم‌های فازی معروف هستند. ورودی سیستم‌های فازی می‌توانند اطلاعات نادقیق (فازی) باشند و پردازش‌های سیستم نیز با بهره‌گیری از استدلال تقریبی و به طور فازی انجام می‌شوند.

نظریه احتمال برای پیش‌بینی نتیجه یک رویداد تصادفی در آینده به کار می‌رود. رویدادی که در آینده قرار است اتفاق بیفتد و نتیجه آن در حال حاضر مشخص نیست. در واقع نظریه احتمال به رویدادهای تصادفی مرتبط است. این در حالی است که فازی به ”بی‌دقتی“ و مفاهیم نادقیق که در زبان طبیعی به کار می‌روند مرتبط است و همیشه با یک رویداد همراه نیست. در واقع نظریه فازی، عدم قطعیت غیرتصادفی را پشتیبانی می‌کند.

در برخی از مواقع عدم قطعیت هر دو مورد احتمالی و فازی را شامل می‌شود. به عنوان مثال به این جمله، "فردا با احتمال زیاد هوا کمی تا قسمتی بارانی خواهد بود" توجه نمایید. در این جمله عبارت "کمی تا قسمتی" ناشی از عدم دقت است. در حالی که "احتمال" شانس وقوع حالت مورد نظر را پیش‌بینی می‌کند. البته عبارت "احتمال زیاد" نیز نادقیق بوده و مفهوم فازی را دارد زیرا دقیقا مشخص نیست که "احتمال زیاد" چه دامنه‌ای از احتمال را دربر می‌گیرد.

موارد بسیار زیادی وجود دارد که برای مدل‌سازی آنها ناگزیر مفاهیم احتمالی و فازی بطور توأم وارد مدل می‌شوند و اخیرا یکی از زمینه‌های تحقیقاتی و کاربردی مطرح ترکیب این مفاهیم در مدل‌سازی و تحلیل است. با این مقدمه کوتاه می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد: جایکه پیچیدگی سیستم در حدی است که نمی‌توان با دقت و صراحت در مورد پارامترها، مشخصه‌ها و رفتار سیستم قضاوت کرد، مفهوم فازی جهت مدل‌سازی و تحلیل مطرح می‌شود.

ریاضیات فازی:

شامل مجموعه‌های فازی و عملیات ریاضی مرتبط با آنها است. در مجموعه‌های کلاسیک، حد و مرز مجموعه به طور دقیق و قطعی تعریف می‌شود و در نتیجه عضویت عناصر در مجموعه نیز به طور قطعی مشخص می‌شود. در مجموعه‌های کلاسیک، یک عنصر یا قطعا عضو مجموعه هست یا قطعا عضو مجموعه نیست. اما موارد بسیاری در عمل وجود دارد که تعریف حد و مرز دقیق و قطعی برای مجموعه امکان‌پذیر نیست. به عنوان مثال برای مجموعه افراد چاق نمی‌توان حد و مرز مشخصی تعریف کرد، زیرا بطور دقیق نمی‌توان بر چاق بودن و یا نبودن یک شخص قضاوت کرد. لذا نیاز به مجموعه‌ای داریم که محدوده آن منعطف و بطور تقریبی (نادقیق) تعریف شود. به این نوع مجموعه، مجموعه فازی گفته می‌شود. عضویت عناصر در مجموعه‌های فازی نیز با درجه عضویت که عددی بین صفر و یک است، بیان می‌شود.

۲.۱ کاربردهای منطق فازی

عدم قطعیت موجود در داده‌ها و شرایط مساله، تصمیم‌گیری و انتخاب بهترین گزینه را بسیار سخت می‌کند. در طی فرآیند تصمیم‌گیری، تصمیم‌گیرنده معمولا با شرایط شک و تردید و عدم اطمینان مواجه است [۹]. در طول ۴۰ سال گذشته شاهد رشد و پذیرش نظریه‌های مختلف برای نشان دادن عدم قطعیت بوده‌ایم. نظریه فازی قادر است بسیاری از مفاهیم، متغیرها و سیستم‌هایی که نادقیق و مبهم هستند، به شکل ریاضی درآورد و زمینه را برای استدلال، استنتاج، کنترل و تصمیم‌گیری در شرایط عدم اطمینان فراهم آورد [۳]. این نظریه کاربرد وسیعی در دامنه مسائلی همچون: فرآیند کنترل، پردازش تصویر، الگو تشخیص و دسته‌بندی، ریاضیات کاربردی، تحقیق در عملیات، مدیریت، اقتصاد و تصمیم‌گیری دارد. پیش‌قدمی ژاپنی‌ها در بکارگیری منطق فازی در سیستم کنترل از جمله در تجهیزات صنعتی، مترو، لوازم خانگی و غیره نقش مهمی در جلب توجه جهانیان و به ویژه متخصصان و مهندسان

غربی به کارآیی و اثربخشی این نظریه داشت. در ادامه این فصل به معرفی تعاریف مقدماتی مجموعه‌ها، اعداد، حساب، فاصله و رابطه فازی می‌پردازیم. در فصل دوم، برنامه‌ریزی خطی فازی و یک روش حل موجود را با ارائه مثال مورد بررسی قرار می‌دهیم. در فصل سوم، به شرح برنامه‌ریزی کسری و روش حل برای آن می‌پردازیم و در ادامه به بررسی برنامه‌ریزی کسری فازی و شرح روشی برای حل آن با بیان مثال می‌پردازیم. در فصل چهارم، دو روش جدید برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی با اعداد فازی دوزنقه‌ای ارائه می‌شود که با بیان مثال و مقایسه با روش‌های قبلی به کارامدی روش‌های جدید پرداخته می‌شود. در فصل پنجم، جمع‌بندی پایان‌نامه و پیشنهاد کارهای آتی ارائه می‌شود.

۳.۱ تعاریف پایه‌ای

در نظریه مجموعه‌های کلاسیک، یک عنصر، عضو یک مجموعه هست یا نیست. در حقیقت عضویت عناصر از یک الگوی صفر و یک و دودویی تبعیت می‌کند. اما نظریه مجموعه‌های فازی این مفهوم را بسط می‌دهد و عضویت درجه‌بندی شده را مطرح می‌کند. به این ترتیب، یک عنصر می‌تواند تا درجاتی عضو یک مجموعه باشد. در ادامه به ارائه تعاریف مقدماتی نظریه مجموعه‌های فازی خواهیم پرداخت [۸].

تعریف ۱.۳.۱. (مجموعه‌های فازی): اگر X مجموعه مرجع باشد در این صورت مجموعه فازی $\tilde{A}$ در X یک مجموعه از زوج‌های مرتب است بطوریکه:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\} \quad (1.1)$$

که در آن $\mu_{\tilde{A}}(x)$ تابع عضویت^۱ یا درجه عضویت^۲ x در X می‌باشد که مقداری بین صفر و یک است.

تعریف ۲.۳.۱. (کمیت فازی): اگر X مجموعه اعداد حقیقی باشد. $\tilde{A}$ را کمیت فازی می‌نامیم.

نکته: نمادگذاری‌های پیرامون مفاهیم نظریه مجموعه فازی استاندارد نیستند و بعضاً بسیار متفاوت می‌باشند. یک مجموعه فازی به‌طور معمول توسط یک علامت مد بر بالای اسم مجموعه، مانند $\tilde{A}$ مشخص می‌شود. در حالی که در مقالات جدید علامت مد حذف می‌شود. در ادامه تا جایی که سبب ابهام نشود، به منظور سادگی از همان علامت A برای نمایش مجموعه فازی $\tilde{A}$ استفاده خواهیم کرد.

¹Membership function

²Grade of membership

تعریف ۳.۳.۱. (مجموعه‌ی تکیه‌گاه): مجموعه‌ی تکیه‌گاه^۱ (پشتیبان یا محمل) مجموعه‌ی فازی A که با $s(A)$ یا $\sup(A)$ نشان داده می‌شود عبارت است از مجموعه‌ی تمام عناصری از A که درجه عضویت آن بزرگتر از صفر است. یعنی:

$$S(A) = \sup(A) = \{x \in X | \mu_A(x) > 0\} \quad (2.1)$$

تعریف ۴.۳.۱. (ارتفاع مجموعه‌ی فازی): ارتفاع^۲ مجموعه فازی برابر حداکثر درجه عضویت عناصر آن مجموعه است، یعنی:

$$hgt(A) = h(A) = \max \mu_A(x) \quad (3.1)$$

تعریف ۵.۳.۱. (مجموعه‌ی فازی نرمال): یک مجموعه‌ی فازی را نرمال^۳ می‌نامند اگر درجه عضویت حداقل یکی از اعضا آن برابر یک باشد. به بیان دیگر:

$$\exists x_0 \in X \quad s.t. \quad \mu_A(x_0) = 1 \quad (4.1)$$

در غیراین صورت مجموعه فازی غیرنرمال^۴ است.

تعریف ۶.۳.۱. (هسته‌ی مجموعه‌ی فازی): هسته^۵ مجموعه‌ی فازی A عبارت است از زیرمجموعه‌ای از X که درجه عضویت عناصر آن در A برابر یک است و با نماد $core(A)$ یا $kernel(A)$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر:

$$core(A) = \{x \in X | \mu_A(x) = 1\} \quad (5.1)$$

تعریف ۷.۳.۱. (مرکز مجموعه فازی): مقدار میانگین نقاط هسته را مرکز^۶ یک مجموعه‌ی فازی می‌گویند.

تعریف ۸.۳.۱. (α -برش مجموعه فازی): α -برش^۷ یا α -سطح^۸ یک مجموعه فازی، مجموعه قطعی از X است که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه‌ی فازی بزرگتر یا مساوی α باشد. یعنی:

$$A_\alpha = A^\alpha = \{x \in X | \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (6.1)$$

تعریف ۹.۳.۱. (مجموعه‌ی فازی محدب): مجموعه‌ی فازی A محدب^۹ است اگر:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}; x_1, x_2 \in X, \lambda \in [0, 1] \quad (7.1)$$

به عبارت دیگر، یک مجموعه‌ی فازی محدب است اگر هر α -برش آن محدب باشد.

¹Support

²Height

³Normal

⁴Non-normal

⁵Core or Kernel

⁶Center or mode

⁷ α -Cut

⁸ α -Level

⁹Convex

۱.۳.۱ اعداد فازی

کاربرد اعداد فازی در عمل برای بیان کمی تقریب است. اعداد فازی در مدل‌سازی و تحلیل کنترل فازی، تصمیم‌گیری فازی، استدلال تقریبی، بهینه‌سازی، آمار و احتمالات تقریبی نقش بسیار مهمی دارند. تعاریف متفاوتی برای اعداد فازی ارائه شده که مهم‌ترین دلیل آن، ویژگی‌ها و خواصی است که از آن‌ها در کاربردهای مختلف نتیجه می‌شود. در ادامه سعی داریم تعاریف معادل و پرکاربرد اعداد فازی را مرور کنیم.

تعریف ۱۰.۳.۱ (عدد فازی): اگر یک مجموعه فازی حداقل سه شرط زیر را داشته باشد، یک عدد فازی است.

۱. نرمال باشد

۲. محدب باشد

۳. دارای تکیه‌گاه کراندار باشد.

تعریف ۱۱.۳.۱ (عدد فازی غیرنرمال یا تعمیم یافته): اگر یک مجموعه‌ی فازی نرمال نباشد ولی دیگر شرایط اعداد فازی را داشته باشد، یک عدد فازی غیرنرمال یا تعمیم یافته نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۳.۱ (تعریف عدد فازی غیرنرمال مبتنی بر تابع عضویت): [۱۸] مجموعه فازی A با تابع عضویت $f_A(x)$ یک عدد فازی غیرنرمال است هرگاه داشته باشیم:

$$f_A(x) = \begin{cases} f_A^L(x), & a \leq x \leq b, \\ w_A, & b \leq x \leq c, \\ f_A^R(x), & c \leq x \leq d, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (۸.۱)$$

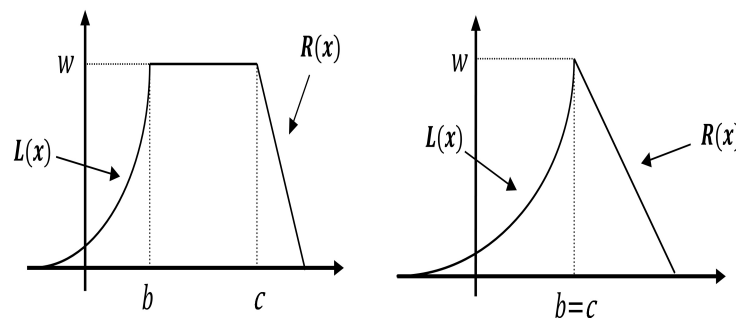
که در آن $0 \leq w_A \leq 1$ عددی ثابت، $-\infty < a \leq b \leq c \leq d < +\infty$ اعداد حقیقی و به $f_A^R(x)$ گستره^۱ یا پهنای راست و به $f_A^L(x)$ گستره یا پهنای چپ عدد فازی A گفته می‌شود. توابع $f_A^L(x) : [a, b] \rightarrow [0, w_A]$ و $f_A^R(x) : [c, d] \rightarrow [0, w_A]$ پیوسته و اکیدا یکنوا هستند پس معکوس پذیرند و معکوس آن‌ها نیز پیوسته، یکنوا و انتگرال‌پذیر هستند که به ترتیب با: $g_A^L(y) : [0, w_A] \rightarrow [a, b]$ و $g_A^R(y) : [0, w_A] \rightarrow [c, d]$ نشان داده می‌شوند. اگر $w_A = 1$ باشد، عدد فازی نرمال است.

تعریف ۱۳.۳.۱ (عدد فازی LR): با در نظر گرفتن $L(x) = f_A^L(x)$ و $R(x) = f_A^R(x)$ ، عدد فازی ارائه شده در تعریف ۱۲.۳.۱ عدد فازی LR غیرنرمال نامیده می‌شود. $L(x)$ و $R(x)$ را

^۱Spread

توابع شکل گویند که بر اساس نیاز و نظر کارشناسان خبره اختیار می‌شوند. اعداد فازی LR با نماد $A = (a, b, c, d; w)_{LR}$ نمایش داده می‌شود (شکل ۱.۱) که در این نمایش $0 \leq w \leq 1$ است.

شکل ۱.۱: عدد فازی LR غیرنرمال



تعریف ۱۴.۳.۱. (عدد فازی مثلثی غیرنرمال): عدد فازی مثلثی^۱ غیرنرمال، نوع خاص و پرکاربردی از اعداد فازی است که به صورت $A = (a, b, c; w)$ نمایش داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت زیر است:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} w \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ w \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (9.1)$$

که در آن $0 \leq w \leq 1$ و $a \leq b \leq c$ سه نقطه از $\mathbb{R}$ هستند. در صورتی که $w = 1$ باشد، عدد فازی مثلثی A نرمال است و به صورت $A = (a, b, c)$ نشان داده می‌شود. در رابطه بالا بازه حقیقی $[a, c]$ تکیه‌گاه و نقطه‌ی (a_m, w) هسته آن می‌باشند.

نکته: هر عدد فازی مثلثی $A = (a, b, c)$ را می‌توان به صورت $A = (m, \alpha, \beta)$ نیز نمایش داد که در آن m هسته و α و β به ترتیب گستره سمت راست و گستره سمت چپ عدد فازی A هستند. به وضوح $\alpha = b - a$ و $\beta = c - b$.

تعریف ۱۵.۳.۱. (عدد فازی دوزنقه‌ای غیرنرمال): از مهمترین و پرکاربردترین انواع اعداد فازی، عدد فازی دوزنقه‌ای^۲ غیرنرمال یا بازه فازی است که به صورت $A = (a, b, c, d; w)$ نمایش

¹Triangular

²Trapezoidal

داده می‌شود و تابع عضویت آن به صورت زیر توصیف می‌شود:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} w \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ w, & b \leq x \leq c \\ w \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10.1)$$

که در آن $0 \leq w \leq 1$ و $a \leq b \leq c \leq d$ چهار نقطه از $\mathbb{R}$ هستند.

نکته: به وضوح با شرط $b = c$ ، عدد فازی دوزنقه‌ای غیرنرمال به عدد فازی مثلثی غیرنرمال تبدیل می‌شود و اگر $w = 1$ باشد، عدد فازی دوزنقه‌ای A نرمال است و به صورت $A = (a, b, c, d)$ نشان داده می‌شود.

نکته: اگر $a = b$ و $w = 1$ باشد آنگاه A یک بازه قطعی است و اگر $a = b = c = d$ و $w = 1$ آنگاه A یک عدد قطعی حقیقی است.

نکته: هر عدد فازی دوزنقه‌ای $A = (a, b, c, d)$ را می‌توان به صورت $A = (n, m, \alpha, \beta)$ نیز نمایش داد که در آن بازه $[n, m]$ هسته و α و β به ترتیب گستره سمت راست و گستره سمت چپ عدد فازی A هستند. به وضوح $\alpha = b - a$ و $\beta = d - c$.

تعریف ۱۶.۳.۱. (صفر مجموعه اعداد فازی): مجموعه تمام اعداد فازی را با E نمایش می‌دهیم و $\tilde{0} = (0, 0, 0, 0)$ را به عنوان عدد فازی صفر یا عضو خنثی جمعی E در نظر می‌گیریم.

۴.۱ حساب فازی

در این بخش به حساب اعداد فازی می‌پردازیم. در انتها نیز حساب فازی معرفی شده توسط چن و چن برای اعداد فازی غیرنرمال مثلثی را شرح می‌دهیم. برای اعداد فازی مثلثی $\tilde{A} = (a, b, c)$ و $\tilde{B} = (d, e, f)$ داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{A} + \tilde{B} &= (a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f) \\ \tilde{A} - \tilde{B} &= (a, b, c) - (d, e, f) = (a - f, b - e, c - d) \\ k\tilde{A} &= \begin{cases} (ka, kb, kc), & k > 0 \\ (kc, kb, ka), & k < 0 \end{cases} \\ -\tilde{A} &= (-c, -b, -a) \\ \tilde{A} \otimes \tilde{B} &= \tilde{A}\tilde{B} = (ad, be, cf) \\ \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} &= \left(\frac{a}{f}, \frac{b}{e}, \frac{c}{d} \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

در نتیجه حاصل جمع، تفریق و قرینه و ضرب و تقسیم عدد فازی، یک عدد فازی است. برای اثبات درستی احکام بالا به [۶۱] رجوع کنید.

عملگرها برای اعداد فازی دوزنقه‌ای $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ و $\tilde{B} = (e, f, g, h)$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}\tilde{A} + \tilde{B} &= (a + e, b + f, c + g, d + h) \\ \tilde{A} - \tilde{B} &= (a - h, b - g, c - f, d - e) \\ -\tilde{A} &= (-d, -c, -b, -a) \\ k\tilde{A} &= \begin{cases} (ka, kb, kc, kd), & k > 0 \\ (kd, kc, kb, ka), & k < 0 \end{cases} \\ \tilde{A} \otimes \tilde{B} &= (ae, bf, cg, dh) \\ \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} &= \left(\frac{a}{h}, \frac{b}{g}, \frac{c}{f}, \frac{d}{e}\right)\end{aligned}\quad (2.1)$$

۱.۴.۱ عملیات پیشنهادی توسط چن و چن

از آنجایی که کار با اعداد فازی و انجام عملیات محاسباتی به خصوص اعمال دودویی، محاسباتی سخت و پیچیده‌ای را می‌طلبد، برای رفع این مشکل روش‌های متعددی برای حساب فازی پیشنهاد شده است. در این بخش حساب فازی پیشنهادی توسط چن و چن [۱۸] برای اعداد فازی مثلثی غیرنرمال را ارائه خواهیم کرد. فرض کنید $A = (a_l, a_m, a_u; w_A)$ و $B = (b_l, b_m, b_u; w_B)$ اعداد فازی غیرنرمال باشند. آن‌ها جمع، تفریق و این اعداد را به صورت زیر تعریف کردند:

$$\begin{aligned}A + B &= (a_l + b_l, a_m + b_m, a_u + b_u; \min(w_A, w_B)) \\ A - B &= (a_l - b_u, a_m - b_m, a_u - b_l; \min(w_A, w_B)) \\ kA &= \begin{cases} (ka_l, ka_m, ka_u; w_A), & k > 0 \\ (ka_u, ka_m, ka_l; w_A), & k < 0 \end{cases}\end{aligned}\quad (3.1)$$

۵.۱ روش الفبایی

بهینه‌سازی با روش الفبایی: یک مسئله بهینه‌سازی با روش الفبایی^۱ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}\min & (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \\ & x \in X\end{aligned}$$

^۱Lexicographic

در این نوع بهینه سازی تابع هدف $f_1(x)$ بی‌نهایت بار از تابع هدف $f_2(x)$ مهمتر است و به همین ترتیب تا آخر.

تعریف ۱.۵.۱. یک نقطه شدنی $\hat{x} \in X$ را بهینه با روش الفبایی گویند هرگاه هیچ $x \in X$ وجود نداشته باشد که $f(x) < f(\hat{x})$.

حل مسائل بهینه‌سازی با روش الفبایی:

مرحله ۱: ابتدا مسئله

$$\min f_1(x)$$

$$x \in X$$

را حل می‌کنیم:

فرض کنیم $\hat{x}_1$ یک جواب بهینه این مساله باشد اگر این منحصر به فرد باشد توقف می‌کنیم در غیر اینصورت به مرحله بعد می‌رویم.
مرحله ۲: مسئله زیر را حل می‌کنیم:

$$\min f_2(x)$$

$$x \in X$$

$$f_1(x) \leq f_1(\hat{x})$$

فرض می‌کنیم $\hat{x}_2$ جواب بهینه این مساله باشد.

مرحله ۳: مسئله زیر را حل می‌کنیم:

$$\min f_3(x)$$

$$x \in X$$

$$f_1(x) \leq f_1(\hat{x})$$

$$f_2(x) \leq f_2(\hat{x})$$

این روند را تا رسیدن به یک جواب منحصر به فرد یا تا تمام شدن تمام توابع هدف ادامه می‌دهیم.

۶.۱ رتبه‌بندی اعداد فازی

رتبه‌بندی اعداد فازی یک نتیجه‌ی مهم از نظریه‌ی مجموعه‌های فازی است. روش‌های رتبه‌بندی در بسیاری از زمینه‌ها مفید و کاربردی هستند که یکی از مهم‌ترین آنها مطالعه‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی است.

در بسیاری از مسائل تصمیم‌گیری از قبیل برنامه‌ریزی خطی فازی، مفهوم ترتیب اعداد فازی و مقایسه آنها ضروری است. اگر در قیده‌های یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی مثل $Ax \geq b$ ، ضرایب A ، b و یا x فازی باشند، آنگاه با یک مساله‌ی رتبه‌بندی مواجه خواهیم شد. روش‌های متعددی برای رتبه‌بندی اعداد فازی در مقالات و کتاب‌ها پیشنهاد شده است که بعضی از آنها فقط در یک زمینه‌ی خاص (نه به طور کلی) خوب و کاربردی به نظر می‌رسند. در این بخش به معرفی چند تابع رتبه‌بندی می‌پردازیم.

۱.۶.۱ روش مقایسه‌ی یاگر

فرض کنید $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n$ اعداد فازی باشند، آنگاه تابع مقایسه یاگر^۱ به صورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$F(\tilde{A}_i) = \frac{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} g(x) \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx}{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx} \quad (1.1)$$

که در آن $s_i = \sup(\tilde{A}_i)$ و $x_{\min} = \inf(s_i)$ و $x_{\max} = \sup(s_i)$ و $g(x)$ یک فاکتور وزنی برای نشان دادن درجه‌ی اهمیت مقدار x بوده و تابعی انتگرال‌پذیر است. در رابطه‌ی (۱.۱) اگر $g(x) = x$ باشد، آنگاه $F(\tilde{A}_i)$ را مرکز ثقل عدد فازی $\tilde{A}_i$ می‌نامند و با $c_w(\tilde{A}_i)$ نمایش می‌دهند که بصورت رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$F(\tilde{A}_i) = \frac{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx}{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx} = c_w(\tilde{A}_i) \quad (2.1)$$

یک تابع رتبه‌بندی خطی بصورت $R: F(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ نیز نخستین بار توسط یاگر پیشنهاد شد که در رابطه زیر به آن اشاره شده است:

$$R(\tilde{A}) = \frac{1}{2} \int_0^1 (\inf \tilde{A}_\lambda + \sup \tilde{A}_\lambda) d\lambda \quad (3.1)$$

که برای اعداد فازی مثلثی مثل $\tilde{A} = (a, b, c)$ رابطه‌ی (۳.۱) به رابطه‌ی زیر ساده می‌شود:

$$R(\tilde{A}) = \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}(c + a) \quad (4.1)$$

نکته: رتبه‌بندی یاگر برای اعداد فازی دوزنقه‌ای مثل $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ برای رابطه‌ی (۱.۱) بنا بر [۱۲۲] بصورت زیر می‌باشد:

$$R(\tilde{A}) = \frac{1}{3} \left[a + b + c + d - \frac{cd - ab}{(c + d) - (a + b)} \right]$$

¹Yager

مثال ۱.۶.۱. فرض کنید تابع عضویت عدد فازی $\tilde{A}$ بصورت زیر تعریف شده باشد:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \circ/5x - 3 & 6 \leq x \leq 8 \\ \circ/5x + 5 & 8 \leq x \leq 10 \\ \circ & o.w \end{cases}$$

اگر $g(x) = x$ ، آنگاه مقدار $F(\tilde{A})$ بصورت رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود:

$$F(\tilde{A}) = \frac{\int_0^{10} x \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx}{\int_0^{10} \mu_{\tilde{A}_i}(x) dx} = \frac{\int_6^8 x(\circ/5x - 3) dx + \int_8^{10} x(-\circ/5x + 5) dx}{\int_6^8 (\circ/5x - 3) dx + \int_8^{10} (-\circ/5x + 5) dx} = 8 \quad (5.1)$$

۲.۶.۱ روش مقایسه‌ی ابراهیم‌نژاد

تعریف ۱.۶.۱. : فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای

باشند می‌گوییم $\tilde{A} < \tilde{B}$ اگر و فقط اگر

الف. $a_2 - a_1 > b_2 - b_1$ ، یا

ب. $a_2 < b_2$ و $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$ ، یا

ج. $\frac{a_2+a_3}{2} < \frac{b_2+b_3}{2}$ و $a_2 = b_2$ ، $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$ ، یا

د. $\frac{a_2+a_3}{2} = \frac{b_2+b_3}{2}$ ، $a_2 = b_2$ ، $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$ و $a_4 - a_3 < b_4 - b_3$.

نکته: با توجه به تعریف ۱.۶.۱ بدیهی است $\frac{a_2+a_3}{2} = \frac{b_2+b_3}{2}$ ، $a_2 = b_2$ ، $a_2 - a_1 = b_2 - b_1$

و $a_4 - a_3 = b_4 - b_3$ اگر و فقط اگر $\tilde{A} = \tilde{B}$.

۳.۶.۱ روش مقایسه‌ی داس و همکاران

تعریف ۲.۶.۱. : فرض کنید $\tilde{A} = (m_1, n_1, \alpha_1, \beta_1)$ و $\tilde{B} = (m_2, n_2, \alpha_2, \beta_2)$ دو عدد فازی

دوزنقه‌ای باشند می‌گوییم $\tilde{A} < \tilde{B}$ اگر و فقط اگر

الف. $\alpha_1 > \alpha_2$ ، یا

ب. $\alpha_1 = \alpha_2$ و $m_1 < m_2$ ، یا

ج. $\frac{m_1+n_1}{2} < \frac{m_2+n_2}{2}$ و $m_1 = m_2$ ، $\alpha_1 = \alpha_2$ ، یا

د. $\frac{m_1+n_1}{2} < \frac{m_2+n_2}{2}$ و $m_1 = m_2$ ، $\alpha_1 = \alpha_2$ و $\beta_1 < \beta_2$.

۴.۶.۱ روش مقایسه‌ی ریماک

تعریف ۳.۶.۱. : فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ دو عدد فازی دوزنقه‌ای

باشند می‌گوییم $\tilde{A} < \tilde{B}$ اگر و فقط اگر

الف. $a_1 < b_1$ و

ب. $a_2 < b_2$ و

ج. $a_3 < b_3$ و

د. $a_4 < b_4$.

۵.۶.۱ روش مقایسه‌ی داس

تعریف ۴.۶.۱. : فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3)$ دو عدد فازی مثلثی باشند می‌گوییم $\tilde{A} < \tilde{B}$ اگر و فقط اگر

الف. $a_1 < b_1$ یا

ب. $a_1 = b_1$ و $a_1 - a_2 > b_1 - b_2$ یا

ج. $a_1 = b_1$ و $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$ و $a_1 + a_3 < b_1 + b_3$

فصل ۲

برنامه‌ریزی خطی فازی

۱.۲ مقدمه

برنامه‌ریزی خطی یک تکنیک ریاضی برای اختصاص بهینه‌ی منابع محدود به فعالیت‌های معلوم برای رسیدن به هدفی مطلوب است. در مسائل برنامه‌ریزی خطی کلاسیک فرض بر این است تمام پارامترهای مساله بطور دقیق مشخص شوند. به هر حال، مقادیر مشاهده شده مسائل جهان واقعی به دلیل اطلاعات ناقص یا غیرقابل دستیابی نادقیق و مبهم می‌باشند. یک روش کارا برای نمایش مقادیر نادقیق و مبهم مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی، از طریق توابع عضویت مجموعه‌های فازی است و بدین ترتیب یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی به وجود می‌آید. بر این اساس محققین زیادی روی حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی متمرکز شده‌اند. همانطور که توسط ابراهیم‌نژاد و وردگای [۴۵] مطرح شده است رویکردهای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی به دو دسته‌ی کلی رویکرد مبتنی بر سیمپلکس و غیرسیمپلکس تقسیم می‌شوند. در رویکرد مبتنی بر سیمپلکس، الگوریتم‌های سیمپلکس کلاسیک برای یافتن جواب بهینه مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای فازی تعمیم داده می‌شوند. در رویکرد مبتنی بر غیرسیمپلکس، مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی تحت بررسی به یک مساله برنامه‌ریزی خطی تک هدفه یا چند هدفه‌ی قطعی تبدیل و با الگوریتم‌های استاندارد حل می‌شود. ابراهیم‌نژاد [۳۸] یک روش برای حل برنامه‌ریزی خطی فازی با استفاده از رتبه‌بندی را بکار برد. همچنین ابراهیم‌نژاد [۳۹] روش جدیدی برای حل مسائل حمل‌ونقل فازی با

اعداد فازی تحت LR ارائه نمود. مسائل برنامه‌ریزی خطی با پارامترهای فازی که بر اساس رویکردهای مبتنی بر غیرسیمپلکس حل می‌شوند به هفت گروه کلی زیر طبقه‌بندی می‌شوند:

- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع اول: در این گروه، سمت راست قیود و ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در قیود با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع دوم: در این گروه، ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع سوم: در این گروه، ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در قیود و تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع چهارم: در این گروه، سمت راست قیود و ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در قیود و تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع پنجم: در این گروه، سمت راست قیود و متغیرهای تصمیم‌گیری با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع ششم: در این گروه، سمت راست قیود، متغیرهای تصمیم‌گیری و ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند.
- برنامه‌ریزی خطی فازی از نوع هفتم: در این گروه، سمت راست قیود، متغیرهای تصمیم‌گیری و ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری در قیود و تابع هدف با اعداد فازی نمایش داده می‌شوند. مساله‌ی متعلق به این گروه را مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی $FFLP$ ^۱ می‌نامند.

اکنون، بررسی مختصری بر روی روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی تماماً فازی صورت می‌گیرد. باکلی^۲ و فیورینگ^۳ [۱۲] مساله‌ی $FFLP$ را با تعریف جدیدی از بیشینه کردن یک عدد فازی به یک مساله‌ی برنامه‌ریزی چندهدفه‌ی قطعی تبدیل کردند و یک روش تکاملی برای یافتن مساله‌ی انعطاف‌پذیر فازی ارائه دادند. هاشمی و همکاران [۵۲] یک تکنیک دو مرحله‌ای برای حل مسائل نوع هفتم بر اساس مقایسه مقدار میانگین و انحراف معیار اعداد فازی پیشنهاد دادند. حسین‌زاده لطفی و همکاران [۵۴] یک رویکرد کارا برای حل مساله $FFLP$ با قیود تساوی ارائه دادند که در آن هر عدد فازی مثلی با نزدیکترین عدد مثلی متقارن تقریب زده شده است. ابراهیم‌نژاد [۴۰] رویکرد برنامه‌ریزی خطی فازی برای حل مساله‌ی حمل‌ونقل با اعداد فازی دوزنقه‌ای را مطرح کرد. توانا^۴ و ابراهیم‌نژاد [۴۳] روشی نوین برای حل مسائل

^۱Fully Fuzzy Linear Programming

^۲Buckley

^۳Feuring

^۴Tavana

برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی متقارن دوزنقه‌ای را مطرح کردند. ابراهیم‌نژاد و وردگای [۴۴] یک رویکرد محاسباتی کارآمد برای حل مسائل حمل‌ونقل مبتنی بر اعداد فازی نوع (۲) را بررسی کردند. کومار^۱ و همکاران [۶۸] با بهبود روش حسین‌زاده لطفی و همکاران [۵۴] یک جواب دقیق برای همان مساله بدست آوردند. کومار و کائور^۲ [۶۹] رویکرد مشابهی برای حل مسائل FFLP پیشنهاد دادند که هم برای قیود تساوی و هم قیود نامساوی کارساز است. عزتی و همکاران [۴۸] رویکرد جدیدی برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی فازی با تبدیل آن به یک مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه قطعی ارائه دادند. چنگ^۳ و همکاران [۱۹] مساله‌ی FFLP با قیود تساوی مطالعه کردند. آنها قیود تساوی فازی را با استفاده از اندازه تشابه به قیود نامساوی قطعی و تابع هدف فازی را به دو تابع هدف قطعی تبدیل کردند. از آنجا که درجه شدنی بودن قیود با مقدار بهینه‌ی تابع هدف در تعارض است، آنها یک مساله کمکی با سه تابع هدف ساخته و آن را با رویکرد برنامه‌ریزی تقابلی حل کردند. حسین‌زاده و عدالت‌پناه [۵۵] رویکردی مبتنی بر روش الفبایی و روشهای برنامه‌ریزی خطی برای حل مساله FFLP پیشنهاد دادند. داس^۴ و همکاران [۲۵] با تعمیم روش عزتی و همکاران [۴۸] روشی برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با قیود تساوی و نامساوی ارائه دادند که در آن تمام پارامترهای مساله را با اعداد فازی دوزنقه‌ای نمایش دادند. رویکرد پیشنهادی آنها براساس تبدیل مساله فازی تحت بررسی به مساله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه و روش مقایسه الفبایی استوار است. با این وجود، این رویکرد برای یافتن جواب بهینه‌ی فازی مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی فازی نمی‌تواند استفاده شود. ابراهیم‌نژاد [۴۱] به معرفی فرمول‌بندی مسائل FLP^۵ شامل اعداد فازی دوزنقه‌ای با ارزش فاصله برای متغیرهای تصمیم‌گیری و سمت راست محدودیت‌ها پرداخته است، که یک روش جدید برای حل این نوع از مسائل FLP براساس مقایسه اعداد فازی با کمک رتبه‌بندی ارائه شده. ابراهیم‌نژاد و وردگای^۶ [۴۶] یک مساله‌ی شناخته شده به نام مساله‌ی حمل‌ونقل TP^۷ در یک محیط نادقیق را در نظر گرفتند. هزینه‌های حمل‌ونقل، عرضه و تقاضا با اعداد فازی شهودی دوزنقه‌ای (TIFN)^۸ نشان داده شد که شکل کلی‌تر اعداد فازی دوزنقه‌ای است که شامل درجه‌ای از پذیرش و عدم‌پذیرش است و یک روش برای حل مساله پیشنهاد دادند که با برنامه‌ریزی خطی فازی حل گردید. ابراهیم‌نژاد و وردگای [۴۵] رویکردهای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی که به دو دسته کلی رویکرد مبتنی بر سیمپلکس و غیرسیمپلکس تقسیم می‌شوند را ارائه کردند. جایلاکشیم^۹ و پاندیان^{۱۰} [۵۷] روشی که مبنی

¹Kumar²Kaur³Cheng⁴Das⁵Fuzzy Linrear Programming⁶Verdegay⁷Transportation Programming⁸Trapezoidal Intuitive Fuzzy Numbers⁹Jayalakshmi¹⁰Pandian

بر اتصال و تجزیه به یک مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی (FFLP) برای بدست آوردن یک راه‌حل فازی مطلوب است پیشنهاد کردند. هاشمی و همکاران [۵۲] برای دستیابی به راه‌حل‌های بهینه مساله‌ی FFLP، رویکردی دو مرحله‌ای را براساس ارزیابی میانگین به علاوه عدد انحراف استاندارد برنامه‌ریزی کردند. میکائیل‌وند و همکاران [۷۹] یک روش را برای حل FFLP با یک تابع رتبه‌بندی خطی ارائه دادند. مین‌سن^۱ و همکارش [۱۰۷] برای حل مسائل FFLP از مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه برای محدودیت درجه دوم استفاده کردند. مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی و برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی به دلیل عدم قطعیت‌هایی که ممکن است در پارامترها و متغیرهای مسائل ایجاد شود، در سال‌های اخیر اهمیت زیادی پیدا کردند که در این خصوص اوزکوک^۲ [۸۳] روشی برای یافتن راه حل بهینه فازی و تقریبی از مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی کاملاً فازی با محدودیت‌های مختلط با اعداد فازی دوزنقه‌ای ارائه کرد. مائدا^۳ [۷۶] مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی را به عنوان مساله‌ی بهینه‌سازی دو معیار در نظر گرفت و بررسی کرد. لی^۴ و نگی^۵ [۸۲] به بررسی امکان برنامه‌ریزی با مقایسه اعداد فازی پرداختند. فرمولی از مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی بر اساس مقایسه اعداد فازی توسط تاناکا^۶ و همکاران [۱۰۹] بررسی گردید. برنامه‌ریزی خطی با اعداد فازی دوزنقه‌ای را ون^۷ و دونگ^۸ [۱۲۰] مطالعه کردند. زانگ^۹ و همکارانش [۱۲۶] به بررسی فرمول‌بندی مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی به عنوان چهار مساله‌ی بهینه‌سازی تک هدفه پرداختند. زیمرمن^{۱۰} [۱۲۸] برنامه‌ریزی فازی و برنامه‌ریزی خطی با چندین عملکرد هدف را مورد بررسی کار خود قرار داد. لطفی و همکاران [۷۵] روشی را برای از بین بردن یک کمیت فازی معرفی کردند، که ابتدا عدد مثلی فازی به نزدیکترین عدد مثلی متقارن تقریب زده می‌شود، در نتیجه یک راه‌حل بهینه برای مساله‌ی فوق‌الذکر یک راه‌حل فازی متقارن است. وانگ^{۱۱} [۱۲۱] یک روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی ارائه داده است که به جای یافتن یک راه‌حل دقیق بهینه، از یک الگوریتم کمکی برای رسیدن به جواب بهره می‌گیرد. چاناها^{۱۲} و زیلینسکی^{۱۳} [۱۵] مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی با ضرایب فازی در تابع هدف را تجزیه و تحلیل کردند و مجموعه‌ای از راه‌حل‌های فازی، طبق مفهوم اورلوفسکی^{۱۴}، را بررسی و راه‌حلی برای مساله‌ی

¹Stancu-Minasian²Ozkok³Maeda⁴Lee⁵Negi⁶Tanaka⁷Wan⁸Dong⁹Zhang¹⁰Zimmerman¹¹Wang¹²Chanas¹³Zieliński¹⁴Orlovsky

خود قرار دادند. فانگ^۱ و همکاران [۴۹] روش جدیدی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با ضرایب فازی در محدودیت‌ها ارائه دادند و نشان دادند که چنین مسائلی را می‌توان به یک مساله‌ی برنامه‌ریزی نیمه نامحدود خطی کاهش داد. وردگای^۲ و همکارانش [۳۱] چندین مدل از مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی را مورد بررسی قرار دادند. هدف از آن، اول، توصیف مهمترین مساله در برنامه‌ریزی خطی فازی و دوم، ارائه مدل کلی از مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی بود. وردگای [۱۱۶] مفهومی از هدف فازی بر اساس اصل توابع فازی را ارائه داد. مطابق با این مفهوم، مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی را حل کرد.

۲.۲ روش حل FFLP

در این قسمت به ارائه روش ابراهیم‌نژاد برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی [۱] می‌پردازیم. مساله‌ی FFLP با قیود نامساوی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} &= \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j \otimes \tilde{x}_j \\ s.t. \\ \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} \otimes \tilde{x}_j &\leq \tilde{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \tilde{x}_j &\geq \tilde{0}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.2)$$

فرض کنیم $\tilde{c}_j = (c_{1j}, c_{2j}, c_{3j}, c_{4j})$ (بردار هزینه‌ی فازی)، $\tilde{a}_{ij} = (a_{1ij}, a_{2ij}, a_{3ij}, a_{4ij})$ (ماتریس ضرایب تکنولوژی فازی)، $\tilde{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}, x_{4j})$ (بردار متغیرهای تصمیم‌گیری فازی) و $\tilde{b} = (b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}, b_{4i})$ (بردار سمت راست قیود فازی)، آنگاه مساله (۱.۲) بصورت زیر در می‌آید:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} &= \left(\sum_{j=1}^n c_{1j} x_{1j}, \sum_{j=1}^n c_{2j} x_{2j}, \sum_{j=1}^n c_{3j} x_{3j}, \sum_{j=1}^n c_{4j} x_{4j} \right) \\ s.t. \\ \left(\sum_{j=1}^n a_{1ij} x_{1j}, \sum_{j=1}^n a_{2ij} x_{2j}, \sum_{j=1}^n a_{3ij} x_{3j}, \sum_{j=1}^n a_{4ij} x_{4j} \right) &\leq (b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}, b_{4i}) \\ x_{1j} &\geq 0, x_{2j} - x_{1j} \geq 0, x_{3j} - x_{2j} \geq 0, x_{4j} - x_{3j} \geq 0, \\ i &= 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.2)$$

¹Fang

²Verdegay

حال مساله بصورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} &= \left(\sum_{j=1}^n c_{1j} x_{1j}, \sum_{j=1}^n c_{2j} x_{2j}, \sum_{j=1}^n c_{3j} x_{3j}, \sum_{j=1}^n c_{4j} x_{4j} \right) \\ s.t. \\ \sum_{j=1}^n a_{1ij} x_{1j} &\leq b_{1i} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n a_{2ij} x_{2j} &\leq b_{2i} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n a_{3ij} x_{3j} &\leq b_{3i} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^n a_{4ij} x_{4j} &\leq b_{4i} \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x_{1j} &\geq 0, x_{2j} - x_{1j} \geq 0, x_{3j} - x_{2j} \geq 0, x_{4j} - x_{3j} \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

ادامه روند مشابه روش داس و همکاران [۲۵] است که بنا بر تعریف (۱.۶.۱) منجر به مساله برنامه‌ریزی چندهدفه قطعی زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \min z_1 &= \left(\sum_{j=1}^n (cx)_{2j} - \sum_{j=1}^n (cx)_{1j} \right) \\ \max z_2 &= \sum_{j=1}^n (cx)_{2j} \\ \max z_3 &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n (cx)_{2j} + \sum_{j=1}^n (cx)_{3j} \right) \\ \max z_4 &= \left(\sum_{j=1}^n (cx)_{4j} - \sum_{j=1}^n (cx)_{3j} \right) \\ s.t. \quad & \text{Constraints of model (3.2)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

که مساله (۴.۲) با روش الفبایی^۱ حل می‌شود.

۳.۲ مثال عددی

مثال ۱.۳.۲. شرکتی در صدد تولید سه محصول P_1, P_2, P_3 است که با سه ماشین مختلف M_1, M_2, M_3 پردازش می‌شوند. زمانهای تقریبی مورد نیاز (بر حسب دقیقه) برای تولید هر واحد از محصول و ظرفیت تقریبی روزانه‌ی هر ماشین (بر حسب دقیقه در روز) در جدول

¹Lexico

۱.۲ آمده است. شرکت می‌خواهد که سود حاصل از فروش هر واحد از محصولات P_1, P_2, P_3 به ترتیب نزدیک به $(11, 13, 15, 17)$ ، $(9, 12, 14, 17)$ و $(13, 15, 17, 19)$ روپیه را حفظ نماید. فرض بر این است که تمام واحدهای تولید شده فروخته می‌شوند. شرکت می‌خواهد میزان تولید روزانه هر یک از سه محصول را تعیین کند به طوری که سود آن ماکزیمم گردد. میزان زمان انجام کار ممکن است به دلیل خرابی ماشین‌ها و اضافه کاری‌ها روزانه متفاوت باشد. همچنین، سود حاصل از فروش را نمی‌توان به دلیل تغییرات قیمت به طور دقیق پیش‌بینی کرد. چون سود و زمان غیرقطعی می‌باشند، انتظار می‌رود که میزان تقریبی تولیدی روزانه‌ای باشد محصول نیز غیرقطعی باشد. با در نظر گرفتن عدد فازی دوزنقه‌ای برای پارامترهای نادقیق داده شده در جدول ۱.۲ و با فرض این که $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ میزان تقریبی تولیدی روزانه‌ای باشند که به ترتیب از محصولات P_1, P_2, P_3 تولید می‌شوند، مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی فازی زیر باید حل شود:

جدول ۱.۲: داده‌های مساله‌ی ترکیب تولید

ظرفیت	P_3	P_2	P_1	ماشین‌ها
$(469, 475, 505, 511)$	$(9, 11, 13, 15)$	$(11, 12, 14, 15)$	$(9, 11, 13, 15)$	M_1
$(452, 460, 480, 488)$	$(11, 12, 14, 15)$	—	$(11, 12, 16, 17)$	M_2
$(460, 465, 495, 500)$	—	$(11, 14, 16, 19)$	$(9, 11, 13, 15)$	M_3

$$\max \tilde{z} = (11, 13, 15, 17)\tilde{x}_1 + (9, 12, 14, 17)\tilde{x}_2 + (13, 15, 17, 19)\tilde{x}_3$$

s.t.

$$(9, 11, 13, 15)\tilde{x}_1 + (11, 12, 14, 15)\tilde{x}_2 + (9, 11, 13, 15)\tilde{x}_3 \leq (469, 475, 505, 511) \quad (1.2)$$

$$(11, 12, 16, 17)\tilde{x}_1 + (11, 12, 14, 15)\tilde{x}_3 \leq (452, 460, 480, 488)$$

$$(9, 11, 13, 15)\tilde{x}_1 + (11, 14, 16, 19)\tilde{x}_2 \leq (460, 465, 495, 500)$$

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \geq \tilde{0}.$$

مساله (۱.۲) را می‌توان با توجه به عملیات حسابی فازی بصورت مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی چندهدفه‌ی زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 \min z_1 &= 13x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} - 11x_{11} - 9x_{12} - 13x_{13} \\
 \max z_2 &= 13x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} \\
 \max z_3 &= \frac{1}{7}(13x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} + 15x_{31} + 14x_{32} + 17x_{33}) \\
 \max z_4 &= 17x_{41} + 17x_{42} + 19x_{43} - 15x_{31} - 14x_{32} - 17x_{33} \\
 s.t. \\
 9x_{11} + 11x_{12} + 9x_{13} &\leq 469 \\
 11x_{21} + 12x_{22} + 11x_{23} &\leq 475 \\
 13x_{31} + 14x_{32} + 13x_{33} &\leq 505 \\
 15x_{41} + 15x_{42} + 15x_{43} &\leq 511 \\
 11x_{11} + 11x_{13} &\leq 452 \\
 12x_{21} + 12x_{23} &\leq 460 \\
 13x_{31} + 14x_{33} &\leq 480 \\
 17x_{41} + 15x_{43} &\leq 488 \\
 9x_{11} + 11x_{12} &\leq 460 \\
 11x_{21} + 14x_{22} &\leq 465 \\
 13x_{31} + 16x_{32} &\leq 495 \\
 15x_{41} + 19x_{42} &\leq 500 \\
 x_{11} \geq 0, x_{21} - x_{11} \geq 0, x_{31} - x_{21} \geq 0, x_{41} - x_{31} \geq 0 \\
 x_{12} \geq 0, x_{22} - x_{12} \geq 0, x_{32} - x_{22} \geq 0, x_{42} - x_{32} \geq 0 \\
 x_{13} \geq 0, x_{23} - x_{13} \geq 0, x_{33} - x_{23} \geq 0, x_{43} - x_{33} \geq 0.
 \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

اکنون روش الفبایی برای حل مساله‌ی (۲.۲) به کار گرفته می‌شود. نخست مساله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \min z_1 &= 13x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} - 11x_{11} - 9x_{12} - 13x_{13} \\
 s.t.
 \end{aligned} \tag{۳.۲}$$

Constraints of problem (۲.۲)

با توجه به مقدار بهینه‌ی مسالهی (۳.۲) $z_1^* = 0$ مسالهی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max z_2 &= 13x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} \\ \text{s.t.} \\ 13x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} - 11x_{11} - 9x_{12} - 13x_{13} &= 0 \\ \text{Constraints of problem (2.2)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

با توجه به مقدار بهینه‌ی مسالهی (۴.۲) $z_2^* = 0$ مسالهی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max z_3 &= \frac{1}{5}(13x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} + 15x_{31} + 14x_{32} + 17x_{33}) \\ \text{s.t.} \\ 13x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} &= 0 \\ 13x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} - 11x_{11} - 9x_{12} - 13x_{13} &= 0 \\ \text{Constraints of problem (2.2)} \end{aligned} \quad (5.2)$$

با توجه به مقدار بهینه‌ی مسالهی (۵.۲) $z_3^* = 574/533$ مسالهی زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} \max z_4 &= 17x_{41} + 17x_{42} + 19x_{43} - 15x_{31} - 14x_{32} - 17x_{33} \\ \text{s.t.} \\ \frac{1}{5}(13x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} + 15x_{31} + 14x_{32} + 17x_{33}) &= 574/533 \\ 13x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} &= 0 \\ 13x_{21} + 12x_{22} + 15x_{23} - 11x_{11} - 9x_{12} - 13x_{13} &= 0 \\ \text{Constraints of problem (2.2)} \end{aligned} \quad (6.2)$$

جواب بهینه مسالهی (۶.۲) و مقدار بهینه‌ی آن بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^* &= (\tilde{x}_{11}^*, \tilde{x}_{12}^*, \tilde{x}_{13}^*, \tilde{x}_{14}^*) = (0, 0, 0, 0) \\ \tilde{x}_2^* &= (\tilde{x}_{21}^*, \tilde{x}_{22}^*, \tilde{x}_{23}^*, \tilde{x}_{24}^*) = (0, 0, 1/533, 1/533) \\ \tilde{x}_3^* &= (\tilde{x}_{31}^*, \tilde{x}_{32}^*, \tilde{x}_{33}^*, \tilde{x}_{34}^*) = (0, 0, 32/533, 32/533) \\ \tilde{z}^* &= (0, 0, 574/533, 644/20) \end{aligned} \quad (7.2)$$

مثال ۲.۳.۲. مسالهی (FFLP) با قیود نامساوی زیر که مربوط به مسالهی رژیم غذایی است

را در نظر بگیرید. جزییات آن توسط داس و همکاران [۲۵] بیان شده است.

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} &= (7, 10, 14, 17)\tilde{x}_1 + (8, 13, 15, 20)\tilde{x}_2 \\ s.t. \\ (11, 13, 15, 17)\tilde{x}_1 + (9, 11, 13, 17)\tilde{x}_2 &\leq (96, 100, 102, 108) \\ (12, 14, 16, 18)\tilde{x}_1 + (8, 12, 14, 18)\tilde{x}_2 &\leq (104, 112, 114, 118) \\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 &\geq \tilde{0}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

مساله‌ی (۸.۲) را با توجه به عملیات حساب فازی به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \min z_1 &= 10x_{21} + 13x_{22} - 7x_{11} - 8x_{12} \\ \max z_2 &= 10x_{21} + 13x_{22} \\ \max z_3 &= \frac{1}{4}(10x_{21} + 13x_{22} + 14x_{31} + 15x_{32}) \\ \max z_4 &= 17x_{41} + 20x_{42} - 14x_{31} - 15x_{32} \\ s.t. \\ 11x_{11} + 9x_{12} &\leq 96 \\ 13x_{21} + 11x_{22} &\leq 100 \\ 15x_{31} + 13x_{32} &\leq 102 \\ 17x_{41} + 17x_{42} &\leq 108 \\ 12x_{11} + 8x_{12} &\leq 104 \\ 14x_{21} + 12x_{22} &\leq 112 \\ 16x_{31} + 14x_{32} &\leq 114 \\ 18x_{41} + 18x_{42} &\leq 118 \\ x_{11} \geq 0, x_{21} - x_{11} \geq 0, x_{31} - x_{21} \geq 0, x_{41} - x_{31} \geq 0 \\ x_{12} \geq 0, x_{22} - x_{12} \geq 0, x_{32} - x_{22} \geq 0, x_{42} - x_{32} \geq 0 \end{aligned} \quad (9.2)$$

جواب‌های بهینه‌ی مساله‌ی (۹.۲) با روش الفبایی بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1^* &= (\tilde{x}_{11}^*, \tilde{x}_{21}^*, \tilde{x}_{31}^*, \tilde{x}_{41}^*) = (0, 0, 0, 0) \\ \tilde{x}_2^* &= (\tilde{x}_{12}^*, \tilde{x}_{22}^*, \tilde{x}_{32}^*, \tilde{x}_{42}^*) = (0, 0, 6/35, 6/35) \\ \tilde{z}^* &= (0, 0, 99/165, 132/22) \end{aligned} \quad (10.2)$$

قابل ذکر است با توجه به عملیات حساب فازی نادرست جواب بهینه بدست آمده از روش داس و همکاران [۲۵] بنابر تعریف (۲.۶.۱) برای مساله‌ی (۹.۲) نشدنی است.

فصل ۳

برنامه‌ریزی کسری

۱.۳ برنامه‌ریزی کسری خطی

۱.۱.۳ مقدمه

برنامه‌ریزی ریاضی^۱ ابزاری سودمند برای مطالعه و تحلیل مسائل مختلف است. از زمان شروع استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی ریاضی تاکنون، تحقیقات اجرایی با بهره‌گیری از الگوریتم‌های مختلف نظری صورت گرفته است. توسعه این الگوریتم‌ها به عوامل متعددی از جمله توانایی پژوهشگر در فرمول‌بندی چارچوب ریاضی مسائل واقعی، وجود الگوریتم متناسب برای حل مدل (برای مثال الگوریتم سیمپلکس در برنامه‌ریزی خطی)، جمع‌آوری یافته‌های تجربی برای بدست آوردن راه‌حل‌های کافی مسائل واقعی و در نهایت وجود ابزارهای مفید برای اجرای الگوریتم‌ها وابسته است.

در بهینه‌سازی ریاضی سعی بر ساده‌سازی و واقع‌گرا کردن الگوریتم است. خطی‌سازی نمونه بارزی از ساده کردن الگوریتم‌هاست. علاوه بر این به منظور لحاظ کردن ویژگی‌های غیرخطی و افزایش تعداد تصمیم‌گیری، استفاده از بهینه‌سازی ریاضی با فرم‌های پیچیده (غیرخطی) و با اهداف چندگانه ضروری است.

در بسیاری از مسائل عملی، بهینه کردن نسبت اهداف از بهینه کردن هر هدف به تنهایی دید

¹mathematical programming

و بینش بهتری ارائه می‌کند. برنامه‌ریزی کسری خطی (LFP)^۱ معمول‌ترین نوع بهینه‌سازی ریاضی با اهداف نسبتی^۲ است. موارد کاربرد تکنیک‌های برنامه‌ریزی کسری با موارد کاربرد برنامه‌ریزی خطی و تکنیک‌های تصمیم‌گیری چندمعیاره (MCDM)^۳ یکسان است. به منظور مطالعه کارایی نسبی در زمینه پایداری مسائل مختلف، برنامه‌ریزی کسری بسیار کاراتر از سایر روش‌ها عمل می‌کند.

همچنین برخی مواقع تصمیم‌گیران در شرایط واقعی با تصمیم بهینه‌سازی نسبت‌های دارای به فروش، هزینه واقعی به هزینه استاندارد، میزان تولید به استخدام نیروی کار مواجهند که در این موارد نیز استفاده از برنامه‌ریزی کسری روشی مناسب خواهد بود.

بررسی موضوعی نشان‌دهنده کاربرد برنامه‌ریزی کسری در مسائل مختلف تخصیص منابع، حمل‌ونقل، تأمین مالی، مکان‌یابی، تولید، فرآیندهای تصادفی، نظریه اطلاعات، جبر خطی کاربردی، برنامه‌ریزی بزرگ مقیاس، نظریه بازی‌ها و غیره است.

برنامه‌ریزی کسری را نویسندگان بسیاری بررسی کرده‌اند. همچنین در کتاب‌های بسیاری نیز به این موضوع پرداخته شده است. در برخی موارد در مسائل مدیریتی حداکثر کردن دو هدف نسبی (مانند نسبت سود به هزینه و کیفیت) با یکدیگر در تضادند و یا در یک مسئله برنامه‌ریزی، بهینه‌سازی چند هدف نسبتی به طور همزمان مد نظر است. این گونه موارد درواقع مسائل برنامه‌ریزی کسری با اهداف چندگانه (MOLFPP)^۴ می‌باشند.

مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی به دلیل کاربرد آن در بسیاری از زمینه‌های مهم مورد توجه بسیاری از تحقیقات قرار گرفته است. چندین روش برای حل مسئله (LFP) مانند روش تغییر متغیر معرفی شده توسط چارنز^۵ و کوپر^۶ [۱۶] و روش تابع هدف به روز شده توسط بیتران^۷ و نویس^۸ [۱۰] پیشنهاد شده است. روش اول مسئله (LFP) را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌کند و از تغییر شکل متغیر استفاده می‌کند که یک عدد مشخص است و (LFP) را به یک مسئله (LP)^۹ تبدیل می‌کند. و روش دوم بسته به روزرسانی شیب محلی تابع هدف کسری در نقاط متوالی، توالی برنامه‌های خطی در برنامه‌ریزی خطی را حل می‌کند. اما برای حل این دنباله، گاهی اوقات ممکن است نیاز به تکرار زیاد داشته باشیم. همچنین برخی از جنبه‌های مربوط به تجزیه و تحلیل دوگانگی و حساسیت در برنامه‌ریزی کسری خطی توسط بیترن^{۱۰} و مگنت^{۱۱} و همچنین سینگ^{۱۲} در [۱۱، ۱۰۲] مورد بحث قرار گرفت که در آن یک

^۱Linear Fractional Programming

^۲در این نوع برنامه‌ریزی، اهداف به صورت ماکزیمم یا مینیمم کردن نسبت دو تابع است.

^۳Multi Criteria Decision Making

^۴Multi Objective linear Fractional Programming Problem

^۵Charnes

^۶Cooper

^۷Bitran

^۸Novaes

^۹Linear Programming

^{۱۰}Bitran

^{۱۱}Magnanti

^{۱۲}Sing

مطالعه مفید در مورد شرایط مطلوبیت در برنامه‌ریزی کسری با فرض مثبت بودن مخرج تابع هدف انجام گرفت. اسوارپ^۱ [۱۰۸] روش شناخته شده سیمپلکس را برای حل (LFP) گسترش داد و نتیجه گرفت روش جدید برای موارد پیچیده قابل حل نیست. تنتوی^۲ [۱۱۱] یک روش جهت شدنی را پیشنهاد کرد که ایده اصلی این روش برای حل مسائل (LFP) و حرکت در منطقه شدنی از طریق دنباله‌ای از نقاط در جهتی است که عملکرد هدف را بهبود ببخشد. تنتوی [۱۱۲] همچنین یک روش دوگان را برای حل یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی ارائه داد که تکنیک دیگری برای حل (LFP) ایجاد می‌کند که می‌تواند برای تحلیل حساسیت استفاده شود. عفتی^۳ و پاکدامن [۴۷] روشی را برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با استفاده از فاصله گزاری پیشنهاد کردند. روشی برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه مبتنی بر تقریب سری تیلور توسط پرامانیک^۴ و همکاران [۹۰] ارائه شد. تنتوی [۱۱۳]، روش جدیدی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با ایجاد تغییر متغیر برای تابع هدف با نقطه اولیه ثابت پیشنهاد داد. اوزکوک^۵ [۸۴] یک الگوریتم تکراری جدید، مبتنی بر تعریف (ε, δ) ، برای یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی (LFP) ارائه داد و از آنجا که تابع هدف در هر نقطه از منطقه عملیاتی پیوسته است، با ترکیب شرایط همگرایی و عملکرد هدف مسئله (LFP) یک محدودیت تکراری ایجاد کرد و از طریق این محدودیت تکراری، یک مسئله جدید برنامه‌ریزی خطی تکراری (LP) ساخت و جواب بهینه مسئله را بدست آورد. آباد و همکارانش [۴] دو روش جدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی عددصحیح (ILFP)^۶ پیشنهاد دادند در هر روش، از دو مدل فرعی برای بدست آوردن دامنه تابع هدف استفاده کردند. یک مدل جدید برای مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با توابع مقدار مطلق توسط داس و همکاران [۲۳] ارائه شد. ماند^۷ [۸۱] به بررسی سه روش حل برنامه‌ریزی کسری خطی پرداخت. پارک^۸ و لیم^۹ [۸۷] یک رویکرد پارامتریک، از روش‌های تفکیک‌پذیر برای حل (ILFP) را مطالعه کردند که در آن تمام توابع در هدف و محدودیت‌ها خطی و همه متغیرها عدد صحیح می‌باشند. لیو^{۱۰} و همکاران [۷۳] یک الگوریتم جدید بهینه‌سازی پیشنهاد دادند، که می‌تواند دسته‌ای از مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی را در مقیاس بزرگ بهتر حل کند. یک رویکرد برنامه‌ریزی کسری خطی تصادفی (SLFP)^{۱۱} برای پشتیبانی از مدیریت پایدار پسماندهای جامد شهری تحت عدم اطمینان توسعه

¹Swarup

²Tantawy

³Effati

⁴Pramanik

⁵Ozok

⁶Integers Linear Fractional Programming

⁷Mond

⁸Park

⁹Lim

¹⁰Liu

¹¹Stochastic Linear Fractional Programming

یافته توسط هانگ^۱ و زها^۲ [۱۲۷] مطرح شد. کاوسر^۳ و ادهمی^۴ [۶۴] به رویکرد تصادفی مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه پرداختند. تنتوی [۱۱۰] روش جدیدی برای حل مسئله‌ای پیشنهاد داد که در آن تابع هدف از نوع کسری خطی است و محدودیت‌ها به صورت نابرابری‌های خطی می‌باشد. پال^۵ و همکاران [۸۵] یک روش برنامه‌ریزی هدف (GP)^۶ برای مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چند هدفه (MOLFPP) ارائه دادند. کوپتا^۷ و چاکرابورتی^۸ [۱۴] یک روش حل برای مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه ارائه دادند، که یک فرم برنامه‌ریزی خطی چندهدفه را معادل مسئله اصلی تشکیل داده و به حل آن پرداختند. فونگ^۹ و تووی^{۱۰} [۸۸] یک روش یکپارچه کارآمد برای حل کلاس گسترده‌ای از مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تعمیم یافته ارائه دادند. این کلاس شامل مواردی از قبیل: بهینه‌سازی حداکثر نقطه‌ای یا حداقل نقطه‌ای تعداد محدودی از نسبت‌های توابع خطی، بهینه‌سازی مجموع یا حاصل از این نسبت‌ها است. کنو^{۱۱} و فوکایشی^{۱۲} [۶۶] نشان دادند که از الگوریتم شاخه‌ای^{۱۳} و مقید می‌توان به عنوان الگوریتم عملی برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی (MOLFPP) و مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی (LFP) استفاده کرد. ولف^{۱۴} [۱۲۳] یک روش برای تعیین راه‌حل بهینه از مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی توصیف کرد. این روش عمدتاً براساس تحلیل پارامتری یک مسئله خطی است. در حالی که الگوریتم‌های موجود برای برنامه‌های کسری خطی صرفاً در تعیین راه‌حل بهینه متمرکز هستند، روش توصیف شده بینش و اطلاعات ارزشمندی را در مورد تصمیم‌گیری اساسی برای تصمیم گیرنده فراهم می‌کند. جیائو^{۱۵} و همکارانش [۵۸] یک الگوریتم شاخه‌ای و مقید برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تعمیم یافته (GLFP)^{۱۶} ارائه دادند. این کلاس شامل مواردی از قبیل: به حداقل رساندن یک جمع، یا خطای حاصل از تعداد محدودی از نسبت‌های توابع خطی، برنامه‌ریزی ضرب خطی، برنامه‌ریزی چندجمله‌ای و غیره است.

¹Huang²Zhu³Kausar⁴Adhami⁵Pal⁶Goal Programming⁷Gupta⁸Chakraborty⁹Phuong¹⁰Tuy¹¹Konno¹²Fukaishi¹³Abranch¹⁴Wolf¹⁵Jiao¹⁶Generalized Linear Fractional Programming

۲.۱.۳ مدل برنامه‌ریزی کسری خطی

فرم عمومی برنامه‌ریزی کسری خطی (LFP) بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \phi(x) &= \frac{c^t x + \alpha}{d^t x + \beta} \\ s.t. \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \\ x \in R^n; c^t, d^t &\in R^n, A \in R^{m \times n}; \alpha, \beta \in R \end{aligned} \quad (1.3)$$

البته برای برخی مقادیر x ممکن است $d^t x + \beta$ برابر صفر شود. در این گونه موارد می‌توان محدودیت را این‌گونه بیان کرد:

$$[x \geq 0, Ax \leq b] \rightarrow [d^t x + \beta > 0]$$

یا

$$[x \geq 0, Ax \leq b] \rightarrow [d^t x + \beta < 0]$$

در اینجا برای سهولت بحث فرض می‌شود شرایط زیر برقرار باشد:

$$[x \geq 0, Ax \leq b] \rightarrow [d^t x + \beta > 0]$$

برنامه‌ریزی کسری خطی بالا را بصورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \max \phi(x) &= \frac{N(x)}{D(x)} \\ s.t. \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

در برنامه‌ریزی کسری مقعر، علاوه بر محدودیت‌های برنامه محدب، x محدب می‌باشد و $N(x)$ با توجه به x و $D(x)$ مقعر است. این الگو به برنامه‌ریزی کسری مقعر-محدب موسوم است. باید توجه کرد که در اینجا تابع هدف عموماً یک تابع مقعر نیست. مقعر بودن ویژگی‌ای است که به ما اجازه می‌دهد حداکثر یک تابع را با توجه به یک مجموعه محدب به دست آوریم. برنامه زیر در صورتی که $N(\cdot)$ در Δ (مشروط به $N(\lambda) \geq 0$ و $\lambda \in \Delta$) مقعر و $D(\cdot)$ در Δ محدب

و مثبت باشد، برنامه‌ریزی کسری محدب – مقعر استاندارد^۱ نامیده می‌شود.

$$\begin{aligned} \max \phi(x) &= \frac{N(x)}{D(x)} \\ s.t. \\ Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \\ x \in \Delta = \{x : Ax \leq b, x \geq 0\} &\Rightarrow D(x) > 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

برنامه‌ریزی کسری خطی (LFP) با حل دو برنامه خطی، بهینه می‌شود. چنانچه برنامه‌ریزی کسری خطی یک جواب بهینه محدود داشته باشد، تنها کافی است یکی از برنامه‌های خطی بسته به علامت مخرج کسر حل شود. چارنز^۲ و کوپر^۳ [۱۶] با به کارگیری روشی، برنامه‌ریزی کسری خطی را به برنامه‌ریزی خطی ساده تبدیل کردند. روش کار آنها در قضیه‌های زیر آمده است:

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنید $y = tx$ و $t = (d^t x + \beta)^{-1}$ و همچنین نقطه‌ای بصورت $(y, 0)$ با $y \geq 0$ در ناحیه موجه برنامه‌ریزی خطی زیر وجود نداشته باشد، آنگاه برنامه‌ریزی کسری (۱.۳) را می‌توان به برنامه‌ریزی خطی ساده زیر تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} \max c^t y + \alpha t \\ s.t. \\ d^t y + \beta t &\leq 1 \\ Ay - bt &\leq 0 \\ t > 0, y &\geq 0, y \in R^n, t \in R \end{aligned} \quad (4.3)$$

علاوه بر این، برنامه‌ریزی کسری (۳.۳) را نیز بصورت زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \max tN(y/t) \\ s.t. \\ A(y/t) - b &\leq 0 \\ tD(y/t) &\leq 1 \\ t > 0, y &\geq 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

قضیه ۲.۱.۳. چنانچه برنامه‌ریزی کسری (۳.۳) در نقطه x^* به حداکثر برسد، تبدیل منطبق با آن یعنی (۵.۳) در نقطه (t^*, y^*) به همان ارزش ماکزیمم دست می‌یابد.

¹standard concave-convex fractional programming

²Charns

³Cooper

اگر به جای اینکه $N(\cdot)$ در رابطه (۳.۳) مقعر باشد، $D(\cdot)$ در Δ مقعر و مثبت و $N(\cdot)$ برای هر $x \in \Delta$ منفی باشد، داریم:

$$\max \frac{N(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \min \frac{-N(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \max \frac{D(x)}{-N(x)} \quad (x \in \Delta)$$

که $-N(x)$ محدب و مثبت است. با استفاده از قضیه (۲.۱.۳) و تحت این فروض، برنامه‌ریزی کسری (۳.۳) به شکل زیر خطی می‌شود:

$$\max t D(y/t)$$

$$s.t.$$

$$A(y/t) - b \leq 0 \quad (۶.۳)$$

$$-tN(y/t) \leq 1$$

$$t > 0, y \geq 0$$

۳.۱.۳ مثال عددی

مثال ۱.۱.۳

$$\max \tilde{z} = \frac{x_1 - x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 2}$$

$$s.t.$$

$$x_1 + x_2 \leq 2 \quad (۷.۳)$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = xt$ و $t = \frac{1}{x_1 + x_2 + 2}$ داریم:

$$\max \tilde{z} = y_1 - y_2 + t$$

$$s.t.$$

$$y_1 + y_2 + 2t \leq 1 \quad (۸.۳)$$

$$y_1 + y_2 - 2t \leq 0$$

$$y_1 - y_2 - t \leq 0$$

$$y_1, y_2, t \geq 0.$$

لذا جواب‌های بهینه برای مسئله $x_1 = 1, x_2 = 0$ و $z = 0.667$ می‌باشند.

مثال ۲.۱.۳. بیشینه کردن درآمد ناخالص برای محصولات کشاورزی با کاهش آب مصرفی برای هر محصول با توجه به جدول ۱.۳:

جدول ۱.۳: ضرایب فنی

محصولات زراعی	گندم	جو	ذرت	برنج	کلزا	آفتاب‌گردان
هدف‌ها و محدودیت‌ها	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
ماکزیمم درآمد ناخالص	۱۱۲۷/۵	۱۵۶۰	۳۵۸۵	۴۴۰۰	۱۰۷۳	۲۵
مینیمم آب مصرفی	۱۰۰۰۰	۷۰۰۰	۱۷۰۰۰	۲۵۰۰۰	۹۰۰۰	۵۰۰۰
زمین ۱۳۵۰۰۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱
کود ۷۹۶۰۹۵۰۰	۶۰۰	۴۰۰	۸۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۵۰۰

$$\max = \frac{1127/5x_1 + 1560x_2 + 3585x_3 + 4400x_4 + 1073x_5 + 25x_6}{10000x_1 + 7000x_2 + 17000x_3 + 25000x_4 + 9000x_5 + 5000x_6}$$

s.t.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 135000$$

$$600x_1 + 400x_2 + 800x_3 + 400x_4 + 500x_5 + 500x_6 \leq 79609500$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0$$

با حل مسئله جواب‌های بهینه بصورت جدول ۲.۳ زیر بدست می‌آیند:

جدول ۲.۳: مقادیر حاصل از برنامه‌ریزی کسری

محصول	بیشترین درآمد
گندم	۶۴۰۰۰
جو	۱۲۶۰۰
ذرت	۲۵۰۰۰
برنج	۰
کلزا	۰
آفتاب‌گردان	۰
تابع هدف	۶۱۹۳۷۴۰۰

۲.۳ برنامه‌ریزی کسری فازی

۱.۲.۳ مقدمه

از آنجایی که برنامه‌ریزی کسری خطی یک تکنیک ریاضی برای رسیدن به جواب بهینه‌ی مطلوب برای فعالیت‌های معلوم است، لذا در مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی فرض بر این است تمام پارامترهای مسئله بطور دقیق مشخص شوند. اما از آنجایی که مقادیر مشاهده شده در جهان واقعی به دلیل اطلاعات ناقص یا غیرقابل دستیابی نادقیق و مبهم می‌باشند، یک روش کارا برای نمایش مقادیر نادقیق و مبهم استفاده از مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی از طریق توابع مجموعه‌های فازی می‌باشد و بدین ترتیب یک مسئله‌ی برنامه‌ریزی کسری خطی فازی به وجود می‌آید.

بر این اساس محققین و پژوهشگران زیادی بخش مهمی از تحقیقات خود را صرف ایجاد روش‌های جدید و کارا برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی کردند. مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی (FFLFP)^۱ که در آن همه پارامترها و متغیرها^۲ توسط اعداد فازی نشان داده می‌شوند. در مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با اعداد دوزنقه‌ای، قیود سمت راست، متغیرهای تصمیم‌گیری، ضرایب متغیرهای تصمیم‌گیری و تابع هدف همگی با اعداد فازی دوزنقه‌ای نشان داده می‌شوند، که روش مورد استفاده در این پایان‌نامه خواهد بود.

ساکاوا^۳ و یان^۴ [۹۷] یک مدل برای حل کردن مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه (MOLFP) برای یک فازی پیشنهاد کردند. یک مفهوم عمومی از جواب بهینه پارتو با استفاده از دو نوع اهداف فازی (فازی مساوی و مینیمم فازی) توسط یان و هکاران [۱۰۰] معرفی شد. پاپ^۵ و مینسن^۶ [۸۹] یک مدل برای حل کردن مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با اعداد فازی مثلثی پیشنهاد کردند. استانوویچ^۷ و مینسن [۱۰۶، ۱۰۷] روش‌های را برای حل کردن مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با استفاده از مسائل برنامه‌ریزی کسری تماماً فازی با اعداد مثلثی [۸۹] را بررسی کردند. لی^۸ و چن^۹ [۷۲] با استفاده از مفهوم و تعریف ریاضی بهینه فازی، فرم کلی برنامه‌ریزی کسری خطی فازی را حل کردند. داس و همکاران [۲۴] به توسعه یک الگوریتم کارآمد برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی پرداختند. برای این منظور، یک روش جدید از ترکیب روش چارنز و کوپر

^۱Fully Fuzzy Linear Fractional Programming

^۲Variable

^۳Sakawa

^۴Yano

^۵Pop

^۶Minasian

^۷Stanojevic

^۸Li

^۹Chen

و مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه بدست آوردند. چین‌دیار^۱ و موتوکومار^۲ [۲۰] استفاده از مقدار (α, r) بهینه قابل قبول را برای یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با ضرایب فازی و متغیرهای تصمیم‌گیری فازی، و همچنین توسعه یک روش برای محاسبه آنها پیشنهاد کردند. ورامانی^۳ و سوماتی^۴ [۱۱۸] یک الگوریتم جدید برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی بیان کردند که باعث به حداقل رساندن متغیرهای انحرافی شد. مهلاوات^۵ و کومار [۷۷] با استفاده از یک تابع رتبه‌بندی خطی، یک روش برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی ارائه دادند. تیواری^۶ و همکاران [۲۵] برنامه‌ریزی کسری خطی فازی را با قضیه یک فازی بررسی کردند. پاپ و همکاران [۱۰۵] رویکرد مجموعه‌ای فازی برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه را موضوع انتخابی خود برای مطالعه قرار دادند. رویکرد سری تیلور برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی چندهدفه توسط توکساری^۷ [۱۱۵] مورد بررسی قرار گرفت. صفایی [۹۵] روشی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی (FFLFP) که در آن تمام پارامترها و متغیرها اعداد فازی مثلثی هستند، پیشنهاد کرد که در روش پیشنهادی، مسئله به سه مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با محدودیت‌های متغیر تجزیه شد، راه‌حل بهینه فازی برای مسئله داده شده بدست آمد. ابراهیم‌نژاد و همکاران [۴۲] یک روش کارآمد برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی کاملاً فازی ارائه دادند در این روش، ابتدا توسط پارامتر آلفا، تابع هدف و محدودیت‌های، مسئله به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دوهدفه تبدیل سپس به کمک برنامه‌ریزی چندهدفه حل شد. ابراهیم‌نژاد و همکاران [۱۱۹] یک تابع عضویت غیرخطی برای هر هدف مبهم تعریف کردند و با استفاده از تابع عضویت غیرخطی، مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه را به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چندهدفه تبدیل و حل کردند. دب^۸ [۲۸] ابتدا مسئله برنامه‌ریزی کسری فازی را به مسئله برنامه‌ریزی خطی فازی (FLP) با استفاده از روش چارنز و کوپر تبدیل و سپس از رتبه‌بندی برای تبدیل برنامه‌ریزی خطی فازی به مسئله برنامه‌ریزی خطی (LP) استفاده کرد، روش پیشنهادی با استفاده از روش سیمپلکس برای یافتن راه‌حل بهینه مسئله حل شد. داس و همکارش [۲۲] مفاهیم رویکرد ساده رتبه‌بندی بین دو عدد فازی مثلثی را پیشنهاد کردند. همچنین برای محاسبه مرزهای بالا، میانی و پایینی مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی سه هدفه را تشکیل دادند. داس و همکاران [۲۶] مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی (FLFP)^۹ با اعداد فازی دوزنقه‌ای را مطالعه کردند که در آن توابع هدف اعداد فازی و محدودیت‌ها اعداد واقعی هستند. در این مطالعه، برای دستیابی

¹Chinnadurai²Muthukumar³Veeramani⁴Sumathi⁵Mehlawat⁶Tiwari⁷Toksari⁸Deb⁹Fuzzy Linear Fractional Programming

به راه‌حل بهینه فازی با متغیرها و پارامترهای نامحدود، روش کارآمد جدیدی برای مسئله (FLFP) ارائه شده است. پرمای^۱ [۹۱] روش حلی برای برنامه‌ریزی کسری خطی فازی با اعداد دوزنقه‌ای بیان کرد که با تبدیل به برنامه‌ریزی خطی چندهدفه جواب بهینه را بدست آورد. ساکاوا و نیشیزاکی^۲ [۹۸، ۹۹] برنامه‌ریزی فازی تعاملی را برای دو سطح برنامه‌ریزی کسری خطی با پارامترهای فازی ارائه دادند و با استفاده از مجموعه سطح پارامترهای فازی، مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دو فازی مربوطه را حل کردند. دب و همکارش [۲۷] به مطالعه مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی (FLFP) با استفاده از روش رتبه‌بندی، که در آن تمام پارامترها و متغیرها با اعداد فازی مثلثی مشخص می‌شوند، پرداختند و یک روش محاسباتی برای بدست آوردن جواب بهینه ارائه دادند. مهرا^۳ و همکارانش [۷۸] دو مفهوم جدید از (α, β) راه‌حل بهینه قابل قبول و (α, β) مقدار بهینه قابل قبول از یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی با ضرایب فازی، ارائه دادند. رامیک^۴ [۹۲] یک کلاس از مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی (FLP) مبتنی بر روابط فازی معرفی کرد، مفاهیم راه‌حل‌های کارآمد و ناکارآمد و کلاس مسائل (LP) و همچنین مسائل (FLP) و قضیه‌های دوگانگی ضعیف و قوی را مورد بررسی قرار داد. ابوسینا^۵ و باکی^۶ [۵] یک روش برنامه‌ریزی هدف فازی (FGP)^۷ برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی چندهدفه (MOLFP) ارائه دادند. دایاب^۸ [۳۲] روش جدیدی برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی با استفاده از تابع رتبه‌بندی خطی ارائه کرد. عمار^۹ و موامر^{۱۰} [۶] الگوریتمی برای حل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی فازی (FLFP) معرفی کردند، که در آن همه متغیرها و ضرایب تابع هدف و محدودیت‌ها عدد فازی هستند. دب^{۱۱} و دی^{۱۲} [۲۹] به مطالعه مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی (FFLFP) با استفاده از روش نمایش میانگین پرداختند که تمام پارامترها و متغیرها اعداد فازی دوزنقه‌ای انتخاب شدند. لوگاناتان^{۱۳} و گانسان^{۱۴} [۷۴] روشی را برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی پیشنهاد دادند، که در آن تمام پارامترها و متغیرها اعداد فازی مثلثی هستند.

¹Pramy

²Nishizaki

³Mehra

⁴Ramik

⁵Abo-Sinna

⁶Baky

⁷Fuzzy Goal Programming

⁸Dheyab

⁹Ammar

¹⁰Muamer

¹¹Deb

¹²De

¹³Loganathan

¹⁴Ganesan

۲.۲.۳ روش حل

در این قسمت به ارائه روش عدالت‌پناه برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی [۲۴] می‌پردازیم. فرم عمومی برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} &= \frac{\tilde{c}^t \tilde{x} + \tilde{p}}{\tilde{d}^t \tilde{x} + \tilde{q}} \\ s.t. \end{aligned} \quad (9.3)$$

$$\tilde{A}\tilde{x} \leq \tilde{b}$$

$$\tilde{x} \geq 0$$

نخست با استفاده از تبدیل چارنر-کوپر مسئله را به یک مسئله LP تماماً فازی تبدیل می‌کنیم و مسئله زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \max \tilde{c}^t \tilde{y} + \tilde{p}\tilde{t} \\ s.t. \\ \tilde{A}\tilde{y} - \tilde{b}\tilde{t} \leq \tilde{0} \\ \tilde{d}^t \tilde{y} + \tilde{q}\tilde{t} \leq \tilde{1} \\ \tilde{y}, \tilde{t} \geq 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

فرض کنید همه پارامترها $\tilde{y}, \tilde{c}, \tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{q}, \tilde{b}, \tilde{A}$ و $\tilde{z}$ با اعداد مثلثی $((y)^n, (y)^m, (y)^r)$ ،
 $((q)^n, (q)^m, (q)^r)$ ، $((d^t)^n, (d^t)^m, (d^t)^r)$ ، $((p)^n, (p)^m, (p)^r)$ ، $((c^t)^n, (c^t)^m, (c^t)^r)$
 $((a)^n, (a)^m, (a)^r)$ ، $((b)^n, (b)^m, (b)^r)$ و (z_1, z_2, z_3) نشان داده شوند. حال با توجه به تعریف‌های
 حساب فازی مدل ماکزیمم تابع هدف اولیه را با استفاده از اعداد فازی مثلثی بازنویسی
 می‌نماییم که در زیر آورده شده:

$$\begin{aligned} \max(z_1, z_2, z_3) &= ((c^t y)^n, (c^t y)^m, (c^t y)^r) + ((pt)^n, (pt)^m, (pt)^r) \\ s.t. \\ ((a)^n, (a)^m, (a)^r) \otimes ((y)^n, (y)^m, (y)^r) - ((bt)^n, (bt)^m, (bt)^r) &\leq \tilde{0} \\ ((d^t y)^n, (d^t y)^m, (d^t y)^r) + ((qt)^n, (qt)^m, (qt)^r) &\leq \tilde{1} \\ ((y)^n, (y)^m, (y)^r) \geq 0 \quad ((t)^n, (t)^m, (t)^r) &\geq 0 \end{aligned} \quad (11.3)$$

روش پیشنهادی برای حل (FFLFP) بصورت خلاصه زیر می‌باشد:
گام ۱: با توجه به تعاریف حساب فازی مسئله (۱۱.۳) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max(z_1, z_2, z_3) &= ((c^t y + pt)^n, (c^t y + pt)^m, (c^t y + pt)^r) \\ s.t. \\ ((ay)^n, (ay)^m, (ay)^r) - ((bt)^n, (bt)^m, (bt)^r) &\leq \tilde{0} \\ ((d^t y + qt)^n, (d^t y + qt)^m, (d^t y + qt)^r) &\leq \tilde{1} \\ ((y)^n, (y)^m, (y)^r) \geq 0 \quad ((t)^n, (t)^m, (t)^r) &\geq 0 \end{aligned} \quad (12.3)$$

گام ۲: به بیان دیگر مسئله زیر را داریم:
(۱۳.۳)

$$\max(z_1, z_2, z_3) = ((c^t y + pt)^n, (c^t y + pt)^m, (c^t y + pt)^r)$$

s.t.

$$(ay)^n \leq (bt)^n, (ay)^m \leq (bt)^m, (ay)^r \leq (bt)^r,$$

$$(d^t y + qt)^n \leq 1, (d^t y + qt)^m \leq 1, (d^t y + qt)^r \leq 1,$$

$$(y)^n \geq 0, (y)^m - (y)^n \geq 0, (y)^r - (y)^m \geq 0, (t)^n \geq 0, (t)^m - (t)^n \geq 0, (t)^r - (t)^m \geq 0.$$

گام ۳: حال مسئله (MOLP) را برای تابع هدف بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\max z_1 = (c^t y + pt)^n$$

$$\max z_2 = (c^t y + pt)^n - (c^t y + pt)^m$$

$$\max z_3 = (c^t y + pt)^n + (c^t y + pt)^r$$

s.t.

$$(ay)^n - (bt)^r \leq 0$$

$$(ay)^n - (bt)^r - ((ay)^m - (bt)^m) \leq 0$$

$$(ay)^n - (bt)^r + ((ay)^r - (bt)^n) \leq 0$$

$$(d^t y + qt)^n \leq 1$$

$$(d^t y + qt)^n - (d^t y + qt)^m \leq 0$$

$$(d^t y + qt)^n + (d^t y + qt)^r \leq 2$$

$$(y)^n \geq 0, (y)^m - (y)^n \geq 0, (y)^r - (y)^m \geq 0$$

$$(t)^n \geq 0, (t)^m - (t)^n \geq 0, (t)^r - (t)^m \geq 0.$$

(۱۴.۳)

گام ۴: تابع هدف را برای z_1 با تمامی شرایط حل می‌کنیم:

$$\max z_1 = (c^t y + pt)^n$$

s.t.

$$(ay)^n - (bt)^r \leq 0$$

$$(ay)^n - (bt)^r - ((ay)^m - (bt)^m) \leq 0$$

$$(ay)^n - (bt)^r + ((ay)^r - (bt)^n) \leq 0$$

$$(d^t y + qt)^n \leq 1$$

$$(d^t y + qt)^n - (d^t y + qt)^m \leq 0$$

$$(d^t y + qt)^n + (d^t y + qt)^r \leq 2$$

$$(y)^n \geq 0, (y)^m - (y)^n \geq 0, (y)^r - (y)^m \geq 0$$

$$(t)^n \geq 0, (t)^m - (t)^n \geq 0, (t)^r - (t)^m \geq 0.$$

(۱۵.۳)

از آنجا که z^* جواب بهینه بدست آمده است به گام بعدی می‌رویم.
گام ۵: در این مرحله با توجه به روش الفبایی مسائل چند هدفه جواب بهینه بدست آمده در مرحله قبل را به شرایط مسئله اضافه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max z_4 &= (c^t y + pt)^n - (c^t y + pt)^m \\ s.t. \\ (c^t y + pt)^n &= z_4^* \\ (ay)^n - (bt)^r &\leq 0 \\ (ay)^n - (bt)^r - ((ay)^m - (bt)^m) &\leq 0 \\ (ay)^n - (bt)^r + ((ay)^r - (bt)^n) &\leq 0 \\ (d^t y + qt)^n &\leq 1 \\ (d^t y + qt)^n - (d^t y + qt)^m &\leq 0 \\ (d^t y + qt)^n + (d^t y + qt)^r &\leq 2 \\ (y)^n \geq 0, (y)^m - (y)^n \geq 0, (y)^r - (y)^m &\geq 0 \\ (t)^n \geq 0, (t)^m - (t)^n \geq 0, (t)^r - (t)^m &\geq 0. \end{aligned} \quad (16.3)$$

از آنجا که z^* جواب بهینه مسئله (۱۶.۳) است به گام بعدی می‌رویم.
گام ۶: مسئله زیر را با توجه به جواب بهینه که از گام ۵ بدست آمده حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max z_5 &= (c^t y + pt)^n + (c^t y + pt)^r \\ s.t. \\ (c^t y + pt)^n - (c^t y + pt)^m &= z_5^* \\ (c^t y + pt)^n &= z_4^* \\ (ay)^n - (bt)^r &\leq 0 \\ (ay)^n - (bt)^r - ((ay)^m - (bt)^m) &\leq 0 \\ (ay)^n - (bt)^r + ((ay)^r - (bt)^n) &\leq 0 \\ (d^t y + qt)^n &\leq 1 \\ (d^t y + qt)^n - (d^t y + qt)^m &\leq 0 \\ (d^t y + qt)^n + (d^t y + qt)^r &\leq 2 \\ (y)^n \geq 0, (y)^m - (y)^n \geq 0, (y)^r - (y)^m &\geq 0 \\ (t)^n \geq 0, (t)^m - (t)^n \geq 0, (t)^r - (t)^m &\geq 0. \end{aligned} \quad (17.3)$$

از آنجا که z^* جواب بهینه مسئله (۱۷.۳) است جواب بهینه یکتا برای مسئله بدست آمده توقف می‌کنیم.

۳.۲.۳ مثال عددی

مثال ۱.۲.۳

$$\max \tilde{z} = \frac{(3, 6/5, 13)\tilde{x}_1 + (2, 4, 7)\tilde{x}_2 + (1, 2/5, 4)}{(3, 6/5, 13)\tilde{x}_1 + (1, 3, 6)\tilde{x}_2 + (0, 1/5, 3)}$$

s.t.

$$(0, 1/5, 3)\tilde{x}_1 + (1, 2/5, 4)\tilde{x}_2 \leq (3, 6/5, 14)$$

$$(1, 2/5, 4)\tilde{x}_1 + (0, 1, 2)\tilde{x}_2 \leq (3, 4/5, 8)$$

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq 0$$

ابتدا مسئله را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\max(z_1, z_2, z_3) = (3y_{11} + 2y_{21} + t_1, 6/5y_{12} + 4y_{22} + 2/5t_2, 13y_{13} + 7y_{23} + 4t_3)$$

s.t.

$$(0y_{11}, 1/5y_{12}, 3y_{13}) + (1y_{21}, 2/5y_{22}, 4y_{23}) \leq (3t_1, 6/5t_2, 14t_3)$$

$$(1y_{11}, 2/5y_{12}, 4y_{13}) + (0y_{21}, 1y_{22}, 2y_{23}) \leq (3t_1, 4/5t_2, 8t_3)$$

$$(3y_{11}, 6/5y_{12}, 13y_{13}) + (1y_{21}, 3y_{22}, 6y_{23}) + (0t_1, 1/5t_2, 3t_3) \leq (1, 1, 1)$$

$$y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{23}, t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

حال با توجه به روش مسئله داریم:

$$\max(z_1, z_2, z_3) = (3y_{11} + 2y_{21} + t_1, 6/5y_{12} + 4y_{22} + 2/5t_2, 13y_{13} + 7y_{23} + 4t_3)$$

s.t.

$$(0y_{11} + 1y_{21} - 3t_1, 1/5y_{12} + 2/5y_{22} - 6/5t_2, 3y_{13} + 4y_{23} - 14t_3) \leq \tilde{0}$$

$$(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1, 2/5y_{12} + 6/5t_2 - 5t_2, 4y_{13} + 2y_{23} - 8t_3) \leq \tilde{0}$$

$$(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1, 6/5y_{12} + 3y_{22} + 1/5t_2, 13y_{13} + 6y_{23} + 3t_3) \leq \tilde{1}$$

$$y_{11} \geq 0, y_{12} - y_{11} \geq 0, y_{13} - y_{12} \geq 0, y_{21} \geq 0, y_{22} - y_{21} \geq 0, y_{23} - y_{22} \geq 0$$

$$t_1 \geq 0, t_2 - t_1 \geq 0, t_3 - t_2 \geq 0$$

بنابر گام ۳ داریم:

$$\begin{aligned}
\max z_1 &= (3y_{11} + 2y_{21} + t_1) \\
\max z_2 &= (3y_{11} + 2y_{21} + t_1) - (6/5y_{12} + 4y_{22} + 2/5t_2) \\
\max z_3 &= (3y_{11} + 2y_{21} + t_1) + (13y_{13} + 7y_{23} + 4t_3) \\
s.t. \\
(1y_{21} - 3t_1) &\leq 0 \\
(1y_{21} - 3t_1) - (1/5y_{12} + 2/5y_{22} - 6/5t_2) &\leq 0 \\
(1y_{21} - 3t_1) + (3y_{13} + 4y_{23} - 14t_3) &\leq 0 \\
(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1) &\leq 0 \\
(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1) - (2/5y_{12} + 6/5t_2 - 5t_2) &\leq 0 \\
(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1) + (4y_{13} + 2y_{23} - 8t_3) &\leq 0 \\
(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1) &\leq 1 \\
(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1) - (6/5y_{12} + 3y_{22} + 1/5t_2) &\leq 0 \\
(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1) + (13y_{13} + 6y_{23} + 3t_3) &\leq 2 \\
y_{11} \geq 0, y_{12} - y_{11} \geq 0, y_{13} - y_{12} \geq 0, y_{21} \geq 0, y_{22} - y_{21} \geq 0, y_{23} - y_{22} \geq 0 \\
t_1 \geq 0, t_2 - t_1 \geq 0, t_3 - t_2 \geq 0
\end{aligned}$$

اکنون با روش الفبایی داریم:

$$\begin{aligned}
\max z_1 &= (3y_{11} + 2y_{21} + t_1) \\
s.t. \\
(1y_{21} - 3t_1) &\leq 0 \\
(1y_{21} - 3t_1) - (1/5y_{12} + 2/5y_{22} - 6/5t_2) &\leq 0 \\
(1y_{21} - 3t_1) + (3y_{13} + 4y_{23} - 14t_3) &\leq 0 \\
(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1) &\leq 0 \\
(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1) - (2/5y_{12} + 6/5t_2 - 5t_2) &\leq 0 \\
(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1) + (4y_{13} + 2y_{23} - 8t_3) &\leq 0 \\
(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1) &\leq 1 \\
(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1) - (6/5y_{12} + 3y_{22} + 1/5t_2) &\leq 0 \\
(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1) + (13y_{13} + 6y_{23} + 3t_3) &\leq 2 \\
y_{11} \geq 0, y_{12} - y_{11} \geq 0, y_{13} - y_{12} \geq 0, y_{21} \geq 0, y_{22} - y_{21} \geq 0, y_{23} - y_{22} \geq 0 \\
t_1 \geq 0, t_2 - t_1 \geq 0, t_3 - t_2 \geq 0
\end{aligned}$$

مقدار بهینه مسئله $z_1^* = 0/5$ پس مسئله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\max z_2 = (3y_{11} + 2y_{21} + t_1) - (6/5y_{12} + 4y_{22} + 2/5t_2)$$

s.t.

$$(3y_{11} + 2y_{21} + t_1) = 0/5$$

$$(1y_{21} - 3t_1) \leq 0$$

$$(1y_{21} - 3t_1) - (1/5y_{12} + 2/5y_{22} - 6/5t_2) \leq 0$$

$$(1y_{21} - 3t_1) + (3y_{13} + 4y_{23} - 14t_3) \leq 0$$

$$(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1) \leq 0$$

$$(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1) - (2/5y_{12} + 6/5t_2 - 5t_2) \leq 0$$

$$(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1) + (4y_{13} + 2y_{23} - 8t_3) \leq 0$$

$$(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1) \leq 1$$

$$(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1) - (6/5y_{12} + 3y_{22} + 1/5t_2) \leq 0$$

$$(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1) + (13y_{13} + 6y_{23} + 3t_3) \leq 2$$

$$y_{11} \geq 0, y_{12} - y_{11} \geq 0, y_{13} - y_{12} \geq 0, y_{21} \geq 0, y_{22} - y_{21} \geq 0, y_{23} - y_{22} \geq 0$$

$$t_1 \geq 0, t_2 - t_1 \geq 0, t_3 - t_2 \geq 0$$

مقدار بهینه مسئله $z_2^* = 1$ پس مسئله‌ی زیر حل می‌شود:

$$\max z_3 = (3y_{11} + 2y_{21} + t_1) + (13y_{13} + 7y_{23} + 4t_3)$$

s.t.

$$(3y_{11} + 2y_{21} + t_1) - (6/5y_{12} + 4y_{22} + 2/5t_2) = 1$$

$$(3y_{11} + 2y_{21} + t_1) = 0/5$$

$$(1y_{21} - 3t_1) \leq 0$$

$$(1y_{21} - 3t_1) - (1/5y_{12} + 2/5y_{22} - 6/5t_2) \leq 0$$

$$(1y_{21} - 3t_1) + (3y_{13} + 4y_{23} - 14t_3) \leq 0$$

$$(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1) \leq 0$$

$$(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1) - (2/5y_{12} + 6/5t_2 - 5t_2) \leq 0$$

$$(1y_{11} + 6/5t_2 - 3t_1) + (4y_{13} + 2y_{23} - 8t_3) \leq 0$$

$$(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1) \leq 1$$

$$(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1) - (6/5y_{12} + 3y_{22} + 1/5t_2) \leq 0$$

$$(3y_{11} + 1y_{21} + 0t_1) + (13y_{13} + 6y_{23} + 3t_3) \leq 2$$

$$y_{11} \geq 0, y_{12} - y_{11} \geq 0, y_{13} - y_{12} \geq 0, y_{21} \geq 0, y_{22} - y_{21} \geq 0, y_{23} - y_{22} \geq 0$$

$$t_1 \geq 0, t_2 - t_1 \geq 0, t_3 - t_2 \geq 0$$

با استفاده از روش بیان شده جواب‌های بهینه بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1^* &= (\tilde{x}_{11}^*, \tilde{x}_{12}^*, \tilde{x}_{13}^*) = (0, 0, 0) \\ \tilde{x}_2^* &= (\tilde{x}_{21}^*, \tilde{x}_{22}^*, \tilde{x}_{23}^*) = (0/2, 0/2, 0/2) \\ \tilde{z}^* &= (0/5, 1, 1/8)\end{aligned}\quad (18.3)$$

مثال ۲.۲.۳. (برنامه‌ریزی تولید در تایوان): شرکت دالی پیشرو در تولید انواع نوشابه و غذاهای با درجه حرارت پایین در تایوان است. در حال حاضر، دالی قصد دارد بازار جنوب شرقی آسیا را توسعه دهد و سطح محصولات دالی را در بازار چین گسترش دهد. قابل توجه است که، پس از ورود تایوان به سازمان تجارت جهانی، دالی قصد دارد به دنبال اتحاد استراتژیک با شرکت‌های برجسته بین‌المللی و معرفی نام بین‌المللی باشد. در بازار نوشیدنی‌های غیرالکلی داخلی، دالی برای تأمین تقاضای چهار مرکز توزیع در تایچونگ، کیایی، کائوسیونگ و تایپه با تولید در سه کارخانه در چانگوا، تولیو و هسینچو نوشیدنی‌های چای تولید می‌کند. طبق اطلاعات اولیه زیست محیطی، جدول ۳.۳ خلاصه‌ای از منابع احتمالی موجود از سه کارخانه داده شده را ارائه می‌دهد. تقاضای پیش‌بینی از چهار مرکز توزیع در جدول ۴.۳ نشان داده شده است. بدلیل اطلاعات ناقص یا غیرقابل دستیابی سود شرکت حاصل از هر مسیر و ضریب محیطی و پارامترهای مربوطه بطور کلی اعداد نادقیق با توزیع اعداد مثلی هستند. به عنوان مثال، منبع در دسترس چانگوا (۷/۲، ۸، ۸/۸) هزار ده بطری است، تقاضای پیش‌بینی شده از مرکز توزیع تولیو (۶/۲، ۷، ۷/۸) هزار ده بطری، سود هر ده بطری برای چانگوا به تولیو (۸، ۱۰، ۱۰/۸) دلار و هزینه حمل‌ونقل برای هر دوازده بطری چانگوا به تولیو (۸، ۱۰، ۱۰/۸) دلار است. مدیریت دالی می‌خواهد سود را به حداکثر برساند.

جدول ۳.۳: تامین گیاهان

منبع	چانگوا	تولیو	هسینچو
عرضه هزارده بطری	(۷/۲، ۸، ۸/۸)	(۱۲، ۱۴، ۱۶)	(۱۰/۲، ۱۲، ۱۳/۸)

جدول ۴.۳: تقاضای مقصد

مقصد	تایچونگ	کیایی	کائوسیونگ	تایپه
تقاضا هزارده بطری	(۶/۲، ۷، ۷/۸)	(۸/۹، ۱۰، ۱۱/۱)	(۶/۵، ۸، ۹/۵)	(۷/۸، ۹، ۱۰/۲)

جدول ۵.۳: تقاضای مقصد

منبع	تایچونگ	کیایی	کائوسیونگ	تاپیه
چانگوا	(۸, ۱۰, ۱۰/۸)	(۲۰/۴, ۲۲, ۲۴)	(۸, ۱۰, ۱۰/۶)	(۱۸/۸, ۲۰, ۲۲)
تولیو	(۱۴, ۱۵, ۱۶)	(۱۸/۲, ۲۰, ۲۲)	(۱۰, ۱۲, ۱۳)	(۶, ۸, ۸/۸)
هسینچو	(۱۸/۴, ۲۰, ۲۱)	(۹/۶, ۱۲, ۱۳)	(۷/۸, ۱۰, ۱۰/۸)	(۱۴, ۱۵, ۱۶)

جدول ۶.۳: هزینه حمل‌ونقل

منبع	تایچونگ	کیایی	کائوسیونگ	تاپیه
چانگوا	(۱/۵, ۲, ۲/۵)	(۴, ۵, ۶)	(۱/۳, ۲, ۲/۵)	(۳, ۴, ۵)
تولیو	(۲/۵, ۳, ۴)	(۲, ۳, ۴)	(۲/۳, ۳, ۴)	(۱/۵, ۲, ۲/۵)
هسینچو	(۳, ۴, ۵)	(۲, ۳, ۴)	(۱/۵, ۲, ۲/۷)	(۲, ۳, ۴)

$$\max \tilde{z} = \frac{\left\{ \begin{array}{l} (8, 10, 10/8)\tilde{x}_{11} + (20/4, 22, 24)\tilde{x}_{12} + (8, 10, 10/6)\tilde{x}_{13} + \\ (18/8, 20, 22)\tilde{x}_{14} + (14, 15, 16)\tilde{x}_{21} + (18/2, 20, 22)\tilde{x}_{22} + \\ (10, 12, 13)\tilde{x}_{23} + (6, 8, 8/8)\tilde{x}_{24} + (18/4, 20, 21)\tilde{x}_{31} + \\ (9/6, 12, 13)\tilde{x}_{32} + (7/8, 10, 10/8)\tilde{x}_{33} + (14, 15, 16)\tilde{x}_{34} \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} (1/5, 2, 2/5)\tilde{x}_{11} + (4, 5, 6)\tilde{x}_{12} + (1/3, 2, 2/5)\tilde{x}_{13} + (3, 4, 5)\tilde{x}_{14} \\ + (2/5, 3, 4)\tilde{x}_{21} + (2, 3, 4)\tilde{x}_{22} + (2/3, 3, 4)\tilde{x}_{23} + (1/5, 2, 2/5)\tilde{x}_{24} \\ + (3, 4, 5)\tilde{x}_{31} + (2, 3, 4)\tilde{x}_{32} + (1/5, 2, 2/7)\tilde{x}_{33} + (2, 3, 4)\tilde{x}_{34} \end{array} \right\}}$$

s.t.

$$\tilde{x}_{11} + \tilde{x}_{12} + \tilde{x}_{13} + \tilde{x}_{14} \leq (7/2, 8, 8/8)$$

$$\tilde{x}_{21} + \tilde{x}_{22} + \tilde{x}_{23} + \tilde{x}_{24} \leq (12, 14, 16)$$

$$\tilde{x}_{31} + \tilde{x}_{32} + \tilde{x}_{33} + \tilde{x}_{34} \leq (10/2, 12, 13/8)$$

$$\tilde{x}_{11} + \tilde{x}_{21} + \tilde{x}_{31} \geq (6/2, 7, 7/8)$$

$$\tilde{x}_{12} + \tilde{x}_{22} + \tilde{x}_{32} \geq (8/9, 10, 11/1)$$

$$\tilde{x}_{13} + \tilde{x}_{23} + \tilde{x}_{33} \geq (6/5, 8, 9/5)$$

$$\tilde{x}_{14} + \tilde{x}_{24} + \tilde{x}_{34} \geq (7/8, 9, 10/2)$$

$$\tilde{x}_{ij} \geq 0, \tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^l, x_{ij}^r, x_{ij}^m), i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4.$$

بعد از حل مساله و استفاده از مراحل حل جواب‌های بهینه بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$x_{\tilde{1}} = (0, 0, 0), x_{\tilde{2}} = (0, 0, 0/25), x_{\tilde{3}} = (0, 0, 0/625), x_{\tilde{4}} = (7/64, 8, 8)$$

$$x_{\tilde{5}} = (0, 0, 0), x_{\tilde{6}} = (0, 0, 0), x_{\tilde{7}} = (0, 0, 1/45), x_{\tilde{8}} = (12, 14, 14)$$

$$x_{\tilde{9}} = (5/8, 7, 7/5), x_{\tilde{10}} = (8/8, 10, 11/25), x_{\tilde{11}} = (6/4, 8, 8), x_{\tilde{12}} = (5/8, 10, 12/5).$$

$$\tilde{z} = (z_1, z_2, z_3) = (2/26, 4/64, 9/48)$$

فصل ۴

روش‌های جدید برای حل برنامه‌ریزی کسری فازی

در این پایان‌نامه ابتدا تعاریف فازی بیان شد. در فصل بعد به بررسی برنامه‌ریزی خطی فازی و برنامه‌ریزی کسری پرداختیم و در ادامه برنامه‌ریزی کسری خطی فازی را که پایه موضوع ارائه شده است مورد بررسی قرار دادیم، و در این فصل قصد داریم دو الگوریتم جدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با اعداد دوزنقه‌ای ارائه کنیم و در نهایت با ارائه چند مثال عددی به مقایسه نتایج حاصل از روش پیشنهادی با روش‌های دیگر می‌پردازیم. مدل‌های پیشنهادی ارائه شده نسبت به روش‌های گوناگون قبل از پیچیدگی کمتری برخوردارند، به طوری که روش‌های دیگر برای حل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی با اعداد دوزنقه‌ای نیازمند به کار بردن مراحل گسترده و بررسی‌های مختلف می‌باشند اما در مدل‌های بیان شده دو روش ساده و کارا برای حل مسائل برنامه‌ریزی فازی است که جواب بهینه آن‌ها نسبت به روش‌های دیگر از مطلوبیت بهتری برخوردار است. روش اول برای اولین بار با ترکیب روش حل برنامه‌ریزی کسری فازی مثلثی با روش حل برنامه‌ریزی فازی خطی ابراهیم‌نژاد [۱] به دست آمده است و روش دوم با استفاده از افزودن متغیر کمکی و ایجاد قیود تساوی و تبدیل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با اعداد دوزنقه‌ای به برنامه‌ریزی خطی چندهدفه به دست آمده است.

۱.۴ شرح روش اول

در این روش مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با متغیرها و پارامترهای دوزنقه‌ای به مسئله برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی تبدیل می‌شود و با استفاده از برنامه‌ریزی چندهدفه و روش الفبایی به جواب بهینه می‌رسیم که در ادامه مراحل روش پیشنهادی را به ترتیب ارائه می‌دهیم.

ابتدا فرم مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی را بصورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} &= \frac{\tilde{c}^t \tilde{x} + \tilde{p}}{\tilde{d}^t \tilde{x} + \tilde{q}} \\ s.t. \\ \tilde{A} \tilde{x} &\leq \tilde{b} \\ \tilde{x} &\geq \circ \end{aligned} \quad (۱.۴)$$

نخست با استفاده از تبدیل چارنز- کوپر مسئله را به یک مسئله (LP) تماماً فازی تبدیل می‌کنیم و مسئله بصورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \tilde{c}^t \tilde{y} + \tilde{p} \tilde{t} \\ s.t. \\ \tilde{A} \tilde{y} - \tilde{b} \tilde{t} &\leq \tilde{\circ} \\ \tilde{d}^t \tilde{y} + \tilde{q} \tilde{t} &\leq \tilde{\Lambda} \\ \tilde{y}, \tilde{t} &\geq \circ \end{aligned} \quad (۲.۴)$$

فرض کنید همه پارامترها $\tilde{y}, \tilde{c}, \tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{q}, \tilde{A}, \tilde{b}$ و $\tilde{z}$ با اعداد دوزنقه‌ای بصورت

$$\begin{aligned} &((p)^n, (p)^m, (p)^r, (p)^s), ((c^t)^n, (c^t)^m, (c^t)^r, (c^t)^s), ((y)^n, (y)^m, (y)^r, (y)^s) \\ &((b)^n, (b)^m, (b)^r, (b)^s), ((q)^n, (q)^m, (q)^r, (q)^s), ((d^t)^n, (d^t)^m, (d^t)^r, (d^t)^s) \\ &((a)^n, (a)^m, (a)^r, (a)^s) \text{ و } (z_1, z_2, z_3, z_4) \text{ نشان داده شوند.} \end{aligned}$$

همچنین با توجه به تعریف‌های حساب فازی، مسئله (۲.۴) را با استفاده از اعداد فازی دوزنقه‌ای بازنویسی می‌نماییم که بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max(z_1, z_2, z_3, z_4) &= ((c^t y)^n, (c^t y)^m, (c^t y)^r, (c^t y)^s) + ((p t)^n, (p t)^m, (p t)^r, (p t)^s) \\ s.t. \\ ((a)^n, (a)^m, (a)^r, (a)^s) \otimes ((y)^n, (y)^m, (y)^r, (y)^s) &- ((b t)^n, (b t)^m, (b t)^r, (b t)^s) \leq \tilde{\circ} \quad (۳.۴) \\ ((d^t y)^n, (d^t y)^m, (d^t y)^r, (d^t y)^s) &+ ((q t)^n, (q t)^m, (q t)^r, (q t)^s) \leq \tilde{\Lambda} \\ ((y)^n, (y)^m, (y)^r, (y)^s) &\geq \circ \quad ((t)^n, (t)^m, (t)^r, (t)^s) \geq \circ \end{aligned}$$

تذکره ۱: اگر $\tilde{y}^* = ((y^*)^n, (y^*)^m, (y^*)^r, (y^*)^s)$ ، گوییم جواب بهینه (۲.۴) دقیق است و شرایط زیر را داریم:

$$1. \tilde{A}\tilde{y}^* = \tilde{b}$$

۲. $\tilde{y} = ((y)^n, (y)^m, (y)^r, (y)^s)$ ، داریم، $\tilde{c}^t\tilde{y} + \tilde{p}\tilde{t} \leq \tilde{c}^t\tilde{y}^* + \tilde{p}\tilde{t}$ (برای مسئله مینیمم‌سازی $\tilde{c}^t\tilde{y} + \tilde{p}\tilde{t} \geq \tilde{c}^t\tilde{y}^* + \tilde{p}\tilde{t}$).

تذکره ۲: اگر $\tilde{y}^*$ جواب بهینه مسئله (۲.۴) باشد در صورتی y' جواب بهینه مسئله (۳.۴) است، که رابطه‌ی $\tilde{c}^t\tilde{y}' + \tilde{p}\tilde{t} = \tilde{c}^t\tilde{y}^* + \tilde{p}\tilde{t}$ برقرار باشد.
روش پیشنهادی برای حل FFLFPP بصورت خلاصه زیر می‌باشد:

گام ۱: با توجه به تعاریف حساب فازی مسئله (۳.۴) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\max(z_1, z_2, z_3, z_4) = ((c^t y + pt)^n, (c^t y + pt)^m, (c^t y + pt)^r, (c^t y + pt)^s)$$

s.t.

$$((ay)^n, (ay)^m, (ay)^r, (ay)^s) - ((bt)^n, (bt)^m, (bt)^r, (bt)^s) \leq \tilde{o} \quad (4.4)$$

$$((d^t y + qt)^n, (d^t y + qt)^m, (d^t y + qt)^r, (d^t y + qt)^s) \leq \tilde{1}$$

$$((y)^n, (y)^m, (y)^r, (y)^s) \geq \circ \quad ((t)^n, (t)^m, (t)^r, (t)^s) \geq \circ$$

گام ۲: به بیان دیگر مسئله زیر را داریم:

$$\max(z_1, z_2, z_3, z_4) = ((c^t y + pt)^n, (c^t y + pt)^m, (c^t y + pt)^r, (c^t y + pt)^s)$$

s.t.

$$((ay)^n - (bt)^n, (ay)^m - (bt)^m, (ay)^r - (bt)^r, (ay)^s - (bt)^s) \leq \tilde{o} \quad (5.4)$$

$$((d^t y + qt)^n, (d^t y + qt)^m, (d^t y + qt)^r, (d^t y + qt)^s) \leq \tilde{1}$$

$$(y)^n \geq \circ, (y)^m - (y)^n \geq \circ, (y)^r - (y)^m \geq \circ, (y)^s - (y)^r \geq \circ$$

$$(t)^n \geq \circ, (t)^m - (t)^n \geq \circ, (t)^r - (t)^m \geq \circ, (t)^s - (t)^r \geq \circ$$

گام ۳: حال مسئله MOLP را برای تابع هدف بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}
 \min z_1 &= (c^t y + pt)^m - (c^t y + pt)^n \\
 \max z_2 &= (c^t y + pt)^m \\
 \max z_3 &= (c^t y + pt)^m + (c^t y + pt)^r \\
 \max z_4 &= (c^t y + pt)^s - (c^t y + pt)^r \\
 s.t. \\
 (ay)^n &\leq (bt)^n \\
 (ay)^m &\leq (bt)^m \\
 (ay)^r &\leq (bt)^r \\
 (ay)^s &\leq (bt)^s \\
 (d^t y + qt)^n &\leq 1 \\
 (d^t y + qt)^m &\leq 1 \\
 (d^t y + qt)^r &\leq 1 \\
 (d^t y + qt)^s &\leq 1 \\
 (y)^n \geq 0, (y)^m - (y)^n \geq 0, (y)^r - (y)^m \geq 0, (y)^s - (y)^r \geq 0 \\
 (t)^n \geq 0, (t)^m - (t)^n \geq 0, (t)^r - (t)^m \geq 0, (t)^s - (t)^r \geq 0
 \end{aligned} \tag{۶.۴}$$

گام ۴: تابع هدف را برای z_1 با تمامی شرایط حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 \min z_1 &= (c^t y + pt)^m - (c^t y + pt)^n \\
 s.t. \\
 (ay)^n &\leq (bt)^n \\
 (ay)^m &\leq (bt)^m \\
 (ay)^r &\leq (bt)^r \\
 (ay)^s &\leq (bt)^s \\
 (d^t y + qt)^n &\leq 1 \\
 (d^t y + qt)^m &\leq 1 \\
 (d^t y + qt)^r &\leq 1 \\
 (d^t y + qt)^s &\leq 1 \\
 (y)^n \geq 0, (y)^m - (y)^n \geq 0, (y)^r - (y)^m \geq 0, (y)^s - (y)^r \geq 0 \\
 (t)^n \geq 0, (t)^m - (t)^n \geq 0, (t)^r - (t)^m \geq 0, (t)^s - (t)^r \geq 0
 \end{aligned} \tag{۷.۴}$$

از آنجا که z_1^* جواب بهینه مسئله است به گام بعدی می‌رویم.

گام ۵: در این مرحله با توجه به روش الفبایی مسائل چندهدفه جواب بهینه بدست آمده در

مرحله قبل را به شرایط مسئله اضافه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 \max z_2 &= (c^t y + pt)^m \\
 s.t. \\
 (c^t y + pt)^m - (c^t y + pt)^n &= z_1^* \\
 (ay)^n &\leq (bt)^n \\
 (ay)^m &\leq (bt)^m \\
 (ay)^r &\leq (bt)^r \\
 (ay)^s &\leq (bt)^s \\
 (d^t y + qt)^n &\leq 1 \\
 (d^t y + qt)^m &\leq 1 \\
 (d^t y + qt)^r &\leq 1 \\
 (d^t y + qt)^s &\leq 1 \\
 (y)^n \geq 0, (y)^m - (y)^n \geq 0, (y)^r - (y)^m \geq 0, (y)^s - (y)^r \geq 0 \\
 (t)^n \geq 0, (t)^m - (t)^n \geq 0, (t)^r - (t)^m \geq 0, (t)^s - (t)^r \geq 0
 \end{aligned} \tag{۸.۴}$$

از آنجا که z_2^* جواب بهینه مسئله (۸.۴) است به گام بعدی می‌رویم.
گام ۶: مسئله زیر را با توجه به جواب بهینه که از گام ۵ بدست آمده حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 \max z_3 &= (c^t y + pt)^m + (c^t y + pt)^r \\
 s.t. \\
 (c^t y + pt)^m &= z_2^* \\
 (c^t y + pt)^m - (c^t y + pt)^n &= z_1^* \\
 (ay)^n &\leq (bt)^n \\
 (ay)^m &\leq (bt)^m \\
 (ay)^r &\leq (bt)^r \\
 (ay)^s &\leq (bt)^s \\
 (d^t y + qt)^n &\leq 1 \\
 (d^t y + qt)^m &\leq 1 \\
 (d^t y + qt)^r &\leq 1 \\
 (d^t y + qt)^s &\leq 1 \\
 (y)^n \geq 0, (y)^m - (y)^n \geq 0, (y)^r - (y)^m \geq 0, (y)^s - (y)^r \geq 0 \\
 (t)^n \geq 0, (t)^m - (t)^n \geq 0, (t)^r - (t)^m \geq 0, (t)^s - (t)^r \geq 0
 \end{aligned} \tag{۹.۴}$$

از آنجا که z^* جواب بهینه مسئله (۲۱.۴) است به گام بعدی می‌رویم.
گام ۷: مسئله زیر را با توجه به جواب بهینه که از گام ۶ بدست آمده حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max z_6 &= (c^t y + pt)^s - (c^t y + pt)^r \\ s.t. \\ (c^t y + pt)^m + (c^t y + pt)^r &= z_7^* \\ (c^t y + pt)^m &= z_7^* \\ (c^t y + pt)^m - (c^t y + pt)^n &= z_1^* \\ (ay)^n &\leq (bt)^n \\ (ay)^m &\leq (bt)^m \\ (ay)^r &\leq (bt)^r \\ (ay)^s &\leq (bt)^s \\ (d^t y + qt)^n &\leq 1 \\ (d^t y + qt)^m &\leq 1 \\ (d^t y + qt)^r &\leq 1 \\ (d^t y + qt)^s &\leq 1 \\ (y)^n \geq 0, (y)^m - (y)^n \geq 0, (y)^r - (y)^m \geq 0, (y)^s - (y)^r \geq 0 \\ (t)^n \geq 0, (t)^m - (t)^n \geq 0, (t)^r - (t)^m \geq 0, (t)^s - (t)^r \geq 0 \end{aligned} \quad (10.4)$$

جواب بهینه یکتا بدست آمده برای (۱۰.۴) همان جواب بهینه مسئله (۴.۴) می‌باشد.

۲.۴ مثال عددی:

در این قسمت یک مثال را با روش پایان‌نامه حل می‌کنیم:

مثال ۱.۲.۴.

$$\max \tilde{z} = \frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \tilde{1}}{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{2}}$$

s.t.

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \leq \tilde{2}$$

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \leq \tilde{1}$$

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq 0$$

با در نظر گرفتن مسئله برنامه‌ریزی کسری تمامی فازی بالا با استفاده از اعداد فازی دوزنقه‌ای مسئله را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\max \tilde{z} = \frac{(\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_1 - (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_2 + (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)}{(\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_1 + (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_2 + (1, 1/\delta, 2/\delta, 3)}$$

s.t.

$$(\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_1 + (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_2 \leq (1, 1/\delta, 2/\delta, 3)$$

$$(\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_1 - (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_2 \leq (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)$$

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq \circ$$

مسئله را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\max \tilde{z} = \frac{\left(\begin{array}{c} (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_1)^n, (x_1)^m, (x_1)^r, (x_1)^s) - \\ (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_2)^n, (x_2)^m, (x_2)^r, (x_2)^s) + \\ (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_1)^n, (x_1)^m, (x_1)^r, (x_1)^s) + \\ (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_2)^n, (x_2)^m, (x_2)^r, (x_2)^s) + \\ (1, 1/\delta, 2/\delta, 3) \end{array} \right)}$$

s.t.

$$\left(\begin{array}{c} (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_1)^n, (x_1)^m, (x_1)^r, (x_1)^s) + \\ (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_2)^n, (x_2)^m, (x_2)^r, (x_2)^s) \end{array} \right) \leq (1, 1/\delta, 2/\delta, 3)$$

$$\left(\begin{array}{c} (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_1)^n, (x_1)^m, (x_1)^r, (x_1)^s) - \\ (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_2)^n, (x_2)^m, (x_2)^r, (x_2)^s) \end{array} \right) \leq (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)$$

$$(x_1)^n, (x_1)^m, (x_1)^r, (x_1)^s, (x_2)^n, (x_2)^m, (x_2)^r, (x_2)^s \geq \circ$$

طبق گام ۲ داریم:

(۱۱.۴)

$$\max \tilde{z} = (-\mathfrak{Z}(y_{\mathfrak{r}})^s, \circ/\mathfrak{L}(y_1)^m - \mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^r + \circ/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_1)^r - \circ/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^m + \mathfrak{I}/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{Z}(y_1)^s + \mathfrak{Z}t_{\mathfrak{f}})$$

s.t.

$$\circ \leq t_1$$

$$\circ/\mathfrak{L}(y_1)^m + \circ/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^m \leq \mathfrak{I}/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}}$$

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_1)^r + \mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^r \leq \mathfrak{Z}/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}}$$

$$\mathfrak{Z}(y_1)^s + \mathfrak{Z}(y_{\mathfrak{r}})^s \leq \mathfrak{Z}t_{\mathfrak{f}}$$

$$-\mathfrak{Z}(y_{\mathfrak{r}})^s \leq \circ$$

$$\circ/\mathfrak{L}(y_1)^m - \mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^r \leq \circ/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}}$$

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_1)^r - \circ/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^m \leq \mathfrak{I}/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}}$$

$$\mathfrak{Z}(y_1)^s \leq \mathfrak{Z}t_{\mathfrak{f}}$$

$$t_1 \leq 1$$

$$\circ/\mathfrak{L}(y_1)^m + \circ/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^m + \mathfrak{I}/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}} \leq 1$$

$$\mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_1)^r + \mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^r + \mathfrak{Z}/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}} \leq 1$$

$$\mathfrak{Z}(y_1)^s + \mathfrak{Z}(y_{\mathfrak{r}})^s + \mathfrak{Z}t_{\mathfrak{f}} \leq 1$$

$$(y_1)^n \geq \circ, (y_1)^m - (y_1)^n \geq \circ, (y_1)^r - (y_1)^m \geq \circ, (y_1)^s - (y_1)^r \geq \circ$$

$$(y_{\mathfrak{r}})^n \geq \circ, (y_{\mathfrak{r}})^m - (y_{\mathfrak{r}})^n \geq \circ, (y_{\mathfrak{r}})^r - (y_{\mathfrak{r}})^m \geq \circ, (y_{\mathfrak{r}})^s - (y_{\mathfrak{r}})^r \geq \circ$$

$$t_1 \geq \circ, t_{\mathfrak{r}} - t_1 \geq \circ, t_{\mathfrak{r}} - t_{\mathfrak{r}} \geq \circ, t_{\mathfrak{f}} - t_{\mathfrak{r}} \geq \circ.$$

طبق گام ۳ داریم:

$$\min z_1 = \circ/\mathfrak{L}(y_1)^m - \mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^r + \circ/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}} - (-\mathfrak{Z}(y_{\mathfrak{r}})^s)$$

$$\max z_{\mathfrak{r}} = \circ/\mathfrak{L}(y_1)^m - \mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^r + \circ/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}}$$

$$\max z_{\mathfrak{r}} = \circ/\mathfrak{L}(y_1)^m - \mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^r + \circ/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}} + \mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_1)^r - \circ/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^m + \mathfrak{I}/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}}$$

$$\max z_{\mathfrak{f}} = (y_1)^s + \mathfrak{Z}t_{\mathfrak{f}} - (\mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_1)^r - \circ/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^m + \mathfrak{I}/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}})$$

s.t.

Constraints of problem (۱۱.۴)

طبق گام ۴ داریم:

$$\min z_1 = \circ/\mathfrak{L}(y_1)^m - \mathfrak{I}/\mathfrak{L}(y_{\mathfrak{r}})^r + \circ/\mathfrak{L}t_{\mathfrak{r}} - (-\mathfrak{Z}(y_{\mathfrak{r}})^s)$$

s.t.

Constraints of problem (۱۱.۴)

جواب بهینه مسئله $z_1^* = 0$ می باشد به گام بعد می رویم.

$$\max z_2 = 0/5(y_1)^m - 1/5(y_2)^r + 0/5t_2$$

s.t.

$$0/5(y_1)^m - 1/5(y_2)^r + 0/5t_2 - (-2(y_2)^s) = 0$$

Constraints of problem (۱۱.۴)

جواب بهینه مسئله $z_2^* = 0$ می باشد به گام بعد می رویم.

$$\max z_3 = 0/5(y_1)^m - 1/5(y_2)^r + 0/5t_2 + 1/5(y_1)^r - 0/5(y_2)^m + 1/5t_3$$

s.t.

$$0/5(y_1)^m - 1/5(y_2)^r + 0/5t_2 = 0$$

$$0/5(y_1)^m - 1/5(y_2)^r + 0/5t_2 - (-2(y_2)^s) = 0$$

Constraints of problem (۱۱.۴)

جواب بهینه مسئله $z_3^* = 0/6$ می باشد به گام بعد می رویم.

$$\max z_4 = (y_1)^s + 2t_4 - (1/5(y_1)^r - 0/5(y_2)^m + 1/5t_3)$$

s.t.

$$0/5(y_1)^m - 1/5(y_2)^r + 0/5t_2 + 1/5(y_1)^r - 0/5(y_2)^m + 1/5t_3 = 0/6$$

$$0/5(y_1)^m - 1/5(y_2)^r + 0/5t_2 = 0$$

$$0/5(y_1)^m - 1/5(y_2)^r + 0/5t_2 - (-2(y_2)^s) = 0$$

Constraints of problem (۱۱.۴)

جواب های بهینه مسئله بصورت زیر می باشد:

$$\tilde{y}_1^* = \{(y_1^*)^n, (y_1^*)^m, (y_1^*)^r, (y_1^*)^s\} = (0, 0, 0/2, 0/2)$$

$$\tilde{y}_2^* = \{(y_2^*)^n, (y_2^*)^m, (y_2^*)^r, (y_2^*)^s\} = (0, 0, 0, 0)$$

$$t^* = \{(t_1, t_2, t_3, t_4)\} = (0, 0, 0/2, 0/2)$$

در نتیجه جواب بهینه برابر است با:

$$\tilde{x}_1^* = \{(x_1^*)^n, (x_1^*)^m, (x_1^*)^r, (x_1^*)^s\} = (0, 0, 1, 1)$$

$$\tilde{x}_2^* = \{(x_2^*)^n, (x_2^*)^m, (x_2^*)^r, (x_2^*)^s\} = (0, 0, 0, 0)$$

و همچنین جواب بهینه تابع هدف برای عدد فازی ذوزنقه ای بصورت زیر می باشد:

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)^n, (z^*)^m, (z^*)^r, (z^*)^s\} = (0, 0, 0/6, 0/8)$$

مثال ۲.۲.۴. (برنامه‌ریزی تولید): شرکتی در تولید انواع لبنیات است. در بازار لبنیات داخلی، شرکت برای تأمین تقاضای چهار مرکز توزیع در گنبد، گرگان، کلاله و کردکوی سه محصول شیر، ماست و پنیر تولید می‌کند. طبق اطلاعات اولیه زیست محیطی، جدول ۱.۴ خلاصه‌ای از منابع احتمالی موجود از سه فرآورده داده شده را ارائه می‌دهد. تقاضای پیش بینی از چهار مرکز توزیع همانطور که در جدول ۲.۴ نشان داده شده است. سود شرکت به علت اطلاعات غیرقابل دستیابی اعداد نادقیق با توزیع امکان دوزنقه‌ای هستند. مدیریت شرکت در حال شروع یک مطالعه است تا سود را به حداکثر برساند.

جدول ۱.۴: فرآورده‌های لبنی

محصول	عرضه ده هزار واحد
شیر	(۷/۲, ۸, ۸/۸, ۹/۶)
ماست	(۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸)
پنیر	(۱۰/۲, ۱۲, ۱۳/۸, ۱۵/۶)

جدول ۲.۴: تقاضای مقصد

مقصد	تقاضا ده هزار واحد
گنبد	(۶/۲, ۷, ۷/۸, ۸/۶)
گرگان	(۸/۹, ۱۰, ۱۱/۱, ۱۲/۲)
کلاله	(۶/۵, ۸, ۹/۵, ۱۱)
کردکوی	(۷/۸, ۹, ۱۰/۲, ۱۱/۴)

جدول ۳.۴: تقاضای محصولات مقصد

محصول	شیر	ماست	پنیر
گنبد	(۸, ۱۰, ۱۰/۸, ۱۲/۸)	(۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷)	(۱۸/۴, ۲۰, ۲۱, ۲۲/۶)
گرگان	(۲۰/۴, ۲۲, ۲۴, ۲۵/۶)	(۱۸/۲, ۲۰, ۲۲, ۲۳/۸)	(۹/۶, ۱۲, ۱۳, ۱۵/۴)
کلاله	(۸, ۱۰, ۱۰/۶, ۱۲/۶)	(۱۰, ۱۲, ۱۳, ۱۵)	(۷/۸, ۱۰, ۱۰/۸, ۱۳/۶)
کردکوی	(۸/۸, ۲۰, ۲۲, ۲۳/۲)	(۶, ۸, ۸/۸, ۱۰/۸)	(۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷)

جدول ۴.۴: هزینه حمل و نقل

محصول	گنبد	گرگان	کلاله	کردکوی
شیر	(۱/۵, ۲, ۲/۵, ۳)	(۴, ۵, ۶, ۷)	(۱/۳, ۲, ۲/۵, ۳/۲)	(۳, ۴, ۵, ۶)
ماست	(۲/۵, ۳, ۴, ۴/۵)	(۲, ۳, ۴, ۵)	(۲/۳, ۳, ۴, ۴/۷)	(۱/۵, ۲, ۲/۵, ۳)
پنیر	(۳, ۴, ۵, ۶)	(۲, ۳, ۴, ۵)	(۱/۵, ۲, ۲/۷, ۳/۲)	(۲, ۳, ۴, ۵)

$$\max \tilde{z} = \frac{\left\{ \begin{aligned} & (۸, ۱۰, ۱۰/۸, ۱۲/۸)\tilde{x}_{۱۱} + (۲۰/۴, ۲۲, ۲۴, ۲۵/۶)\tilde{x}_{۱۲} + (۸, ۱۰, ۱۰/۶, ۱۲/۶)\tilde{x}_{۱۳} + \\ & (۱۸/۸, ۲۰, ۲۲, ۲۳/۲)\tilde{x}_{۱۴} + (۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷)\tilde{x}_{۲۱} + (۱۸/۲, ۲۰, ۲۲, ۲۳/۸)\tilde{x}_{۲۲} + \\ & (۱۰, ۱۲, ۱۳, ۱۵)\tilde{x}_{۲۳} + (۶, ۸, ۸/۸, ۱۰/۸)\tilde{x}_{۲۴} + (۱۸/۴, ۲۰, ۲۱, ۲۲/۶)\tilde{x}_{۳۱} + \\ & (۹/۶, ۱۲, ۱۳, ۱۵/۴)\tilde{x}_{۳۲} + (۷/۸, ۱۰, ۱۰/۸, ۱۳/۶)\tilde{x}_{۳۳} + (۱۴, ۱۵, ۱۶, ۱۷)\tilde{x}_{۳۴} \end{aligned} \right\}}{\left\{ \begin{aligned} & (۱/۵, ۲, ۲/۵, ۳)\tilde{x}_{۱۱} + (۴, ۵, ۶, ۷)\tilde{x}_{۱۲} + (۱/۳, ۲, ۲/۵, ۳/۲)\tilde{x}_{۱۳} + \\ & (۳, ۴, ۵, ۶)\tilde{x}_{۱۴} + (۲/۵, ۳, ۴, ۴/۵)\tilde{x}_{۲۱} + (۲, ۳, ۴, ۵)\tilde{x}_{۲۲} + \\ & (۲/۳, ۳, ۴, ۴/۷)\tilde{x}_{۲۳} + (۱/۵, ۲, ۲/۵, ۳)\tilde{x}_{۲۴} + (۳, ۴, ۵, ۶)\tilde{x}_{۳۱} + \\ & (۲, ۳, ۴, ۵)\tilde{x}_{۳۲} + (۱/۵, ۲, ۲/۷, ۳/۲)\tilde{x}_{۳۳} + (۲, ۳, ۴, ۵)\tilde{x}_{۳۴} \end{aligned} \right\}}$$

s.t.

$$\tilde{x}_{۱۱} + \tilde{x}_{۱۲} + \tilde{x}_{۱۳} + \tilde{x}_{۱۴} \leq (۷/۲, ۸, ۸/۸, ۸/۶)$$

$$\tilde{x}_{۲۱} + \tilde{x}_{۲۲} + \tilde{x}_{۲۳} + \tilde{x}_{۲۴} \leq (۱۲, ۱۴, ۱۶, ۱۸)$$

$$\tilde{x}_{۳۱} + \tilde{x}_{۳۲} + \tilde{x}_{۳۳} + \tilde{x}_{۳۴} \leq (۱۰/۲, ۱۲, ۱۳/۸, ۱۵/۶)$$

$$\tilde{x}_{۱۱} + \tilde{x}_{۲۱} + \tilde{x}_{۳۱} \geq (۶/۲, ۷, ۷/۸, ۸/۶)$$

$$\tilde{x}_{۱۲} + \tilde{x}_{۲۲} + \tilde{x}_{۳۲} \geq (۸/۹, ۱۰, ۱۱/۱, ۱۲/۲)$$

$$\tilde{x}_{۱۳} + \tilde{x}_{۲۳} + \tilde{x}_{۳۳} \geq (۶/۵, ۸, ۹/۵, ۱۱)$$

$$\tilde{x}_{۱۴} + \tilde{x}_{۲۴} + \tilde{x}_{۳۴} \geq (۷/۸, ۹, ۱۰/۲, ۱۱/۴)$$

$$\tilde{x}_{ij} \geq ۰, \tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^۱, x_{ij}^۲, x_{ij}^۳), i = ۱, ۲, ۳, j = ۱, ۲, ۳, ۴.$$

بعد از حل مساله و استفاده از مراحل حل جواب‌های بهینه بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\tilde{x}_{۱۱} = (۰, ۰, ۰, ۰), \tilde{x}_{۱۲} = (۰, ۰, ۰, ۰), \tilde{x}_{۱۳} = (۰, ۰, ۰, ۰), \tilde{x}_{۱۴} = (۰, ۰, ۰/۰۴, ۰/۰۴)$$

$$\tilde{x}_{۲۱} = (۰, ۰, ۰/۰۲, ۰/۰۲), \tilde{x}_{۲۲} = (۰, ۰, ۰/۰۵, ۰/۰۵), \tilde{x}_{۲۳} = (۰, ۰, ۰, ۰), \tilde{x}_{۲۴} = (۰, ۰, ۰/۰۰۳, ۰/۰۰۳)$$

$$\tilde{x}_{۳۱} = (۰, ۰, ۰/۰۱, ۰/۰۱), \tilde{x}_{۳۲} = (۰, ۰, ۰, ۰), \tilde{x}_{۳۳} = (۰, ۰, ۰/۰۵, ۰/۰۵), \tilde{x}_{۳۴} = (۰, ۰, ۰/۰۵, ۰/۰۰۵).$$

$$\tilde{z} = (z_۱, z_۲, z_۳, z_۴) = (۰, ۰, ۳/۷۳۱, ۴/۱۶)$$

مثال ۳.۲.۴. این مسئله، مثال ارائه شده توسط ورامانی^۱ و همکارانش [۱۱۷] می‌باشد که با روش پیشنهادی حل می‌شود تا به بررسی جواب‌های بدست آمده بپردازیم.

$$\max \tilde{z} = \frac{5x_1 + 3x_2}{5x_1 + 2x_2 + 1}$$

s.t.

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$$\max \tilde{z} = \frac{(3, 4, 6, 7)\tilde{x}_1 + (2, 2/5, 3/5, 4)\tilde{x}_2}{(4, 4/5, 5/5, 6)\tilde{x}_1 + (1, 1/5, 2/5, 3)\tilde{x}_2 + (0, 0/5, 1/5, 2)}$$

s.t.

$$(2, 2/5, 3/5, 4)\tilde{x}_1 + (3, 4, 6, 7)\tilde{x}_2 \leq (11, 12, 18, 19)$$

$$(4, 4/5, 5/5, 6)\tilde{x}_1 + (1, 1/5, 2/5, 3)\tilde{x}_2 \leq (8, 9, 11, 12)$$

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq 0.$$

با حل مسئله فوق جواب‌های بهینه بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\tilde{y}_1^* = \{(y_1^*)^n, (y_1^*)^m, (y_1^*)^r, (y_1^*)^s\} = (0, 0, 0/06, 0/06)$$

$$\tilde{y}_2^* = \{(y_2^*)^n, (y_2^*)^m, (y_2^*)^r, (y_2^*)^s\} = (0, 0, 0/15, 0/15)$$

$$t^* = \{(t_1, t_2, t_3, t_4)\} = (0, 0, 0/6, 0/6)$$

در نتیجه جواب بهینه برابر است با:

$$\tilde{x}_1^* = \{(x_1^*)^n, (x_1^*)^m, (x_1^*)^r, (x_1^*)^s\} = (0, 0, 0/1, 0/1)$$

$$\tilde{x}_2^* = \{(x_2^*)^n, (x_2^*)^m, (x_2^*)^r, (x_2^*)^s\} = (0, 0, 0/2, 0/2)$$

و همچنین جواب بهینه تابع هدف برای عدد فازی دوزنقه‌ای بصورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)^n, (z^*)^m, (z^*)^r, (z^*)^s\} = (0, 0, 0/93, 1/08)$$

حال به مقایسه جواب فوق با جواب ورامانی و همکارش که در [۱۱۷] که بصورت $\tilde{z} = (0, 0/27, 0/99)$ ارائه شده می‌پردازیم، ابتدا جواب مثلی را به دوزنقه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$\tilde{z} = (0, 0/27, 0/27, 0/99)$ با توجه به روش رتبه‌بندی یاگر برای $\tilde{A} = (a, b, c, d)$ داریم:

$$R(0, 0, 0/93, 1/08) = 0/5$$

$$R(0, 0/27, 0/27, 0/99) = 0/4$$

$$proposedmethod = 0/5 > veeranimethod = 0/4$$

لذا مشاهده می‌شود که روش پیشنهادی در این پایان‌نامه نسبت به روش ورامانی از مطلوبیت بهتری در جواب تابع هدف برخوردار است.

۳.۴ شرح روش دوم

در این روش مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با متغیرها و پارامترهای دوزنقه‌ای با قیود نامساوی با افزودن متغیرهای کمکی $\tilde{S}$ و $\tilde{R}$ به مسئله با قیود تساوی تبدیل می‌شود و بعد با استفاده از برنامه‌ریزی خطی چندهدفه جواب بهینه بدست می‌آید. شرح کامل روش و مراحل به ترتیب در زیر بیان می‌شود:

فرم مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی را بصورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} \max \tilde{z} &= \frac{\tilde{c}^t \tilde{x} + \tilde{p}}{\tilde{d}^t \tilde{x} + \tilde{q}} \\ s.t. & \\ \tilde{A} \tilde{x} &\leq \tilde{b} \\ \tilde{x} &\geq 0. \end{aligned} \quad (12.4)$$

حال با استفاده از تبدیل چارنز- کوپر مسئله را به یک مسئله (LP) تماماً فازی تبدیل می‌کنیم و مسئله بصورت زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \max \tilde{c}^t \tilde{y} + \tilde{p} \tilde{t} \\ s.t. & \\ \tilde{A} \tilde{y} - \tilde{b} \tilde{t} &\leq \tilde{0} \\ \tilde{d}^t \tilde{y} + \tilde{q} \tilde{t} &\leq \tilde{1} \\ \tilde{y}, \tilde{t} &\geq 0. \end{aligned} \quad (13.4)$$

اکنون با افزودن متغیر کمکی $\tilde{S}$ و $\tilde{R}$ قيود نامساوی مسئله را به قيود مساوی تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \max \tilde{c}^t \tilde{y} + \tilde{p} \tilde{t} \\ & s.t. \\ & \tilde{A} \tilde{y} - \tilde{b} \tilde{t} + \tilde{S}_1 = \tilde{o} + \tilde{R}_1 \\ & \tilde{d}^t \tilde{y} + \tilde{q} \tilde{t} + \tilde{S}_\Psi = \tilde{\mathbf{1}} + \tilde{R}_\Psi \\ & \tilde{y}, \tilde{t} \geq o \\ & \tilde{S}_\Psi, \tilde{S}_1 \geq o, \tilde{R}_1, \tilde{R}_\Psi \geq o. \end{aligned} \quad (14.4)$$

(۱۵.۴)

$$\begin{aligned} \max(z_1, z_\Psi, z_\Psi, z_\Psi) &= ((c^t y)^n, (c^t y)^m, (c^t y)^r, (c^t y)^s) + ((pt)^n, (pt)^m, (pt)^r, (pt)^s) \\ s.t. \\ ((a)^n, (a)^m, (a)^r, (a)^s) \otimes ((y)^n, (y)^m, (y)^r, (y)^s) &- ((bt)^n, (bt)^m, (bt)^r, (bt)^s) + (S_1^n, S_1^m, S_1^r, S_1^s) = \\ \tilde{o} + (R_1^n, R_1^m, R_1^r, R_1^s) \\ ((d^t y)^n, (d^t y)^m, (d^t y)^r, (d^t y)^s) &+ ((qt)^n, (qt)^m, (qt)^r, (qt)^s) + (S_\Psi^n, S_\Psi^m, S_\Psi^r, S_\Psi^s) = \\ \tilde{\mathbf{1}} + (R_\Psi^n, R_\Psi^m, R_\Psi^r, R_\Psi^s) \\ ((y)^n, (y)^m, (y)^r, (y)^s) &\geq o \\ ((t)^n, (t)^m, (t)^r, (t)^s) &\geq o \\ (S_1^n, S_1^m, S_1^r, S_1^s) &\geq o, (S_\Psi^n, S_\Psi^m, S_\Psi^r, S_\Psi^s) \geq o \\ (R_1^n, R_1^m, R_1^r, R_1^s) &\geq o, (R_\Psi^n, R_\Psi^m, R_\Psi^r, R_\Psi^s) \geq o \end{aligned}$$

روش پیشنهادی برای حل (FFLFP) بصورت خلاصه زیر می‌باشد:

گام ۱: با توجه به تعاریف حساب فازی مسئله (۱۵.۴) را بصورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

(۱۶.۴)

$$\begin{aligned} \max(z_1, z_\Psi, z_\Psi, z_\Psi) &= ((c^t y + pt)^n, (c^t y + pt)^m, (c^t y + pt)^r, (c^t y + pt)^s) \\ s.t. \\ ((ay)^n, (ay)^m, (ay)^r, (ay)^s) &- ((bt)^n, (bt)^m, (bt)^r, (bt)^s) + (S_1^n, S_1^m, S_1^r, S_1^s) = \tilde{o} + (R_1^n, R_1^m, R_1^r, R_1^s) \\ ((d^t y + qt)^n, (d^t y + qt)^m, (d^t y + qt)^r, (d^t y + qt)^s) &+ (S_\Psi^n, S_\Psi^m, S_\Psi^r, S_\Psi^s) = \tilde{\mathbf{1}} + (R_\Psi^n, R_\Psi^m, R_\Psi^r, R_\Psi^s) \\ ((y)^n, (y)^m, (y)^r, (y)^s) &\geq o, ((t)^n, (t)^m, (t)^r, (t)^s) \geq o \\ (S_1^n, S_1^m, S_1^r, S_1^s) &\geq o, (S_\Psi^n, S_\Psi^m, S_\Psi^r, S_\Psi^s) \geq o \\ (R_1^n, R_1^m, R_1^r, R_1^s) &\geq o, (R_\Psi^n, R_\Psi^m, R_\Psi^r, R_\Psi^s) \geq o \end{aligned}$$

گام ۲: به بیان دیگر مسئله زیر را داریم:

$$\max(z_1, z_2, z_3, z_4) = ((c^t y + pt)^n, (c^t y + pt)^m, (c^t y + pt)^r, (c^t y + pt)^s)$$

s.t.

$$(ay)^n - (bt)^n + S_1^n = \circ + R_1^n$$

$$(ay)^m - (bt)^m + S_1^m = \circ + R_1^m$$

$$(ay)^r - (bt)^r + S_1^r = \circ + R_1^r$$

$$(ay)^s - (bt)^s + S_1^s = \circ + R_1^s$$

$$(d^t y + qt)^n + S_1^n = 1 + R_2^n$$

$$(d^t y + qt)^m + S_1^m = 1 + R_2^m$$

$$(d^t y + qt)^r + S_1^r = 1 + R_2^r$$

$$(d^t y + qt)^s + S_1^s = 1 + R_2^s$$

$$(y)^n \geq \circ$$

$$(y)^m - (y)^n \geq \circ$$

$$(y)^r - (y)^m \geq \circ$$

$$(y)^s - (y)^r \geq \circ$$

$$(t)^n \geq \circ$$

$$(t)^m - (t)^n \geq \circ$$

$$(t)^r - (t)^m \geq \circ$$

$$(t)^s - (t)^r \geq \circ$$

$$S_1^n \geq \circ, S_1^m \geq \circ$$

$$S_1^r \geq \circ, S_1^s \geq \circ$$

$$S_2^n \geq \circ, S_2^m \geq \circ$$

$$S_2^r \geq \circ, S_2^s \geq \circ$$

$$R_1^n \geq \circ, R_1^m \geq \circ$$

$$R_1^r \geq \circ, R_1^s \geq \circ$$

$$R_2^n \geq \circ, R_2^m \geq \circ$$

$$R_2^r \geq \circ, R_2^s \geq \circ$$

(۱۷.۴)

گام ۳: حال مسئله (MOLP) را برای تابع هدف بصورت زیر داریم:

$$\begin{aligned}
 \max z_1 &= (c^t y + pt)^n \\
 \max z_2 &= (c^t y + pt)^m \\
 \max z_3 &= (c^t y + pt)^r \\
 \max z_4 &= (c^t y + pt)^s \\
 s.t. \\
 (ay)^n - (bt)^n + S_1^n &= \circ + R_1^n \\
 (ay)^m - (bt)^m + S_1^m &= \circ + R_1^m \\
 (ay)^r - (bt)^r + S_1^r &= \circ + R_1^r \\
 (ay)^s - (bt)^s + S_1^s &= \circ + R_1^s \quad (18.4) \\
 (d^t y + qt)^n + S_2^n &= \mathbb{1} + R_2^n \\
 (d^t y + qt)^m + S_2^m &= \mathbb{1} + R_2^m \\
 (d^t y + qt)^r + S_2^r &= \mathbb{1} + R_2^r \\
 (d^t y + qt)^s + S_2^s &= \mathbb{1} + R_2^s \\
 (y)^n \geq \circ, (y)^m - (y)^n \geq \circ, (y)^r - (y)^m \geq \circ, (y)^s - (y)^r \geq \circ \\
 (t)^n \geq \circ, (t)^m - (t)^n \geq \circ, (t)^r - (t)^m \geq \circ, (t)^s - (t)^r \geq \circ \\
 (S_1^n, S_1^m, S_1^r, S_1^s) \geq \circ, (S_2^n, S_2^m, S_2^r, S_2^s) \geq \circ \\
 (R_1^n, R_1^m, R_1^r, R_1^s) \geq \circ, (R_2^n, R_2^m, R_2^r, R_2^s) \geq \circ
 \end{aligned}$$

گام ۴: تابع هدف برای z_4 با شرایط مربوط به آن حل می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \max z_4 &= (c^t y + pt)^s \\
 s.t. \\
 (ay)^s - (bt)^s + S_1^s &= \circ + R_1^s \\
 (d^t y + qt)^s + S_2^s &= \mathbb{1} + R_2^s \quad (19.4) \\
 (y)^s \geq \circ, (t)^s \geq \circ \\
 S_1^s \geq \circ, S_2^s \geq \circ \\
 R_1^s \geq \circ, R_2^s \geq \circ
 \end{aligned}$$

گام ۵: تابع هدف برای z_3 با شرایط مربوط به آن حل می‌شود:

$$\max z_3 = (c^t y + pt)^r$$

s.t.

$$(ay)^r - (bt)^r + S_1^r = 0 + R_1^r \quad (20.4)$$

$$(d^t y + qt)^r + S_2^r = 1 + R_2^r$$

$$(y)^s - (y)^r \geq 0, (t)^s - (t)^r \geq 0$$

$$S_1^r \geq 0, S_2^r \geq 0, R_1^r \geq 0, R_2^r \geq 0$$

گام ۶: تابع هدف برای z_3 با شرایط مربوط به آن حل می‌شود:

$$\max z_4 = (c^t y + pt)^m$$

s.t.

$$(ay)^m - (bt)^m + S_1^m = 0 + R_1^m \quad (21.4)$$

$$(d^t y + qt)^m + S_2^m = 1 + R_2^m$$

$$(y)^r - (y)^m \geq 0, (t)^r - (t)^m \geq 0$$

$$S_1^m \geq 0, S_2^m \geq 0, R_1^m \geq 0, R_2^m \geq 0$$

گام ۷: تابع هدف برای z_4 با شرایط مربوط به آن حل می‌شود:

$$\max z_1 = (c^t y + pt)^n$$

s.t.

$$(ay)^n - (bt)^n + S_1^n = 0 + R_1^n \quad (22.4)$$

$$(d^t y + qt)^n + S_2^n = 1 + R_2^n$$

$$(y)^m - (y)^n \geq 0, (t)^m - (t)^n \geq 0,$$

$$S_1^n \geq 0, S_2^n \geq 0, R_1^n \geq 0, R_2^n \geq 0$$

جواب بهینه یکتا بدست آمده برای مسئله (۲۲.۴) همان جواب بهینه مسئله (۱۶.۴) می‌باشد.

۴.۴ مثال عددی:

در این قسمت یک مثال را با روش پایان‌نامه حل می‌کنیم:

مثال ۱.۴.۴.

$$\max \tilde{z} = \frac{\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 + \tilde{1}}{\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 + \tilde{2}}$$

s.t.

$$\tilde{x}_1 + \tilde{x}_2 \leq \tilde{2}$$

$$\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2 \leq \tilde{1}$$

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq 0$$

با در نظر گرفتن مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی بالا با استفاده از اعداد فازی دوزنقه‌ای و تبدیل قیود نامساوی با افزودن متغیر کمکی به قیود مساوی مسئله را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$\max \tilde{z} = \frac{(\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_1 - (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_2 + (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)}{(\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_1 + (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_2 + (1, 1/\delta, 2/\delta, 3)}$$

s.t.

$$(\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_1 + (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_2 + \tilde{S}_1 = (1, 1/\delta, 2/\delta, 3) + \tilde{R}_1$$

$$(\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_1 - (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2)\tilde{x}_2 + \tilde{S}_2 = (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) + \tilde{R}_2$$

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq 0, \tilde{S}_1, \tilde{S}_2 \geq 0, \tilde{R}_1, \tilde{R}_2 \geq 0$$

مسئله را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\max \tilde{z} = \frac{\left(\begin{array}{c} (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_1)^n, (x_1)^m, (x_1)^r, (x_1)^s) - \\ (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_2)^n, (x_2)^m, (x_2)^r, (x_2)^s) + (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \end{array} \right)}{\left(\begin{array}{c} (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_1)^n, (x_1)^m, (x_1)^r, (x_1)^s) + \\ (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_2)^n, (x_2)^m, (x_2)^r, (x_2)^s) + (1, 1/\delta, 2/\delta, 3) \end{array} \right)}$$

s.t.

$$\begin{aligned} & (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_1)^n, (x_1)^m, (x_1)^r, (x_1)^s) + (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_2)^n, (x_2)^m, (x_2)^r, (x_2)^s) \\ & + (S_1^n, S_1^m, S_1^r, S_1^s) = (1, 1/\delta, 2/\delta, 3) + (R_1^n, R_1^m, R_1^r, R_1^s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_1)^n, (x_1)^m, (x_1)^r, (x_1)^s) - (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) \otimes ((x_2)^n, (x_2)^m, (x_2)^r, (x_2)^s) \\ & + (S_2^n, S_2^m, S_2^r, S_2^s) = (\circ, \circ/\delta, 1/\delta, 2) + (R_2^n, R_2^m, R_2^r, R_2^s) \end{aligned}$$

$$(x_1)^n, (x_1)^m, (x_1)^r, (x_1)^s, (x_2)^n, (x_2)^m, (x_2)^r, (x_2)^s \geq 0$$

$$S_1^n, S_1^m, S_1^r, S_1^s, S_2^n, S_2^m, S_2^r, S_2^s \geq 0, R_1^n, R_1^m, R_1^r, R_1^s, R_2^n, R_2^m, R_2^r, R_2^s \geq 0$$

طبق گام ۲ داریم:

$$\max \tilde{z} = (-\Upsilon(y_{\mathfrak{r}})^s, \circ/\Delta(y_1)^m - \mathbb{1}/\Delta(y_{\mathfrak{r}})^r + \circ/\Delta t_{\mathfrak{r}}, \mathbb{1}/\Delta(y_1)^r - \circ/\Delta(y_{\mathfrak{r}})^m + \mathbb{1}/\Delta t_{\mathfrak{r}}, \Upsilon(y_1)^s + \Upsilon t_{\mathfrak{r}})$$

s.t.

$$\circ - t_1 + S_1^n = \circ + R_1^n$$

$$\circ/\Delta(y_1)^m + \circ/\Delta(y_{\mathfrak{r}})^m - \mathbb{1}/\Delta t_{\mathfrak{r}} + S_1^m = \circ + R_1^m$$

$$\mathbb{1}/\Delta(y_1)^r + \mathbb{1}/\Delta(y_{\mathfrak{r}})^r - \Upsilon/\Delta t_{\mathfrak{r}} + S_1^r = \circ + R_1^r$$

$$\Upsilon(y_1)^s + \Upsilon(y_{\mathfrak{r}})^s - \Upsilon t_{\mathfrak{r}} + S_1^s = \circ + R_1^s$$

$$-\Upsilon(y_{\mathfrak{r}})^s + S_{\mathfrak{r}}^n = \circ + R_{\mathfrak{r}}^n$$

$$\circ/\Delta(y_1)^m - \mathbb{1}/\Delta(y_{\mathfrak{r}})^r - \circ/\Delta t_{\mathfrak{r}} + S_{\mathfrak{r}}^m = \circ + R_{\mathfrak{r}}^m$$

$$\mathbb{1}/\Delta(y_1)^r - \circ/\Delta(y_{\mathfrak{r}})^m - \mathbb{1}/\Delta t_{\mathfrak{r}} + S_{\mathfrak{r}}^r = \circ + R_{\mathfrak{r}}^r$$

$$\Upsilon(y_1)^s - \Upsilon t_{\mathfrak{r}} + S_{\mathfrak{r}}^s = \circ + R_{\mathfrak{r}}^s$$

$$t_1 + S_{\mathfrak{r}}^n = \mathbb{1} + R_{\mathfrak{r}}^n$$

$$\circ/\Delta(y_1)^m + \circ/\Delta(y_{\mathfrak{r}})^m + \mathbb{1}/\Delta t_{\mathfrak{r}} + S_{\mathfrak{r}}^m = \mathbb{1} + R_{\mathfrak{r}}^m$$

$$\mathbb{1}/\Delta(y_1)^r + \mathbb{1}/\Delta(y_{\mathfrak{r}})^r + \Upsilon/\Delta t_{\mathfrak{r}} + S_{\mathfrak{r}}^r = \mathbb{1} + R_{\mathfrak{r}}^r$$

$$\Upsilon(y_1)^s + \Upsilon(y_{\mathfrak{r}})^s + \Upsilon t_{\mathfrak{r}} + S_{\mathfrak{r}}^s = \mathbb{1} + R_{\mathfrak{r}}^s$$

$$(y_1)^n \geq \circ$$

$$(y_1)^m - (y_1)^n \geq \circ$$

$$(y_1)^r - (y_1)^m \geq \circ$$

$$(y_1)^s - (y_1)^r \geq \circ$$

$$(y_{\mathfrak{r}})^n \geq \circ$$

$$(y_{\mathfrak{r}})^m - (y_{\mathfrak{r}})^n \geq \circ$$

$$(y_{\mathfrak{r}})^r - (y_{\mathfrak{r}})^m \geq \circ$$

$$(y_{\mathfrak{r}})^s - (y_{\mathfrak{r}})^r \geq \circ$$

$$t_1 \geq \circ, t_{\mathfrak{r}} - t_1 \geq \circ, t_{\mathfrak{r}} - t_{\mathfrak{r}} \geq \circ, t_{\mathfrak{r}} - t_{\mathfrak{r}} \geq \circ.$$

$$(S_1^n, S_1^m, S_1^r, S_1^s) \geq \circ, (S_{\mathfrak{r}}^n, S_{\mathfrak{r}}^m, S_{\mathfrak{r}}^r, S_{\mathfrak{r}}^s) \geq \circ, (S_{\mathfrak{r}}^n, S_{\mathfrak{r}}^m, S_{\mathfrak{r}}^r, S_{\mathfrak{r}}^s) \geq \circ$$

$$(R_1^n, R_1^m, R_1^r, R_1^s) \geq \circ, (R_{\mathfrak{r}}^n, R_{\mathfrak{r}}^m, R_{\mathfrak{r}}^r, R_{\mathfrak{r}}^s) \geq \circ, (R_{\mathfrak{r}}^n, R_{\mathfrak{r}}^m, R_{\mathfrak{r}}^r, R_{\mathfrak{r}}^s) \geq \circ$$

طبق گام ۳ مسئله را بصورت زیر می نویسیم:

$$\max z_1 = -\Upsilon(y_2)^s$$

$$\max z_2 = \circ/\Delta(y_1)^m - \mathbb{1}/\Delta(y_2)^r + \circ/\Delta t_2$$

$$\max z_3 = \mathbb{1}/\Delta(y_1)^r - \circ/\Delta(y_2)^m + \mathbb{1}/\Delta t_3$$

$$\max z_4 = \Upsilon(y_1)^s + \Upsilon t_4$$

s.t.

$$\circ - t_1 + S_1^n = \circ + R_1^n$$

$$\circ/\Delta(y_1)^m + \circ/\Delta(y_2)^m - \mathbb{1}/\Delta t_2 + S_1^m = \circ + R_1^m$$

$$\mathbb{1}/\Delta(y_1)^r + \mathbb{1}/\Delta(y_2)^r - \Upsilon/\Delta t_3 + S_1^r = \circ + R_1^r$$

$$\Upsilon(y_1)^s + \Upsilon(y_2)^s - \Upsilon t_4 + S_1^s = \circ + R_1^s$$

$$-\Upsilon(y_2)^s + S_2^n = \circ + R_2^n$$

$$\circ/\Delta(y_1)^m - \mathbb{1}/\Delta(y_2)^r - \circ/\Delta t_2 + S_2^m = \circ + R_2^m$$

$$\mathbb{1}/\Delta(y_1)^r - \circ/\Delta(y_2)^m - \mathbb{1}/\Delta t_3 + S_2^r = \circ + R_2^r$$

$$\Upsilon(y_1)^s - \Upsilon t_4 + S_2^s = \circ + R_2^s$$

$$t_1 + S_3^n = \mathbb{1} + R_3^n$$

$$\circ/\Delta(y_1)^m + \circ/\Delta(y_2)^m + \mathbb{1}/\Delta t_2 + S_3^m = \mathbb{1} + R_3^m$$

$$\mathbb{1}/\Delta(y_1)^r + \mathbb{1}/\Delta(y_2)^r + \Upsilon/\Delta t_3 + S_3^r = \mathbb{1} + R_3^r$$

$$\Upsilon(y_1)^s + \Upsilon(y_2)^s + \Upsilon t_4 + S_3^s = \mathbb{1} + R_3^s$$

$$(y_1)^n \geq \circ$$

$$(y_1)^m - (y_1)^n \geq \circ$$

$$(y_1)^r - (y_1)^m \geq \circ$$

$$(y_1)^s - (y_1)^r \geq \circ$$

$$(y_2)^n \geq \circ$$

$$(y_2)^m - (y_2)^n \geq \circ$$

$$(y_2)^r - (y_2)^m \geq \circ$$

$$(y_2)^s - (y_2)^r \geq \circ$$

$$t_1 \geq \circ, t_2 - t_1 \geq \circ, t_3 - t_2 \geq \circ, t_4 - t_3 \geq \circ$$

$$(S_1^n, S_1^m, S_1^r, S_1^s) \geq \circ, (S_2^n, S_2^m, S_2^r, S_2^s) \geq \circ, (S_3^n, S_3^m, S_3^r, S_3^s) \geq \circ$$

$$(R_1^n, R_1^m, R_1^r, R_1^s) \geq \circ, (R_2^n, R_2^m, R_2^r, R_2^s) \geq \circ, (R_3^n, R_3^m, R_3^r, R_3^s) \geq \circ$$

طبق گام ۴ مسئله را برای z_4 بصورت زیر حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \max z_4 &= 2(y_1)^s + 2t_4 \\ s.t. \\ 2(y_1)^s + 2(y_2)^s - 3t_4 + S_1^s &= 0 + R_1^s \\ 2(y_1)^s - 2t_4 + S_2^s &= 0 + R_2^s \\ 2(y_1)^s + 2(y_2)^s + 3t_4 + S_3^s &= 1 + R_3^s \\ (y_1)^s \geq 0, (y_2)^s \geq 0, t_4 \geq 0, \\ S_1^s, S_2^s, S_3^s \geq 0, R_1^s, R_2^s, R_3^s \geq 0 \end{aligned}$$

مقدار بهینه‌ی مسئله‌ی حل شده $z_4^* = 0/8$ پس به مرحله بعد می‌رویم:

$$\begin{aligned} \max z_3 &= 1/5(y_1)^r - 0/5(y_2)^m + 1/5t_3 \\ s.t. \\ 1/5(y_1)^r + 1/5(y_2)^r - 2/5t_3 + S_1^r &= 0 + R_1^r \\ 1/5(y_1)^r - 0/5(y_2)^m - 1/5t_3 + S_2^r &= 0 + R_2^r \\ 1/5(y_1)^r + 1/5(y_2)^r + 2/5t_3 + S_3^r &= 1 + R_3^r \\ (y_1)^r \geq 0, (y_2)^r \geq 0, t_3 \geq 0, (y_2)^m \geq 0 \\ S_1^r, S_2^r, S_3^r \geq 0, R_1^r, R_2^r, R_3^r \geq 0 \end{aligned}$$

مقدار بهینه‌ی بدست آمده از حل مسئله بالا $z_3^* = 0/4$ می‌باشد پس به مرحله بعد می‌رویم:

$$\begin{aligned} \max z_2 &= 0/5(y_1)^m - 1/5(y_2)^r + 0/5t_2 \\ s.t. \\ 0/5(y_1)^m + 0/5(y_2)^m - 1/5t_2 + S_1^m &= 0 + R_1^m \\ 0/5(y_1)^m - 1/5(y_2)^r - 0/5t_2 + S_2^m &= 0 + R_2^m \\ 0/5(y_1)^m + 0/5(y_2)^m + 1/5t_2 + S_3^m &= 1 + R_3^m \\ (y_1)^m \geq 0, (y_2)^m \geq 0, t_2 \geq 0, (y_2)^r \geq 0 \\ S_1^m, S_2^m, S_3^m \geq 0, R_1^m, R_2^m, R_3^m \geq 0 \end{aligned}$$

مقدار بهینه‌ی مسئله‌ی حل شده $z_2^* = 0/4$ لذا به مرحله آخر می‌رویم:

$$\max z_1 = -\mathfrak{V}(y_2)^s$$

s.t.

$$\circ - t_1 + S_1^n = \circ + R_1^n$$

$$-\mathfrak{V}(y_2)^s + S_2^n = \circ + R_2^n$$

$$t_1 + S_2^n = 1 + R_2^n$$

$$(y_1)^n \geq \circ, (y_2)^n \geq \circ, t_1 \geq \circ, (y_2)^s \geq \circ$$

$$S_1^n, S_2^n, S_2^n \geq \circ, R_1^n, R_2^n, R_2^n \geq \circ$$

در نتیجه جواب‌های بهینه مسئله بصورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{y}_1^* = \{(y_1^*)^n, (y_1^*)^m, (y_1^*)^r, (y_1^*)^s\} = (\circ, \circ/\mathfrak{V}, \circ/\mathfrak{V}, \circ/\mathfrak{V})$$

$$\tilde{y}_2^* = \{(y_2^*)^n, (y_2^*)^m, (y_2^*)^r, (y_2^*)^s\} = (\circ, \circ, \circ, \circ)$$

$$t^* = \{(t_1, t_2, t_3, t_4)\} = (\circ, \circ/\mathfrak{V}, \circ/\mathfrak{V}, \circ/\mathfrak{V})$$

$$S_1^* = \{(S_1^n, S_1^m, S_1^r, S_1^s)\} = (\circ, \circ/\mathfrak{V}, \circ/\mathfrak{V}, \circ/\mathfrak{V})$$

$$S_2^* = \{(S_2^n, S_2^m, S_2^r, S_2^s)\} = (\circ, \circ, \circ, \circ)$$

$$S_2^* = \{(S_2^n, S_2^m, S_2^r, S_2^s)\} = (1, 1/\mathfrak{F}, 1/\mathfrak{F}, \mathfrak{V})$$

$$R_1^* = \{(R_1^n, R_1^m, R_1^r, R_1^s)\} = (\circ, \circ, \circ, \circ)$$

$$R_2^* = \{(R_2^n, R_2^m, R_2^r, R_2^s)\} = (\circ, \circ, \circ, \circ)$$

$$R_2^* = \{(R_2^n, R_2^m, R_2^r, R_2^s)\} = (\circ, 1, 1, \mathfrak{V})$$

در نتیجه جواب بهینه برابر است با:

$$\tilde{x}_1^* = \{(x_1^*)^n, (x_1^*)^m, (x_1^*)^r, (x_1^*)^s\} = (\circ, 1, 1, 1)$$

$$\tilde{x}_2^* = \{(x_2^*)^n, (x_2^*)^m, (x_2^*)^r, (x_2^*)^s\} = (\circ, \circ, \circ, \circ)$$

و همچنین جواب بهینه تابع هدف برای عدد فازی دوزنقه‌ای بصورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)^n, (z^*)^m, (z^*)^r, (z^*)^s\} = (\circ, \circ/\mathfrak{F}, \circ/\mathfrak{F}, \circ/\mathfrak{V})$$

حال به مقایسه روش اول و روش دوم که در این پایان‌نامه ارائه شده با استفاده از روش مقایسه یاگر می‌پردازیم:

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)^n, (z^*)^m, (z^*)^r, (z^*)^s\} = (\circ, \circ, \circ/\mathfrak{F}, \circ/\mathfrak{V}) \text{ روش اول}$$

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)^n, (z^*)^m, (z^*)^r, (z^*)^s\} = (\circ, \circ/\mathfrak{F}, \circ/\mathfrak{F}, \circ/\mathfrak{V}) \text{ روش دوم}$$

$$R(\circ, \circ, \circ/\mathfrak{F}, \circ/\mathfrak{V}) = \circ/\mathfrak{F}$$

$$R(\circ, \circ/4, \circ/4, \circ/8) = \circ/5$$

$$method_1 = \circ/4 < method_2 = \circ/5$$

نشان می‌دهد روش دوم از مطلوبیت جواب بهینه بهتری برخوردار است. با تبدیل جواب بهینه روش فازی مثلثی ارائه شده توسط داس [۲۴] به فازی ذوزنقه‌ای داریم: $\tilde{z} = (\circ, \circ/4, \circ/4, \circ/8)$ حال به مقایسه جواب روش دوم $\tilde{z} = (\circ, \circ/4, \circ/4, \circ/8)$ با روش ارائه شده توسط داس با رتبه‌بندی یاگر می‌پردازیم:

$$method_2 = \circ/5 = Das.method = \circ/5$$

که نشان می‌دهد روش دوم ارائه شده دارای جوابی هم‌مرتبه روش داس برای فازی مثلثی می‌باشد.

مثال ۲.۴.۴. این مسئله، مثال ارائه شده توسط ورامانی^۱ و همکارانش [۱۱۷] می‌باشد که با روش پیشنهادی حل می‌شود تا به بررسی جواب‌های بدست آمده بپردازیم.

$$\max \tilde{z} = \frac{5x_1 + 3x_2}{5x_1 + 2x_2 + 1}$$

s.t.

$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$x_1, x_2 \geq \circ.$$

$$\max \tilde{z} = \frac{(3, 4, 6, 7)\tilde{x}_1 + (2, 2/5, 3/5, 4)\tilde{x}_2}{(4, 4/5, 5/5, 6)\tilde{x}_1 + (1, 1/5, 2/5, 3)\tilde{x}_2 + (\circ, \circ/5, 1/5, 2)}$$

s.t.

$$(2, 2/5, 3/5, 4)\tilde{x}_1 + (3, 4, 6, 7)\tilde{x}_2 \leq (11, 12, 18, 19)$$

$$(4, 4/5, 5/5, 6)\tilde{x}_1 + (1, 1/5, 2/5, 3)\tilde{x}_2 \leq (8, 9, 11, 12)$$

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2 \geq \circ.$$

با حل مدل فوق جواب‌های بهینه بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$\tilde{y}_1^* = \{(y_1^*)^n, (y_1^*)^m, (y_1^*)^r, (y_1^*)^s\} = (\circ/6, \circ/6, \circ/6, \circ/6)$$

$$\tilde{y}_2^* = \{(y_2^*)^n, (y_2^*)^m, (y_2^*)^r, (y_2^*)^s\} = (\circ/15, \circ/15, \circ/15, \circ/15)$$

$$t^* = \{(t_1, t_2, t_3, t_4)\} = (\circ/7, \circ/7, \circ/7, \circ/7)$$

$$S_1^* = \{(S_1^n, S_1^m, S_1^r, S_1^s)\} = (\circ/18, \circ/24, \circ/29, \circ/36)$$

¹Veeramani

$$S_{\mathcal{P}}^* = \{(S_{\mathcal{P}}^n, S_{\mathcal{P}}^m, S_{\mathcal{P}}^r, S_{\mathcal{P}}^s)\} = (\circ/18, \circ/18, \circ/26, \circ/30)$$

$$S_{\mathcal{P}}^* = \{(S_{\mathcal{P}}^n, S_{\mathcal{P}}^m, S_{\mathcal{P}}^r, S_{\mathcal{P}}^s)\} = (\circ/5, \circ/6, \circ/9, 1)$$

$$R_{\mathcal{I}}^* = \{(R_{\mathcal{I}}^n, R_{\mathcal{I}}^m, R_{\mathcal{I}}^r, R_{\mathcal{I}}^s)\} = (\circ, \circ/18, \circ/18, \circ/36)$$

$$R_{\mathcal{P}}^* = \{(R_{\mathcal{P}}^n, R_{\mathcal{P}}^m, R_{\mathcal{P}}^r, R_{\mathcal{P}}^s)\} = (\circ, \circ/07, \circ/23, \circ/30)$$

$$R_{\mathcal{P}}^* = \{(R_{\mathcal{P}}^n, R_{\mathcal{P}}^m, R_{\mathcal{P}}^r, R_{\mathcal{P}}^s)\} = (\circ, \circ/2, \circ/8, 1)$$

در نتیجه جواب بهینه برابر است با:

$$\tilde{x}_{\mathcal{I}}^* = \{(x_{\mathcal{I}}^*)^n, (x_{\mathcal{I}}^*)^m, (x_{\mathcal{I}}^*)^r, (x_{\mathcal{I}}^*)^s\} = (\circ/86, \circ/86, \circ/86, \circ/86)$$

$$\tilde{x}_{\mathcal{P}}^* = \{(x_{\mathcal{P}}^*)^n, (x_{\mathcal{P}}^*)^m, (x_{\mathcal{P}}^*)^r, (x_{\mathcal{P}}^*)^s\} = (2/1, 2/1, 2/1, 2/1)$$

و همچنین جواب بهینه تابع هدف برای عدد فازی دوزنقه‌ای بصورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)^n, (z^*)^m, (z^*)^r, (z^*)^s\} = (\circ/51, \circ/65, \circ/93, 1/08)$$

حال با توجه به جواب بدست آمده در روش اول:

$$\tilde{z}^* = \{(z^*)^n, (z^*)^m, (z^*)^r, (z^*)^s\} = (\circ, \circ, \circ/93, 1/08)$$

و با در نظر گرفتن رتبه‌بندی یاگر داریم:

$$R(\circ, \circ, \circ/93, 1/08) = \circ/5$$

$$R(\circ/51, \circ/65, \circ/93, 1/08) = \circ/8$$

$$method_{\mathcal{I}} = \circ/5 < method_{\mathcal{P}} = \circ/8$$

در نتیجه روش دوم از روش اول جواب بهتری ارائه داده است.

حال به مقایسه جواب فوق با جواب ورامانی و همکارش که در [۱۱۷] بصورت $\tilde{z} = (\circ, \circ/27, \circ/99)$

ارائه شده می‌پردازیم، ابتدا جواب روش ورامانی را به فازی دوزنقه‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$\tilde{z} = (\circ, \circ/27, \circ/27, \circ/99) \text{ حال با توجه به رتبه‌بندی یاگر داریم:}$$

$$R(\circ/51, \circ/65, \circ/93, 1/08) = \circ/8$$

$$R(\circ, \circ/27, \circ/27, \circ/99) = \circ/4$$

$$method_{\mathcal{P}} = \circ/8 > veeranimethod = \circ/4$$

در نتیجه جواب روش دوم نسبت به جواب روش ورامانی بهتر می‌باشد.

با توجه به مقایسه‌های انجام شده برای چندین مثال مطرح شده دریافتیم که دو روش ارائه شده در این پایان‌نامه نسبت به روش‌های دیگر جواب بهینه مطلوب‌تری دارند و همچنین روش دوم ارائه شده توانایی بهتری در ایجاد جواب‌های بهینه نسبت به روش اول و همچنین روش‌های ارائه شده دیگر دارد.

فصل ۵

نتیجه‌گیری

تاکنون، محققین مدل‌ها و راه‌حل‌های مختلفی برای حل برنامه‌ریزی کسری فازی ارائه دادند. در این پایان‌نامه ابتدا به شرح برنامه‌ریزی فازی با یک روش حل و مثال برای حل آن پرداخته شد و در ادامه برنامه‌ریزی کسری و برنامه‌ریزی کسری فازی با ارائه روش حل برای هر یک بیان شد. سپس دو روش جدید برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با در نظر گرفتن اعداد فازی دوزنقه‌ای پیشنهاد شد که در روش اول، برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با اعداد دوزنقه‌ای و قیود نامساوی ابتدا به برنامه‌ریزی خطی چندهدفه تبدیل و سپس با روش الفبایی حل شد. در روش دوم، برنامه‌ریزی کسری خطی تماماً فازی با اعداد دوزنقه‌ای با در نظر گرفتن متغیر کمکی و تبدیل قیود نامساوی به قیود مساوی انجام گرفت و در نهایت با حل مثال‌های مختلف روش‌های پیشنهادی با روش‌های دیگر مقایسه گردید و مشخص شد مدل‌های پیشنهادی نسبت به روش‌های دیگر از پیچیدگی کمتری برخوردارند و یک روش ساده و مطلوب برا رسیدن به جواب بهینه هستند و همچنین مشاهده شد که روش دوم نسبت به روش اول کاراتر است.

پیشنهاد برای کارهای بعدی می‌تواند در نظر گرفتن اعداد فازی LR و یا استفاده از الگوریتم‌های ابتکاری باشد که با استفاده از روابط حساب فازی مربوط به آن می‌شود روش حل جدیدی برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی فازی ارائه داد.

مراجع

- [۱] ابراهیم نژاد، ع. (۱۳۹۸) ”بازبینی یک مدل ریاضی برای حل مساله‌ی برنامه‌ریزی خطی تماماً فازی با اعداد دوزنقه‌ای“ پژوهش‌های نوین در ریاضی.
- [۲] طاهری، س.م. (۱۳۷۸) ”آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی“ انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد.
- [۳] مومنی، م. (۱۳۸۹) ”مباحث نوین تحقیق در عملیات“ انتشارات منصور مومنی، تهران، شماره اول.
- [4] Abad, F. S. P. S., Allahdadi, M., Nehi, H. M. (2020) “Interval linear fractional programming: optimal value range of the objective function” Computational and Applied Mathematics, 39(4), 1-17.
- [5] Abo-Sinna, M. A., Baky, I. A. (2010) “Fuzzy goal programming procedure to bilevel multiobjective linear fractional programming problems” International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 14, 75-89.
- [6] Ammar, E. S., Muamer, M. (2016) “On solving fuzzy rough linear fractional programming problem” Int. Res. J. Eng. Technol, 3, 2099-2120.
- [7] Arya, R., Singh, P., Kumari, S., Obaidat, M. S. (2020) “An approach for solving fully fuzzy multi-objective linear fractional optimization problems” Soft Computing, 24(12), 9105-9119.
- [8] Ban, A. I. and Coroianu, L. (2012) “Nearest interval, triangular approximation of a fuzzy number preserving ambiguity” International Journal of Approximate Reasoning, 53(5), 805-836.
- [9] Bevilacqua, M., Ciarapica, F.E. and Giacchetta, G. (2006) “A fuzzy-QFD approach to supplier selection” Journal of Purchasing Supply Management, 12, 14-27.

-
- [10] Bitran, G.R. and Novaes, A.G. (1973) "Linear Programming with a Fractional Objective Functions" *Operations Research*, 21, 22-29.
- [11] Bitran, G.R. and Magnanti, T.L. (1976) "Duality and Sensitivity Analysis with Fractional Objective Function" *Journal of Operation Research*, 24, 675-699.
- [12] Buckley, J.J., Feuring, T. (2000) "Evolutionary algorithm solution to fuzzy problems: fuzzy linear programming" *Fuzzy Sets and Systems*, 109(1), 35–53.
- [13] Cai, Q., Hao, Z., Pan, S. (2007) "The solution of linear programming with LRfuzzy numbers in objective function" In: *Fuzzy Information and Engineering (ICFIE)*, pp. 988–999. Springer, Berlin.
- [14] Chakraborty, M., Gupta, S. (2002) "Fuzzy mathematical programming for multi objective linear fractional programming problem" *Fuzzy sets and systems*, 125(3), 335-342.
- [15] Chanas, S., Zieliński, P. (2000) "On the equivalence of two optimization methods for fuzzy linear programming problems" *European Journal of Operational Research*, 121(1), 56-63.
- [16] Charnes, A., and Cooper, W. W. (1962) "Programming with linear fractionals" *Nav. Logist. Q.*, 9, 181-186.
- [17] Chen, C.C. and Tang, H.C. (2008) "Ranking nonnormal p-norm trapezoidal fuzzy numbers with integral value" *Computers and Mathematics with Applications* 56, 2340–2346.
- [18] Chen, S.M. and Chen, J.H. (2009) "Fuzzy risk analysis based on ranking generalized fuzzy numbers with different heights and different spreads" *Expert Systems with Applications*, 36(3), 6833–6842.
- [19] Cheng, H., Huang, W., Cai, J. (2013) "Solving a fully fuzzy linear programming problem through compromise programming" *Journal of Applied Mathematics*, Art. ID 726296, 10.
- [20] Chinnadurai, V., Muthukumar, S. (2016) "Solving the linear fractional programming problem in a fuzzy environment: Numerical approach" *Applied Mathematical Modelling*, 40(11-12), 6148-6164.

- [21] Das, S. K., Edalatpanah, S. A. (2020) "New insight on solving fuzzy linear fractional programming in material aspects" *Fuzzy optimization and modelling*, 1, 1-7.
- [22] Das, S. K., Edalatpanah, S. A., Mandal, T. (2018) "A proposed model for solving fuzzy linear fractional programming problem: Numerical Point of View" *Journal of Computational Science*, 25, 367-375.
- [23] Das, S. K., Edalatpanah, S. A., Mandal, T. (2019) "A new method for solving linear fractional programming problem with absolute value functions" *International Journal of Operational Research*, 36(4), 455-466.
- [24] Das, S. K., Mandal, T., Edalatpanah, S. A. (2017) "A new approach for solving fully fuzzy linear fractional programming problems using the multi-objective linear programming" *RAIRO-Operations research*, 51(1), 285-297.
- [25] Das, S.K., Mandal, T., Edalatpanah, S.A. (2017) "A mathematical model for solving fully fuzzy linear programming problem with trapezoidal fuzzy numbers" *Applied Intelligence* 46(3), 509–519.
- [26] Das, S. K., Mandal, T. (2017) "A new model for solving fuzzy linear fractional programming problem with ranking function" *Journal of applied research on industrial engineering*, 4(2), 89-96.
- [27] De, P. K., Deb, M. (2013) "Solving fuzzy linear fractional programming problem using signed distance ranking" In 2013 3rd IEEE International Advance Computing Conference (IACC) (pp. 806-812). IEEE.
- [28] Deb, M. (2018) "A study of fully fuzzy linear fractional programming problems by signed distance ranking technique" In *Optimization Techniques for Problem Solving in Uncertainty* (pp. 73-115). IGI Global.
- [29] Deb, M., De, P. K. (2015) "Optimal solution of a fully fuzzy linear fractional programming problem by using graded mean integration representation method" *Applications and Applied Mathematics*, 10(1), 571-587.
- [30] Delgado, M., Verdegay, J. L., Vila, M. A. (1987) "Imprecise costs in mathematical programming problems" *Control and Cybernetics*, 16(2), 113–121.
- [31] Delgado, M., Verdegay, J. L., Vila, M. A. (1989) "A general model for fuzzy linear programming" *Fuzzy Sets and systems*, 29(1), 21-29.

- [32] Dheyab, A. N. (2012) "Finding the optimal solution for fractional linear programming problems with fuzzy numbers" *Journal of Kerbala university*, 10(3), 105-110.
- [33] Dinkelbach, W. (1967) "On nonlinear fractional programming" *Management science*, 13(7), 492-498.
- [34] Dubois, D. and Prade, H. (1978) "Operations on fuzzy numbers" *J. Systems Sci.* 9, 613-626.
- [35] Dutta, D., Tiwari, R.N. and Rao, J.R. (1992) "Multiple objective linear fractional programming- A fuzzy set theoretic approach" *Fuzzy sets syst*, 52, 39-45.
- [36] Dutta, D., Rao, J. R., Tiwari, R. N. (1992) "Sensitivity analysis in fuzzy linear fractional programming problem" *Fuzzy Sets and Systems*, 48(2), 211-216.
- [37] Dutta, D., Rao, J. R., Tiwari, R. N. (1993) "Effect of tolerance in fuzzy linear fractional programming" *Fuzzy sets and systems*, 55(2), 133-142.
- [38] Ebrahimnejad, A. (2015) "A duality approach for solving bounded linear programming problems with fuzzy variables based on ranking functions and its application in bounded transportation problems" *International Journal of Systems Science*, 46(11), 2048-2060.
- [39] Ebrahimnejad, A. (2016) "New method for solving Fuzzy transportation problems with LR flat fuzzy numbers" *Information Sciences*, 37, 108-124.
- [40] Ebrahimnejad, A. (2016) "Fuzzy linear programming approach for solving transportation problems with intervalvalued trapezoidal fuzzy numbers" *Sadhana*, 41(3), 299-316.
- [41] Ebrahimnejad, A. (2018) "A method for solving linear programming with interval-valued trapezoidal fuzzy variables" *RAIRO - Operations Research*, 52(3), 955-979.
- [42] Ebrahimnejad, A., Ghomi, S. J., Mirhosseini-Alizamini, S. M. (2017) "A new approach for solving fully fuzzy linear fractional programming problems" In 2017 IEEE 4th International Conference on Knowledge-Based Engineering and Innovation (KBEI) (pp. 0862-0865). IEEE.
- [43] Ebrahimnejad, A., Tavana, M. (2014) "A novel method for solving linear programming problems with symmetric trapezoidal fuzzy numbers" *Applied Mathematical Modelling*, 37(17-18), 4388-4395.

- [44] Ebrahimnejad, A., Verdegay, J. L. (2016) "An efficient computational approach for solving type-2 intuitionistic fuzzy numbers based transportation problems" *International Journal of Computational Intelligence Systems*, 9(6), 1154-1173.
- [45] Ebrahimnejad, A., Verdegay, J. L. (2018) "Fuzzy Sets-Based Methods and Techniques for Modern Analytics" *Studies in Fuzziness and Soft Computing*, vol. 364. Springer, Cham.
- [46] Ebrahimnejad, A., Verdegay, J. L. (2018) "A new approach for solving fully intuitionistic fuzzy transportation problems" *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 17(4), 447-474.
- [47] Effati, S. and Pakdaman, M. (2012) "Solving the Interval-Valued Linear Fractional Programming Problem" *American Journal of Computational Mathematics*, 5, 51-55.
- [48] Ezzati, R., Khorram, E., Enayati, R. (2015) "A new algorithm to solve fully fuzzy linear programming problems using the MOLP problem" *Applied Mathematical Modelling*, 39, 3183-3193.
- [49] Fang, S. C., Hu, C. F., Wang, H. F., Wu, S. Y. (1999) "Linear programming with fuzzy coefficients in constraints" *Computers Mathematics with Applications*, 37(10), 63-76.
- [50] Fullér, R. (1989) "On stability in fuzzy linear programming problems" *Fuzzy Sets and Systems* 30(3), 339-344.
- [51] GASIMOV, R. R., YENİLMEZ, K. (2002) "Solving fuzzy linear programming problems with linear membership function" *Turkish Journal of mathematics*, 26(4), 375-396.
- [52] Hashemi, S.M., Modarres, M., Nasrabadi, E., Nasrabadi, M.M. (2006) "Fully fuzzified linear programming, solution and duality" *Journal of Intelligence and Fuzzy Systems*, 17(1), 253-261.
- [53] Hatami-Marbini, A., Agrell, P.J., Tavana, M., Emrouznejad, A. (2013) "A stepwise fuzzy linear programming model with possibility and necessity relations" *Journal of Intelligence and Fuzzy Systems*, 25(1), 81-93.

- [54] Hosseinzadeh Lotfi, F., Allahviranloo, T., Alimardani Jondabeh, M., Alizadeh, L. (2009) "Solving a full fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution" *Applied Mathematical Modelling*, 33(7), 3151–3156.
- [55] Hosseinzadeh, A., Edalatpanah, S.A. (2016) "A new approach for solving fully fuzzy linear programming by using the lexicography method" *Advances in Fuzzy Systems*, Art. ID 1538496, 6.
- [56] Jain, S., Mangal, A., Parihar, P. R. (2011) "Solution of fuzzy linear fractional programming problem" *Opsearch*, 48(2), 129.
- [57] Jayalakshmi, M., Pandian, P. (2012) "A New Method for Finding an Optimal Fuzzy Solution Fully Fuzzy Linear Programming Problems" *International Journal of Engineering Research and Applications*, 2, 247-254.
- [58] Jiao, H., Guo, Y., Shen, P. (2006) "Global optimization of generalized linear fractional programming with nonlinear constraints" *Applied Mathematics and Computation*, 183(2), 717-728.
- [59] Kaleva, O.(1987) "Fuzzy differential equations" *Fuzzy Sets and Systems* 24 301-317.
- [60] Kornbluth, J. S., Steuer, R. E. (1981) "Multiple objective linear fractional programming" *Management Science*, 27(9), 1024-1039.
- [61] Kaufmann, A. (1998) "Fuzzy mathematical models engineering and management science " Elsevier Science Publishing Company Inc.
- [62] Kaufmann, A. and Gupta, M. (1988) "Fuzzy mathematical models in engineering and management science" New York: Elsevier Science .
- [63] Kaur, J., Kumar, A. (2017) "A novel method for solving fully fuzzy linear fractional programming problems" *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 33(4), 1983-1990.
- [64] Kausar, H., Adhami, A. Y. (2019) "Bi-level multi-objective stochastic linear fractional programming with general form of distribution" *Statistics, Optimization Information Computing*, 7(2), 407-416.
- [65] Klir, G.J. and Yuan, B. (1994) "Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Applications" Prentic-Hall, Inc, London.

- [66] Konno, H., Fukaishi, K. (2000) "A branch and bound algorithm for solving low rank linear multiplicative and fractional programming problems" *Journal of Global Optimization*, 18(3), 283-299.
- [67] Konno, H., Kuno, T. (1990) "Generalized linear multiplicative and fractional programming" *Annals of Operations Research*, 25(1), 147-161.
- [68] Kumar, A., Kaur, J., Singh, P. (2011) "A new method for solving fully fuzzy linear programming problems" *Applied Mathematical Modelling*, 35, 817–823.
- [69] Kumar, A., Kaur, J. (2014) "Fuzzy optimal solution of fully fuzzy linear programming problems using ranking function" *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 16(1), 337-344.
- [70] Kumar, A., Kaur, A. (2014) "Optimal way of selecting cities and conveyances for supplying coal in uncertain environment" *Sadhana*, 39(1), 165-187.
- [71] Lai, Y. J., Hwang, C. L. (1992) "A new approach to some possibilistic linear programming problem" *Fuzzy Sets and Systems*, 49(2), 121–133.
- [72] Li, D. F., Chen, S. (1996) "A fuzzy programming approach to fuzzy linear fractional programming with fuzzy coefficients" *The Journal of Fuzzy Mathematics*, 4, 829-834.
- [73] Liu, X., Gao, Y. L., Zhang, B., Tian, F. P. (2019) "A new global optimization algorithm for a class of linear fractional programming" *Mathematics*, 7(9), 867.
- [74] Loganathan, T., Ganesan, K. (2019) "A solution approach to fully fuzzy linear fractional programming problems" In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1377, No. 1, p. 012040). IOP Publishing.
- [75] Lotfi, F. H., Allahviranloo, T., Jondabeh, M. A., Alizadeh, L. (2009) "Solving a full fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution" *Applied mathematical modelling*, 33(7), 3151-3156.
- [76] Maeda, T. (2001) "Fuzzy linear programming problems as bi-criteria optimization problems" *Applied Mathematics and Computation*, 120(1–3), 109–121.
- [77] Mehlawat, M. K., Kumar, S. (2012) "A solution procedure for a linear fractional programming problem with fuzzy numbers" In *Proceedings of the International Con-*

- ference on Soft Computing for Problem Solving (SocProS 2011) December 20-22, 2011 (pp. 1037-1049). Springer, India.
- [78] Mehra, A., Chandra, S., Bector, C. R. (2007) "Acceptable optimality in linear fractional programming with fuzzy coefficients" *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 6(1), 5-16.
- [79] Mikaeilvand, N., Allahviranloo, T., Hosseinzadeh, F., Khorasany Kiasary, M. (2008) "Fully fuzzy linear programming problem with positive or negative core" *Far East Journal of Applied Mathematics*, 33, 337-350.
- [80] Mohammed, N. M., Sultan, L. R., Hamoud, A. A., Lomte, S. S. (2020) "Verifiable secure computation of linear fractional programming using certificate validation" *International Journal of Power Electronics and Drive Systems*, 11(1), 284.
- [81] Mond, B. (1981) "On algorithmic equivalence in linear fractional programming" *mathematics of computation*, 185-187.
- [82] Negi, D.S., Lee, E.S. (1993) "Possibility programming by the comparison of fuzzy numbers" *Computers Mathematics with Applications*, 25(9), 43-50.
- [83] Ozkok, B. A. (2019) "Finding fuzzy optimal and approximate fuzzy optimal solution of fully fuzzy linear programming problems with trapezoidal fuzzy numbers" *Journal of Intelligent Fuzzy Systems*, 36(2), 1389-1400.
- [84] Ozkok, B. A. (2020) "An iterative algorithm to solve a linear fractional programming problem" *Computers Industrial Engineering*, 140, 106234.
- [85] Pal, B. B., Moitra, B. N., Maulik, U. (2003) "A goal programming procedure for fuzzy multiobjective linear fractional programming problem" *Fuzzy sets and systems*, 139(2), 395-405.
- [86] Pandian, P., Jayalakshmi, M. (2013) "On solving linear fractional programming problems" *Modern Applied Science*, 7(6), 90.
- [87] Park, C. H., Lim, H. (2019) "A parametric approach to integer linear fractional programming: Newton's and Hybrid-Newton methods for an optimal road maintenance problem" *European Journal of Operational Research*.
- [88] Phuong, N. T. H., Tuy, H. (2003) "A unified monotonic approach to generalized linear fractional programming" *Journal of Global Optimization*, 26(3), 229-259.

- [89] Pop, B. and Stancu-Minasian, I.M.(2008) "A method of solving fuzzy fuzzified linear fractional programming problems" J. Appl. Math. Comput, 27, 227-242.
- [90] Pramanik, S., Dey, P.P. and Giri, B.C. (2011) "Multi-Objective Linear Plus Linear Fractional Programming Problem Based on Taylor Series Approximation" International Journal of Computer Applications, 32, 61-68.
- [91] Pramy, F. A. (2018) "An approach for solving fuzzy multi-objective linear fractional programming problems" International Journal of Mathematical, Engineering and Management Sciences, 3(3), 280-293.
- [92] Ramík, J. (2005) "Duality in fuzzy linear programming: some new concepts and results" Fuzzy Optimization and Decision Making, 4(1), 25-39.
- [93] Ramik, J., Rimanek, J. (1985) "Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization" Fuzzy Sets and Systems 16(2), 123–138.
- [94] Rezvani, S. (2015) "Ranking generalized exponential trapezoidal fuzzy numbers based on variance" Applied Mathematics and Computation, 262, 191-198.
- [95] Safaei, N. (2014) "A new method for solving fully fuzzy linear fractional programming with a triangular fuzzy numbers" Applied Mathematics and Computational Intelligence, 3(1), 273-281.
- [96] Saha, S. K., Hossain, M. R., Uddin, M. K., Mondal, R. N. (2015) "A new approach of solving linear fractional programming problem (LFP) by using computer algorithm" Open Journal of Optimization, 4(03), 74.
- [97] Sakawa, M. and Yano, H.(1988) "An interactive fuzzy satisficing method for multi objective linear fractional programming problems" Fuzzy sets syst, 28, 129-144.
- [98] Sakawa, M., Nishizaki, I., Uemura, Y. (2000) "Interactive fuzzy programming for two-level linear fractional programming problems with fuzzy parameters" Fuzzy Sets and Systems, 115(1), 93-103.
- [99] Sakawa, M., Nishizaki, I. (2001) "Interactive fuzzy programming for two-level linear fractional programming problems" Fuzzy Sets and Systems, 119(1), 31-40.
- [100] Sakawa, M., Yano, H. and Takahashi, J. (1992) "Pareto optimality for multi objective linear fractional programming problems with fuzzy parameters" Inf. Sci, 63, 33-53.

-
- [101] Sapan, K. D., Mandal, T., Edalatpanah, S. A. (2015) "A new method for solving fully fuzzy linear fractional programming with a triangular fuzzy numbers" .
 - [102] Sing, H.C. (1981) "Optimality Condition in Fractional Programming" Journal of Optimization Theory and Applications, 33, 287-294.
 - [103] Singh, S. K., Yadav, S. P. (2016) "Fuzzy programming approach for solving intuitionistic fuzzy linear fractional programming problem" International Journal of Fuzzy Systems, 18(2), 263-269.
 - [104] Srinivasan, R. (2020) "On solving fuzzy linear fractional programming in material aspects" Materials Today Proceedings, 21, 155-157.
 - [105] Stancu-Minasian, I.M. and Pop, B. (2003) "On a fuzzy set approach to solving multiple objective linear fractional programming problem" Fuzzy Sets Syst, 134, 397-405.
 - [106] Stanojevic, B. and Stancu-Minasian, I.M. (2009) "On solving fuzzified linear fractional programs" Adv.Model.Optim, 11, 503-523.
 - [107] Stanojevic, B. and I.M. Stancu-Minasian, I.M. (2012) "Evaluating fuzzy inequalities and solving fully fuzzified linear fractional programs" Yugoslav J. Oper. Res, 1, 41-50.
 - [108] Swarup, K. (1964) "Linear Fractional Programming" Operation Research, 13, 1029-1036.
 - [109] Tanaka, H., Ichihashi, H., Asai, K. (1984) "A formulation of fuzzy linear programming problems based on comparison of fuzzy numbers" Control and Cybernetics, 13, 186-194.
 - [110] Tantawy, S. F. (2007) "A new method for solving linear fractional programming problems" Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 1(2), 105-108.
 - [111] Tantawy, S.F. (2008) "A New Procedure for Solving Linear Fractional Programming Problems" Mathematical and Computer Modelling, 48, 969-973.
 - [112] Tantawy, S.F. (2014) "A New Concept of Duality for Linear Fractional Programming Problems" International Journal of Engineering and Innovative Technology, 3, 147-149.

- [113] Tantawy, S.F. (2008) "An Iterative Method for Solving Linear Fractional Programming (LFP) Problem with Sensitivity Analysis" *Mathematical and Computational Mathematics*, 13, 147-151.
- [114] Tantawy, S.F. and Sallam, R.H. (2013) "A New Method for Solving Linear Fractional Programming Problems" *International Journal of Recent Scientific Research*, 4, 623-625.
- [115] Toksari, M.D. (2008) "Taylor series approach to fuzzy multi objective linear fractional programming" *Inf. Sci*, 178, 1189-1204.
- [116] Verdegay, J. L. (1984) "A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem" *Fuzzy sets and systems*, 14(2), 131-141.
- [117] Veeramani, C., Sumathi, M. (2016) "Fuzzy mathematical programming approach for solving fuzzy linear fractional Programming Problems" *RAIRO-Operations research*, 48(1), 109-122.
- [118] Veeramani, C., Sumathi, M. (2016) "A new method for solving fuzzy linear fractional Programming Problems" *Journal Of Intelligent Fuzzy Systems*, 31(3), 1831-1843.
- [119] Veeramani, C., Sharanya, S., Ebrahimnejad, A. (2020) "Optimization for multi-objective sum of linear and linear fractional programming problem" *Fuzzy nonlinear programming approach. Mathematical Sciences*, 1-15.
- [120] Wan, S. P., Dong, J. Y. (2014) "Possibility linear programming with trapezoidal fuzzy numbers" *Applied Mathematical Modeling*, 38, 1660–1672.
- [121] Wang, D. (1997) "An inexact approach for linear programming problems with fuzzy objective and resources" *Fuzzy sets and systems*, 89(1), 61-68.
- [122] Wang, Y. M., Yang, J. B., Xu, D. L. and Chin, K. S. (2006) "On the centroids of fuzzy numbers" *Fuzzy sets and systems*, 157(7), 919-926.
- [123] Wolf, H. (1985) "A parametric method for solving the linear fractional programming problem" *Operations Research*, 33(4), 835-841.
- [124] Zadeh, L.A. (1965) "Fuzzy Sets" *Inf. Control*, 8, 338-353.
- [125] Zhang, C., Guo, P. (2018) "FLFP: A fuzzy linear fractional programming approach with double-sided fuzziness for optimal irrigation water allocation" *Agricultural Water Management*, 199, 105-119.

- [126] Zhang, G. , Wu, Y. H., Remias, M., Lu, J. (2003) “Formulation of fuzzy linear programming problems as four-objective constrained optimization problems” *Applied Mathematics and Computation*, 139(2-3), 383-399.
- [127] Zhu, H., Huang, G. H. (2011) “SLFP: a stochastic linear fractional programming approach for sustainable waste management” *Waste Management*, 31(12), 2612-2619.
- [128] Zimmerman, H. J. (1987) “Fuzzy programming and linear programming with several objective functions” *Fuzzy Sets and Systems*, 1(1), 45-55.

Aabstract

There are many optimization problems, in which ratios of the objective functions give better insight rather than their absolute values. Also, there are problems that ratios of the objectives should be optimized, inherently. One of the efficient tools commonly used for handling these types of problems is linear-fractional programming. However, in real-world problems, due to imperfect and inaccurate information, precise models are unavailable. One of the efficient methods for dealing with imprecise and ambiguous values is using fuzzy numbers instead of crisp ones. Therefore, the concept of fuzzy linear-fractional programming has arisen. In recent decades, many researchers have made a lot of efforts for developing new efficient methods for solving such problems. In this thesis, first, we describe fuzzy programming. Then we investigate the fuzzy linear-fractional programming. Furthermore, we express two new methods for solving fuzzy linear-fractional programming problems, considering the trapezoidal fuzzy numbers. The first method, presented for solving the fuzzy linear-fractional programming problems with inequality constraints, solves the problem using the lexicographic method after converting it to a multi-objective linear programming problem. In the second method, fuzzy linear-fractional programming problems with inequality constraints are solved by assuming auxiliary variables for converting inequality constraints to equality ones. Finally, we compare the efficiency and performance of the proposed methods with others by solving some problems.

Keywords: Fuzzy programming, Fractional programming, Fully fuzzy fractional programming, Multi-objective linear programming, Trapezoidal fuzzy numbers, Optimal solution, Lexicographic.



Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Optimization

Solving fully fuzzy linear fractional programming problems using the multi-objective linear programming

By: Elham Mehdizadeh

Supervisors:

Dr. Mehrdad Ghaznavi
Dr. Namat Allah Taghi-Nezhad

February 2021