

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری معادلات با مشتقات جزئی

عنوان
بررسی و اعمال روش چندشبکه‌ای روی
معادلات وابسته به زمان با
گسسته‌سازی المان متناهی

نگارنده: نورا حبیبی

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

اسفند ۹۹



دانشگاه شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی

ویرایش:

فرم شماره ۶: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد
 نام دانشجو: به شماره دانشجویی ۴۵۷۳ رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان
 همگرایی بدون مش کالوگین برای معادلات سهموی تمام غیرمتعلق که در تاریخ ۱۳۹۴/۱۰/۲۷ با حضور هیأت
 محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

قبول (با درجه: بسیار امتیاز ۱۸۱) ☐ دفاع مجدد ☐ مردود ☐

۲- بسیار خوب (۱۸۱ - ۱۸۰)

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۴- قابل قبول (۱۵۹ - ۱۴)

۳- خوب (۱۶۹ - ۱۶)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر علی مس فروش	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور	دکتر مهدی قوتمند	استادیار	
۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر حجت احسنی طهرانی	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر علیرضا ناظمی	دانشیار	

رئیس دانشکده:

تقدیم

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران
بهترین پشتیبان است و به پاس قلب‌های بزرگشان که فریادرس است و سرگردانی
و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید و به پاس محبت‌های بی‌دریغشان که هرگز
فروکش نمی‌کند.

ماحصل آموخته‌ها و تلاش‌هایم را به آنان که مهر آسمانی‌شان آرام‌بخش آلام زمینی‌ام
بوده است، تقدیم می‌نمایم. به استوارترین تکیه‌گاهم، دستان پر مهر پدرم، به سبزترین
نگاه زندگیم، چشمان سبز مادرم، به روح پاک و چشمان معصوم خواهرم که ناباورانه
بی فروغ گشت، به یار و همدم و همراه زندگی‌ام، همسر عزیزم که کلام مهربان و
تلاش‌های بی‌وقفه‌اش در این روزگاران سخت به من قدرت استوارماندن داد...

سپاس‌گزاری

زبان قاصر من ناتوان‌تر از آن است که از عهده قدردانی نعمت‌های خدای مهربانم، محبت‌های خانواده ام و حمایت و راهنمایی‌های اساتید محترمم برآید. اما در حد بضاعت...

بدینوسیله از زحمات و تلاش بی‌دریغ استاد محترم جناب آقای دکتر مس‌فروش که در تهیه این مجموعه با این جانب همکاری داشته اند ، تشکر و مراتب سپاس قلبی خود را اعلام نموده و موفقیت و سلامتی ایشان را از خداوند متعال خواهانم.

نورا حبیبی

اسفند ۹۹

تعهد نامه

اینجانب **نورا حبیبی** دانشجوی دکتری رشته **آنالیز عددی** علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با **عنوان**

بررسی و اعمال روش چندشبکه‌ای روی معادلات وابسته به زمان با گسسته‌سازی المان متناهی، تحت راهنمایی **علی مس فروش** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

نورا حبیبی

اسفند ۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این رساله معادلات وابسته به زمان سهموی مورد مطالعه قرار گرفته است. روش گسسته‌سازی مورد نظر ما در این جا روش المان متناهی می‌باشد. با بررسی فرم گسسته ماتریسی حاصل و قرار دادن ماتریس همانی به جای ماتریس جرم به فرم گسسته روش تفاضلات متناهی رسیدیم. تمام روش‌های ارایه شده در این رساله برای هر دو نوع گسسته‌سازی معتبر بوده و به تفصیل بیان شده‌اند. خلاصه‌ای از مطالعات و کارهای انجام شده به قرار زیر است: ارائه یک روش دو- شبکه‌ای جدید، بررسی روش چند- شبکه‌ای چرخه- V و W روی معادله گرما دو- بعدی و سه- بعدی با شبکه‌های متفاوت متعامد و غیر متعامد و همچنین اعمال روش چند- شبکه‌ای FAS روی دستگاه معادلات غیر خطی کوپل کنترل بهینه و اعمال آنالیز همگرایی تمام روش‌های بیان شده.

کلمات کلیدی: معادلات با مشتقات جزئی، روش المان متناهی، روش تخفیفی موجی، روش‌های چند شبکه‌ای.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. N. Habibi, A. Mesforoush, F. Gaspar J. L, and C. Rodrigo, Semi-Algebraic Mode Analysis For Finite Element Discretisations Of The Heat Equation, CMDE, 2020.
DOI: 10.22034/cmde.2019.32018.1549.
2. N. Habibi, A. Mesforoush, Extending a new two-grid waveform relaxation on a spatial finite element discretization, CMDE 2020.
DOI: 10.22034/cmde.2020.37349.1653
3. N. Habibi, A. Mesforoush, Semi-Algebraic Mode Analysis For Multigrid Method On Regular Rectangular And Triangular Grids (Submitted to the IJNAO, January, 2021).
4. Fifteenth International Conference Zaragoza-Pau on Mathematics and its Applications Jaca, 10-12 September 2018:
Multigrid Waveform Relaxation Based on Finite Element Discretization.

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
ش	پیشگفتار
۱	۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۱	۱.۱ برخی قضایای کاربردی
۳	۲.۱ روش المان‌های متناهی
۴	۱.۲.۱ اعمال روش المان‌های متناهی روی معادلات سهموی
	۳.۱ روش‌های تخفیفی موجی شکل برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل
۶	معمولی
۷	۱.۳.۱ ایده اصلی روش تخفیفی موجی
۹	۲.۳.۱ روش تخفیفی موجی زمان-پیوسته بر روی دستگاه‌های خطی . .
۱۲	۳.۳.۱ همگرایی روش تکراری موجی زمان-متناهی
۱۲	۴.۳.۱ همگرایی روش تکراری موجی زمان-نامتناهی
۱۲	۴.۱ روش‌های چندشبهه‌ای برای حل دستگاه‌های معادلات جبری
	۱.۴.۱ روش چندشبهه‌ای برای حل دستگاه معادلات جبری ناشی از
۱۹	گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل بیضوی
	۲.۴.۱ روش چندشبهه‌ای برای حل دستگاه معادلات جبری مشتق شده
۲۶	از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل سهموی
۳۱	۲ روش دو-شبهه‌ای موجی جدید
۳۳	۱.۲ روش دو-شبهه‌ای جدید
۳۳	۲.۲ بررسی همگرایی روش دو-شبهه‌ای جدید
۳۸	۳.۲ نتایج عددی

۴۵	۳ تحلیل همگرایی فوریه LFA
۴۸	۱.۳ تحلیل همواری S
۴۸	۲.۳ تحلیل اصلاحی شبکه درشت C_h^{2h}
۵۰	۱.۲.۳ عملگرهای انتقال I_h^{2h}, I_h^h
۵۵	۳.۳ تحلیل دو- شبکه‌ای T_h^{2h}
۵۷	۴ تحلیل حالت نیمه جبری برای روش‌های چند شبکه‌ای موجی
۵۹	۱.۴ بررسی عامل همگرایی روی شبکه دو- بعدی
۵۹	۱.۱.۴ شبکه مستطیلی
۵۹	۲.۱.۴ شبکه مثلثی
۶۱	۳.۱.۴ تحلیل همواری $S_{h,\tau}$
۶۲	۴.۱.۴ تحلیل اصلاحی شبکه درشت $C_{h,\tau}^{2h}$
۶۴	۵.۱.۴ تحلیل دو- شبکه‌ای $T_{h,\tau}^{2h}$
	۶.۱.۴ نتایج تحلیل دو- بعدی SAMA و مقایسه با عامل همگرایی
۶۴	مجانبی عددی
۷۳	۲.۴ بررسی عامل همگرایی روی شبکه سه- بعدی
۷۳	۱.۲.۴ شبکه مکعبی
۷۳	۲.۲.۴ شبکه منشوری با قاعده مثلث
	۳.۲.۴ نتایج تحلیل سه- بعدی SAMA و مقایسه با عامل همگرایی
۷۴	مجانبی عددی
۸۷	۵ حل یک دستگاه معادلات کنترل بهینه غیرخطی
۸۸	۱.۵ گسسته‌سازی مکانی به روش تفاضلات متناهی
۸۹	۲.۵ روش نیوتن- گاوس - سایدل موجی
۹۱	۳.۵ روش چند- شبکه‌ای FAS
۹۳	۴.۵ تحلیل همگرایی SAMA
۹۸	۵.۵ نتایج عددی
۹۹	مراجع
۱۰۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۰۵	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

ش	لZoom بررسی روش های عددی برای حل مسائل واقعی.	۱
۹	تکرارهای $y_1^{(\nu)}$ (شکل چپ) و $y_4^{(\nu)}$ (شکل راست) به ازای $t \in [0, 5]$ (مثال ۱.۳.۱)	۱.۱
۱۶	بردارهای ویژه ماتریس A به ازای $0 \leq j \leq N$ که $k = 1, 3, 6$ و $N = 10$	۲.۱
۱۷	مقادیر ویژه ماتریس تکرار R_ω به ازای $\omega = 1/3, \omega = 1/2, \omega = 2/3, \omega = 1$	۳.۱
۱۹	روش ژاکوبی وزن دار با $\omega = 2/3$ روی دستگاه $Au = 0$ و بردار شروع اولیه $(a): w_3, (b): w_{16}$ و $(c): (w_2 + w_{16})/2$	۴.۱
۲۰	موج با $k = 4$ در شبکه Ω^h ($n = 12$) روی شبکه Ω^{2h} ($n = 6$) تصویر شده است.	۵.۱
	روش دو-شبکه ای روی معادله $-u'' = 0$ با $N = 64$. شکل سطر اول سمت چپ: حدس اولیه جواب، $(w_{16} + w_{40})/2$. شکل سطر اول سمت راست: خطا بعد از یک تکرار روش ژاکوبی. شکل وسط سمت چپ: خطا بعد از سه تکرار روش ژاکوبی. شکل وسط سمت راست: یک تکرار روش ژاکوبی روی خطا در شبکه درشت و اصلاح جواب با این خطا در شبکه ظریف. شکل سطر آخر سمت چپ: سه تکرار روش ژاکوبی روی خطا در شبکه درشت و اصلاح جواب با این خطا در شبکه ظریف. شکل سطر آخر سمت راست: استفاده از سه تکرار روش ژاکوبی روی جواب گام قبل.	۶.۱
۲۵	روش گام-زمانی (شکل چپ) و روش موجی (شکل راست). در اینجا منظور از ν_i تکرارهای روش می باشد.	۷.۱
۲۶	مقدار بهینه پارامتر ω روی شبکه 49×49 با تکرارهای $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$	۱.۲
۴۹	نوسان پایین (نقطه سفید)	۱.۳
۵۱	نمادهای استفاده شده جهت درونیاب دو-خطی روی شبکه ظریف مستطیلی.	۲.۳
۵۲	نمادهای استفاده شده جهت درونیاب خطی روی شبکه ظریف مثلثی.	۳.۳

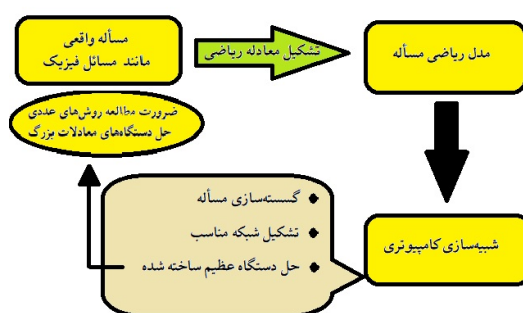
۶۰	۱.۴ پایه‌های متعامد در $\mathbb{R}^2$
	۲.۴ شبکه مستطیلی مناسب برای محاسبه فرم فشرده ماتریس‌های روش المان‌های
۶۵	متناهی
۶۷	۳.۴ مقایسه عامل همگرایی عددی و تحلیلی روی شبکه مستطیلی در دو بعد.
۶۸	۴.۴ درشت‌ترین شبکه در نظر گرفته شده برای ناحیه متوازی‌الاضلاع.
	۵.۴ شش‌ضلعی ایجاد شده حول یک نقطه درونی شبکه (شکل سمت راست) و
۶۹	نگاشت آفین متناظر با آن (شکل سمت چپ).
۷۲	۶.۴ مقایسه عامل همگرایی عددی و تحلیلی روی شبکه مثلثی در دو بعد.
۷۵	۷.۴ شبکه مکعبی.
	۸.۴ مقایسه عامل همگرایی عددی و تحلیلی روی شبکه مکعبی در سه بعد روی
۷۷	شبکه با ابعاد $32 \times 64 \times 64 \times 64$
۷۹	۹.۴ مقایسه عامل همگرایی عددی و تحلیلی روی شبکه مکعبی در سه بعد.
	۱۰.۴ مقایسه دو روش عددی و تحلیلی بررسی عامل همگرایی به ازای زوایای
۸۵	مختلف المان‌های منشوری با قاعده مثلث.

فهرست جداول

۱	روند پیشرفت روش چند- شبکه‌ای در سالهای نخستین ظهور آن	ث
۱.۲	مقادیر بهینه پارامتر w به ازای مقادیر مختلف h	۳۹
۲.۲	نتایج مربوط به مثال اول. در این مثال $h = 2^{-7}$ و τ از 0.4% تا 0.001% متغیر است.	۴۱
۳.۲	نتایج مربوط به مثال دوم. در این مثال $h = 2^{-7}$ و τ از 0.4% تا 0.001% متغیر است.	۴۳
۱.۴	مقایسه عامل همگرایی دو- شبکه‌ای SAMA با عامل همگرایی مجانبی چرخه- W (درون پرانتز) به ازای مقادیر مختلف τ روی شبکه فضایی دو- بعدی 64×64	۶۷
۲.۴	مقایسه عامل همگرایی دو- شبکه‌ای SAMA با عامل همگرایی مجانبی چرخه- W (درون پرانتز) به ازای مقادیر مختلف τ روی شبکه فضایی سه- بعدی $32 \times 64 \times 64 \times 64$	۷۸
۱.۵	الگوریتم روش موجی نیوتن- گاوس- سایدل	۹۱
۲.۵	الگوریتم روش زمان- خطی گاوس- سایدل- نیوتن	۹۲
۳.۵	روش موجی گاوس- سایدل- نیوتن زمان- خطی	۹۳
۴.۵	مقایسه عامل همگرایی دو- شبکه‌ای SAMA با عامل همگرایی مجانبی چرخه- W (درون پرانتز) به ازای مقادیر مختلف λ روی شبکه‌های فضایی متغیر از 64×64 تا 512×512 با فرض $M = 32$ ، $\sigma = 1$ و $\nu = 10^{-1}$	۹۸

پیشگفتار

در این رساله حل دستگاه‌های بزرگ و تنک که در گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی ایجاد می‌شود، مورد مطالعه قرار گرفته‌است. این مبحث بخش مهمی از مراحل یافتن جواب عددی برای بسیاری از مسائل برخاسته از فیزیک، بیولوژی و صنعت می‌باشد، شکل ۱ را ببینید.



شکل ۱: لزوم بررسی روش‌های عددی برای حل مسائل واقعی.

مدل‌های موجود که برگرفته از علوم فیزیک و مهندسی می‌باشند، غالباً منجر به معادلات با مشتقات جزئی می‌شوند. برای تقریب جواب این معادلات معمولاً از روش‌هایی همچون تفاضلات متناهی، المان‌های متناهی و حجم‌های متناهی استفاده می‌شود. این مسائل در واقعیت روی نواحی نامنظم تعریف شده‌اند، این واقعیت ما را برآن می‌دارد که به روش‌هایی که ذات آن‌ها با المان‌سازی نامنظم تطابق دارد گرایش پیدا کنیم. لذا در این رساله تمرکز ما بر روی روش المان‌های متناهی خواهد بود. علاوه بر این، هنگامی که در پی افزایش حداکثری دقت محاسبات باشیم دستگاه حاصل از گسسته‌سازی این معادلات بسیار بزرگ می‌شود که باید به‌طور بهینه از نظر دقت روش و زمان انجام عملیات حل گردد. به این منظور معمولاً دو دسته کلی از روش‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند: روش‌های مستقیم و روش‌های تکراری. از جمله معروف‌ترین روش‌های مستقیم می‌توان به روش حذفی گاوس اشاره کرد. اگرچه این روش به‌طور کلی روشی کارآمد برای دستگاه‌های کلی است ولی استفاده از آن برای دستگاه‌های تنک ایجاد شده توسط روش‌های گسسته‌سازی که پیش‌تر معرفی شد، مقرون بصرفه نمی‌باشد چرا که ذخیره فضای اضافی محاسباتی را به رایانه تحمیل می‌نماید. پس استفاده از این روش

برای دستگاه‌های تنک چندان منطقی به نظر نمی‌رسد. در عوض روش‌های تکراری از جهت فضای ذخیره سازی و امکان پردازش موازی مجهولات، برای حل دستگاه‌هایی که دارای ماتریس تنک هستند بسیار کارآمد می‌باشد. اما این روش‌ها نیز دارای یک ایراد عمده هستند که آن هم کند شدن روش پس از سپری کردن تعداد کمی تکرار می‌باشد. این رخداد زمانی محسوس‌تر است که ما جهت بالا بردن دقت، شبکه‌ای که دستگاه را روی آن تعریف می‌کنیم بسیار ریز کرده باشیم. در واقع این روش‌ها یک ویژگی همواری در ذات خود دارند که پس از چند تکرار اولیه مانع از حذف نوسان‌های کوتاه بردار باقیمانده می‌شود. پس در استفاده از این روش‌ها به تنهایی مجبور به ایجاد تعادل بین میزان دقت مورد انتظار و سرعت رسیدن به جواب هستیم به عبارت دیگر زمانی که این روش‌های تکراری به تنهایی مورد استفاده قرار می‌گیرند، مجبور هستیم که از دقت بالاتر جواب به نفع سرعت بالاتر رسیدن به جواب صرف نظر کنیم. برای غلبه بر این کاستی یک دسته از روش‌های اصلاح شبکه درشت مورد استفاده قرار می‌گیرد. عملکرد این روش‌ها به گونه‌ای است که بردار باقیمانده هموار شده روش‌های تکراری را می‌گیرد و آن را پی‌درپی به شبکه‌هایی با تعداد نقاط گره‌ای به اندازه نصف نقاط شبکه پیشین منتقل می‌کند. با هر بار انتقال این بردار نوسان‌های ایجاد شده در بردار باقیمانده افزایش می‌یابد و این باعث بالا رفتن سرعت همگرایی به جواب می‌شود. به این فرایند روش چند-شبکه‌ای گفته می‌شود.

روش دو-شبکه‌ای برای نخستین بار بصورت تئوری توسط^۱ فدرنکو [۳۰] در سال ۱۹۶۴ بر روی دستگاه حاصل از روش تفاضلات متناهی استاندارد پنج نقطه‌ای ارائه شد. دو سال بعد الگوریتم روش چند-شبکه‌ای توسط وی معرفی شد. در سال ۱۹۶۶^۲ باچوالوف [۲۶] تئوری این روش را برای معادلات کلی بیضوی با ضرایب متغیر و هموار گسترش داد و همگرایی این روش را ثابت کرد. او کار خود را ادامه داد و پس از آن با ترکیب روش‌های چند-شبکه‌ای موفق شد روش^۳ کاملاً چند-شبکه‌ای را معرفی کند. تا آن زمان این روش تنها از جنبه تئوری مورد مطالعه قرار گرفته بود. اولین مقالات عملی در این زمینه توسط^۴ برنت [۳، ۴] در سالهای ۱۹۷۳ و ۱۹۷۷ ارائه شدند که توجهات زیادی را به خود جلب نمودند. پس از آن تحقیقات پیرامون این روش با خوش بینی بیشتری دنبال شد که منجر به افزایش تحقیقات و سرعت گرفتن مطالعات بر روی این روش گردید. سیر مطالعاتی این روش در سالهای نخستین پیدایش آن در جدول ۱ ارائه شده است.

یک راه متداول برای گسترش روش چند-شبکه‌ای، تعریف عملگرهای دخیل در روش بر روی شبکه‌های درشت‌تر به منظور بالا بردن نوسان است که به آن^۵ روش چند-شبکه‌ای هندسی گفته می‌شود. رویکردی دیگر از روش چند-شبکه‌ای بر پایه تقریب گارکین می‌باشد

¹Fedorenko

²Bachvalov

³full multigrid(FMG)

⁴Brant

⁵Geometric multigrid method

سال	۶۴	۶۶	۷۱	۷۲	۷۳	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲	۸۳	۸۴	۸۵
تعداد مقالات	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۳	۱۱	۱۰	۲۲	۳۱	۷۰	۷۸	۹۶	۹۴	۱۴۹

جدول ۱: روند پیشرفت روش چند-شبکه‌ای در سالهای نخستین ظهور آن

که به‌طور مستقیم به شبکه ظریف هندسی نیاز ندارد. این روش به ^۱روش چند-شبکه‌ای جبری معروف است در سال ۱۹۸۴ توسط برنت، ^۲مک کورمیک و ^۳روگ ارائه شد. در سال ۲۰۰۱ ^۴ستوبن این روش را برای پردازش موازی مسائل در مقیاس بسیار بزرگ به کار گرفت. نسخه‌ای دیگر از روش چند-شبکه‌ای، ^۵روش چند-شبکه‌ای تطابقی است که اخیراً بر روی مسائل بیضوی که مولد دستگاه معادلاتی هستند که ماتریس آن‌ها از نوع M ^۶ نمی‌باشد.

روش‌های چند-شبکه‌ای قادرند با اکثر روش‌های گسسته‌سازی ترکیب شوند در این رساله ما از روش المان‌های متناهی به منظور گسسته‌سازی مسائل سهموی با رویکرد ^۷نیمه درشت سازی استفاده می‌کنیم. این رویکرد توسط ^۸اولیویرا برای نخستین بار معرفی شد. از جمله کارهای مهم دیگر در روش چند-شبکه‌ای می‌توان به استفاده از روش ^۹چند-شبکه‌ای اچ پی به عنوان الگوریتم هموار کننده گسسته‌سازی گالرکین با ابعاد بالا روی مسائل با پارامتر ^{۱۰}جریان غالب توسط ^{۱۱}واندر وگت و ^{۱۲}ریبرگن نام برد. ^{۱۳}چن لیانگ لی یک روش چند-شبکه‌ای جدید موازی با افراز ناحیه کلی را ارائه کرد. همچنین ^{۱۴}گویلام جوت و ^{۱۵}کارستن گراسر روش چند-شبکه‌ای نیوتن تطابقی را پیاده‌سازی نمودند. اعمال روش چند-شبکه‌ای روی همه این مسائل نیازمند طراحی دقیق روش چند-شبکه‌ای با کنترل پارامترهای دخیل و تاثیرگذار در روش را دارد. به همین منظور نیازمند روش‌های آنالیز همگرایی جهت کنترل ساده‌تر این پارامترها پیش از پیاده‌سازی آن‌ها و کسب اطمینان از همگرایی و سرعت همگرایی و مقایسه تغییرات ایجاد شده در سرعت همگرایی نسبت به تغییر مقادیر پارامترها پیش از پیاده‌سازی عملی روش که بسیار دشوارتر می‌باشد، داریم. لذا مطالعه روی روش‌های آنالیز همگرایی که بخوبی با ویژگی‌های ذاتی روش‌های چند-شبکه‌ای منطبق باشد و بتواند تخمین

^۱Algebraic multigrid method

^۲McCormick

^۳Ruge

^۴Stuben

^۵Adaptive multigrid method

^۶ماتریسی است که تمام عناصر خارج از قطر اصلی آن نامثبت و بخش حقیقی تمام مقادیر ویژه آن نامنفی می‌باشد.

^۷Semicoarsening

^۸Oliveira

^۹hp-multigrid

^{۱۰}advection dominated

^{۱۱}Vander Vegt

^{۱۲}Rhebergen

^{۱۳}Chen Liang Li

^{۱۴}Guillame Juvet

^{۱۵}Carsten Graser

پیش‌بینی کننده بسیار نزدیک به واقعیت در اختیار ما قرار دهد، حائز اهمیت می‌باشد. در این رساله دو رویکرد آنالیز همگرایی که یکی مبتنی بر انتگرال کانوولوشن-ولترا و دیگری تعمیم روش شناخته شده مبتنی بر ^۱آنالیز فوریه محلی به نام روش SAMA^۲ است، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین علاوه بر اعمال روش چند-شبکه‌ای، روش‌های آنالیز همواری نیز پیاده‌سازی خواهند شد. به این منظور مسائل سهموی متفاوتی در دو و سه بعد با پایه‌های خطی و غیر خطی در نظر گرفته شده است.

روند ارائه مطالب در این رساله به شرح زیر می‌باشد:

در فصل اول پیش‌نیازهای لازم برای فصل‌های بعد ارائه شده‌اند. در بخش اول این فصل برخی قضایا و تعاریف مورد نیاز بدون اثبات بیان می‌شوند که از صورت این قضایا در اثبات همگرایی روش‌های چند-شبکه‌ای ارائه شده استفاده خواهد شد. در ادامه روند اعمال این روش‌ها را روی معادلات وابسته به زمان از دیدگاه ^۳روش زمان-خطی بررسی می‌کنیم. پس از آن ایده کلی روش تخفیفی موجی را برای سادگی ارائه مطلب روی یک معادله دیفرانسیل معمولی ارائه می‌نماییم. سپس در بحث بعد روش موجی زمان-پیوسته را روی دستگاه معادلات خطی که از گسسته‌سازی المان‌های متناهی پیش‌تر به دست آوردیم، پیاده‌سازی نموده و قضایای لازم برای برقراری شرط لازم همگرایی این روش را بیان می‌کنیم. در همین بخش ماتریس‌های حاصل از چند روش تکراری متداول که به سادگی می‌توانند با روش موجی ترکیب شوند نیز تعریف می‌کنیم. توضیح و اعمال روش چند-شبکه‌ای روی یک دستگاه معادلات جبری بسیار ساده، موضوع بخش بعد خواهد بود. در همین بخش برای توضیح بهتر اساس روش چند-شبکه‌ای اثر پارامترهای دخیل در این روش را روی نوسان‌های بردار باقیمانده یک روش تکراری فرضی بطور دقیق‌تر بررسی می‌نماییم. در نهایت پس از معرفی عملگرهای محدودکننده و درونیاب بین شبکه‌ای این روش، الگوریتم کلی آن ارائه می‌شود. در انتهای این فصل با ترکیب روش‌هایی که به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار گرفت به روش موجی چند-شبکه‌ای که روش مورد نظر ما در ادامه این رساله است، دست می‌یابیم. تفاوت دیدگاه روش موجی در ترکیب با روش چند-شبکه‌ای با دیدگاه گام‌های زمانی در این قسمت از فصل توضیح داده می‌شود و در انتها با ارائه الگوریتم روش موجی چند-شبکه‌ای روی معادله گرما به بحث این فصل خاتمه می‌دهیم.

در فصل دوم یک روش دو-شبکه‌ای جدید روی معادله گرما ارائه می‌شود. این روش برای اولین بار در مرجع [۱۸] برای اولین بار روی معادلات بیضوی ارائه شد. در این فصل ما این روش را برای معادلات وابسته به زمان گسترش داده و آنالیز همگرایی آن را از دیدگاه انتگرال کانوولوشن ولترا بررسی می‌کنیم که تمام قضایا و روابط این فصل برای اولین بار اثبات می‌شوند. در انتهای این فصل این روش را روی معادله گرما پیاده‌سازی نیز می‌کنیم. همانطور که در نتایج ارائه شده خواهیم دید این روش عملکرد بسیار خوبی نشان می‌دهد.

¹LFA

²Semi Algebraic Mode Analysis

³Method of lines

بررسی آنالیز همگرایی از دیدگاه آنالیز فوریه موضوع فصل سوم می‌باشد. برای ارائه یک آنالیز فوریه روش چند- شبکه‌ای نیاز به دنبال کردن سه مرحله داریم؛ مرحله اول بررسی^۱ آنالیز همواری است که مرتبط با بخش هموار کننده بردار باقیمانده یا همان روش تکراری ترکیب شده با روش چند- شبکه‌ای می‌باشد. مرحله دوم^۲ آنالیز اصلاحی شبکه درشت می‌باشد. در این مرحله اثر پارامترهای آنالیز فوریه بر روی تمام عملگرهای موثر در روش، روی شبکه درشت‌تر مورد بررسی قرار می‌گیرد. ترکیب این دو مرحله و بدست آوردن یک آنالیز همگرایی کامل برای روش چند- شبکه‌ای در مرحله سوم که به مرحله دو- شبکه‌ای معروف است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. این روش آنالیز همگرایی زمانی که روش چند- شبکه‌ای روی معادلات مستقل از زمان اعمال می‌شوند بسیار کارا است ولی هنگامی که مسأله اصلی معادله‌ای وابسته به زمان باشد خطای عامل همگرایی ارائه شده توسط این روش بالا می‌باشد. در سال ۲۰۱۵ توسط فریدهوف روشی به نام SAMA^۳ معرفی شد که برای معادلات سهموی عامل همگرایی روش چند- شبکه‌ای را با دقت بسیار بالاتر پیش‌بینی می‌کرد. بررسی این روش موضوع فصل چهارم می‌باشد. در این فصل همچنین اثر آنالیز همگرایی روی شبکه‌های مختلف بررسی می‌کنیم. شبکه‌های مستطیلی، مثلثی در حالت متعامد و غیر متعامد در دو بعد و شبکه‌های مکعبی و منشوری با قاعده مثلث‌های متعامد و غیر متعامد تحلیل می‌شوند. برای همه حالات ذکر شده مثال‌هایی نیز ارائه می‌کنیم که همانطور که خواهیم دید نتایجی بسیار نزدیک به عامل همگرایی عددی مجانبی محاسبه شده توسط اعمال روش چند- شبکه‌ای بدست خواهد آمد. در خلال نتایج این فصل همچنین به عنوان یک نتیجه فرعی اثر گسسته‌سازی المان‌های متناهی و تفاضلات متناهی روی عامل همگرایی با هم مقایسه خواهد شد.

در فصل پنجم دستگاه معادلات کنترل بهینه غیرخطی را مورد بررسی قرار داده و روش چند- شبکه‌ای و آنالیز همگرایی را روی آن پیاده‌سازی می‌کنیم. در این دستگاه معادله معادله اول بصورت پیش‌رونده در زمان و معادله دوم بصورت پس‌رونده در زمان در نظر گرفته شده است و هر دو معادلات غیر خطی از نوع^۴ واکنش- انتشار هستند. این معادله توسط روش تفاضلات متناهی گسسته‌سازی شده و دستگاه غیرخطی حاصل توسط روش تکراری نیوتن- گاوس- سایدل موجی هموار شده سپس روش چند- شبکه‌ای FAS که اساساً روشی برای دستگاه‌های غیرخطی است روی آن اعمال می‌شود. در بحث آنالیز همگرایی روش SAMA علاوه بر اینکه برای اعمال روی دستگاه معادلات گسترش می‌دهیم اثر رفتارهای متفاوت در زمان را نیز روی آن بررسی می‌کنیم. در انتهای این فصل نیز همچون فصول گذشته با ارائه مثال عددی به تایید نتایج بدست آمده می‌پردازیم.

¹Smoothing analysis

²Coarse-grid correction

³Semi-Algebraic Mode Analysis

⁴Reaction-Diffusion

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ برخی قضایای کاربردی

در این بخش به برخی از تعاریف و قضایایی که در بخش‌های دیگر این فصل مورد نیاز خواهند بود، می‌پردازیم.

در بخش‌های بعد خواهیم دید که روش‌های تکراری، روش تخفیفی موجی در فرم تحلیلی و گسسته و عملگر دو-شبکه‌ای سرعت بخش روش تخفیفی موجی را می‌توان به فرم تکراری زیر نوشت:

$$u^{(\nu)} = \mathcal{H}u^{(\nu-1)} + \Phi, \quad (1.1)$$

که در آن $\mathcal{H}$ عملگری به شکل $\mathcal{H}u = Hu + \mathcal{H}_c u$ است. عملگر $\mathcal{H}_c$ عملگر کانولوشن ولترا خطی با هسته ماتریسی مقدار h_c می‌باشد. به عبارت دیگر،

$$\mathcal{H}_c u(t) = h_c \star u(t) = \int_0^t h_c(t-s)u(s) ds,$$

و H ماتریس مختلط $d \times d$ است [۱۹].

فضای توابع اندازه‌پذیر لبگ که p مرتبه انتگرال‌پذیر باشند را با $L_p((\circ, \infty), \mathbb{C}^d)$ یا به اختصار با $L_p(\circ, \infty)$ نشان می‌دهیم. این فضا مجهز شده به میانگین p -نرم است. همچنین فضای توابع پیوسته مجهز شده به نرم ماکزیمم

$$\|u\|_T = \max_{t \in [\circ, T]} \|u(t)\|,$$

را با $C([0, T], \mathbb{C}^d)$ یا به اختصار با $C[0, T]$ نشان می‌دهیم که $\|\cdot\|$ نرمی برداری در $\mathbb{C}^d$ است. یادآوری می‌کنیم که روش‌های تکراری به فرم معادله (۱.۲)، همگرا هستند، اگر و تنها اگر شعاع طیفی ماتریس $\mathcal{H}$ کوچکتر از ۱ باشد. شعاع طیفی یک عملگر خطی کراندار در فضای خطی نرم‌دار مختلط عبارت است از:

$$\rho(\mathcal{H}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\|\mathcal{H}^n\|}.$$

در واقع این عبارت برابر با کوچکترین مقداری ρ است که از عبارت $|\lambda| > \rho$ بتوان نتیجه گرفت که عبارت $\lambda - \mathcal{H}$ دارای معکوسی کراندار است، یا بطور معادل

$$\rho(\mathcal{H}) = \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{H})} |\lambda|,$$

که $\sigma(\mathcal{H})$ مجموعه‌ای شامل تمام مقادیر ویژه $\mathcal{H}$ ^۱ می‌باشد.

لم ۱.۱.۱. [۱۹] فرض کنید $h_c \in C[0, T]$ و $\mathcal{H}$ عملگری در $C[0, T]$ باشد، آنگاه $\mathcal{H}$ یک عملگر کراندار است و $\rho(\mathcal{H}) = \rho(H)$.

لم ۲.۱.۱. [۱۹] فرض کنید $h_c \in L_1(0, \infty)$ و $\mathcal{H}$ عملگری در $L_p(0, \infty)$ باشد بطوریکه $1 \leq p \leq \infty$. آنگاه $\mathcal{H}$ عملگری کراندار با شعاع طیفی

$$\rho(\mathcal{H}) = \sup_{\operatorname{Re}(z) \geq 0} \rho(\mathbf{H}(z)) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \rho(\mathbf{H}(i\xi)), \quad (2.1)$$

است که $\mathbf{H}(z) = H + \mathbf{H}_c(z)$ و $\mathbf{H}_c(z)$ تبدیل لاپلاس h_c می‌باشد.

نتیجه‌ای مشابه لم (۲.۱.۱) برای نرم‌های واقع در فضای $L_2(0, \infty)$ برقرار است که در لم زیر بیان می‌شود.

لم ۳.۱.۱. فرض کنید $h_c \in L_1(0, \infty)$ و $\mathcal{H}$ عملگری در $L_2(0, \infty)$ باشد. منظور از $\|\cdot\|_2$ ، L_2 -نرم و $\|\cdot\|$ نرم برداری اقلیدسی می‌باشند. آنگاه

$$\|\mathcal{H}\|_2 = \sup_{\operatorname{Re}(z) \geq 0} \|\mathbf{H}(z)\| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|\mathbf{H}(i\xi)\|, \quad (3.1)$$

که $\mathbf{H}(z) = H + \mathbf{H}_c(z)$ و $\mathbf{H}_c(z)$ تبدیل لاپلاس h_c می‌باشد.

ملاحظه ۱.۱.۱. [۱۹] اگر $\mathcal{H}$ عملگری در $C[0, T]$ باشد، آنگاه

$$\rho(\mathcal{H}) = \rho(H) = \rho(\mathbf{H}(\infty)). \quad (4.1)$$

¹Spectrum of $\mathcal{H}$

۲.۱ روش المان‌های متناهی

روش المان‌های متناهی یک روش گسسته‌سازی برای معادلات دیفرانسیل جزئی است. به طور کلی روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی را می‌توان به دو دسته^۱ موضعی و^۲ سراسری دسته‌بندی کرد. روش‌های تفاضلات متناهی، اجزای محدود و المان‌های متناهی جزء روش‌های موضعی و روش‌های طیفی از جمله کالوکیشن جزء روش‌های سراسری هستند. دو ویژگی مهم زیر را می‌توان برای روش المان‌های متناهی برشمرد:

- برای دامنه با هندسه پیچیده مناسب می‌باشد.
 - ویژگی موضعی تقریب و انتخاب پایه‌های متعامد باعث می‌شود مسأله گسسته‌سازی شده به یک دستگاه معادلات جبری تنک تبدیل شود که می‌توان برای حل این دستگاه از روش‌های چند شبکه‌ای استفاده کرد.
- روش المان‌های متناهی از جمله^۳ روش‌های باقیمانده وزنی است. روش باقیمانده وزنی به دسته‌ای از روش‌های تقریبی گفته می‌شود که باقیمانده (یا خطا) با تکنیک‌های خاصی مینیمم می‌شود که با توجه به تکنیک‌های به کار رفته روش‌های مختلف^۴ گالرکین،^۵ پتروف – گالرکین، کالوکیشن و روش^۶ تاو، ساخته می‌شوند.
- مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{L}u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (5.1)$$

بطوری که $\mathbf{L}$ عملگر بیضوی است. اولین گام در استفاده از روش‌های باقیمانده وزنی تقریب تابع u با مجموع متناهی زیر می‌باشد،

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k \phi_k(x), \quad (6.1)$$

که $\{\phi_k\}$ توابع^۷ پایه‌ای (آزمون) هستند. و ضرایب $\{a_k\}$ مجهولاتی هستند که هدف یافتن آن‌ها است. u_N را در معادله (۵.۱) جایگذاری می‌کنیم،

$$R_N(x) = \mathbf{L}u_N(x) - f(x) \neq 0, \quad x \in \Omega. \quad (7.1)$$

ایده روش باقیمانده وزنی تحمیل مقدار صفر به باقیمانده فوق به یکی از دو روش صفحه بعد می‌باشد:

¹local

²global

³weighted residual methods

⁴Galerkin

⁵Petrov

⁶Tau

⁷trial

$$(R_N, \psi_j)_\omega = \int_\Omega R_N(x) \psi_j(x) \omega(x) dx = 0, \quad 0 \leq j \leq N, \quad -1$$

که $\{\psi_i\}$ توابع آزمون و ω تابع وزن مثبتی است.

-۲

$$\langle R_N, \psi_j \rangle_{N, \omega} = \sum_{k=0}^N R_N(x_k) \psi_j(x_k) \omega_k = 0, \quad 0 \leq j \leq N,$$

که $\{x_k\}_{k=0}^N$ ها نقاط کالوکیشن از پیش انتخاب شده‌ای می‌باشند و همانند حالت قبل $\{\omega_k\}_{k=0}^N$ وزن‌های انتگرال‌گیری عددی هستند.

نوع انتخاب توابع آزمون در عبارات فوق منجر به روش‌های متفاوتی می‌گردد:

• **گالرکین:** توابع آزمون همان توابع پایه‌ای هستند؛ به عبارت دیگر $\phi_k = \psi_k$.

• **پتروف-گالرکین:** توابع آزمون و پایه‌ای متفاوت می‌باشند.

• **کالوکیشن:** در این روش توابع آزمون چندجمله‌ای‌های پایه‌ای لاگرانژ هستند به‌طوری‌که

$\psi_k(x_j) = \delta_{jk}$ ، که δ_{jk} دلتای کرونکر و $\{x_j\}$ نقاط انتخاب شده کالوکیشن می‌باشند.

بنابراین در این روش مقدار صفر به باقیمانده در نقاط $\{x_j\}$ تحمیل می‌شود، به عبارت

دیگر $R_N(x_j) = 0$.

توجه: روش تاو دسته خاصی از روش‌های پتروف-گالرکین می‌باشد. برای مطالعه بیشتر در مورد این روش به [۱۴] و [۸] رجوع شود.

۱.۲.۱ اعمال روش المان‌های متناهی روی معادلات سهموی

در این بخش روش المان‌های متناهی گالرکین را با استفاده از توابع تکه‌ای خطی، روی معادله سهموی دو بعدی به اختصار توضیح می‌دهیم. برای مطالعه بیشتر در مورد روش المان‌های متناهی به [۲۴]، [۲۵]، [۳۲] و [۱۳]، [۴۳] رجوع شود.

برای گسسته‌سازی معادلات وابسته به زمان از جمله معادله گرما دو رویکرد نیمه-گسسته و کاملاً-گسسته را می‌توان در نظر گرفت:

• **روش نیمه-گسسته.** در رویکرد اول، گسسته‌سازی فقط نسبت به مکان انجام می‌شود

و مشتق زمان به همان صورت حفظ می‌گردد که به آن روش نیمه-گسسته گفته

می‌شود. دستگاه حاصل از این نوع گسسته‌سازی، دستگاهی ODE^۱ می‌باشد که برای

حل آن می‌توان از روش‌های رانگه-کوتا یا روش‌های موجی که خود شامل روش‌های

صریح، ضمنی یا کرانک نیکلسون (به عنوان روشی نیمه صریح - نیمه ضمنی) است،

استفاده کرد. در روش‌های موجی در انتخاب دقت لازم برای تخمین بخش زمانی آزاد

^۱Ordinary Differential Equation

هستیم لذا بدین دلیل و همچنین کارایی مناسب روش‌های موجی در بحث تحلیل خطا و پایداری، در ادامه به توضیح روش‌های موجی می‌پردازیم.

● **روش کاملاً-گسسته** در این روش همزمان با گسسته‌سازی عوامل مشتق مکان، عامل مشتق زمان نیز باید گسسته‌سازی شود. معمولاً روش پسر و اوایلر به جهت پایداری نامحدود و سادگی مورد استفاده قرار می‌گیرد. مرتبه دقت محدود در مواجهه با عامل مشتق زمان ایرادی است که می‌توان به این روش گرفت که دقت کل روش را تحت تاثیر خود قرار می‌دهد در صورتیکه در روش نیمه-گسسته دستگاه ODE حاصل را می‌توان بنا به نیاز مسأله از مرتبه دقت مناسب حل کرد. برای مطالعه بیشتر به [۳۴] و [۲۴] رجوع شود.

در ادامه روش نیمه-گسسته را توضیح می‌دهیم. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی سهموی زیر را در نظر بگیرید:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \mathcal{L}u(x, t) = f(x, t), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (8.1)$$

که شرایط مرزی و اولیه مناسبی روی آن اعمال شده باشد. در معادله (۸.۱)، $\mathcal{L}$ عملگر مرتبه دوم خطی بیضوی مستقل از زمان و Ω ناحیه‌ای کراندار و باز است. فرم ضعیف معادله فوق، با شرایط مرزی دیریکله و همگن به صورت زیر است: تابع $u(\cdot, t) \in H_0^1(\Omega)$ را به گونه‌ای پیدا کنید که

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, v\right) + a(u, v) = (f, v).$$

در رابطه فوق $a(\cdot, \cdot)$ فرم دوخطی متناظر با عملگر $\mathcal{L}$ می‌باشد. در رویکرد گالرکین تابع $u(x, t)$ به ازای هر t ، در زیر فضای H_d از فضای سوبولوف H_0^1 تقریب زده می‌شود. این زیر فضا با یک مجموعه از توابع پایه‌ای مستقل خطی پیموده می‌شود که هر کدام از این پایه‌ها متناظر با نقاط گسسته شبکه مورد نظر می‌باشند؛ به عبارت دیگر $H_d = \text{span}\{\Phi_1, \dots, \Phi_d\}$. با توجه به مطالب گفته شده تابع u به صورت $\bar{u} = \sum_{i=1}^d u_i(t)\Phi_i(x)$ تقریب زده می‌شود. که u_i ها از حل مجموعه معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \Phi_j\right) + a(\bar{u}, \Phi_j) = (f, \Phi_j), \quad j = 1, \dots, d,$$

که می‌توان آن را به فرم معادله دیفرانسیل معمولی به صورت زیر نوشت:

$$B\dot{u} + Au = f. \quad (9.1)$$

ماتریس^۱ جرم و^۲ سختی به ترتیب به صورت $B = \{(\Phi_i, \Phi_j)\}$ و $A = \{a(\Phi_i, \Phi_j)\}$ [۱۹] و بردارهای u و f نیز به شکل $u = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_d(t)]$ و $f = [(f, \Phi_1), (f, \Phi_2), \dots, (f, \Phi_d)]$

¹mass

²stiffness

هستند. ماتریس‌های A و B هر دو متقارن و مثبت-معین بوده و لذا معکوس پذیرند در نتیجه معادله ۹.۱ را می‌توان به شکل زیر نوشت،

$$\dot{u} + B^{-1}Au = B^{-1}f. \quad (10.1)$$

شرط اولیه معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۸.۱) با توجه به تعامد پایه‌ها، به شرط اولیه برای دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (۱۰.۱) منتقل می‌شود، بنابراین دستگاه (۱۰.۱) به ازای هر $t > 0$ و شرط اولیه داده شده جواب یکتا دارد. در بخش‌های بعد سعی می‌کنیم جواب‌های عددی برای این دستگاه را یافته و به روش‌های مختلف این جواب‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.

۳.۱ روش‌های تخفیفی موجی شکل برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی

روش تخفیفی موجی، که روش تکراری پویا نیز نامیده می‌شود، روشی تکراری برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. پیشینه این روش به شبیه‌سازی شبکه‌های الکتریکی باز می‌گردد [۱۵] و [۷]. روش تخفیفی موجی با روش‌های شناخته شده متداول برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی از جنبه‌های زیر متفاوت می‌باشد:

- روشی زمان-پیوسته است.
- تکرارهای این روش بر حسب توابع وابسته به زمان می‌باشد (اصطلاح موجی ناشی از همین اصل است).
- برای محاسبات موازی مناسب می‌باشد.

همگرایی این روش در ابتدا برای دستگاه (۹.۱) در حالتی که B ماتریس همانی است، مورد مطالعه قرار گرفت. دستگاهی به این فرم زمانی حاصل می‌گردد که از روش تفاضلات متناهی برای گسسته‌سازی معادله (۸.۱) استفاده شود. میکالا^۱ و نوانلینا^۲ در [۳۹] و [۲۷] روی همگرایی عملگر تخفیفی موجی بر اساس شعاع طیفی آن که بر حسب انتگرال کانولوشن ولترا بیان شده، بحث نموده و نتایج حاصل را فرمول بندی کرده‌اند. در کار مشابهی توسط^۳ لوبیچ و^۴ استرمان همگرایی روش سرعت بخش چند شبکه‌ای در ترکیب با روش تخفیفی موجی مورد مطالعه قرار گرفت. مطالعه و بحث جامع در مورد موازی سازی روش تخفیفی موجی در مراجع [۳۵]، [۲۶]، [۲۱]، [۳۶] و [۳۸] صورت پذیرفته است. همچنین میکالا در [۴۰] همگرایی

¹Miekkala

²Nevanlinna

³Lubich

⁴Ostermann

روش تخفیفی موجی را هنگامی که ماتریس B ، ماتریس منفرد است مورد بررسی قرار داد. ^۱جانسن و ^۲وندوال در [۱۹] همگرایی روش چند شبکه‌ای روی روش تخفیفی موجی، زمانی که معادله (۸.۱) توسط روش المان‌های متناهی گسسته‌سازی می‌شود و ماتریس B ، ماتریسی نامنفرد است، مورد مطالعه قرار دادند. در واقع کار جانسن و وندوال توسیع کارهای قبلی انجام شده در حالتی که ماتریس B ، ماتریسی نامنفرد است، می‌باشد.

در این بخش ابتدا روش تخفیفی موجی را روی یک سیستم غیرخطی به همراه یک مثال کاربردی توضیح می‌دهیم. در ادامه با استفاده از مقاله [۱۹] روش تخفیفی موجی را روی دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی که به روش المان‌های متناهی گسسته‌سازی شده است، بیان می‌کنیم.

۱.۳.۱ ایده اصلی روش تخفیفی موجی

دستگاه غیر خطی شامل d معادله دیفرانسیل معمولی، همراه با شرط اولیه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\frac{d}{dt}y = f(t, y), \quad y(\circ) = y_\circ, \quad t \in [\circ, T],$$

که در آن $y_\circ = [y_{1,\circ}, \dots, y_{d,\circ}]^t \in \mathbb{R}^d$ و $T > \circ$ ، $f: [\circ, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ، بردار اولیه و $y(t) = [y_1(t), \dots, y_d(t)]^t$ بردار جواب دستگاه می‌باشد. دستگاه فوق را می‌توان به صورت گسترده زیر نیز نوشت:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1 = f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_d), & y_1(\circ) = y_{1,\circ}, \\ \frac{d}{dt}y_2 = f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_d), & y_2(\circ) = y_{2,\circ}, \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}y_d = f_d(t, y_1, y_2, \dots, y_d), & y_d(\circ) = y_{d,\circ}, \end{cases}$$

همان‌طور که گفته شد، روش تخفیفی موجی یک روش زمان-پیوسته تکراری است. به عبارت دیگر در هر مرحله از تکرار، تابع تقریب، تابعی وابسته به زمان خواهد بود، بر خلاف دیگر روش‌های تکراری متداول که در هر تکرار مقدار ثابتی بدست می‌آید. یکی از روش‌های ساده و بسیار کارا، روش تخفیفی گاوس-سایدل است که فرم گسسته و الگوریتم آن داده شده است:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1^{(\nu)} = f_1\left(t, y_1^{(\nu)}, y_2^{(\nu-1)}, y_3^{(\nu-1)}, \dots, y_d^{(\nu-1)}\right), & y_1^{(\nu)} = y_{1,\circ}, \\ \frac{d}{dt}y_2^{(\nu)} = f_2\left(t, y_1^{(\nu)}, y_2^{(\nu)}, y_3^{(\nu-1)}, \dots, y_d^{(\nu-1)}\right), & y_2^{(\nu)} = y_{2,\circ}, \\ \vdots \\ \frac{d}{dt}y_d^{(\nu)} = f_d\left(t, y_1^{(\nu)}, y_2^{(\nu)}, y_3^{(\nu)}, \dots, y_d^{(\nu)}\right), & y_d^{(\nu)} = y_{d,\circ}, \end{cases}$$

^۱Janssen

^۲Vandewalle

```

ν := 0;   choose   yi(0)(t)   for   t ∈ [0, T],   i = 1, ..., d
Repeat
    ν := ν + 1
    for   i = 1, ..., d
        solve    $\frac{d}{dt}y_i^{(\nu)} = f_i(t, y_1^{(\nu)}, \dots, y_{i-1}^{(\nu)}, y_i^{(\nu)}, y_{i+1}^{(\nu-1)}, \dots, y_d^{(\nu-1)})$ 
        with   yi(ν)(0) = yi,0
    endfor
until   convergence

```

مثال ۱.۳.۱. در این مثال، روش تخفیفی موجی گاوس-سایدل را روی دستگاه زیر پیاده‌سازی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y_1 = y_2, & y_1(\circ) = \circ, \\ \frac{d}{dt}y_2 = -y_1, & y_2(\circ) = 1. \end{cases}$$

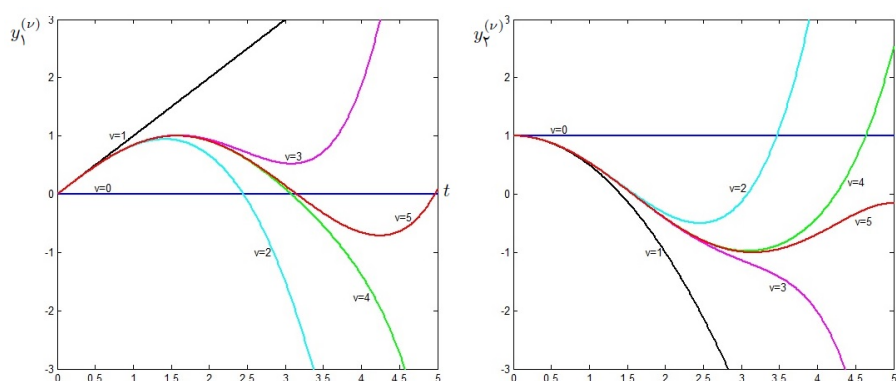
با اندکی دقت در دستگاه فوق متوجه می‌شویم که $y_1(t) = \sin(t)$ و $y_2(t) = \cos(t)$ است. با توجه به شرط اولیه داده شده $y_1^{(\nu)}(\circ) = \circ$ و $y_2^{(\nu)}(\circ) = 1$ با توجه به روش تخفیفی موجی گاوس-سایدل، $y_1^{(\nu)}(t)$ و $y_2^{(\nu)}(t)$ به صورت زیر تقریب زده می‌شوند:

$$\begin{aligned} \text{شرط اولیه: } & \begin{cases} y_1^{(\circ)}(t) = \circ \\ y_2^{(\circ)}(t) = 1 \end{cases}, \\ \text{تکرار اول: } & \begin{cases} \frac{d}{dt}y_1^{(1)} = y_2^{(\circ)} \\ \frac{d}{dt}y_2^{(1)} = -y_1^{(1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^{(1)} = t \\ y_2^{(1)} = 1 - \frac{t^2}{2} \end{cases}, \\ \text{تکرار دوم: } & \begin{cases} \frac{d}{dt}y_1^{(2)} = y_2^{(1)} \\ \frac{d}{dt}y_2^{(2)} = -y_1^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^{(2)} = t - \frac{t^3}{6} \\ y_2^{(2)} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} \end{cases}, \\ \text{تکرار سوم: } & \begin{cases} \frac{d}{dt}y_1^{(3)} = y_2^{(2)} \\ \frac{d}{dt}y_2^{(3)} = -y_1^{(3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1^{(3)} = t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} \\ y_2^{(3)} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720} \end{cases}, \end{aligned}$$

⋮

$$\text{تکرار } \nu: \begin{cases} \frac{d}{dt} y_1^{(\nu)} = y_2^{(\nu-1)} \\ \frac{d}{dt} y_2^{(\nu)} = -y_1^{(\nu)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} y_1^{(\nu)} = \sum_{i=0}^{\nu-1} (-1)^i \frac{t^{\nu-i+1}}{(\nu-i+1)!} \\ \frac{d}{dt} y_2^{(\nu)} = \sum_{i=0}^{\nu} (-1)^i \frac{t^{\nu-i}}{(\nu-i)!} \end{cases}.$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود تکرارها به $\sin(t)$ و $\cos(t)$ همگرا می‌شوند، بطوریکه در هر تکرار یک جمله بیشتر از بسط $\sin(t)$ و $\cos(t)$ بدست می‌آید. تکرارها به ازای $\nu = 0, 1, \dots, 4$ در شکل ۱.۱ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱.۱: تکرارهای $y_1^{(\nu)}$ (شکل چپ) و $y_2^{(\nu)}$ (شکل راست) به ازای $t \in [0, 5]$ (مثال ۱.۳.۱)

با توجه به شکل ۱.۱، نکات زیر برای هر مسأله‌ای که به روش تخفیفی موجی حل شود، قابل توجه خواهد بود:

- خطای روش در کل طول بازه زمانی ثابت نیست. به عبارت دیگر، دقت روش در نزدیکی $t = 0$ بالا بوده و هر چه از این نقطه دورتر شویم دقت روش کاهش پیدا می‌کند.
- بازه مورد قبول در هر تکرار، بازه‌ای است که جواب تقریبی نزدیک به جواب واقعی باشد.
- ممکن است خطا از یک تکرار به تکرار بعد افزایش پیدا کند، به‌ویژه اگر مقادیر t بزرگ باشند.

۲.۳.۱ روش تخفیفی موجی زمان-پیوسته بر روی دستگاه‌های خطی

دستگاه زیر را که شامل d معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب ثابت است، در نظر می‌گیریم:

$$B\dot{u} + Au = f, \quad u(0) = u_0, \quad t > 0, \quad (11.1)$$

که A و B ماتریس‌هایی مختلط $d \times d$ و u و f بردارهایی $\mathbb{C}^d$ - مقدار وابسته به زمان هستند. در اینجا ماتریس B را ماتریسی نامنفرد در نظر می‌گیریم. با ضرب فاکتور انتگرال $e^{B^{-1}At}$ در طرفین معادله (۱۱.۱) و انتگرال‌گیری از دو طرف این معادله، جواب تحلیلی این دستگاه به شکل زیر بدست می‌آید:

$$u(t) = e^{-B^{-1}At}u_0 + \int_0^t e^{B^{-1}A(s-t)}B^{-1}f(s)ds. \quad (12.1)$$

با معرفی تجزیه $B = M_B - N_B$ و $A = M_A - N_A$ ، روش تخفیفی موجی زمان پیوسته را می‌توان به صورت زیر معرفی کرد:

$$M_B \dot{u}^{(\nu)} + M_A u^{(\nu)} = N_B \dot{u}^{(\nu-1)} + N_A u^{(\nu-1)} + f, \quad u^{(\nu)}(0) = u_0, \quad t > 0. \quad (13.1)$$

تکرارهای روش، با انتخاب $u^{(0)}(t) = u_0$ به ازای $t > 0$ آغاز می‌شود. ماتریس M_B را همواره به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که نامنفرد باشد. سرعت همگرایی روش تکراری بدست آمده با نحوه افراز ماتریس‌های A و B در ارتباط است. اکنون افرازهایی برای ماتریس‌های A و B به شکل $A = -L_A + D_A - U_A$ و $B = -L_B + D_B - U_B$ ، تعریف می‌کنیم که L, D و U به ترتیب ماتریس‌های پایین مثلثی، قطری و بالا مثلثی (با توجه به زیروند) متناظر با ماتریس‌های A یا B هستند. برخی از افرازهای متداول برای A و B در زیر آورده شده است.

$$\text{— ریچاردسون: } M_A = M_B = \frac{1}{\omega}I, \quad N_A = \frac{1}{\omega}I - A, \quad N_B = \frac{1}{\omega}I - B,$$

$$\text{— ژاکوبی: } M_A = D_A, \quad M_B = D_B, \quad N_A = L_A + U_A, \quad N_B = L_B + U_B,$$

$$\text{— گاوس-سایدل: } M_A = -L_A + D_A, \quad M_B = -L_B + D_B, \quad N_A = U_A, \quad N_B = U_B,$$

$$\text{— فوق تخفیف: } M_A = \frac{1}{\omega}D_A - L_A, \quad M_B = \frac{1}{\omega}D_B - L_B, \quad N_A = \frac{1-\omega}{\omega}D_A + U_A, \quad N_B = \frac{1-\omega}{\omega}D_B + U_B.$$

ω مقداری ثابت در بازه $(0, 1]$ است.

یادآوری می‌کنیم که روش تکراری متداول برای حل دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ به صورت زیر است:

$$Px^{(\nu)} = Qx^{(\nu-1)} + b, \quad x^{(\nu)} = Gx^{(\nu-1)} + P^{-1}b, \quad G = P^{-1}Q,$$

که به ماتریس G ، ماتریس تکرار گفته می‌شود. به این روش تکراری که در هر مرحله تقریب حاصل مقداری ثابت است، روش تکراری ایستا و به روش تکراری به کار رفته برای حل

روش‌های تخفیفی موجی شکل برای حل دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی ۱۱

دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل معمولی که در هر مرحله تکرار، تقریب تابعی از t است، روش تکراری پویا گفته می‌شود [۳۹].

حال به توضیح روش تخفیفی موجی روی معادله ۱۳.۱ باز می‌گردیم. در اینجا قصد داریم روشی دقیق برای حل این معادله ارائه دهیم. اگرچه روش دقیق برای برنامه نویسی و استفاده از نرم‌افزار مناسب نیست. ولی همان‌طور که ملاحظه خواهیم کرد، در بررسی همگرایی و تحلیل آن بسیار کارا می‌باشد. الگوریتم عددی مورد استفاده برای تخمین عددی عامل همگرایی در فصل آینده ارائه خواهد شد. از روش پیش رو برای پیش‌بینی عامل همگرایی روش‌های عددی مورد استفاده برای حل دستگاه معادلات خطی پیش از آنکه روش بطور رسمی روی معادله پیاده سازی شود، استفاده می‌گردد. در واقع با تغییر یک سری پارامترها می‌توان نتیجه گرفت که کدام روش عددی در عمل کارتر خواهد بود.

با توجه به مطالب گفته شده، قصد داریم با رویکرد حل تحلیلی جواب معادله ۱۳.۱ را به فرم تکراری $u^{(\nu)} = \mathcal{K}u^{(\nu-1)} + \Phi$ بدست آوریم.

$$\dot{u}^{(\nu)} + M_B^{-1} M_A u^{(\nu)} - M_B^{-1} N_B \dot{u}^{(\nu-1)} = M_B^{-1} N_A u^{(\nu-1)} + M_B^{-1} f,$$

طرفین را در $e^{M_B^{-1} M_A t}$ ضرب کرده و عبارت $e^{M_B^{-1} M_A t} M_B^{-1} N_B u^{(\nu-1)}$ را اضافه و کم می‌کنیم. با اندکی محاسبات عبارات زیر بدست می‌آیند:

$$\phi(t) = e^{-M_B^{-1} M_A t} (I - M_B^{-1} N_B) u_0 + \int_0^t e^{M_B^{-1} M_A (s-t)} M_B^{-1} f(s) ds, \quad (14.1)$$

$$\mathcal{K}u(t) = M_B^{-1} N_B u(t) + \mathcal{K}_c u(t).$$

$\mathcal{K}_c$ اپراتور کانولوشن ولترا خطی با هسته k_c است:

$$\mathcal{K}_c u(t) = k_c \star u(t) = \int_0^t k_c(t-s) u(s) ds, \quad (15.1)$$

$$k_c(t) = e^{-M_B^{-1} M_A t} M_B^{-1} (N_A - M_A M_B^{-1} N_B).$$

فرض کنید $e^{(\nu)}$ ، ν مین تکرار روش تخفیفی موجی باشد، به عبارت دیگر $e^{(\nu)} = u^{(\nu)} - u$ که در رابطه $e^{(\nu)} = \mathcal{K}e^{(\nu-1)}$ صدق می‌کند. در واقع $e^{(\nu)}$ جواب معادله زیر خواهد بود:

$$M_B \dot{e}^{(\nu-1)} + M_A e^{(\nu)} = N_B \dot{e}^{(\nu-1)} + N_A e^{(\nu-1)}, \quad e^{(\nu)}(0), \quad t > 0. \quad (16.1)$$

اگر $\tilde{e}^{(\nu)}(z)$ تبدیل لاپلاس $e^{(\nu)}$ باشد، آنگاه تبدیل لاپلاس جواب معادله ۱۶.۱ به فرم زیر خواهد بود:

$$\tilde{e}^{(\nu)}(z) = \mathbf{K}(z) \tilde{e}^{(\nu-1)}(z) = (M_B^{-1} N_B + \mathbf{K}_c(z)) \tilde{e}^{(\nu-1)},$$

که $\mathbf{K}_c(z) = (zM_B + M_A)^{-1} (N_A - M_A M_B^{-1} N_B)$ تبدیل لاپلاس هسته k_c است. لذا

$$\mathbf{K}(z) = (zM_B + M_A)^{-1} (zN_B + N_A).$$

به $\mathbf{K}(z)$ ماتریس تخفیفی موجی یا ماتریس تکرار پویای $\mathcal{K}$ گفته می‌شود.

۳.۳.۱ همگرایی روش تکراری موجی زمان-متناهی

شعاع طیفی عملگر تخفیفی موجی در حالت زمان-متناهی، هنگامی که B ماتریس همانی است، برابر با صفر می‌باشد [۴۱]. در این قسمت در مورد همگرایی عملگر تخفیفی موجی، هنگامی که B ماتریس دلخواه و نامنفرد است، توضیح می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۱. عملگر تخفیفی موجی $\mathcal{K}$ ، عملگری کراندار در $C[0, T]$ بوده و داریم

$$\rho(\mathcal{K}) = \rho(M_B^{-1} N_B). \quad (17.1)$$

برهان. از آنجا که $k_c \in C[0, T]$ است، با توجه به لم ۱.۱.۱ اثبات تمام است. $\square$

۴.۳.۱ همگرایی روش تکراری موجی زمان-نامتناهی

جواب معادله (۱۱.۱)، ارائه شده با رابطه (۱۲.۱)، کراندار است، اگر و تنها اگر قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژه ماتریس $B^{-1}A$ مثبت باشد [۹] (فرض می‌کنیم که $f \in L_p$). قضیه زیر همگرایی روش تخفیفی موجی زمان نامتناهی را بیان می‌کند.

قضیه ۲.۳.۱. فرض کنید تمام مقادیر ویژه ماتریس $M_B^{-1}A$ دارای بخش حقیقی مثبت بوده باشد و همچنین $\mathcal{K}$ عملگری در $L_p(0, \infty)$ باشد که $1 \leq p \leq \infty$. آنگاه

$$\rho(\mathcal{K}) = \sup_{\operatorname{Re}(z) \geq 0} \rho(\mathbf{K}(z)) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \rho(\mathbf{K}(i\xi)). \quad (18.1)$$

برهان. از آنجا که بخش حقیقی مقادیر ویژه ماتریس $M_B^{-1}A$ مثبت است پس $k_c \in L_1(0, \infty)$ با توجه به فرض $\mathcal{K} \in L_p(0, \infty)$ و لم ۲.۱.۱ اثبات تمام می‌شود. $\square$

اگر در لم ۳.۱.۱ قرار دهیم $\mathcal{H} = \mathcal{K}$ می‌توان نتیجه مشابهی برای نرم- L_2 بدست آورد.

قضیه ۳.۳.۱. فرض کنید تمام مقادیر ویژه ماتریس $M_B^{-1}M_A$ دارای بخش حقیقی مثبت بوده و $\mathcal{K}$ عملگری در $L_2(0, \infty)$ باشد. منظور از $\|\cdot\|_2$ و $\|\cdot\|$ به ترتیب نرم- L_2 ، نرم برداری اقلیدسی استاندارد است. آنگاه

$$\|\mathcal{K}\|_2 = \sup_{\operatorname{Re}(z) \geq 0} \|\mathbf{K}(z)\| = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \|\mathbf{K}(i\xi)\|. \quad (19.1)$$

۴.۱ روش‌های چندشبکه‌ای برای حل دستگاه‌های معادلات

جبری

دستگاه‌هایی که از حل معادلات دیفرانسیل جزئی حاصل می‌شوند، غالباً به شکل چند قطری هستند. این آرایش خاص درایه‌ها، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه مثلثاتی تولید می‌کند. واضح

است که برخی از این بردارهای ویژه دارای نوسان کم یا به عبارت دیگر هموار، و برخی دیگر دارای نوسانات بالا می‌باشند. روش‌های تکراری متداول مانند روش‌های ژاکوبی، گاوس-سایدل و روش‌های تخفیفی، هنگامی که روی این ماتریس‌ها اعمال می‌شوند، معمولاً با دو یا سه تکرار، بخش‌های ناهموار (بردارهای ویژه با نوسان بالا) بردار جواب اولیه را هموار می‌کنند. لذا بعد از دو یا سه تکرار این روش‌ها، سرعت همگرایی به دلایلی که در ادامه گفته خواهد شد، کاهش پیدا می‌کند. در اینجا استفاده از یک روش چندشبکه‌ای برای سرعت بخشیدن به روش‌های تکراری، کارا خواهد بود.

مروری بر روش‌های تکراری: فرض کنیم هدف حل دستگاه $Au = f$ باشد که u جواب واقعی و v جواب تقریبی حاصل از یک روش تکراری است. خطا را به صورت $e = u - v$ تعریف می‌کنیم. زمانی مقدار دقیق e معلوم می‌شود که جواب واقعی را داشته باشیم با توجه به اینکه یافتن e واقعی در عمل امکان‌پذیر نیست. لذا از معیار دیگری استفاده می‌کنیم که باقیمانده نام دارد و آن را با r نمایش می‌دهیم. با این معیار می‌توان تخمین زد که جواب تقریبی چقدر به جواب واقعی نزدیک شده است. که به صورت

$$r = f - Av,$$

تعریف می‌شود. با توجه به یکتایی جواب دستگاه $Au = f$ ، اگر $r = 0$ و تنها اگر $e = 0$. اگرچه از کوچک بودن r نمی‌توان نتیجه گرفت که e نیز کوچک است. با توجه به تعریف e و r داریم:

$$r = f - Av = Au - Av = A(u - v), r = Ae,$$

به دستگاه فوق دستگاه باقی‌مانده می‌گوییم. برای حل معادله باقیمانده باید گام‌های زیر را طی کرد:

- ۱- حدس اولیه $v^{(0)}$ را برای جواب در نظر می‌گیریم،
- ۲- مقدار $r^{(0)}$ را با استفاده از رابطه $r^{(0)} = f - Av^{(0)}$ بدست می‌آوریم.
- ۳- $e^{(0)}$ را از حل معادله $Ae^{(0)} = r^{(0)}$ بدست می‌آوریم.
- ۴- قرار می‌دهیم: $v^{(1)} = v^{(0)} + e^{(0)}$
- ۵- گام‌های ۲، ۳ و ۴ را تکرار می‌کنیم تا جایی که شرایط یک شرط توقف برقرار شود.

معرفی مدل: مسأله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} -(k(x)u')' &= f, \quad \text{on } (0, 1), \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \quad (20.1)$$

فرض می‌کنیم $k(x) = 1$. با استفاده از روش المان‌های متناهی برای گسسته‌سازی معادله ۲۰.۱ داریم: $Au = f$ که A ماتریسی سه قطری به صورت زیر است:

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}_{N-1 \times N-1}. \quad (21.1)$$

روش ژاکوبی: ماتریس A را به صورت $A = -L + D - U$ تجزیه می‌کنیم که ماتریس‌های L ، D و U به ترتیب ماتریس‌های پایین مثلثی، قطری و بالا مثلثی متناظر با ماتریس A هستند. یادآوری می‌کنیم که فرم ماتریسی روش ژاکوبی به شکل زیر است،

$$\begin{aligned} (-L + D - U)u &= f, \\ Du &= (L + U)u + f, \\ u &= D^{-1}(L + U)u + D^{-1}f. \end{aligned}$$

ماتریس تکرار روش ژاکوبی را به صورت $R_J = D^{-1}(L + U)$ تعریف می‌کنیم. لذا روش تکراری ژاکوبی را می‌توان به شکل زیر تعریف کرد:

$$v^{(i+1)} = R_J v^{(i)} + D^{-1}f. \quad (22.1)$$

برای ساخت روش ژاکوبی وزن دار به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$v^{(i+1)} = (1 - \omega)v^{(i)} + \omega v_*^{(i+1)},$$

که $v_*^{(i+1)}$ همان روش ژاکوبی بیان شده در رابطه (۲۲.۱) است. بنابراین

$$\begin{aligned} v^{(i+1)} &= (1 - \omega)v^{(i)} + \omega R_J v^{(i)} + \omega D^{-1}f, \\ v^{(i+1)} &= [(1 - \omega)I + \omega R_J]v^{(i)} + \omega D^{-1}f. \end{aligned}$$

لذا ماتریس تکرار روش ژاکوبی وزن دار عبارت است از:

$$R_\omega = I - \omega(I - R_J) = I - \omega D^{-1}A.$$

فرض کنید R ماتریس تکرار بدست آمده از یک روش تکراری باشد. همه روش‌های تکراری به گونه‌ای هستند که جواب واقعی u نقطه ثابت روش تکراری می‌باشد. بنابراین

$$u = Ru + g.$$

از روش تکراری نیز داریم

$$v^{(1)} = Rv^{(0)} + g.$$

با کم کردن طرفین دو عبارت فوق از هم داریم:

$$e^{(1)} = Re^{(0)}.$$

با ادامه همین روند می‌توان به معادله

$$e^{(m)} = R^m e^{(0)}, \quad (23.1)$$

رسید که با نرم گرفتن از طرفین می‌توان کرانی برای خطای روش در گام m ام به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\|e^{(m)}\| \leq \|R^m\| \|e^{(0)}\|.$$

با توجه به عبارت فوق می‌توان نتیجه گرفت که اگر $\|R\| \leq 1$ آنگاه با افزایش تکرارها خطا به صفر میل می‌کند.

در بسیاری از کتاب‌های جبر خطی عبارت زیر نشان داده شده است (به عنوان نمونه [۱۷]):

$$\lim_{m \rightarrow \infty} R^m = 0, \quad \text{اگر و تنها اگر } \rho(R) < 1.$$

بنابراین روش تکراری متناظر با ماتریس R همگراست، اگر و تنها اگر $\rho(R) < 1$ بطوریکه $\rho(R) = \max_i |\lambda_i(R)|$ ، که برابر با عاملی است که خطا را در هر مرحله از تکرار روش کاهش می‌دهد. حال شعاع طیفی روش ژاکوبی وزن‌دار را روی دستگاه حاصل از مدل داده شده، محاسبه می‌کنیم.

$$R_\omega = I - \omega D^{-1}A = I - \omega \frac{h^2}{4} A,$$

لذا

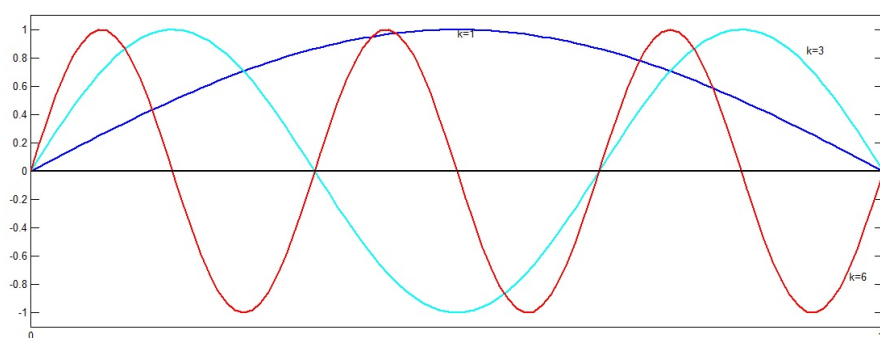
$$\lambda(R_\omega) = 1 - \omega \frac{h^2}{4} \lambda(A),$$

کافی است مقادیر ویژه ماتریس A محاسبه شود. ماتریسی سه قطری و قطر-ثابت است که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آن مثلثاتی و به شکل زیر هستند [۱۲]:

$$\lambda_k(A) = \frac{4}{h^2} \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right), \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad (24.1)$$

$$w_{k,j} = \sin\left(\frac{jk\pi}{N}\right), \quad 1 \leq k \leq N-1, \quad 0 \leq j \leq N, \quad (25.1)$$

که λ_k و $w_{k,j}$ ، به ترتیب مقدار ویژه k -ام و درایه j -ام از بردار ویژه k -ام هستند. بردارهای ویژه به ازای $k=1$ ، $k=3$ و $k=6$ در شکل ۲.۱ ترسیم شده‌اند. همان‌طور که ملاحظه می‌شود



شکل ۲.۱: بردارهای ویژه ماتریس A به ازای $0 \leq j \leq N$ که $k = 1, 3, 6$ و $N = 10$

با افزایش k نوسانات بردار ویژه ماتریس A افزایش می‌یابد. حال مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس تکرار روش ژاکوبی وزن‌دار به راحتی با رابطه (۲۶.۱) محاسبه می‌شود.

$$\lambda(R_\omega) = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right) \quad (26.1)$$

واضح است که بردارهای ویژه ماتریس‌های R_ω و A یکسان هستند. توجه شود که اگر $0 < \omega \leq 1$ ، آنگاه $|\lambda_k(R_\omega)| < 1$. لذا روش ژاکوبی وزن‌دار به ازای هر بردار شروع اولیه همگرا خواهد بود.

فرض کنیم $e^{(0)}$ خطای حاصل از حدس اولیه روش ژاکوبی وزن‌دار باشد. چون ماتریس‌های حاصل از حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی، غالباً متقارن می‌باشند، پس بردارهای ویژه آنها متعامد و در نتیجه مستقل خطی خواهند بود. به عبارت دیگر برای ماتریس $A_{N-1 \times N-1}$ ، $N-1$ بردار ویژه مستقل خطی وجود دارد که فضای $\mathbb{R}^{N-1}$ را می‌پیمایند. لذا می‌توان بردار خطای $e^{(0)}$ را بر حسب بردارهای ویژه A به صورت زیر نوشت:

$$e^{(0)} = \sum_{k=1}^{N-1} c_k w_k$$

با توجه به معادله (۲۳.۱) می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$e^{(m)} = R_\omega^m e^{(0)} = \sum_{k=1}^{N-1} c_k R_\omega^m w_k = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \lambda_k^m(R_\omega) w_k. \quad (27.1)$$

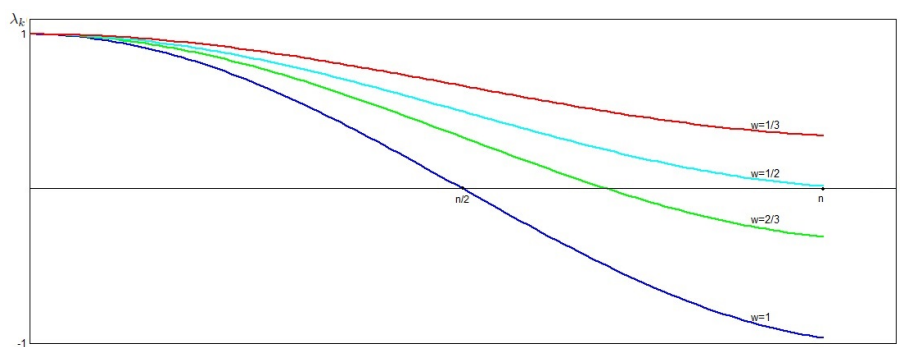
رابطه (۲۷.۱) نشان می‌دهد که بعد از m تکرار روش ژاکوبی وزن‌دار، k مین مولفه بردار خطا به اندازه $\lambda_k^m(R_\omega)$ کاهش می‌یابد.

از این پس به بردارهای ویژه تکرارهای $1 \leq k < \frac{N}{4}$ ، هموار و به بردارهای ویژه تکرارهای $\frac{N}{4} \leq k \leq N-1$ نوسانی می‌گوییم.

همان‌طور که پیش‌تر گفته شد، مقادیر ویژه ماتریس تکرار روش ژاکوبی وزن‌دار به صورت زیر است:

$$\lambda_k(R_\omega) = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{k\pi}{N}\right), \quad 1 \leq k \leq N-1.$$

حال این سوال پیش می‌آید که با انتخاب کدام مقدار برای ω بهترین روش تکراری را می‌توان بدست آورد؟ در واقع چون به ازای هر مقدار ω که $0 < \omega \leq 1$ ، روش همگراست ($|\lambda_k(R_\omega)| < 1$). به دنبال ω هستیم که تا حد ممکن $|\lambda_k(R_\omega)|$ را کوچک کند. در شکل ۳.۱ به ازای چهار مقدار $\omega = \frac{1}{3}, \omega = \frac{1}{2}, \omega = \frac{2}{3}, \omega = 1$ مقادیر ویژه روش ژاکوبی وزن دار به صورت نمودار پیوسته رسم شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود به ازای $\omega = \frac{2}{3}$ اکثر مقادیر ویژه حول خط $\lambda = 0$



شکل ۳.۱: مقادیر ویژه ماتریس تکرار R_ω به ازای $\omega = 1, \omega = 2/3, \omega = 1/2, \omega = 1/3$.

واقع هستند.

به ازای هر مقدار $0 < \omega \leq 1$ داریم:

$$\lambda_1 = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{\pi}{2N}\right) = 1 - 2\omega \sin^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) \approx 1 - \omega \left(\frac{\pi^2 h^2}{2}\right).$$

این عبارت نشان می‌دهد که λ_1 یعنی مقدار ویژه متناظر با هموارترین بردار ویژه همواره نزدیک یک خواهد بود. لذا هیچ مقداری از ω یافت نمی‌شود که روی کاهش خطای بخش هموار موثر باشد. علاوه بر این با کاهش طول گام یا ریزتر کردن شبکه، λ_1 به مقدار یک نزدیکتر خواهد شد. پس به هر میزان دلخواه نمی‌توان h را کاهش داد. در واقع هر تلاشی برای بالا بردن دقت روش تکراری، سرعت همگرایی روش را کاهش خواهد داد. بسیاری از روش‌های تکراری دارای چنین محدودیت سختی هستند.

اگر بپذیریم که هیچ مقداری از ω باعث کاهش ضرایب بخش هموار به میزان دلخواه ما نمی‌شود، این سوال بوجود می‌آید که کدام مقدار ω بهترین کاهش ضرایب بخش نوسانی (بردارهای ویژه با اندیس k که $\frac{N}{2} \leq k \leq N-1$) را به همراه دارد؟ با توجه به رابطه (۲۴.۱)، مقادیر ویژه A متمایزند و همچنین

$$0 < |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_{N-1}|.$$

از طرفی میدانیم که

$$\lambda(R_\omega) = 1 - \frac{\omega h^2}{2} \lambda(A).$$

لذا داریم:

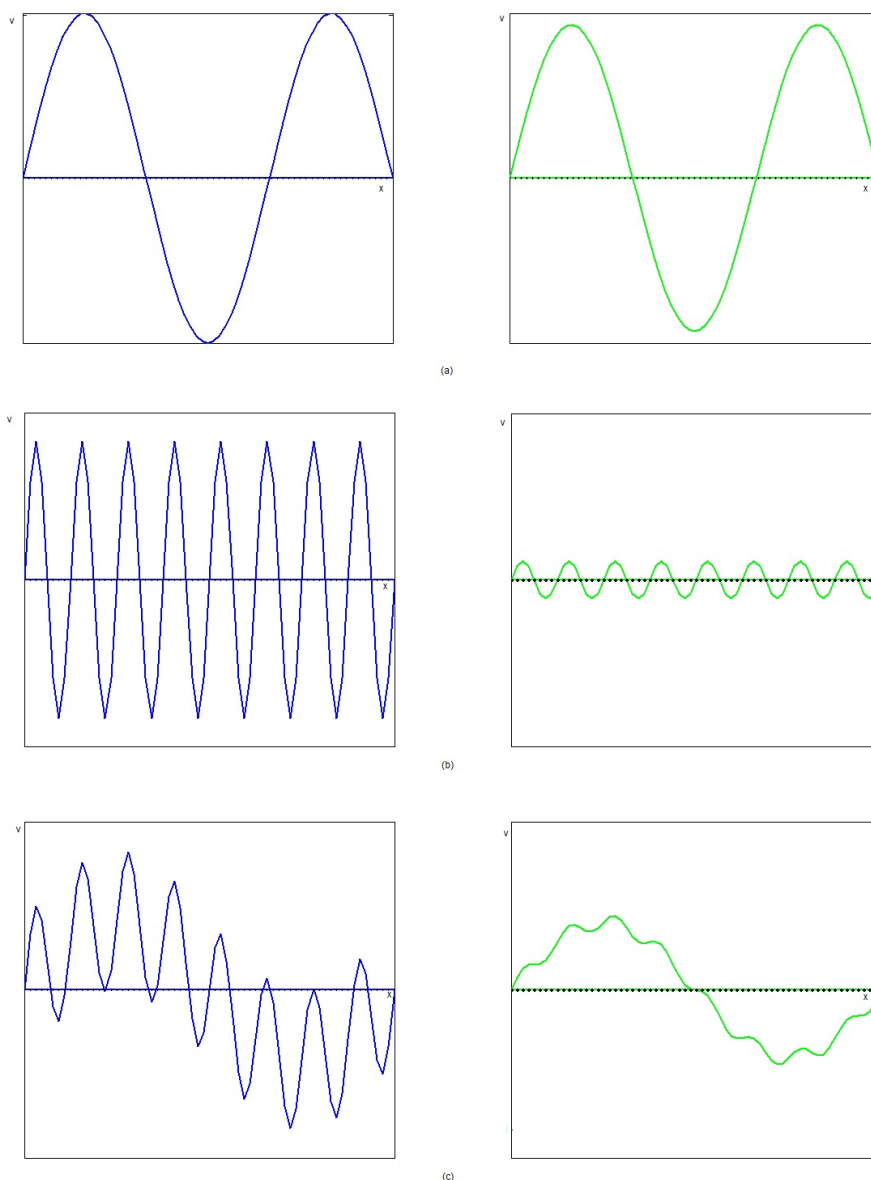
$$0 < \left| 1 - \frac{\omega h^2}{2} \lambda_{N-1} \right| < \left| 1 - \frac{\omega h^2}{2} \lambda_{N-2} \right| < \dots < \left| 1 - \frac{\omega h^2}{2} \lambda_1 \right|.$$

هدف بررسی اثر ω روی بردارهای ویژه نوسانی است، از طرفی عبارت $\left| 1 - \frac{\omega h^2}{2} \lambda_k \right|$ زمانی مینیمم است که

$$\left| \lambda_{\frac{N}{2}}(R_\omega) \right| = \left| \lambda_{N-1}(R_\omega) \right| \quad \text{یا} \quad \left| 1 - \frac{\omega h^2}{2} \lambda_{\frac{N}{2}} \right| = \left| 1 - \frac{\omega h^2}{2} \lambda_{N-1} \right|$$

به ازای $\omega = \frac{2}{h^2}$ تساوی بالا برقرار بوده و این عبارت مینیمم مقدار ویژه ماتریس تکرار را بدست می‌دهد [۴۶]. در واقع به ازای $\omega = \frac{2}{h^2}$ داریم: $|\lambda| < \frac{1}{2}$. این عبارت به این معناست که ضرایب بخش نوسانی در هر تکرار حداقل به اندازه $\frac{1}{2}$ برابر کاهش می‌یابند. به عامل ۳ عامل هموار ساز روش می‌گویند که قدرت روش چند شبکه‌ای وابسته به آن می‌باشد، این عدد نه تنها کوچک است بلکه مستقل از طول گام h نیز می‌باشد. همان‌طور که مشاهده شد نتیجه بدست آمده تایید کننده شکل ۳.۱ می‌باشد. همان‌طور که تا به اینجا توضیح داده شد، روش‌های تکراری متداول روی بخش‌های با نوسان بالا خوب عمل می‌کنند و میزان خطا را به سرعت کاهش می‌دهند ولی برای بخش‌های با نوسان پایین چندان کارا نیستند. در مثال زیر این حقیقت به وضوح نشان داده شده است.

مثال ۱.۴.۱. مسأله $Au = 0$ را در نظر می‌گیریم. همان‌طور که می‌دانیم این دستگاه دارای جواب بدیهی $u = 0$ است. نمودار جواب تقریبی این دستگاه در شکل ۴.۱ رسم شده است. برای حل این مسأله از روش ژاکوبی وزن‌دار با $\omega = \frac{2}{h^2}$ و شبکه‌ای با تعداد تقسیمات $N = 64$ استفاده شده است. در شکل (a) بردار شروع اولیه $\sin\left(\frac{3j\pi}{64}\right)$ ($k = 3$) است. شکل سمت چپ خطا را بعد از یک تکرار و شکل سمت راست خطا را بعد از 10° تکرار روش ژاکوبی وزن‌دار نشان می‌دهد. همان‌طور که انتظار داشتیم به علت استفاده از بردار شروع اولیه هموار، همگرایی بسیار کند می‌باشد و مقدار جواب به میزان کمی به جواب صفر نزدیک شده است. در شکل (b) از بردار شروع اولیه $\sin\left(\frac{j\pi}{4}\right)$ ($k = 16$) است. شکل سمت چپ جواب را بعد از یک تکرار و شکل سمت راست جواب را بعد از 10° تکرار نشان می‌دهد. به وضوح در اینجا با استفاده از بردار شروع اولیه ناهموار شاهد همگرایی سریع‌تر نسبت به حالت قبل هستیم. در حالت بعد از ترکیب دو تابع هموار و نوسانی برای بردار شروع اولیه استفاده شده است: $\frac{\sin\left(\frac{j\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3j\pi}{64}\right)}{2}$ ($k = 2, k = 16$). شکل سمت چپ جواب را بعد از یک تکرار و شکل سمت راست جواب را بعد از 10° تکرار روش نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود بخش نوسانی جواب بعد از 10° تکرار تقریباً حذف شده است ولی بخش هموار جواب اولیه تغییر چندانی نداشته است.



شکل ۴.۱: روش ژاکوبی وزن‌دار با $\omega = \frac{2}{3}$ روی دستگاه $Au = 0$ و بردار شروع اولیه (a): w_3 ، (b): w_{16} و (c): $(w_3 + w_{16})/2$

۱.۴.۱ روش چندشبکه‌ای برای حل دستگاه معادلات جبری ناشی از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل بیضوی

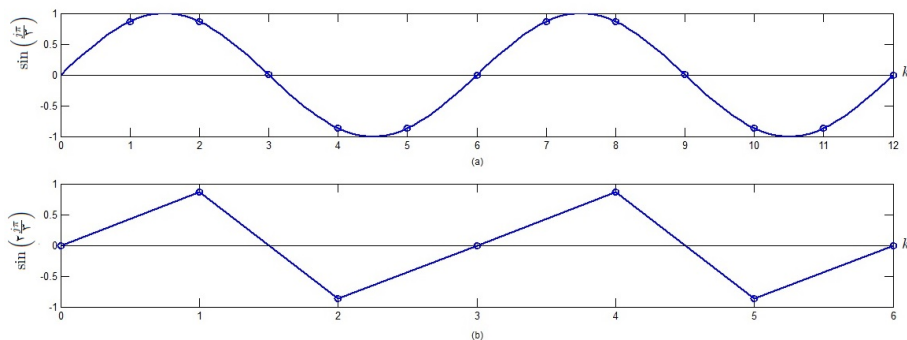
بسیاری از روش‌های تکراری برای حل دستگاه‌های معادلات خطی دارای ویژگی همواری هستند. این ویژگی موجب می‌شود که بخش‌های جواب با نوسان بالا بعد از تعداد کمی تکرار (۲ یا ۳ تکرار) هموار شوند. در حالی که برای بخش‌های هموار کارایی چندانی نداشته و سرعت همگرایی پایینی دارند. روش چند شبکه‌ای روشی اصلاحی بر روی این روش‌های تکراری جهت برطرف کردن این نقص است.

همان طور که می دانیم روش های تکراری روی شبکه درشت کم هزینه تر هستند چرا که روی شبکه درشت تعداد مجهولات کمتر بوده و ابعاد دستگاه معادلات خطی کاهش می یابد. از طرف دیگر با توجه به رابطه

$$\lambda_1 \approx 1 - \frac{\omega \pi^2 h^2}{2},$$

که عبارت $1 - O(h^2)$ بیان کننده رفتار همگرایی کل روش تکراری است، یعنی هر چه شبکه درشت تر شود شعاع طیفی روش تکراری از یک دورتر می شود و در نتیجه سرعت همگرایی بهبود می یابد.

با در نظر گرفتن ایده استفاده از شبکه درشت تر، حال سوال این است که وقتی روش تکراری هموار می شود اگر این جواب را به شبکه درشت تر منتقل کنیم همواری جواب چه تغییری می کند؟ با توجه به شکل ۵.۱ می توان به این سوال پاسخ داد. در شکل زیر قسمت (a)، این شکل تابع موج هموار به ازای $k = 4$ روی شبکه ظریف Ω^h با $n = 12$ را نشان می دهد $(\sin(\frac{j\pi}{12}))$. در شکل (b) این موج مستقیماً روی شبکه Ω^{2h} با $n = 6$ تصویر شده است. همان طور که ملاحظه می شود تصویر موج بالا روی شبکه درشت تر Ω^{2h} دارای ناهمواری بیشتری است.



شکل ۵.۱: موج با $k = 4$ در شبکه Ω^h ($n = 12$) روی شبکه Ω^{2h} ($n = 6$) تصویر شده است.

با توجه به توضیحات بالا، بعد از چند تکرار یک روش تکراری معمول، جوابی که هموار شده است را می توان به شبکه درشت تر برای افزایش سرعت همگرایی منتقل کرد، سپس در شبکه درشت معادله باقیمانده را تشکیل داده و حل می کنیم. خطای حاصل را به شبکه ظریف منتقل کرده و به مقدار اولیه محاسبه شده اضافه می کنیم تا به تقریب بهتری از جواب دست پیدا کنیم. به این روش، روش دو شبکه ای گفته می شود. مراحل گفته شده در الگوریتم زیر گام به گام ذکر شده اند:

Algorithm 1 The standard two grid method $u^h \leftarrow TG(u^h, f^h, \nu_1, \nu_2)$

- 1) Relax ν_1 times on $A^h v^h = f^h$ on Ω^h with arbitrary initial guess u^h
 - 2) Compute $d^h = f^h - A^h u^h$.
 - 3) Compute $d^{2h} = r d^h$.
 - 4) Solve $A^{2h} e^{2h} = d^{2h}$ on Ω^{2h} .
 - 5) Correct fine-grid solution $u^h \leftarrow u^h + p e^{2h}$.
 - 6) Relax ν_2 times on $A^h v^h = f^h$ on Ω^h with initial guess u^h .
-

در الگوریتم بالا r و p به ترتیب عملگرهای محدودکننده^۱ و توسیعی یا درونیاب^۲ هستند. ماتریس A^{2h} را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۲۳]:

$$A^{2h} = r A^h p.$$

عملگر p بردار در فضای $R^{\frac{N}{2}-1}$ را به بردار در فضای R^{N-1} تصویر می‌کند. به عبارت دیگر $p v^{2h} = v^h$ که

$$\begin{aligned} v_{2j}^h &= v_j^{2h}, \\ v_{2j+1}^h &= \frac{1}{2}(v_j^{2h} + v_{j+1}^{2h}), \quad 0 \leq j \leq \frac{N}{2} - 1. \end{aligned}$$

به عبارت دیگر، نقاط زوج شبکه ظریف دقیقاً نقاط شبکه درشت است و نقاط فرد شبکه ظریف یا درایه‌های فرد بردار v^h ، میانگین دو راس مجاور در شبکه درشت می‌باشند. اگر $n = 8$ باشد می‌توان این عملگر را به شکل برداری زیر نمایش داد:

$$p v^{2h} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 2 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{2h} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}_h = v^h. \quad (28.1)$$

در حالت دوبعدی به روش مشابه می‌توان عملگر درونیاب را تعریف کرد. اگر $p v^{2h} = v^h$ آنگاه

¹restriction

²prolongation or interpolation

عناصر v^h به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} v_{i,j}^h &= v_{i,j}^{2h}, \\ v_{i+1,j}^h &= \frac{1}{4} (v_{i,j}^{2h} + v_{i+1,j}^{2h}), \\ v_{i,j+1}^h &= \frac{1}{4} (v_{i,j}^{2h} + v_{i,j+1}^{2h}), \\ v_{i+1,j+1}^h &= \frac{1}{4} (v_{i,j}^{2h} + v_{i+1,j}^{2h} + v_{i,j+1}^{2h} + v_{i+1,j+1}^{2h}), \quad 0 \leq i, j \leq \frac{N}{4} - 1. \end{aligned}$$

عملگر انتقالی بعدی، عملگر تحدید است. راه های مختلفی برای تعریف این عملگر وجود دارد از جمله روش های ^۱اینجکشن و ^۲کاملاً وزن دار [۴۶]. در اینجا ما روش کاملاً وزن دار را توضیح می دهیم. این عملگر را با r نشان می دهیم که $rv^h = v^{2h}$

$$v_j^{2h} = \frac{1}{4} (v_{j-1}^h + 2v_j^h + v_{j+1}^h), \quad 1 \leq j \leq \frac{n}{4} - 1.$$

عملگر تحدید بالا، عملگری از فضای $\mathcal{R}^{N-1}$ به $\mathcal{R}^{\frac{N}{4}-1}$ است که می توان آن را به شکل زیر نمایش داد:

$$rv^h = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & & & \\ & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix}_h = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{2h} = v^{2h}, \quad (29.1)$$

در واقع رابطه $r = \frac{1}{4}p$ بین عملگر درونیاب و تحدید برقرار می باشد. در حالت دو بعدی عملگر تحدید را با رابطه $rv^h = v^{2h}$ تعریف می کنیم که

$$\begin{aligned} v_{ij}^{2h} &= \frac{1}{16} [v_{i-1,j-1}^h + v_{i-1,j+1}^h + v_{i+1,j-1}^h + v_{i+1,j+1}^h \\ &\quad + 2(v_{i,j-1}^h + v_{i,j+1}^h + v_{i-1,j}^h + v_{i+1,j}^h) \\ &\quad + 4v_{i,j}^h], \quad 1 \leq i, j \leq \frac{N}{4} - 1. \end{aligned}$$

حال روش دو شبکه ای ارائه شده در الگوریتم ۱ را روی معادله با مشتقات جزئی $-u'' = 0$ پیاده سازی می کنیم. اگر این معادله را به روش المان های متناهی گسسته کنیم به دستگاه معادلات خطی همگن $Au = 0$ می رسیم. که A همان ماتریس تعریف شده با رابطه (۲۱.۱) است.

¹injection

²full weighting

مثال ۲.۴.۱. دستگاه $Au = \circ$ را با استفاده از روش ژاکوبی وزن دار با $\omega = \frac{2}{3}$ به روش دو-شبکه‌ای حل شده است. ناحیه $[0, 1]$ به ۶۴ بخش افراز شده است و بردار شروع اولیه

$$v_j^h = \frac{1}{4} \left[\sin \left(\frac{16j\pi}{N} \right) + \sin \left(\frac{40j\pi}{N} \right) \right],$$

می‌باشد. نتایج در شکل ۶.۱ نشان داده شده است.

در الگوریتم ۱، در گام چهارم همان‌طور که ملاحظه می‌شود مسأله حاصل $A^{2h}e^{2h} = d^{2h}$ شبیه مسأله اولیه است. می‌توان ایده روش دوشبکه‌ای را روی این مسأله نیز اعمال کرد. بدین ترتیب این مسأله به شبکه درشت‌تر Ω^{4h} منتقل می‌شود. به همین ترتیب می‌توان مراحل رفتن به شبکه درشت‌تر را ادامه داد تا جایی که به جواب مطلوب برسیم. بعد به ترتیب از درشت‌ترین شبکه شروع مینیمم و خطا را گام به گام به شبکه ظریف‌تر منتقل کرده و اصلاح جواب را در هر گام انجام می‌دهیم تا جایی که به شبکه ظریف اولیه برسیم. به این روش، روش چرخه- V^1 گفته می‌شود. فرم بسته این روش در الگوریتم ۲ آورده شده است.

Algorithm 2 The standard V-cycle method $v^h \leftarrow V^h(v^h, f^h)$

1) Relax ν_1 times on $A^h u^h = f^h$ on Ω^h with arbitrary initial guess v^h .

2) If Ω^h is coarsest grid, then go to step 4.

Else

$$d^{2h} \leftarrow r(f^h - A^h v^h),$$

$$v^{2h} \leftarrow 0,$$

$$v^{2h} \leftarrow V^{2h}(v^{2h}, f^{2h}).$$

3) Correct $v^h \leftarrow v^h + p v^{2h}$.

4) Relax ν times on $A^h u^h = f^h$ with initial guess v^h .

با روندی مشابه آنچه گفته شد می‌توان روش‌های دیگری مانند چرخه- μ^2 و چرخه- V کاملاً چند شبکه‌ای^۳ را تعریف کرد. روش چرخه- μ یک خانواده کلی از روش‌های چند شبکه‌ای است که روش‌هایی که تا به حال گفته شده را نیز شامل می‌شود. در روش‌هایی که تا به این جا توضیح داده شد، چرخه با حدس اولیه یک بردار از شبکه ظریف شروع می‌شد. حال سوال این است که این بردار حدس اولیه چگونه انتخاب شود تا همگرایی سریع‌تر حاصل گردد. این سوال محرک ایده روش‌های تکراری تو در تو^۴ است. در این دسته از روش‌ها ابتدا از شبکه درشت برای یافتن بردار شروع اولیه مناسب برای مسأله اصلی در شبکه ظریف استفاده می‌شود. پس برای یافتن بردار شروع اولیه مناسب ابتدا مسأله اصلی را روی Ω^{2h} حل می‌کنیم. حال این سوال مطرح می‌شود که بردار شروع اولیه مناسب در این شبکه را چگونه حدس بزنیم؟

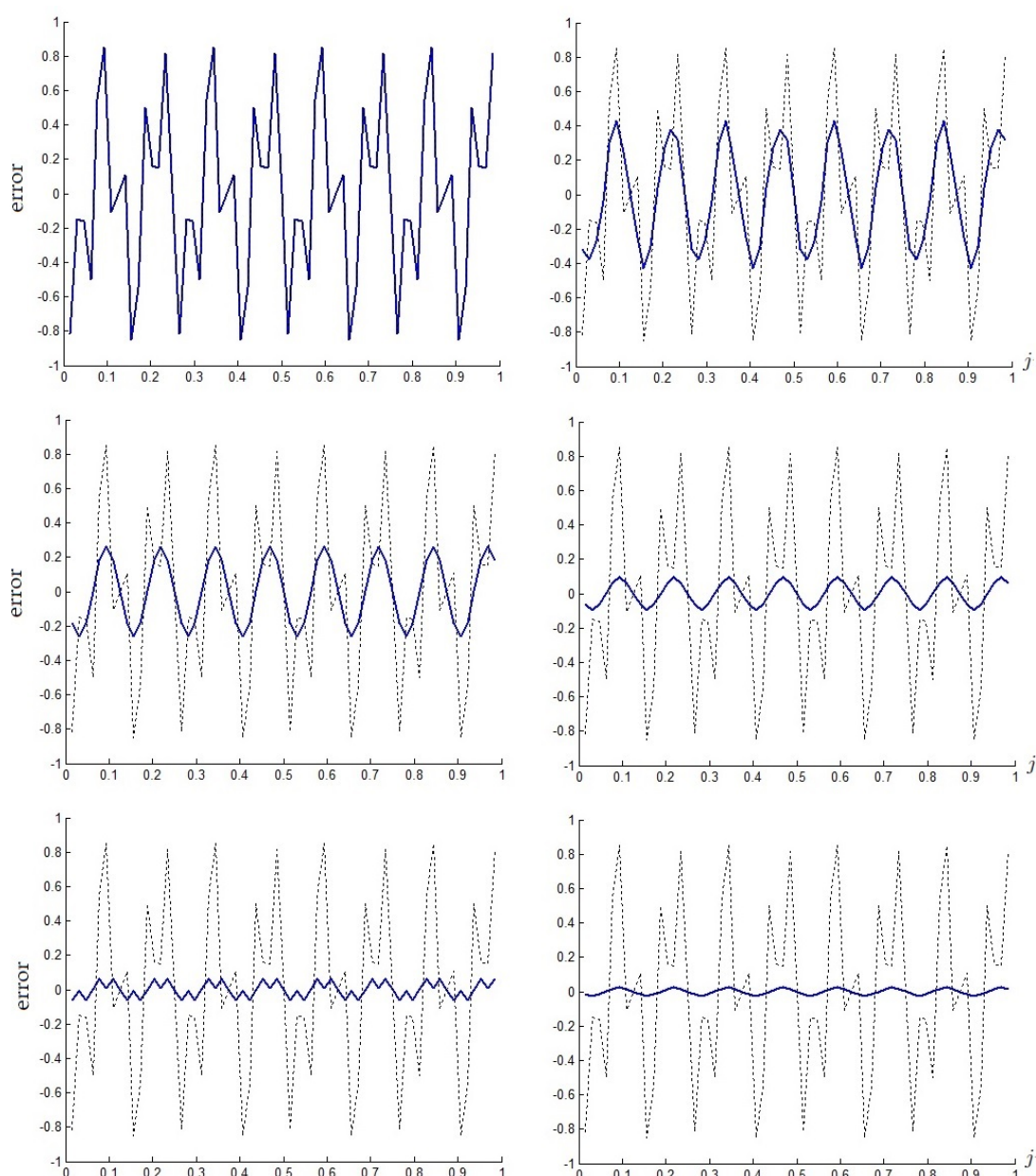
¹V-cycle method

² μ -cycle

³Full multigrid V-cycle

⁴nested iteration

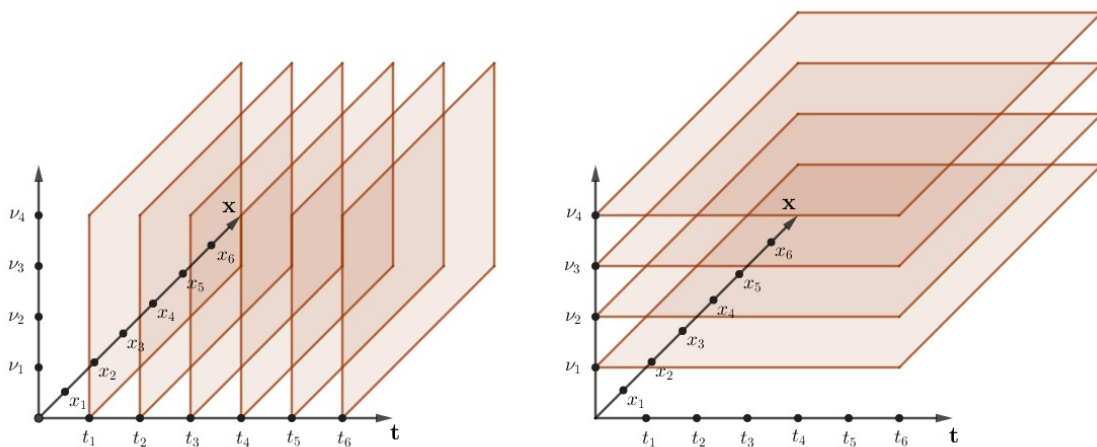
لذا مسأله را به شبکه درشت‌تر Ω^{4h} منتقل می‌کنیم. همان‌طور که ملاحظه می‌شود وارد چرخه بازگشتی دیگری شده‌ایم که ما را به درشت‌ترین شبکه هدایت می‌کند. الگوریتمی که ایده روش تودرتو را با روش چرخه- V ترکیب می‌کند، روش کاملاً چند شبکه‌ای- V نامیده می‌شود. برای توضیحات بیشتر در مورد این روش‌ها می‌توان مراجع [۲۳]، [۱۰] و [۴۶] را ملاحظه کرد.



شکل ۶.۱: روش دو-شبکه‌ای روی معادله $-u'' = 0$ با $N = 64$. شکل سطر اول سمت چپ: حدس اولیه جواب، $(w_{16} + w_{40})/2$. شکل سطر اول سمت راست: خطا بعد از یک تکرار روش ژاکوبی. شکل وسط سمت چپ: خطا بعد از سه تکرار روش ژاکوبی. شکل وسط سمت راست: یک تکرار روش ژاکوبی روی خطا در شبکه درشت و اصلاح جواب با این خطا در شبکه ظریف. شکل سطر آخر سمت چپ: سه تکرار روش ژاکوبی روی خطا در شبکه درشت و اصلاح جواب با این خطا در شبکه ظریف. شکل سطر آخر سمت راست: استفاده از سه تکرار روش ژاکوبی روی جواب گام قبل.

۲.۴.۱ روش چند شبکه‌ای برای حل دستگاه معادلات جبری مشتق شده از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل سه‌موی

روش چند شبکه‌ای روشی بسیار کارا برای حل معادلات دیفرانسیل بیضوی است. زیرا روش چند-شبکه‌ای را می‌توان به راحتی روی دستگاه جبری حاصل از معادلات بیضوی پیاده‌سازی نمود. اصول روش چند شبکه‌ای را می‌توان برای حل معادلات وابسته به زمان، از جمله معادلات دیفرانسیل سه‌موی گسترش داد. این کار با استفاده از روش تخفیفی موجی انجام پذیر است. در ادامه روش دو-شبکه‌ای را روی مسأله (۱۱.۱) پیاده‌سازی می‌کنیم. روند کار شبیه کار با دستگاه معادلات جبری حاصل از گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل مستقل از زمان می‌باشد. با این تفاوت که در هر گام روش دو-شبکه‌ای، باید دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی به کمک روش موجی حل شود. در شکل ۷.۱ در نمایی ساده تفاوت دو روش گام-زمانی و روش موجی نمایش داده شده است. در روش گام-زمانی (شکل سمت چپ) در هر گام زمان مقادیر تابع در همه نقاط شبکه فضایی در تکرارهای کافی محاسبه می‌شوند سپس به گام زمانی بعد رفته و مجدداً این کار تکرار می‌گردد ولی در روش موجی (شکل سمت راست) در هر تکرار ما یک معادله وابسته به زمان حل می‌کنیم و تا جایی حل معادلات را تکرار می‌کنیم که به جواب مطلوب یا به حد خطای مورد نظر خود برسیم. مزیت این روش برای معادلات وابسته به زمان اساساً این است که خطای گام زمانی که حاصل از تکرارهای محدود در هر گام می‌باشد به گام زمانی بعد منتقل نمی‌شود. در واقع ما با یک خطای یکنواخت روی کل شبکه فضا-زمان روبرو هستیم.



شکل ۷.۱: روش گام-زمانی (شکل چپ) و روش موجی (شکل راست). در اینجا منظور از ν_i تکرارهای روش می‌باشد.

همان‌طور که در بخش ۲.۳.۱ توضیح داده شد، معادله (۱۱.۱) را به شکل

$$M_{B_h} \dot{x}^{(\nu)} + M_{A_h} x^{(\nu)} = N_{B_h} \dot{x}^{(\nu-1)} + N_{A_h}^{(\nu-1)} + f_h, \quad x^{(\nu)}(\circ) = u_\circ, \quad t > \circ, \quad (30.1)$$

تجزیه می‌کنیم. حال با در نظر گرفتن بردار شروع اولیه $x^{(\circ)} = u^{(\nu-1)}$ ، تکرار از روش موجی را روی این معادله اعمال می‌کنیم. سپس در گام بعد معادله باقیمانده را تشکیل می‌دهیم:

$$d_h = f_h - B_h \dot{x}^{(\nu_1)} + A_h^{(\nu_1)} = N_{B_h} (\dot{x}^{(\nu_1-1)} - \dot{x}^{(\nu_1)}) + N_{A_h} (x^{(\nu_1-1)} - x^{(\nu_1)}),$$

حال معادله باقیمانده حاصل را به شبکه درشت منتقل می‌کنیم:

$$B_H \dot{v}_H + A_H v_H = r d_h, \quad v_H(\circ) = \circ, \quad t > \circ.$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود این معادله شبیه معادله اولیه است. این معادله را در شبکه درشت Ω^{2h} ، به روش تخفیفی موجی با بردار شروع اولیه $v^H(\circ) = \circ$ حل می‌کنیم. پس از یافتن مقدار خطا در این گام، حاصل را به شبکه ظریف منتقل می‌نماییم و جواب اولیه را با این خطا بهبود می‌بخشیم:

$$\bar{x} = x^{(\nu_1)} + p v_H. \quad (31.1)$$

پس از آن در گام آخر، ν_2 تکرار روش تخفیفی موجی را روی معادله (۳۰.۱) با بردار شروع اولیه (۳۱.۱)، اعمال می‌کنیم. مراحل کار به صورت گام به گام در الگوریتم ۳ بیان شده است. با توجه به اینکه جواب تحلیلی معادله (۳۰.۱) همانند معادله (۱۱.۱) می‌باشد، لذا با شروع از رابطه (۳۱.۱) و جایگذاری جواب تحلیلی به ازای v_H و ادامه همین روند جایگذاری، می‌توان ماتریس حاصل از اعمال گام‌های ۲ تا ۵ الگوریتم ۳ را به صورت زیر نمایش داد:

$$C u(t) = (I - p B_H^{-1} r B_h) u(t) + C_c u(t),$$

که C_c عملگری از نوع کانولوشن ولترا با هسته $c_c(t) = p e^{-B_H^{-1} A_H t} B_H^{-1} (A_H B_H^{-1} r B_h - r A_h)$ است. با توجه به اعمال گام‌های ۱، ۶ و ۷ در الگوریتم ۳، می‌توان روش دو-شبکه‌ای را به فرم تکراری $u^{(\nu)} = \mathcal{M} u^{(\nu-1)} + \Phi$ نوشت که ماتریس تکرار آن عبارت است از:

$$\mathcal{M} u(t) = \mathcal{K}^{\nu_2} C \mathcal{K}^{\nu_1}, \quad (32.1)$$

$\mathcal{K}$ عملگر تخفیفی موجی استاندارد ۱۴.۱ است. آرایش دوباره معادله فوق به صورت زیر خواهد بود:

$$\mathcal{M} u(t) = (M_{B_h}^{-1} N_{B_h})^{\nu_2} (I - p B_H^{-1} r B_h) (M_{B_h}^{-1} N_{B_h})^{\nu_1} u(t) + \mathcal{M}_c u(t), \quad (33.1)$$

که $\mathcal{M}_c$ ترکیب خطی عملگرهای کانولوشن ولترا $\mathcal{K}_c$ و C_c می‌باشد که هسته آن را با m_c و تبدیل لاپلاس آن را با $M_c(z)$ نمایش می‌دهیم. به دلیل پیچیدگی ظاهری عبارت $\mathcal{M}_c$ و عدم استفاده

Algorithm 3 The classical two-grid waveform relaxation based on the Gauss-Seidel smoother $TGW(\mathbf{u}_h^{(\nu)}(t), F_h(t), \nu_1, \nu_2) = \mathbf{u}_h^{(\nu+1)}(t)$

If we are on the coarsest grid, then solve the following equation by a direct or fast solver

$$B_{h_0} \dot{\mathbf{u}}_{h_0}^{\nu+1}(t) + A_{h_0} \mathbf{u}_{h_0}^{\nu+1}(t) = F_{h_0}(t).$$

Else

(*Presmoothing*) Perform ν_1 steps of Gauss-Seidel waveform relaxation,

$$v_h^\nu(t) = S^{\nu_1}(\mathbf{u}_h^\nu(t)).$$

(*Coarse grid correction*)

Compute the defect

$$\bar{d}_h^\nu(t) = F_h(t) - B_h \dot{v}_h^\nu(t) - A_h v_h^\nu(t)$$

Restrict the defect

$$\bar{d}_{2h}^\nu(t) = r \bar{d}_h^\nu(t)$$

Solve the following defect equation,

$$B_{2h} \dot{e}_{2h}^\nu(t) + A_{2h} e_{2h}^\nu(t) = \bar{d}_{2h}^\nu(t), \quad e_{2h}^\nu(0) = 0$$

Interpolate the correction

$$e_h^\nu(t) = p e_{2h}^\nu(t)$$

Correct the current approximation with the interpolation of the correction,

$$v_h^{\nu+1}(t) = v_h^\nu(t) + e_h^\nu(t).$$

(*Postsmoothing*) Perform ν_2 steps of Gauss-Seidel waveform relaxation,

$$\mathbf{u}_h^{\nu+1}(t) = S^{\nu_2}(v_h^{\nu+1}(t)).$$

End If

مستقیم آن در ادامه، از ارائه آن خودداری می‌نماییم. البته واضح است که این عملگر نیز از نوع کانولوشن ولترا می‌باشد.

فرض کنیم $e^{(\nu)}$ خطای ν مین گام روش دو-شبکه‌ای موجی $(e^{(\nu)} = u^{(\nu)} - u)$ باشد. بنابراین $e^{(\nu)} = \mathcal{M}e^{(\nu-1)}$ تبدیل لاپلاس این عبارت به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \tilde{e}^{(\nu)}(z) &= \left((M_{B_h}^{-1} N_{B_h})^{\nu_\gamma} (I - p B_H^{-1} r B_h) (M_{B_h}^{-1} N_{B_h})^{\nu_1} + \mathbf{M}_c(z) \right) \tilde{e}^{(\nu-1)}(z) \\ &= \mathbf{M}(z) \tilde{e}^{(\nu-1)}(z), \end{aligned}$$

که

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(z) &= \mathbf{K}^{\nu_\gamma}(z) (I - p(z B_H + A_H)^{-1} r(z B_h + A_h)) \mathbf{K}^{\nu_\gamma}(z), \\ \mathbf{K}(z) &= (z M_{B_h} + M_{A_h})^{-1} (z N_{B_h} + N_{A_h}). \end{aligned}$$

در قضیه زیر همگرایی روش تخفیفی موجی دو-شبکه‌ای بررسی شده است.

قضیه ۱.۴.۱. عملگر روش تخفیفی موجی دو-شبکه‌ای $\mathcal{M}$ ، عملگری کراندار در $C[0, T]$ است

و

$$\rho(\mathcal{M}) = \rho((M_{B_h}^{-1} N_{B_h})^{\nu_h} (I - p B_H^{-1} r B_h) (M_{B_h}^{-1} N_{B_h})^{\nu_h}). \quad (34.1)$$

برهان. با توجه به اینکه $\mathcal{K}_c$ و $\mathcal{C}_c$ هر دو روی $[0, T]$ پیوسته هستند، داریم $m_c \in C[0, T]$. لذا با استفاده از [لم ۱.۱.۱](#) اثبات نتیجه می‌شود. $\square$

فصل ۲

روش دو-شبکه‌ای موجی جدید

طراحی یک روش حل کارآمد برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در جهت افزایش سرعت همگرایی بدون تحمیل هزینه محاسباتی بالا، زمانی که از شبکه بسیار ظریف استفاده می‌کنیم، همواره یکی از چالش‌های دهه‌های اخیر بوده است. به همین جهت،^۱ فدرنکو در [۲۹، ۳۰] اولین ایده روش دو-شبکه‌ای را ارائه کرد. پس از او بسیاری از محققان دیگر نیز روی این موضوع کار کردند. بحث روی آنالیز همگرایی این روش، ارائه^۲ روش کاملاً چند شبکه‌ای، روش چند شبکه‌ای برای معادلات غیرخطی و روش چند شبکه‌ای جبری، همگی دستاوردهایی در جهت بهبود روش‌های چند شبکه‌ای بوده‌اند، [۲۰، ۳۷، ۳، ۴، ۵، ۴۵، ۲، ۴۴]. در راستای همین هدف، در [۱۸] روش جدید دو-شبکه‌ای روی معادلات بیضوی ارائه شده است که در این فصل این روش را بر روی معادلات وابسته به زمان گسترش می‌دهیم. همچنین آنالیز همگرایی این روش و نتایج عددی جهت مقایسه با روش دو-شبکه‌ای موجی استاندارد و روش موجی غیر شبکه‌ای، در انتهای این فصل گنجانده شده است.

معادله معروف گرما را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} D_t u(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) &= f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

^۱Federenko

^۲full multigrid (FMG)

که $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ یک ناحیه کراندار با مرز $\partial\Omega$ است. برای پیاده‌سازی روش المان‌های متناهی فرض کنید Ω_h یک مثلث بندی از Ω باشد به‌طوری که هر دو المان دلخواه از آن تهی، یک رأس و یا یک ضلع باشد. همچنین V_h را فضای المان‌های متناهی متشکل از توابع تکه‌ای پیوسته و تعریف شده روی Ω_h در نظر می‌گیریم به‌طوری که روی مرز $\partial\Omega$ مقدار صفر را اختیار می‌کنند. تقریب گسسته $u_h \in V_h$ در معادله زیر صدق می‌کند:

$$(D_t u_h, v_h) + a(u_h, v_h) = (f, v_h), \quad v_h \in V_h,$$

که در آن

$$(D_t u_h, v_h) = \int_{\Omega} (D_t u_h) v_h \, dx, \quad (f, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \, dx, \quad (2.2)$$

$$a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx. \quad (3.2)$$

همانطور که در فصل اول توضیح داده شده، $\{\phi_1, \dots, \phi_N\}$ را پایه‌ای برای V_h ، در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر، داریم $\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ که $\mathbf{x}_j$ یک نقطه درونی از شبکه Ω_h است. با جایگذاری تقریب تابع $u_h = \sum_{i=1}^N u_i(t) \phi_i(\mathbf{x})$ در معادله (۲.۲) داریم:

$$(D_t u_h, \phi_j) + a(u_h, \phi_j) = (f, \phi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

در نتیجه با اندکی محاسبات به معادله دیفرانسیل معمولی زیر می‌رسیم:

$$B_h \dot{\mathbf{u}}_h(t) + A_h \mathbf{u}_h(t) = F_h(t), \quad \mathbf{u}_h(0) = g_h, \quad t > 0, \quad (4.2)$$

که بردار $\mathbf{u}$ ، ماتریس ضرایب و بردار سمت راست به ترتیب به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\mathbf{u}_h(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)]^T \in \mathbb{R}^N, \quad (5.2)$$

$$A_h, B_h \in \mathbb{R}^{N \times N}, \quad (6.2)$$

$$F_h(t) = [(f, \phi_1), (f, \phi_2), \dots, (f, \phi_N)]^T \in \mathbb{R}^N. \quad (7.2)$$

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (۴.۲) روش‌های زیادی وجود دارد. در این فصل از روش گاوس – سایدل موجی، روش دو- شبکه‌ای استاندارد و همچنین روش دو شبکه‌ای جدید موجی استفاده کرده و آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم. دو روش اول در فصل قبل توضیح داده شد، در ادامه روش دو- شبکه‌ای جدید و آنالیز همگرایی آن را بررسی خواهیم کرد. برای اعمال این روش^۱ درشت سازی تنها روی بعد فضایی مسأله اعمال می‌شود. بدین منظور دو شبکه $\Omega_{2h} \subset \Omega_h$ را در نظر می‌گیریم. ماتریس ضرایب روی شبکه درشت، مستقیماً با استفاده از گسسته‌سازی روی آن شبکه بدست خواهد آمد، روش DCA^۲. برای انتقال

^۱coarsening

^۲Discretization Coarse-grid Approximation

بردارها از شبکه ریز به درشت از ^۱ فرم فشرده ماتریس درونیاب دو خطی نه نقطه‌ای استفاده می‌کنیم. فرم فشرده ماتریس تحدید نیز ماتریس الحاقی فرم فشرده ماتریس درونیاب در نظر گرفته شده است.

۱.۲ روش دو- شبکه‌ای جدید

در روش دو- شبکه‌ای جدید موجی (NTGW)، فرض کنیم حدس اولیه به صورت زیر باشد:

$$\tilde{x}(t) = x^{(\nu)}(t) + w\bar{x}(t),$$

که $x_o(t)$ و $x^{(\nu)}(t) = \mathcal{K}^\nu x_o(t)$ حدس اولیه روش دو- شبکه‌ای استاندارد است. پارامتر وزن w را غیر صفر در نظر می‌گیریم. $\mathcal{K}^\nu$ ماتریس تکرار یک روش تکراری مانند گاوس-سایدل است که تعداد تکرارهای آن با ν نشان داده می‌شود. بردار $\bar{x}(t)$ نیز از حل معادله زیر به روش دو- شبکه‌ای استاندارد محاسبه می‌گردد:

$$B_h \dot{\mathbf{u}}(t) + A_h \mathbf{u}(t) = \frac{1}{w} (f_h(t) - B_h \dot{x}^{(\nu)}(t) - A_h x^{(\nu)}(t)).$$

حال می‌توان حدس اولیه $\tilde{x}$ را برای حل معادله (۴.۲) به روش دو- شبکه‌ای استاندارد به کار گرفت. الگوریتم روش دو- شبکه‌ای جدید را می‌توان در الگوریتم زیر مشاهده کرد.

Algorithm 2 The new two-grid waveform relaxation

$$NTGW(\mathbf{u}_h^{(\nu-1)}, f_h, w, \nu_1, \nu_2, \nu_3) \rightarrow \mathbf{u}_h^{(\nu)}$$

- 1) Set $x_0 = \mathbf{u}_h^{(\nu-1)}$, and $x^{(\nu_1)} = \mathcal{K}^{(\nu_1)} x_0$.
 - 2) Put $f'_h = \frac{1}{w^2} (f_h - B_h \dot{x}^{(\nu_1)} - A_h x^{(\nu_1)})$.

$$= \frac{1}{w^2} [N_{B_h} (\dot{x}^{(\nu_1)} - \dot{x}^{(\nu_1-1)}) + N_{A_h} (x^{(\nu_1)} - x^{(\nu_1-1)})].$$
 - 3) Compute $\bar{x}$ by $TGW(x^{(\nu_1)}, f'_h, 0, \nu_2) \rightarrow \bar{x}$.
 - 4) $\tilde{x} = x^{(\nu_1)} + w\bar{x}$.
 - 5) Compute $\mathbf{u}_h^{(\nu)}$ by $TGW(\tilde{x}, f_h, 0, \nu_3) \rightarrow \mathbf{u}_h^{(\nu)}$.
-

۲.۲ بررسی همگرایی روش دو- شبکه‌ای جدید

در ادامه همگرایی روش دو- شبکه‌ای را بررسی می‌کنیم. آنالیز همگرایی روش دو- شبکه‌ای جدید ارائه شده در این بخش بر پایه نظریه معادلات انتگرال ولترا و همچنین تبدیل لاپلاس نسبت به متغیر زمان جهت کاهش مسأله به شکل مستقل از زمان، می‌باشد. همان‌طور که

¹Stencil

در فصل پیش بیان شد برای ارائه این آنالیز همگرایی نیاز به شکل تکراری روش دو- شبکه‌ای جدید داریم که پارامترهای دخیل در آن در لم زیر بیان شده است.

لم ۱.۲.۲. روش NTGW را می‌توان به عنوان یک روش تقریب تکراری به شکل $u^{(\nu)} = \mathcal{N}u^{(\nu-1)} + \psi$ در نظر گرفت که اپراتور $\mathcal{N}$ با عبارت زیر بیان می‌شود:

$$\mathcal{N}u(t) = \mathcal{K}^{\nu\kappa} \mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{K}^{\nu\lambda} u(t), \quad (۸.۲)$$

همچنین $\mathcal{K}$ روش تکراری موجی (در اینجا روش گاوس-سایدل مورد نظر است) و $\mathcal{C}\mathcal{R}$ عملگر اصلاحگر دو- شبکه‌ای جدید موجی تعریف شده به شکل زیر است:

$$\mathcal{C}\mathcal{R}u(t) = \left(I - pB_H^{-1} rB_h \right) \left(I + w\mathcal{K}^{\nu\kappa} \left(I - \left(1 + \frac{1}{w} \right) pB_H^{-1} rB_h \right) \right) u(t) + \mathcal{C}\mathcal{R}_c u(t),$$

که در عبارت بالا $\mathcal{C}\mathcal{R}_c$ اپراتوری از جنس کانولوشن ولترا می‌باشد.

برهان. همچنان که پیش از این بیان شد، اعمال روش دو- شبکه‌ای استاندارد روی مسأله مقدار اولیه ۴.۲، با حدس اولیه $\tilde{x} = x^{(\nu_1)} + w\bar{x}$ ، منجر به روش دو- شبکه‌ای جدید می‌شود. لذا برای بررسی همگرایی روش جدید از آنالیز روش دو- شبکه‌ای استاندارد الهام می‌گیریم و مراحل زیر را دنبال می‌کنیم:

- ۱- ابتدا روش تکراری صریح جهت محاسبه $\bar{x}$ را بدست می‌آوریم،
- ۲- سپس به طریق مشابه، روش تکراری صریح برای محاسبه $u_h^{(\nu)}$ را می‌یابیم،
- ۳- در انتها، با قرار دادن عبارت معادل بدست آمده برای $\bar{x}$ در عبارت $\tilde{x}$ به عنوان حدس اولیه روش دو- شبکه‌ای استاندارد، می‌توان تقریب تکراری صریح کلی برای روش دو- شبکه‌ای جدید را بدست آورد.

در مرحله اصلاح شبکه درشت جهت محاسبه $\bar{x}$ ، مراحل زیر باید اعمال شود:

- i- $d_h(t) = B_h \dot{x}^{(\nu_1)}(t) + A_h x^{(\nu_1)}(t) - f'_h(t),$
- ii- $d_H(t) = r d_h(t),$
- iii- $B_H \dot{v}(t)_H + A_H v_H(t) = d_H(t), \quad v_H(0) = 0,$
- iv- $\bar{x} = x^{(\nu_1)} - p v_H.$

معادله باقیمانده $d_H(t)$ را در سمت راست معادله گام iii جایگذاری کرده و به صورت تحلیلی حل می‌کنیم، در نتیجه $v_H(t)$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$v_H(t) = e^{-B^{-1}At} v_H(\circ) + \int_0^t e^{B^{-1}A(s-t)} B^{-1} d_H(s) ds,$$

¹new two-grid correction waveform operator

سپس این عبارت را در معادله گام iv قرار داده و بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x^{(\nu)} - p \left(\int_0^t e^{B_H^{-1} A_H(s-t)} B_H^{-1} r \left[\left(1 + \frac{1}{w\gamma}\right) B_h x^{(\nu)} + \left(1 + \frac{1}{w\gamma}\right) A_h x^{(\nu)} - \frac{1}{w\gamma} f_h \right] ds \right) \\ &= x^{(\nu)}(t) + \frac{1}{w\gamma} p \int_0^t e^{B_H^{-1} A_H(s-t)} B_H^{-1} r f_h ds \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{w\gamma}\right) p \int_0^t e^{B_H^{-1} A_H(s-t)} B_H^{-1} r A_h x^{(\nu)}(s) ds \\ &\quad - \left(1 + \frac{1}{w\gamma}\right) p \int_0^t e^{B_H^{-1} A_H(s-t)} B_H^{-1} r B_h \dot{x}^{(\nu)}(s) ds,\end{aligned}\quad (9.2)$$

که p و r به ترتیب اپراتورهای درونیاب و تحدید کننده هستند. در عبارت (۹.۲)، می‌توان عبارت مشتق را با عبارت زیر جایگزین نمود:

$$\begin{aligned}& - \left(1 + \frac{1}{w\gamma}\right) p \int_0^t e^{B_H^{-1} A_H(s-t)} B_H^{-1} r B_h \dot{x}^{(\nu)}(s) ds \\ &= \int_0^t e^{B_H^{-1} A_H(s-t)} B_H^{-1} r B_h \dot{x}^{(\nu)}(s) ds \pm e^{B_H^{-1} A_H(s-t)} B_H^{-1} A_H B_H^{-1} r B_h x^{(\nu)} \\ &= \int_0^t \frac{d}{ds} \left(e^{B_H^{-1} A_H(s-t)} B_H^{-1} r B_h x^{(\nu)}(s) \right) ds - \int_0^t e^{B_H^{-1} A_H(s-t)} B_H^{-1} A_H B_H^{-1} r B_h x^{(\nu)}(s) ds \\ &= B_H^{-1} r B_h x^{(\nu)}(t) - e^{-B_H^{-1} A_H t} B_H^{-1} r B_h x^{(\nu)}(0) - \int_0^t e^{B_H^{-1} A_H(s-t)} B_H^{-1} A_H B_H^{-1} r B_h x^{(\nu)}(s) ds.\end{aligned}\quad (10.2)$$

در نتیجه با جانشینی عبارت (۱۰.۲) به جای عبارت (۹.۲)، تقریب تکراری صریح برای محاسبه $\bar{x}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{x} = \mathcal{M}_1 x^{(\nu)}(t) + \mathcal{K}^{\nu} \phi_1(t),$$

که

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 x^{(\nu)}(t) &= \mathcal{K}^{\nu} \mathcal{C}_1 x^{(\nu)}(t), \\ \mathcal{C}_1 x^{(\nu)}(t) &= \left(I - \left(1 + \frac{1}{w\gamma}\right) p B_H^{-1} r B_h \right) x^{(\nu)}(t) + \mathcal{C}_{1c} x^{(\nu)}(t), \\ \mathcal{C}_{1c} x^{(\nu)}(t) &= C_{1c} \star x^{(\nu)}(t) = \int_0^t C_{1c}(t-s) x^{(\nu)}(s) ds, \\ C_{1c}(t) &= \left(1 + \frac{1}{w\gamma}\right) p e^{-B_H^{-1} A_H t} B_H^{-1} (A_H B_H^{-1} r B_h - r A_h),\end{aligned}$$

و

$$\phi_1(t) = \left(1 + \frac{1}{w\gamma}\right) p e^{-B_H^{-1} A_H t} B_H^{-1} r B_h x^{(\nu)}(0) + \frac{1}{w\gamma} p \int_0^t e^{B_H^{-1} A_H(s-t)} B_H^{-1} r f_h ds.$$

به طریق مشابه، می‌توان تقریب تکراری صریح برای محاسبه $u^{(\nu)}$ را به صورت زیر بدست آورد:

$$u^{(\nu)} = \mathcal{M}_2 \tilde{x}(t) + \mathcal{K}^{\nu} \phi_2(t), \quad (11.2)$$

که

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_\Upsilon \tilde{x}(t) &= \mathcal{K}^\Upsilon \mathcal{C}_\Upsilon \tilde{x}(t), \\ \mathcal{C}_\Upsilon \tilde{x}(t) &= (I - pB_H^{-1} r B_h) \tilde{x}(t) + \mathcal{C}_{\Upsilon_c} \tilde{x}(t), \\ \mathcal{C}_{\Upsilon_c} \tilde{x}(t) &= \mathcal{C}_{\Upsilon_c} \star \tilde{x}(t) = \int_0^t \mathcal{C}_{\Upsilon_c}(t-s) \tilde{x}(s) ds, \\ \mathcal{C}_{\Upsilon_c} &= p e^{-B_H^{-1} A_H t} B_H^{-1} (A_H B_H^{-1} r B_h - r A_h),\end{aligned}$$

۹

$$\phi_\Upsilon(t) = p e^{-B_H^{-1} A_H t} B_H^{-1} r B_h \tilde{x}(\circ) + p \int_0^t e^{B_H^{-1} A_H(s-t)} B_H^{-1} r f(s) ds.$$

حال عبارت $\tilde{x} = x^{\nu_1} + w\bar{x}$ و $x^{(\nu_1)} = \mathcal{K}_1 u^{(\nu-1)}$ را در معادله (۱۱.۲) قرار داده و بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}u^{(\nu)} &= \mathcal{N}u^{(\nu-1)} + \psi, \\ \mathcal{N}u(t) &= \mathcal{K}^\Upsilon \mathcal{C} \mathcal{R} \mathcal{K}^{\nu_1} u(t), \\ \mathcal{C} \mathcal{R} u(t) &= (I - pB_H^{-1} r B_h) (I + w \mathcal{K}^\Upsilon (I - (\mathbb{1} + \frac{1}{w\Upsilon}) pB_H^{-1} r B_h)) u(t) + \mathcal{C} \mathcal{R}_c u(t), \\ \mathcal{C} \mathcal{R}_c u(t) &= \mathcal{C}_{\Upsilon_c} \star (I + w \mathcal{K}^\Upsilon (I - (\mathbb{1} + \frac{1}{w\Upsilon}) pB_H^{-1} r B_h)) u(t) + w(I - pB_H^{-1} r B_h) \mathcal{K}^\Upsilon (\mathcal{C}_{\mathbb{1}_c} \star u(t)) \\ &\quad + w \mathcal{C}_{\Upsilon_c} \star (\mathcal{K}^\Upsilon \mathcal{C}_{\mathbb{1}_c} \star u(t)).\end{aligned}$$

که $\psi = w \mathcal{K}^\Upsilon \mathcal{C}_\Upsilon \mathcal{K}^\Upsilon \phi_1 + \mathcal{K}^\Upsilon \phi_2$ بنابراین،

$$\begin{aligned}\mathcal{N}u(t) &= (M_{B_h}^{-1} N_{B_h})^{\Upsilon_1} (I - pB_H^{-1} r B_h) \times \\ &\quad (I + w(M_{B_h}^{-1} N_{B_h})^{\Upsilon_2} (I - (\mathbb{1} + \frac{1}{w\Upsilon}) pB_H^{-1} r B_h)) (M_{B_h}^{-1} N_{B_h})^{\nu_1} u(t) + \mathcal{N}_c u(t).\end{aligned}$$

عبارت $\mathcal{N}_c$ متشکل از ترکیب خطی از عبارت های کانوولوشن ولترا $\mathcal{K}_c$ و $\mathcal{C} \mathcal{R}_c$ بوده و لذا خود نیز از نوع کانوولوشن ولترا خواهد بود. $\square$

فرض کنیم $e^{(\nu)}$ خطای حاصل از ν مین تکرار روش دو- شبکه‌ای موجی جدید باشد، به عبارت دیگر $e^{(\nu)} = u^{(\nu)} - u$. با استفاده از لم ۱.۲.۲ نتیجه می‌گیریم که $e^{(\nu)} = \mathcal{N}e^{(\nu-1)}$.

بنابراین تبدیل لاپلاس این معادله به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}\tilde{e}^{(\nu)} &= \mathbf{N}\tilde{e}^{(\nu-1)}, \\ \mathbf{N} &= \mathbf{K}^{\nu\alpha} \mathbf{R} \mathbf{K}^{\nu\alpha}, \\ \mathbf{K} &= (zM_{B_h} + M_{A_h})^{-1}(zN_{B_h} + N_{A_h}), \\ \mathbf{R} &= (I - pB_H^{-1}rB_h)(I + w\mathbf{K}^{\nu\alpha}(I - (\mathbf{1} + \frac{1}{w\gamma})B_H^{-1}rB_h))\tilde{e}^{(\nu-1)} \\ &\quad + \mathbf{L}(I + w\mathbf{K}^{\nu\alpha}(I - (\mathbf{1} + \frac{1}{w\gamma})B_H^{-1}rB_h))\tilde{e}^{(\nu-1)} \\ &\quad + w(I - pB_H^{-1}rB_h)\mathbf{K}^{\nu\alpha}[(\mathbf{1} + \frac{1}{w\gamma})\mathbf{L}]\tilde{e}^{(\nu-1)} + w\mathbf{L}[(\mathbf{1} + \frac{1}{w\gamma})\mathbf{L}]\tilde{e}^{(\nu-1)} \\ &\quad + \mathbf{L}\tilde{e}^{(\nu-1)}, \\ \mathbf{L} &= p(A_H + zB_H)^{-1}(A_H B_H^{-1}rB_h - rA_h).\end{aligned}$$

حال می‌توان همگرایی روش دو- شبکه‌ای موجی جدید را در دو حالت زمان متناهی و زمان نامتناهی با استفاده از دو لم زیر بدست آورد.

لم ۲.۲.۲. اپراتور روش دو- شبکه‌ای موجی جدید، $\mathcal{N}$ ، یک اپراتور کراندار در $C[^\circ, T]$ بوده و داریم:

$$\begin{aligned}\rho(\mathcal{N}) &= \rho((M_{B_h}^{-1}N_{B_h})^{\nu\alpha}(I - pB_H^{-1}rB_h) \times \\ &\quad (I + w(M_{B_h}^{-1}N_{B_h})^{\nu\alpha}(I - (\mathbf{1} + \frac{1}{w\gamma})pB_H^{-1}rB_h))(M_{B_h}^{-1}N_{B_h})^{\nu\alpha}).\end{aligned}\quad (12.2)$$

برهان. هر دو عملگر $\mathcal{K}_c$ و $\mathcal{CR}_c$ روی $[^\circ, T]$ پیوسته است، لذا می‌توان نتیجه گرفت که هسته $\mathcal{N}_c$ نیز روی $[^\circ, T]$ پیوسته است. بنابراین لم ۱.۱.۱ عبارت ارائه شده برای شعاع طیفی اپراتور $\mathcal{N}$ را اثبات می‌کند. $\square$

لم ۳.۲.۲. فرض کنیم همه مقادیر ویژه $B_H^{-1}A_H$ و $M_{B_h}^{-1}M_{A_h}$ دارای قسمت حقیقی مثبت باشند و $\mathcal{N}$ عملگری در $L_p(^\circ, \infty)$ باشد که $1 \leq p < \infty$ ، آنگاه $\mathcal{N}$ یک عملگر کراندار با شعاع طیفی تعریف شده به صورت زیر می‌باشد:

$$\rho(\mathcal{N}) = \sup_{\operatorname{Re}(z) \geq ^\circ} \rho(\mathbf{N}(z)) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \rho(\mathbf{N}(i\xi)). \quad (13.2)$$

که $i^2 = -1$.

برهان. مثبت بودن بخش حقیقی $B_H^{-1}A_H$ و $M_{B_h}^{-1}M_{A_h}$ را می‌توان از کرانداری عملگر موجی $\mathcal{K}$ و از کرانداری جواب تحلیلی معادله (۹.۱) روی Ω_H نتیجه گرفت. از طرف دیگر، از عبارت $\mathbf{N}_c(z) = \mathbf{N} - \lim_{z \rightarrow \infty} \mathbf{N}(z)$ و مثبت بودن بخش حقیقی مقادیر ویژه $B_H^{-1}A_H$ و $M_{B_h}^{-1}M_{A_h}$

نتیجه می‌گیریم که متغیرهای عبارت $N_c(z)$ توابع کسری از z که در بی‌نهایت به صفر میل می‌کنند و قطب‌های آنها دارای بخش حقیقی منفی هستند. با توجه به این مطلب و با استفاده از تبدیل لاپلاس نتیجه می‌گیریم که N_c در $L_1(0, \infty)$ واقع شده است. لذا با توجه به لم ۲.۱.۱ اثبات کامل می‌شود. $\square$

۳.۲ نتایج عددی

در این بخش جواب عددی سه روش گاوس-سایدل موجی، روش دو- شبکه‌ای موجی استاندارد و روش دو- شبکه‌ای موجی جدید را از نظر همگرایی با دو مثال با هم مقایسه می‌کنیم. به این منظور معادله گرمای دو بعدی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f, \quad (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1], \quad t \in [0, 1].$$

در هر دو روش، روش دو- شبکه‌ای متداول و روش دو- شبکه‌ای جدید، گسسته‌سازی روش المان‌های متناهی با پایه‌های خطی روی شبکه مثلث‌بندی شده فضایی را استفاده می‌کنیم. همانطور که پیش‌تر نیز اشاره شد این گسسته‌سازی منجر به دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر می‌گردد:

$$B_h \dot{u}_h(t) + A_h u_h(t) = F_h(t).$$

هنگامی که شبکه گسسته منظم کار می‌کنیم برای ارائه ماتریس جرم و سختی می‌توان از رویکرد فرم فشرده ماتریس به جای ^۱گردآوری جامع ماتریس‌ها بهره برد. فرم فرم فشرده ماتریس‌های A_h و B_h به صورت زیر است:

$$B_h = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -1 & & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}.$$

همچنین می‌توان عملگر تحدید کننده $I_h^{\chi h}$ را به شکل فرم فشرده ماتریسی زیر نمایش داد:

$$I_h^{\chi h} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \end{bmatrix}.$$

که اپراتور درونیاب I_h^h متناظر با آن از رابطه $I_h^h = \frac{1}{4} I_h^{\chi h}$ قابل محاسبه است [۴۲]. در جدول ۴.۵ و ۳.۲ برای محاسبه عامل همگرایی از رابطه زیر استفاده شده است:

$$\rho^{(\nu)} = \frac{\|e_h^{(\nu)}\|}{\|e_h^{(\nu-1)}\|}.$$

¹Assembly procedure

برای حل عددی روش دو- شبکه‌ای موجی جدید، نیاز به داشتن مقدار ω بهینه داریم. این پارامتر با توجه به [۱۸] با استفاده از الگوریتم زیر قابل محاسبه است.

Algorithm 3 The optimum value of the parameter ω .

1) $q = (aa : hh : bb);$ (where $aa = \frac{a-1}{a^2}, bb = \frac{1-a}{a^2}$ and $0 < hh < 1$)

2)for $k = 1 : \text{length}(q)$

$\omega = q(k);$

$u = \text{Applying Algorithm 2};$

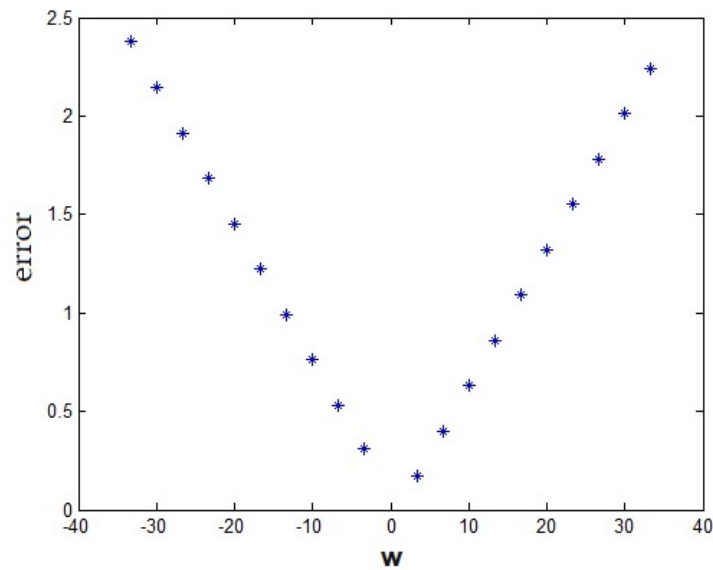
$error = u_{exact} - u;$

$max(k) = \text{Compute infinity norm of the error};$

end

3) plot (q, max) .

نتایج حاصل از محاسبه این پارامتر روی شبکه فضایی 49×49 و با استفاده از یک پیش و پس تکرار روش گاوس سایدل موجی در روش دو- شبکه‌ای موجی جدید در شکل ۱.۲ نمایش داده شده است.



شکل ۱.۲: مقدار بهینه پارامتر ω روی شبکه 49×49 با تکرارهای $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$.

$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	h
۰/۰۸۴۷	۰/۱۱۰۷	۰/۱۸۸۷	۰/۶۱۷۹	۰/۸۰۹۱	مقدار بهینه پارامتر ω

جدول ۱.۲: مقادیر بهینه پارامتر ω به ازای مقادیر مختلف h .

همچنین مقادیر بهینه این پارامتر برای چند شبکه متفاوت در جدول ۱.۲ نشان داده شده است.

به عنوان اولین مثال عددی، شرایط مرزی و دیریکله معادله انتقال گرما (۸.۱) را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که در معادله زیر صدق کند:

$$u(x, y, t) = t^2 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right),$$

حال این مسأله را با روش المان‌های متناهی با پایه‌های خطی روی شبکه فضایی ثابت با اندازه گام $h = 2^{-7}$ ، گسسته‌سازی می‌کنیم. برای گسسته‌سازی بخش زمانی روش کرانک-نیکلسون را با اندازه گام متغیر از ۰/۰۴ تا ۰/۰۰۱ همان‌طور که پیش‌تر نیز ذکر شد، روش استاندارد درشت‌سازی شبکه همراه با عملگرهای تبدیل بین شبکه‌ای کاملاً وزن‌دار مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین ماتریس‌های جرم و سختی روی شبکه درشت‌تر به‌طور مستقیم با استفاده از گسسته‌سازی دوباره محاسبه می‌گردند. در جدول ۴.۵ نتایج عامل همگرایی عددی جهت مقایسه سه روش گاوس-سایدل روش دو- شبکه‌ای متداول و روش دو- شبکه‌ای جدید نشان داده شده است. در این جدول تعداد تکرارهای لازم برای کاهش خطای معادله باقیمانده به مقدار 10^{-10} ، به همراه زمان لازم برای اجرای هر روش و همچنین نرم خطای محاسباتی این روش‌ها ارائه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود پس از مشاهده همگرایی در هر یک از روش‌ها، نرم خطا برای هر سه روش یکسان خواهد بود چرا که گسسته‌سازی مورد استفاده برای هر سه روش یکسان می‌باشد. همچنان که از نتایج عامل همگرایی گزارش شده قابل مشاهده است، روش دو شبکه‌ای پیشنهاد شده کاراتر از دو روش دیگر می‌باشد.

residual	times(s) CPU	ρ	$ \cdot _2$	$ \cdot _\infty$	iterations	method	τ
$0/0067$	۸۹۱	$0/9991$	$1/0126 \times 10^{-4}$	$1/3017 \times 10^{-5}$	۵۰۰۰	GS	۰/۰۴
$9/9599 \times 10^{-11}$	۱۰	$0/2617$	$3/4724 \times 10^{-4}$	$4/2959 \times 10^{-5}$	۱۴	TG	
$7/1106 \times 10^{-11}$	۹	$0/1247$	$3/4724 \times 10^{-4}$	$4/2959 \times 10^{-5}$	۹	NTG	
$4/3890 \times 10^{-4}$	۸۷۶	$0/9959$	$1/0845 \times 10^{-4}$	$1/3272 \times 10^{-5}$	۵۰۰۰	GS	۰/۰۲
$4/7462 \times 10^{-11}$	۸	$0/2354$	$2/0134 \times 10^{-4}$	$1/4530 \times 10^{-5}$	۱۳	TG	
$7/7974 \times 10^{-11}$	۸	$0/1030$	$2/0134 \times 10^{-4}$	$1/4530 \times 10^{-5}$	۸	NTG	
$9/9589 \times 10^{-11}$	۷۱۶	$0/9856$	$3/1738 \times 10^{-5}$	$3/8156 \times 10^{-6}$	۳۶۲۵	GS	۰/۰۱
$2/5053 \times 10^{-11}$	۱۰	$0/2368$	$3/1738 \times 10^{-5}$	$3/8156 \times 10^{-6}$	۱۲	TG	
$9/4050 \times 10^{-11}$	۱۰	$0/0955$	$3/1738 \times 10^{-5}$	$3/8156 \times 10^{-6}$	۷	NTG	
$9/7655 \times 10^{-11}$	۴۲۹	$0/9724$	$8/7701 \times 10^{-6}$	$1/0339 \times 10^{-6}$	۱۸۰۹	GS	۰/۰۰۵
$5/1234 \times 10^{-11}$	۶	$0/2569$	$8/7701 \times 10^{-6}$	$1/0339 \times 10^{-6}$	۱۰	TG	
$1/1617 \times 10^{-11}$	۷	$0/0952$	$8/7701 \times 10^{-6}$	$1/0339 \times 10^{-6}$	۷	NTG	
$9/9510 \times 10^{-11}$	۱۶۵	$0/9478$	$2/3256 \times 10^{-6}$	$2/6999 \times 10^{-7}$	۸۹۵	GS	۰/۰۰۲۵
$2/4466 \times 10^{-11}$	۵	$0/2188$	$2/3256 \times 10^{-6}$	$2/6999 \times 10^{-7}$	۹	TG	
$1/4975 \times 10^{-11}$	۷	$0/0946$	$2/3256 \times 10^{-6}$	$2/6999 \times 10^{-7}$	۶	NTG	
$9/3922 \times 10^{-11}$	۶۷	$0/8836$	$3/8769 \times 10^{-7}$	$4/4362 \times 10^{-8}$	۳۵۳	GS	۰/۰۰۰۱
$2/8991 \times 10^{-11}$	۴	$0/2347$	$3/8769 \times 10^{-7}$	$4/4362 \times 10^{-8}$	۷	TG	
$8/9077 \times 10^{-11}$	۴	$0/0610$	$3/8769 \times 10^{-7}$	$4/4362 \times 10^{-8}$	۶	NTG	

جدول ۲.۲: نتایج مربوط به مثال اول. در این مثال $h = 2^{-7}$ و τ از $0/04$ تا $0/001$ متغیر است.

برای مثال دوم، شرایط مرزی دیریکله و شرط اولیه معادله انتقال گرما (۸.۱) به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که غیر صفر بوده و در جواب تحلیلی

$$u(x, t) = 1 + \sin(\pi x/2) \sin(\pi y/2) \exp(-\pi^2 t/2),$$

صدق می‌کنند. در این مثال نیز گسسته‌سازی المان‌های متناهی با پایه‌های خطی با طول گام شبکه فضایی ثابت $h = 2^{-7}$ و گسسته‌سازی کرانک نیکلسون پارامتر زمان، با طول گام‌های متغیر از ۰/۰۴ تا ۰/۰۰۱ در نظر گرفته شده است. در جدول ۳.۲ نتایج عامل همگرایی عددی جهت مقایسه سه روش گاوس-سایدل روش دو-شبکه‌ای متداول و روش دو-شبکه‌ای جدید نشان داده شده است. تعداد تکرارهای روش‌های مذکور را تا جایی ادامه دادیم که نرم خطای معادله باقیمانده از 10^{-10} کوچکتر شود. در چنین وضعیتی عامل همگرایی عددی به مقدار ثابت خود همگرا می‌شود. زمان لازم برای اجرای هر روش و همچنین نرم خطای محاسباتی این روش‌ها نیز در جدول ارائه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود نرم خطا برای هر سه روش یکسان خواهد بود چرا که گسسته‌سازی مورد استفاده برای هر سه روش یکسان می‌باشد. همچنان که از نتایج عامل همگرایی گزارش شده قابل مشاهده است، روش دو شبکه‌ای پیشنهاد شده کاراتر از دو روش دیگر می‌باشد.

residuals	times(s) CPU	ρ	$ \cdot _2$	$ \cdot _\infty$	iterations	method	τ
0.534×10^{-11}	۸۹۹	۰/۹۹۹۳	۰/۱۸۴۰	۰/۰۳۳۰	۵۰۰۰	GS	۰/۰۴
$۸/۵۹۹۹ \times 10^{-11}$	۱۰	۰/۳۴۳۶	۰/۰۰۴۲	$۵/۲۱۳۴ \times 10^{-5}$	۱۹	TG	
$۹/۱۲۵۵ \times 10^{-11}$	۹	۰/۱۳۹۹	۰/۰۰۴۲	$۵/۲۱۳۴ \times 10^{-5}$	۱۲	NTG	
0.320×10^{-11}	۹۲۰	۰/۹۹۷۵	۰/۰۰۲۶	$۳/۲۴۴۶ \times 10^{-4}$	۵۰۰۰	GS	۰/۰۲
$۴/۳۳۰۶ \times 10^{-11}$	۹	۰/۳۰۰۹	۰/۰۰۲۶	$۳/۲۴۴۶ \times 10^{-4}$	۱۹	TG	
$۴/۶۳۸۲ \times 10^{-11}$	۹	۰/۱۳۷۹	۰/۰۰۲۶	$۳/۲۴۴۶ \times 10^{-4}$	۱۲	NTG	
$۹/۹۳۸۰ \times 10^{-11}$	۷۶۹	۰/۹۸۴۴	۰/۰۰۱۰	$۱/۲۴۸۷ \times 10^{-4}$	۴۳۳۷	GS	۰/۰۱
$۷/۵۲۴۳ \times 10^{-11}$	۸	۰/۲۱۴۸	۰/۰۰۱۰	$۱/۲۴۸۷ \times 10^{-4}$	۱۸	TG	
$۲/۳۱۱۳ \times 10^{-11}$	۹	۰/۱۳۷۹	۰/۰۰۱۰	$۱/۲۴۸۷ \times 10^{-4}$	۱۲	NTG	
$۹/۷۸۱۲ \times 10^{-11}$	۴۳۳	۰/۹۶۸۹	$۴/۳۱۹۷ \times 10^{-4}$	$۵/۱۴۷۳ \times 10^{-5}$	۲۱۶۸	GS	۰/۰۰۵
$۴/۴۷۰۳ \times 10^{-11}$	۸	۰/۲۴۸۷	$۴/۳۱۹۷ \times 10^{-4}$	$۵/۱۴۷۳ \times 10^{-5}$	۱۸	TG	
$۸/۹۱۸۲ \times 10^{-11}$	۸	۰/۱۳۳۸	$۴/۳۱۹۷ \times 10^{-4}$	$۵/۱۴۷۳ \times 10^{-5}$	۱۱	NTG	
$۹/۷۲۴۲ \times 10^{-11}$	۲۰۸	۰/۹۳۹۷	$۲/۲۱۴۷ \times 10^{-4}$	$۲/۵۱۱۴ \times 10^{-5}$	۱۱۰۳	GS	۰/۰۰۲۵
$۹/۶۳۱۹ \times 10^{-11}$	۸	۰/۲۷۹۸	$۲/۲۱۴۷ \times 10^{-4}$	$۲/۵۱۱۴ \times 10^{-5}$	۱۷	TG	
$۵/۵۸۶۸ \times 10^{-11}$	۸	۰/۱۳۲۳	$۲/۲۱۴۷ \times 10^{-4}$	$۲/۵۱۱۴ \times 10^{-5}$	۱۱	NTG	
$۹/۲۳۲۱ \times 10^{-11}$	۸۵	۰/۸۶۱۱	$۹/۶۲۲۹ \times 10^{-5}$	$۱/۰۴۹۳ \times 10^{-5}$	۴۵۳	GS	۰/۰۰۱
$۶/۱۰۰۴ \times 10^{-11}$	۸	۰/۳۰۹۵	$۹/۶۲۲۹ \times 10^{-5}$	$۱/۰۴۹۳ \times 10^{-5}$	۱۷	TG	
$۵/۷۰۱۱ \times 10^{-11}$	۸	۰/۱۶۹۰	$۹/۶۲۲۹ \times 10^{-5}$	$۱/۰۴۹۳ \times 10^{-5}$	۱۱	NTG	

جدول ۳.۲: نتایج مربوط به مثال دوم. در این مثال $h = 2^{-7}$ و τ از 0.4% تا 0.1% متغیر است.

فصل ۳

تحلیل همگرایی فوریه LFA

روش^۱ تحلیل فوریه محلی [۲۸، ۴۲، ۳۱] یک روش پیش‌بینی عامل همگرایی روش‌های چند شبکه‌ای می‌باشد. ایده اصلی این روش، بررسی رفتاری عملگرهای درگیر در یک روش چند شبکه‌ای روی فضایی ساخته شده با پایه‌هایی از جنس توابع نمایی است. روش LFA یکی از قدرتمندترین روش‌های تحلیل همگرایی عددی برای طراحی یک روش چند شبکه‌ای کارآمد بر روی همه مسائل مشتقات جزئی می‌باشد. این روش در ابتدا توسط برنت [۴] معرفی و پس از آن گسترش یافت و بهبودهایی برای آن ارائه شد [۲۲، ۲۸]. در این بخش تمام پیش نیازهای لازم به‌گونه‌ای بیان می‌شوند که بتوان به‌سادگی این روش را روی مسائل مورد نظر پیاده سازی کرد.

اساس این روش تحلیل همگرایی بر پایه توابع شبکه‌ای به شکل زیر است:

$$\phi(\theta, \mathbf{x}) = e^{i\theta\mathbf{x}/h} = e^{i\theta_1 x_1/h_1} e^{i\theta_2 x_2/h_2},$$

به‌طوری‌که روی شبکه نامتناهی G_h داریم $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ ، $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ که

$$G_h = \{\mathbf{x} = \mathbf{k}\mathbf{h} = (k_1 h_1, k_2 h_2), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}\}.$$

برای هر $\mathbf{x} \in G_h$ رابطه زیر برای توابع شبکه‌ای برقرار است:

$$\phi(\theta, \mathbf{x}) = \phi(\theta', \mathbf{x}) \iff \theta_1 = \theta'_1 \pmod{2\pi}, \quad \theta_2 = \theta'_2 \pmod{2\pi},$$

¹Local Fourier Analysis

بنابراین کافی است توابع شبکه‌ای را به ازای $\mathbf{x} \in G_h$ و $\theta \in [-\pi, \pi)$ در نظر بگیریم. برای اعمال تحلیل همگرایی فوریه به فرم فشرده ماتریسی معادله مورد بررسی نیاز داریم. متناظر با هر مسأله مشتقات جزئی، می‌توان یک عملگر گسسته L_h به شکل زیر در نظر گرفت:

$$L_h = [s_k]_h, \quad k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2,$$

که در آن،

$$L_h w_h(x) = \sum_{k \in V} s_k w_h(x + kh).$$

در رابطه بالا s_k ها ضرایب ثابت هستند و V یک مجموعه اندیس متناهی می‌باشد که متناظر با مکان‌هایی از عملگر گسسته L_h است که دارای مقادیر غیر صفر هستند. برای واضح شدن عبارات بالا مثال زیر را در نظر می‌گیریم و عملگر گسسته L_h و فرم بسته ماتریسی را برای آن محاسبه می‌کنیم.

مثال ۱.۰.۳. معادله ^۱پواسون را بدون شرایط مرزی در نظر می‌گیریم. گسسته‌سازی تفاضلات متناهی این معادله به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} L_h u_h(x, y) &= -\Delta_h u_h(x, y) \\ &= -\frac{1}{h^2} [4u_h(x, y) - u_h(x - h, y) - u_h(x + h, y) - u_h(x, y - h) - u_h(x, y + h)], \end{aligned}$$

فرم ماتریسی بسته رابطه بالا را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$-\Delta_h u_h(x, y) = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix} u_h(x, y). \quad (1.3)$$

لم ۱.۰.۳. به ازای $-\pi \leq \theta \leq \pi$ ، همه توابع شبکه‌ای $\phi(\theta, \mathbf{x})$ ، توابع ویژه هر عملگر گسسته می‌باشند [۲۲]. به عبارت دیگر

$$L_h \phi(\theta, \mathbf{x}) = \tilde{L}_h(\theta) \phi(\theta, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_h,$$

که در آن،

$$\tilde{L}_h(\theta) = \sum_{k \in V} s_k e^{i\theta \cdot k}. \quad (2.3)$$

$\tilde{L}_h(\theta)$ را مقدار ویژه L_h می‌نامیم.

برهان.

$$L_h \phi(\theta, x) = \sum_k s_k \phi(\theta, x + kh) = \sum_k s_k e^{i\theta \cdot (x + kh)/h} = \sum_k s_k e^{i\theta \cdot k} e^{i\theta \cdot x/h} = \left(\sum_k s_k e^{i\theta \cdot k} \right) \phi(\theta, x)$$

□

¹Poisson

به بیان دیگر، هر تابع شبکه‌ای، $u_h(x)$ ، تعریف شده روی G_h را می‌توان بر حسب ترکیب خطی^۱ مدهای فوریه، $\phi_h(\theta, x) = e^{\theta x}$ ، به شکل زیر نمایش داد:

$$u_h(x) = \sum_{\theta \in (-\pi, \pi]} c_\theta \phi_h(\theta, x), \quad x \in G_h. \quad (3.3)$$

در این رابطه c_θ ضرایبی ثابت هستند. توجه شود که مدهای فوریه مولد فضای فوریه

$$\mathcal{F}(G_h) = \{\phi_h(\theta, \cdot), \theta \in (-\pi, \pi]\},$$

و همچنین تابع ویژه عملگر گسسته که پیش‌تر تعریف شد، می‌باشند.

مثال ۲.۰.۳. با توجه به لم ۱.۰.۳ مقادیر ویژه عملگر گسسته لاپلاس $L_h = -\Delta_h$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tilde{L}_h(\theta) = \frac{1}{h^2} (4 - (e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2} + e^{-i\theta_1} + e^{-i\theta_2})) = \frac{2}{h^2} (2 - (\cos \theta_1 + \cos \theta_2)).$$

حال که پیش نیازهای لازم برای روش تحلیل همگرایی فوریه بیان شد، می‌توان روش را روی یک معادله مستقل از زمان، در اینجا به طور خاص روی معادله پواسون، توضیح داد. به‌طور خلاصه هدف تحلیل همگرایی فوریه مشخص کردن اثر عملگرهای دخیل در روش چند شبکه‌ای روی مدهای فوریه $\phi(\theta, x)$ است. در^۲ تحلیل بخش همواری می‌توان اثر روش تکراری در حذف بخش نوسانی خطا را بررسی کرد. عملکرد روش دو-شبکه‌ای روی فضای فوریه به تحلیل دو-شبکه‌ای معروف است. در ابتدا تحلیل همواری را بر روی روش تکراری متداول گاوس-سایدل بررسی می‌کنیم سپس تحلیل اثر عملگرهای اصلاحی شبکه درشت و ترکیب این دو تحلیل را جهت ارائه یک تحلیل دو-شبکه‌ای کامل مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به این منظور لازم است بین اجزا نوسانی پایین و بالا تمایز قائل شویم. این دسته بندی با توجه به رویکرد درشت سازی شبکه انجام می‌شود. به عنوان مثال اگر درشت سازی شبکه به گونه‌ای باشد که در همه ابعاد طول گام شبکه درشت دو برابر طول گام‌های شبکه ظریف‌تر بلافاصله قبل از خود باشد، آنگاه فضای با نوسان پایین و بالا به ترتیب با روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$\Theta_{2h} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]^2 \quad \text{فضا با نوسان پایین:}$$

$$\Theta_h \setminus \Theta_{2h} \quad \text{فضا با نوسان بالا:}$$

¹Fourier modes

²Smoothing Analysis

۱.۳ تحلیل همواری S

تحلیل فوریه روی یک روش تکراری حل دستگاه معادلات بر پایه افراز عملگر گسسته A_h است. فرض کنیم $A_h = M_h - N_h$ ، که در روش گاوس-سایدل M_h و N_h به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$M_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \circ & & \\ -1 & 4 & \circ \\ & -1 & \end{bmatrix}, \quad N_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & & \\ \circ & \circ & 1 \\ & \circ & \end{bmatrix}.$$

یک تکرار روش روی معادله خطا به شکل زیر خواهد بود:

$$M_h e_h^k(x) = N_h e_h^{k-1}(x) \quad \text{for } k \geq 1, \quad x \in G_h. \quad (۴.۳)$$

با توجه به معادله (۳.۳)، خطای مرحله j -ام را نیز می‌توان به صورت ترکیب خطی $\phi(\theta, x)$ نمایش داد:

$$e_h^j(x) = \sum_{\theta \in (-\pi, \pi]} c_\theta^j \phi(\theta, x). \quad (۵.۳)$$

مانند بخش قبل به سادگی می‌توان ثابت کرد که $\phi_h(\theta, x)$ ها توابع ویژه عملگرهای M_h و N_h هستند، به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} M_h \phi_h(\theta, x) &= \widehat{M}_h(\theta) \phi_h(\theta, x), \\ N_h \phi_h(\theta, x) &= \widehat{N}_h(\theta) \phi_h(\theta, x). \end{aligned} \quad (۶.۳)$$

لذا از (۵.۳) و (۶.۳) داریم:

$$\widehat{M}_h(\theta) c_\theta^k = \widehat{N}_h(\theta) c_\theta^{k-1}, \quad \text{for } k \geq 1, \quad \theta \in \Theta_h$$

که نتیجه می‌دهد:

$$c_\theta^k = \widehat{M}_h^{-1}(\theta) \widehat{N}_h(\theta) c_\theta^{k-1}.$$

با توجه به $\widehat{S}_h(\theta) = \widehat{M}_h^{-1}(\theta) \widehat{N}_h(\theta)$ ، عامل همواری روش تکراری گاوس-سایدل به صورت زیر تعریف می‌شود:

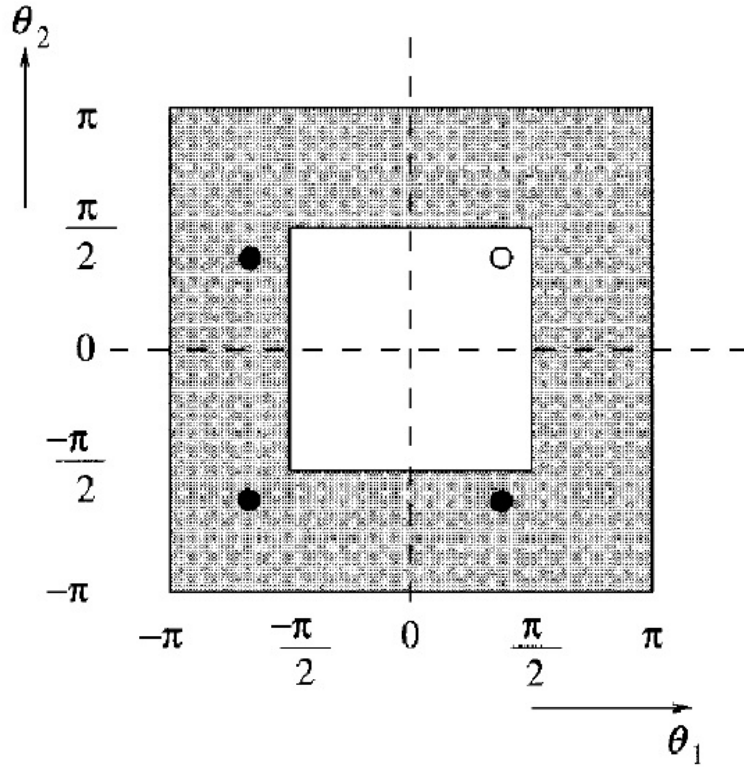
$$\mu = \sup_{\Theta_h \setminus \Theta_h} (\rho(\widehat{S}_h(\theta))).$$

۲.۳ تحلیل اصلاحی شبکه درشت $C_h^{\mathcal{Y}}$

در این روش خطای e_h^k به شکل $e_h^{k+1} = C_h^{\mathcal{Y}} e_h^k$ تبدیل می‌شود که

$$C_h^{\mathcal{Y}} = I_h - I_{\mathcal{V}_h}^h L_{\mathcal{V}_h}^{-1} I_h^{\mathcal{Y}} L_h. \quad (۷.۳)$$

رابطه (۷.۳) به عملگر اصلاحی شبکه درشت معروف است. در اینجا I_h عملگر همانی، L_h و L_{2h} به ترتیب عملگرهای شبکه ظریف و درشت هستند. همچنین عملگرهای تبدیل از شبکه درشت به ظریف و بالعکس به ترتیب با I_h^{2h} و I_{2h}^h تعریف می‌شوند. با توجه به درشت‌سازی استاندارد شبکه، هر مد فوریه متعلق به شبکه ظریف $\varphi_h(\theta, x)$ ، روی مد فوریه شبکه درشت، $\varphi_{2h}(2\theta, x)$ ، منطبق می‌شود شکل ۱.۳. متناظر با هر بسامد



شکل ۱.۳: نوسان پایین (نقطه سفید)

پایین $\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_{2h} = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^2$ ، چهار بسامد زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\theta^{\circ\circ} = (\theta_1, \theta_2), \quad \theta^{11} = (\bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2),$$

$$\theta^{1\circ} = (\bar{\theta}_1, \theta_2), \quad \theta^{\circ 1} = (\theta_1, \bar{\theta}_2),$$

که

$$\bar{\theta}_i = \begin{cases} \theta_i + \pi, & \text{if } \theta_i < 0 \\ \theta_i - \pi, & \text{if } \theta_i \geq 0 \end{cases} \quad (۸.۳)$$

با این فرضیات، فضای فوریه ساخته شده توسط مدهای فوریه فوق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{F}(\theta) = \text{span}\{\varphi_h(\theta^{\circ\circ}, \cdot), \varphi_h(\theta^{11}, \cdot), \varphi_h(\theta^{1\circ}, \cdot), \varphi_h(\theta^{\circ 1}, \cdot)\}, \quad \theta = \theta^{\circ\circ} \in \Theta_{2h}.$$

به ازای هر $\theta^{\circ\circ} \in \Theta_{2h}$ بردار

$$\varphi_h(\theta^{\circ\circ}, \cdot) = (\varphi_h(\theta^{\circ\circ}, \cdot), \varphi_h(\theta^{11}, \cdot), \varphi_h(\theta^{1\circ}, \cdot), \varphi_h(\theta^{\circ 1}, \cdot))$$

را تعریف می‌کنیم. با توجه به توضیحات بالا، خطای تکرار k - ام را می‌توان به شکل $e_h^k(x) = \sum_{\theta \in \Theta_{\gamma_h}} c_{\theta}^k \varphi_h(\theta, x)^T$ بازنویسی کرد که $c_{\theta}^k = (c_{\theta^{\circ\circ}}^k, c_{\theta^{11}}^k, c_{\theta^{1\circ}}^k, c_{\theta^{\circ 1}}^k)$. پس از اعمال روش اصلاحی شبکه درشت، خطا در تکرار $(k+1)$ - ام به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$e_h^{k+1}(x) = \sum_{\theta \in \Theta_{\gamma_h}} \tilde{\mathcal{C}}_h^{\gamma_h}(\theta) c_{\theta}^k \varphi_h(\theta, \cdot)^T.$$

در رابطه فوق $\tilde{\mathcal{C}}_h^{\gamma_h}(\theta)$ ماتریسی 4×4 تعریف شده با عبارت زیر است:

$$\tilde{\mathcal{C}}_h^{\gamma_h}(\theta) = I_4 - \hat{I}_{\gamma_h}^h(\theta) \hat{L}_{\gamma_h}^{-1}(\theta) \tilde{I}_h^{\gamma_h}(\theta) \hat{L}_h(\theta). \quad (9.3)$$

در رابطه (۹.۳)، $\hat{L}_{\gamma_h}(\theta)$ ، $\hat{L}_h(\theta)$ ، $\tilde{I}_h^{\gamma_h}(\theta)$ ، $\hat{I}_{\gamma_h}^h(\theta)$ ، $\hat{L}_h(\theta^{\circ\circ})$ ، $\hat{L}_h(\theta^{11})$ ، $\hat{L}_h(\theta^{1\circ})$ ، $\hat{L}_h(\theta^{\circ 1})$ ماتریس‌های مقادیر ویژه به ازای چهارتایی بسامد تعریف شده در معادله (۸.۳) می‌باشند که در زیر به‌طور دقیق معرفی شده‌اند:

$$\hat{L}_h(\theta) = \begin{bmatrix} \hat{L}_h(\theta^{\circ\circ}) & & & \\ & \hat{L}_h(\theta^{11}) & & \\ & & \hat{L}_h(\theta^{1\circ}) & \\ & & & \hat{L}_h(\theta^{\circ 1}) \end{bmatrix}$$

هر عنصر از ماتریس قطری فوق را می‌توان همانند آنچه در مثال ۲.۰.۳ بیان شد، محاسبه کرد. همچنین برای دیگر ماتریس‌ها داریم:

$$\tilde{I}_h^{\gamma_h}(\theta) = (\tilde{I}_h^{\gamma_h}(\theta^{\circ\circ}), \tilde{I}_h^{\gamma_h}(\theta^{11}), \tilde{I}_h^{\gamma_h}(\theta^{1\circ}), \tilde{I}_h^{\gamma_h}(\theta^{\circ 1})), \quad (10.3)$$

$$\hat{I}_{\gamma_h}^h(\theta) = (\hat{I}_{\gamma_h}^h(\theta^{\circ\circ}), \hat{I}_{\gamma_h}^h(\theta^{11}), \hat{I}_{\gamma_h}^h(\theta^{1\circ}), \hat{I}_{\gamma_h}^h(\theta^{\circ 1}))^T. \quad (11.3)$$

دو رابطه بالا به ترتیب متناظر با عملگرهای درونیاب و تحدید کننده می‌باشند. این تبدیلات بین شبکه‌ای در زیر بخش آینده بطور مفصل مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱.۲.۳ عملگرهای انتقال $I_h^{\gamma_h}$ ، $I_{\gamma_h}^h$

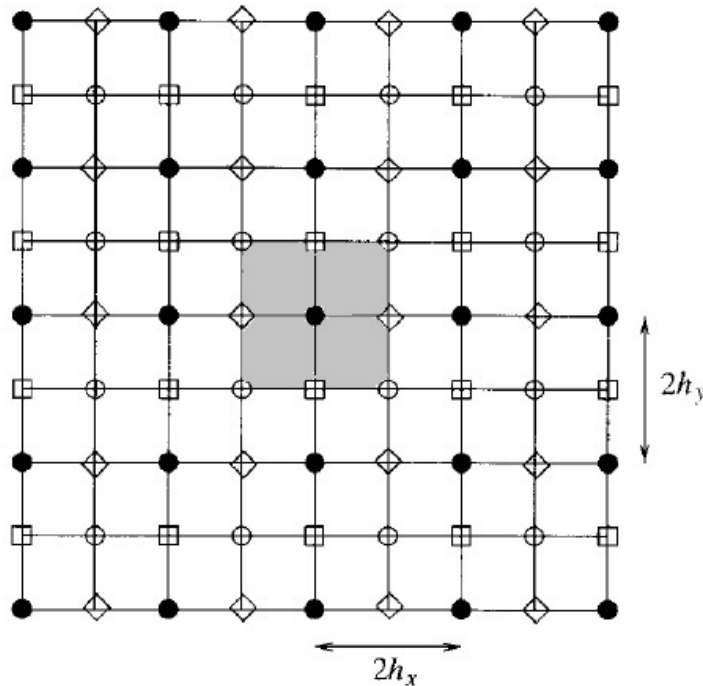
انتخاب عملگرهای انتقال $I_h^{\gamma_h}$ و $I_{\gamma_h}^h$ برای تبدیل شبکه از ظریف به درشت و بالعکس، کاملاً وابسته به نحوه درشت‌سازی شبکه است. که در اینجا حالت استاندارد مورد نظر می‌باشد. چون در این رساله هم از شبکه مستطیلی و هم مثلثی استفاده شده است، لذا عملگرهای انتقالی هر دو شبکه را توضیح می‌دهیم. در این قسمت حالت دو-بعدی این عملگرها را بررسی می‌کنیم. تعمیم به سه بعد در فصل‌های آینده در اولین جایی که مسأله سه بعدی مطرح شده، بحث خواهد شد.

عملگر درونیاب شبکه مستطیلی

عملگر درونیاب I_{2h}^h ، شبکه $2h$ را به شبکه h تصویر می‌کند. یکی از متداول‌ترین روشها برای تعریف I_{2h}^h برای شبکه‌بندی مستطیلی، روش درونیاب دوطولی است:

$$I_{2h}^h \hat{v}_{2h}(x, y) = \begin{cases} \hat{v}_{2h}(x, y) & \text{for } \bullet \\ \frac{1}{4}[\hat{v}_{2h}(x, y+h) + \hat{v}_{2h}(x, y-h)] & \text{for } \square \\ \frac{1}{4}[\hat{v}_{2h}(x+h, y) + \hat{v}_{2h}(x-h, y)] & \text{for } \diamond \\ \frac{1}{4}[\hat{v}_{2h}(x+h, y+h) + \hat{v}_{2h}(x-h, y-h) \\ + \hat{v}_{2h}(x+h, y-h) + \hat{v}_{2h}(x-h, y+h)] & \text{for } \circ \end{cases} \quad (12.3)$$

در شکل ۲.۳ نمادهای استفاده شده در رابطه (۱۲.۳) روی یک شبکه ظریف نشان داده شده‌اند.



شکل ۲.۳: نمادهای استفاده شده جهت درونیاب دو-خطی روی شبکه ظریف مستطیلی.

با توجه به رابطه (۱۲.۳) فرم فشرده ماتریس درونیاب دو-خطی روی شبکه مستطیلی را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$I_{2h}^h = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2h}^h. \quad (13.3)$$

حال می‌توان درایه‌های ماتریس بردار ویژه عملگر درونیاب ارائه شده در رابطه (۱۱.۳) را محاسبه کنیم.

اگر $\alpha \in \{00, 11, 10, 01\}$ باشد آنگاه بنا به لم ۱.۰.۳ داریم:

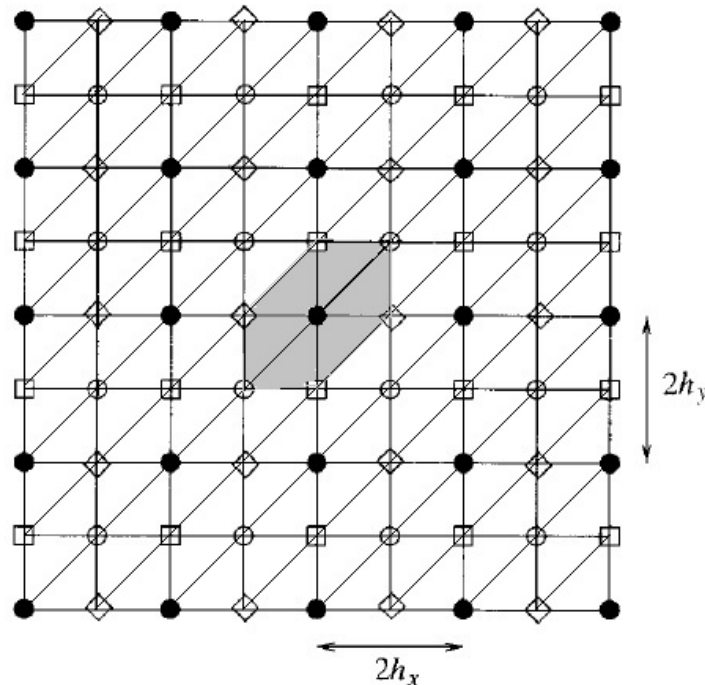
$$\begin{aligned}\hat{I}_{\Psi h}^h(\theta^\alpha) &= \frac{1}{4} \left(e^{-i\theta_1^\alpha} e^{i\theta_2^\alpha} + e^{i\theta_1^\alpha} e^{-i\theta_2^\alpha} + e^{i\theta_1^\alpha} e^{i\theta_2^\alpha} + e^{-i\theta_1^\alpha} e^{-i\theta_2^\alpha} \right. \\ &\quad \left. + 2(e^{-i\theta_1^\alpha} + e^{i\theta_1^\alpha}) + 2(e^{-i\theta_2^\alpha} + e^{i\theta_2^\alpha}) + 4 \right) \\ &= \cos(\theta_1^\alpha) + \cos(\theta_2^\alpha) + \frac{1}{4} (\cos(\theta_1^\alpha + \theta_2^\alpha) + \cos(\theta_1^\alpha - \theta_2^\alpha)) + 1 \\ &= (1 + \cos(\theta_1^\alpha))(1 + \cos(\theta_2^\alpha)).\end{aligned}$$

عملگر درونیاب شبکه مثلثی

ساده‌ترین روش تعریف عملگر درونیاب روی شبکه مثلثی، درونیاب خطی به شکل زیر می‌باشد:

$$I_{\Psi h}^h \hat{v}_{\Psi h}(x, y) = \begin{cases} \hat{v}_{\Psi h}(x, y) & \text{for } \bullet \\ \frac{1}{4} [\hat{v}_{\Psi h}(x, y+h) + \hat{v}_{\Psi h}(x, y-h)] & \text{for } \square \\ \frac{1}{4} [\hat{v}_{\Psi h}(x+h, y) + \hat{v}_{\Psi h}(x-h, y)] & \text{for } \diamond \\ \frac{1}{4} [\hat{v}_{\Psi h}(x+h, y+h) + \hat{v}_{\Psi h}(x-h, y-h)] & \text{for } \circ \end{cases} \quad (14.3)$$

در شکل ۳.۳ نمادهای استفاده شده در رابطه (۱۴.۳) روی یک شبکه ظریف نشان داده



شکل ۳.۳: نمادهای استفاده شده جهت درونیاب خطی روی شبکه ظریف مثلثی.

شده‌اند.

با توجه به رابطه (۱۴.۳) فرم فشرده ماتریس درونیاب دو-خطی روی شبکه مستطیلی را

می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$I_{2h}^h = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \end{bmatrix}_{2h}^h. \quad (15.3)$$

حال می‌توان مانند قبل درایه‌های ماتریس بردار ویژه عملگر درونیاب ارائه شده در رابطه (۱۱.۳) را روی شبکه مثلی محاسبه کرد.

اگر $\alpha \in \{0^\circ, 11^\circ, 1^\circ, 0^\circ\}$ باشد آنگاه بنا به لم ۱.۰.۳ به سادگی می‌توان رابطه زیر را بدست آورد:

$$\hat{I}_{2h}^h(\theta^\alpha) = (1 + \cos(\theta^\alpha))(1 + \cos(\theta_1^\alpha)) - \sin(\theta^\alpha) \sin(\theta_1^\alpha).$$

عملگر تحدید شبکه مستطیلی

عملگر تحدید I_h^{2h} ، شبکه h را به شبکه $2h$ تصویر می‌کند. ساده‌ترین روش تبدیل از شبکه ظریف به شبکه درشت، روش^۱ اینجکشن است که مقدار تابع روی شبکه ظریف را روی مقدار تابع شبکه درشت تصویر می‌کند و مقادیر میانی را که در شبکه درشت وجود ندارند نادیده می‌گیرد. اگرچه این روش یکی از بدیهی‌ترین روش‌ها است که به ذهن می‌رسد ولی از جنبه محاسباتی نتایج خوبی در پی ندارد. یک روش مناسب‌تر، روش^۲ کاملاً وزن دار است. در این روش اگر (x, y) نقطه‌ای روی شبکه درشت باشد، $(x, y) \in \Omega_{2h}$ ، آنگاه برای محاسبه مقدار تابع در این نقطه با فرض داشتن مقادیر تابع در تمام نقاط شبکه ظریف، از میانگین وزن دار نقاط اطراف این نقطه روی شبکه ظریف استفاده می‌کنیم. عملکرد این روش در رابطه نشان داده شده است:

$$\begin{aligned} d_{2h}(x, y) &= I_h^{2h} d_h(x, y) \\ &= \frac{1}{16} [4d_h(x, y) + 2d_h(x+h, y) + 2d_h(x-h, y) + 2d_h(x, y+h) \\ &\quad + 2d_h(x, y-h) + d_h(x+h, y+h) + d_h(x-h, y-h) \\ &\quad + d_h(x+h, y-h) + d_h(x-h, y+h)]. \end{aligned} \quad (16.3)$$

به این رابطه میانگین وزن دار ۹- نقطه‌ای نیز می‌گویند. با توجه به رابطه (۱۶.۳) فرم فشرده ماتریس این روش تحدید به صورت زیر بدست می‌آید:

$$I_h^{2h} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2h}^h. \quad (17.3)$$

¹Injection

²Full weighting

حال می‌توان مانند قبل درایه‌های ماتریس بردار ویژه عملگر تحدید ۹- نقطه‌ای شبکه مستطیلی ارائه شده در رابطه (۱۰.۳) را روی شبکه مثلثی محاسبه کرد. اگر $\alpha \in \{^\circ, 11, 1^\circ, 01\}$ باشد آنگاه بنا به لم ۱.۰.۳ به سادگی می‌توان رابطه زیر را بدست آورد:

$$\tilde{I}_h^h(\theta^\alpha) = \frac{1}{4}(1 + \cos(\theta_1^\alpha))(1 + \cos(\theta_4^\alpha)).$$

عملگر تحدید شبکه مثلثی

اگر برای عملگر تحدید روی شبکه مثلثی از روش کاملاً وزن دار استفاده کنیم فرم فشرده ماتریس زیر را بدست خواهیم آورد [۱۱]:

$$I_h^{\Psi h} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_h^{\Psi h}. \quad (18.3)$$

ولی برای نتایج محاسباتی بهتر و همچنین سازگاری با عملگر درونیاب خطی از روش تحدیدی استفاده می‌کنند که به فرم فشرده ماتریس زیر منجر می‌شود:

$$I_h^{\Psi h} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_h^{\Psi h}. \quad (19.3)$$

در این روش اگر (x, y) نقطه‌ای روی شبکه درشت باشد، $(x, y) \in \Omega_{\Psi h}$ ، آنگاه عملکرد این روش را می‌توان با رابطه زیر نیز بیان کرد:

$$\begin{aligned} d_{\Psi h}(x, y) &= I_h^{\Psi h} d_h(x, y) \\ &= \frac{1}{8} [\Psi d_h(x, y) + d_h(x + h, y) + d_h(x - h, y) + d_h(x, y + h) \\ &\quad + d_h(x, y - h) + d_h(x + h, y + h) + d_h(x - h, y - h)]. \end{aligned} \quad (20.3)$$

در اینجا نیز می‌توان مانند حالات قبل درایه‌های ماتریس بردار ویژه عملگر تحدید ارائه شده در رابطه (۱۰.۳) را روی شبکه مثلثی محاسبه کرد. اگر $\alpha \in \{^\circ, 11, 1^\circ, 01\}$ باشد آنگاه بنا به لم ۱.۰.۳ به سادگی می‌توان رابطه زیر را بدست آورد:

$$\hat{I}_h^h(\theta^\alpha) = \frac{1}{4}(1 + \cos(\theta_1^\alpha))(1 + \cos(\theta_4^\alpha)) - \sin(\theta_1^\alpha) \sin(\theta_4^\alpha).$$

قابل توجه است که رابطه زیر بین فرم فشرده ماتریس‌های دورنیاب و تحدید معرفی شده برقرار است:

$$\begin{aligned} I_h^{\Psi h} &= \frac{1}{4} I_{\Psi h}^h. \\ I_h^{\Psi h} &= \frac{1}{4^n} I_{\Psi h}^h \text{ بعدی می‌توان گفت } n \text{ - شبکه } \end{aligned}$$

۳.۳ تحلیل دو- شبکه‌ای $\mathcal{T}_h^{\forall h}$

اکنون با ترکیب تحلیل همواری فوری و تحلیل اصلاحی شبکه- درشت فوریه ارائه شده، می‌توان تحلیل کامل روش دو- شبکه‌ای را محاسبه کرد. عملگر دو- شبکه‌ای را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{T}_h^{\forall h} = \mathcal{S}_h^{\nu_2} \mathcal{C}_h^{\forall h} \mathcal{S}_h^{\nu_1}.$$

در رابطه فوق $\mathcal{S}$ عملگر همواری، ν_1, ν_2 تعداد تکرارهای عملگر همواری برای پیش و پس از مرحله اصلاحی $\mathcal{C}_h^{\forall h}$ است.

فرض کنیم $c_{\theta}^k \varphi(\theta, \cdot)^T = c_{\theta^{\circ\circ}}^k \varphi(\theta^{\circ\circ}, \cdot) + c_{\theta^{11}}^k \varphi(\theta^{11}, \cdot) + c_{\theta^{1\circ}}^k \varphi(\theta^{1\circ}, \cdot) + c_{\theta^{\circ 1}}^k \varphi(\theta^{\circ 1}, \cdot)$ خطا در مرحله k - ام باشد. پس از اعمال روش دو- شبکه‌ای خواهیم داشت: $\hat{\mathcal{T}}_h^{\forall h}(\theta) c_{\theta}^k \varphi(\theta, \cdot)^T$. که $\hat{\mathcal{T}}_h^{\forall h}(\theta)$ ماتریس مقادیر ویژه عملگر $\mathcal{T}_h^{\forall h}$ به ازای چهارتایی $\{\theta^{\circ\circ}, 11, 1\circ, \circ 1\}$ است که به صورت زیر است:

$$\hat{\mathcal{T}}_h^{\forall h}(\theta) = \begin{bmatrix} \hat{\mathcal{T}}_h^{\forall h}(\theta^{\circ\circ}) & & & \\ & \hat{\mathcal{T}}_h^{\forall h}(\theta^{11}) & & \\ & & \hat{\mathcal{T}}_h^{\forall h}(\theta^{1\circ}) & \\ & & & \hat{\mathcal{T}}_h^{\forall h}(\theta^{\circ 1}) \end{bmatrix} \quad (21.3)$$

سرانجام عامل همگرایی روش دو- شبکه‌ای را می‌توان از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\rho = \sup_{\Theta_{\forall h}} \left(\rho(\hat{\mathcal{T}}_h^{\forall h}(\theta)) \right).$$

فصل ۴

تحلیل حالت نیمه جبری برای روش‌های چند شبکه‌ای موجی

همان‌طور که در فصل پیش گفته شد روش تحلیل فوریه محلی یک روش پیش‌بینی تحلیل همگرایی روش‌های چند شبکه‌ای می‌باشد. ایده اصلی این روش، بررسی رفتاری عملگرهای درگیر در یک روش چند شبکه‌ای روی فضایی ساخته شده با پایه‌هایی از جنس توابع نمایی است. با وجود اینکه این روش همچنان مورد توجه بسیاری از پژوهشگران است ولی در پیش‌بینی تحلیل همگرایی مسائلی با بخش همرفتی^۱ غالب یا مسائل سهموی دچار کاستی‌هایی می‌باشد.

برای مقابله با این کاستی‌ها یک روش تحلیل همگرایی به نام تحلیل حالت نیمه جبری^۲ توسط فریدهوف^۳ در سال ۲۰۱۵ ارائه شد [۳۳]. این تحلیل در اصل گسترشی برای روش LFA متداول می‌باشد. در واقع در این روش بخشی از معادله که روش چند شبکه‌ای روی آن اعمال شده است با همان LFA متداول بررسی می‌شود و بخش دیگر را که غالباً پارامتر زمان است و درگیر روش چند شبکه‌ای نمی‌شود، تنها با محاسبات جبری بررسی می‌گردد. واضح است که این رویکرد تحلیل برای همه روش‌های وابسته به زمان از جمله معادله گرما مورد بررسی ما بسیار مناسب می‌باشد.

^۱Convection

^۲Semi-Algebraic Mode Analysis

^۳Friedhoff

در این فصل روش SAMA را روی معادله گرما به تفصیل مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای حفظ کلیت پیاده‌سازی از روش گسسته سازی المان‌های متناهی استفاده می‌کنیم. این روش در حالت خاص با فرض ماتریس همانی به جای ماتریس جرم منتج به روش تفاضلات متناهی می‌شود. این نتیجه توسط روش تحلیل SAMA و همچنین تحلیل همگرایی بدست آمده از حل عددی به روش چند شبکه‌ای موجی نشان داده و مقایسه شده است. علاوه بر این تحلیل همگرایی عددی و تحلیلی (SAMA) روی دو شبکه متفاوت مستطیلی و مثلثی توضیح داده می‌شوند. بویژه در مورد تحلیل همگرایی شبکه مثلثی در حالتی که مثلث‌بندی منظم و فاقد زاویه قائمه باشد مورد بحث قرار می‌گیرد. روی این شبکه مثلثی درایه‌های ماتریس‌های جرم و سختی که در حالت کلی وابسته به زوایا هستند، محاسبه می‌شوند. مجدداً در جهت حفظ کلیت بحث، هر دو حالت دو بعدی و سه بعدی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در حالت دوبعدی شبکه مثلثی، معادله گرما را روی یک ناحیه متوازی‌الاضلاع اعمال می‌کنیم. این ناحیه با استفاده از المان‌های منشوری^۱ به سه بعد تعمیم می‌دهیم. در این حالت محاسبه درایه‌های ماتریس‌های جرم و سختی برای مثلث‌بندی دلخواه برای اولین بار ارائه می‌شوند. در شبکه مستطیلی تعمیم به سه بعد سر راست‌تر و با استفاده از المان‌های مکعبی انجام خواهد شد. در همه حالات تمام فرم‌های فشرده ماتریسی لازم به‌طور دقیق تعریف می‌شوند. مباحث و نتایج حاصل از این فصل در دو مقاله تحت عنوان‌های زیر ارائه شده‌اند:

1- Semi-Algebraic Mode Analysis For Finite Element Discretisations Of The Heat Equation,

2- Semi-Algebraic Mode Analysis For Multigrid Method On Regular Rectangular And Triangular Grids.

مراحلی که برای اعمال این تحلیل همگرایی نیاز داریم در زیر به‌طور خلاصه بیان شده است:

۱ تعریف دو شبکه مثلثی و مستطیلی روی فضای فوریه،

۲ توضیح تحلیل همواری SAMA برای روش گاوس-سایدل با گسسته‌سازی زمانی کرانک نیکلسون،

۳ اعمال تحلیل روی عملگر متناظر با شبکه درشت،

۴ سرانجام، ترکیب تحلیل‌های گام‌های پیشین جهت دستیابی به یک تحلیل کامل برای شبکه درشت.

¹Prism Elements

۱.۴ بررسی عامل همگرایی روی شبکه دو-بعدی

۱.۱.۴ شبکه مستطیلی

با توجه به شبکه مستطیلی تعریف شده در فصل‌های قبل طول گام‌ها در بعد فضایی یکسان در نظر گرفته می‌شوند. با این فرض، اگر فضای نامتناهی $\mathcal{G}_h = \{\mathbf{x} = \mathbf{k}h = (k_1 h_1, k_2 h_2), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$ را برای تحلیل فوریه داشته باشیم، در اینجا نیز فرض $h_1 = h_2 = h$ را اعمال می‌کنیم. لذا

$$\mathcal{Q}_h = \{\mathbf{x} = \mathbf{k}h = (k_1 h, k_2 h), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}.$$

در روش SAMA مدهای فوریه را تنها روی بعد فضایی مسأله تعریف می‌کنیم، به عبارت دیگر اگر $\theta \in \Theta_h = (-\pi/h, \pi/h]^2$ آنگاه $\varphi_h(\theta, \mathbf{x}) = e^{i\theta \mathbf{x}} = e^{i\theta_1 x_1} e^{i\theta_2 x_2}$. حال توابع شبکه‌ای گسسته را برای یک t ثابت، به صورت ترکیب خطی از مدهای فوریه تعریف می‌کنیم:

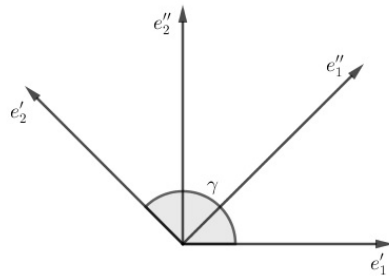
$$u_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{\theta \in \Theta_h} c_\theta(t) \varphi(\theta, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{Q}_h, \quad (1.4)$$

که ضرایب $c_\theta(t)$ ، ضرایبی وابسته به متغیر زمان می‌باشند. مدهای فوریه تعریف شده، مولد فضای فوریه $\mathcal{F}(\mathcal{Q}_h) = \{\varphi_h(\theta, \mathbf{x}), \theta \in \Theta_h\}$ هستند. همچنین مانند فصل قبل، این مدهای فوریه توابع ویژه عملگرهای دخیل در روش دو-شبکه‌ای می‌باشند. فضای با بسامد پایین و بالا به ترتیب با $\Theta_{2h} = (-\pi/2h, \pi/2h]^2$ و $\Theta_h \setminus \Theta_{2h}$ تعریف می‌شوند. همچنین درشت‌سازی استاندارد شبکه، به گونه‌ای که طول گام‌های شبکه بلافاصله پس از یک شبکه ظریف مورد نظر، دو برابر طول گام‌های این شبکه ظریف می‌باشد، $\mathcal{Q}_{2h}$.

۲.۱.۴ شبکه مثلثی

روش تحلیل فوریه، LFA، روی شبکه‌های غیر متعامد توسط گسپر و همکارانش در سال ۲۰۰۹ ارائه شد [۱۶]. در اینجا شبکه فوریه ارائه شده توسط آن‌ها را به گونه‌ای توسعه می‌دهیم که مناسب پیاده‌سازی روش SAMA روی شبکه غیر متعامد باشد. نکته کلیدی در تعریف این شبکه، استفاده از تبدیل فوریه دو-بعدی به گونه‌ای است که مولفه‌های نقاط گره‌ای شبکه بر حسب پایه‌های غیر متعامد تعریف شوند. فرض کنیم $\{e'_1, e'_2\}$ پایه‌ای یکه در $\mathbb{R}^2$ باشد که $0 < \gamma < \pi$ زاویه بین این دو بردار است. همچنین فرض کنیم $\{e''_1, e''_2\}$ پایه‌های متناظر با $\{e'_1, e'_2\}$ باشند به گونه‌ای $\delta_{ij} \cdot e'_i \cdot e'_j = \delta_{ij}$ و $i, j = 1, 2$ دلتای کرونکر است، شکل ۱.۴ را ببینید. مختصات یک نقطه در پایه‌های $\{e_1, e_2\}$ ، $\{e'_1, e'_2\}$ و $\{e''_1, e''_2\}$ را به ترتیب با $y = (y_1, y_2)$ ، $y' = (y'_1, y'_2)$ و $y'' = (y''_1, y''_2)$ نشان می‌دهیم که $\{e_1, e_2\}$ پایه‌های استاندارد هستند. از آنجا که دو پایه جدید معرفی شده متعامد هستند، با تغییر متغیر $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}')$ و $\theta = \mathbf{G}(\theta'')$ استفاده از تبدیل فوریه، عبارت زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\mathbf{G}(\theta'') \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}') = \theta \cdot \mathbf{x} = \theta''_1 x'_1 + \theta''_2 x'_2 = \theta'' \cdot \mathbf{x}'.$$



شکل ۱.۴: پایه‌های متعامد در $\mathbb{R}^2$.

بنابراین شبکه نامتناهی مثلی در جهت بردارهای e'_1 و e'_2 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{G}_h = \{\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2) | x'_i = k_i h_i, k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2\},$$

که $\mathbf{h} = (h_1, h_2)$ در اینجا e'_1 و e'_2 دو بردار یکانی هستند که مشخص کننده جهت دو ضلع از درشت‌ترین مثلث این شبکه، $\mathcal{T}_h$ ، می‌باشند. از گسسته‌سازی $\mathcal{T}$ ، $\mathcal{T}_h$ را بدست می‌آوریم. حال اگر مرزهای $\mathcal{T}_h$ را نادیده بگیریم به شبکه تعریف شده $\mathcal{G}_h$ می‌رسیم. مدهای فوری و فضای فوریه تولید شده توسط آن‌ها به ترتیب با $\varphi_h(\boldsymbol{\theta}'', \mathbf{x}') = e^{i\theta''_1 x'_1} e^{i\theta''_2 x'_2}$ و $\varphi_h(\boldsymbol{\theta}'', \cdot)$ ، $\boldsymbol{\theta}'' \in \Theta''_h$ تعریف می‌شوند که $\boldsymbol{\theta}'' = (\theta''_1, \theta''_2) \in \Theta''_h = (-\pi/h_1, \pi/h_1] \times (-\pi/h_2, \pi/h_2]$ هر تابع شبکه‌ای، همانند آنچه برای شبکه مستطیلی انجام گرفت، به ازای یک t روی $\mathcal{G}_h$ تعریف می‌کنیم:

$$u_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{\boldsymbol{\theta}'' \in \Theta''_h} d_{\boldsymbol{\theta}''}(t) \varphi(\boldsymbol{\theta}'', \mathbf{x}'), \quad \mathbf{x}' \in \mathcal{G}_h, \quad (2.4)$$

که ضرایب $d_{\boldsymbol{\theta}}(t)$ وابسته به متغیر زمان می‌باشند. با فرض درشت‌سازی استاندارد شبکه، شبکه درشت نامتناهی به شکل زیر خواهد بود:

$$\mathcal{G}_{2h} = \{\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2) | x'_i = 2k_i h_i, k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2\}.$$

به علاوه

$$\Theta''_{2h} = (-\pi/2h_1, \pi/2h_1] \times (-\pi/2h_2, \pi/2h_2]$$

و $\Theta''_{2h} \setminus \Theta''_h$ به ترتیب فضا با بسامد پایین و بالا روی شبکه درشت هستند. با توجه به مطالب بالا، می‌توان نتیجه گرفت که ارائه روش SAMA روی شبکه متعامد و غیر متعامد از لحاظ ظاهری یکسان خواهد بود. زیرا در شبکه غیر متعامد، تعریف شبکه و تعریف فضای بسامد با استفاده از تبدیلات مناسب به فضایی متعامد مبدل می‌گردد و می‌توان مدهای فوریه را بر حسب $\boldsymbol{\theta}''$ و $\mathbf{x}'$ تعریف کرد. لذا در ادامه تحلیل همگرایی عددی SAMA را با در نظر گرفتن تعریفی واحد برای هر دو شبکه ادامه می‌دهیم. بدیهی است در تعاریف هر آنچه در ادامه ارائه می‌شود می‌توان با جایگذاری Θ''_h ، $\mathcal{G}_h$ به جای Θ_{2h} ، $\mathcal{Q}_{2h}$ به تحلیل این روش روی شبکه مثلی دست یافت.

۳.۱.۴ تحلیل همواری $S_{h,\tau}$

در این بخش تحلیل همواری SAMA روی روش موجی گاوس-سایدل را شرح می‌دهیم. عملگرهای گسسته فضایی روش موجی B_h و A_h ، به ترتیب عبارتند از: $B_h = M_{B_h} - N_{B_h}$ و $A_h = M_{A_h} - N_{A_h}$. یک تکرار روش موجی روی تابع شبکه‌ای خطا را به ازای $k \geq 1$, $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}_h$ به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$M_{B_h} \dot{e}_h^k(\mathbf{x}, t) + M_{A_h} e_h^k(\mathbf{x}, t) = N_{B_h} \dot{e}_h^{k-1}(\mathbf{x}, t) + N_{A_h} e_h^{k-1}(\mathbf{x}, t), \quad (3.4)$$

که $e_h^k(\cdot, t)$ و $e_h^{k-1}(\cdot, t)$ به ترتیب تابع شبکه‌ای خطا در تکرار $k-1$ و k هستند و همچنین $e_h^k(\mathbf{x}, 0) = 0$. با توجه به رابطه (۱.۴)، می‌توان عبارت $e_h^i(\mathbf{x}, t)$ را در تکرار i -ام به شکل زیر نوشت:

$$e_h^i(\mathbf{x}, t) = \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_h} c_{\boldsymbol{\theta}}^i(t) \varphi(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{Q}_h, \quad t > 0. \quad (4.4)$$

با فرض $\widehat{M}_{B_h}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{M}_{A_h}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{N}_{B_h}(\boldsymbol{\theta})$ و $\widehat{N}_{A_h}(\boldsymbol{\theta})$ به ترتیب به عنوان ماتریس‌های مقادیر ویژه برای هر بسامد $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_h$ و به ازای $k \geq 1$, $t > 0$ داریم:

$$\widehat{M}_{B_h}(\boldsymbol{\theta}) \dot{c}_{\boldsymbol{\theta}}^k(t) + \widehat{M}_{A_h}(\boldsymbol{\theta}) c_{\boldsymbol{\theta}}^k(t) = \widehat{N}_{B_h}(\boldsymbol{\theta}) \dot{c}_{\boldsymbol{\theta}}^{k-1}(t) + \widehat{N}_{A_h}(\boldsymbol{\theta}) c_{\boldsymbol{\theta}}^{k-1}(t), \quad (5.4)$$

حال گسسته‌سازی زمانی کرانک-نیلسون را روی معادله (۵.۴) اعمال می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \widehat{M}_{B_h}(\boldsymbol{\theta}) \frac{c_{\boldsymbol{\theta},i}^k - c_{\boldsymbol{\theta},i-1}^k}{\tau} - \widehat{N}_{B_h}(\boldsymbol{\theta}) \frac{c_{\boldsymbol{\theta},i}^{k-1} - c_{\boldsymbol{\theta},i-1}^{k-1}}{\tau} \\ &= \frac{1}{\tau} \left(-\widehat{M}_{A_h}(\boldsymbol{\theta}) c_{\boldsymbol{\theta},i}^k + \widehat{N}_{A_h}(\boldsymbol{\theta}) c_{\boldsymbol{\theta},i}^{k-1} \right) + \frac{1}{\tau} \left(-\widehat{M}_{A_h}(\boldsymbol{\theta}) c_{\boldsymbol{\theta},i-1}^k + \widehat{N}_{A_h}(\boldsymbol{\theta}) c_{\boldsymbol{\theta},i-1}^{k-1} \right). \end{aligned} \quad (6.4)$$

در رابطه بالا اندیس i مربوط به متغیر زمان است به‌طوری‌که $i = 1, 2, \dots, M$. عبارت بالا را می‌توان به شکل معادله ماتریسی زیر نشان داد:

$$\begin{bmatrix} c_{\boldsymbol{\theta},1}^k \\ c_{\boldsymbol{\theta},2}^k \\ \vdots \\ c_{\boldsymbol{\theta},M}^k \end{bmatrix} = \widetilde{\mathcal{M}}_{h,\tau}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \widetilde{\mathcal{N}}_{h,\tau}(\boldsymbol{\theta}) \begin{bmatrix} c_{\boldsymbol{\theta},1}^{k-1} \\ c_{\boldsymbol{\theta},2}^{k-1} \\ \vdots \\ c_{\boldsymbol{\theta},M}^{k-1} \end{bmatrix},$$

که در آن

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{M}}_{h,\tau}(\boldsymbol{\theta}) = & \begin{bmatrix} \frac{1}{\tau} \widehat{M}_{B_h}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\tau} \widehat{M}_{A_h}(\boldsymbol{\theta}) & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{\tau} \widehat{M}_{B_h}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\tau} \widehat{M}_{A_h}(\boldsymbol{\theta}) & \frac{1}{\tau} \widehat{M}_{B_h}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\tau} \widehat{M}_{A_h}(\boldsymbol{\theta}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{\tau} \widehat{M}_{B_h}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\tau} \widehat{M}_{A_h}(\boldsymbol{\theta}) & \frac{1}{\tau} \widehat{M}_{B_h}(\boldsymbol{\theta}) + \frac{1}{\tau} \widehat{M}_{A_h}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

با جایگذاری $\hat{N}$ به جای $\hat{M}$ ، به سادگی می‌توان ماتریس $\tilde{\mathcal{N}}_{h,\tau}(\theta)$ همانند $\tilde{\mathcal{M}}_{h,\tau}(\theta)$ محاسبه کرد. در رابطه بالا، عبارت $\tilde{\mathcal{M}}_{h,\tau}^{-1}(\theta)\tilde{\mathcal{N}}_{h,\tau}(\theta)$ را به عنوان مقدار ویژه عملگر گاوس-سایدل تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر $\tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}(\theta) = \tilde{\mathcal{M}}_{h,\tau}^{-1}(\theta)\tilde{\mathcal{N}}_{h,\tau}(\theta)$. در حالت خاص، اگر روش گاوس-سایدل متداول را به عنوان روش هموارساز در نظر بگیریم، ماتریس $\tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}(\theta)$ به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}(\theta) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}(\theta^{\circ\circ}) & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}(\theta^{11}) & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}(\theta^{1^\circ}) & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}(\theta^{\circ 1}) \end{bmatrix},$$

لذا عامل همواری این روش به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\mu = \sup_{\Theta_h \setminus \Theta_{\Upsilon_h}} \left(\rho \left(\tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}(\theta) \right) \right). \quad (7.4)$$

۴.۱.۴ تحلیل اصلاحی شبکه درشت $C_{h,\tau}^{\Upsilon h}$

در ادامه تحلیل اصلاحی شبکه درشت ارائه می‌شود. همانند قبل، در اینجا هم اثر عملگر $C_h^{\Upsilon h}$ روی مدهای فوریه را بررسی می‌کنیم. به این منظور عملگر اصلاحی شبکه درشت را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_h^{\Upsilon h} = I_h - I_{\Upsilon_h}^h (B_{\Upsilon_h} D_t + \Sigma_t A_{\Upsilon_h})^{-1} I_h^{\Upsilon h} (B_h D_t + \Sigma_t A_h), \quad (8.4)$$

که D_t و Σ_t عملگرهای متناظر با روش کرانک-نیکلسون و I_h و $I_{\Upsilon_h}^h$ به ترتیب عملگر همانی و عملگر انتقال از شبکه درشت به ظریف و بالعکس، هستند. همچنین $(B_{\Upsilon_h} D_t + \Sigma A_{\Upsilon_h})$ و $(B_h D_t + \Sigma A_h)$ به ترتیب عملگرهای گسسته‌سازی شده شبکه درشت و ظریف می‌باشند. تحلیل شبکه اصلاحی بر پایه تعریف چهار-تایی بسامد است به‌طوری‌که متناظر با هر بسامد با فرکانس پایین $\theta^{\circ\circ} = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_{\Upsilon_h}$ فرکانس‌های $\theta^\alpha = \theta^{\circ\circ} - (\alpha_1 \text{sign}(\theta_1), \alpha_2 \text{sign}(\theta_2)) \frac{\pi}{h}$ را در فضای دو-بعدی تعریف می‌کنیم که $\alpha = \{(\alpha_1, \alpha_2) | \alpha_j \in \{\circ, 1\}, j = 1, 2\}$. همچنین متناظر با این چهار-تایی، چهار-تایی مدهای فوریه $\varphi_h(\theta^\alpha, \cdot)$ که مولد فضای فوریه هستند، را نیز تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{F}_{\Upsilon_h}(\theta) = \text{span}\{\varphi(\theta^{\circ\circ}, \cdot), \varphi(\theta^{11}, \cdot), \varphi(\theta^{1^\circ}, \cdot), \varphi(\theta^{\circ 1}, \cdot)\}.$$

فضای بالا روی عملگر اصلاحی شبکه درشت پایا است، لذا اثر ماتریس $C_h^{\Upsilon h}$ روی مدهای فوریه در فضای $\mathcal{F}_{\Upsilon_h}$ ماتریس 4×4 ، $\hat{C}_h^{\Upsilon h}(\theta)$ خواهد بود که مجدداً در فضای $\mathcal{F}_{\Upsilon_h}$ واقع است. به عبارت دقیق‌تر اگر بردارهای $\varphi(\theta, \cdot) = (\varphi(\theta^{\circ\circ}, \cdot), \varphi(\theta^{11}, \cdot), \varphi(\theta^{1^\circ}, \cdot), \varphi(\theta^{\circ 1}, \cdot))$ و $c_\theta^k(t) = c_{\theta^{\circ\circ}}^k(t), c_{\theta^{1^\circ}}^k(t), c_{\theta^{\circ 1}}^k(t), c_{\theta^{11}}^k(t)$ را در نظر بگیریم آنگاه k مین تکرار رابطه خطا به شکل رابطه

پس از اعمال عملگر اصلاحی شبکه درشت روی بدست می‌آید. $e_h^k(\mathbf{x}, t) = \sum_{\theta \in \Theta_{\Upsilon_h}} c_{\theta}^k(t) \varphi(\theta, \mathbf{x})^T$ این عبارت خطا، عبارت $\sum_{\theta \in \Theta_{\Upsilon_h}} \hat{C}_h^{\Upsilon_h}(\theta) c_{\theta}^k(t) \cdot \varphi(\theta, \cdot)$ را بدست می‌آوریم که $\hat{C}_h^{\Upsilon_h}(bt)$ ماتریسی 4×4 به شکل زیر است:

$$\hat{C}_h^{\Upsilon_h}(\theta) = I_{\Upsilon} - \hat{I}_{\Upsilon_h}^b(\theta) (\hat{B}_{\Upsilon_h}(\theta) D_t + \Sigma \hat{A}_{\Upsilon_h}(\theta))^{-1} \hat{I}_{\Upsilon_h}^{\Upsilon_h}(\hat{B}_h(\theta) D_t + \Sigma \hat{A}_h(\theta)).$$

در رابطه بالا $\hat{A}_{\Upsilon_h}(\theta)$ و $\hat{B}_{\Upsilon_h}(\theta)$ ماتریس‌های 1×1 مقادیر ویژه متناظر با عملگرهای گسسته شده شبکه درشت می‌باشند. باقی عملگرهای دخیل در رابطه بالا، با عبارات زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \hat{A}_h(\theta) &= \text{diag} \left(\hat{A}_h(\theta^{\circ\circ}), \hat{A}_h(\theta^{11}), \hat{A}_h(\theta^{1^{\circ}}), \hat{A}_h(\theta^{\circ^1}) \right), \\ \hat{B}_h(\theta) &= \text{diag} \left(\hat{B}_h(\theta^{\circ\circ}), \hat{B}_h(\theta^{11}), \hat{B}_h(\theta^{1^{\circ}}), \hat{B}_h(\theta^{\circ^1}) \right), \\ \hat{I}_{\Upsilon_h}^b(\theta) &= \left(\hat{I}_{\Upsilon_h}^b(\theta^{\circ\circ}), \hat{I}_{\Upsilon_h}^b(\theta^{11}), \hat{I}_{\Upsilon_h}^b(\theta^{1^{\circ}}), \hat{I}_{\Upsilon_h}^b(\theta^{\circ^1}) \right)^T, \\ \hat{I}_h^{\Upsilon_h}(\theta) &= \left(\hat{I}_h^{\Upsilon_h}(\theta^{\circ\circ}), \hat{I}_h^{\Upsilon_h}(\theta^{11}), \hat{I}_h^{\Upsilon_h}(\theta^{1^{\circ}}), \hat{I}_h^{\Upsilon_h}(\theta^{\circ^1}) \right). \end{aligned}$$

با توجه به گسسته‌سازی زمانی کرانک-نیکلسون، ماتریس‌های $(D_t)_{M \times M}$ و $(\Sigma_t)_{M \times M}$ به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$D_t = \frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma_t = \frac{1}{\Upsilon} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

حال پس از اعمال ماتریس‌های بالا در رابطه خطایی که پیش‌تر تعریف شد، به عبارت کاملاً گسسته برای عملگر اصلاحی شبکه درشت، $\tilde{C}_{h,\tau}^{\Upsilon_h}(\theta)$ می‌رسیم که ماتریسی $4M \times 4M$ تعریف شده با عبارت زیر می‌باشد:

$$\tilde{C}_{h,\tau}^{\Upsilon_h}(\theta) = I_{4M} - \tilde{I}_{\Upsilon_h}^b(\theta) \left(\tilde{\mathcal{K}}_{h,\tau}(\theta) \right)^{-1} \tilde{I}_h^{\Upsilon_h}(\theta) \tilde{\mathcal{K}}_{h,\tau}(\theta),$$

در رابطه بالا $\tilde{\mathcal{K}}_{h,\tau}(\theta)$ ماتریسی با ابعاد $4M \times 4M$ تعریف شده به صورت زیر است:

$$\tilde{\mathcal{K}}_{h,\tau}(\theta) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathcal{K}}_{h,\tau}(\theta^{\circ\circ}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\mathcal{K}}_{h,\tau}(\theta^{11}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mathcal{K}}_{h,\tau}(\theta^{1^{\circ}}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\mathcal{K}}_{h,\tau}(\theta^{\circ^1}) \end{bmatrix},$$

که عناصر قطری این ماتریس عبارتند از:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}_{h,\tau}(\theta^{\alpha}) &= \\ \frac{1}{\Upsilon \tau} &\begin{bmatrix} \Upsilon \hat{B}_h(\theta^{\alpha}) + \tau \hat{A}_h(\theta^{\alpha}) & \dots & \dots & 0 \\ -\Upsilon \hat{B}_h(\theta^{\alpha}) + \tau \hat{A}_h(\theta^{\alpha}) & \Upsilon \hat{B}_h(\theta^{\alpha}) + \tau \hat{A}_h(\theta^{\alpha}) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\Upsilon \hat{B}_h(\theta^{\alpha}) + \tau \hat{A}_h(\theta^{\alpha}) & \Upsilon \hat{B}_h(\theta^{\alpha}) + \tau \hat{A}_h(\theta^{\alpha}) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

به‌طوری‌که $\alpha = \{(\alpha_1, \alpha_2) | \alpha_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2\}$. فرم فوریه نهایی عملگرهای درونیاب و
تحدید کننده نیز به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{I}}_h^h(\theta) &= \left(\hat{\mathcal{I}}_h^h(\theta^{00}) I_M, \hat{\mathcal{I}}_h^h(\theta^{11}) I_M, \hat{\mathcal{I}}_h^h(\theta^{10}) I_M, \hat{\mathcal{I}}_h^h(\theta^{01}) I_M \right)^T, \\ \tilde{\mathcal{I}}_h^h(\theta) &= \left(\hat{\mathcal{I}}_h^h(\theta^{00}) I_M, \hat{\mathcal{I}}_h^h(\theta^{11}) I_M, \hat{\mathcal{I}}_h^h(\theta^{10}) I_M, \hat{\mathcal{I}}_h^h(\theta^{01}) I_M \right).\end{aligned}$$

۵.۱.۴ تحلیل دو-شبکه‌ای $\mathcal{T}_{h,\tau}^h$

حال با در دسترس داشتن تحلیل همواری و تحلیل اصلاحی شبکه درشت، می‌توان با ترکیب آن‌ها، تحلیل دو-شبکه‌ای SAMA را به‌طور کامل ارائه کرد. همان‌طور که پیش‌تر نیز بیان شد، عملگر دو-شبکه‌ای با $\mathcal{T}_{h,\tau}^h = \mathcal{S}_{h,\tau}^{\nu_2} \mathcal{C}_{h,\tau}^h \mathcal{S}_{h,\tau}^{\nu_1}$ تعریف می‌شود که $\mathcal{S}_{h,\tau}$ عملگر همواری به‌گونه‌ای است که تعداد تکرارهای آن در مراحل پیش و پس از مرحله اصلاحی شبکه درشت با ν_1 و ν_2 نمایش داده می‌شوند. همچنین عملگر اصلاحی شبکه درشت است. حال فرض کنیم که خطا مرحله k ام با عبارت $c_\theta^k(t) \cdot \varphi(\theta, \cdot)^T$ بیان شود. حال پس از اعمال روش دو-شبکه‌ای و گسسته‌سازی زمانی روی این عبارت خطا به رابطه $\tilde{\mathcal{T}}_{h,\tau}^h(\theta) c_\theta^k(t) \cdot \varphi(\theta, \cdot)^T$ می‌رسیم. در این عبارت $\tilde{\mathcal{T}}_{h,\tau}^h(\theta)$ یک ماتریس $4M \times 4M$ تعریف شده به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\tilde{\mathcal{T}}_{h,\tau}^h(\theta) = \tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}^{\nu_2}(\theta) \left(I_{4M} - \tilde{\mathcal{I}}_h^h(\theta) \left(\tilde{\mathcal{K}}_{h,\tau}^h(\theta) \right)^{-1} \tilde{\mathcal{I}}_h^h(\theta) \tilde{\mathcal{K}}_{h,\tau}^h(\theta) \right) \tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}^{\nu_1}(\theta).$$

در نهایت عامل همگرایی روش دو-شبکه‌ای SAMA به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho = \sup_{\theta \in \Theta_{h,\tau}} \left(\rho \left(\tilde{\mathcal{T}}_{h,\tau}^h(\theta) \right) \right). \quad (9.4)$$

۶.۱.۴ نتایج تحلیل دو-بعدی SAMA و مقایسه با عامل همگرایی مجانبی عددی

در این بخش برای مقایسه تحلیل همگرایی SAMA و عامل همگرایی مجانبی روش چند-شبکه‌ای، چرخه-W دو مثال ارائه می‌کنیم. در مثال اول شبکه مستطیلی را در نظر می‌گیریم و تمام فرم فشرده ماتریس‌های درگیر در روش چند-شبکه‌ای را محاسبه می‌کنیم. شبکه مثلی در مثال دوم با در نظر گرفتن یک متوازی‌الاضلاع متشکل از دو مثلث بررسی می‌شود. در این حالت نیز محاسبه فرم فشرده ماتریس‌های مورد نیاز به تفصیل بیان می‌شود.

مثال ۱.۱.۴. در این مثال معادله گرمای زیر را روی ناحیه $\Omega = [0, 2]^2$ با مرز دیریکله در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned}D_t u(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) &= f(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \text{on } \partial\Omega, \quad t > 0, \\ u(\mathbf{x}, 0) &= g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega,\end{aligned} \quad (10.4)$$

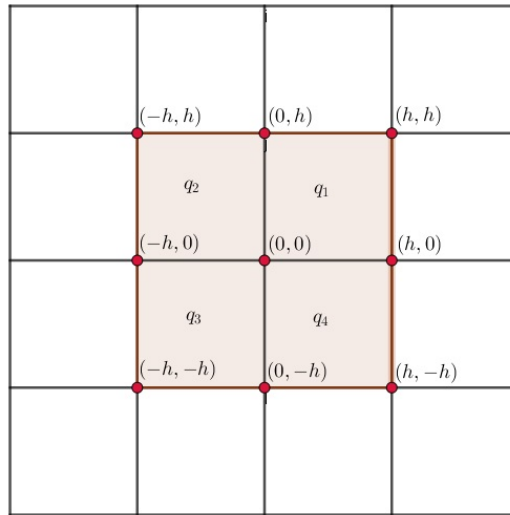
شرط اولیه و بردار $f(x, t)$ به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که در معادله زیر صدق کنند:

$$u(x_1, x_2, t) = t^2 \sin\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{2}\right).$$

با استفاده از گسسته‌سازی المان‌های متناهی با استفاده از پایه‌های دو-خطی $a+bx+cy+dxy$ ، روی شبکه فضایی مستطیلی منظم، فرم گسسته معادله بالا را بدست می‌آوریم:

$$B_h \dot{\mathbf{u}}_h(t) + A_h \mathbf{u}_h(t) = F_h(t), \quad \mathbf{u}_h(0) = g_h, \quad t > 0.$$

برای محاسبه ماتریس جرم B_h و ماتریس سختی A_h شبکه‌ای ساده مانند شکل ۲.۴ را در نظر می‌گیریم. با توجه به توضیحات فصل ۱ فرم فشرده ماتریس‌های A_h و B_h برای یک نقطه درونی شبکه به صورت زیر خواهند بود:



شکل ۲.۴: شبکه مستطیلی مناسب برای محاسبه فرم فشرده ماتریس‌های روش المان‌های متناهی

$$B_h = \begin{bmatrix} \int_{q_2} \varphi_{-h,h} \varphi_{0,0} dx & \int_{q_2 \cup q_1} \varphi_{0,h} \varphi_{0,0} dx & \int_{q_1} \varphi_{h,h} \varphi_{0,0} dx \\ \int_{q_2 \cup q_3} \varphi_{-h,0} \varphi_{0,0} dx & \int_{\bigcup_{i=1}^4 q_i} \varphi_{0,0} \varphi_{0,0} dx & \int_{q_1 \cup q_4} \varphi_{h,0} \varphi_{0,0} dx \\ \int_{q_3} \varphi_{-h,-h} \varphi_{0,0} dx & \int_{q_3 \cup q_4} \varphi_{0,-h} \varphi_{0,0} dx & \int_{q_4} \varphi_{h,-h} \varphi_{0,0} dx \end{bmatrix},$$

$$A_h = \begin{bmatrix} \int_{q_2} \nabla \varphi_{-h,h} \nabla \varphi_{0,0} dx & \int_{q_2 \cup q_1} \nabla \varphi_{0,h} \nabla \varphi_{0,0} dx & \int_{q_1} \nabla \varphi_{h,h} \nabla \varphi_{0,0} dx \\ \int_{q_2 \cup q_3} \nabla \varphi_{-h,0} \nabla \varphi_{0,0} dx & \int_{\bigcup_{i=1}^4 q_i} \nabla \varphi_{0,0} \nabla \varphi_{0,0} dx & \int_{q_1 \cup q_4} \nabla \varphi_{h,0} \nabla \varphi_{0,0} dx \\ \int_{q_3} \nabla \varphi_{-h,-h} \nabla \varphi_{0,0} dx & \int_{q_3 \cup q_4} \nabla \varphi_{0,-h} \nabla \varphi_{0,0} dx & \int_{q_4} \nabla \varphi_{h,-h} \nabla \varphi_{0,0} dx \end{bmatrix}$$

حال به محاسبه پایه‌های $\varphi_{i,j}$ که $i, j \in \{-h, 0, h\}$ می‌پردازیم. برای محاسبه هر $\varphi_{i,j}$ به چهارنقطه، متناظر با چهار مجهول چند جمله‌ای دو-خطی در نظر گرفته شده، نیاز داریم. توجه می‌کنیم که $\varphi_s(x_t) = \delta_{st}$. به عنوان مثال برای محاسبه $\varphi_{h,h}$ روی q_1 نقاط درگیر عبارتند از $(0,0), (0,h), (h,h), (h,0)$ و در بقیه نقاط $\varphi_{h,h} = 0$. لذا از حل دستگاه

زیر $\varphi_{h,h}$ محاسبه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & h & h & h^2 \\ 1 & h & 0 & 0 \\ 1 & 0 & h & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi_{h,h}|_{q_1} = \frac{1}{h^2} xy \quad (11.4)$$

به عبارت دیگر:

$$\varphi_{h,h} = \frac{1}{h^2} \begin{Bmatrix} xy & q_1 \\ 0 & q_2 \cup q_3 \cup q_4 \end{Bmatrix}.$$

به همین ترتیب بقیه پایه‌ها نیز محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \varphi_{h,0} &= \frac{1}{h^2} \begin{Bmatrix} x(h-y) & q_1 \\ x(h+y) & q_4 \end{Bmatrix}, & \varphi_{-h,0} &= \frac{1}{h^2} \begin{Bmatrix} x(y-h) & q_2 \\ -x(h+y) & q_3 \end{Bmatrix}, & \varphi_{0,h} &= \frac{1}{h^2} \begin{Bmatrix} y(h-x) & q_1 \\ y(h+x) & q_2 \end{Bmatrix} \\ \varphi_{0,-h} &= \frac{1}{h^2} \begin{Bmatrix} -y(h+x) & q_3 \\ y(x-h) & q_4 \end{Bmatrix}, & \varphi_{-h,-h} &= \frac{1}{h^2} \begin{Bmatrix} xy & q_3 \\ 0 & q'_2 \end{Bmatrix}, & \varphi_{h,-h} &= \frac{1}{h^2} \begin{Bmatrix} -xy & q_4 \\ 0 & q'_4 \end{Bmatrix}, \\ \varphi_{-h,h} &= \frac{1}{h^2} \begin{Bmatrix} -xy & q_2 \\ 0 & q'_2 \end{Bmatrix}, & \varphi_{0,0} &= \frac{1}{h^2} \begin{Bmatrix} -hx - hy + xy + h^2 & q_1 \\ hx - hy - xy + h^2 & q_2 \\ hx + hy + xy + h^2 & q_3 \\ -hx + hy - xy + h^2 & q_4 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

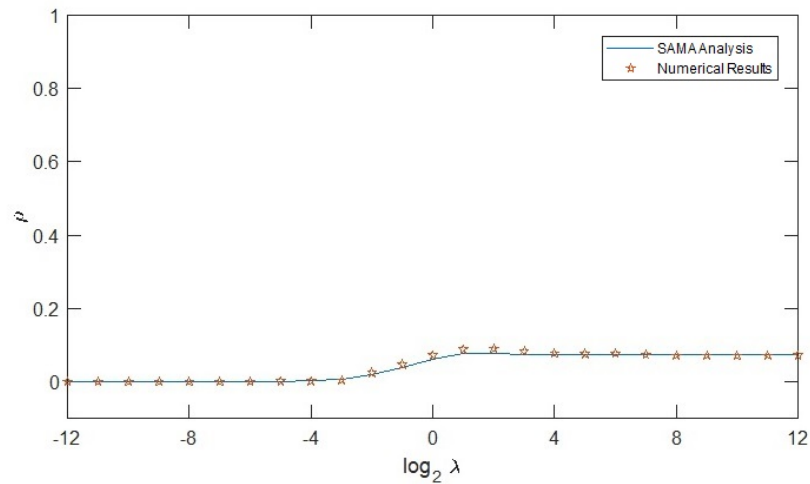
به‌طوری‌که $\{q'_i\} = \{\cup_{i=1}^4 q_i\} \setminus \{q_i\}$. حال با محاسبه انتگرال‌های دو-بعدی، شکل فرم فشرده ماتریس B_h و A_h به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$B_h = \frac{h^2}{36} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_h = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

برای تبدیل شبکه از ظریف به درشت و برعکس، از عملگرهای معرفی شده در فصل ۳ استفاده می‌کنیم. فرم فشرده ماتریس عملگر تحدید کننده I_h^{2h} عبارت است از:

$$I_h^{2h} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

با استفاده از رابطه $I_h^{2h} = \frac{1}{4} I_{\frac{h}{2}}^h$ عملگر درونیاب $I_{\frac{h}{2}}^h$ به سادگی در دسترس خواهد بود. در شکل ۳.۴، نتایج پیش‌بینی عامل همگرایی توسط روش SAMA و روش عددی محاسبه عامل همگرایی مجانبی، با هم مقایسه شده‌اند. در تحلیل عددی عامل همگرایی، نرخ همگرایی



شکل ۳.۴: مقایسه عامل همگرایی عددی و تحلیلی روی شبکه مستطیلی در دو بعد.

مجانبی روش چند-شبکه‌ای موجی چرخه- W در تکرارهای به اندازه کافی بالا تا جایی که نرم باقیمانده بسیار کوچک شود، $10^{-10} < \|r\|$ ، در نظر گرفته شده است. اضافه بر این، برای شرط اولیه روش عددی از برداری تصادفی و بردار سمت راست برابر با بردار صفر در نظر گرفته شده است. نتایج هر دو روش بر حسب تغییرات پارامتر $\lambda = \tau/h^2$ از 2^{-12} تا 2^{12} در شکل ۳.۴ نمایش داده شده است. در اینجا گام زمانی را ثابت و برابر با مقدار $M = 32$ در نظر گرفته‌ایم. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در شکل ۳.۴ نتایج حاصل از روش عددی و روش پیش‌بینی کننده SAMA بسیار به هم نزدیک می‌باشند که نشان‌دهنده قابلیت بالا ی روش SAMA برای پیش‌بینی عامل همگرایی معادلات وابسته به زمان می‌باشد.

$\tau \backslash B$		0.04	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001
bilinear basis	Mass	0.0710 (0.0704)	0.0702 (0.0730)	0.0681 (0.0761)	0.0646 (0.0776)	0.0576 (0.0729)	0.0425 (0.0583)
	Identity	0.0724 (0.0711)	0.0728 (0.0732)	0.0743 (0.0765)	0.0776 (0.0782)	0.0779 (0.0721)	0.0624 (0.0549)
linear basis	Mass	0.2697 (0.2439)	0.2670 (0.2506)	0.2616 (0.2548)	0.2510 (0.2596)	0.2283 (0.2445)	0.1752 (0.1853)
	Identity	0.2704 (0.2368)	0.2682 (0.2412)	0.2637 (0.2483)	0.2549 (0.2503)	0.2348 (0.2391)	0.1818 (0.1863)

جدول ۱.۴: مقایسه عامل همگرایی دو-شبکه‌ای SAMA با عامل همگرایی مجانبی چرخه- W (درون پرانتز) به ازای مقادیر مختلف τ روی شبکه فضایی دو-بعدی $64 \times 64 \times 32$.

در جدول ۱.۴، نتایج عددی عامل همگرایی به دو روش SAMA حل عددی با روش موجی

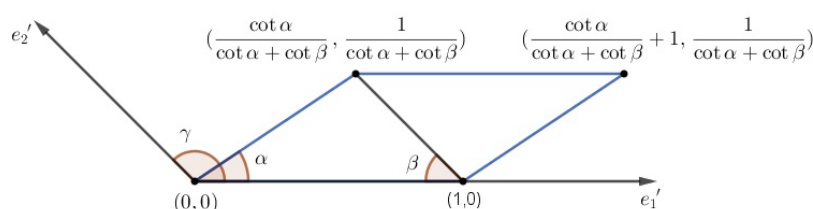
چند- شبکه‌ای چرخه- W ، به ازای مقادیر مختلف τ و شبکه ثابت $32 \times 64 \times 64$ ارائه شده است. نتایج ردیف اول و دوم جدول متناظر با پایه‌های دو-خطی مثال اول می‌باشد. در ردیف اول ماتریس B برابر با ماتریس جرم ارائه شده در روش المان‌های متناهی و در ردیف دوم این ماتریس برابر با ماتریس همانی قرار داده شده است که منجر به نتایج روش تفاضلات متناهی می‌شود. نکته جالب توجه این است که با اعمال همین تغییر در روش SAMA، این روش نیز نتایجی منطبق بر عامل همگرایی روش تفاضلات متناهی را بدست می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود انتخاب روش گسسته‌سازی تفاضلات متناهی یا المان‌های متناهی چندان تاثیری در عامل همگرایی ندارد.

مثال ۲.۱.۴. در این مثال معادله گرما را روی ناحیه متوازی‌الاضلاع نشان داده شده در شکل ۴.۴ حل می‌کنیم. برای دقیق‌تر مشخص کردن ناحیه α و β را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که در رابطه زیر صدق کنند:

$$\beta = \pi - \gamma, \quad \alpha < \gamma,$$

شرایط مرزی و اولیه را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که در جواب دقیق معادله صدق کنند:

$$u(x_1, x_2, t) = t^2 x_2 (x_2 - x_1 \tan \alpha) (x_2 - x_1 \tan \alpha + \tan \alpha) \left(x_2 - \frac{1}{\cot \alpha + \cot \beta} \right).$$

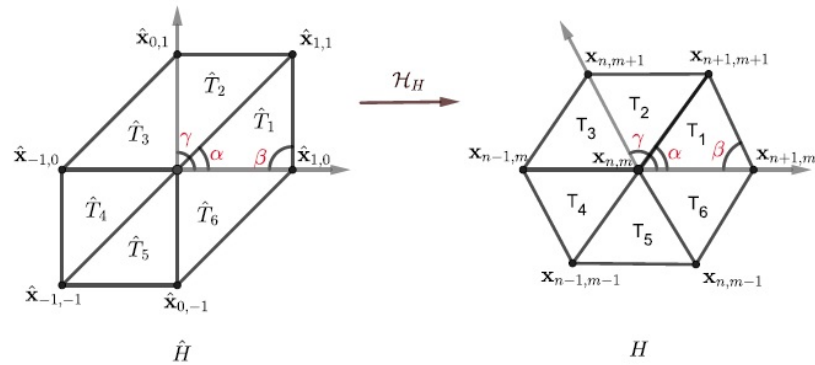


شکل ۴.۴: درشت‌ترین شبکه در نظر گرفته شده برای ناحیه متوازی‌الاضلاع.

در اینجا از گسسته‌سازی المان‌های متناهی با پایه‌های خطی استفاده می‌کنیم تا به فرم گسسته معادله گرما برسیم:

$$B_h \dot{\mathbf{u}}_h(t) + A_h \mathbf{u}_h(t) = F_h(t), \quad \mathbf{u}_h(0) = g_h, \quad t > 0. \quad (12.4)$$

ظریف کردن ناحیه محدود به متوازی‌الاضلاع به گونه‌ای انجام می‌شود که در هر مثلث، مراکز اضلاع مثلث پشت سر هم به یکدیگر متصل شوند. فرض کنیم $x_{n,m}$ در شکل سمت راست ۵.۴ یک نقطه درونی متوازی‌الاضلاع باشد مانند مثال قبل، در اینجا نیز فرم فشرده ماتریس‌های



شکل ۵.۴: شش ضلعی ایجاد شده حول یک نقطه درونی شبکه (شکل سمت راست) و نگاشت آفین متناظر با آن (شکل سمت چپ).

مورد نیاز را حول این نقطه به عنوان نمونه محاسبه می کنیم. به طور کلی متناظر با پایه های خطی فرم فشرده ماتریس های هفت نقطه ای برای A_h و B_h به شکل زیر حاصل می شوند:

$$B = \begin{bmatrix} \circ & \int_{T_\Psi \cup T_\Upsilon} \phi_{n,m+1} \cdot \phi_{n,m} dx & \int_{T_\Gamma \cup T_\Upsilon} \phi_{n+1,m+1} \cdot \phi_{n,m} dx \\ \int_{T_\Psi \cup T_\Upsilon} \phi_{n-1,m} \cdot \phi_{n,m} dx & \int_{\mathcal{E}} \phi_{n,m} \cdot \phi_{n,m} dx & \int_{T_\Gamma \cup T_\Phi} \phi_{n+1,m} \cdot \phi_{n,m} dx \\ \int_{T_\Phi \cup T_\Delta} \phi_{n-1,m-1} \cdot \phi_{n,m} dx & \int_{T_\Delta \cup T_\Phi} \phi_{n,m-1} \cdot \phi_{n,m} dx & \circ \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} \circ & \int_{T_\Psi \cup T_\Upsilon} \nabla \phi_{n,m+1} \cdot \nabla \phi_{n,m} dx & \int_{T_\Gamma \cup T_\Upsilon} \nabla \phi_{n+1,m+1} \cdot \nabla \phi_{n,m} dx \\ \int_{T_\Psi \cup T_\Upsilon} \nabla \phi_{n-1,m} \cdot \nabla \phi_{n,m} dx & \int_{\mathcal{E}} \nabla \phi_{n,m} \cdot \nabla \phi_{n,m} dx & \int_{T_\Gamma \cup T_\Phi} \nabla \phi_{n+1,m} \cdot \nabla \phi_{n,m} dx \\ \int_{T_\Phi \cup T_\Delta} \nabla \phi_{n-1,m-1} \cdot \nabla \phi_{n,m} dx & \int_{T_\Delta \cup T_\Phi} \nabla \phi_{n,m-1} \cdot \nabla \phi_{n,m} dx & \circ \end{bmatrix}.$$

با دنبال کردن روندی مشابه مثال قبل، پایه های خطی زیر را بدست می آوریم:

$$\varphi_{h,\circ} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} x-y & T_\Gamma \\ x & T_\Phi \end{bmatrix}, \quad \varphi_{-h,\circ} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -x & T_\Psi \\ -x+y & T_\Phi \end{bmatrix}, \quad \varphi_{\circ,h} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -x+y & T_\Upsilon \\ y & T_\Psi \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{\circ,-h} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} x-y & T_\Delta \\ -y & T_\Phi \end{bmatrix}, \quad \varphi_{h,h} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} y & T_\Gamma \\ x & T_\Upsilon \end{bmatrix}, \quad \varphi_{-h,-h} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -y & T_\Phi \\ -x & T_\Delta \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{\circ,\circ} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} -x+h & T_\Gamma \\ -y+h & T_\Upsilon \\ x-y+h & T_\Psi \\ x+h & T_\Phi \\ y+h & T_\Delta \\ -x+y+h & T_\Phi \end{bmatrix}.$$

فرض کنیم H ، یک شش-ضلعی متشکل از شش مثلث یکسان همان طور که در شکل ۵.۴ نشان داده شده است، باشد. این شش-ضلعی محمل پایه $\phi_{n,m}$ متناظر با نقطه مرکزی $\mathbf{x}_{n,m}$ می باشد. رئوس این شش-ضلعی را با $\mathbf{x}_{n+1,m}, \mathbf{x}_{n-1,m}, \mathbf{x}_{n,m+1}, \mathbf{x}_{n,m-1}, \mathbf{x}_{n+1,m+1}, \mathbf{x}_{n-1,m-1}$ مشخص می کنیم (شکل سمت چپ ۵.۴). همچنین شش-ضلعی $\hat{H}$ را که تصویر شش-ضلعی H تحت نگاشت آفین $\mathcal{H}_H$ است، با رئوس $\hat{\mathbf{x}}_{1,\circ}, \hat{\mathbf{x}}_{-1,\circ}, \hat{\mathbf{x}}_{\circ,1}, \hat{\mathbf{x}}_{\circ,-1}, \hat{\mathbf{x}}_{1,1}, \hat{\mathbf{x}}_{-1,-1}$ مشخص می کنیم

که $\mathbf{x}_{\circ,\circ}$ نیز مرکز آن می‌باشد. شکل کلی این نگاشت به صورت $\mathbf{x} = \mathcal{H}_H(\hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{D}_H \hat{\mathbf{x}} + d_H$ است به طوری که هر نقطه متعلق به شش-ضلعی $\hat{H}$ تحت این نگاشت به نقطه‌ای روی شش-ضلعی H تصویر می‌شود. به عبارت دیگر $\mathcal{H}_H(\hat{\mathbf{x}}_{k,l}) = \mathbf{x}_{n+k,m+l}$ و داریم:

$$\mathcal{D}_H = \begin{bmatrix} x_{n+1,m} - x_{n,m} & x_{n+1,m+1} - x_{n+1,m} \\ y_{n+1,m} - y_{n,m} & y_{n+1,m+1} - y_{n+1,m} \end{bmatrix} \quad d_H = \begin{bmatrix} x_{n,m} \\ y_{n,m} \end{bmatrix},$$

که $(x_{k,l}, y_{k,l})$ مختصات نقطه $\mathbf{x}_{k,l}$ می‌باشد. همچنین پایه $\hat{\phi}$ متعلق به ناحیه $\hat{H}$ توسط نگاشت آفین تعریف شده به پایه ϕ متعلق به H و با همان درجه آزادی تصویر می‌شود. به عبارت دیگر $\hat{\phi}_{k,l} = \phi_{n+k,m+l} \circ \mathcal{H}$ با این فرضیات و اعمال تغییر متغیر متناظر با نگاشت آفین $\mathcal{H}$ ، شکل فرم فشرده ماتریس A_h به صورت زیر خواهد بود:

$$A_h = |\det \mathcal{D}_H| \begin{bmatrix} \circ & a_{\circ,1} & a_{1,1} \\ a_{-1,\circ} & a_{\circ,\circ} & a_{1,\circ} \\ a_{-1,-1} & a_{\circ,-1} & \circ \end{bmatrix},$$

که

$$\begin{aligned} a_{\circ,1} &= \int_{\hat{T}_\gamma} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,1} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{T}_\gamma} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,1} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}, \\ a_{1,1} &= \int_{\hat{T}_1} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,1} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{T}_\gamma} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,1} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}, \\ a_{-1,\circ} &= \int_{\hat{T}_\gamma} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,\circ} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{T}_\gamma} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,\circ} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}, \\ a_{1,\circ} &= \sum_{i=1}^6 \int_{\hat{T}_i} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}, \\ a_{1,\circ} &= \int_{\hat{T}_1} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,\circ} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{T}_\gamma} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,\circ} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}, \\ a_{-1,-1} &= \int_{\hat{T}_\gamma} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,-1} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{T}_\delta} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,-1} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}, \\ a_{\circ,-1} &= \int_{\hat{T}_\delta} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,-1} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{T}_\gamma} (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,-1} \cdot (\mathcal{D}_H^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

با فرض

$$C_H = \mathcal{D}_H^{-1} (\mathcal{D}_H^{-1})^t = \begin{bmatrix} c_{11}^H & c_{12}^H \\ c_{21}^H & c_{22}^H \end{bmatrix},$$

فرم فشرده ماتریس A_h به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$A_h = |\det \mathcal{D}_H| \left(c_{11}^H \hat{A}_{xx} + (c_{12}^H + c_{21}^H) \hat{A}_{xy} + c_{22}^H \hat{A}_{yy} \right),$$

که

$$\hat{A}_{xx} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_{xy} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}_{yy} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

در رابطه بالا $\hat{A}_{xx}$, $\hat{A}_{xy}$ و $\hat{A}_{yy}$ به ترتیب فرم فشرده ماتریس‌های متناظر با $-\partial_{yy}$ ، $-\partial_{xy}$ و $-\partial_{xx}$ می‌باشند. در حالت خاص $\beta = \pi/2$ یا در جهت مقابل $\alpha = \pi/2$ ، فرم فشرده ماتریس A_h همان فرم فشرده ماتریس حاصل از گسسته‌سازی پنج نقطه‌ای تفاضلات متناهی در شبکه مستطیلی خواهد بود،

$$A_h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}.$$

ضرایب فرم فشرده ماتریس B_h روی ناحیه H را نیز می‌توان از روابط زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} s_{0,1} &= |\det \mathcal{D}_H| \left(\int_{\hat{T}_1} \hat{\phi}_{0,1} \hat{\phi}_{0,0} ds + \int_{\hat{T}_4} \hat{\phi}_{0,1} \hat{\phi}_{0,0} ds \right), \\ s_{-1,0} &= |\det \mathcal{D}_H| \left(\int_{\hat{T}_4} \hat{\phi}_{-1,0} \hat{\phi}_{0,0} ds + \int_{\hat{T}_5} \hat{\phi}_{-1,0} \hat{\phi}_{0,0} ds \right), \\ s_{1,1} &= |\det \mathcal{D}_H| \left(\int_{\hat{T}_4} \hat{\phi}_{1,1} \hat{\phi}_{0,0} ds + \int_{\hat{T}_5} \hat{\phi}_{1,1} \hat{\phi}_{0,0} ds \right), \\ s_{1,0} &= |\det \mathcal{D}_H| \left(\int_{\hat{T}_1} \hat{\phi}_{1,0} \hat{\phi}_{0,0} ds + \int_{\hat{T}_5} \hat{\phi}_{1,0} \hat{\phi}_{0,0} ds \right), \\ s_{0,0} &= |\det \mathcal{D}_H| \left(\sum_{i=1}^6 \int_{\hat{T}_i} \hat{\phi}_{0,0} \hat{\phi}_{0,0} ds \right), \\ s_{0,-1} &= |\det \mathcal{D}_H| \left(\int_{\hat{T}_5} \hat{\phi}_{0,-1} \hat{\phi}_{0,0} ds + \int_{\hat{T}_6} \hat{\phi}_{0,-1} \hat{\phi}_{0,0} ds \right), \\ s_{-1,-1} &= |\det \mathcal{D}_H| \left(\int_{\hat{T}_6} \hat{\phi}_{-1,-1} \hat{\phi}_{0,0} ds + \int_{\hat{T}_8} \hat{\phi}_{-1,-1} \hat{\phi}_{0,0} ds \right), \end{aligned}$$

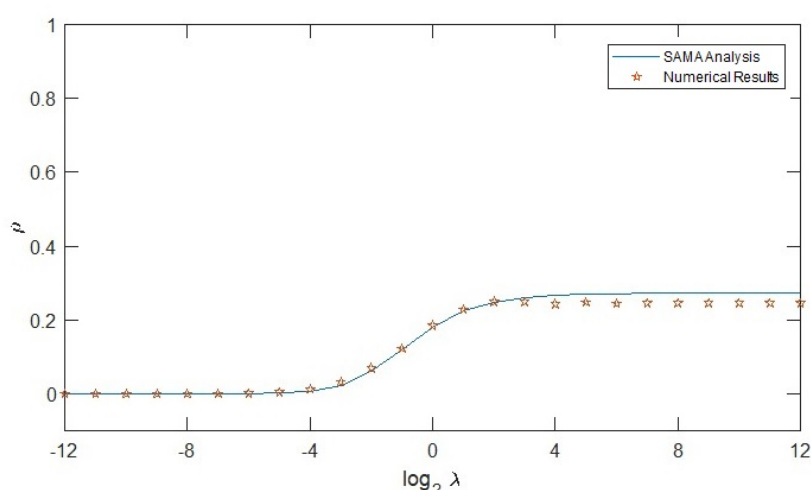
با نرمال سازی مولفه‌های این فرم فشرده ماتریس با عبارت $|\det \mathcal{D}_H|$ ، فرم فشرده ماتریس ثابت زیر برای هر نوع مثلث‌بندی شبکه بدست می‌آید:

$$B_h = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & \end{bmatrix}.$$

در این حالت فرم فشرده ماتریس‌های تبدیل شبکه نیز به صورت زیر خواند بود:

$$I_h^{\chi h} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \end{bmatrix}, \quad I_h^{\chi h} = \frac{1}{4} I_{\chi h}^h.$$

نتایج مقایسه‌ای دو روش SAMA و روش چند-شبکه‌ای موجی چرخه- W در شکل ۶.۴ به ازای $\lambda = \tau/h^2$ از 2^{-12} تا 2^{12} ارائه شده است. در تحلیل عددی عامل همگرایی، نرخ همگرایی مجانبی روش چند-شبکه‌ای موجی چرخه- W در تکرارهای به اندازه کافی بالا تا



شکل ۶.۴: مقایسه عامل همگرایی عددی و تحلیلی روی شبکه مثلثی در دو بعد.

جایی که نرم باقیمانده بسیار کوچک شود، $10^{-10} < \|r\|$ ، در نظر گرفته شده است. اضافه بر این، برای شرط اولیه روش عددی از برداری تصادفی و بردار سمت راست برابر با بردار صفر در نظر گرفته شده است. در اینجا گام زمانی را ثابت و برابر با مقدار $M = 32$ در نظر گرفته‌ایم. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در شکل ۶.۴ نتایج حاصل از روش عددی و روش پیش‌بینی کننده SAMA بسیار به هم نزدیک می‌باشند که نشان‌دهنده قابلیت بالای روش SAMA برای پیش‌بینی عامل همگرایی معادلات وابسته به زمان می‌باشد.

نتایج حاصل از مقایسه عامل همگرایی محاسبه شده با روش تحلیلی SAMA و روش عددی چند شبکه‌ای چرخه-W همراه با روش المان متناهی با پایه‌های خطی در سطر سوم و چهارم جدول ۱.۴، ارائه شده است. نتایج به ازای مقادیر مختلف τ در شبکه ثابت $32 \times 64 \times 64$ گزارش شده‌اند. لازم به ذکر است که برای محاسبه عامل همگرایی مجانبی بردار شروع اولیه را به صورت یک بردار تصادفی در نظر گرفتیم و از تکرارهای بسیار زیاد روش تا جایی که نرم بردار باقیمانده عددی کوچکتر از 10^{-10} را نشان دهد، استفاده کرده‌ایم. در چنین شرایطی عامل همگرایی به یک مقدار ثابت میل می‌کند. سطر سوم این جدول متناظر با روش المان‌های متناهی می‌باشد که از جایگذاری ماتریس جرم به جای ماتریس B محاسبه شده در رابطه (۱۲.۴) بدست می‌آید. در سطر چهارم این جدول با قرار دادن ماتریس همانی به جای ماتریس B ، نتایج متناظر با روش تفاضلات متناهی را خواهیم داشت. از مقایسه نتایج سطر های سوم و چهارم جدول می‌توان دریافت که روش گسسته سازی تأثیری در عامل همگرایی روش چند شبکه‌ای ندارد. همچنین از مقایسه دو سطر اول جدول با دو سطر آخر جدول به این نتیجه می‌رسیم که درجه پایه‌های مورد استفاده در روش گسسته‌ساز بر روی سرعت همگرایی روش چند شبکه‌ای تأثیرگذار است. علاوه بر این دو نتیجه، از مقایسه کلیه داده‌های جدول متوجه می‌شویم که روش پیش‌بینی کننده عامل همگرایی SAMA یک برآوردگر بسیار خوب از عامل همگرایی واقعی روش چند شبکه‌ای می‌باشد.

۲.۴ بررسی عامل همگرایی روی شبکه سه-بعدی

در این بخش تحلیل همگرایی به روش SAMA با استفاده از گسسته‌سازی المان‌های متناهی را بیان می‌کنیم. در اینجا نیز مانند بخش قبل دو شبکه را تحلیل می‌کنیم. شبکه اول توسعه شبکه مستطیلی در سه بعد است که ما آن را شبکه مکعبی می‌نامیم. در حالت دوم شبکه مثلی را با استفاده از منشورهایی با قاعده مثلث به سه بعد توسعه می‌دهیم. در ابتدا پیش‌نیازهای لازم برای ارائه تحلیل همگرایی را به‌طور کلی برای هر دو شبکه توضیح می‌دهیم. بقیه تحلیل‌ها همانند حالت دو-بعدی بوده و به راحتی قابل تعمیم هستند.

۱.۲.۴ شبکه مکعبی

همانند حالت دو-بعدی ابتدا شبکه نامتناهی $\mathcal{Q}_h$ را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{Q}_h = \{\mathbf{x} = \mathbf{k}h = (k_1 h_1, k_2 h_2, k_3 h_3), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3\}.$$

در اینجا مدهای فوریه را به‌صورت $\varphi(\theta, \mathbf{x}) = e^{i\theta \cdot \mathbf{x}} = e^{i\theta_1 x_1} e^{i\theta_2 x_2} e^{i\theta_3 x_3}$ در نظر می‌گیریم که $\theta \in \Theta_h = (-\pi/h, \pi/h]^3$. در این حالت نیز هر تابع شبکه‌ای را می‌توان بر حسب ترکیب خطی مدهای فوریه به ازای یک t ثابت نوشت که این عبارت اساس تحلیل همگرایی ما خواهد بود. همچنین فضای فوریه هشت-بعدی ساخته شده با یک مد فوریه با بسامد پایین تعریف شده با عبارت $\theta = \theta^{\circ\circ} \in \Theta_{2h} = (-\pi/2h, \pi/2h]^3$ ، به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\mathcal{F}_{2h}(\theta) = \text{span}\{\varphi(\theta^{\circ\circ}, \cdot), \varphi(\theta^{11}, \cdot), \varphi(\theta^{1\circ}, \cdot), \varphi(\theta^{\circ 1}, \cdot), \varphi(\theta^{\circ 1}, \cdot), \varphi(\theta^{1\circ}, \cdot), \varphi(\theta^{\circ\circ 1}, \cdot), \varphi(\theta^{1\circ}, \cdot)\}, \quad (13.4)$$

مدهای با بسامد بالا $\theta = \theta^{\circ\circ}$ عبارتند از:

$$\theta^\alpha = \theta^{\circ\circ} - (\alpha_1 \text{sign}(\theta_1), \alpha_2 \text{sign}(\theta_2), \alpha_3 \text{sign}(\theta_3)) \frac{\pi}{h},$$

که $\alpha = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) | \alpha_j \in \{^\circ, 1\}, j = 1, 2, 3\}$ و $\theta^{\circ\circ} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$

۲.۲.۴ شبکه منشوری با قاعده مثلث

در اینجا ناحیه منشوری را به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که حاصل ضرب ناحیه مثلی در صفحه $x-y$ و بازه‌ای روی بردار z باشد. فرض کنیم $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$ پایه‌ای یک‌در $\mathbb{R}^3$ باشد و $0 < \gamma < \pi$ زاویه بین دو بردار e'_1 و e'_2 باشد به‌طوری‌که e'_3 بر صفحه آنها عمود می‌باشد. پایه‌ای متعامد بر این پایه در نظر می‌گیریم $\{e''_1, e''_2, e''_3\}$ ، به عبارت دیگر $e'_i \cdot e''_j = \delta_{ij}$ که $i, j = 1, 2, 3$ دلتای کرونکر است. با استفاده از تغییر متغیر $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x}')$ و $\theta = \mathbf{G}(\theta'')$ و تبدیل فوریه می‌توان ضرب داخلی زیر را بدست آورد:

$$\mathbf{G}(\theta'') \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}') = \theta \cdot \mathbf{x} = \theta''_1 x'_1 + \theta''_2 x'_2 + \theta''_3 x'_3 = \theta'' \cdot \mathbf{x}'.$$

شبکه نامتناهی تولید شده در جهت بردارهای e'_1, e'_2, e'_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{G}_h = \{\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, x'_3) | x'_i = k_i h_i, k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3\}, \quad \mathbf{h} = (h_1, h_2, h_3)$$

هر نقطه روی این شبکه به شکل $x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3$ تعریف می‌شود. با استفاده از تبدیل فوریه گسسته روی توابع شبکه‌ای، مدهای فوریه $\varphi_h(\boldsymbol{\theta}'', \mathbf{x}') = e^{i\boldsymbol{\theta}'' \cdot \mathbf{x}'} e^{i\boldsymbol{\theta}'' \cdot \mathbf{x}'_1} e^{i\boldsymbol{\theta}'' \cdot \mathbf{x}'_2} e^{i\boldsymbol{\theta}'' \cdot \mathbf{x}'_3}$ حاصل می‌شوند. در اینجا نیز هر تابع شبکه‌ای را می‌توان بر حسب ترکیب خطی مدهای فوریه به ازای یک t ثابت نوشت که این عبارت اساس تحلیل همگرایی ما خواهد بود. همچنین فضای فوریه هشت-بعدی ساخته شده با یک مد فوریه با بسامد پایین تعریف شده با عبارت $\boldsymbol{\theta}'' = \boldsymbol{\theta}''_{\infty} \in \Theta''_h =$ که $h = h_1 = h_2 = h_3$ به شکل زیر بدست می‌آید:

$$\mathcal{F}_h(\boldsymbol{\theta}'') = \text{span}\{\varphi(\boldsymbol{\theta}''^{\circ\circ\circ}, \cdot), \varphi(\boldsymbol{\theta}''^{\circ\circ 1}, \cdot), \varphi(\boldsymbol{\theta}''^{\circ 1 \circ}, \cdot), \varphi(\boldsymbol{\theta}''^{1 \circ \circ}, \cdot), \varphi(\boldsymbol{\theta}''^{\circ 1 1}, \cdot), \varphi(\boldsymbol{\theta}''^{1 \circ 1}, \cdot), \varphi(\boldsymbol{\theta}''^{1 1 \circ}, \cdot), \varphi(\boldsymbol{\theta}''^{1 1 1}, \cdot)\}, \quad (14.4)$$

مدهای با بسامد بالای متناظر با $\boldsymbol{\theta}''_{\infty}$ نیز از رابطه زیر بدست می‌آیند:

$$\boldsymbol{\theta}''^{\alpha} = \boldsymbol{\theta}''^{\circ\circ\circ} - (\alpha_1 \text{sign}(\boldsymbol{\theta}''_1), \alpha_2 \text{sign}(\boldsymbol{\theta}''_2), \alpha_3 \text{sign}(\boldsymbol{\theta}''_3)) \frac{\pi}{h},$$

که $\boldsymbol{\theta}''^{\circ\circ\circ} = (\boldsymbol{\theta}''_1, \boldsymbol{\theta}''_2, \boldsymbol{\theta}''_3)$ و $\alpha = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) | \alpha_j \in \{^{\circ}, 1\}, j = 1, 2, 3\}$.

با توجه به مطالب بالا، می‌توان نتیجه گرفت که ارائه روش SAMA روی شبکه متعامد و غیر متعامد از لحاظ ظاهری یکسان خواهد بود. زیرا در شبکه غیر متعامد، تعریف شبکه و تعریف فضای بسامد با استفاده از تبدیلات مناسب به فضایی متعامد مبدل می‌گردد و می‌توان مدهای فوریه را بر حسب $\boldsymbol{\theta}''$ و $\mathbf{x}'$ تعریف کرد. لذا در ادامه تحلیل همگرایی عددی SAMA را با در نظر گرفتن تعریفی واحد برای هر دو شبکه ادامه می‌دهیم. بدیهی است در تعاریف هر آنچه در ادامه ارائه می‌شود می‌توان با جایگذاری $\mathcal{G}_h$ و Θ''_h به جای $\mathcal{Q}_h$ و Θ_h به تحلیل این روش روی شبکه مثلثی دست یافت.

با توجه به مطالب ارائه شده برای هر دو نوع شبکه، توسیع ماتریس‌های متناظر با عامل همواری، $\tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}(\theta)$ ، عملگر اصلاحی شبکه درشت $\tilde{\mathcal{C}}_{h,\tau}^h(\theta)$ و عملگر دو-شبکه‌ای $\tilde{\mathcal{T}}_{h,\tau}^h(\theta)$ ، همگی ماتریس‌هایی $8M \times 8M$ خواهند بود که به سادگی با دنبال کردن مراحل انجام شده در دو-بعد، قابل محاسبه هستند. در ادامه با ارائه دو مثال، فرم فشرده ماتریس‌های مورد نیاز را برای هر دو شبکه متعامد و غیر متعامد سه-بعدی محاسبه می‌کنیم.

۳.۲.۴ نتایج تحلیل سه-بعدی SAMA و مقایسه با عامل همگرایی

مجانبی عددی

در این بخش برای مقایسه تحلیل همگرایی SAMA و عامل همگرایی مجانبی روش چند-شبکه‌ای چرخه-W دو مثال ارائه می‌کنیم. در مثال اول شبکه مکعبی را در نظر می‌گیریم

و تمام فرم فشرده ماتریس‌های درگیر در روش چند-شبکه‌ای را محاسبه می‌کنیم. شبکه منشوری در مثال دوم با در نظر گرفتن یک منشور با قاعده متوازی‌الاضلاع متشکل از دو مثلث بررسی می‌شود. در این حالت نیز محاسبه فرم فشرده ماتریس‌های مورد نیاز به تفصیل بیان می‌شود.

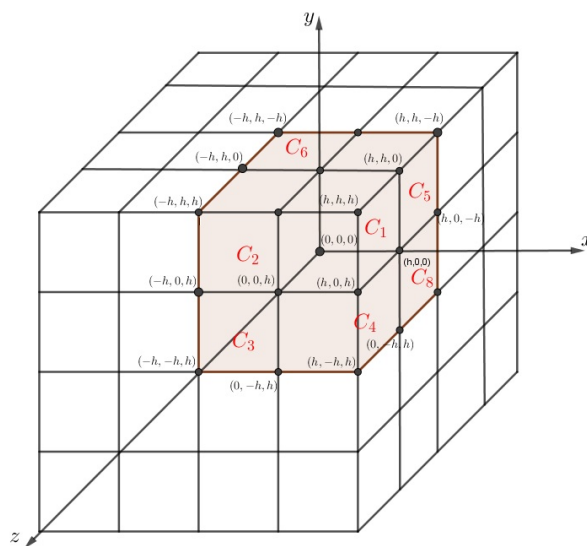
مثال ۱.۲.۴. معادله گرما (۱.۲) را روی ناحیه سه-بعدی $\Omega = [0, 2]^3$ در نظر می‌گیریم. شرایط مرزی و اولیه را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که در جواب دقیق معادله که به صورت زیر است، صدق کند،

$$u(x_1, x_2, t) = t^2 \sin\left(\frac{\pi x_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi x_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi x_3}{2}\right).$$

با استفاده از گسسته‌سازی المان‌های متناهی با پایه‌های سه-خطی روی شبکه مکعبی منظم به شکل $\varphi(x, y, z) = ax + by + cz + dxy + eyz + fxz + gxyz + h$ ، به معادله گسسته زیر می‌رسیم:

$$B_h \dot{\mathbf{u}}_h(t) + A_h \mathbf{u}_h(t) = F_h(t), \quad \mathbf{u}_h(0) = g_h, \quad t > 0.$$

برای محاسبه A_h و B_h شبکه مکعبی ۷.۴ را در نظر می‌گیریم. ماتریس‌های A_h و B_h برای یک



شکل ۷.۴: شبکه مکعبی.

نقطه درونی شبکه به صورت زیر خواهند بود:

$$B_h = [B_h|_{z=-h}, B_h|_{z=0}, B_h|_{z=h}],$$

$$B_h|_{z=-h} = \begin{bmatrix} \int_{C_\varphi} \varphi_{-h,h,-h} \varphi_{0,0,-h} dx & \int_{U_i \in \{\delta, \epsilon\}} C_i \varphi_{0,h,-h} \varphi_{0,0,-h} dx & \int_{C_\delta} \varphi_{h,h,-h} \varphi_{0,0,-h} dx \\ \int_{U_i \in \{\epsilon, \gamma\}} C_i \varphi_{-h,0,-h} \varphi_{0,0,-h} dx & \int_{U_i \in \{\delta, \dots, \lambda\}} C_i \varphi_{0,0,-h} \varphi_{0,0,-h} dx & \int_{U_i \in \{\delta, \lambda\}} C_i \varphi_{h,0,-h} \varphi_{0,0,-h} dx \\ \int_{C_\gamma} \varphi_{-h,-h,-h} \varphi_{0,0,-h} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \lambda\}} C_i \varphi_{0,-h,-h} \varphi_{0,0,-h} dx & \int_{C_\lambda} \varphi_{h,-h,-h} \varphi_{0,0,-h} dx \end{bmatrix},$$

$$B_h|_{z=0} = \begin{bmatrix} \int_{U_i \in \{\gamma, \epsilon\}} C_i \varphi_{-h,h,0} \varphi_{0,0,0} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \delta, \epsilon\}} C_i \varphi_{0,h,0} \varphi_{0,0,0} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \delta\}} C_i \varphi_{h,h,0} \varphi_{0,0,0} dx \\ \int_{U_i \in \{\gamma, \epsilon, \gamma\}} C_i \varphi_{-h,0,0} \varphi_{0,0,0} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \dots, \lambda\}} C_i \varphi_{0,0,0} \varphi_{0,0,0} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \delta, \lambda\}} C_i \varphi_{h,0,0} \varphi_{0,0,0} dx \\ \int_{U_i \in \{\gamma, \gamma\}} C_i \varphi_{-h,-h,0} \varphi_{0,0,0} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \epsilon, \gamma, \lambda\}} C_i \varphi_{0,-h,0} \varphi_{0,0,0} dx & \int_{U_i \in \{\epsilon, \lambda\}} C_i \varphi_{h,-h,0} \varphi_{0,0,0} dx \end{bmatrix},$$

$$B_h|_{z=h} = \begin{bmatrix} \int_{C_\gamma} \varphi_{-h,h,h} \varphi_{0,0,h} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \delta\}} C_i \varphi_{0,h,h} \varphi_{0,0,h} dx & \int_{C_\gamma} \varphi_{h,h,h} \varphi_{0,0,h} dx \\ \int_{U_i \in \{\gamma, \epsilon\}} C_i \varphi_{-h,0,h} \varphi_{0,0,h} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \dots, \epsilon\}} C_i \varphi_{0,0,h} \varphi_{0,0,h} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \epsilon\}} C_i \varphi_{h,0,h} \varphi_{0,0,h} dx \\ \int_{C_\epsilon} \varphi_{-h,-h,h} \varphi_{0,0,h} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \epsilon\}} C_i \varphi_{0,-h,h} \varphi_{0,0,h} dx & \int_{C_\epsilon} \varphi_{h,-h,h} \varphi_{0,0,h} dx \end{bmatrix}$$

9

$$A_h = [A_h|_{z=-h}, A_h|_{z=0}, A_h|_{z=h}],$$

$$A_h|_{z=-h} = \begin{bmatrix} \int_{C_\varphi} \nabla \varphi_{-h,h,-h} \nabla \varphi_{0,0,-h} dx & \int_{U_i \in \{\delta, \epsilon\}} C_i \nabla \varphi_{0,h,-h} \nabla \varphi_{0,0,-h} dx & \int_{C_\delta} \nabla \varphi_{h,h,-h} \nabla \varphi_{0,0,-h} dx \\ \int_{U_i \in \{\epsilon, \gamma\}} C_i \nabla \varphi_{-h,0,-h} \nabla \varphi_{0,0,-h} dx & \int_{U_i \in \{\delta, \dots, \lambda\}} C_i \nabla \varphi_{0,0,-h} \nabla \varphi_{0,0,-h} dx & \int_{U_i \in \{\delta, \lambda\}} C_i \nabla \varphi_{h,0,-h} \nabla \varphi_{0,0,-h} dx \\ \int_{C_\gamma} \nabla \varphi_{-h,-h,-h} \nabla \varphi_{0,0,-h} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \lambda\}} C_i \nabla \varphi_{0,-h,-h} \nabla \varphi_{0,0,-h} dx & \int_{C_\lambda} \nabla \varphi_{h,-h,-h} \nabla \varphi_{0,0,-h} dx \end{bmatrix},$$

$$A_h|_{z=0} = \begin{bmatrix} \int_{U_i \in \{\gamma, \epsilon\}} C_i \nabla \varphi_{-h,h,0} \nabla \varphi_{0,0,0} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \delta, \epsilon\}} C_i \nabla \varphi_{0,h,0} \nabla \varphi_{0,0,0} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \delta\}} C_i \nabla \varphi_{h,h,0} \nabla \varphi_{0,0,0} dx \\ \int_{U_i \in \{\gamma, \epsilon, \gamma\}} C_i \nabla \varphi_{-h,0,0} \nabla \varphi_{0,0,0} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \dots, \lambda\}} C_i \nabla \varphi_{0,0,0} \nabla \varphi_{0,0,0} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \delta, \lambda\}} C_i \nabla \varphi_{h,0,0} \nabla \varphi_{0,0,0} dx \\ \int_{U_i \in \{\gamma, \gamma\}} C_i \nabla \varphi_{-h,-h,0} \nabla \varphi_{0,0,0} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \epsilon, \gamma, \lambda\}} C_i \nabla \varphi_{0,-h,0} \nabla \varphi_{0,0,0} dx & \int_{U_i \in \{\epsilon, \lambda\}} C_i \nabla \varphi_{h,-h,0} \nabla \varphi_{0,0,0} dx \end{bmatrix},$$

$$A_h|_{z=h} = \begin{bmatrix} \int_{C_\gamma} \nabla \varphi_{-h,h,h} \nabla \varphi_{0,0,h} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \delta\}} C_i \nabla \varphi_{0,h,h} \nabla \varphi_{0,0,h} dx & \int_{C_\gamma} \nabla \varphi_{h,h,h} \nabla \varphi_{0,0,h} dx \\ \int_{U_i \in \{\gamma, \epsilon\}} C_i \nabla \varphi_{-h,0,h} \nabla \varphi_{0,0,h} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \dots, \epsilon\}} C_i \nabla \varphi_{0,0,h} \nabla \varphi_{0,0,h} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \epsilon\}} C_i \nabla \varphi_{h,0,h} \nabla \varphi_{0,0,h} dx \\ \int_{C_\epsilon} \nabla \varphi_{-h,-h,h} \nabla \varphi_{0,0,h} dx & \int_{U_i \in \{\gamma, \epsilon\}} C_i \nabla \varphi_{0,-h,h} \nabla \varphi_{0,0,h} dx & \int_{C_\epsilon} \nabla \varphi_{h,-h,h} \nabla \varphi_{0,0,h} dx \end{bmatrix}.$$

ضرایب هر پایه استفاده شده در فرم فشرده ماتریس‌های بالا به سادگی از حل یک دستگاه معادلات خطی محاسبه می‌شود. با محاسبه این پایه‌ها و قرار دادن آن‌ها در روابط بالا فرم فشرده ماتریس‌های B_h و A_h به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$B_h = \frac{1}{216} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 16 & 4 \\ 16 & 64 & 16 \\ 4 & 16 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix},$$

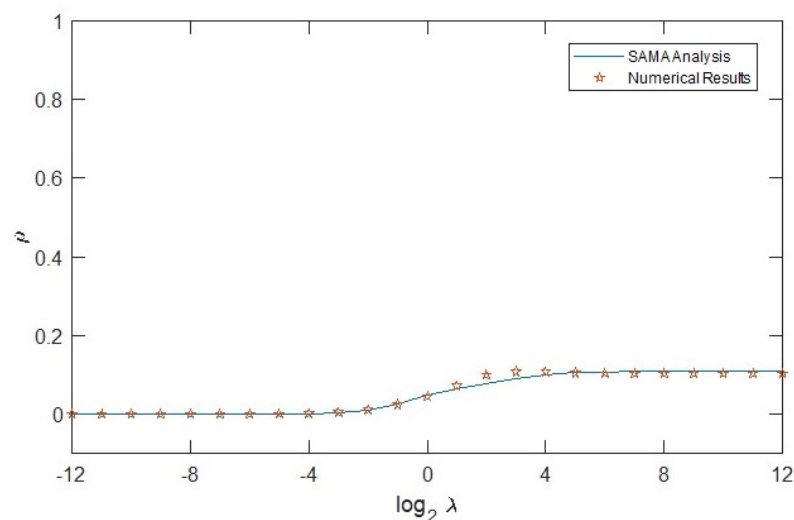
9

$$A_h = \frac{1}{12h^2} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 32 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

عملگر تحدید و درونیاب شبکه مکعبی نیز عبارت است از:

$$I_h^{\chi h} = \frac{1}{64} \left[\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right], \quad I_h^{\chi h} = \frac{1}{8} I_h^h,$$

در شکل ۸.۴، نتایج پیش‌بینی عامل همگرایی توسط روش SAMA و روش عددی محاسبه عامل همگرایی مجانبی، با هم مقایسه شده‌اند. در تحلیل عددی عامل همگرایی، نرخ همگرایی مجانبی روش چند-شبکه‌ای موجی چرخه- W در تکرارهای به اندازه کافی بالا تا جایی که نرم باقیمانده بسیار کوچک شود، $10^{-10} < ||r||$ ، در نظر گرفته شده است. زیرا در این صورت می‌توان تکرارهای روش عددی را به هر تعداد دلخواه ادامه داد تا جایی که نسبت بردارهای باقیمانده به مقدار ثابتی که همان عامل همگرایی مجانبی است میل کند. علاوه بر این، برای شرط اولیه روش عددی از برداری تصادفی و بردار سمت راست برابر با بردار صفر در نظر گرفته شده است. نتایج هر دو روش بر حسب تغییرات پارامتر $\lambda = \tau/h^2$ از 2^{-12} تا 2^{12} در شکل ۳.۴ نمایش داده شده است. در اینجا گام زمانی را ثابت و برابر با مقدار $M = 32$ در نظر گرفته‌ایم. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در شکل ۳.۴ نتایج حاصل از روش عددی و روش پیش‌بینی کننده SAMA بسیار به هم نزدیک می‌باشند که نشان‌دهنده قابلیت بالا ی روش SAMA برای پیش‌بینی عامل همگرایی معادلات وابسته به زمان می‌باشد. در جدول ۲.۴،



شکل ۸.۴: مقایسه عامل همگرایی عددی و تحلیلی روی شبکه مکعبی در سه بعد روی شبکه با ابعاد $64 \times 64 \times 64 \times 32$.

نتایج عددی عامل همگرایی به دو روش SAMA حل عددی با روش موجی چند-شبکه‌ای چرخه- W ، به ازای مقادیر مختلف τ و شبکه ثابت $64 \times 64 \times 64 \times 32$ ارائه شده است. نتایج ردیف اول و دوم جدول متناظر با پایه‌های سه-خطی مثال سوم می‌باشد. در ردیف اول ماتریس B برابر با ماتریس جرم ارائه شده در روش المان‌های متناهی و در ردیف دوم این

ماتریس برابر با ماتریس همانی قرار داده شده است که منجر به نتایج روش تفاضلات متناهی می‌شود. نکته جالب توجه این است که با اعمال همین تغییر در روش SAMA، این روش نیز نتایجی منطبق بر عامل همگرایی روش تفاضلات متناهی را بدست می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود روش گسسته‌سازی چندان تاثیری در عامل همگرایی ندارد.

$\tau \backslash B$		0.04	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001
Cubic Elements(CE)	Mass	0.1084 (0.1072)	0.1129 (0.1119)	0.1330 (0.1291)	0.1539 (0.1541)	0.1923 (0.1946)	0.2790 (0.2759)
	Identity	0.0946 (0.0995)	0.0821 (0.0888)	0.0691 (0.0574)	0.0545 (0.0527)	0.0333 (0.0312)	0.0107 (0.0109)
Prism Elements(PE)	Mass	0.1628 (0.1668)	0.1593 (0.1439)	0.1526 (0.1442)	0.1407 (0.1413)	0.1221 (0.1221)	0.0955 (0.1091)
	Identity	0.1664 (0.1671)	0.1505 (0.1635)	0.1268 (0.1378)	0.1004 (0.1049)	0.0676 (0.0710)	0.0303 (0.0308)

جدول ۲.۴: مقایسه عامل همگرایی دو- شبکه‌ای SAMA با عامل همگرایی مجانبی چرخه- W (درون پرانتز) به ازای مقادیر مختلف τ روی شبکه فضایی سه- بعدی $۳۲ \times ۶۴ \times ۶۴$.

مثال ۲.۲.۴. در این مثال، معادله سه- بعدی گرما را روی ناحیه منشوری با قاعده متوازی‌الاضلاع نشان داده شده در شکل ۴.۴ حل می‌کنیم. شرایط مرزی دیریکله و شرط اولیه را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که در جواب دقیق معادله که به شکل زیر است صدق کنند:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = t^2 x_2 x_3 (x_3 - 1)(x_2 - x_1 \tan \alpha)(x_2 - x_1 \tan \alpha + \tan \alpha) \left(x_2 - \frac{1}{\cot \alpha + \cot \beta} \right).$$

در اینجا از روش المان‌های متناهی با المان‌های منشوری برای گسسته‌سازی معادله گرما استفاده می‌کنیم تا به فرم گسسته زیر برسیم:

$$B_h \dot{\mathbf{u}}_h(t) + A_h \mathbf{u}_h(t) = F_h(t), \quad \mathbf{u}_h(0) = g_h, \quad t > 0.$$

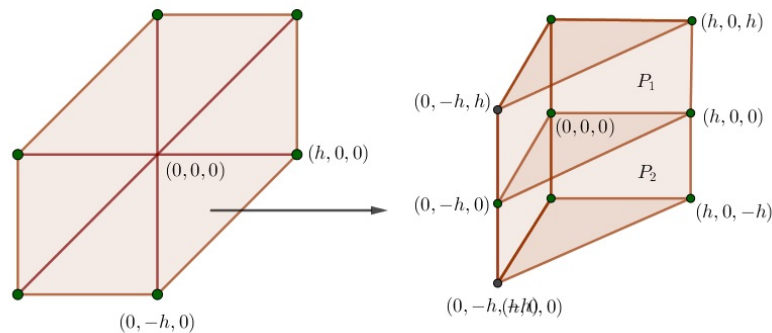
شکل کلی چند جمله‌ای های تعریف شده روی این المان‌های منشوری به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= (ax + by + c)(dz + e) \\ &= aex + bey + dcz + adxz + bdyz + ce \\ &= c_1x + c_2y + c_3z + c_4xz + c_5yz + c_6.\end{aligned}$$

در شکل ۹.۴ دو المان مجاور از این ناحیه نمایش داده شده است. برای محاسبه هر پایه با توجه به شش مجهول، نیاز به شش نقطه داریم تا با آن دستگاه شش معادله شش مجهولی بسازیم. به عنوان نمونه، برای محاسبه مقدار $\varphi_{h,\circ,\circ}$ روی المان منشوری اول، P_1 داریم:

$$\varphi_{h,\circ,\circ}|_{P_1} = \begin{bmatrix} h & \circ & \circ & \circ & \circ & 1 \\ h & h & \circ & \circ & h^2 & 1 \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & 1 \\ h & \circ & h & h^2 & \circ & 1 \\ h & h & h & h^2 & h^2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z & xz & yz & 1 \end{bmatrix},$$

علاوه بر این مقادیر این پایه روی المان‌های ۲ و ۷ و ۸ نیز باید محاسبه گردد. پس محاسبات



شکل ۹.۴: مقایسه عامل همگرایی عددی و تحلیلی روی شبکه مکعبی در سه بعد.

مقدار پایه $\varphi_{h,\circ,\circ}$ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varphi_{h,\circ,\circ} = \frac{1}{h^2} \begin{cases} yh + yz & P_1 \\ xh + xz & P_2 \\ hy - yz & P_3 \\ hx - xz & P_4 \end{cases}$$

به همین طریق می‌توان بقیه پایه‌ها را نیز محاسبه کرد.

مانند آنچه در بخش دو-بعدی انجام دادیم، برای محاسبه فرم فشرده ماتریس‌های A_h و B_h در حالت کلی برای هر مثلث‌بندی با زاویه دلخواه نیاز به تبدیل شبکه مثلی به فرم

استاندارد داریم. برای این منظور فرض کنیم $\mathbf{x}_{n,m,k}$ مرکز ناحیه مثلث‌بندی شده به صورت دلخواه باشد (شکل سمت راست ۵.۴) که این ناحیه محمل پایه $\phi_{n,m,k}$ نیز می‌باشد. این ناحیه در فضای سه-بعدی با نقاط $\mathbf{x}_{n+1,m+1,s}, \mathbf{x}_{n-1,m-1,s}, \mathbf{x}_{n+1,m,s}, \mathbf{x}_{n-1,m,s}, \mathbf{x}_{n,m+1,s}, \mathbf{x}_{n,m-1,s}$ که $s = k-1, k, k+1$ مشخص می‌شود. با استفاده از منشور شش-ضلعی مرجع $\hat{P}$ ، با مرکز $\hat{\mathbf{x}} = (\circ, \circ, \circ)$ و رئوس $\hat{\mathbf{x}}_{\circ,1,s}, \hat{\mathbf{x}}_{\circ,-1,s}, \hat{\mathbf{x}}_{1,1,s}, \hat{\mathbf{x}}_{-1,-1,s}, \hat{\mathbf{x}}_{-1,\circ,s}, \hat{\mathbf{x}}_{1,\circ,s}$ که $s = -1, \circ, 1$ یک نگاشت آفین $\mathcal{H}_P$ به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که عبارت زیر برقرار باشد:

$$\mathbf{x} = \mathcal{H}_P(\hat{\mathbf{x}}) = \mathcal{D}_P \hat{\mathbf{x}} + d_P, \quad \mathcal{H}_P(\hat{\mathbf{x}}_{k,l}) = \mathbf{x}_{n+k,m+l}$$

این نگاشت در فضای سه-بعدی به طور دقیق با روابط زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{D}_P = \begin{bmatrix} x_{n+1,m,p} - x_{n,m,p} & x_{n+1,m+1,p} - x_{n+1,m,p} & x_{n+1,m+1,p+1} - x_{n+1,m+1,p} \\ y_{n+1,m,p} - y_{n,m,p} & y_{n+1,m+1,p} - y_{n+1,m,p} & y_{n+1,m+1,p+1} - y_{n+1,m+1,p} \\ z_{n+1,m,p} - z_{n,m,p} & z_{n+1,m+1,p} - y_{n+1,m,p} & z_{n+1,m+1,p+1} - z_{n+1,m+1,p} \end{bmatrix},$$

$$d_P = \begin{bmatrix} x_{n,m,p} & y_{n,m,p} & z_{n,m,p} \end{bmatrix}, \quad (15.4)$$

که $(x_{u,v,s}, y_{u,v,s}, z_{u,v,s})$ مختصات نقطه $\mathbf{x}_{u,v,s}$ می‌باشد. هر پایه روی منشور شش-ضلعی مرجع $\hat{P}$ با رابطه زیر روی پایه‌ای از منشور شش-ضلعی با زوایای دلخواه P نگاشته می‌شود به طوری که درجه آزادی آن حفظ می‌گردد:

$$\hat{\phi}_{n,m,k} = \phi_{n,m,k} \circ \mathcal{H}_P \quad \nabla \hat{\phi}_{n,m,k} = \mathcal{D}_P^t \nabla \phi_{n,m,k} \circ \mathcal{H}_P.$$

اگر شکل فرم فشرده ماتریس A_h را به صورت زیر فرض کنیم:

$$A_h = |\det \mathcal{D}_P| \begin{bmatrix} a_{\circ,1,-1} & a_{1,1,-1} \\ a_{-1,\circ,-1} & a_{\circ,\circ,-1} & a_{1,\circ,-1} \\ a_{-1,-1,-1} & a_{\circ,-1,-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\circ,1,\circ} & a_{1,1,\circ} \\ a_{-1,\circ,\circ} & a_{\circ,\circ,\circ} & a_{1,\circ,\circ} \\ a_{-1,-1,\circ} & a_{\circ,-1,\circ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{\circ,1,1} & a_{1,1,1} \\ a_{-1,\circ,1} & a_{\circ,\circ,1} & a_{1,\circ,1} \\ a_{-1,-1,1} & a_{\circ,-1,1} \end{bmatrix},$$

آنگاه با استفاده از تغییر متغیر متناظر با نگاشت آفین $\mathcal{H}_P$ ، درایه های این ماتریس از روابط زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned} a_{\circ,1,-1} &= \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,1,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,1,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}, \\ a_{1,1,-1} &= \int_{\hat{P}_\gamma} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,1,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,1,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}, \\ a_{-1,\circ,-1} &= \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,\circ,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\circ} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,\circ,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}, \\ a_{\circ,\circ,-1} &= \sum_{i=5}^{12} \int_{\hat{T}_i} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}, \\ a_{1,\circ,-1} &= \int_{\hat{P}_\delta} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,\circ,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_{12}} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,\circ,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}, \\ a_{-1,-1,-1} &= \int_{\hat{P}_\circ} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,-1,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_{11}} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,-1,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}, \\ a_{\circ,-1,-1} &= \int_{\hat{P}_{11}} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,-1,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_{12}} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,-1,-1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{\circ,\circ,\circ} d\hat{\mathbf{x}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{o,1,o} &= \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,1,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,1,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{1,1,o} &= \int_{\hat{P}_\gamma} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,1,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,1,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{-1,o,o} &= \int_{\hat{P}_\gamma} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,o,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_o} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,o,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{o,o,o} &= \sum_{i=1}^3 \int_{\hat{T}_i} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{1,o,o} &= \int_{\hat{P}_\delta} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,o,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\gamma} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,o,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{-1,-1,o} &= \int_{\hat{P}_o} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,-1,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,-1,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{o,-1,o} &= \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,-1,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\gamma} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,-1,o} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{o,1,1} &= \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,1,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\gamma} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,1,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{1,1,1} &= \int_{\hat{P}_\gamma} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,1,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,1,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{-1,o,1} &= \int_{\hat{P}_\gamma} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,o,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_o} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,o,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{o,o,1} &= \sum_{i=\delta}^3 \int_{\hat{T}_i} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{1,o,1} &= \int_{\hat{P}_\delta} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,o,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\gamma} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{1,o,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{-1,-1,1} &= \int_{\hat{P}_o} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,-1,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{-1,-1,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}, \\
 a_{o,-1,1} &= \int_{\hat{P}_\lambda} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,-1,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}} + \int_{\hat{P}_\gamma} (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,-1,1} \cdot (\mathcal{D}_P^{-1})^t \nabla \hat{\phi}_{o,o,o} d\hat{\mathbf{x}}.
 \end{aligned}$$

حال با تعریف ماتریس C_H به شکل

$$C_H = \mathcal{D}_P^{-1} (\mathcal{D}_P^{-1})^T = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix},$$

می‌توان فرم فشرده ماتریس A_h زیر را به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$A_h = |\det \mathcal{D}_P| = (c_{11} A_{xx} + 2c_{12} A_{xy} + c_{22} A_{yy} + c_{33} A_{zz}) \quad (۱۶.۴)$$

با توجه به رابطه (۱۵.۴) و شکل ۴.۴ ماتریس C_H به شکل زیر بدست می‌آید:

$$C_H = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 + \cot^2 \beta & \cot \beta \cot \alpha + \cot^2 \beta & 0 \\ \cot \beta \cot \alpha + \cot^2 \beta & (\cot \alpha + \cot \beta)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

در رابطه بالا به عنوان نمونه A_{xx} را محاسبه می‌کنیم.

$$A_{xx} = [A_{xx|z=-h}, A_{xx|z=0}, A_{xx|z=h}]$$

$$A_{xx|z=-h} =$$

$$\begin{bmatrix} \int_{\cup_{i \in \{\lambda, \mathfrak{A}\}} P_i} \partial_x \varphi_{\circ, h, -h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, -h} dx & \int_{\cup_{i \in \{\gamma, \mathfrak{A}\}} P_i} \partial_x \varphi_{h, h, -h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, -h} dx \\ \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{A}, \mathfrak{I}^{\circ}\}} P_i} \partial_x \varphi_{-h, \circ, -h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, -h} dx & \int_{\cup_{i \in \{\gamma \dots \mathfrak{I}^{\circ}\}} P_i} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, -h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, -h} dx & \int_{\cup_{i \in \{\gamma, \mathfrak{I}^{\circ}\}} P_i} \partial_x \varphi_{h, \circ, -h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, -h} dx \\ \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{I}^{\circ}, \mathfrak{I}\}} P_i} \partial_x \varphi_{-h, -h, -h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, -h} dx & \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{I}, \mathfrak{I}^{\circ}\}} P_i} \partial_x \varphi_{\circ, -h, -h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, -h} dx \end{bmatrix}$$

$$A_{xx|z=0} =$$

$$\begin{bmatrix} \int_{\cup_{i \in \{\gamma, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}\}} P_i} \partial_x \varphi_{\circ, h, \circ} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, \circ} dx & \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{I}, \gamma, \mathfrak{A}\}} P_i} \partial_x \varphi_{h, h, \circ} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, \circ} dx \\ \int_{\cup_{i \in \{\gamma, \mathfrak{A}, \mathfrak{I}^{\circ}\}} P_i} \partial_x \varphi_{-h, \circ, \circ} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, \circ} dx & \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{I} \dots \mathfrak{I}^{\circ}\}} P_i} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, \circ} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, \circ} dx & \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{I}, \mathfrak{A}, \mathfrak{I}^{\circ}\}} P_i} \partial_x \varphi_{h, \circ, \circ} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, \circ} dx \\ \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{A}, \mathfrak{I}^{\circ}, \mathfrak{I}\}} P_i} \partial_x \varphi_{-h, -h, \circ} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, \circ} dx & \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{I}, \mathfrak{A}, \mathfrak{I}^{\circ}\}} P_i} \partial_x \varphi_{\circ, -h, \circ} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, \circ} dx \end{bmatrix}$$

$$A_{xx|z=h} =$$

$$\begin{bmatrix} \int_{\cup_{i \in \{\gamma, \mathfrak{A}\}} P_i} \partial_x \varphi_{\circ, h, h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, h} dx & \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{I}, \mathfrak{A}\}} P_i} \partial_x \varphi_{h, h, h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, h} dx \\ \int_{\cup_{i \in \{\gamma, \mathfrak{A}\}} P_i} \partial_x \varphi_{-h, \circ, h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, h} dx & \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{I} \dots \mathfrak{A}\}} P_i} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, h} dx & \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{I}, \mathfrak{A}\}} P_i} \partial_x \varphi_{h, \circ, h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, h} dx \\ \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{A}, \mathfrak{I}^{\circ}\}} P_i} \partial_x \varphi_{-h, -h, h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, h} dx & \int_{\cup_{i \in \{\mathfrak{I}, \mathfrak{A}\}} P_i} \partial_x \varphi_{\circ, -h, h} \partial_x \varphi_{\circ, \circ, h} dx \end{bmatrix},$$

پس از محاسبه عبارات بالا خواهیم داشت:

$$A_{xx} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \frac{-2}{12} & \frac{4}{12} & \frac{-2}{12} \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \frac{-4}{6} & \frac{8}{6} & \frac{-4}{6} \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \frac{-2}{12} & \frac{4}{12} & \frac{-2}{12} \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

به همین ترتیب، ماتریس‌های دیگر نیز محاسبه می‌شوند. به‌طور خلاصه داریم:

$$\begin{aligned} A_{yy} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{-2}{12} & \circ \\ \circ & \frac{4}{12} & \circ \\ \circ & \frac{-2}{12} & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{-4}{6} & \circ \\ \circ & \frac{8}{6} & \circ \\ \circ & \frac{-4}{6} & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{-2}{12} & \circ \\ \circ & \frac{4}{12} & \circ \\ \circ & \frac{-2}{12} & \circ \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\ A_{xz} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{1}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{-2}{12} & \circ & \frac{2}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{1}{12} & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{1}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{-2}{12} & \circ & \frac{2}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{1}{12} & \circ \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\ A_{yz} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{-2}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{1}{12} & \circ & \frac{1}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{-2}{12} & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{-2}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{1}{12} & \circ & \frac{1}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{-2}{12} & \circ \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\ A_{xy} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{1}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{-2}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{1}{12} & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{2}{6} & \frac{-2}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{-4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{-2}{6} & \frac{2}{6} & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{1}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{-2}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{1}{12} & \circ \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \\ A_{zz} &= \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{-6}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{-1}{12} & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{2}{12} & \frac{2}{12} \\ \frac{2}{12} & 1 & \frac{2}{12} \\ \frac{2}{12} & \frac{2}{12} & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \circ & \frac{-1}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{-6}{12} & \frac{-1}{12} \\ \frac{-1}{12} & \frac{-1}{12} & \circ \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

حال با جایگذاری عبارات بالا و عناصر ماتریس C_H در رابطه ۲.۲.۴، می‌توان درایه‌های فرم فشرده ماتریس A_h را به ازای هر زاویه دلخواه که $\alpha, \beta \neq \pi/2$ ، در سه-بعد محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} a_{o,1,-1} &= a_{o,-1,-1} = a_{o,1,1} = a_{o,-1,1} = \frac{1}{12h^2} (-2 \cot^2 \alpha - 2 \cot \alpha \cot \beta - 1), \\ a_{1,o,-1} &= a_{-1,o,-1} = a_{1,o,1} = a_{-1,o,1} = \frac{1}{12h^2} (2 \cot \alpha \cot \beta - 3), \\ a_{1,1,-1} &= a_{-1,-1,-1} = a_{1,1,1} = a_{-1,-1,1} = \frac{1}{12h^2} (-2 \cot^2 \beta - 2 \cot \alpha \cot \beta - 1), \\ a_{o,o,-1} &= a_{o,o,1} = \frac{1}{12h^2} (4(\cot \alpha + \cot \beta)^2 - 4 \cot \alpha \cot \beta - 2), \\ a_{o,1,o} &= a_{o,-1,o} = \frac{1}{6h^2} (1 - 4 \cot^2 \alpha - 4 \cot \alpha \cot \beta), \\ a_{1,o,o} &= a_{-1,o,o} = \frac{1}{6h^2} (4 \cot \alpha \cot \beta - 3), \\ a_{1,1,o} &= a_{-1,-1,o} = \frac{1}{6h^2} (1 - 4 \cot^2 \beta - 4 \cot \alpha \cot \beta), \\ a_{o,o,o} &= \frac{1}{6h^2} (8(\cot \alpha + \cot \beta)^2 - 8 \cot \alpha \cot \beta + 14), \end{aligned} \quad (17.4)$$

در حالت خاص اگر $\beta = \pi/2$ باشد، محاسبه این فرم فشرده ماتریس همانند شبکه متعامد مثال قبل است و داریم:

$$A = \frac{1}{24h^2} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ -12 & 88 & -12 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ -6 & 4 & -6 \\ -2 & -6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

برای محاسبه فرم فشرده ماتریس B_h با انجام محاسبات برای زوایای دلخواه متوجه می‌شویم که این فرم فشرده ماتریس وابسته با زوایا نمی‌باشد. در واقع به ازای هر زاویه دلخواه داریم:

$$B_h = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 24 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

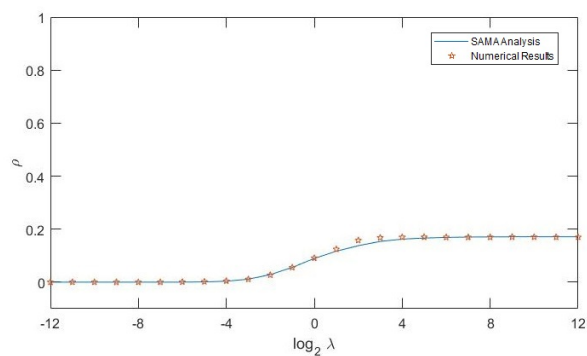
برای تکمیل بحث، نیاز به ارائه فرم فشرده ماتریس تبدیل شبکه نیز داریم:

$$I_h^{\tau h} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad I_h^{\tau h} = \frac{1}{8} I_{\tau h}^h$$

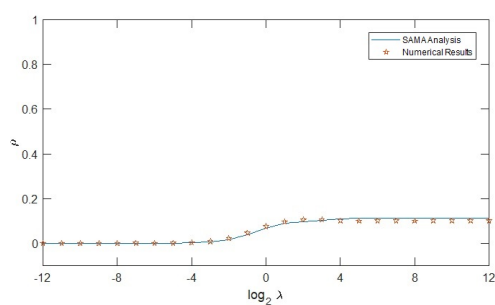
در جدول ۲.۴، نتایج عددی عامل همگرایی به دو روش SAMA حل عددی با روش موجی چند-شبکه‌ای چرخه- W ، به ازای مقادیر مختلف τ و شبکه ثابت $64 \times 64 \times 32$ ارائه شده است. در تحلیل عددی عامل همگرایی، نرخ همگرایی مجانبی روش چند-شبکه‌ای

موجی چرخه- W در تکرارهای به اندازه کافی بالا تا جایی که نرم باقیمانده بسیار کوچک شود، $10^{-10} < \|r\|$ ، در نظر گرفته شده است. اضافه بر این، برای شرط اولیه روش عددی از برداری تصادفی و بردار سمت راست برابر با بردار صفر در نظر گرفته شده است. در اینجا گام زمانی را ثابت و برابر با مقدار $M = 32$ در نظر گرفته‌ایم. نتایج ردیف سوم و چهارم جدول متناظر با این مثال می‌باشد. در ردیف سوم ماتریس B برابر با ماتریس جرم ارائه شده در روش المان‌های متناهی و در ردیف چهارم این ماتریس برابر با ماتریس همانی قرار داده شده است که منجر به نتایج روش تفاضلات متناهی می‌شود. نکته جالب توجه این است که با اعمال همین تغییر در روش SAMA، این روش نیز نتایجی منطبق بر عامل همگرایی روش تفاضلات متناهی را بدست می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود روش گسسته‌سازی چندان تاثیری در عامل همگرایی ندارد. در این جدول همچنین می‌توان نتایج حاصل از حل معادله با استفاده از المان‌های مکعبی و منشوری با قاعده مثلث نیز مقایسه کرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، استفاده از درجه پایین‌تر برای چندجمله‌ای‌های مولد فضای المان‌های متناهی منجر به کندی روش چند-شبکه‌ای و به عبارتی افزایش عامل همگرایی شود.

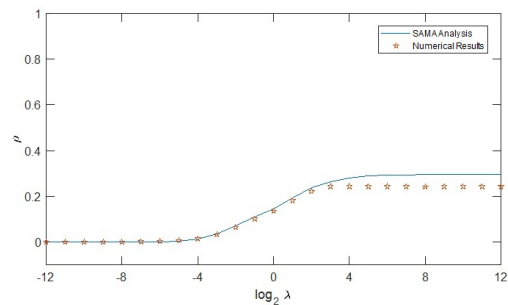
علاوه بر این، نتایج مقایسه‌ای این دو روش به ازای زوایای مختلف $\alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ$ ، $\alpha = 40^\circ, \beta = 50^\circ$ ، $\alpha = 50^\circ, \beta = 70^\circ$ ، $\alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ$ و $\alpha = 80^\circ, \beta = 40^\circ$ در شکل ۱۰.۴ نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، به ازای زوایای مختلف نتایج عامل همگرایی این دو روش تقریباً بر هم منطبق می‌باشد. لذا می‌توان گفت روش SAMA به‌طور کلی یک روش پیش‌بینی قوی برای روش چند-شبکه‌ای در حالات مختلف می‌باشد. مطلب دیگری که از شکل ۱۰.۴ می‌توان دریافت این است که عامل همگرایی وابسته به زوایای مثلث‌های ایجاد شده در شبکه می‌باشد به‌طوری‌که به ازای مثلث متساوی‌الاضلاع بالاترین سرعت اجرای روش یا کوچکترین عامل همگرایی را خواهیم داشت.



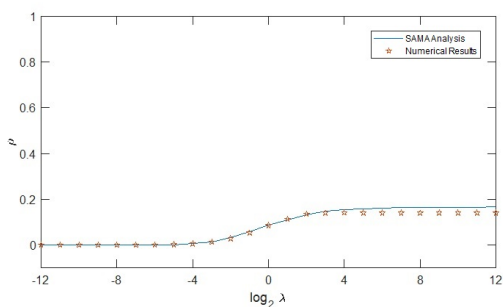
$$\alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ \text{ (ا)}$$



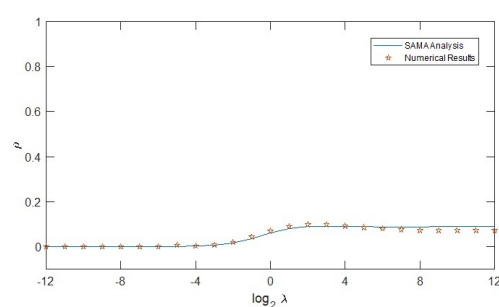
$$\alpha = 50^\circ, \beta = 70^\circ \text{ (ج)}$$



$$\alpha = 40^\circ, \beta = 50^\circ \text{ (ب)}$$



$$\alpha = 80^\circ, \beta = 40^\circ \text{ (ه)}$$



$$\alpha = 60^\circ, \beta = 60^\circ \text{ (د)}$$

شکل ۱۰.۴: مقایسه دو روش عددی و تحلیلی بررسی عامل همگرایی به ازای زوایای مختلف المان‌های منشوری با قاعده مثلث.

فصل ۵

حل یک دستگاه معادلات کنترل بهینه غیرخطی

در این بخش برای گسترش مباحث ارائه شده در فصول پیشین، یک دستگاه معادلات غیر خطی^۱ کوپل کنترل بهینه را در نظر می‌گیریم که از جنس معادلات^۲ واکنش-انتشار باشد. سیستم‌های کنترل واکنش-انتشار به‌طور طبیعی از سیستم‌هایی که اجزای درونی آنها با هم در تعامل و واکنش هستند، پدید می‌آیند و به‌طور گسترده‌ای برای توصیف الگوی ساخت یک پدیده در انواع مختلفی از سیستم‌های بیولوژیکی، شیمیایی و فیزیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱، ۶] که با توجه به کاربرد مدل، فرایند واکنش-انتشار می‌تواند نسبت به^۳ عبارات منبع یا^۴ عبارات مرز کنترل شود. در حالتی که کنترل نسبت به عبارات منبع انجام شود، مسأله کنترل بهینه زیر حاصل می‌گردد:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{u \in L^{\infty}(G)} J(y, u), \\ -\partial_t y + F(y) + \sigma \Delta y = u, \quad \text{in } G \\ y = y_0, \quad \text{in } \Omega, \quad t = 0 \\ y = 0, \quad \text{on } \partial\Omega \end{array} \right. , \quad (1.5)$$

¹Coupled

²Reaction-Diffusion

³Source terms

⁴Boundary elements

که $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ یک ناحیه کراندار با مرز $\partial\Omega$ است و $G = \Omega \times (0, T)$ که T زمان نهایی می باشد. در معادله (۱.۵)، عبارت واکنش غیرخطی و وابسته به تابع حالت y است. همچنین $\sigma > 0$ ضریب عامل انتشار می باشد. تابع هزینه را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$J(y, u) = \frac{\alpha}{2} \|y - y_d\|_{L^2(G)}^2 + \frac{\beta}{2} \|y(\cdot, T) - y_T\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|_{L^2(X)}^2. \quad (2.5)$$

در رابطه بالا $\alpha \geq 0$ ، $\beta \geq 0$ فاکتورهای مقیاس به ترتیب متناظر با حالاتی هستند که مسأله یک مسیر داده شده $y_d(x, t) \in L^2(G)$ را دنبال می کند و حالتی که مسأله کنترل به یک حالت انتهایی $y_T(x) \in L^2(\Omega)$ می رسد. همچنین $\nu > 0$ وزن هزینه کنترل می باشد. جواب مسأله بهینه سازی بالا به شکل دستگاه زیر است:

$$\begin{aligned} -\partial_t y + F(y) + \sigma \Delta y &= u, & \text{in } G, \\ \partial_t p + F'(y)p + \sigma \Delta p + \alpha(y - y_d) &= 0, & \text{in } G, \\ \nu u - p &= 0, & \text{in } G, \\ y = 0, \quad p = 0, & & \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (3.5)$$

که متغیر حالت y و متغیر الحاقی p به ترتیب در زمان رفتاری پیش رونده و پس رونده دارند. لذا یک شرط اولیه برای y و یک شرط انتهایی برای p به صورت زیر نیاز داریم:

$$y(x, 0) = y_0, \quad p(x, T) = \beta(y(x, T) - y_T(x)). \quad (4.5)$$

در این فصل معادله (۳.۵) را با استفاده از روش گسسته سازی تفاضلات متناهی نسبت به مکان گسسته سازی می کنیم و مشتق زمان را جهت استفاده از روش موجی نگه می داریم. پارامتر زمان را در حالات مختلف با استفاده از دو روش چند شبکه ای و SAMA مورد بررسی قرار می دهیم. به عبارت دیگر اثر تحمیل زمان پیش رونده و پس رونده و حل به صورت همزمان پیش رونده و پس رونده بررسی می کنیم. همچنین حالتی دیگر که در آن معادله نسبت به یک متغیر با فریز کردن متغیر دیگر در زمان قبلی حل شود، را نیز در نظر می گیریم. علاوه بر این، در این فصل گسترش روش SAMA برای تحلیل دستگاه معادلات بیان خواهد شد.

۱.۵ گسسته سازی مکانی به روش تفاضلات متناهی

برای گسسته سازی معادله بالا ناحیه دو بعدی $\Omega = [0, 1]^2$ را در نظر می گیریم به طوری که $G_{h,\tau} = \Omega_h \times G_\tau$ یک شبکه منظم به شکل زیر تولید کند:

$$\begin{aligned} \Omega_h &= \{(x_i, y_j) = (ih, jh), \quad i, j = 0, 1, \dots, N\}, \\ G_\tau &= \{t_m = m\tau, \quad m = 0, 1, \dots, M\}, \end{aligned}$$

در تعریف بالا h اندازه گام مکانی و τ اندازه گام زمانی می باشد بقسمی که $\tau = T/M$ و $h = 1/N$. در این شبکه $y_{h,m}$ و $p_{h,m}$ تقریب نقاط گره ای در گام زمانی m می باشد. با استفاده از روش نیمه- گسسته سازی نسبت به مکان و جایگذاری مشتقات^۱ فضایی با عبارات تفاضل متناهی مرکزی رابطه زیر را بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} D_t^+ y_{ijm} + F(y_{ijm}) + \sigma \frac{y_{i-\lambda jm} + y_{i+\lambda jm} - 4y_{ijm} + y_{ij-\lambda m} + y_{ij+\lambda m}}{h^2} \\ - \frac{p_{ijm}}{\nu} = 0, \quad 1 \leq i, j \leq N-1, \quad 1 \leq m \leq M, \\ D_t^- p_{ijm} + F'(y_{ijm})p_{ijm} + \sigma \frac{p_{i-\lambda jm} + p_{i+\lambda jm} - 4p_{ijm} + p_{ij-\lambda m} + p_{ij+\lambda m}}{h^2} \\ + \alpha(y_{ijm} - y_{dijm}) = 0, \quad 1 \leq i, j \leq N-1, \quad 1 \leq m \leq M, \end{aligned} \quad (5.5)$$

در معادله (۵.۵) با استفاده از رابطه $\nu u - p = 0$ متغیر کنترل حذف شده است. همچنین حرکت پیش رونده و پس رونده در زمان به ترتیب با نمادهای "+" و "-" مشخص شده است.

۲.۵ روش نیوتن- گاوس - سایدل موجی

برای حل معادله گسسته حاصل روش های بسیاری وجود دارد، روش های مستقیم و تکراری از جمله این روش ها هستند. ولی روش های تکراری با معادلات بسیاری سازگارتر و کارآمدتر هستند زیرا سرعت همگرایی آنها را می توان با روش های کمکی دیگری مثل روش های چند- شبکه ای سرعت بخشید. روش های تکراری خود به دو دسته روش های گام- زمانی و روش های زمان- موازی تقسیم می شوند. در اینجا روش موجی نیوتن- گاوس - سایدل را که جزء روش های دسته دوم هستند توضیح می دهیم. جهت سادگی ارائه روش، فرم بسته معادله (۵.۵) را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} D_t^+ y_h(t) + F(y_h(t)) + \sigma A_h y_h(t) - \frac{1}{\nu} p_h(t) &= 0, \\ D_t^- p_h(t) + F'(y_h(t))p_h(t) + \sigma A_h p_h(t) + \alpha(y_h(t) - y_{dh}(t)) &= 0, \\ y_h(0) &= y_0, \quad p_h(T) = \beta(y_h(T) - y_{Th}), \end{aligned} \quad (6.5)$$

که در آن A_h ماتریس گسسته فضایی است. همچنین در رابطه بالا شرط $y_{Th} = y_{dh}(T)$ را نیز اعمال کرده ایم. با استفاده از افراز $A_h = M_h - N_h$ و با توجه به فرایند روش نیوتن به رابطه

¹Spatial

زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{pmatrix} -D_t^+ & \circ \\ \circ & D_t^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma M_h & -\frac{1}{\nu} \\ \alpha & \sigma M_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F'(y_h(t)) & \circ \\ F''(y_h(t))p_h(t) & F'(y_h(t)) \end{pmatrix} \right]^{k-1} \begin{pmatrix} y_h(t) \\ p_h(t) \end{pmatrix}^k \\ &= \left[\begin{pmatrix} \sigma N_h & \circ \\ \circ & \sigma N_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F'(y_h(t)) & \circ \\ F''(y_h(t))p_h(t) & F'(y_h(t)) \end{pmatrix} \right]^{k-1} \begin{pmatrix} y_h(t) \\ p_h(t) \end{pmatrix}^{k-1} - \\ & \begin{pmatrix} F(y_h(t)) \\ F'(y_h(t))p_h(t) \end{pmatrix}^{k-1} + \begin{pmatrix} \circ \\ \alpha y_{dh}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.5)$$

که در آن برای $k \geq 1$ داریم:

$$\begin{pmatrix} y_h(\circ) \\ p_h(T) \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} y_\circ \\ \beta(y_h(T) - y_{Th}) \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

در اینجا منظور از $y_h^k(t)$ ، $p_h^k(t)$ تقریب $y(t)$ و $p_h(t)$ در تکرار k -ام است. همچنین $y_h^\circ(t)$ و $p_h^\circ(t)$ معرف مقدار تابع در تکرار صفرم در طول زمان و به ترتیب برابر با مقدار اولیه و مقدار انتهایی تعریف شده می‌باشند. به عبارت دیگر: $y_h^\circ(t) = y_{\circ h}$ ، $p_h^\circ(t) = \beta(y_h(T) - y_{Th})$ ، $t > \circ$. افراز $A_h = -L_h + D_h - U_h$ را در نظر می‌گیریم، که L_h ، D_h و U_h به ترتیب معرف ماتریس‌های پایین مثلثی، قطری و بالا مثلثی متناظر با A_h هستند. در نتیجه افراز متناظر با روش نیوتن-گاوس - سایدل به صورت $M_h = -L_h + D_h$ و $N_h = U_h$ بدست می‌آید.

در معادله (7.5) با گسسته‌سازی مشتق زمان با استفاده از یکی از روش‌های چند-گامی یا کرانک-نیکلسون به رابطه کاملاً گسسته این معادله دست یافت. با استفاده از گسسته‌سازی اوایلر یک تکرار روش موجی نیوتن-گاوس - سایدل نقطه‌ای به شکل زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}_{ijm}^k &= \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}_{ijm}^{k-1} + \\ & \begin{pmatrix} -\left(1 + \frac{\tau \sigma \tau}{h^2} - \tau F'\right) & -\frac{\tau}{\nu} \\ \tau(\alpha + F''p) & -\left(1 + \frac{\tau \sigma \tau}{h^2} - \tau F'\right) \end{pmatrix}_{ijm}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\tau}{\nu} p - Ly - \tau F \\ \tau(\alpha(y_d - y) - F'p) - Lp \end{pmatrix}_{ijm}. \end{aligned}$$

در رابطه بالا درایه‌های ماتریس معکوس سمت راست از تکرار $k-1$ قابل محاسبه هستند همچنین داریم: $Ly = (-D_t^+ + \sigma A_h)y$ و $Lp = (D_t^- + \sigma A_h)p$. در الگوریتم ۱.۵ این مراحل به صورت گام به گام ارائه شده‌اند.

اگر پارامتر σ در رابطه (7.5) کوچک انتخاب شود، عملاً اثر مشتق فضایی بسیار کاهش می‌یابد. در واقع روش‌های تکراری با اثر هموار کنندگی بردار خطا در جهتی به درستی عمل می‌کنند که وابستگی پارامترها به هم زیاد باشد [۴۲]. لذا با فرض σ کوچک وابستگی فضایی

Algorithm 1 Pointwise Gauss-Seidel-Newton waveform relaxation

Set $k = 0$ and $y_h^0(t) = y_{0h}$, $p_h^0(t) = \beta(y_h(T) - y_{Th})$, $t > 0$

Repeat

$k = k + 1$,

for $m = 1, \dots, N$,

for i, j in, e.g., lexicographic order do

$$w_1 = (1 + \frac{4\sigma\tau}{h^2} - \tau F'(y_{ijm}))^2 + \tau^2(\alpha + F''(y_{ijm})p_{ijm})/\nu,$$

$$Ly_{ijm} = (-D_t^+ + \sigma A_h)y$$

$$= -(y_{ijm} - y_{ijm-1}) + \frac{\sigma\tau}{h^2}(y_{i\mp 1jm} + y_{ij\mp 1m} - 4y_{ijm}),$$

$$y_{ijm} = y_{ijm} + \frac{1}{w_1}[-(1 + \frac{4\sigma\tau}{h^2} - \tau F')(\frac{\tau}{\nu}p - Ly - \tau F)$$

$$+ \frac{\tau}{\nu}p(\tau(\alpha(y_d - y) - F'p) - Lp)]_{ijm},$$

set $m' = N - m + 1$,

$$w_2 = (1 + \frac{4\sigma\tau}{h^2} - \tau F'(y_{ijm'}))^2 + \tau^2(\alpha + F''(y_{ijm'})p_{ijm'})/\nu,$$

$$Lp_{ijm'} = (D_t^- + \sigma A_h)p$$

$$= (p_{ijm'+1} - p_{ijm'}) + \frac{\sigma\tau}{h^2}(p_{i\pm 1jm'} + p_{ij\pm 1m'} - 4p_{ijm'}),$$

$$p_{ijm'} = p_{ijm'} + \frac{1}{w_2}[-\tau(\alpha + F''p)(\frac{\tau}{\nu}p - Ly - \tau F)$$

$$-(1 + \frac{4\sigma\tau}{h^2} - \tau F')(\tau(\alpha(y_d - y) - F'p) - Lp)]_{ijm'}$$

end

جدول ۱.۵: الگوریتم روش موجی نیوتن- گاوس - سایدل

پارامترهای دستگاه ضعیف می‌شود. راه غلبه بر این کاستی استفاده از روش خطی نیوتن- گاوس - سایدل در جهت پارامتر زمان است. به عبارت دیگر برای هر مؤلفه فضایی تمام مختصات زمانی به‌طور همزمان به‌روزرسانی می‌شوند. الگوریتم متناظر با این حالت در الگوریتم ۲.۵ داده شده است.

۳.۵ روش چند- شبکه‌ای FAS

برای سرعت بخشیدن به روش تکراری موجی نیوتن- گاوس - سایدل از یک روش چند- شبکه‌ای برای معادلات غیرخطی به نام روش FAS استفاده می‌کنیم. در اینجا روش چند- شبکه‌ای FAS برای بعد مکان استفاده می‌کنیم. بدین معنی که فرایند درشت‌سازی شبکه و انتقال بردار خطا بر روی شبکه درشت‌تر، تنها روی بعد فضایی اعمال می‌شود. برای این منظور، یک دنباله $l+1$ تایی از شبکه‌ها به‌گونه‌ای در نظر می‌گیریم که $\Omega_{2^l h} \subset \dots \subset \Omega_{2h} \subset \Omega_h$.

Algorithm 2 Time-line Gauss-Seidel-Newton waveform relaxation

Set $k = 0$,

Repeat

$k = k + 1$,

for i, j in, e.g., lexicographic order do

for $m = 1, \dots, N$,

$$M1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

if $m < N$ **do**

$$M2 = \begin{pmatrix} -(1 + \frac{4\sigma\tau}{h^2} - F') & -\frac{\tau}{\nu} \\ \tau(\alpha + F''p) & -(1 + \frac{4\sigma\tau}{h^2} - \tau F') \end{pmatrix}$$

Else

$$M2 = \begin{pmatrix} -(1 + \frac{4\sigma\tau}{h^2} - F') & -\frac{\tau}{\nu} \\ \beta & -1 \end{pmatrix}$$

End if

$$M = \text{blktridiag}(M1, M2, M3)$$

$$\begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}_{2N \times 1} = \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix}_{2N \times 1} + M^{-1} \begin{pmatrix} -Ly - \tau F + \frac{\tau}{\nu} p \\ -Lp - \tau F'p - \alpha \tau y + \tau \alpha y_d \end{pmatrix}_{2N \times 1},$$

end

جدول ۲.۵: الگوریتم روش زمان-خطی گاوس-سایدل-نیوتن

مانند فصول پیش، سه مرحله متداول هموار کننده پیشین، پسین و اصلاح شبکه درشت برای یافتن جواب جدید $W_h^k(t) = (y_h^k(t), p_h^k(t))^T$ انجام خواهد گرفت. در الگوریتم ۲.۵ روش چند-شبکه‌ای FAS گام به گام ارائه شده است. در این الگوریتم درشت‌سازی استاندارد شبکه برای انتقال شبکه‌ها استفاده می‌کنیم که همان عملگر تحدیدکننده ۹- نقطه‌ای و درونیاب دو خطی می‌باشند. همچنین روش DCA برای محاسبه سیستم گسسته روی شبکه‌های درشت‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد. الگوریتم روش چند-شبکه‌ای FAS روی فرم فشرده معادله مورد بحث یعنی $(D_t + \bar{A}_{\Psi_{i_h}})W_{\Psi_{i_h}}(t) + \bar{F}_{\Psi_{i_h}} = b_{\Psi_{i_h}}(t)$ اعمال شده است. در این رابطه D_t یک ماتریس قطری دو بعدی با درایه‌های $-D_t^+$ و D_t^- می‌باشد که به ترتیب عملگرهای پیش و پس رونده در زمان هستند. بقیه عملگرهای بکار برده شده در این رابطه به صورت زیر تعریف

Algorithm 3 The FAS multigrid waveform relaxation based on Gauss-Seidel-Newton smoother $W_h^k(t) \rightarrow W_h^{k+1}(t)$

(*Presmoothing*) Perform k_1 steps of the Gauss-Seidel-Newton waveform relaxation,

$$V_h^k(t) = S^{k_1}(W_h^k(t)).$$

(*Coarse grid correction*)

Compute the defect $\bar{d}_h^k(t) = b_h^k(t) - (D_t + \bar{A}_h)V_h^k(t) - \bar{F}_h^k,$

Restrict the defect $\bar{d}_{2h}^k(t) = I_h^{2h}\bar{d}_h^k(t),$

Restrict the $V_h^k(t)$ $V_{2h}^k(t) = I_h^{2h}V_h^k(t),$

Compute the right-hand side $b_{2h}^k = \bar{d}_{2h}^k + (D_t + \bar{A}_{2h})V_{2h}^k(t) + \bar{F}_{2h}^k,$

Compute an approximate solution $Z_{2h}^k(t)$ on Ω_{2h}

$$(D_t + \bar{A}_{2h})Z_{2h}^k(t) + \bar{F}_{2h}^k = b_{2h}^k(t)$$

- If $k = 1$ perform a fast solver to this propose,
- Else, solve this equation by applying $\gamma > 1$ cycles of WRFMG on Ω_{2h} using $V_{2h}^k(t)$ as initial approximation,

Compute the correction $U_{2h}^k = Z_{2h}^k - V_{2h}^k$

Interpolate the correction $U_h^k(t) = I_{2h}^h U_{2h}^k(t)$

Correct the current approximation on Ω_h , $V_h^{k+1}(t) = V_h^k(t) + U_h^k(t),$

(*Postsmoothing*) Perform k_2 steps of Gauss-Seidel-Newton waveform relaxation,

$$W_h^{k+1}(t) = S^{k_2}(V_h^{k+1}(t)).$$

جدول ۳.۵: روش موجی گاوس-سایدل-نیوتن زمان-خطی

می‌شوند:

$$\bar{A}_{\Psi^i h} = \sigma \begin{pmatrix} A_{\Psi^i h} & \frac{-1}{\nu} \\ \alpha & A_{\Psi^i h} \end{pmatrix}, \quad (9.5)$$

$$\bar{F}_{\Psi^i h} = \begin{pmatrix} F(y_{\Psi^i h}(t)) \\ F'(y_{\Psi^i h}(t))p_{\Psi^i h}(t) \end{pmatrix}, b_{\Psi^i h}(t) = \begin{pmatrix} \circ \\ \alpha y_{d\Psi^i h}(t) \end{pmatrix}. \quad (10.5)$$

در عبارت فوق با گسسته‌سازی مشتق زمان و استفاده از روش موجی نیوتن-گاوس-سایدل، دستگاه حاصل را می‌توان با رویکرد نقطه‌ای یا خطی در زمان حل نمود.

۴.۵ تحلیل همگرایی SAMA

در ادامه روش تحلیل SAMA برای دستگاه معادلات غیر خطی کوپل معرفی شده را ارائه می‌کنیم. همانطور که در فصول پیش نشان داده شد، روش SAMA یک روش تحلیل قدرتمند

است که هدف آن پیش‌بینی عامل همگرایی روش‌های چند-شبکه‌ای می‌باشد که به‌طور خاص روی معادلات وابسته به زمان پیاده‌سازی شده باشند. در فصل قبل این روش به‌طور جامع روی معادله اسکالر وابسته به زمان توضیح داده شد. در این بخش گسترش آن برای اعمال روی دستگاه معادلات مورد بررسی قرار می‌گیرد. به این منظور یک شبکه نامتناهی به‌صورت $\mathcal{Q}_h = \{\mathbf{x} = \mathbf{k}\mathbf{h} = (k_1 h_1, k_2 h_2), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^2\}$ را در نظر می‌گیریم. در اینجا نیز هر تابع شبکه‌ای دو بعدی $W_h(\cdot, t) = (y_h(\cdot, t), p_h(\cdot, t))^T$ را می‌توان به‌صورت ترکیب خطی از مدهای فوریه دو-بعدی $\varphi_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = e^{i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{x}} = e^{i\theta_1 x_1} e^{i\theta_2 x_2}$ با رابطه زیر بیان کرد:

$$W_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_h} c_{\boldsymbol{\theta}}(t) \varphi_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}), \quad (11.5)$$

که $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}_h$ و $\boldsymbol{\theta} \in \Theta_h = (-\pi/h, \pi/h]^2$ در رابطه (۱۱.۵) ضرایب وابسته به زمان $c_{\boldsymbol{\theta}}(t)$ با عبارت $c_{\boldsymbol{\theta}}(t) = (c_{\boldsymbol{\theta}}^y(t), c_{\boldsymbol{\theta}}^p(t))^T$ تعریف می‌شوند. علاوه بر این مدهای فوریه مولد فضای فوریه $\mathcal{F}(\mathcal{Q}_h) = \{\varphi_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta_h\}$ نیز می‌باشند.

همانند بخش قبل، روش SAMA متشکل از سه مرحله کلی به شرح زیر می‌باشد:

۱- بررسی تحلیل همواری روش نیوتن-گاوس-سایدل روی شبکه تعریف شده.

۲- اعمال تحلیل روی عملگر اصلاحی شبکه درشت.

۳- ترکیب دو مرحله پیشین جهت تکمیل تحلیل دو-شبکه‌ای.

پیش از توضیح گام اول لازم است بسامد با فرکانس بالا و پایین را با توجه به نوع درشت‌سازی شبکه تعریف کرد. در فرایند نیمه درشت‌سازی که یک رویکرد متداول در تحلیل روش موجی چند-شبکه‌ای می‌باشد، درشت‌سازی تنها روی بعد فضایی مسأله بگونه‌ای اعمال می‌شود که طول گام شبکه درشت دو برابر شبکه ظریف بلافاصله پیش از خود باشد. بنابراین بسامد با فرکانس پایین و بالا به ترتیب با عبارات $\Theta_h = (-\pi/2h, \pi/2h]$ و $\Theta_h \setminus \Theta_{2h}$ تعریف می‌شود. یک تکرار از روش تکراری موجی بر حسب توابع شبکه‌ای خطا، عبارت است از:

$$\left[\begin{pmatrix} -D_t^+ & \circ \\ \circ & D_t^- \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma M_h & -\frac{1}{\nu} \\ \alpha & \sigma M_h \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} e_h^{y,k}(\cdot, t) \\ e_h^{p,k}(\cdot, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma N_h & \circ \\ \circ & \sigma N_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_h^{y,k-1}(\cdot, t) \\ e_h^{p,k-1}(\cdot, t) \end{pmatrix} \quad (12.5)$$

که $(e_h^{y,k}(\mathbf{x}, \circ), e_h^{p,k}(\mathbf{x}, T))^T = (\circ, \circ)^T$. با فرض $e_h^k(\mathbf{x}, t) = (e_h^{y,k}(\mathbf{x}, t), e_h^{p,k}(\mathbf{x}, t))^T$ و با توجه به رابطه (۱۱.۵) عبارت تابع شبکه‌ای خطا را نیز می‌توان بر حسب مدهای فوریه بازنویسی کرد:

$$e_h^k(\mathbf{x}, t) = \sum_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta_h} c_{\boldsymbol{\theta}}^k(t) \varphi_h(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}).$$

همچنین فرم فشرده معادله (۱۲.۵) را می‌توان با عبارت زیر نمایش داد:

$$D_t e_h^k(\mathbf{x}, t) + \mathbf{M}_h e_h^k(\mathbf{x}, t) = \mathbf{N}_h e_h^{k-1}(\mathbf{x}, t), \quad k \geq 1, \mathbf{x} \in \mathcal{Q}_h, t > \circ, \quad (13.5)$$

که $\bar{A}_h = M_h - N_h$ تجزیه عملگر معرفی شده در معادله (۹.۵) می باشد به طوری که :

$$M_h = \begin{pmatrix} \sigma M_h & -\frac{1}{\nu} \\ \alpha & \sigma M_h \end{pmatrix}, N_h = \begin{pmatrix} \sigma N_h & \circ \\ \circ & \sigma N_h \end{pmatrix},$$

با توجه به اینکه $\varphi_h(\theta, x)$ تابع ویژه عملگرهای M_h و N_h می باشد، لذا رابطه (۱۳.۵) را به ازای $\theta \in \Theta_h$ به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$D_t c_\theta^k(t) + \widehat{M}_h(\theta) c_\theta^k(t) = \widehat{N}_h(\theta) c_\theta^{k-1}(t), \quad k \geq 1, t > 0, \quad (14.5)$$

که $\widehat{M}_h(\theta)$ و $\widehat{N}_h(\theta)$ ماتریس های بردار ویژه به ترتیب متناظر با M_h و N_h می باشند. نتایج تحلیل همواری کاملاً وابسته به نوع گسسته سازی و ترتیب حل دستگاه دارد. همانطور که پیش تر نیز گفته شد، به طور کلی دو رویکرد نقطه ای و خطی در زمان را می توان در نظر گرفت. خود رویکرد نقطه ای را نیز به سه شیوه نگاه کرد. ۱- حل همزمان دو معادله نسبت به y به صورت پیش رونده و نسبت به p پس رونده. ۲- حل تناوبی معادلات بدین صورت که ابتدا معادله اول را نسبت به y حل می کنیم سپس جواب حاصل را در معادله دوم قرار داده و معادله دوم را نسبت به p حل می نماییم. ۳- تحمیل روش پیش رونده (پس رونده) بر کل دستگاه و حل همزمان دو معادله. از بین این رویکردها تنها دو رویکرد خطی در زمان و رویکرد نقطه ای حالت ۱ را در نظر می گیریم. فرض کنیم $(c_\theta^{y,k,1}, c_\theta^{p,k,1}, \dots, c_\theta^{p,k,M}, c_\theta^{y,k,M})^T$ تقریب $c_\theta^k(t)$ روی G_τ باشد، لذا معادله (۱۴.۵) به شکل زیر تبدیل می شود:

$$\begin{pmatrix} c_\theta^{y,k,1} \\ c_\theta^{p,k,1} \\ c_\theta^{y,k,2} \\ c_\theta^{p,k,2} \\ \vdots \\ c_\theta^{y,k,M} \\ c_\theta^{p,k,M} \end{pmatrix} = \widetilde{M}_{h,\tau}^{-1}(\theta) \widetilde{N}_{h,\tau}(\theta) \begin{pmatrix} c_\theta^{y,k-1,1} \\ c_\theta^{p,k-1,1} \\ c_\theta^{y,k-1,2} \\ c_\theta^{p,k-1,2} \\ \vdots \\ c_\theta^{y,k-1,M} \\ c_\theta^{p,k-1,M} \end{pmatrix},$$

در رویکرد خطی نسبت به زمان، ماتریس $\widetilde{N}_{h,\tau}(\theta)$ ماتریس $2M \times 2M$ قطری با درایه های قطری $\widehat{N}_h(\theta)$ می باشد؛ $\widetilde{M}_{h,\tau}$ ماتریس $\widetilde{M}_{h,\tau}$ نیز یک ماتریس بلوکی سه قطری $2M \times 2M$ به شکل $\widetilde{M}_{h,\tau} = \text{Blktridiagonal}(B_1, B_2, B_3)$ است که بلوک های آن به صورت زیر تعریف می شوند:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \widehat{M}_h(\theta) & -\frac{1}{\nu} \\ \alpha & \widehat{M}_h(\theta) \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}.$$

¹Block three diagonal(block1,block2,block3)

در روش نیوتن-گوس-سایدل نقطه‌ای حالت ۱، ماتریس $\tilde{\mathcal{N}}_{h,\tau}(\theta)$ یک $2M \times 2M$ ماتریس بلوکی قطری است که آرایش درون بلوکی بلوک‌های با اندیس $1, 2, \dots, M/2$ با آرایش درون بلوکی بلوک‌های با اندیس $M/2 + 1, \dots, M$ متفاوت و به صورت زیر است:

$$\begin{pmatrix} \hat{N}_h(\theta) & \frac{1}{\nu} \\ \circ & \hat{N}_h(\theta) \end{pmatrix}_{1, \dots, \frac{M}{2}}, \quad \begin{pmatrix} \hat{N}_h(\theta) & \circ \\ -\alpha & \hat{N}_h(\theta) \end{pmatrix}_{\frac{M}{2}+1, \dots, M},$$

به همین ترتیب بلوک‌های متناظر با ماتریس بلوکی سه قطری و $2M \times 2M$ ، $\tilde{\mathcal{M}}_{h,\tau}$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$B_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \frac{1}{\tau} \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \hat{M}_h(\theta) & \circ \\ \alpha & \hat{M}_h(\theta) \end{pmatrix}_{1, \dots, \frac{M}{2}}, \quad \begin{pmatrix} \hat{M}_h(\theta) & -\frac{1}{\nu} \\ \circ & \hat{M}_h(\theta) \end{pmatrix}_{\frac{M}{2}+1, \dots, M} \right\}.$$

با فرض $\tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}(\theta) = \tilde{\mathcal{M}}_{h,\tau}^{-1}(\theta) \tilde{\mathcal{N}}_{h,\tau}(\theta)$ عامل همواری روش تکراری نیوتن-گوس-سایدل موجی با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\mu = \sup_{\Theta_h \setminus \Theta_{\tau h}} \left(\rho \left(\tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}(\theta) \right) \right).$$

در ادامه تحلیل اصلاحی شبکه درشت ارائه می‌شود. در اینجا نیز اثر عملگر اصلاحی شبکه درشت روی مدهای فوریه بررسی می‌شود. $C_h^{\tau h}(\theta)$ را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$C_h^{\tau h}(\theta) = I_h - \bar{I}_{\tau h}^h(D_t + \bar{A}_{\tau h})^{-1} \bar{I}_h^{\tau h}(D_t + \bar{A}_h)$$

که

$$D_t = \begin{pmatrix} D_t^+ & \circ \\ \circ & D_t^- \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_h = \begin{pmatrix} A_h & -\frac{1}{\nu} \\ \alpha & A_h \end{pmatrix},$$

$$\bar{I}_h^{\tau h} = \begin{pmatrix} I_h^{\tau h} & \circ \\ \circ & I_h^{\tau h} \end{pmatrix}, \quad \bar{I}_{\tau h}^h = \begin{pmatrix} I_{\tau h}^h & \circ \\ \circ & I_{\tau h}^h \end{pmatrix}$$

I_h و عملگر همانی می‌باشد. پس از اعمال عملگر اصلاحی بالا روی k مین تکرار عبارت خطا، $\hat{C}_h^{\tau h}(bt)$ می‌رسیم که به رابطه $e_h^k(\mathbf{x}, t) = \sum_{\theta \in \Theta_{\tau h}} \hat{C}_h^{\tau h}(\theta) \mathbf{c}_{\theta}^k(t) \cdot \varphi(\theta, \cdot)$ ، $\mathbf{c}_{\theta}^k(t) = \sum_{\theta \in \Theta_{\tau h}} \hat{C}_h^{\tau h}(\theta) \mathbf{c}_{\theta}^k(t) \varphi(\theta, \mathbf{x})^T$ به شکل زیر است:

$$\hat{C}_h^{\tau h}(\theta) = I_h - \hat{I}_{\tau h}^h(\theta)(D_t + \hat{\mathbf{A}}_{\tau h}(\theta))^{-1} \hat{I}_h^{\tau h}(D_t + \hat{\mathbf{A}}_h(\theta)).$$

در رابطه بالا منظور از I_8 ماتریس همانی 8×8 و $\hat{A}_{2h}$ ماتریس 1×1 می باشد. عملگرهای دیگر در رابطه بالا به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\hat{\mathbf{A}}_h(\boldsymbol{\theta}) = \text{blockdiag}(A_h^*(\boldsymbol{\theta}^\alpha)), \quad A_h^*(\boldsymbol{\theta}^\alpha) = \begin{pmatrix} \hat{A}_h(\boldsymbol{\theta}^\alpha) & \circ \\ \circ & \hat{A}_h(\boldsymbol{\theta}^\alpha) \end{pmatrix}$$

به‌طوری‌که $\alpha = \{(\alpha_1, \alpha_2) | \alpha_j \in \{0, 1\}, j = 1, 2\}$. همچنین داریم:

$$\begin{aligned} \widehat{I}_{Y_h}^h(\boldsymbol{\theta}) &= \left(\begin{pmatrix} \widehat{I}_{Y_h}^h(\boldsymbol{\theta}^{\circ\circ}) & \circ \\ \circ & \widehat{I}_{Y_h}^h(\boldsymbol{\theta}^{\circ\circ}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{I}_{Y_h}^h(\boldsymbol{\theta}^{11}) & \circ \\ \circ & \widehat{I}_{Y_h}^h(\boldsymbol{\theta}^{11}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{I}_{Y_h}^h(\boldsymbol{\theta}^{1\circ}) & \circ \\ \circ & \widehat{I}_{Y_h}^h(\boldsymbol{\theta}^{1\circ}) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widehat{I}_{Y_h}^h(\boldsymbol{\theta}^{\circ 1}) & \circ \\ \circ & \widehat{I}_{Y_h}^h(\boldsymbol{\theta}^{\circ 1}) \end{pmatrix} \right)^T \\ \widehat{I}_h^h(\boldsymbol{\theta}) &= \left(\widehat{I}_{Y_h}^h(\boldsymbol{\theta}) \right)^T \end{aligned}$$

با فرض یک گسسته‌سازی مناسب برای پارامتر زمان عملگر اصلاحی شبکه درشت به ماتریس $\mathbb{M} \times \mathbb{M}$ زیر تبدیل می‌شود:

$$\tilde{\mathcal{C}}_{h,\tau}^{\mathfrak{Y}^h}(\boldsymbol{\theta}) = I_{\Lambda M} - \tilde{\mathcal{I}}_{\mathfrak{Y}^h}^h(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\mathcal{A}}_{\mathfrak{Y}^h,\tau}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\mathcal{I}}_h^{\mathfrak{Y}^h}(\boldsymbol{\theta}) \tilde{\mathcal{A}}_{h,\tau}(\boldsymbol{\theta}),$$

که $I_{\Lambda M}$ ماتریس همانی از مرتبه ΛM ، و $\hat{\mathcal{I}}_h^h(\theta)$ ماتریس متناظر با عملگر تحدید کننده با بعد $2M \times \Lambda M$ می باشد:

$$\hat{\mathcal{I}}_h^h(\boldsymbol{\theta}) = \left(\hat{I}_h^h(\boldsymbol{\theta}^{\circ\circ})_{I_M} \quad \hat{I}_h^h(\boldsymbol{\theta}^{\circ\prime})_{I_M} \quad \hat{I}_h^h(\boldsymbol{\theta}^{\prime\circ})_{I_M} \quad \hat{I}_h^h(\boldsymbol{\theta}^{\prime\prime})_{I_M} \right),$$

به طوری که

$$\widehat{I}_h^h(\theta^\alpha) = \begin{pmatrix} \frac{(\mathbb{1} + \cos(\theta_\gamma^\alpha))(\mathbb{1} + \cos(\theta_\gamma^\alpha))}{\mathfrak{F}} & \circ \\ \circ & \frac{(\mathbb{1} + \cos(\theta_\gamma^\alpha))(\mathbb{1} + \cos(\theta_\gamma^\alpha))}{\mathfrak{F}} \end{pmatrix}.$$

به همین ترتیب ماتریس متناظر با عملگر درونیاب نیز تعریف می‌شود؛ $\tilde{\mathcal{I}}_h^h(\theta) = \tilde{\mathcal{I}}_h^h(\theta)^T$ در نهایت می‌توان $\tilde{\mathcal{A}}_{h,\tau}(\theta)$ را به صورت یک ماتریس بلوکی قطری 4×4 که هر درایه روی قطر، خود یک ماتریس بلوکی سه-قطری $2M \times 2M$ است تعریف کرد. به عبارت دیگر،

$$\tilde{\mathcal{A}}_{h,\tau}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{A}}_{h,\tau}(\boldsymbol{\theta}^{\circ\circ}) & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \tilde{\mathcal{A}}_{h,\tau}(\boldsymbol{\theta}^{11}) & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \tilde{\mathcal{A}}_{h,\tau}(\boldsymbol{\theta}^{1^{\circ}}) & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \tilde{\mathcal{A}}_{h,\tau}(\boldsymbol{\theta}^{\circ 1}) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{\circ\circ} \in \Theta_{\Upsilon_h},$$

و فرم کلی هر درایه $\tilde{A}_{h,\tau}(\theta^\alpha)$ به صورت زیر خواهد بود:

$$\tilde{\mathcal{A}}_{h,\tau}(\theta^\alpha) = \begin{pmatrix} \hat{A}_h(\theta^\alpha) & -\frac{1}{\nu} & \circ & \circ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha & \hat{A}_h(\theta^\alpha) & \circ & \circ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\tau} & \circ & \hat{A}_h(\theta^\alpha) & -\frac{1}{\nu} & \circ & \circ & \vdots \\ \circ & \circ & \alpha & \hat{A}_h(\theta^\alpha) & \circ & \frac{1}{\tau} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \frac{1}{\tau} & \circ & \hat{A}_h(\theta^\alpha) & -\frac{1}{\nu} & \circ \\ \vdots & \vdots & \circ & \circ & \alpha & \hat{A}_h(\theta^\alpha) & \circ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \frac{1}{\tau} & \circ & \circ & \hat{A}_h(\theta^\alpha) & -\frac{1}{\nu} \end{pmatrix}.$$

با دنبال کردن توضیحات فصل پیشین به راحتی می‌توان عبارت $\hat{A}_h(\theta^\alpha)$ را محاسبه نمود:

$$\hat{A}_h(\theta^\alpha) = \frac{1}{\tau} - \frac{4\sigma}{h^2} \left(\sin^2\left(\frac{\theta^\alpha}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\theta^\alpha}{4}\right) \right).$$

حال با توجه به عملگر دو-شبکه‌ای $\tilde{\mathcal{T}}_{h,\tau}^{2h} = \tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}^{\nu} \tilde{\mathcal{C}}_{h,\tau}^h \tilde{\mathcal{S}}_{h,\tau}^{\nu}$ که همه عملگرهای دخیل در این رابطه پیش‌تر تعریف شده‌اند، عامل همگرایی روش دو-شبکه‌ای SAMA برای دستگاه کنترل بهینه مورد بحث، با عبارت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\rho = \sup_{\Theta_{2h}} \left(\rho \left(\tilde{\mathcal{T}}_{h,\tau}^{2h} \right) \right). \quad (15.5)$$

۵.۵ نتایج عددی

در جدول ۴.۵ عامل همگرایی توسط دو روش دو-شبکه‌ای SAMA و روش موجی چند-شبکه‌ای (درون پرانتز) در حالت مجانبی مقایسه شده‌اند. در مراحل میانی روش عددی از هموار کننده نیوتن-گاوس-سایدل نقطه‌ای با بردار شروع اولیه تصادفی و عبارت منبع برابر با صفر استفاده شده است. پارامترهای ثابت عبارتند از $M = 32$ ، $\sigma = 1$ و $\nu = 10^{-1}$. همانطور که ملاحظه می‌شود نتایج به ازای مقادیر مختلف $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ روی شبکه‌های فضایی متغیر از 64×64 تا 512×512 ارائه شده است.

$\log_2 \lambda$	-6	-4	-2	0	2	4	6
h_x							
64×64	0.0111 (0.0098)	0.0651 (0.0569)	0.1541 (0.1382)	0.1773 (0.1643)	0.1923 (0.1747)	0.1922 (0.1742)	0.1920 (0.1741)
128×128	0.0090 (0.0082)	0.0565 (0.0534)	0.1452 (0.1461)	0.1798 (0.1676)	0.1915 (0.1881)	0.1920 (0.1843)	0.1919 (0.1835)
256×256	0.0075 (0.0070)	0.0498 (0.0477)	0.1374 (0.1402)	0.1825 (0.1916)	0.1907 (0.1884)	0.1918 (0.1853)	0.1919 (0.1850)
512×512	0.0064 (0.0062)	0.0445 (0.0431)	0.1305 (0.1349)	0.1854 (0.1921)	0.1900 (0.1889)	0.1916 (0.1854)	0.1918 (0.1891)

جدول ۴.۵: مقایسه عامل همگرایی دو-شبکه‌ای SAMA با عامل همگرایی مجانبی چرخه- W (درون پرانتز) به ازای مقادیر مختلف λ روی شبکه‌های فضایی متغیر از 64×64 تا 512×512 با فرض $\nu = 10^{-1}$ و $\sigma = 1$ ، $M = 32$.

همانطور که از نتایج جدول مشاهده می‌شود، مقادیر عددی محاسبه شده و مقادیر پیش‌بینی شده بسیار به هم نزدیک می‌باشند. لذا می‌توان نتیجه گرفت که روش SAMA برای پیش‌بینی عامل همگرایی روش موجی چند-شبکه‌ای روی دستگاه معادلات نیز روشی بسیار کارآمد می‌باشد.

مراجع

- [1] A. Borzì, and G. Roland. Distributed optimal control of lambda-omega systems, Journal of Numerical Mathematics, **14.1** (2006), 17–40.
- [2] A. Brandt, S. F. McCormick, J. W. Ruge, Algebraic multigrid (AMG) for automatic multigrid solution with application in geodetic computations, In: Evans, D.J. (ed.) Sparsity and its Application (1984), 257–284.
- [3] A. Brandt. Multi-level adaptive techniques (MLAT) for fast numerical solution to boundary value problem. In: Proceedings of 3rd Internat. Conf. on Numerical Methods in Fluid Mechanics, (Lecture Notes in Physics 18), Paris (1972), 82–89.
- [4] A. Brandt. Multilevel adaptive solution to boundary value problems. Math. Comp. **31** (1977), 333–390.
- [5] A. Brandt. Multigrid techniques, guide with applications to fluid dynamics, GMD studien Nr. 85, Snakh Augustin 1984.
- [6] A. Hagberg, et al. Controlling domain patterns far from equilibrium, Physical review letters, **76.3** 1996.
- [7] A. R. Newton AND A. L. Sangiovanni-Vincentelli, Relaxation-based electrical simulation, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **4** (1983), 485–524.
- [8] C. Canuto, et al. Spectral methods: fundamentals in single domains. Springer Science and Business Media, 2007.
- [9] C. I. Byrnes, et al. Output regulation for linear distributed parameter systems, IEEE Transactions on Automatic Control, **45.12** (2000), 2236–2252.
- [10] C. Lubich and A. Ostermann, Multi-grid dynamic iteration for parabolic equations, BIT **27** (1987), 216–234.

-
- [11] C. Rodrigo, and F.J. Gaspar and F.J. Lisbona, Geometric multigrid methods on semi-structured triangular grids, The 7 th GRACM Congress hosts the 1st ECCOMAS PhD Olympiad 2011.
 - [12] D. Kulkarni, D. Schmidt and S. Tsui, Eigenvalues of tridiagonal pseudo-toeplitz, Linear Algebra and its Applications, **297** (1999), 63–80.
 - [13] E. Barkanov, Introduction to the finite element method. Riga Technical University, 2001.
 - [14] E. L. Ortiz, and M. K. El-Daou, The tau method as an analytic tool in the discussion of equivalence results across numerical methods. Computing, **60.4** (1998), 365–376.
 - [15] E. Lelarsmee, A. E. Ruehli, AND A. L. Sangiovanni-Vincentelli, The waveform relaxation method for time-domain analysis of large scale integrated circuits, IEEE Trans. CAD C Sys. (1982), 131–145.
 - [16] F. J. Gaspar, and J. L. Gracia and F. J. Lisbona, Fourier analysis for multigrid methods on triangular grids, SIAM Journal on Scientific Computing, **31(3)** (2009), 2081–2102.
 - [17] G. H. Golub, and C. F. Van Loan. Matrix computations, **3** 2013.
 - [18] H. Moghaderi, M. Dehghan, and M. Hajarian. A fast and efficient two-grid method for solving d-dimensional poisson equations. Numer Algor. (2015), 1–55.
 - [19] J. Janssen, and S. Vandewalle. Multigrid waveform relaxation of spatial finite element meshes: the continuous-time case. SIAM J. NUMER. ANAL. **33.2** (1996), 456–474.
 - [20] J. Janssen and S. Vandewalle. Multigrid waveform relaxation on spatial finite element meshes: the discrete-time case. SIAM J. SCI. COMPUT. **17.1** (1996), 133–155.
 - [21] J. White, F. Oden A. S. Vincentelli, A. Ruehli. Waveform relaxation: Theory and practice. Electronics Research Laboratory, College of Engineering, UCB, 1985.
 - [22] K. Stiiben and Trottenberg, U., Multigrid methods, Springer, Berlin, 1982.
 - [23] M. A. Olshanskii, Lecture notes on multigrid methods. Moscow: Institute of Numerical Mathematics, RAS 2012.

- [24] M. Asadzadeh and B. Svensson, An Introduction to the Finite Element Method (FEM) Part II: PDE in $\mathbb{R}^n$.
- [25] M. S. Gockenbach, Understanding and implementing the finite element method. Siam, 2006.
- [26] N. S. Bakhvalov. On the convergence of a relaxation method with natural constraints on the elliptic operator. USSR Comput. Math. Math. Phys. **6** (1966), 101–135.
- [27] O. Nevanlinna, Remarks on Picard-Lindelöf iteration, Part I, BIT **9** (1989), 328–346.
- [28] P. Wesseling. Introduction to multigrid methods, INSTITUTE FOR COMPUTER APPLICATIONS IN SCIENCE AND ENGINEERING HAMPTON VA, 1995.
- [29] R. P. Fedorenko. A relaxation method for solving elliptic difference equations. USSR Comput. Math. Phys. **1** (1962), 1092–1096.
- [30] R. P. Fedorenko. The speed of convergence of one iterative process. USSR Comput. Math. Math. Phys. **4** (1964), 227–235.
- [31] R. Wienands, W. Joppich, Practical fourier analysis for multigrid methods, CRC press, 2004.
- [32] S. Brenner, Susanne, and R. Scott. The mathematical theory of finite element methods. Vol. 15. Springer Science & Business Media, 2007.
- [33] S. Friedhoff and S. MacLachlan, A generalized predictive analysis tool for multigrid methods, Numer. Linear Algebra Appl. **22** (2015), 618–647.
- [34] S. Larsson, , and V. Thomée. Partial differential equations with numerical methods. Springer Science & Business Media, 2008.
- [35] S. Vandewalle, Parallel Multigrid Waveform Relaxation for Parabolic Problems, B.G. Teubner, Stuttgart, 1993.
- [36] S. Vandewalle AND R. Piessens, Efficient parallel algorithms for solving initial-boundary value and time periodic parabolic partial differential equations, SIAMJ. Sci. Statist. Comput. **13** (1992), 1330–1346.
- [37] S. Vandewalle, Parallel multigrid waveform relaxation for parabolic problems. B. G. Teubner Stuttgart, 1993.

- [38] S. Vandewalle , R. Piessens, On dynamic iteration methods for solving time-periodic differential equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, **30(1)** (1992), 286–303.
- [39] U. Miekkala and O. Nevanlinna, Convergence of dynamic iteration methods for initial value problems, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **8** (1987), 459–482.
- [40] U. Miekkala, Dynamic iteration methods applied to linear DAE systems, J. Comput. Appl. Math. **25** (1989), 133–151.
- [41] U. MIEKKALA AND O. NEVANLINNA, Convergence of dynamic iteration methods for initial value problems, SIAM J. Sci. Statist. Comput. **8** (1987), 459–482.
- [42] U. Trottenberg, C. Oosterlee, and A. Schuller. Multigrid. Academic press, 2000.
- [43] V. Thomée. Galerkin finite element methods for parabolic problems. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [44] W. Hackbusch, Iterative Solution of Large Sparse System of Equations. Springer, New York 1992
- [45] W. Hackbusch. Multigrid Methods and Applications. Springer, Berlin, 1985.
- [46] W. L. Briggs, and S. F. McCormick. A multigrid tutorial. Siam, 2000.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Splitting	افراز
Laplace transformation	تبدیل لاپلاس
Sparse	تنک
Finite element method	روش المان متناهی
Finite difference method	روش تفاضلات متناهی
Jacobi method	روش ژاکوبی
Guass-seidel method	روش گوس-سایدل
Waveform relaxation methods	روش‌های تخفیفی موجی
Multi-grid methods	روش‌های چند-شبکه‌ای
Successive approxamation methods	روش‌های سرعت‌بخش
Continuous-time	زمان پیوسته
Finite-time	زمان-متناهی
Infinite-time	زمان-نامتناهی
Mesh	شبکه
Spectral radius	شعاع طیفی
Operator	عملگر
Restriction operator	عملگر تحدید کننده
Prolongation operator	عملگر توسیعی
Spatial	فاصله‌ای
Convolution Volterra	کانولوشن ولترا
Bounded	کراندار
Non-singular matrix	ماتریس نامنفرد
Positive definite	مثبت معین
Partial differential	مشتقات جزئی
Elliptic equations	معادلات بیضوی

Parabolic equations	معادلات سهموی
Eigen values	مقادیر ویژه
Vector norm	نرم برداری
Kernel	هسته
Matrix-valued kernel	هسته ماتریسی – مقدار
Convergence	همگرایی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Bounded	کراندار
Continuous-time	زمان پیوسته
Convergence	همگرایی
Convolution Volterra	کانولوشن ولترا
Eigen values	مقادیر ویژه
Elliptic equations	معادلات بیضوی
Finite difference method	روش تفاضلات متناهی
Finite element method	روش المان متناهی
Finite-time	زمان-متناهی
Guass-seidel method	روش گوس-سایدل
Infinite-time	زمان-نامتناهی
Jacobi method	روش ژاکوبی
Kernel	هسته
Laplace transformation	تبدیل لاپلاس
Matrix-valued kernel	هسته ماتریسی-مقدار
Mesh	شبکه
Multi-grid methods	روش‌های چند-شبکه‌ای
Non-singular matrix	ماتریس نامنفرد
Operator	عملگر
Parabolic equations	معادلات سهموی
Partial differential	مشتقات جزئی
Positive definite	مثبت معین
Prolongation operator	عملگر توسیعی
Restriction operator	عملگر تحدید کننده
Sparse	تنک

Spatial	فاصله‌ای
Spectral radius	شعاع طیفی
Splitting	افراز
Successive approxamation methods	روش‌های سرعت‌بخش
Vector norm	نرم برداری
Waveform relaxation methods	روش‌های تخفیفی موجی

Aabstract

The finite element method is a very well-known and efficient scheme to the discretization of PDE equations. Among some discretization tools, we pick this one to discretize the heat equation in two and three dimensions. It is more involved and more general than that group of finite difference methods since the mass matrix must be considered. The resulted sparse matrix should be solved efficiently by special schemes such as the general group of multigrid methods. We refer to the well-known v-cycle, w-cycle which usually have been applied and analysed on the elliptic equations by many researchers. So, in this thesis, we work on the parabolic equations to keep the generality of the study. As some results of our work, we can refer to presenting a new two grid, investigation of the v- and w-cycles on rectangular and general triangular grids in two and three dimensions. moreover, a nonlinear system of control equations is solved by FAS multigrid methods. comprehensively study of different convergence analysis and extending well them is one of the big advantages of this thesis.

Keywords: Partial differential equations; Finite element method; Waveform relaxation method; Multigrid method.



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Numerical Analysis

Investigation And Implementation Of A Multi-Grid Method On The Time-Dependant Equations with Finite-Element Discretization

By: Noora Habibi

Supervisor:
Ali Mesforush

February 2021