

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش جبر

رساله دکتری

بررسی ساختار عناصر منظم در توسیع‌هایی از حلقه‌های ناجابه‌جایی

نگارنده: مریم حمیدی زاده

استاد راهنما

دکتر ابراهیم هاشمی

استاد مشاور

دکتر عبدالله آل هوز

بهمن ۱۳۹۹

شماره: ۳۵۸-۲۲
تاریخ: ۹۹/۱۲/۹

ویرایش:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره ۱۱: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود خانم مریم حمیدی زاده دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض (حلقه و مدول) به شماره دانشجویی ۹۴۰۰۳۵۵ ورودی ۱۳۹۴ ماه مهر سال ۹۴ در تاریخ ۹۹/۱۱/۲۶ از رساله نظری / عملی خود با عنوان: بررسی ساختار عناصر منظم در توسیع هایی از حلقه های ناجابه جایی دفاع و با اخذ نمره ۲۵ به درجه عالی نائل گردید.

جدول تعیین درجه نمره رساله برای ورودیهای ۹۴ و ماقبل

الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ☒ (ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۷ ☐
(ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹-۱۵ ☐ (د) مردود: کمتر از ۱۵ ☐

جدول تعیین درجه نمره رساله برای ورودیهای ۹۵ و مابعد

الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ☐ (ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹-۱۸ ☐
(ج) درجه خوب: نمره ۱۷/۹۹-۱۶ ☐ (د) مردود: کمتر از ۱۶ ☐

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد/ استاذ راهنما	استاد	
۲	دکتر عبداله آل هوز	مشاور/ مشاورین	دانشیار	
۳	دکتر سید احمد موسوی	استاد مدعو خارجی	استاد	
۴	دکتر سید حیدر موسوی	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۵	دکتر مهدی رضا خورشیدی	استاد مدعو داخلی	استادیار	
۶	دکتر مهدی قوتمند	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی خانم مریم حمیدی زاده بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تقدیم به پدر عزیزتر از جانم و روح پاک مادر مهربانم
من اینک در ابتدای راه آموختن فراتر از آنچه آموختم،
سوگند می‌خورم به نام مقدس عشق،
سوگند به لحظه‌های خاموش صبر مادر،
سوگند به گرمی دستان استوار پدر،
آنچه امروز در برابرش ایستاده‌ام کمترین اندوخته‌ایست که با هرچه نامش را عشق و صبر
و استواری می‌نامند، به تو پدر و به تو مادر تقدیم می‌کنم.
و تقدیم به کسانی که از سرمایه وجودی علم خود بی‌دریغ بخشیدند تا سهمی از نور را در
خود جای نهند ...

((نفس‌هایتان پناه راه من است.))

سپاس گزاری...

دستی که گشاده است

می برد،

می آورد،

رهنمونت می شود

به خانه‌ئی که

نور دلچسبش گرمی بخش است.

سپاس خدایی را که اول است و پیش از او اولی نبوده و آخر است و آخری نباشد. منت خدای عزوجل بر من است که توفیق راه‌یابی به وادی علم را عطا فرمود. اکنون که محقق شده است رسیدن به پایان سر فصل، بر خود واجب می‌دانم که ارج نهم بزرگانی را که آورده‌های شمع وجودشان روشن‌گر راهم است.

سپاس بی‌شائبه‌ی خود را تقدیم می‌دارم به محضر استاد ارجمندم جناب آقای دکتر ابراهیم هاشمی که همواره رهنمودهایشان یاری‌دهنده مشکلات علمی‌ام بوده است. ایشان در طی این دوره صبورانه و خالصانه از هیچ حمایتی دریغ نکردند و مسئولیت‌پذیریشان مثال زدنی می‌باشد. تقدیر و تشکر خود را از استاد مشاور جناب آقای دکتر عبدالله آل‌هوز صمیمانه ابراز می‌دارم که همواره نکات و بیانات ایشان راهگشای گره‌های این مسیر بود.

همچنین، از داوران گرامی، جناب آقای دکتر سید احمد موسوی، جناب آقای دکتر سید حیدر جعفری و جناب آقای دکتر مهدی رضا خورسندی که زحمت داوری و تصحیح این رساله را برعهده داشتند سپاسگزارم. در پایان از پدر و مادر مهربانم و برادر عزیزم کمال تشکر را دارم.

مریم حمیدی زاده

بهمن ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب مریم حمیدی زاده دانشجوی دکتری رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده رساله با عنوان بررسی ساختار عناصر منظم در توسیع‌هایی از حلقه‌های ناجابه‌جایی، تحت راهنمایی دکتر ابراهیم هاشمی متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این رساله، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم حمیدی زاده

بهمن ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این رساله ضمن مطالعه ساختار توسیع‌های آر، با استفاده از حلقه‌هایی مانند آبلی، خاصیت IFP ، دوئو راست و برگشت‌پذیر برخی از نتایج قابل توجه را روی حلقه‌های ناجابه‌جایی بررسی کنیم. با استفاده از این ویژگی‌ها به حلقه‌های جابه‌جایی نزدیک می‌شویم و به همین دلیل به آن‌ها پسرعموهای حلقه‌های جابه‌جایی می‌گویند. همچنین، عناصر وارون‌پذیر، خودتوان، منظم فن نیومان، موضعی فن نیومان، π -منظم و تمیز را در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x; \alpha, \delta]$ ، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب $R[x, x^{-1}; \alpha]$ و حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ مشخص می‌نمائیم. در ادامه ضمن بررسی خواص نظری رادیکال در حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ، رادیکال جیکبسون آن‌ها را نیز تعیین می‌نمائیم.

کلمات کلیدی: حلقه‌ی آبلی؛ حلقه‌ی برگشت‌پذیر؛ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب؛ حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب؛ حلقه‌ی دوئو راست؛ حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب؛ خاصیت IFP ؛ رادیکال جیکبسون؛ عناصر π -منظم؛ عناصر تمیز؛ عناصر خودتوان؛ عناصر منظم فن نیومان؛ عناصر موضعی فن نیومان؛ عناصر وارون‌پذیر.

رده‌بندی موضوعی ریاضیات: اولیه: $16S36$ ، $16S15$ ، $16N20$ ، $16N40$ ، $16W60$ ؛ ثانویه: $16U99$ ، $16U60$.

لیست مقالات مستخرج از رساله

1. E. Hashemi, M. Hamidizadeh and A. Alhevaz, Some types of ring elements in Ore extensions over noncommutative rings, *Journal of Algebra and Its Applications*, **16**(8) (2017), 1750201 (17 pages).
2. E. Hashemi, M. Hamidizadeh and A. Alhevaz, On clean and regular elements of noncommutative ring extensions, *Comm. Algebra*, **47**(4) (2019), 1650–1661.
3. E. Hashemi, M. Hamidizadeh and A. Alhevaz, On the Jacobson radical of skew inverse Laurent series ring, *Journal of Algebra and Its Applications*, **18**(09) (2019), 1950177 (10 pages).
4. E. Hashemi, M. Hamidizadeh and A. Alhevaz, A fresh look into skew inverse Laurent series rings, *Communications in Algebra*, **48**(4) (2020), 1439–1451.
5. M. Hamidizadeh, and E. Hashemi, The regular elements in Ore extension rings, *The 49th Annual Iranian Mathematics Conference*, Iran University of Science and Technology, 23-26 August (2018).
6. J. Bell, M. Hamidizadeh, H. Huang and H. Venegas, Noncommutative analogues of a cancellation theorem of Abhyankar, Eakin, and Heinzer, *Beiträge zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebra and Geometry*, (2020), 1–21.
7. M. Hamidizadeh, E. Hashemi and A. Reyes, A classification of ring elements in skew PBW extensions over compatible rings, *International Electronic Journal of Algebra*, **28**(28) (2020), 75–97.

فهرست مطالب

۱	پیشگفتار	۱
۷	تعاریف و مفاهیم مقدماتی	۲
۷	۱.۲ مفاهیم مورد نیاز از ویژگی‌های حلقه‌ای	۷
۱۷	۲.۲ مفاهیم مورد نیاز از توسیع‌های اریب حلقه‌ها	۱۷
۲۳	۳ بررسی عناصر وارون‌پذیر و خودتوان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب	۲۳
۲۳	۱.۳ بررسی عناصر وارون‌پذیر حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب	۲۳
۲۷	۲.۳ بررسی عناصر خودتوان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب	۲۷
۲۸	۳.۳ بررسی برخی از ویژگی‌های بین حلقه‌ی R و حلقه‌ی توسیع جردن $A(R, \alpha)$	۲۸
۲۹	۴.۳ بررسی عناصر وارون‌پذیر و خودتوان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب	۲۹
۳۷	۴ بررسی عناصر منظم و تمیز حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب	۳۷
۳۷	۱.۴ بررسی عناصر منظم حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب	۳۷
۴۱	۲.۴ بررسی عناصر π -منظم و تمیز حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب	۴۱
۴۸	۳.۴ بررسی عناصر منظم و تمیز حلقه‌ی توسیع جردن $A(R, \alpha)$ و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب	۴۸
۵۳	۵ بررسی رادیکال جیکبسون، خواص رادیکال و تمیز حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب	۵۳
۵۴	۱.۵ بررسی رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب	۵۴
۶۲	۲.۵ بررسی خواص رادیکال حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب	۶۲
۶۷	۳.۵ بررسی خاصیت تمیز حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب	۶۷
۷۵	۶ پیشنهادات برای کارهای آتی	۷۵
۷۷	مراجع	۷۷
۸۳	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	۸۳
۸۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۸۷

فصل ۱

پیشگفتار

حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های آر (توسیع‌های آر) اولین بار توسط ریاضیدان نروژی آر^۱ در سال ۱۹۳۳ معرفی شد. در ابتدا حلقه‌های عملگر دیفرانسیلی که زیربنای ریاضیاتی مکانیک کوانتوم بود، مورد بررسی قرار گرفت. سوالاتی که در مورد گروه کوانتومی، نظریه‌ی موضعی سازی و نظریه‌ی بعد برقرار بود، دلیلی برای تحقیق بیشتر روی توسیع‌های آر و ایده‌آل‌های آن شد. توسیع‌های آر در ساختارهای جبرهای دوری تعمیم یافته و توسیع‌های دیفرانسیلی تعمیم یافته (که همان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب حلقه‌های عملگر دیفرانسیلی هستند) کاربرد فراوانی دارند.

ویژگی‌های مختلف حلقه‌ها مانند ۲-اولیه^۲، آبلی^۳، خاصیت IFP ^۴، دوئو راست^۵، برگشت‌پذیر^۶ و کاهشی^۷ پلی بین حلقه‌های جابه‌جایی و ناجابه‌جایی ایجاد می‌کنند و با این خواص می‌توان حلقه‌های جابه‌جایی را تعمیم داد. اهمیت مطالعه‌ی این رده از حلقه‌ها در نظریه‌ی حلقه‌های ناجابه‌جایی، حدس کوتاه^۸ می‌باشد که آیا هر ایده‌آل یک‌طرفه پوچ مشمول در یک ایده‌آل دوطرفه پوچ می‌باشد. بل^۹ در مرجع [۷]، نشان داد که این حلقه‌ها شرایط حدس را برآورده می‌کنند.

برخی از عناصر حلقه‌ای مانند عناصر وارون‌پذیر و خودتوان نقش مهمی در نظریه حلقه‌های ناجابه‌جایی

¹Ore

²2-Primal

³Abelian

⁴Insertion-of-factors-property

⁵Right Duo

⁶Reversible

⁷Reduced

⁸Köthe's conjecture

⁹Bell

ایفا می‌کنند. همان‌طور که می‌دانیم در حلقه‌ی جابه‌جایی R ، چندجمله‌ای $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x]$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $a_0 \in U(R)$ و برای هر $a_i \in Nil(R)$ ، $i \geq 1$ ، ساختار عناصر وارون‌پذیر حلقه‌ی $R[x; \alpha]$ را به‌دست آورد. او ثابت کرد که اگر حلقه‌ی R برگشت‌پذیر و α -سازگار باشد، آنگاه $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x, \alpha]$ وارون‌پذیر است اگر و تنها اگر $a_0 \in U(R)$ و برای هر $a_i \in Nil(R)$ ، $i \geq 1$.

اندرسون^{۱۱} و بدای^{۱۲} در مرجع [۴]، لم ۳.۱، نشان دادند که اگر R حلقه‌ی جابه‌جایی باشد، آنگاه $Idem(R[x]) = Idem(R)$. همچنین، هنگ^{۱۳}، کیم^{۱۴} و کواک^{۱۵} در مرجع [۲۷]، نتیجه ۷، خودتوان‌های حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ را تحت شرایط خاصی به‌دست آوردند. آنها ثابت کردند که اگر R حلقه‌ی α -صلب باشد و $e = e_0 + e_1 x + \dots + e_n x^n \in R[x; \alpha, \delta]$ ، آنگاه $e^2 = e = e_0$.

مفهوم منظم فن نیومان در حلقه‌ها، در سال ۱۹۳۶ توسط جان فن نیومان^{۱۶} ارائه شد. حلقه‌ی R را منظم فن نیومان^{۱۷} می‌نامیم هرگاه برای هر عنصر $a \in R$ ، عنصری مانند $b \in R$ موجود باشد به‌طوری که $a = aba$. همچنین، حلقه‌ی R را π -منظم^{۱۸} می‌نامیم هرگاه برای هر عنصر $a \in R$ ، عنصری مانند $b \in R$ موجود باشد به‌طوری که برای برخی $n \geq 1$ ، داشته باشیم $a^n = a^n b a^n$. بدای^{۱۹} در مرجع [۶]، به نتایج مهمی در مورد حلقه‌های π -منظم و آبلی دست پیدا کرد. او ثابت کرد که حلقه‌ی دلخواه R ، π -منظم و آبلی است اگر و تنها اگر $Nil(R)$ ایده‌آل دوطرفه از R باشد و برای هر $x \in R$ ، عناصر $e \in Idem(R)$ ، $u \in U(R)$ و $w \in Nil(R)$ موجود باشند به‌طوری که $x = eu + w$.

اندرسون و بدای^{۲۰} در مرجع [۴]، عناصر منظم و تمیز^{۱۹} را در حلقه‌های جابه‌جایی مورد مطالعه قرار دادند. آنها ابتدا رابطه‌ی بین عناصر خودتوان و وارون‌پذیر و عناصر منظم فن نیومان را بررسی و ثابت کردند که عنصر $a \in R$ فن نیومان منظم است اگر و تنها اگر برای برخی از عناصر $u \in U(R)$ و $e \in Idem(R)$ داشته باشیم $a = ue$. همچنین، آنها نشان دادند هر عنصر از حلقه‌ی R ، منظم فن نیومان یا پوچ‌توان است اگر و تنها اگر R با بعد صفر یا کاهشی و یا شبه‌موضعی باشد و همچنین، یک حلقه‌ی غیردامنه R ، منظم فن نیومان (بولی) است اگر و تنها اگر تمام مقسوم‌علیه‌های صفر آن منظم فن نیومان (بولی) باشند. نویسندگان در این مرجع عناصر منظم و تمیز را در حلقه‌ی چندجمله‌ای $R[x]$ نیز مشخص کردند.

تعیین رادیکال جیکبسون^{۲۰} حلقه‌ها به‌ویژه، در توسیع چندجمله‌ای‌ها و سری‌های توانی حائز اهمیت می‌باشد. رادیکال جیکبسون حلقه‌ی R را با نماد $J(R)$ نشان می‌دهند که با اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال R برابر است، یا به‌طور معادل با اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های راست ماکسیمال R برابر است. همچنین،

¹⁰Chen¹¹Anderson¹²Badawi¹³Hong¹⁴Kim¹⁵Kwak¹⁶John Von Neumann¹⁷Von Neumann regular¹⁸ π -regular¹⁹Clean²⁰Jacobson radical

حلقه‌ی R را نیم‌ابتدائی^{۲۱} یا J -نیم‌ساده^{۲۲} می‌نامیم هرگاه $J(R) = 0$. آمیتسور^{۲۳} در مرجع [۳]، نشان داد که $J(R[x]) = (J(R[x]) \cap R)[x]$. همچنین، او ثابت کرد که اگر R ایده‌آل پوچ ناصفر نداشته باشد، آن‌گاه حلقه‌ی چندجمله‌ای $R[x]$ نیم‌ابتدائی است. قابل ذکر است که کارهای زیادی در زمینه بررسی رادیکال جیکبسون توسیع حلقه‌ها انجام شده است.

توگانباف^{۲۴} در مرجع [۵۵]، رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران^{۲۵} $R((x))$ را به‌دست آورد. او نشان داد که اگر حلقه‌ی R برای هر $a \in J(R)$ ، در شرط $J(R)a \subseteq aR$ صدق کند، آن‌گاه رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران $R((x))$ برابر با $P(R)((x))$ خواهد بود به‌طوری که $P(R)$ رادیکال اول حلقه‌ی R می‌باشد. در مرجع [۵۷]، ژو^{۲۶} و زیمبوسکی^{۲۷} ثابت کردند که اگر حلقه‌ی R ، ۲-اولیه باشد، آن‌گاه حلقه‌ی سری‌های لوران $R((x))$ تمیز است اگر و تنها اگر R حلقه‌ی نیم‌منظم^{۲۸} با $J(R)$ پوچ باشد. به‌علاوه، آن‌ها نشان دادند که برای حلقه‌ی ۲-اولیه R ، حلقه‌ی سری‌های لوران $R((x))$ نیم‌کامل^{۲۹} است اگر و تنها اگر $R((x))$ نیم‌منظم باشد اگر و تنها اگر R نیم‌کامل با $J(R)$ پوچ باشد.

توگانباف در مرجع [۵۳]، توانست رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران اریب $R((x; \alpha))$ را هنگامی که α خودریختی از R است، به‌دست آورد. او ثابت کرد که اگر $P(R)$ پوچ‌توان^{۳۰} و حلقه‌ی $R/P(R)$ گلدی راست^{۳۱} باشد، آن‌گاه رادیکال جیکبسون $R((x; \alpha))$ پوچ‌توان و برابر با $P(R)((x; \alpha))$ است. همچنین، او نشان داد که اگر $R/P(R)$ حلقه‌ای با اندیس کران‌دار^{۳۲} باشد، آن‌گاه رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران $R((x))$ برابر با $P(R)((x))$ خواهد بود.

در مرجع [۳۶]، رادیکال جیکبسون حلقه‌ی عملگر شبه دیفرانسیل^{۳۳} $R((x^{-1}; \delta))$ مشخص شده است. نویسندگان ثابت کردند که اگر $J(R)$ یک δ -ایده‌آل باشد و برای هر $a \in J(R)$ و $k \geq 0$ ، داشته باشیم $J(R)\delta^k(a) \subseteq aR$ ، آن‌گاه $J(R)\delta^k(a) \subseteq aR$.

خواص نظری حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب^{۳۴} $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ، توسط بسیاری از محققانی که علاقه‌مند به نظریه حلقه‌ها هستند، مورد بررسی قرار گرفته است. برای مطالعه بیشتر به مراجع [۱]، [۲]، [۱۶]، [۵۴] و [۵۵] رجوع شود. بعضی از این پژوهشگران با در نظر گرفتن $\delta = 0$ و برخی دیگر هنگامی که α نگاشت همانی باشد، در مورد این حلقه‌ها تحقیق کردند. هنگامی که از حالت‌های بیان شده فوق در مورد سری‌های لوران معکوس اریب به حالت کلی با خودریختی α و تابع α -مشتق، δ حرکت کنیم، با چالش بزرگتری روبه‌رو خواهیم شد. مطالعه‌ی حالت

²¹Semiprimitive

²² J -Semisimple

²³Amitsur

²⁴Tuganbaev

²⁵Laurent series ring

²⁶Zhou

²⁷Ziembowski

²⁸Semiregular

²⁹Semiperfect

³⁰Nilpotent

³¹Right Goldie

³²Bounded index

³³Pseudo-differential operator

³⁴Skew inverse Laurent series ring

کلی حلقه‌ی سری‌های لوران اریب بسیار مورد توجه قرار گرفته است.

این رساله شامل چهار فصل اصلی به صورت زیر می‌باشد:

در فصل اول، در ابتدا به بیان برخی از مفاهیم مقدماتی درباره‌ی ویژگی‌های حلقه‌ها و عناصر حلقه‌ای که در این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم. سپس در بخش دوم، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب و حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب را معرفی و برخی از مفاهیم بخش اول را درباره‌ی حلقه‌های ذکر شده، بررسی می‌کنیم.

در فصل دوم، ابتدا برخی از نتایجی که مربوط به حاصلضرب‌های ثابت عناصر حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x; \alpha, \delta]$ است هنگامی که R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار می‌باشد را ثابت می‌کنیم. به عنوان کاربردی از نتایج فوق، عناصر وارون‌پذیر حلقه‌ی توسیع اریب $R[x; \alpha, \delta]$ را مشخص می‌کنیم. در بخش دوم، خودتوان‌های حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ را تحت شرایط ذکر شده، تعیین می‌کنیم. در بخش سوم، روابط بین خواص حلقه‌ی R و توسیع جردن $A(R, \alpha)$ را مطالعه می‌کنیم. نتایجی که برای بررسی عناصر منظم و تمیز حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب مفید خواهند بود. در بخش پایانی این فصل، نتایج مربوط به حاصلضرب‌های ثابت در بخش اول را تعمیم می‌دهیم و با استفاده از روابط یافته شده در بخش دوم و سوم، عناصر وارون‌پذیر و خودتوان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب $R[x, x^{-1}; \alpha]$ را در حالتی که حلقه‌ی R ، α -صلب است، بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم، در ابتدا نتایجی در مورد روابط بین عناصر خودتوان و وارون‌پذیر و عناصر منظم فن نیومان هنگامی که حلقه‌ی R آبلی است، بیان می‌کنیم و با استفاده از این نتایج عناصر منظم فن نیومان و موضعی فن نیومان حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ را در حالتی که حلقه‌ی R دوئو راست و (α, δ) -سازگار است، بررسی می‌کنیم. همچنین، نشان می‌دهیم که اگر حلقه‌ی R خاصیت IFP داشته باشد، آن‌گاه $R = \text{vnr}(R) \cup \text{Nli}(R)$ اگر و تنها اگر R منظم فن نیومان یا موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\text{Nil}(R)$ باشد. در بخش دوم، نتایجی را در مورد عناصر π -منظم و تمیز حلقه‌ی آبلی R به دست می‌آوریم که در ادامه این بخش مورد استفاده قرار خواهند گرفت. سپس عناصر π -منظم و تمیز حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ را هنگامی که R دوئو راست و (α, δ) -سازگار است، بررسی می‌کنیم. در بخش آخر، ابتدا عناصر منظم و تمیز حلقه‌ی $A(R, \alpha) = A$ را هنگامی که R دارای خاصیت IFP باشد و α تکریختی از R است، مشخص می‌کنیم و در ادامه عناصر منظم و تمیز حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب $R[x, x^{-1}; \alpha]$ را برای حلقه‌ی α -صلب R ، تعیین خواهیم کرد.

در فصل چهارم، به بررسی رابطه‌ی بین برخی از عناصر وارون‌پذیر حلقه‌ی R و حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ می‌پردازیم. در ادامه بخش اول، رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ را با معرفی شرط (JC) روی حلقه‌ی R ، مشخص می‌کنیم و مثالی از حلقه‌هایی که در شرط (JC) صدق می‌کنند، ارائه خواهیم داد. در بخش دوم، برخی از خواص نظری رادیکال حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ثابت خواهیم کرد که اگر R حلقه‌ی ۲-اولیه و هر ایده‌آل اول مینیمال از R ، (α, δ) -ایده‌آل باشد، آن‌گاه رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ برابر با $P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ خواهد بود. به عنوان کاربردی از نتایج به دست آمده در این بخش، قادر خواهیم بود رده‌های جدیدی از حلقه‌هایی که در حدس مشهور کوتاه صدق می‌کنند، شناسایی کنیم. در حقیقت، نشان می‌دهیم که اگر R حلقه‌ی ۲-اولیه باشد به طوری که α خودریختی از R و δ یک تابع α -مشتق است و به علاوه، هر ایده‌آل اول مینیمال از R ، (α, δ) -ایده‌آل و $\text{Nil}(R)$ شمارا موضعاً پوچ‌توان باشد، آن‌گاه حلقه‌ی سری‌های لوران

معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ در حدس کوتاه صدق خواهد کرد. در بخش آخر، خواص تمیز و نیم‌کامل حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. در واقع، برخی از شرایط لازم و کافی برای این که حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ تمیز یا نیم‌کامل باشد، را ارائه خواهیم داد.

فصل ۲

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در سراسر این نوشتار فرض می‌کنیم R حلقه‌ی یکدار و شرکت‌پذیر باشد. اشتراک تمام ایده‌آل‌های اول حلقه‌ی R را رادیکال اول (یا رادیکال پوچ پایینی) می‌نامیم و با نماد $P(R)$ نشان می‌دهیم. همچنین، رادیکال پوچ بالایی را که با $Nil^*(R)$ نمایش می‌دهیم برابر با مجموع تمام ایده‌آل‌های پوچ حلقه‌ی R می‌باشد. برای حلقه‌ی R ، نمادهای $U(R)$ ، $M_n(R)$ ، $T_n(R)$ و e_{ij} به ترتیب نمایشگر عناصر وارون‌پذیر R ، حلقه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ روی حلقه‌ی R ، حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی حلقه‌ی R و ماتریس‌های همانی هستند. اگر $X \subseteq R$ ، آن‌گاه $\langle X \rangle_\ell$ ، $\langle X \rangle_r$ و $\langle X \rangle$ به ترتیب نمایان‌گر ایده‌آل چپ تولید شده توسط X ، ایده‌آل راست تولید شده توسط X و ایده‌آل تولید شده توسط X می‌باشند.

در این فصل، به معرفی مفاهیم و اطلاعاتی که در این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازیم.

۱.۲ مفاهیم مورد نیاز از ویژگی‌های حلقه‌ای

تعریف ۱.۱.۲. عنصر a از حلقه‌ی R را پوچ‌توان می‌نامیم هرگاه عدد صحیح مثبت n وجود داشته باشد به‌طوری که $a^n = 0$. مجموعه‌ی تمام عناصر پوچ‌توان R را با نماد $Nil(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲.۱.۲. حلقه‌ی R را کاهشی می‌نامیم، هرگاه عنصر پوچ‌توان ناصفر نداشته باشد. به عنوان مثال، حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها روی میدان حلقه‌ی کاهشی می‌باشد. توجه می‌کنیم که اگر $Nil(R)$ ایده‌آلی از R باشد، آن‌گاه حلقه‌ی $R/Nil(R)$ کاهشی است.

تعریف ۳.۱.۲. حلقه‌ی R را متقارن^۱ می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b, c \in R$ از $abc = 0$ نتیجه شود $bac = 0$.

تعریف ۴.۱.۲. حلقه‌ی R را برگشت‌پذیر می‌نامیم، هرگاه برای $a, b \in R$ از $ab = 0$ نتیجه شود $ba = 0$.
به‌عنوان مثال، حلقه‌های کاهشی و جابه‌جایی، برگشت‌پذیرند.

تعریف ۵.۱.۲. گوییم حلقه‌ی R خاصیت IFP دارد هرگاه برای هر $a, b \in R$ از $ab = 0$ نتیجه شود $aRb = 0$.
به‌عنوان مثال، حلقه‌های برگشت‌پذیر، دارای خاصیت IFP هستند.

لم ۶.۱.۲. [۴۲، لم ۳.۱] فرض کنیم حلقه‌ی R خاصیت IFP داشته باشد. در این صورت، $Nil(R)$ ایده‌آلی دوطرفه از R می‌باشد.

تعریف ۷.۱.۲. عنصر a از حلقه‌ی R را خودتوان^۲ می‌نامیم، هرگاه $a^2 = a$. مجموعه‌ی تمام عناصر خودتوان R را با نماد $Idem(R)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۲. حلقه‌ی R را آبدلی می‌نامیم، هرگاه تمام عناصر خودتوان R مرکزی^۳ باشند.
به‌عنوان مثال، حلقه‌های برگشت‌پذیر و دارای خاصیت IFP ، آبدلی هستند.

تعریف ۹.۱.۲. حلقه‌ی R را ددکیند-متناهی^۴ می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$ اگر $ab = 1$ ، آن‌گاه $ba = 1$ توجه می‌کنیم که هر حلقه‌ی آبدلی، ددکیند-متناهی است، چون اگر $ab = 1$ ، آن‌گاه داریم:

$$(ba)^2 = (ba)(ba) = b(ab)a = ba,$$

و در نتیجه

$$1 = (ab)^2 = a(ba)b = (ba)ab = ba,$$

زیرا R آبدلی است.

تعریف ۱۰.۱.۲. اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های چپ ماکسیمال حلقه‌ی R یا به طور معادل اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های راست ماکسیمال R را رادیکال جیکبسون می‌نامیم و با نماد $J(R)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱۱.۱.۲. [۳۹، قضیه ۱۹.۱] فرض کنیم R حلقه‌ی دلخواه باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) R فقط یک ایده‌آل چپ ماکسیمال دارد.

(۲) R فقط یک ایده‌آل راست ماکسیمال دارد.

(۳) $R/J(R)$ یک حلقه‌ی تقسیم است.

(۴) $R \setminus U(R)$ ایده‌آل R است.

(۵) $R \setminus U(R)$ با عمل جمع، گروه تشکیل می‌دهد.

تعریف ۱۲.۱.۲. حلقه‌ی R را موضعی^۵ می‌نامیم هرگاه در یکی از شرایط قضیه ۱۱.۱.۲، صدق کند.

¹Symmetric

²Idempotent

³Central

⁴Dedekind-finite

⁵Local

گزاره ۱۳.۱.۲. [۳۹، گزاره ۱۹.۲] فرض کنیم R حلقه‌ی موضعی باشد. در این صورت،

(۱) R فقط یک ایده‌آل ماکسیمال دارد.

(۲) حلقه‌ی R ددکیند-متناهی است.

(۳) حلقه‌ی R عنصر خودتوان غیربدیهی ندارد ($\text{Idem}(R) = \{0, 1\}$).

قضیه ۱۴.۱.۲. [۳۹، قضیه ۲۱.۱۰] فرض کنیم e عنصری خودتوان از حلقه‌ی R باشد. در این صورت،
 $J(eRe) = J(R) \cap J(eRe) = eJ(R)e$. به علاوه، داریم $eRe/J(eRe) \cong \bar{e}\bar{R}\bar{e}$ به طوری که $\bar{e}$ تصویر e در $\bar{R} = R/J(R)$ است.

تعریف ۱۵.۱.۲. حلقه‌ی R را نیم‌ابتدائی یا J -نیم‌ساده می‌نامیم هرگاه $J(R) = 0$. برای حلقه‌های نیم‌ابتدائی همواره گزاره زیر برقرار است:

نیم‌اول $\Rightarrow$ نیم‌ابتدائی $\Rightarrow$ نیم‌ساده

تعریف ۱۶.۱.۲. ایده‌آل محض P از حلقه‌ی R را کاملاً اول^۶ می‌نامیم هرگاه برای $a, b \in R$ اگر $ab \in P$ آن‌گاه $a \in P$ یا $b \in P$. واضح است که هر ایده‌آل کاملاً اول، اول می‌باشد.

تعریف ۱۷.۱.۲. حلقه‌ی R را ۲-اولیه می‌نامیم هرگاه $P(R) = \text{Nil}(R)$. هر حلقه‌ی کاهشی، ۲-اولیه می‌باشد.

یکی از مهمترین رده‌های حلقه‌ها در نظریه‌ی حلقه‌های ناجابه‌جایی، حلقه‌های ۲-اولیه هستند. شین^۷ در مرجع [۵۱]، برای حلقه‌ی دلخواه R ثابت کرد که R ، ۲-اولیه است اگر و تنها اگر هر ایده‌آل اول مینیمال از R ، کاملاً اول باشد (R/P دامنه باشد). این نتیجه، یکی از اولین نتایجی بود که در مورد حلقه‌های ۲-اولیه بیان شد. در حقیقت، واژه ۲-اولیه اولین بار توسط برکنمیر^۸، هدرلی^۹ و لی^{۱۰} در مرجع [۸]، در ارتباط با شبه‌حلقه‌های چپ معرفی شد.

تعریف ۱۸.۱.۲. ایده‌آل I از حلقه‌ی R را موضعاً پوچ‌توان^{۱۱} می‌نامیم، هرگاه برای هر زیرمجموعه‌ی متناهی $\{s_1, \dots, s_n\} \subseteq I$ ، عدد صحیح مثبت k وجود داشته باشد به طوری که حاصلضرب هر k عنصر از $\{s_1, \dots, s_n\}$ صفر باشد. به عنوان مثال، هر ایده‌آل پوچ‌توان از R ، یک ایده‌آل موضعاً پوچ‌توان است.

مجموع همه‌ی ایده‌آل‌های موضعاً پوچ‌توان حلقه‌ی R را رادیکال لویتسکی^{۱۲} R می‌نامیم و آن را با $L - \text{rad}(R)$ نشان می‌دهیم. بنابراین $L - \text{rad}(R)$ بزرگترین ایده‌آل موضعاً پوچ‌توان حلقه‌ی R است.

⁶Completely prime

⁷Shin

⁸Birkenmeier

⁹Heatherly

¹⁰Lee

¹¹Locally nilpotent

¹²Levitzki radical

تعریف ۱۹.۱.۲. حلقه‌ی R را ۲-اولیه ضعیف^{۱۳} می‌نامیم، هرگاه $Nil(R) = L - rad(R)$. بدیهی است هر حلقه‌ی ۲-اولیه، ۲-اولیه ضعیف است.

تعریف ۲۰.۱.۲. حلقه‌ی R را NI نامیم، هرگاه $Nil(R) = Nil^*(R)$. توجه داریم که هر حلقه‌ی ۲-اولیه ضعیف، NI است.

ارتباط حلقه‌هایی که تاکنون معرفی شده‌اند، به صورت زیر می‌باشد:

جابه‌جایی

↓

۲-اولیه ضعیف → ۲-اولیه → خاصیت IFP → برگشت‌پذیر → متقارن

↑

کاهش

تعریف ۲۱.۱.۲. حلقه‌ی R را دوئو راست (چپ) می‌نامیم هرگاه هر ایده‌آل راست (چپ) از R ، یک ایده‌آل دوطرفه باشد. اگر حلقه‌ای هم دوئو راست و هم دوئو چپ باشد آن را دوئو می‌نامیم. با محاسبه‌ی ساده، می‌توان نشان داد که حلقه‌های دوئو راست (چپ)، دارای خاصیت IFP هستند.

تعریف ۲۲.۱.۲. برای حلقه‌ی R ، مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر چپ^{۱۴} و مقسوم‌علیه‌های صفر راست^{۱۵} R را به ترتیب با نمادهای $Z_\ell(R)$ و $Z_r(R)$ نمایش می‌دهیم و به صورت، زیر تعریف می‌کنیم:

$$Z_\ell(R) = \{a \in R \mid ab = 0, \exists b \in R^*\}$$

9

$$Z_r(R) = \{a \in R \mid ba = 0, \exists b \in R^*\}.$$

همچنین، $Z(R) = Z_\ell(R) \cup Z_r(R)$ را مجموعه‌ی تمام مقسوم‌علیه‌های صفر R می‌نامیم.

تعریف ۲۳.۱.۲. عنصر $a \in R$ را منظم فن نیومان می‌نامیم هرگاه عنصر $x \in R$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم $a = axa$. مجموعه‌ی تمام عناصر منظم فن نیومان حلقه‌ی R را با نماد $\text{vnr}(R)$ نمایش می‌دهیم. به علاوه، اگر $\text{vnr}(R) = R$ ، آن‌گاه R را منظم فن نیومان می‌نامیم.

توجه داریم که $\text{Idem}(R) \subseteq \text{vnr}(R)$. همچنین، هر حلقه‌ی نیم‌ساده، منظم فن نیومان می‌باشد.

تعریف ۲۴.۱.۲. در جبر جابه‌جایی، بعد کرول^{۱۶} یک حلقه‌ی جابه‌جایی برابر با سوپریمم طول تمام زنجیره ایده‌آل‌های اول آن حلقه می‌باشد.

لم ۲۵.۱.۲. [۴۰، تمرین ۴.۱۵] برای حلقه‌ی جابه‌جایی R گزاره‌های زیر معادلند:

¹³Weakly 2-primal

¹⁴Left zero divisor

¹⁵Right zero divisor

¹⁶Krull dimension

(۱) حلقه‌ی R دارای بعد کرول ۰ می‌باشد.

(۲) $J(R)$ پوچ است و $R/J(R)$ منظم فن نیومان می‌باشد.

(۳) برای هر $a \in R$ زنجیر کاهشی $Ra \supseteq Ra^2 \supseteq \dots$ متوقف می‌شود.

(۴) برای هر $a \in R$ و $n \geq 1$ موجود است به‌طوری که a^n منظم فن نیومان می‌باشد.

تعریف ۲۶.۱.۲. عنصر $a \in R$ را π -منظم نامیم هرگاه برای برخی $x \in R$ و $n \geq 1$ داشته باشیم $a^n = a^n x a^n$. مجموعه‌ی تمام عناصر π -منظم حلقه‌ی R را با نماد $\pi - r(R)$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه، اگر $\pi - r(R) = R$ ، آن‌گاه حلقه‌ی R را π -منظم می‌نامیم. بدیهی است $\text{vnr}(R) \subseteq \pi - r(R)$.

قضیه ۲۷.۱.۲. [۴، قضیه ۴.۲] فرض کنیم R حلقه‌ی جابه‌جایی باشد. در این صورت، برای هر $a \in R$ ، گزاره‌های زیر معادلند:

$$(۱) \quad a \in \pi - r(R)$$

$$(۲) \quad \text{برای برخی } n \geq 1, a^n \in \text{vnr}(R)$$

$$(۳) \quad \text{برای برخی } a \in U(R), e \in \text{Idem}(R) \text{ و } n \geq 1 \text{ داریم } a^n = ue$$

$$(۴) \quad \text{عناصر } b \in \text{vnr}(R) \text{ و } w \in \text{Nil}(R) \text{ وجود دارند به‌طوری که } a = b + w$$

$$(۵) \quad \text{عناصر } a \in U(R), e \in \text{Idem}(R) \text{ و } w \in \text{Nil}(R) \text{ موجودند به‌طوری که } a = ue + w$$

$$(۶) \quad a + \text{Nil}(R) \in \text{vnr}(R/\text{Nil}(R))$$

$$(۷) \quad \text{عناصر } b \in R \text{ و } n \geq 1 \text{ وجود دارند به‌طوری که } a^n + b \in U(R) \text{ و } a^n b = 0$$

$$(۸) \quad \text{عصر } b \in R \text{ موجود است به‌طوری که } ab \in \text{Nil}(R) \text{ و } a + b \in U(R)$$

نتیجه ۲۸.۱.۲. [۶، نتیجه ۱] حلقه‌ی R آبلی و π -منظم است اگر و تنها اگر عناصر خودتوان حلقه‌ی R ، مرکزی باشند، $\text{Nil}(R)$ ایده‌آلی دوطرفه از R باشد و برای هر $x \in R$ ، عناصر $a \in U(R)$ ، $e \in \text{Idem}(R)$ و $w \in \text{Nil}(R)$ وجود داشته باشند به طوری که $x = eu + w$.

قضیه ۲۹.۱.۲. [۶، قضیه ۳] فرض کنیم R حلقه‌ی آبلی باشد. در این صورت، R ، π -منظم است اگر و تنها اگر $\text{Nil}(R)$ ایده‌آل دوطرفه از R و $R/\text{Nil}(R)$ حلقه‌ی منظم فن نیومان باشد.

نتیجه ۳۰.۱.۲. [۶، نتیجه ۲] فرض کنیم R حلقه‌ی آبلی باشد. در این صورت، R ، π -منظم است اگر و تنها اگر $R/N(R)$ ، π -منظم باشد.

تعریف ۳۱.۱.۲. حلقه‌ی R را بولی^{۱۷} می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $\text{Idem}(R) = R$. توجه می‌کنیم که هر حلقه‌ی بولی، منظم فن نیومان است.

¹⁷Boolean

تعریف ۳۲.۱.۲. [۱۳] عنصر $a \in R$ را موضعی فن نیومان^{۱۸} می‌نامیم هرگاه $a \in \text{vnr}(R)$ یا $1 - a \in \text{vnr}(R)$. مجموعه‌ی تمام عناصر موضعی فن نیومان حلقه‌ی R را با نماد $\text{vnl}(R)$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه، اگر $\text{vnl}(R) = R$ ، آن‌گاه R را حلقه‌ی موضعی فن نیومان می‌نامیم.

تعریف ۳۳.۱.۲. [۲۹] حلقه‌ی R را نیم‌موضعی^{۱۹} می‌نامیم، هرگاه $R/J(R)$ نیم‌ساده باشد. همچنین، حلقه‌ی R نیم‌کامل است، هرگاه R نیم‌موضعی باشد و خودتوان‌ها به پیمانه $J(R)$ بالا می‌آیند (یعنی اگر عنصر $a + J(R) \in R/J(R)$ خودتوان باشد، آن‌گاه عنصر خودتوان $e \in R$ وجود دارد که $a + J(R) = e + J(R)$).

تعریف ۳۴.۱.۲. [۵۶] حلقه‌ی R را حلقه‌ی تبادلی^{۲۰} می‌نامیم هرگاه گزاره‌های زیر برقرار باشند:

(۱) برای هر عنصر $a \in R$ ، خودتوان aR وجود دارد به‌طوری که $1 - e \in (1 - a)R$ ؛

(۲) برای هر عنصر $a \in R$ ، خودتوان Ra وجود دارد به‌طوری که $1 - e \in R(1 - a)$ ؛

(۳) برای هر مدول X و هر تجزیه مستقیم

$$X = M \oplus Y = \bigoplus_{i \in I} X_i,$$

که $M \cong R_R$ ، زیرمدول‌های $X'_i \subseteq X_i$ ($i \in I$) وجود دارند به‌طوری که:

$$X = M \oplus \left(\bigoplus_{i \in I} X'_i \right).$$

تعریف ۳۵.۱.۲. [۴۷] عنصر $a \in R$ را تمیز می‌نامیم هرگاه a را بتوان به فرم مجموع یک عنصر خودتوان و یک عنصر وارون‌پذیر بنویسیم. مجموعه‌ی تمام عناصر تمیز R را با نماد $\text{cln}(R)$ نمایش می‌دهیم. به‌علاوه، اگر $\text{cln}(R) = R$ ، آن‌گاه R را حلقه‌ی تمیز می‌نامیم.

بدیهی است که عناصر وارون‌پذیر و خودتوان، تمیز هستند و عنصر a تمیز است اگر و تنها اگر $1 - a$ تمیز باشد. لذا هر حلقه‌ی موضعی، تمیز است.

مفهوم حلقه‌های تمیز توسط نیکلسون^{۲۱} در مرجع [۴۷]، در رابطه با حلقه‌های تبادلی مطرح گردید. او ثابت کرد که هر حلقه‌ی تمیز، حلقه‌ی تبادلی است و عکس آن هنگامی برقرار است که تمام خودتوان‌های حلقه مرکزی باشند. کلاس حلقه‌های تمیز کاملاً وسیع است و برای مثال شامل حلقه‌های نیم‌کامل است. کامیلو^{۲۲} و یو^{۲۳} در مرجع [۹، قضیه ۹]، نشان دادند که یک حلقه، نیم‌کامل است اگر و تنها اگر تمیز باشد و شامل هیچ خانواده‌ی نامتناهی از خودتوان‌های متعامد^{۲۴} نباشد. به‌علاوه، آنها در مرجع [۹، قضیه ۵]، نشان دادند که هر عنصر منظم-وارون‌پذیر^{۲۵}، تمیز است. برای خواص ابتدایی این حلقه‌ها و همچنین برای توصیف عناصر تمیز در حلقه‌های چندجمله‌ای به مرجع [۳۳] و [۴۸] ارجاع می‌دهیم.

¹⁸Von Neumann local

¹⁹Semilocal

²⁰Exchange

²¹Nicholson

²²Camillo

²³Yu

²⁴Orthogonal idempotent

²⁵Unit-regular

لم ۳۶.۱.۲. [۵۷، لم ۲.۳] فرض کنیم a یک عنصر دلخواه از حلقه‌ی R باشد و $e^2 = e \in R$ به‌طوری که $ea(1-e)$ و $ae(1-e)$ مشمول در $J(R)$ هستند. اگر ae و $ea(1-e)$ ، به ترتیب عناصری تمیز از حلقه‌های eRe و $(1-e)R(1-e)$ باشند، آن‌گاه a عنصری تمیز از R خواهد بود.

گزاره ۳۷.۱.۲. [۹، گزاره ۷] فرض کنیم R حلقه‌ی دلخواه باشد. در این صورت، R تمیز است اگر و تنها اگر $R/J(R)$ تمیز باشد و خودتوان‌ها به پیمانه $J(R)$ بالا می‌آیند.

تعریف ۳۸.۱.۲. فرض کنیم α درون‌ریختی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت، تابع جمعی $\delta : R \rightarrow R$ را تابع α -مشتق می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in R$ داشته باشیم $\delta(ab) = \delta(a)b + \alpha(a)\delta(b)$.

تعریف ۳۹.۱.۲. فرض کنیم δ یک تابع α -مشتق روی حلقه‌ی R و I ایده‌آلی از R باشد. در این صورت، I را α -ایده‌آل می‌نامیم، هرگاه $\alpha(I) \subseteq I$. همچنین، I را δ -ایده‌آل می‌نامیم، هرگاه $\delta(I) \subseteq I$. اگر I هم α -ایده‌آل و هم δ -ایده‌آل باشد، آن‌گاه I را (α, δ) -ایده‌آل می‌نامیم.

تذکر ۴۰.۱.۲. فرض کنیم δ یک تابع α -مشتق روی R باشد. اگر I یک (α, δ) -ایده‌آل از R باشد، آن‌گاه نگاشت $\bar{\alpha} : R/I \rightarrow R/I$ با ضابطه $\bar{\alpha}(a+I) = \alpha(a) + I$ یک درون‌ریختی است و $\bar{\delta} : R/I \rightarrow R/I$ با ضابطه $\bar{\delta}(a+I) = \delta(a) + I$ یک تابع $\bar{\alpha}$ -مشتق است.

تعریف ۴۱.۱.۲. حلقه‌ی R را α -صلب^{۲۶} می‌نامیم، هرگاه درون‌ریختی $\alpha : R \rightarrow R$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $a \in R$ از $a\alpha(a) = 0$ نتیجه شود $a = 0$.

اگر R حلقه‌ی α -صلب باشد، آن‌گاه R کاهشی و α یک‌به‌یک است، زیرا اگر $a^2 = 0$ ، آن‌گاه $(a\alpha(a))\alpha(a\alpha(a)) = 0$ و لذا $a = 0$. همچنین، اگر $\alpha(a) = 0$ ، آن‌گاه $a\alpha(a) = 0$ و در نتیجه $a = 0$.

حلقه‌های α -صلب^{۲۷} رده خاصی از حلقه‌های کاهشی هستند. کرمپا^{۲۸} در مرجع [۲۸]، درون‌ریختی صلب α از حلقه‌ی R را تعریف کرد. هنگ^{۲۹}، کیم و کوک در مرجع [۲۷]، حلقه‌های α -صلب را معرفی کردند و نشان دادند هر حلقه‌ی α -صلب، کاهشی می‌باشد.

هنگ، کوک و رزوی^{۳۰} در مرجع [۲۸]، با معرفی ایده‌آل‌های α -صلب، روابط بین ایده‌آل‌های α -صلب از حلقه‌ی R و برخی از توسیع‌های حلقه‌ای را مورد بررسی قرار دادند.

هاشمی^{۳۱} و موسوی^{۳۲} در مرجع [۲۴]، تعمیمی از حلقه‌های α -صلب را به نام α -سازگار تعریف کردند. همچنین، هاشمی در مرجع [۲۳]، ایده‌آل‌های α -سازگار را که توسیعی از ایده‌آل‌های α -صلب هستند، معرفی کرد.

تعریف ۴۲.۱.۲. فرض کنیم δ یک تابع α -مشتق روی حلقه‌ی R باشد. در این صورت، حلقه‌ی R را α -سازگار^{۳۳} می‌نامیم، هرگاه $a, b \in R$ آن‌گاه $ab = 0$ اگر و تنها اگر $a\alpha(b) = 0$. حلقه‌ی R را δ -سازگار^{۳۴} می‌نامیم،

²⁶Rigid

²⁷ α -Rigid

²⁸Krempe

²⁹Hong

³⁰Rizvi

³¹Hashemi

³²Moussavi

³³ α -Compatible

³⁴ δ -Compatible

هرگاه $a, b \in R$ و $ab = 0$ ، آن‌گاه $a\delta(b) = 0$. اگر R هم α -سازگار و هم δ -سازگار باشد، آن‌گاه R را (α, δ) -سازگار^{۳۵} می‌نامیم.

لم ۴۳.۱.۲. [۲۴، لم ۲.۲] فرض کنیم δ یک تابع α -مشتق روی حلقه‌ی R باشد. در این صورت، حلقه‌ی R کاهشی و (α, δ) -سازگار است اگر و تنها اگر α -صلب باشد.

بنابه لم ۴۳.۱.۲، هر حلقه‌ی α -صلب، حلقه‌ای (α, δ) -سازگار است، اما مثال بعد نشان می‌دهد که حلقه‌ای وجود دارد که (α, δ) -سازگار است ولی α -صلب نمی‌باشد.

مثال ۴۴.۱.۲. فرض کنیم δ یک تابع α -مشتق روی حلقه‌ی α -صلب R باشد و

$$T_3(R) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c \in R \right\}$$

در این صورت، درون‌ریختی α را می‌توان به درون‌ریختی

$$\bar{\alpha} : T_3(R) \rightarrow T_3(R) \text{ با ضابطه } \bar{\alpha}((a_{ij})) = (\alpha(a_{ij})) \text{ توسیع داد. همچنین،}$$

$$\bar{\delta} : T_3(R) \rightarrow T_3(R) \text{ با ضابطه } \bar{\delta}((a_{ij})) = (\delta(a_{ij})) \text{ یک تابع } \bar{\alpha}\text{-مشتق بر } T_3(R) \text{ است. نشان}$$

می‌دهیم $T_3(R)$ حلقه‌ی $(\bar{\alpha}, \bar{\delta})$ -سازگار است که $\bar{\alpha}$ -صلب نمی‌باشد.

$$\text{اگر } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \bar{\alpha} \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} \right) = 0 \text{، آن‌گاه}$$

$$(۱) \quad a_1\alpha(a_2) = 0$$

$$(۲) \quad a_1\alpha(b_2) + b_1\alpha(a_2) = 0$$

$$(۳) \quad a_1\alpha(c_2) + b_1\alpha(d_2) + c_1\alpha(a_2) = 0$$

$$(۴) \quad a_1\alpha(d_2) + d_1\alpha(a_2) = 0.$$

چون R کاهشی است، از (۱) نتیجه می‌گیریم $\alpha(a_2)a_1 = 0$. اگر $\alpha(a_2) \neq 0$ را از چپ در (۲) ضرب کنیم، آن‌گاه $b_1\alpha(a_2) = \alpha(a_2)b_1 = 0$ و در نتیجه $a_1\alpha(b_2) = \alpha(b_2)a_1 = 0$. اگر $\alpha(a_2) \neq 0$ را از چپ در (۳) ضرب کنیم، آن‌گاه $c_1\alpha(a_2) = \alpha(a_2)c_1 = 0$. پس (۳) به صورت

$$(۵) \quad a_1\alpha(c_2) + b_1\alpha(d_2) = 0$$

تبدیل می‌شود. اگر $\alpha(a_2) \neq 0$ را از چپ در (۴) ضرب کنیم، آن‌گاه $a_1\alpha(d_2) = \alpha(d_2)a_1 = 0$ و $d_1\alpha(a_2) = \alpha(a_2)d_1 = 0$. اگر $a_1 \neq 0$ را از راست در (۵) ضرب کنیم، آن‌گاه $b_1\alpha(d_2) = \alpha(d_2)b_1 = 0$ و $a_1\alpha(c_2) = \alpha(c_2)a_1 = 0$ لذا

$$a_1a_2 = a_1b_2 = a_1c_2 = a_1d_2 = b_1a_2 = b_1d_2 = c_1a_2 = d_1a_2 = 0.$$

بنابراین

^{۳۵} (α, δ) -Compatible

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{bmatrix} = 0. \quad (*)$$

حال فرض کنیم $(*)$ برقرار باشد. چون R حلقه‌ی α -صلب است، با استدلالی مشابه پاراگراف قبل می‌توان نشان داد که

$$a_1\alpha(a_2) = a_1\alpha(b_2) = b_1\alpha(a_2) = c_1\alpha(a_2) = d_1\alpha(a_2) = a_1\alpha(d_2) = a_1\alpha(c_2) = b_1\alpha(d_2) = 0,$$

و در نتیجه $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \bar{\alpha} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = 0$. بنابراین $T_3(R)$ حلقه‌ی $\bar{\alpha}$ -سازگار است. فرض کنیم $(*)$ برقرار باشد. در نتیجه

$$a_1a_2 = a_1b_2 = a_1c_2 = a_1d_2 = b_1a_2 = b_1d_2 = c_1a_2 = d_1a_2 = 0.$$

چون R حلقه‌ی α -صلب است، لذا

$$a_1\delta(a_2) = a_1\delta(b_2) = a_1\delta(c_2) = a_1\delta(d_2) = b_1\delta(a_2) = b_1\delta(d_2) = c_1\delta(a_2) = d_1\delta(a_2) = 0.$$

بنابراین $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & a_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_1 \end{bmatrix} \bar{\delta} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & a_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix} = 0$ ، که نشان می‌دهد $T_3(R)$ حلقه‌ی $\bar{\delta}$ -سازگار است. از طرفی، چون $T_3(R)$ کاهشی نیست، پس $\bar{\alpha}$ -صلب نمی‌باشد.

تعریف ۴۵.۱.۲. فرض کنیم δ یک تابع α -مشتق روی R و I یک ایده‌آل از R باشد. در این صورت، I را ایده‌آل α -سازگار از R می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$ ، داشته باشیم $ab \in I$ اگر و تنها اگر $a\alpha(b) \in I$ ، همچنین، I را ایده‌آل δ -سازگار از R می‌نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$ ، از $ab \in I$ نتیجه شود $a\delta(b) \in I$. به علاوه، اگر I هم α -سازگار و هم δ -سازگار باشد، آن‌گاه I را ایده‌آل (α, δ) -سازگار می‌نامیم.

گزاره ۴۶.۱.۲. [۲۳، گزاره ۲.۱] فرض کنیم I ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت، شرایط زیر معادلند:

(۱) I یک ایده‌آل (α, δ) -سازگار از R است.

(۲) R/I حلقه‌ی $(\bar{\alpha}, \bar{\delta})$ -سازگار است.

تعریف ۴۷.۱.۲. [۵۲] حلقه‌ی R را با اندیس حداکثر n ^{۳۶} می‌نامیم هرگاه عدد صحیح مثبت n موجود باشد به طوری که برای هر عنصر پوچ توان $a \in R$ ، داشته باشیم $a^n = 0$. همچنین، حلقه‌ی R را با اندیس کران دار می‌نامیم هرگاه برای برخی عدد صحیح مثبت n ، R با اندیس حداکثر n باشد.

³⁶Index at most

گزاره ۴۸.۱.۲. [۵۲، گزاره ۱۴.۵(۶)] فرض کنیم R حلقه‌ی اول و با اندیس حداکثر n باشد. در این صورت، هر ایده‌آل ناصفر از R شامل عنصری مانند a از R است به‌طوری که a مقسوم‌علیه صفر نمی‌باشد.

تعریف ۴۹.۱.۲. گوئیم مدول A دارای بعدی گلدی متناهی است هرگاه زیرمدول‌های غیرقابل تجزیه E_i از $E(A)$ (پوش انژکتیو A) وجود داشته باشد به‌طوری که $E(A) = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n$.

قضیه ۵۰.۱.۲. مدول A دارای بعد گلدی متناهی است اگر و تنها اگر هیچ مجموع مستقیم نامتناهی از زیرمدول‌های ناصفر A وجود نداشته باشد.

تعریف ۵۱.۱.۲. حلقه‌ی R را گلدی راست می‌نامیم هرگاه R_R دارای بعد گلدی متناهی باشد و شرط زنجیر افزایشی^{۳۷} روی پوچ‌سازهای راست حلقه R برقرار باشد.

لم ۵۲.۱.۲. [۵۳، لم ۱.۲] اگر R حلقه‌ی نیم‌اول و گلدی راست و B ایده‌آل ناصفری از R باشد، آن‌گاه عنصر ناصفر $b \in B$ موجود است به‌طوری که برای هر عنصر ناصفر $b' \in B$ داریم $bb' \neq 0$.

گزاره ۵۳.۱.۲. [۴۷، گزاره ۱.۱] فرض کنیم R حلقه‌ی دلخواه باشد. در این صورت، شرایط زیر برای عنصر $x \in R$ معادلند:

(۱) عنصر $e^2 = e \in R$ وجود دارد به‌طوری که $e - x \in R(x - x^2)$

(۲) عناصر $e^2 = e \in Rx$ و $c \in R$ موجودند به‌طوری که $(1 - e) - c(1 - x) \in J(R)$.

(۳) عنصر $e^2 = e \in Rx$ وجود دارد به‌طوری که $R = Re + R(1 - x)$

(۴) عنصر $e^2 = e \in Rx$ وجود دارد به‌طوری که $1 - e \in R(1 - x)$

تعریف ۵۴.۱.۲. [۴۷] حلقه‌ی R را مناسب^{۳۸} می‌نامیم هرگاه هر عنصر از R در شرایط گزاره ۵۳.۱.۲، صدق کند.

تعریف ۵۵.۱.۲. برای R -مدول چپ M ، مجموعه‌ی تمام هم‌ریختی‌ها روی M را حلقه‌ی درون‌ریختی‌ها روی M می‌نامیم و با نماد $End(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۵۶.۱.۲. [۴۷] فرض کنیم M ، R -مدول چپ باشد. در این صورت، می‌گوئیم M دارای خاصیت تبدالی^{۳۹} است هرگاه برای هر مدول X و هر تجزیه مستقیم

$$X = M' \oplus Y = \bigoplus_{i \in I} N_i$$

که $M \simeq M'$ ، زیرمدول‌های $N'_i \subseteq N_i$ ($i \in I$) وجود داشته باشند به‌طوری که:

$$X = M' \oplus \left(\bigoplus N'_i \right).$$

³⁷Ascending chain condition

³⁸Suitable

³⁹Exchange property

همچنین، می‌گوئیم مدول M دارای خاصیت تبدالی متناهی^{۴۰} است هرگاه در شرط فوق مجموعه‌ی I متناهی باشد (یا به‌طور معادل $|I| = 2$).

قضیه ۵۷.۱.۲. [۴۷، قضیه ۲.۱] گزاره‌های زیر برای R -مدول چپ M معادلند:

(۱) $End(M)$ مناسب راست است.

(۲) M دارای خاصیت تبدالی متناهی است.

(۳) $End(M)$ مناسب چپ است.

توجه می‌کنیم که بنابه قضیه ۵۷.۱.۲، هر حلقه‌ی مناسب چپ، مناسب راست است و بالعکس.

نتیجه ۵۸.۱.۲. [۴۷، نتیجه ۱.۳] فرض کنیم R حلقه‌ی دلخواه باشد. در این صورت، R حلقه‌ی مناسب است اگر و تنها اگر خودتوان‌ها به پیمانه هر ایده‌آل چپ بالا آیند.

گزاره ۵۹.۱.۲. [۴۷، گزاره ۱.۸] فرض کنیم R حلقه‌ی دلخواه باشد. در این صورت،

(۱) اگر حلقه‌ی R تمیز باشد، آن‌گاه R مناسب است.

(۲) اگر تمام خودتوان‌های حلقه‌ی R مرکزی باشند، آن‌گاه R تمیز است اگر و تنها اگر R مناسب باشد.

قضیه ۶۰.۱.۲. [۴۹، قضیه ۱.۶ب] فرض کنیم R حلقه‌ی منظم باشد. در این صورت، شرایط زیر معادلند:

(۱) R آرتینی نیم‌ساده است.

(۲) R دارای شرط زنجیر کاهشی روی ایده‌آل‌های راست (یا چپ) متناهیاً تولید شده می‌باشد.

(۳) R نوتری (راست یا چپ) است.

(۴) R دارای بعد کرول است.

(۵) هیچ زیرمجموعه‌ی نامتناهی از خودتوان‌های دوبه‌دو متعامد در حلقه‌ی R وجود ندارد.

۲.۲ مفاهیم مورد نیاز از توسیع‌های اریب حلقه‌ها

در این بخش، حلقه‌های چندجمله‌ای‌های اریب، چندجمله‌ای‌های لوران اریب و سری‌های لوران معکوس اریب را معرفی و برخی از ویژگی‌های این حلقه‌ها را بیان می‌کنیم.

⁴⁰Finite exchange property

تعریف ۱.۲.۲. فرض کنیم α یک درون‌ریختی و δ یک تابع α -مشتق از حلقه‌ی R باشد. حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب^{۴۱} روی R را با $R[x; \alpha, \delta]$ نمایش می‌دهیم. عناصر آن چندجمله‌ای‌های $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ هستند که $a_i \in R$ و $n \geq 0$. دو عمل جمع و ضرب روی $R[x; \alpha, \delta]$ به‌طور طبیعی تعریف می‌شوند به‌طوری که برای هر $a \in R$ $xa = \alpha(a)x + \delta(a)$ اگر α تابع همانی باشد، آن‌گاه $R[x; \alpha, \delta]$ را با $R[x; \delta]$ نشان می‌دهیم و آن را حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های مشتق روی R می‌نامیم. هرگاه $\delta = 0$ ، به‌جای $R[x; \alpha, \delta]$ از $R[x; \alpha]$ استفاده می‌کنیم.

تذکر ۲.۲.۲. فرض کنیم R حلقه‌ی دلخواه، δ تابعی α -مشتق روی R و $0 \leq i \leq j$ اعداد صحیح باشند. در این‌صورت، مجموعه‌ی همه‌ی عبارت‌های بر حسب α و δ به‌طوری که در آن‌ها i بار α و $j - i$ بار δ ظاهر شده باشند را با f_i^j نشان می‌دهیم. به عنوان مثال، $f_j^j = \{\alpha^j\}$ ، $f_0^j = \{\delta^j\}$ و $f_{j-1}^j = \{\alpha^{j-1}\delta, \alpha^{j-2}\delta\alpha, \dots, \delta\alpha^{j-1}\}$.

تذکر ۳.۲.۲. چندجمله‌ای $f(x)$ روی حلقه‌ی R را در نظر می‌گیریم. درجه‌ی $f(x)$ را با نماد $\deg(f(x))$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۴.۲.۲. [۲۷، گزاره ۶] فرض کنیم R حلقه‌ی α -صلب باشد. همچنین، فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ عناصری از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ باشند. در این‌صورت، $fg = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $0 \leq i \leq n$ و $0 \leq j \leq m$ داشته باشیم $a_i b_j = 0$.

نتیجه ۵.۲.۲. [۴۵، نتیجه ۲.۱۱] فرض کنیم R یک حلقه‌ی (α, δ) -سازگار باشد. در این‌صورت، شرایط زیر معادلند:

$$(۱) \quad R, \text{ ۲-اولیه است.}$$

$$(۲) \quad R[x; \alpha, \delta], \text{ ۲-اولیه است.}$$

$$(۳) \quad Nil(R) = P(R; \alpha, \delta).$$

$$(۴) \quad Nil(R)[x; \alpha, \delta] = P(R[x; \alpha, \delta]).$$

$$(۵) \quad R, \text{ ۲-اولیه است و داریم } Nil(R)[x; \alpha, \delta] = Nil(R[x; \alpha, \delta]).$$

$$(۶) \quad \text{هر } (\alpha, \delta)\text{-ایده‌آل اول مینیمال از } R, \text{ کاملاً اول است.}$$

تعریف ۶.۲.۲. فرض کنیم $R[x, x^{-1}; \alpha]$ نمایان‌گر مجموعه‌ی تمام مجموعه‌های متناهی از $x^{-j} r x^i$ ها باشد به‌طوری که $\alpha : R \rightarrow R$ یک تک‌ریختی باشد و $0 \leq i, j$ و $x \in R$. دو عمل جمع و ضرب روی $R[x, x^{-1}; \alpha]$ به‌طور طبیعی تعریف می‌شوند به‌طوری که ضرب از قوانین $xr = \alpha(r)x$ و $rx^{-1} = x^{-1}\alpha(r)$ تبعیت می‌کند. مجموعه‌ی $R[x, x^{-1}; \alpha]$ با دو عمل فوق تشکیل حلقه می‌دهد که آن را حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب^{۴۲} می‌نامیم.

تعریف ۷.۲.۲. توسیع جردن^{۴۳} حلقه‌ی R را که با نماد $A(R, \alpha)$ یا A نشان داده می‌شود، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

^{۴۱}Skew polynomial ring

^{۴۲}Skew Laurent polynomial ring

^{۴۳}Jordan's extension

$$A = \{x^{-i}rx^i \mid r \in R, i \geq 0\}.$$

هرگاه $j \geq 0$ ، آن‌گاه $x^{-i}rx^i = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)x^{(i+j)}$ و از این‌رو برای هر $r, s \in R$ و $i, j \geq 0$

$$x^{-i}rx^i + x^{-j}sx^j = x^{-(i+j)}(\alpha^j(r) + \alpha^i(s))x^{(i+j)}$$

$$(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)\alpha^i(s)x^{(i+j)},$$

بنابراین A زیرحلقه‌ای از $R[x, x^{-1}; \alpha]$ است. توجه می‌کنیم که α با تعریف زیر، خودریختی از A القا می‌کند. به ازای هر $r \in R$ و $i \geq 0$

$$\alpha(x^{-i}rx^i) = x^{-i}\alpha(r)x^i.$$

جردن^{۴۴} در مرجع [۳۱]، نشان داد که اگر α خودریختی از R باشد، آن‌گاه $R = A$ و همچنین، در حالت کلی $R[x, x^{-1}; \alpha] \cong A[x, x^{-1}; \alpha]$

لم ۸.۲.۲. [۲۴]، لم ۳.۱۱ فرض کنیم α تک‌ریختی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت، R ، α -سازگار است اگر و تنها اگر A ، α -سازگار باشد.

تعریف ۹.۲.۲. [۴۶]، تعریف ۲.۱ فرض کنیم α درون‌ریختی از حلقه‌ی R باشد. حلقه‌ی R را آرمنداریز اریب^{۴۵} می‌نامیم، هرگاه برای چندجمله‌ای‌های $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ و $g = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ از حلقه‌ی $R[x; \alpha]$ ، $fg = 0$ اگر و تنها اگر برای هر $0 \leq i \leq n$ و $0 \leq j \leq m$ ، داشته باشیم $a_ib_j = 0$.

گزاره ۱۰.۲.۲. [۴۶]، گزاره ۲.۳ اگر α درون‌ریختی از R باشد، آن‌گاه R ، α -صلب است اگر تنها اگر R حلقه‌ی کاهشی و آرمنداریز اریب باشد.

قضیه ۱۱.۲.۲. [۴۶]، قضیه ۵.۱ فرض کنیم α تک‌ریختی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) R ، α -صلب می‌باشد.

(۲) R کاهشی و آرمنداریز اریب است.

(۳) $R[x; \alpha]$ کاهشی است.

(۴) $R[x, x^{-1}; \alpha]$ کاهشی است.

تذکر ۱۲.۲.۲. چندجمله‌ای $f(x)$ روی حلقه‌ی R را در نظر می‌گیریم. مجموعه‌ی ضرایب $f(x)$ در R را با نماد C_f نمایش می‌دهیم.

^{۴۴}Jordan

^{۴۵}Skew-Armendariz

گزاره ۱۳.۲.۲. [۴۶، گزاره ۳.۱] فرض کنیم R حلقه‌ی آرمنداریز اریب و α تکریختی از R باشد. در این صورت، برای هر $f, g \in A[x, x^{-1}; \alpha]$ اگر $fg = 0$ و تنها اگر برای هر $a \in C_f$ و هر $b \in C_g$ داشته باشیم $ab = 0$.

گزاره ۱۴.۲.۲. [۴۶، گزاره ۳.۲] فرض کنیم R حلقه‌ی آرمنداریز اریب و α تکریختی از R باشد. در این صورت، برای هر $f, g \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ اگر $fg = 0$ و تنها اگر برای هر $a \in C_f$ و هر $b \in C_g$ داشته باشیم $ab = 0$.

گزاره ۱۵.۲.۲. [۴۶، گزاره ۳.۳] فرض کنیم R حلقه‌ی آرمنداریز اریب و α تکریختی از R باشد. اگر برای $f_1, \dots, f_n \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ داشته باشیم $f_1 \cdots f_n = 0$ ، آن گاه $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$ به طوری که برای هر i ، $a_i \in C_{f_i}$.

تعریف ۱۶.۲.۲. [۵۳] اگر α خودریختی از حلقه‌ی R باشد، آن گاه حلقه‌ی سری‌های لوران اریب^{۴۶} را با نماد $R((x, \alpha))$ نمایش می‌دهیم. هر عنصر از این حلقه به شکل $f = \sum_{i=k}^{+\infty} f_i x^i$ می‌باشد به طوری که x متغیر، k عدد صحیح است و $f_i \in R$. در حلقه‌ی $R((x, \alpha))$ ، جمع و ضرب به صورت طبیعی تعریف می‌شوند و برای هر $a \in R$ ضرب از قانون $xa = \alpha(a)x$ تبعیت می‌کند. اگر $\alpha = 1_R$ ، آن گاه $R((x, \alpha))$ را با $R((x))$ نشان می‌دهیم و آن را حلقه‌ی سری‌های لوران می‌نامیم.

لم ۱۷.۲.۲. [۵۳، لم ۱.۴] فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R باشد و $S = R((x, \alpha))$. همچنین، فرض کنیم $J(S) \neq 0$ و B ایده‌آل ناصفر از R تولید شده توسط تمام کوچک‌ترین ضرایب ناصفر سری‌های مشمول در $J(S)$ باشد. در این صورت، برای هر عنصر ناصفر b از B ، عناصر ناصفر $b', b'' \in B$ موجودند به طوری که $bb' = b''b = 0$.

تعریف ۱۸.۲.۲. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ یک تابع α -مشتق روی R باشد. حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب^{۴۷} را با نماد $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ نشان می‌دهیم. هر عنصر از این حلقه به فرم $f(x) = \sum_{i=-\infty}^n a_i x^i$ می‌باشد به طوری که x متغیر و n یک عدد صحیح است و $a_i \in R$. دو عمل جمع و ضرب روی حلقه‌ی $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ به طور طبیعی تعریف می‌شوند به طوری که ضرب از روابط زیر تبعیت می‌کند:

$$xa = \alpha(a)x + \delta(a)$$

و

$$x^{-1}a = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{-1}(-\delta\alpha^{-1})^{i-1}(a)x^{-i}.$$

تعریف ۱۹.۲.۲. [۱] فرض کنیم α خودریختی از R و δ ، تابع α -مشتق روی R باشد. R را حلقه‌ی (α, δ) -آرمنداریز اریب از نوع سری‌های لوران معکوس اریب^{۴۸} می‌نامیم (به طور مختصر (α, δ) -آرمنداریز سلما)، هرگاه $f(x) = \sum_{i=-\infty}^m a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=-\infty}^n b_j x^j$ عناصری از حلقه‌ی $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ باشند و $f(x)g(x) = 0$ ، آن گاه برای هر $j \leq n$ و $i \leq m$ ، $a_i x^i b_j x^j = 0$.

قضیه ۲۰.۲.۲. [۱، قضیه ۲.۶] فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ تابع α -مشتق روی R باشد. در این صورت، هر حلقه‌ی (α, δ) -آرمنداریز سلما است.

⁴⁶Skew Laurent series ring

⁴⁷Skew inverse Laurent series ring

⁴⁸ (α, δ) -Skew Armendariz ring of skew inverse Laurent series type

گزاره ۲۱.۲.۲. [۱، گزاره ۲.۹] فرض کنیم R حلقه‌ی (α, δ) -آرمنداریز سلما باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) برای هر $e^2 = e \in R$ داریم $\alpha(e) = e$ و $\delta(e) = 0$.

(۲) اگر $e^2 = e \in R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ، آن‌گاه $e \in R$.

(۳) حلقه‌ی R آبدلی است.

(۴) حلقه‌ی $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ آبدلی می‌باشد.

فصل ۳

بررسی عناصر وارون‌پذیر و خودتوان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب

برخی از عناصر حلقه مانند عناصر وارون‌پذیر و خودتوان نقش برجسته‌ای در نظریه‌ی حلقه‌های ناجابه‌جایی دارند. در بخش اول و دوم این فصل به بررسی عناصر وارون‌پذیر و خودتوان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x; \alpha, \delta]$ می‌پردازیم. سپس در بخش سوم برخی از ویژگی‌های بین حلقه‌ی R و توسیع جردن $A(R, \alpha)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و به وسیله این خواص، در بخش چهارم عناصر وارون‌پذیر و خودتوان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب $R[x, x^{-1}; \alpha]$ را مشخص می‌کنیم. مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۱۹] و [۲۰] می‌باشد.

۱.۳ بررسی عناصر وارون‌پذیر حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب

در این بخش، ابتدا نتایجی در خصوص حاصلضرب ثابت عناصر حلقه چند جمله ای های اریب روی حلقه های دوئو راست را بیان می‌کنیم. سپس به عنوان نتیجه‌گیری، روابط بین عناصر وارون‌پذیر حلقه‌ی R و حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ را هنگامی که حلقه‌ی R دوئو راست و (α, δ) -سازگار است، تعیین می‌کنیم. ابتدا با لم ساده زیر شروع می‌کنیم که در نتایج اصلی ما مفید خواهد بود.

لم ۱.۱.۳. فرض کنیم حلقه‌ی R ، (α, δ) -سازگار باشد و $a, b \in R$ در این صورت،

$$(۱) \text{ اگر } ab = 0 \text{ آن‌گاه برای هر عدد صحیح نامنفی } n, \text{ داریم } a\alpha^n(b) = 0 = \alpha^n(a)b.$$

$$(۲) \text{ اگر برای عدد صحیح نامنفی } k \text{ داشته باشیم } \alpha^k(a)b = 0, \text{ آن‌گاه } ab = 0.$$

$$(۳) \text{ اگر } ab = 0 \text{ آن‌گاه برای هر عدد صحیح نامنفی } m \text{ و } n, \text{ داریم } \delta^m(a)\alpha^n(b) = 0 = \alpha^m(a)\delta^n(b).$$

$$(۴) \text{ اگر } ab = 0 \text{ آن‌گاه } \alpha(a)\alpha(b) = 0 = \delta(a)\delta(b).$$

$$(۵) \text{ اگر } a^n = 0 \text{ آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت } n, \text{ داریم } (\alpha(a))^n = 0 = (\delta(a))^n.$$

$$(۶) \text{ اگر } ab = 0 \text{ آن‌گاه برای هر عدد صحیح مثبت } m, \text{ در حلقه‌ی } R[x; \alpha, \delta] \text{ داریم } ax^mb = 0.$$

$$(۷) \text{ اگر برای عدد صحیح مثبت } m, \text{ در حلقه‌ی } R[x; \alpha, \delta] \text{ داشته باشیم } ax^mb = 0, \text{ آن‌گاه } ab = 0.$$

برهان. (۱) اگر $ab = 0$ آن‌گاه $\alpha^n(a)\alpha^n(b) = 0$ از این‌که R حلقه‌ی α -سازگار است نتیجه می‌گیریم $\alpha^n(a)b = 0$.

(۲) فرض کنیم عدد صحیح مثبت k وجود داشته باشد که $\alpha^k(a)b = 0$. چون R حلقه‌ی α -سازگار است، لذا $\alpha^k(ab) = \alpha^k(a)\alpha^k(b) = 0$ و چون α یک به یک است، $ab = 0$.

(۳) کافی است نشان دهیم $\delta(a)\alpha(b) = 0$. چون $ab = 0$ با استفاده از (۱) و خاصیت δ -سازگاری R نتیجه می‌گیریم $\alpha(a)\delta(b) = 0$. بنابراین $\delta(a)b = \delta(ab) - \alpha(a)\delta(b) = 0$ و لذا $\delta(a)\alpha(b) = 0$.

(۴) اگر $ab = 0$ آن‌گاه با استفاده از (۱) و (۳) داریم $\alpha(a)b = 0 = \delta(a)b$. چون R حلقه‌ی (α, δ) -سازگار است، لذا $\alpha(a)\alpha(b) = 0 = \delta(a)\delta(b)$.

قسمت‌های (۵) تا (۷) به ترتیب با استفاده از (۴)، (۳) و (۱) به دست می‌آید. $\square$

لم ۲.۱.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی (α, δ) -سازگار باشد، $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x; \alpha, \delta]$ و $c, r \in R$ در این صورت، $f(x)r = c$ اگر و تنها اگر $a_0 r = c$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، داشته باشیم $a_i r = 0$.

برهان. ابتدا فرض کنیم $f(x)r = c$ در این صورت، برای $n = 0$ واضح است. حال فرض کنیم $n \geq 1$. چون $f(x)r = c$ در نتیجه $a_n \alpha^n(r) = 0$ از آنجایی که R حلقه‌ی α -سازگار است، بنابراین $a_n r = 0$. لذا بنابه لم ۱.۱.۳ (۶)، خواهیم داشت $a_n x^n r = 0$. حال با استفاده از استقرا روی n ، برای هر $i \geq 1$ نتیجه می‌گیریم $a_i r = 0$ و لذا $a_i x^i r = 0$.

بالعکس، بنا به لم ۱.۱.۳ به راحتی نتیجه می‌شود. $\square$

لم ۳.۱.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی α -صلب باشد. همچنین، فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ عناصر ناصفر از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ باشند به طوری که $f(x)g(x) = c \in R$ در این صورت، $a_0 b_0 = 0$ و برای هر i, j اگر $i + j \geq 1$ آن‌گاه $a_i b_j = 0$.

برهان. با استقرا روی $\deg(f(x)) + \deg(g(x))$ حکم را اثبات می‌کنیم. فرض کنیم $m = \deg(f(x))$ و $n = \deg(g(x))$. اگر $m = 0$ یا $n = 0$ آن‌گاه با استفاده از لم ۲.۱.۳، نتیجه حاصل می‌گردد. حال فرض

کنیم $m, n \geq 1$ و حکم برای تمام مقادیر کمتر از $m+n$ درست باشد. با توجه به ضرایب پیشرو در معادله‌ی $f(x)g(x) = c$ ، نتیجه می‌گیریم $a_n \alpha^n(b_m) = 0$ و لذا $a_n b_m = 0 = b_m a_n$ ، چون R, α -سازگار و کاهشی است. بنابراین $b_m c = b_m f(x)g(x) = (b_m a_0 + b_m a_1 x + \dots + b_m a_{n-1} x^{n-1})g(x) = f_1(x)g(x)$ بنابه فرض $\deg(f_1(x)) + \deg(g(x)) \leq m+n-1$ زیرا $b_m a_0 b_m = \dots = b_m a_{n-1} b_m = 0$ استقرا خواهیم داشت $b_m a_0 b_m = \dots = b_m a_{n-1} b_m = 0$ چون R کاهشی است. پس

$$c = f(x)g(x) = f(x)(b_0 + b_1 x + \dots + b_{m-1} x^{m-1}) = f(x)g_1(x).$$

چون $\deg(f(x)) + \deg(g_1(x)) \leq m+n-1$ با استفاده از فرض استقرا نتیجه می‌گیریم $a_0 b_0 = c$ و برای هر $1 \leq i+j \leq m+n-1$ و $j \leq m-1$ داریم $a_i b_j = 0$ بنابراین $a_0 b_0 = c$ و برای هر $1 \leq i+j \leq m+n-1$ $a_i b_j = 0$ و لذا نتیجه حاصل است. $\square$

لم ۴.۱.۳. فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP و (α, δ) -سازگار باشد. همچنین، فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ عناصر ناصفر از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ باشند به‌طوری که $f(x)g(x) = c \in R$ و $a_n \neq 0 \neq b_m$. اگر $m \geq 1$ آن‌گاه $t \geq 1$ وجود دارد به‌طوری که $f(x)b_m^t = 0$.

برهان. اگر $n=0$ آن‌گاه $f(x) = a_0$ و لذا $a_0 b_0 = c$ چون $f(x)g(x) = c$ در نتیجه برای هر $j \geq 1$ ، $a_0 b_j = 0$ بنابراین $f(x)b_m = 0$ حال فرض کنیم $n \geq 1$ چون $f(x)g(x) = c$ در این‌صورت، $a_n \alpha^n(b_m) = 0$ و لذا بنابه لم ۱.۱.۳، $a_n b_m = 0$ با استفاده از لم ۱.۱.۳ و خاصیت IFP بودن R ، برای هر $0 \leq i \leq j$ و $0 \leq r \leq s$ و $b \in R$ خواهیم داشت $a_n f_i^j(b) f_r^s(b_m) = 0$ بنابراین $cb_m = f(x)g(x)b_m = (a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1})g(x)b_m$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. اگر $b_m \alpha^m(b_m) = 0$ آن‌گاه $b_m^2 = 0$ و لذا $f(x)b_m^2 = 0$

حالت ۲. اگر $b_m \alpha^m(b_m) \neq 0$ آن‌گاه $g(x)b_m \neq 0$ و بنابراین با استفاده از فرض استقرا، $r_1 \geq 1$ وجود دارد به‌طوری که $(a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1})(b_m \alpha^m(b_m))^{r_1} = 0$ پس $f(x)(b_m \alpha^m(b_m))^{r_1} = 0$ و لذا بنابه لم ۲.۱.۳، $f(x)b_m^{2r_1} = 0$ در این حالت $t = 2r_1$ و از این‌رو نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

با استدلالی مشابه برهان لم ۴.۱.۳، می‌توان لم زیر را ثابت کرد.

لم ۵.۱.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی IFP و (α, δ) -سازگار باشد. همچنین، فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ عناصر ناصفر از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ باشند به‌طوری که $f(x)g(x) = c \in R$ و $a_n \neq 0 \neq b_m$. اگر $n \geq 1$ آن‌گاه $t \geq 1$ وجود دارد به‌طوری که $a_n^t g(x) = 0$

ایده‌آل راست تولید شده توسط ضرایب چندجمله‌ای اریب ناصفر $g(x) \in R[x; \alpha, \delta]$ از حلقه‌ی R را با نماد $I_{g(x)}$ نمایش می‌دهیم. در ادامه یکی از اصلی‌ترین قضایای این بخش را بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۱.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد. همچنین، فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ و $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ عناصر ناصفر از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ باشند به‌طوری که $f(x)g(x) = c \in R$ در این‌صورت، $a \in R$ و $0 \neq r \in I_{g(x)}$ وجود دارند به‌طوری که $f(x)r = ca$. به‌علاوه، اگر b_0 یک عنصر وارون‌پذیر از R باشد، آن‌گاه $a_1, a_2, \dots, a_n \in Nil(R)$

برهان. اگر $\deg(f(x)) = 0$ ، آن‌گاه $a_0g(x) = c$ ، لذا $a_0b_0 = c$ و برای هر $j \geq 1$ ، $a_0b_j = 0$ ، در این حالت، با فرض $r = b_0$ و $a = 1$ نتیجه حاصل است. حال فرض کنیم $\deg(f(x)) = n \geq 1$ در این صورت، با استقرا روی $\deg(f(x))$ حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $m = 0$ ، آن‌گاه $g(x) = b_0 \neq 0$ از آنجایی که $f(x)g(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n)b_0 = c$ بنا به لم ۲.۱.۳، $a_0b_0 = c$ و برای هر $i \geq 1$ ، $a_ib_0 = 0$ در این حالت با فرض $r = b_0$ و $a = 1$ نتیجه حاصل است. حال فرض کنیم $m \geq 1$ و حکم برای تمام چندجمله‌ای‌های از درجه کمتر از n درست باشد. همچنین، فرض کنیم برای چندجمله‌ای $f(x)$ از درجه n ، $f(x)g(x) = c$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. اگر $a_nx^ng(x) = 0$ ، آن‌گاه بنابه لم ۲.۱.۳، برای هر $0 \leq j \leq m$ ، داریم $a_nb_j = 0$ و لذا $a_nI_{g(x)} = 0$. پس $a_nI_{g(x)} = 0$ ، $c = f(x)g(x) = (a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1})g(x)$ و در نتیجه $r_1 \in I_{g(x)}$ و $0 \neq r_1$ و $a_1 \in R$ وجود دارند به‌طوری که $(a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1})r_1 = ca_1$. بنابراین $f(x)r_1 = ca_1$ ، زیرا $a_nx^nr_1 = 0$ ، لذا $r = r_1$ و $a_1 = a$ و از این‌رو نتیجه حاصل می‌شود.

حالت ۲. فرض می‌کنیم $a_nx^ng(x) \neq 0$ در این صورت، $0 \leq j < m$ وجود دارد به‌طوری که $a_nb_j \neq 0$ (j بزرگترین است). بنابه لم ۵.۱.۳، $t \geq 2$ وجود دارد به‌طوری که $a_ntb_j = 0$ اما $a_n^{t-1}b_j \neq 0$ ، لذا $b \in R$ وجود دارد به‌طوری که $a_n^{t-1}b_j = b_jb$ ، چون R دوئو راست است. اگر $g_1(x) = g(x)b$ ، آن‌گاه $f(x)g_1(x) = f(x)g(x)b = cb$ و $I_{g_1(x)} \subseteq I_{g(x)}$ و $0 \neq I_{g_1(x)}$. پس a_nx^n ضرایب $g_1(x)$ از j -ام تا n -ام را صفر می‌کند. با ادامه این روند به تعداد دفعات متناهی، می‌توان نشان داد که برای $h(x) \in R[x; \alpha, \delta]$ و $0 \neq r_1 \in R$ خواهیم داشت $f(x)h(x) = cr_1$ و $a_nx^nh(x) = 0$. بنابراین بنابه حالت (۱)، نتیجه حاصل می‌شود.

حال فرض می‌کنیم b_0 عنصر وارون‌پذیری در R باشد. نشان خواهیم داد $a_1, a_2, \dots, a_n \in Nil(R)$. چون R حلقه‌ی دوئو راست است، لذا R دارای خاصیت IFP است. پس بنابه لم ۶.۱.۲، $Nil(R)$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R می‌باشد. پس $\bar{R} = R/Nil(R)$ حلقه‌ی کاهشی است. بنابه لم ۱.۱.۳، $Nil(R)$ یک ایده‌آل (α, δ) -سازگار می‌باشد، زیرا R حلقه‌ی (α, δ) -سازگار است. از این‌رو بنابه گزاره ۴۶.۱.۲ و لم ۴۳.۱.۲، $\bar{R}$ حلقه‌ی $\bar{\alpha}$ -صلب می‌باشد. چون $f(x)g(x) = c \in R$ ، لذا داریم $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = \bar{c} \in \bar{R}[x; \bar{\alpha}, \bar{\delta}]$ ، پس بنابه لم ۳.۱.۳، $\bar{a}_0\bar{b}_0 = \bar{c}$ و برای هر $i + j \geq 1$ ، $\bar{a}_i\bar{b}_j = 0$ ، لذا برای هر $i \geq 1$ ، $\bar{a}_i = 0$ زیرا $\bar{b}_0$ عنصری وارون‌پذیر است. بنابراین برای هر $i \geq 1$ ، $a_i \in Nil(R)$ و $a_i \neq 0$ ، پس $a_i \in Nil(R)$. $\square$

گزاره ۷.۱.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد. در این صورت، داریم $Nil(R)[x; \alpha, \delta] = L - rad(R[x; \alpha, \delta]) = Nil(R[x; \alpha, \delta])$

برهان. از آنجایی که R دوئو راست می‌باشد، حلقه‌ی R ، ۲-اولیه است. لذا بنابه نتیجه ۵.۲.۲، حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ نیز ۲-اولیه است. از طرفی، هر حلقه‌ی ۲-اولیه، یک حلقه‌ی ۲-اولیه ضعیف می‌باشد، در نتیجه $Nil(R[x; \alpha, \delta]) = L - rad(R[x; \alpha, \delta])$. همچنین بنابه نتیجه ۵.۲.۲، داریم $Nil(R)[x; \alpha, \delta] = Nil(R[x; \alpha, \delta])$ ، زیرا R یک حلقه‌ی ۲-اولیه و (α, δ) -سازگار می‌باشد. بنابراین $Nil(R)[x; \alpha, \delta] = L - rad(R[x; \alpha, \delta])$. $\square$

حال رابطه‌ی بین عناصر وارون‌پذیر حلقه‌های R و $R[x; \alpha, \delta]$ را در حالتی که R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد، بررسی می‌کنیم.

قضیه ۸.۱.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد. در این صورت، $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ عنصر وارون‌پذیر از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ است اگر و تنها اگر $a_0 \in U(R)$ و $a_1, a_2, \dots, a_n \in Nil(R)$.

برهان. فرض کنیم $\bar{R} = R/Nil(R)$. در این صورت، بنابه لم ۴۳.۱.۲، $\bar{R}$ یک حلقه‌ی $\bar{\alpha}$ -صلب می‌باشد. به‌وضوح $\bar{R}$ دوئو راست است. ابتدا فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ یک عنصر وارون‌پذیر از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ باشد. در این صورت، $g(x) = \sum_{j=0}^m b_j x^j \in R[x; \alpha, \delta]$ وجود دارد به‌طوری که $f(x)g(x) = 1 = g(x)f(x)$. پس $\bar{f}(x)\bar{g}(x) = 1$. لذا بنابه لم ۳.۱.۳، $\bar{a}_0$ عنصری وارون‌پذیر از $\bar{R}$ می‌باشد و لذا بنابه نتیجه ۶.۱.۳، $a_1, a_2, \dots, a_n \in Nil(R)$ از طرفی، چون R حلقه‌ی ۲-اولیه است، داریم $Nil(R) \subseteq J(R)$ ، بنابراین $a_0 \in U(R)$ چون $\bar{a}_0$ عنصر وارون‌پذیری از $\bar{R}$ می‌باشد.

بالعکس، فرض کنیم $a_0 \in U(R)$ و $a_1, a_2, \dots, a_n \in Nil(R)$. در این صورت، بنابه گزاره ۷.۱.۳، $a_1 x + \dots + a_n x^n \in Nil(R)[x; \alpha, \delta] = L - rad(R[x; \alpha, \delta])$ (لم ۱۰.۳۲)، داریم $L - rad(R[x; \alpha, \delta]) \subseteq J(R[x; \alpha, \delta])$. پس $a_1 x + \dots + a_n x^n \in J(R[x; \alpha, \delta])$ بنابرین $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ عنصری وارون‌پذیر از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ است. $\square$

نتیجه ۹.۱.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد. در این صورت، داریم

$$U(R[x; \alpha, \delta]) = U(R) + Nil(R[x; \alpha, \delta])x = U(R) + (Nil(R)[x; \alpha, \delta])x.$$

برهان. بنابه گزاره ۷.۱.۳ و قضیه ۸.۱.۳، نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

۲.۳ بررسی عناصر خودتوان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب

خودتوان‌ها در مطالعه حلقه‌های ناجابه‌جایی نقش برجسته‌تری را نسبت به مطالعه حلقه‌های جابه‌جایی ایفا می‌کنند (برای مثال‌های بیشتر به مراجع [۳۲] و [۳۹] رجوع شود). در این بخش، روابط بین عناصر خودتوان حلقه‌های R و توسیع اریب $R[x; \alpha, \delta]$ هنگامی که حلقه‌ی R دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد، مشخص می‌کنیم.

لم ۱.۲.۳. [۳۹] قضیه ۲۱.۲۸ فرض کنیم I ایده‌آل پوچ از حلقه‌ی R باشد (لذا $I \subseteq J(R)$). همچنین، فرض کنیم $a \in R$ باشد به‌گونه‌ای که $\bar{a} \in \bar{R} := R/I$ عنصری خودتوان است. در این صورت، عنصر خودتوان $e \in aR$ وجود دارد به‌طوری که $\bar{e} = \bar{a} \in \bar{R}$.

لم ۲.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد. همچنین، فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ عنصری خودتوان از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ باشد. در این صورت، برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $a_i \in Nil(R)$ و عنصر خودتوان $e \in R$ وجود دارد به‌طوری که $\bar{a}_0 = \bar{e} \in \bar{R}/Nil(R)$.

برهان. چون R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار است، در نتیجه $Nil(R)$ ایده‌آلی (α, δ) -سازگار از حلقه‌ی R می‌باشد. پس بنابه لم ۴۳.۱.۲، $R/Nil(R)$ حلقه‌ی $\bar{\alpha}$ -صلب است. لذا با استفاده از گزاره ۴.۲.۲، به آسانی می‌توان نشان داد که $\bar{f} = \bar{a}_0 \in R/Nil(R)$ و برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $\bar{a}_i = 0$ زیرا $\bar{f}^2 = \bar{f} \in R/Nil(R)[x; \bar{\alpha}, \bar{\delta}]$. بنابرین بنابه لم ۱.۲.۳، خودتوان $e \in R$ وجود دارد که $\bar{a}_0 = \bar{e} \in R/Nil(R)$. $\square$

قضیه ۳.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد. همچنین، فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ عنصری خودتوان از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ باشد. در این صورت، $f = a_0$.

برهان. فرض کنیم $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ عنصری خودتوان از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ باشد. در این صورت، بنابه گزاره ۲.۲.۳، برای هر $1 \leq i \leq n$ ، $a_i \in Nil(R)$ و عناصر خودتوان $e \in R$ و پوچ‌توان $b \in R$ وجود دارند به‌طوری که $a_0 = e + b$. حال فرض کنیم $f_1 = b + a_1 x + \dots + a_n x^n$. در این صورت، $f = e + f_1$. چون R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار است، بنابه گزاره ۷.۱.۳، داریم $Nil(R)[x; \alpha, \delta] = Nil(R[x; \alpha, \delta])$. در نتیجه $f_1 \in Nil(R[x; \alpha, \delta])$. کافی است نشان دهیم که $f_1 = 0$. اگر $f_1 \neq 0$ ، آن‌گاه $m \geq 2$ وجود دارد به‌طوری که $f_1^m = 0 \neq f_1^{m-1}$. چون e عنصری خودتوان از حلقه‌ی R است و R حلقه‌ی آبدلی و (α, δ) -سازگار می‌باشد، لذا داریم $\delta(e) = 0$ و $\alpha(e) = e$. پس $f_1 e = e f_1$ ، زیرا R حلقه‌ی آبدلی است. در نتیجه داریم $f_1^2 = (1 - 2e)f_1$. حال اگر f_1^{m-2} را از سمت راست در معادله $f_1^2 = (1 - 2e)f_1$ ضرب کنیم، آن‌گاه $f_1^m = (1 - 2e)f_1^{m-1}$. چون $f_1^m = 0$ ، لذا داریم $f_1^{m-1} = 0$ ، که یک تناقض است. بنابراین $f_1 = 0$ و در نتیجه $f = a_0$. $\square$

حال رابطه‌ی بین عناصر خودتوان حلقه‌های R و $R[x; \alpha, \delta]$ را هنگامی که R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد، بیان می‌کنیم.

نتیجه ۴.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد. در این صورت، داریم $Idem(R[x; \alpha, \delta]) = Idem(R)$.

نتیجه ۵.۲.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد. در این صورت، $R[x; \alpha, \delta]$ حلقه‌ی آبدلی است.

۳.۳ بررسی برخی از ویژگی‌های بین حلقه‌ی R و حلقه‌ی توسیع جردن $A(R, \alpha)$

در این بخش، برخی از روابط بین حلقه‌ی R و ساختار جردن حلقه‌ی $A(R, \alpha)$ (یا به‌طور مختصر A) را هنگامی که α تکریختی از R می‌باشد، مورد بررسی قرار می‌دهیم. ابتدا با لم ساده زیر که در ادامه این بخش مورد نیاز خواهد بود، شروع می‌کنیم.

لم ۱.۳.۳. فرض کنیم α تکریختی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت،

$$Idem(A) = \{x^{-i} r x^i \mid r \in Idem(R) \text{ و } i \geq 0\} \quad (۱)$$

$$U(A) = \{x^{-i} r x^i \mid r \in R, i \geq 0 \text{ و } \alpha^n(r) \in U(R), n \geq 0\} \quad (۲)$$

$$Nil(A) = \{x^{-i} a x^i \in A \mid a \in Nil(R) \text{ و } i \geq 0\} \quad (۳)$$

برهان. (۱) و (۳) واضح هستند و (۲) در [۳۱، گزاره ۳.۱(۱)] ثابت شده است. $\square$

تذکر ۲.۳.۳. اگر α تک‌ریختی از حلقه‌ی R باشد و برای هر عنصر خودتوان $e \in R$ ، داشته باشیم $\alpha(e) = e$ ، آن‌گاه بنابه لم ۱.۳.۳(۱)، داریم $Idem(A) = Idem(R)$.

حال با استفاده از لم ۱.۳.۳، می‌توانیم برخی از روابط بین حلقه‌های R و A را بررسی کنیم.

لم ۳.۳.۳. فرض کنیم α تک‌ریختی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) حلقه‌ی A آبلی است اگر و تنها اگر حلقه‌ی R آبلی باشد.

(۲) حلقه‌ی A دارای خاصیت IFP است اگر و تنها اگر حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP باشد.

(۳) حلقه‌ی A برگشت‌پذیر است اگر و تنها اگر حلقه‌ی R برگشت‌پذیر باشد.

(۴) حلقه‌ی A کاهشی است اگر و تنها اگر حلقه‌ی R کاهشی باشد.

برهان. (۱) ابتدا فرض کنیم حلقه‌ی R آبلی باشد و برای $r \in R$ و عدد صحیح نامنفی i ، داشته باشیم $x^{-i}rx^i \in Idem(A)$ در این صورت، بنابه لم ۱.۳.۳، داریم $r \in Idem(R)$ از طرفی برای هر $x^{-j}sx^j \in A$ داریم $(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) = x^{-(i+j)}\alpha^j(r)\alpha^i(s)x^{i+j}$ چون $\alpha(r)$ عنصری خودتوان از حلقه‌ی R است و R آبلی می‌باشد، لذا $(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) = x^{-(j+i)}\alpha^i(s)\alpha^j(r)x^{j+i} = (x^{-j}sx^j)(x^{-i}rx^i)$ بنابراین A حلقه‌ی آبلی است.

بالعکس، واضح است.

(۲) فرض کنیم حلقه‌ی R خاصیت IFP داشته باشد و برای برخی $r, s \in R$ و عدد صحیح نامنفی i ، داشته باشیم $(x^{-i}rx^i)(x^{-j}sx^j) = 0$ در این صورت، $x^{-(i+j)}\alpha^j(r)\alpha^i(s)x^{i+j} = 0$ و در نتیجه $\alpha^j(r)\alpha^i(s) = 0$ پس برای هر $t \geq 0$ داریم $\alpha^{j+t}(r)\alpha^{i+t}(s) = 0$ چون حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP است، از این‌رو برای هر $k \geq 0$ و $b \in R$ داریم $\alpha^{j+k}(r)\alpha^{i+j}(b)\alpha^{i+k}(s) = 0$ لذا $x^{-(i+k+j)}\alpha^{j+k}(r)\alpha^{j+i}(b)\alpha^{i+k}(s)x^{i+k+j} = 0$ و در نتیجه برای هر $b \in R$ و $k \geq 0$ خواهیم داشت $(x^{-i}rx^i)(x^{-k}bx^k)(x^{-j}sx^j) = 0$ بنابراین حلقه‌ی A خاصیت IFP دارد.

بالعکس، واضح می‌باشد.

(۳) با استدلالی مشابه برهان (۲) و با استفاده از تعریف حلقه‌های برگشت‌پذیر، می‌توان اثبات کرد.

(۴) بنابه لم ۱.۳.۳، نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

۴.۳ بررسی عناصر وارون‌پذیر و خودتوان حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب

در این بخش، رابطه بین عناصر خودتوان و وارون‌پذیر حلقه‌ی R و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب $R[x, x^{-1}; \alpha]$ را هنگامی که α خودریختی صلب از R می‌باشد، مشخص می‌کنیم. توجه کنید که اگر α خودریختی از R باشد، آن‌گاه

هر عنصر $f \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ به صورت $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n}$ خواهد بود به‌طوری که n یک عدد صحیح است، $a_i \in R$ و $m \geq 0$.

لم ۱.۴.۳. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت، حلقه‌ی R ، α -سازگار است اگر و تنها اگر R ، α^{-1} -سازگار باشد.

برهان. ابتدا فرض کنیم R ، α -سازگار باشد و برای برخی $a, b \in R$ ، $ab = 0$ در این صورت،

$$ab = 0 \Leftrightarrow a\alpha(\alpha^{-1}(b)) = 0 \Leftrightarrow a\alpha^{-1}(b) = 0.$$

بنابراین R ، α^{-1} -سازگار است.

حال فرض کنیم R ، α^{-1} -سازگار باشد. در این صورت، بنابه به حالت قبل R ، $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$ -سازگار می‌باشد. $\square$

لم ۲.۴.۳. فرض کنیم α ، خودریختی سازگاری از حلقه‌ی R باشد و $a, b \in R$ در این صورت، گزاره‌های زیر برقرارند:

$$(۱) \quad \text{هرگاه } ab = 0 \text{ آن‌گاه برای هر عدد صحیح } n, \alpha^n(a)b = 0$$

$$(۲) \quad \text{هرگاه برای برخی عدد صحیح } k, \alpha^k(a)b = 0 \text{ آن‌گاه } ab = 0$$

$$(۳) \quad \text{هرگاه } ab = 0 \text{ آن‌گاه برای هر } m, n \in \mathbb{Z}, \alpha^n(a)\alpha^m(b) = 0$$

$$(۴) \quad \text{هرگاه } ab = 0 \text{ آن‌گاه برای هر عدد صحیح } m \text{ در } R[x, x^{-1}; \alpha] \text{ داریم } ax^mb = 0$$

$$(۵) \quad \text{هرگاه برای برخی عدد صحیح } m \text{ در } R[x, x^{-1}; \alpha], ax^mb = 0 \text{ آن‌گاه } ab = 0$$

برهان. بنابه لم‌های ۱.۴.۳ و ۱.۱.۳، نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

گزاره ۳.۴.۳. فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP و α خودریختی سازگاری از R باشد. در این صورت،

$$Nil(R[x, x^{-1}; \alpha]) = Nil(R)[x, x^{-1}; \alpha].$$

برهان. چون R حلقه‌ی α -سازگار است، لذا $Nil(R)$ ایده‌آل دوطرفه α -سازگار از R می‌باشد، پس بنابه لم ۴.۳.۱.۲، $\bar{R} = R/Nil(R)$ ، $\bar{\alpha}$ -صلب است. فرض کنیم $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n} \in Nil(R[x, x^{-1}; \alpha])$ در این صورت، برای برخی عدد صحیح مثبت k ، داریم $f^k = 0$. پس $(\bar{f})^k = 0$ به‌طوری که $\bar{f} = \sum_{i=0}^m \bar{a}_i x^{i+n} \in R/Nil(R)[x, x^{-1}; \bar{\alpha}] = \bar{R}[x, x^{-1}; \bar{\alpha}]$ از طرفی بنابه قضیه ۱۱.۲.۲، $\bar{R}$ آرمنداریز اریب است و لذا بنابه گزاره‌های ۱۳.۲.۲ و ۱۵.۲.۲، برای هر $0 \leq i \leq m$ ، داریم $(\bar{a}_i)^k = 0$ در نتیجه برای هر $0 \leq i \leq m$ ، خواهیم داشت $a_i \in Nil(R)$ بنابراین $f \in Nil(R)[x, x^{-1}; \alpha]$ و نتیجه حاصل می‌گردد.

بالعکس، فرض کنیم $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n} \in Nil(R)[x, x^{-1}; \alpha]$ در این صورت، برای هر $0 \leq i \leq m$ ، $a_i \in Nil(R)$ چون R خاصیت IFP دارد، لذا R ، ۲-اولیه ضعیف می‌باشد. از این رو $Nil(R) = L - rad(R)$. پس عدد صحیح مثبت k وجود دارد به‌طوری که $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}^k = 0$. با استفاده از لم ۲.۴.۳، داریم $f^k = 0$ و بنابراین $f \in Nil(R[x, x^{-1}; \alpha])$ و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

توجه می‌کنیم که اگر $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n}$ عنصر خودتوانی از حلقه‌ی $R[x, x^{-1}; \alpha]$ باشد، آن‌گاه $n \leq 0$.

گزاره ۴.۴.۳. فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP و α خودریختی سازگاری از R باشد. همچنین، فرض کنیم $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n}$ عنصر خودتوانی از حلقه‌ی $R[x, x^{-1}; \alpha]$ باشد. در این صورت، برای هر $0 \leq i \leq m$ که $a_i \in Nil(R)$ و عنصر خودتوان $e \in R$ وجود دارد به‌طوری که $\overline{a_{-n}} = \bar{e} \in R/Nil(R)$ $i \neq -n$

برهان. چون حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP و α -سازگار است، لذا $Nil(R)$ ایده‌آل دوطرفه α -سازگار از R می‌باشد. پس بنابه لم ۴.۳.۱.۲، $\bar{R} = R/Nil(R)$ حلقه‌ی $\bar{\alpha}$ -صلب است و از این‌رو بنابه قضیه ۱۱.۲.۲، $\bar{R}$ آرمنداریز اریب می‌باشد. چون $\bar{f}^2 = \bar{f} \in R/Nil(R)[x, x^{-1}; \bar{\alpha}]$ ، لذا با استفاده از گزاره ۱۴.۲.۲، می‌توان نشان داد $\bar{f} = \bar{a_{-n}} \in R/Nil(R)$ و برای هر $i \neq -n$ $\bar{a}_i = 0$. در این صورت، بنابه قضیه ۱.۲.۳، برای برخی عناصر خودتوان $e \in R$ داریم $\overline{a_{-n}} = \bar{e} \in R/Nil(R)$ و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

در ادامه رابطه‌ی بین عناصر خودتوان حلقه‌های R و $R[x, x^{-1}; \alpha]$ را هنگامی که R ، IFP و α خودریختی سازگاری از R است، مشخص می‌نمائیم.

قضیه ۵.۴.۳. فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP و α خودریختی سازگاری از R باشد. در این صورت، $Idem(R[x, x^{-1}; \alpha]) = Idem(R)$

برهان. فرض کنیم $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n}$ عنصری خودتوان از حلقه‌ی $R[x, x^{-1}; \alpha]$ باشد. بنابه گزاره ۴.۴.۳، برای هر $0 \leq i \leq m$ که $a_i \in Nil(R)$ و عناصر خودتوان $e \in R$ و پوچ توان $w \in R$ وجود دارند به‌طوری که $a_{-n} = e + w$ حال فرض کنیم $f' = w + \sum_{i=0, i \neq -n}^m a_i x^{i+n}$ در این صورت، $f = f' + e$. بنابه گزاره ۳.۴.۳، داریم $Nil(R[x, x^{-1}; \alpha]) = Nil(R)[x, x^{-1}; \alpha]$ لذا $f' \in Nil(R[x, x^{-1}; \alpha])$ با استدلالی مشابه برهان قضیه ۳.۲.۳، می‌توانیم نشان دهیم $f' = 0$. بنابراین $f = a_{-n} \in Idem(R)$ و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

نتیجه ۶.۴.۳. فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP و α خودریختی سازگاری از R باشد. در این صورت، $R[x, x^{-1}; \alpha]$ حلقه‌ی آبدی است.

برهان. چون R ، α -سازگار است، برای هر عنصر خودتوان $e \in R$ داریم $\alpha(e) = e$. حال بنابه قضیه ۵.۴.۳، نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

اکنون قصد داریم در ادامه، لم مهمی را اثبات کنیم که برای یافتن عناصر وارون‌پذیر حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب مفید می‌باشد.

تذکر ۷.۴.۳. به‌وضوح، اگر α تک‌ریختی از حلقه‌ی R باشد و $t \in U(R)$ آن‌گاه $\alpha(t) \in U(R)$

لم ۸.۴.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی α -صلب باشد. همچنین، فرض کنیم $f = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ و $g = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$ عناصر ناصفر از $R[x; \alpha]$ باشند به‌طوری که برای برخی عدد صحیح نامنفی k و $f g = c x^k$ ، $c \in R$ در این صورت، $\sum_{i+j=k} a_i \alpha^i(b_j) = c$ و برای هر $i + j \neq k$ داریم $a_i b_j = 0$

برهان. با استقرا روی k اثبات می‌کنیم. اگر $k = 0$ ، آن‌گاه بنابه لم ۳.۱.۳، نتیجه حاصل می‌شود. حال فرض کنیم $k \geq 1$ و نتیجه برای مقادیر کمتر از k برقرار باشد. همچنین، فرض کنیم $fg = cx^k$. در نتیجه

$$b_0a_0 = 0 = b_0a_0 \text{ و لذا}$$

$$\begin{aligned} b_0cx^k &= b_0fg \\ &= (b_0a_1 + b_0a_2x + \cdots + b_0a_nx^{n-1})x(b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m) \\ &= (b_0a_1 + b_0a_2x + \cdots + b_0a_nx^{n-1})(\alpha(b_0) + \alpha(b_1)x + \cdots + \alpha(b_m)x^m)x. \quad (۱.۳) \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $f' = \sum_{i=0}^{n-1} a'_i x^i$ که در آن $a'_i = b_0a_{i+1}$ و $g' = \alpha(b_0) + \alpha(b_1)x + \cdots + \alpha(b_m)x^m$. در این صورت، بنابه به معادله‌ی ۱.۳، $f'g' = b_0cx^{k-1}$. بنابه فرض استقرا برای هر $i \neq k-1$ داریم $a'_i\alpha(b_0) = 0$ از این‌رو برای هر $i \neq k$ ، $b_0a_i\alpha(b_0) = 0$ چون α -سازگار و کاهشی است، لذا برای هر $i \neq k$ ، $a_i b_0 = 0 = a_i\alpha(b_0)$. پس $cx^k = fg = a_k\alpha^k(b_0)x^k + f(b_1x + \cdots + b_mx^m)$ در نتیجه $f(b_1x + \cdots + b_mx^m) = (c - a_k\alpha^k(b_0))x^k$ و بنابراین

$$f(b_1 + b_2x + \cdots + b_mx^{m-1}) = (c - a_k\alpha^k(b_0))x^{k-1}.$$

قرار می‌دهیم $g'' = \sum_{j=0}^{m-1} b'_j x^j$ به‌طوری که $b'_j = b_{j+1}$. با استفاده از فرض استقرا داریم $\sum_{i+j=k-1} a_i\alpha^i(b'_j) = \sum_{i+j=k} a_i\alpha^i(b_j) = c - a_k\alpha^k(b_0)$ پس برای هر $i+j \neq k$ ، $a_i b_j = 0 = a_i\alpha^i(b_j)$ لذا $a_0b_k + a_1\alpha(b_{k-1}) + a_2\alpha^2(b_{k-2}) + \cdots + a_{k-1}\alpha^{k-1}(b_1) + a_k\alpha^k(b_0) = c$ و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

حال رابطه‌ی بین عناصر وارون‌پذیر حلقه‌های R و $R[x, x^{-1}; \alpha]$ را هنگامی که R برگشت‌پذیر و α خودریختی سازگاری از R می‌باشد، تعیین می‌کنیم.

گزاره ۹.۴.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی برگشت‌پذیر و α خودریختی سازگاری از R باشد. در این صورت، $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n} \in U(R[x, x^{-1}; \alpha])$ اگر و تنها اگر $g = \sum_{j=0}^s b_j x^{j+r} \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر $i+j \neq -(r+n)$ ، $a_i b_j \in Nil(R)$ و

$$\sum_{i+j=-(r+n)} a_i \alpha^{i+n}(b_j), \sum_{i+j=-(r+n)} b_j \alpha^{j+r}(a_i) \in U(R).$$

برهان. ابتدا فرض کنیم $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n} \in U(R[x, x^{-1}; \alpha])$. در این صورت، $g = \sum_{j=0}^s b_j x^{j+r} \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ وجود دارد به‌طوری که $fg = gf = 1$ لذا

$$(a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m)x^n(b_0 + b_1x + \cdots + b_sx^s)x^r = f_1x^n g_1x^r = 1,$$

در نتیجه $f_1 g_2 = x^{-(r+n)}$ چون $f_1, g_2 \in R[x; \alpha]$ قرار می‌دهیم $n+r \leq 0$ و $-(r+n) = p$ در این صورت، $\overline{f_1} \overline{g_2} = \overline{x^p}$ بنابه لم ۴.۳.۱.۲، $\overline{R}$ ، $\overline{\alpha}$ -صلب است، از این‌رو بنابه لم ۸.۴.۳، $\overline{a_i \alpha^{i+n}(b_j)} = \overline{1}$ و $\sum_{i+j=p} \overline{a_i \alpha^{i+n}(b_j)} = \overline{1}$ برای هر $i+j \neq p$ ، $\overline{a_i \alpha^{i+n}(b_j)} = \overline{0}$ لذا $\overline{a_i \alpha^{i+n}(b_j)} = \overline{0}$ و در نتیجه

$\sum_{i+j=p} a_i \alpha^{i+n}(b_j) \in U(R)$ چون $Nil(R)$ ایده‌آل دوطرفه‌ی α -سازگار از حلقه‌ی R است و برای هر $a_i b_j \in Nil(R)$ پس برای هر $i+j \neq p$ و نتیجه حاصل می‌شود. چون $gf = 1$ با به‌کار بردن استدلالی مشابه پاراگراف قبل، می‌توان نشان داد $\sum_{i+j=p} b_j \alpha^{j+r}(a_i) \in U(R)$ بالعکس، فرض کنیم $g = \sum_{j=0}^s b_j x^{j+r} \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ وجود دارد به‌طوری که $\sum_{i+j=-(r+n)} a_i \alpha^{i+n}(b_j), \sum_{i+j=-(r+n)} b_j \alpha^{j+r}(a_i) \in U(R)$ و برای هر $i+j \neq -(r+n)$ $a_i b_j \in Nil(R)$ قرار می‌دهیم $p = -(r+n)$ در این صورت، داریم

$$fg = (a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m)(\alpha^n(b_0) + \alpha^n(b_1)x + \cdots + \alpha^n(b_s)x^s)x^{-p}.$$

بنابراین $fg = (\sum_{i+j=p} a_i \alpha^{n+i}(b_j)) + (\sum_{k \neq p} (\sum_{i+j=k} a_i \alpha^{n+i}(b_j))x^k)x^{-p} \in Nil(R)$ چون ایده‌آل دوطرفه‌ی α -سازگار از R است و برای هر $i+j \neq p$ $a_i b_j \in Nil(R)$ پس $\sum_{i+j \neq p} a_i \alpha^{n+i}(b_j) \in Nil(R)$ و در نتیجه

$$(\sum_{k \neq p} \sum_{i+j=k} a_i \alpha^{n+i}(b_j)x^k)x^{-p} \in Nil(R)[x, x^{-1}; \alpha].$$

لذا بنابه گزاره ۳.۴.۳، داریم

$$(\sum_{k \neq p} \sum_{i+j=k} a_i \alpha^{n+i}(b_j)x^k)x^{-p} \in Nil(R[x, x^{-1}; \alpha]).$$

حال چون $(\sum_{i+j=p} a_i \alpha^{n+i}(b_j)) \in U(R)$ پس $fg \in U(R[x, x^{-1}; \alpha])$ و نتیجه حاصل می‌شود. با به‌کار بردن استدلالی مشابه پاراگراف قبل، می‌توانیم نشان دهیم $gf \in U(R[x, x^{-1}; \alpha])$ بنابراین $f \in U(R[x, x^{-1}; \alpha])$ و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

نتیجه ۱۰.۴.۳. فرض کنیم R حلقه‌ی برگشت‌پذیر و α خودریختی سازگاری از R باشد. اگر $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n} \in U(R[x, x^{-1}; \alpha])$ آن‌گاه برای هر $i \neq j$ داریم $a_i a_j \in Nil(R)$

برهان. چون $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n} \in U(R[x, x^{-1}; \alpha])$ بنابه گزاره ۹.۴.۳، $g = \sum_{j=0}^s b_j x^{j+r} \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ وجود دارد به‌طوری که $\sum_{i+j=-(r+n)} a_i \alpha^{i+n}(b_j) \in U(R)$ و برای هر $i+j \neq -(r+n)$ $a_i b_j \in Nil(R)$ قرار می‌دهیم $p = -(r+n)$ در این صورت، برای برخی $c \in R$ داریم $\sum_{i+j=p} a_i \alpha^{i+n}(b_j) \alpha(c) = 1$ و در نتیجه $\sum_{i+j=p} a_i \alpha^{i+n}(b_j \alpha^{1-(i+n)}(c)) = 1$ قرار می‌دهیم برای هر $i+j = p$ $b_j \alpha^{1-(i+n)}(c) = b'_j$ در این صورت، $\sum_{i+j=p} a_i \alpha^{i+n}(b'_j) = 1$ چون ایده‌آل دوطرفه‌ی α -سازگار از R است و برای هر $i+j \neq p$ داریم $a_i b_j \in Nil(R)$ از این‌رو برای هر $i+j \neq p$ $a_i b'_j \in Nil(R)$ از آنجایی که $a_0(\sum_{i+j=p} a_i \alpha^{i+n}(b'_j) - 1) \in Nil(R)$ لذا $a_0^2 \alpha^n(b'_p) - a_0 \in Nil(R)$ به‌طور مشابه، خواهیم داشت $a_1^2 \alpha^{n+1}(b'_{p-1}) - a_1 \in Nil(R)$ و بنابراین $a_0 a_1 \in Nil(R)$ با به‌کاربردن استدلالی مشابه بالا، می‌توانیم نشان دهیم برای هر $i \neq j$ $a_i a_j \in Nil(R)$ و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

نتیجه ۱۱.۴.۳. فرض کنیم α خودریختی صلب از R باشد. اگر $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n} \in U(R[x, x^{-1}; \alpha])$ آن‌گاه $c_j \in R$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $i+j = m$ خواهیم داشت $a_i c_j \in Idem(R)$

برهان. چون $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n} \in U(R[x, x^{-1}; \alpha])$ ، پس بنابه گزاره ۹.۴.۳، $g = \sum_{j=0}^s b_j x^{j+r} \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ وجود دارد به‌طوری که $\sum_{i+j=-(r+n)} a_i \alpha^{i+n}(b_j) \in U(R)$. قرار می‌دهیم $p = -(r+n)$. چون α خودریختی است، در این‌صورت، برای برخی $z \in R$ ، $\sum_{i+j=p} a_i \alpha^{i+n}(b_j) \alpha(z) = 1$. لذا $\sum_{i+j=p} a_i \alpha^{i+n}(b_j \alpha^{1-(i+n)}(z)) = c_j$ ، $i+j=p$ برای هر j ، حال فرض کنیم برای هر j ، $\sum_{i+j=p} a_i \alpha^{i+n}(b_j \alpha^{1-(i+n)}(z)) = 1$ از این‌رو

$$a_0 c_p + a_1 c_{p-1} + \cdots + a_p c_0 = 1. \quad (۲.۳)$$

از آن‌جایی که R کاهشی است، بنابه نتیجه ۱۰.۴.۳، برای هر $i \neq j$ داریم $a_i a_j = 0$. پس برای هر $i \geq p+1$ با ضرب کردن a_i از سمت چپ در معادله ۲.۳، نتیجه می‌گیریم $a_i = 0$. لذا $p = m$. اگر برای هر $i+j=m$ ، $a_i c_j$ را از چپ در معادله ۲.۳ ضرب کنیم، آن‌گاه خواهیم داشت $a_i c_j \in Idem(R)$ بنابراین نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

حال با استفاده از نتایج ۱۰.۴.۳ و ۱۱.۴.۳، گزاره ۹.۴.۳ را می‌توانیم ساده‌تر بیان کنیم به‌طوری که α خودریختی صلب از حلقه‌ی R باشد.

قضیه ۱۲.۴.۳. فرض کنیم α خودریختی صلب از حلقه‌ی R باشد. همچنین، فرض کنیم $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n} \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ به‌طوری که $a_0 \neq 0 \neq a_m$. در این‌صورت، اگر $f \in U(R[x, x^{-1}; \alpha])$ و تنها اگر $d_0, \dots, d_m$ وجود داشته باشند به‌طوری که $\sum_{i+j=m} a_i d_j = \sum_{i+j=m} d_j a_i = 1$ و برای هر $i+j \neq m$ ، $a_i d_j = 0$.

برهان. فرض کنیم $f = \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n}$ عنصر وارون‌پذیر از حلقه‌ی $R[x, x^{-1}; \alpha]$ باشد. در این‌صورت، بنابه گزاره ۹.۴.۳، $g = \sum_{j=0}^s b_j x^{j+r} \in R[x, x^{-1}; \alpha]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\sum_{i+j=-(r+n)} a_i \alpha^{i+n}(b_j), \sum_{i+j=-(r+n)} b_j \alpha^{j+r}(a_i) \in U(R)$$

و برای هر $i+j \neq -(r+n)$ ، $a_i b_j = 0$. قرار می‌دهیم $p = -(r+n)$. چون α خودریختی از R است، لذا برای $0 \leq j \leq p$ ، $b'_j, b''_j \in R$ وجود دارند به‌طوری که

$$a_0 \alpha^n(b'_p) + a_1 \alpha^{n+1}(b'_{p-1}) + \cdots + a_p \alpha^{n+p}(b'_0) = 1 \quad (۳.۳)$$

و

$$b''_0 \alpha^r(a_p) + b''_1 \alpha^{r+1}(a_{p-1}) + \cdots + b''_p \alpha^{r+p}(a_0) = 1. \quad (۴.۳)$$

چون R کاهشی است، بنابه نتیجه ۱۰.۴.۳، برای هر $i \neq j$ داریم $a_i a_j = 0$. در این‌صورت، برای هر $i \geq p+1$ با ضرب a_i از سمت چپ در معادله ۳.۳، نتیجه می‌گیریم $a_i = 0$. پس $p = m$. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد $p = s$

ادعا ۱. برای هر $i+j=m$ ، $\alpha^{n+i}(b'_j) a_i \in Idem(R)$

اثبات ادعا ۱. با استدلالی مشابه برهان نتیجه ۱۱.۴.۳، می‌توان ثابت کرد.

ادعا ۲. برای هر $i + j = m$ $\alpha^{n+i}(b'_j)a_i = a_i\alpha^{n+i}(b'_j)$

اثبات ادعا ۲. چون R آبدلی است و برای هر $i + j = m$ $\alpha^{n+i}(b'_j)a_i, a_i\alpha^{n+i}(b'_j) \in \text{Idem}(R)$ از این‌رو $(\alpha^{n+i}(b'_j)a_i - a_i\alpha^{n+i}(b'_j))^2 = 0$ لذا برای هر $i + j = m$ $\alpha^{n+i}(b'_j)a_i = a_i\alpha^{n+i}(b'_j)$ زیرا R کاهشی است.

ادعا ۳. برای هر $0 \leq i \leq m$ $\langle \alpha(a_i) \rangle = \langle a_i \rangle$ و $\langle \alpha(a_i) \rangle_r = \langle a_i \rangle_r, \langle \alpha(a_i) \rangle_\ell = \langle a_i \rangle_\ell$

اثبات ادعا ۳. ابتدا نشان می‌دهیم $\langle \alpha(a_i) \rangle_\ell = \langle a_i \rangle_\ell$. چون R دارای خاصیت IFP است، بنابه نتیجه ۱۰.۴.۳، با ضرب a_i از راست در معادله ۳.۳، نتیجه می‌گیریم برای هر $i + j = m$ $a_i\alpha^{n+i}(b'_j)a_i = a_i$ پس $a_i[\alpha^{n+i}(b'_j)a_i - 1] = 0$ و لذا $a_i[\alpha^{n+i+1}(b'_j)\alpha(a_i) - 1] = 0$ زیرا α -سازگار است و $\alpha(1) = 1$. از این‌رو برای هر $i + j = m$ خواهیم داشت:

$$a_i\alpha^{n+i+1}(b'_j)\alpha(a_i) = a_i, \quad (۵.۳)$$

پس $a_i \in \langle \alpha(a_i) \rangle_\ell$ بنابراین $\langle a_i \rangle_\ell \subseteq \langle \alpha(a_i) \rangle_\ell$

با استدلالی مشابه بالا، می‌توان نشان داد برای هر $i + j = m$ $\alpha(a_i)[\alpha^{n+i}(b'_j)a_i - 1] = 0$ در نتیجه برای هر $i + j = m$ داریم

$$\alpha(a_i)\alpha^{n+i}(b'_j)a_i = \alpha(a_i), \quad (۶.۳)$$

پس $\alpha(a_i) \in \langle a_i \rangle_\ell$ و لذا $\langle \alpha(a_i) \rangle_\ell \subseteq \langle a_i \rangle_\ell$ در نتیجه $\langle \alpha(a_i) \rangle_\ell = \langle a_i \rangle_\ell$

با استدلالی مشابه بالا، می‌توان نشان داد $\langle a_i \rangle_r = \langle \alpha(a_i) \rangle_r$ بنابراین $\langle a_i \rangle = \langle \alpha(a_i) \rangle$

ادعا ۴. برای هر $0 \leq i \leq m$ $\langle a_i \rangle = \langle \alpha^{-1}(a_i) \rangle$

اثبات ادعا ۴. ابتدا ثابت می‌کنیم $\langle \alpha^{-1}(a_i) \rangle_\ell = \langle a_i \rangle_\ell$ بنابه معادله ۵.۳ داریم $\alpha^{-1}(a_i)\alpha^{n+i}(b'_j)a_i = \alpha^{-1}(a_i)$ و لذا $\alpha^{-1}(a_i) \in \langle a_i \rangle_\ell$ پس $\langle \alpha^{-1}(a_i) \rangle_\ell \subseteq \langle a_i \rangle_\ell$ همچنین بنابه معادله ۶.۳، خواهیم داشت $a_i\alpha^{n+i-1}(b'_j)\alpha^{-1}(a_i) = a_i$ از این‌رو $a_i \in \langle \alpha^{-1}(a_i) \rangle_\ell$ در نتیجه $\langle a_i \rangle_\ell \subseteq \langle \alpha^{-1}(a_i) \rangle_\ell$ بنابراین $\langle a_i \rangle_\ell = \langle \alpha^{-1}(a_i) \rangle_\ell$

با استدلالی مشابه پاراگراف قبل، نتیجه می‌گیریم $\langle a_i \rangle_r = \langle \alpha^{-1}(a_i) \rangle_r$ بنابراین $\langle a_i \rangle = \langle \alpha^{-1}(a_i) \rangle$

ادعا ۵. برای هر $0 \leq i \leq m$ و $k, t \in \mathbb{Z}$ $\langle \alpha^k(a_i) \rangle = \langle \alpha^t(a_i) \rangle$ داریم

اثبات ادعا ۵. بنابه ادعاهای ۳ و ۴ نتیجه حاصل می‌گردد.

ادعا ۶. برای هر $0 \leq j \leq m$ $d_j, d'_j \in R$ وجود دارند به‌طوری که $\sum_{i+j=m} a_i d_j = \sum_{i+j=m} d'_j a_i = 1$

اثبات ادعا ۶. در معادله ۳.۳، برای هر $0 \leq j \leq m$ قرار دهید $d_j = \alpha^{n+i}(b'_j)$ در این‌صورت، بنابه معادله ۳.۳،

$$\sum_{i+j=m} a_i d_j = 1$$

بنابه ادعا ۵، برای هر $m, n \in \mathbb{Z}$ داریم $\langle \alpha^n(a_i) \rangle_\ell = \langle \alpha^m(a_i) \rangle_\ell = \langle a_i \rangle_\ell$ لذا برای $0 \leq j \leq m$ $d''_j \in R$

وجود دارد به‌طوری که برای هر $i + j = m$ $\alpha^{r+j}(a_i) = d''_j a_i$ پس بنابه معادله ۴.۳، نتیجه می‌گیریم:

$$1 = \sum_{i+j=m} b''_j \alpha^{r+j}(a_i) = \sum_{i+j=m} b''_j d''_j a_i.$$

توجه کنید برای $0 \leq j \leq m$ $b''_j d''_j = d'_j$ بنابراین $\sum_{i+j=m} d'_j a_i = 1$

ادعا ۷. برای هر $a_i d_j = 0$ $i + j \neq m$ و $a_i d'_j$

اثبات ادعا ۷. چون حلقه‌ی R ، α -سازگار است و برای هر $a_i b_j = 0$ $i + j \neq m$ ، لذا بنابه تعاریف d_j و d'_j در

ادعا ۶، برای هر $a_i d_j = 0 = a_i d'_j$ $i + j \neq m$ و نتیجه حاصل می‌شود.

ادعا ۸. برای هر $d_j = d'_j$ $0 \leq j \leq m$

اثبات ادعا ۸. چون R خاصیت IFP دارد، پس با ضرب d'_0 از راست در معادله $a_0 d_m + a_1 d_{m-1} + \dots + a_m d_0 = 1$

۱ و بنابه ادعا ۷، نتیجه می‌گیریم $a_p d_0 d'_0 = d'_0$. همچنین، با ضرب d_0 از راست در معادله

$d'_0 a_m + d'_1 a_{m-1} + \dots + d'_m a_0 = 1$ داریم $d'_0 a_p d_0 = d_0$. بنابه نتیجه ۱۱.۴.۳، $a_p d_0$ عنصر خودتوان از R

می‌باشد. لذا $d'_0 a_p d_0 = a_p d_0 d'_0$ زیرا R اَبلی است. بنابراین $d_0 = d'_0$.

با ادامه این روند، برای $d_1, d_2, \dots, d_m$ و $d'_1, d'_2, \dots, d'_m$ نتیجه می‌گیریم برای هر $d_j = d'_j$ $0 \leq j \leq m$

بنابراین $\sum_{i+j=m} a_i d_j = \sum_{i+j=m} d_j a_i = 1$ و برای هر $a_i d_j = 0$ $i + j \neq m$

بالعکس، چون α خودریختی از R است، پس برای هر $b_j \in R$ $i + j = m$ وجود دارد به‌طوری که

$\alpha^{n+i}(b_j) = d_j$. در این صورت، برای هر $a_i b_j = 0$ $i + j \neq m$ زیرا R ، α -سازگار است و برای هر $i + j \neq m$

$a_i d_j = 0$ قرار می‌دهیم $g = g_1 x^{-(n+m)}$ ، به‌طوری که $g_1 = \sum_{j=0}^m b_j x^j$ چون برای هر $i + j \neq m$

$a_i b_j = 0$ و R ، α -صلب است، از این‌رو

$$\begin{aligned} fg &= f g_1 x^{-(n+m)} \\ &= \left(\sum_{i+j=m} a_i \alpha^{n+i}(b_j) \right) + \left(\sum_{k \neq m} \left(\sum_{i+j=k} a_i \alpha^{n+i}(b_j) \right) x^k \right) x^{-m} \\ &= \left(\sum_{i+j=m} a_i d_j \right) + \left(\sum_{k \neq m} \left(\sum_{i+j=k} a_i \alpha^{n+i}(b_j) \right) x^k \right) x^{-m} = 1. \end{aligned}$$

لذا f وارون چپ g می‌باشد. حال به دنبال وارون راست برای g خواهیم بود.

چون $\sum_{i+j=m} a_i d_j = 1$ و برای هر $a_i b_j = 0$ $i + j \neq m$ پس با استدلالی مشابه برهان ادعاهای

۳، ۴ و ۵، می‌توان نشان داد برای هر $k, t \in \mathbb{Z}$ و $0 \leq j \leq m$ ، $\langle \alpha^t(d_j) \rangle_r = \langle \alpha^k(d_j) \rangle_r$. از آنجایی که

$\langle b_j \rangle_r = \langle \alpha^{-(n+i)}(d_j) \rangle_r = \langle d_j \rangle_r$ در این صورت، برای هر $r_j \in R$ $i + j = m$ وجود دارد به‌طوری که

$d_j = b_j r_j$ چون $\sum_{i+j=m} d_j a_i = 1$ و $d_j = b_j r_j$ لذا $\sum_{i+j=m} b_j (r_j a_i) = 1$ فرض کنیم برای هر

$b'_i \in R$ $i + j = m$ در این صورت، برای هر $a'_i b_j = 0$ $i + j \neq m$ در نتیجه برای هر $b'_i \in R$ $i + j = m$

وجود دارد به‌طوری که $\alpha^{j-(n+m)}(b'_i) = a'_i$ زیرا α خودریختی می‌باشد. قرار می‌دهیم $f' = \sum_{i=0}^m b'_i x^{i+n}$

چون برای هر $b_j a'_i = 0$ $i + j \neq m$ لذا

$$\begin{aligned} g f' &= \left(\sum_{j=0}^m b_j x^j \right) x^{-(n+m)} \left(\sum_{i=0}^m b'_i x^i \right) x^n \\ &= \left(\sum_{i+j=m} b_j \alpha^{j-(m+n)}(b'_i) \right) + \left(\sum_{k \neq m} \left(\sum_{i+j=k} b_j \alpha^{j-(m+n)}(b'_i) \right) x^k \right) x^{-m} \\ &= \left(\sum_{i+j=m} b_j a'_i \right) + \left(\sum_{k \neq m} \left(\sum_{i+j=k} b_j a'_i \right) x^k \right) x^{-m} = 1. \end{aligned}$$

پس f' وارون راست برای g می‌باشد. بنابراین $f \in U(R[x, x^{-1}; \alpha])$ و نتیجه حاصل می‌گردد.

□

فصل ۴

بررسی عناصر منظم و تمیز حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب

مفهوم منظم فن نیومان در حلقه‌ها، در سال ۱۹۳۶ توسط جان فن نیومان ارائه شد. حلقه‌ی R را منظم فن نیومان می‌نامیم، هرگاه برای هر عنصر $a \in R, x \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری که $a = axa$. به عنوان مثال، هر میدان منظم فن نیومان است. همچنین یک دامنه صحیح، منظم فن نیومان است اگر و تنها اگر میدان باشد.

اندرسون و بدای در مرجع [۴]، عناصر منظم حلقه‌های جابه‌جایی را مشخص کردند. آن‌ها ثابت کردند هر عنصر از حلقه‌ی R ، منظم فن نیومان یا پوچ‌توان است اگر و تنها اگر R با بعد صفر یا کاهشی و یا شبه‌موضعی باشد. همچنین، نشان دادند که حلقه‌ی غیردامنه R منظم فن نیومان (بولی) است اگر و تنها اگر تمام مقسوم‌علیه‌های صفر آن منظم فن نیومان (بولی) باشد.

در این فصل، به بررسی عناصر منظم فن نیومان، π -منظم، فن نیومان موضعی و تمیز حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $[R[x; \alpha, \delta]$ ، حلقه‌ی توسیع جردن $A(R, \alpha)$ و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب $R[x, x^{-1}; \alpha]$ می‌پردازیم. مطالب این فصل برگرفته از مراجع [۱۹] و [۲۰] می‌باشد.

۱.۴ بررسی عناصر منظم حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب

در این بخش، ابتدا نتایج پایه‌ای در مورد عناصر منظم فن نیومان و موضعی فن نیومان در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب را به‌دست می‌آوریم که توسط این نتایج می‌توانیم عناصر منظم را در این حلقه هنگامی که حلقه‌ی R دوئو راست

و (α, δ) -سازگار می‌باشد، بیابیم.

قضیه ۱.۱.۴. فرض کنیم R و S حلقه‌های آبدی و $\{R_\alpha\}$ خانواده‌ای از حلقه‌های آبدی باشند و $a \in R$ در این صورت،

$$(۱) \quad \text{اگر برای برخی } x \in R, axa = a, \text{ آن‌گاه } ax \in Idem(R) \text{ و } xa = ax$$

$$(۲) \quad \text{vnr}(R) \text{ تحت ضرب بسته است.}$$

$$(۳) \quad \text{vnr}(R) \cap Nil(R) = \{0\}$$

$$(۴) \quad U(R) \cup Idem(R) \subseteq \text{vnr}(R) \subseteq U(R) \cup Z(R)$$

$$(۵) \quad \text{vnr}(R) = U(R) \cup \{0\} \text{ اگر و تنها اگر } Idem(R) = \{0, 1\} \text{ به خصوص، اگر } R \text{ دامنه یا موضعی باشد،}$$

آن‌گاه

$$\text{vnr}(R) = U(R) \cup \{0\}.$$

$$(۶) \quad \text{vnr}(R) \text{ دارای عنصری وارون‌ناپذیر و ناصفر است اگر و تنها اگر } Idem(R) \neq \{0, 1\}$$

$$(۷) \quad \text{vnr}(\prod R_\alpha) = \prod \text{vnr}(R_\alpha) \text{ به خصوص، } \prod R_\alpha \text{ منظم فن نیومان است اگر و تنها اگر هر } R_\alpha \text{ منظم فن}$$

نیومان باشد.

$$(۸) \quad \text{اگر } f: R \rightarrow S \text{ یک همریختی از حلقه‌ها باشد، آن‌گاه } f(\text{vnr}(R)) \subseteq \text{vnr}(S) \text{ به خصوص،}$$

$$\text{vnr}(R) \subseteq \text{vnr}(S) \text{ هنگامی که } R \text{ زیرحلقه‌ای از } S \text{ باشد و تصویر همریخت حلقه‌ی منظم فن نیومان، منظم}$$

فن نیومان است.

برهان. (۱) به‌وضوح xa و ax خودتوان می‌باشند. لذا

$$ax = (ax)^2 = a(xa)x = (xa)ax = xa(ax) = x(ax)a = (xa)^2 = xa,$$

چون R حلقه‌ی آبدی است.

□

با استدلالی مشابه، می‌توان گزاره‌های دیگر را اثبات کرد.

بنابه قضیه ۱.۱.۴(۱)، اگر R حلقه‌ی آبدی باشد و $a \in \text{vnr}(R)$ ، آن‌گاه برای برخی $x \in R$ داریم $a = a^2x$.

گزاره ۲.۱.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی آبدی باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر برای هر $a \in R$ معادلند:

$$(۱) \quad a \in \text{vnr}(R)$$

$$(۲) \quad \text{عناصر } v \in U(R) \text{ وجود دارد به‌طوری که } a^2v = a$$

$$(۳) \quad \text{عناصر } u \in U(R) \text{ و } e \in Idem(R) \text{ موجودند به‌طوری که } a = ue$$

$$(۴) \quad \text{عناصر } b \in \text{vnr}(R) \setminus \{0\} \text{ وجود دارد به‌طوری که } a + b \in U(R) \text{ و } ab = 0$$

(۵) عنصر $b \in R$ وجود دارد به‌طوری که $a + b \in U(R)$ و $ab = 0$.

برهان. (۲) $\Rightarrow$ (۱) فرض کنیم $a \in \text{vnr}(R)$. در این‌صورت، برای $x \in R$ داریم $a = a^2x$. بنابه قضیه ۱.۱.۴(۱)، خواهیم داشت $e = ax \in \text{Idem}(R)$. پس $1 - e = 1 - ax \in \text{Idem}(R)$. لذا $(1 - e)a = (1 - ax)a = a - a^2x = 0$ و $a(1 - e) = a(1 - ax) = a - a^2x = a - a = 0$. در نتیجه $v = ex + 1 - e \in U(R)$ چون $v(a + 1 - e) = (a + 1 - e)v = 1$. بنابراین $a^2v = a^2(ex + 1 - e) = a^2ex + a^2 - a^2e = a^2ex + a^2(1 - e) = a$.

(۳) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنیم برای $v \in U(R)$ ، $a^2v = a$. همچنین، فرض کنیم $v^{-1} = u \in U(R)$. بنابه قضیه ۱.۱.۴(۱)، داریم $ae = v^{-1}(av) = avv^{-1} = a$ زیرا $ae \in \text{Idem}(R)$.

(۴) $\Rightarrow$ (۳) فرض کنیم برای $u \in U(R)$ و $e \in \text{Idem}(R)$ ، $a = ue$. همچنین، فرض کنیم برای $b \neq a$ ، $b = u(1 - e)$ توجه داریم $b^2u^{-1} = u^2(1 - e)^2u^{-1} = u^2(1 - e)u^{-1} = u^2u^{-1}(1 - e) = u(1 - e) = b$. لذا $b \in \text{vnr}(R)$ بنابراین داریم $ab = (ue)(u(1 - e)) = ueu - ueue = u^2e - u^2e^2 = 0$ و $a + b = ue + u(1 - e) = u \in U(R)$. (۴) $\Rightarrow$ (۵) واضح است.

(۱) $\Rightarrow$ (۵) فرض کنیم برای $b \in R$ و $ab = 0$ ، $a + b = u \in U(R)$ در این‌صورت،

$$au = a(a + b) = a^2 + ab = a^2$$

و در نتیجه $a^2u^{-1} = (au)u^{-1} = a$ بنابراین $a \in \text{vnr}(R)$. $\square$

قضیه ۳.۱.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی آبدی باشد و $x \in \text{vnr}(R)$ در این‌صورت، عنصر منحصر به فرد $y \in R$ وجود دارد به‌طوری که $y^2x = y$ و $x^2y = x$.

برهان. فرض کنیم $x \in \text{vnr}(R)$ در این‌صورت، برای $z \in R$ داریم $x = x^2z$. حال اگر $y = z^2x$ ، آن‌گاه بنابه قضیه ۱.۱.۴(۱)، $zx = xz \in \text{Idem}(R)$. لذا $x^2y = x$ و $y^2x = y$. حال نشان می‌دهیم که عنصر y منحصر به فرد است. فرض کنیم عنصر $y_1 \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری که $x = x^2y_1$ و $y_1 = y_1^2x$. چون $xy_1 = y_1x \in \text{Idem}(R)$ داریم $y_1 = y_1^2x = y_1^2(x^2y) = y_1(xy_1x)y = y_1xy = y_1(xyx)y = yxy_1xy = yxy = y$ بنابراین عنصر y منحصر به فرد است. $\square$

بنابه [۵، تعریف ۲.۵.۹]، حلقه‌ی R را موضعی می‌نامیم، هرگاه مجموعه‌ی تمام عناصر وارون‌ناپذیر از R ، تشکیل ایده‌آل دهند.

قضیه ۴.۱.۴. فرض کنیم حلقه‌ی R خاصیت IFP داشته باشد. در این‌صورت، $R = \text{vnr}(R) \cup \text{Nil}(R)$ اگر و تنها اگر R منظم فن نیومان یا موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\text{Nil}(R)$ باشد.

برهان. چون حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP است، لذا $\text{Nil}(R)$ ایده‌آلی از R می‌باشد. فرض کنیم $R = \text{vnr}(R) \cup \text{Nil}(R)$. اگر $\text{vnr}(R) = U(R) \cup \{0\}$ ، آن‌گاه $\text{Nil}(R)$ مجموعه‌ای از عناصر وارون‌ناپذیر از R است. لذا فرض کنیم $\text{vnr}(R)$ شامل عنصر وارون‌ناپذیر و ناصفر باشد، در این‌صورت، بنابه قضیه ۱.۱.۴(۶)، عنصر $e \in \text{Idem}(R) \setminus \{0, 1\}$ وجود دارد. حال ادعا می‌کنیم که $\text{Nil}(R) = \{0\}$. فرض کنیم $x \in \text{Nil}(R)$ در

این صورت، $e + x \in \text{vnr}(R)$ و در نتیجه بنابه ۱.۱.۴(۲)، $x - ex = (1 - e)x = (1 - e)(e + x) \in \text{vnr}(R)$ همچنین داریم $x - ex = (1 - e)x \in \text{Nil}(R)$ لذا بنابه ۱.۱.۴(۳)، $x - ex = 0$ با جای گذاری e به جای $1 - e$ و استدلالی مشابه، می‌توان نتیجه گرفت $ex = 0$ از این رو $x = 0$ و ادعا ثابت می‌شود. بنابراین $R = \text{vnr}(R) \cup \text{Nil}(R) = \text{vnr}(R)$

بالعکس، فرض کنیم R حلقه‌ی منظم فن نیومان یا موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\text{Nil}(R)$ باشد. اگر R منظم فن نیومان باشد، آن‌گاه $\text{vnr}(R) = R$ لذا $R = \text{vnr}(R) \cup \text{Nil}(R)$. اگر R موضعی با ایده‌آل ماکسیمال $\text{Nil}(R)$ باشد، آن‌گاه بنابه ۱.۱.۴(۵)، داریم $\text{vnr}(R) = U(R) \cup \{0\} = (R \setminus \text{Nil}(R)) \cup \{0\}$ و در نتیجه $R = \text{vnr}(R) \cup \text{Nil}(R)$ $\square$

حال عناصر منظم فن نیومان حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ را در حالتی که R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار است، مشخص می‌کنیم.

قضیه ۵.۱.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد. در این صورت،

$$\text{vnr}(R[x; \alpha, \delta]) = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x; \alpha, \delta] \mid a_0 = ue \text{ و } a_i \in e(\text{Nil}(R)), \right. \\ \left. i \geq 1, e \in \text{Idem}(R) \text{ و } u \in U(R) \right\}.$$

برهان. بنابه به نتیجه ۵.۲.۳، $R[x; \alpha, \delta]$ حلقه‌ی آبلی است، لذا بنابه گزاره ۲.۱.۴، خواهیم داشت:

$$\text{vnr}(R[x; \alpha, \delta]) = \{fe \mid f \in U(R[x; \alpha, \delta]) \text{ و } e \in \text{Idem}(R[x; \alpha, \delta])\}.$$

چون برای هر عنصر خودتوان $e \in R$ ، $\alpha(e) = e$ و $\delta(e) = 0$ ، لذا بنابه نتایج ۴.۲.۳ و ۹.۱.۳ نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

در قضیه بعدی، به بررسی نتایجی در مورد عناصر موضعی فن نیومان هنگامی که حلقه‌ی پایه آبلی است، می‌پردازیم. این نتایج برای مشخص کردن این عناصر در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب مفید خواهد بود.

قضیه ۶.۱.۴. فرض کنیم R و S حلقه‌های آبلی و $\{R_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ خانواده‌ای از حلقه‌های آبلی باشند. در این صورت،

$$\text{vnl}(R) = \text{vnr}(R) \cup (1 + \text{vnr}(R)) = \{0, 1\} + \text{vnr}(R) \quad (۱)$$

$$\{0, 1\} + U(R) = U(R) \cup (1 + U(R)) \subseteq \text{vnl}(R)$$

(۲) فرض کنیم $a \in R$ در این صورت $a \in \text{vnl}(R)$ اگر و تنها اگر عناصر $u \in U(R)$ و $e \in \text{Idem}(R)$ وجود داشته باشند به طوری که $a = ue$ یا $a = 1 + ue$

$$J(R) \subseteq \text{vnl}(R) \text{ لذا داریم } U(R) \cup J(R) \subseteq \text{vnl}(R) \quad (۳)$$

(۴) $\text{vnl}(R) = U(R) \cup (1 + U(R))$ اگر و تنها اگر $\text{Idem}(R) = \{0, 1\}$ به خصوص،

$\text{vnl}(R) = U(R) \cup (1 + U(R))$ هنگامی که حلقه‌ی R دامنه یا موضعی باشد (توجه

می‌کنیم هنگامی که حلقه‌ی R موضعی باشد، داریم $\text{vnl}(R) = R$.)

(۵) $\text{vnl}(\prod R_\alpha) \subseteq \prod \text{vnl}(R_\alpha)$ اگر $\text{vnl}(\prod R_\alpha)$ تحت ضرب بسته باشد، آن‌گاه داریم
 $\text{vnl}(\prod R_\alpha) = \prod \text{vnl}(R_\alpha)$

(۶) فرض کنیم $f: R \rightarrow S$ یک همریختی از حلقه‌ها باشد. در این صورت، $f(\text{vnl}(R)) \subseteq \text{vnl}(S)$. به‌خصوص،
 $\text{vnl}(R) \subseteq \text{vnl}(S)$ هنگامی که R زیرحلقه‌ای از S باشد، و هر تصویر همریخت از حلقه‌ی موضعی فن نیومان، نیز موضعی فن نیومان است.

(۷) اگر $2 \in U(R)$ ، آن‌گاه هر $a \in \text{vnl}(R)$ به‌صورت مجموع سه عنصر وارون‌پذیر از حلقه‌ی R می‌باشد.

برهان. با استدلالی مشابه برهان [۴، قضیه ۵.۱]، می‌توان ثابت کرد. $\square$

نتیجه ۷.۱.۴. اگر R حلقه‌ی آبدی باشد و $R = \text{vnr}(R) \cup \text{Nil}(R)$ ، آن‌گاه R حلقه‌ی موضعی فن نیومان است.

برهان. بنابه قضیه ۶.۱.۴(۳)، نتیجه حاصل می‌شود، زیرا اگر $a \in \text{Nil}(R)$ ، آن‌گاه $1 - a \in U(R) \subseteq \text{vnr}(R)$ و
 در نتیجه R حلقه‌ی موضعی فن نیومان است. $\square$

اکنون می‌توانیم عناصر موضعی فن نیومان را در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب هنگامی که حلقه‌ی R دوئو راست و (α, δ) -سازگار است، مشخص کنیم.

قضیه ۸.۱.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد. در این صورت،

$$\text{vnl}(R[x; \alpha, \delta]) = \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x; \alpha, \delta] \mid a_0 = ue \text{ یا } a_0 = 1 - ue \text{ و } a_i \in e(\text{Nil}(R)), \right. \\ \left. i \geq 1, \text{ برای هر } u \in U(R) \text{ و } e \in \text{Idem}(R) \right\}.$$

برهان. بنابه قضایای ۵.۱.۴ و ۶.۱.۴(۲) نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

۲.۴ بررسی عناصر π -منظم و تمیز حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب

در این بخش، نتایج پایه‌ای در مورد عناصر π -منظم و تمیز در حلقه‌های آبدی را بیان می‌کنیم. با استفاده از این نتایج، عناصر π -منظم و تمیز را در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x; \alpha, \delta]$ هنگامی که R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار می‌باشد، بررسی می‌کنیم.

در ابتدا قضیه‌ای در مورد عناصر π -منظم بیان می‌کنیم که مشابه قضیه ۱.۱.۴، می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنیم R و $R_1, \dots, R_n$ حلقه‌های آبدی باشند. در این صورت، داریم:

$$\text{vnr}(R) \subseteq \pi - r(R) \quad (۱)$$

به‌خصوص، هر حلقه‌ی منظم فن نیومان، π -منظم است.

(۲) فرض کنیم $a \in R$ اگر برای $x \in R$ و $n \geq 1$ داشته باشیم $a^n = a^n x a^n$ ، آن‌گاه $a^n x \in \text{Idem}(R)$

$$\text{vnr}(R) \cup \text{Nil}(R) \subseteq \pi - r(R) \subseteq U(R) \cup Z(R) \quad (۳)$$

$$\pi - r(R) = U(R) \cup Nil(R) \text{ اگر و تنها اگر } Idem(R) = \{0, 1\} \text{ به خصوص,} \quad (۴)$$

$$\pi - r(R) = U(R) \cup Nil(R)$$

اگر R دامنه یا موضعی باشد.

$$\pi - r(R) \neq \{0, 1\} \text{ اگر و تنها اگر } Idem(R) \neq \{0, 1\} \quad (۵)$$

$$\pi - r(R_1 \times \cdots \times R_n) = \pi - r(R_1) \times \cdots \times \pi - r(R_n) \text{ به خصوص, } R_1 \times \cdots \times R_n, \pi\text{-منظم} \quad (۶)$$

است اگر و تنها اگر هر R_i ، π -منظم باشد.

$$f: R \rightarrow S \text{ همریختی از حلقه‌های آبدی باشد. در این صورت,} \quad (۷)$$

$$f(\pi - r(R)) \subseteq \pi - r(S).$$

به خصوص، $\pi - r(R) \subseteq \pi - r(S)$ هنگامی که R زیرحلقه‌ای از S است و تصویر همریخت حلقه‌ی

π -منظم، نیز π -منظم است.

برهان. (۱) واضح است.

$$(۲) \text{ فرض کنیم برای } x \in R \text{ و } n \geq 1, a^n = a^n x a^n \text{ در این صورت, داریم } (a^n x)^2 = a^n x a^n x = a^n x \text{ بنابراین}$$

$$a^n x \in Idem(R)$$

$$(۳) \text{ فرض کنیم } a \in \text{vnr}(R) \cup Nil(R) \text{ در این صورت, } a \in \text{vnr}(R) \text{ یا } a \in Nil(R) \text{ در حالت اول}$$

بنابه (۱)، داریم $a \in \pi - r(R)$ در حالت دوم، $n \in \mathbb{N}$ وجود دارد به طوری که $a^n = 0$ ، لذا برای $x \in R$

$$a^n = a^n x a^n \text{ در نتیجه } \text{vnr}(R) \cup Nil(R) \subseteq \pi - r(R)$$

حال فرض کنیم $a \in \pi - r(R)$ ، اما $a \notin Z(R)$ کافی است نشان دهیم $a \in U(R)$ در این صورت،

برای $x \in R$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم $a^n = a^n x a^n$ لذا $a^n(1 - x a^n) = 0$ و $(1 - a^n x)a^n = 0$ در این صورت،

$1 - x a^n = 0$ و $1 - a^n x = 0$ چون $a \notin Z(R)$ در نتیجه $x a^n = a^n x = 1$ و از این رو $a \in U(R)$ بنابراین

$$\pi - r(R) \subseteq U(R) \cup Z(R)$$

$$(۴) \text{ فرض کنیم } \pi - r(R) = U(R) \cup Nil(R) \text{ و } a \in Idem(R) \text{ در این صورت, } a \in \pi - r(R)$$

لذا $a \in U(R)$ یا $a \in Nil(R)$ اگر $a \in U(R)$ آن گاه $a = 1$ در حالت دوم، داریم $a = 0$ بنابراین

$$Idem(R) = \{0, 1\}$$

حال فرض کنیم $Idem(R) = \{0, 1\}$ و $a \in \pi - r(R)$ در این صورت، برای $x \in R$ و $n \in \mathbb{N}$

$a^n = a^n x a^n$ لذا $a^n \in \text{vnr}(R)$ چون بنابه فرض $Idem(R) = \{0, 1\}$ پس بنابه قضیه ۱.۱.۴(۵)، خواهیم

داشت $a^n \in U(R) \cup \{0\}$ از این رو $a^n \in U(R)$ یا $a^n = 0$ و در نتیجه $a \in U(R)$ یا $a \in Nil(R)$ بنابراین

$$\pi - r(R) \subseteq U(R) \cup Nil(R)$$

بالعکس، بنابه (۳) و قضیه ۱.۱.۴(۴)، واضح است. بنابراین $\pi - r(R) = U(R) \cup Nil(R)$

به خصوص، اگر R دامنه باشد، چون $Idem(R) = \{0, 1\}$ آن گاه واضح است. همچنین، اگر R حلقه‌ی موضعی

باشد، آن گاه بنابه گزاره ۱.۳.۱.۲، $Idem(R) = \{0, 1\}$ و نتیجه حاصل می‌گردد.

(۵) با استفاده از (۴)، واضح است.

□

(۶) و (۷) واضح می‌باشند.

نتیجه ۲.۲.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی آبدی باشد و $R = \text{vnr}(R) \cup \text{Nil}(R)$. در این صورت، R حلقه‌ی π -منظم می‌باشد.

□

برهان. از قضیه ۱.۲.۴ (۳)، حاصل می‌شود.

یادآوری می‌کنیم بنابه قضیه ۱.۲.۴ (۲)، اگر حلقه‌ی R آبدی باشد و $a \in \pi - r(R)$ ، آن‌گاه برای $x \in R$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم $a^n = a^{2n}x = xa^{2n}$

قضیه ۳.۲.۴. فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP باشد. در این صورت، $\pi - r(R)$ یک نیم‌گروه است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر $a, b \in \pi - r(R)$ ، عدد $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری که برای برخی $x, y \in R$ ، $a^k = a^{2k}x$ و $b^k = b^{2k}y$. فرض کنیم برای برخی $x, y \in R$ و $m, n \in \mathbb{N}$ داریم $a^n = a^{2n}x$ و $b^m = b^{2m}y$. در این صورت، بنابه قضایای ۱.۲.۴ (۲) و ۱.۱.۴ (۱)، $a^n x = xa^n$ و $b^m y = yb^m$ عناصری خودتوان هستند، پس

$$a^{2n} = a^n a^{2n} x = (a^{2n} x) a^{2n} x = a^{2n} a^n x x a^n = a^{3n} x a^n x = a^{4n} x^2,$$

از این‌رو بنابه قضیه ۱.۲.۴ (۲)، عناصر $a^{2n} x^2$ و $x^2 a^{2n}$ خودتوان هستند و داریم $x^2 a^{2n} = a^{2n} x^2$. در نتیجه

$$a^{3n} = a^n a^{4n} x^2 = a^{2n} x a^{4n} x^2 = a^n a^n x a^{2n} a^{2n} x^2 = a^n a^{2n} a^{2n} a^n x x^2 = a^{6n} x^3.$$

با ادامه این روند، می‌توان ثابت کرد $(a^n)^m = a^{2mn} x^m$. با استدلالی مشابه نیز می‌توان نشان داد برای $b^m = b^{2m} y$ داریم $(b^m)^n = b^{2mn} y^n$. قرار می‌دهیم $k = mn$ ، از این‌رو $a^k = a^{2k} x^m$ و $b^k = b^{2k} y^n$. پس $a^k b^k = (a^{2k} x^m)(b^{2k} y^n) = (a^k x^m a^k)(b^k y^n b^k) = a^k b^k y^n x^m a^k b^k$ می‌باشد. لذا $a^k b^k (y^n x^m a^k b^k - 1) = 0$ و در نتیجه $(ab)^{2k} (y^n x^m a^k b^k - 1) = 0$ ، زیرا حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP است. بنابراین

$$\begin{aligned} (ab)^{2k} &= (ab)^{2k} y^n x^m a^k b^k = (ab)^{2k} x^m a^k y^n b^k = (ab)^{2k} a^k x^m b^k y^n \\ &= (ab)^{2k} a a^{k-1} x^m b^k y^n = (ab)^{2k} a b^k y^n a^{k-1} x^m \\ &= (ab) a b b^{k-1} y^n a^{k-1} x^m \\ &= (ab)^{2k+1} \alpha, \end{aligned}$$

به‌طوری که $\alpha = b^{k-1} y^n a^{k-1} x^m$ ، زیرا عناصر $a^k x^m = x^m a^k$ و $b^k y^n = y^n b^k$ خودتوان و R آبدی می‌باشد. حال قرار می‌دهیم $c = ab$ و $p = 2k$ ، در نتیجه

$$c^p = c^{p+1} \alpha = c c^p \alpha = c (c^{p+1} \alpha) \alpha = c^{p+2} \alpha^2 = \dots = c^{2p} \alpha^t.$$

□

بنابراین $c = ab \in \pi - r(R)$ و در نتیجه $\pi - r(R)$ یک نیم‌گروه است.

نتیجه ۴.۲.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست باشد. در این صورت، $\pi - r(R)$ یک نیم‌گروه است.

قضیه ۵.۲.۴. فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP باشد. در این صورت، برای هر $a \in R$ ، گزاره‌های زیر معادلند:

$$a \in \pi - r(R) \quad (۱)$$

$$a^n \in \text{vnr}(R), n \geq 1 \quad (۲)$$

$$a^n = ue \text{ برای برخی } a \in U(R), e \in \text{Idem}(R) \text{ و } n \geq 1 \text{ داریم } a^n = ue \quad (۳)$$

$$a = b + w \text{ عناصر } b \in \text{vnr}(R) \text{ و } w \in \text{Nil}(R) \text{ وجود دارند به طوری که } a = b + w \quad (۴)$$

$$a = ue + w \text{ عناصر } a \in U(R), e \in \text{Idem}(R) \text{ و } w \in \text{Nil}(R) \text{ موجودند به طوری که } a = ue + w \quad (۵)$$

$$a + \text{Nil}(R) \in \text{vnr}(R/\text{Nil}(R)) \quad (۶)$$

$$a^n + b \in U(R) \text{ و } a^n b \in \text{Nil}(R) \text{ عناصر } b \in R \text{ و } n \geq 1 \text{ وجود دارند به طوری که } a^n + b \in U(R) \text{ و } a^n b \in \text{Nil}(R) \quad (۷)$$

$$a + b \in U(R) \text{ و } ab \in \text{Nil}(R) \text{ عنصر } b \in R \text{ موجود است به طوری که } a + b \in U(R) \text{ و } ab \in \text{Nil}(R) \quad (۸)$$

برهان. (۲) $\Leftrightarrow$ (۱) واضح است.

(۳) $\Leftrightarrow$ (۲) و (۴) $\Leftrightarrow$ (۵) از قضیه ۲.۱.۴، حاصل می‌شود.

(۵) $\Rightarrow$ (۱) چون هر حلقه‌ی دارای خاصیت IFP ، آبدی است، لذا بنابه نتیجه ۲۸.۱.۲، نتیجه حاصل می‌شود.

(۶) $\Rightarrow$ (۱) به طور مستقیم، از قضیه ۱.۱.۴(۸)، حاصل می‌گردد.

(۱) $\Rightarrow$ (۶) چون حلقه‌ی R آبدی است، لذا بنابه قضیه ۲۹.۱.۲، نتیجه حاصل می‌شود.

(۷) $\Rightarrow$ (۳) و (۸) $\Rightarrow$ (۵) با به کار بردن استدلالی مشابه برهان قضیه ۲۷.۱.۲، می‌توان ثابت کرد.

(۷) $\Rightarrow$ (۸) فرض کنیم $ac \in \text{Nil}(R)$ در این صورت، چون حلقه‌ی R خاصیت IFP دارد، لذا برای برخی $n \geq 1$ و $(ac)^n = 0$ و برای هر $i_1 + \dots + i_s \geq 1$ و $j_1 + \dots + j_s \geq 1$ ، $a^{i_1}c^{j_1} \dots a^{i_s}c^{j_s} \in \text{Nil}(R)$ چون $\text{Nil}(R)$ ایده‌آل دوطرفه از حلقه‌ی R است و $a^{2n} + c^{2n} = (a + c)^{2n} - \sum a^{i_1}c^{j_1} \dots a^{i_s}c^{j_s}$ به طوری که $0 \leq i_1, i_2, \dots, i_s, j_1, j_2, \dots, j_s \leq 2n - 1$ ، $i_1 + \dots + i_s + j_1 + \dots + j_s = 2n$ و $i_1 + \dots + i_s \geq 1$ ، $j_1 + \dots + j_s \geq 1$ ، بنابراین با قرار دادن $b = c^{2n}$ و $a^{2n} + c^{2n} \in U(R) + \text{Nil}(R) \subseteq U(R)$ ، از این رو $a^{2n} + c^{2n} \in U(R) + \text{Nil}(R) \subseteq U(R)$ و $b = c^{2n}$ ، $a^{2n} + b \in U(R)$ و $a^{2n}b \in \text{Nil}(R)$ ، بنابه نتیجه حاصل می‌شود.

(۷) $\Rightarrow$ (۵) فرض کنیم برای برخی $b \in R$ و $m \geq 1$ ، $a^m b \in \text{Nil}(R)$ به طوری که $a^m + b = u \in U(R)$ در این صورت $a^m u = a^m(a^m + b) = a^{2m} + a^m b$ حال اگر u^{-1} را از سمت راست در دو طرف معادله ضرب کنیم، آن‌گاه داریم $a^m = a^{2m}u^{-1} + a^m b u^{-1}$ چون $a^m \in \text{Nil}(R)$ ایده‌آل دوطرفه می‌باشد، لذا $a^m - a^{2m}u^{-1} \in \text{Nil}(R)$ پس $a^m + \text{Nil}(R) = a^{2m}u^{-1} + \text{Nil}(R)$ و از این رو $a + \text{Nil}(R) \in \pi - r(R/\text{Nil}(R))$ بنابه نتیجه ۲۸.۱.۲، خواهیم داشت $a + \text{Nil}(R) = (u_1 + \text{Nil}(R))(f + \text{Nil}(R)) + (w + \text{Nil}(R))$ به طوری که $u_1 + \text{Nil}(R) \in U(R/\text{Nil}(R))$ ، $f + \text{Nil}(R) \in \text{Idem}(R/\text{Nil}(R))$ و $w + \text{Nil}(R) \in \text{Nil}(R/\text{Nil}(R))$ در نتیجه $a + \text{Nil}(R) = u_1 f + \text{Nil}(R)$ چون $u_1 + \text{Nil}(R) \in U(R/\text{Nil}(R))$ نتیجه می‌گیریم که $u_1 \in U(R)$ همچنین، چون $f + \text{Nil}(R) \in \text{Idem}(R/\text{Nil}(R))$ ، بنابه لم ۱.۲.۳، برای برخی $h \in \text{Nil}(R)$ داریم

$e \in Idem(R)$ و $u_1 \in U(R)$ که $a + Nil(R) = u_1e + Nil(R)$ لذا $e = f + h \in Idem(R)$ پس برای $n \in Nil(R)$ داریم $a = u_1e + n$ و از این رو نتیجه حاصل می‌گردد.
 $(1) \Rightarrow (7)$ با به کار بردن استدلالی مشابه برهان $(5) \Rightarrow (7)$ و با استفاده از نتیجه ۲.۸.۱.۲، نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

نتیجه ۶.۲.۴. فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP باشد. در این صورت،

$$\pi - r(R) = vnr(R) + Nil(R) \quad (1)$$

$$\pi - r(R)/Nil(R) = vnr(R/Nil(R)) \quad (2)$$

$$\pi - r(R) = vnr(R) \text{ اگر و تنها اگر } R \text{ کاهشی است} \quad (3)$$

(۴) اگر $2 \in U(R)$ باشد، آن‌گاه هر عنصر $a \in \pi - r(R)$ را می‌توان به فرم مجموع دو عنصر وارون‌پذیر از حلقه‌ی R نوشت.

برهان. (۱) از معادل بودن (۱) و (۴) در قضیه ۵.۲.۴، نتیجه حاصل می‌گردد.

(۲) از معادل بودن (۱) و (۶) در قضیه ۵.۲.۴، نتیجه حاصل خواهد شد.

(۳) چون بنابه قضیه ۱.۱.۴(۳)، داریم $vnr(R) \cap Nil(R) = \{0\}$ ، لذا بنابه (۱)، نتیجه حاصل می‌شود.

(۴) با استدلالی مشابه برهان [۴، نتیجه ۴.۳] می‌توان ثابت کرد. $\square$

قضیه ۷.۲.۴. فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP باشد. در این صورت، $\pi - r(R) = vnr(R) \cup Nil(R)$ اگر و تنها اگر $Idem(R) = \{0, 1\}$ یا $Nil(R) = \{0\}$

برهان. ابتدا فرض کنیم عنصر $e \in Idem(R)$ وجود داشته باشد به طوری که $e \neq 0, 1$. همچنین، فرض کنیم $\pi - r(R) = vnr(R) \cup Nil(R)$ در این صورت، نشان خواهیم داد $Nil(R) = \{0\}$. عنصر $x \in Nil(R)$ را در نظر می‌گیریم. پس بنابه نتیجه ۶.۲.۴(۱) و با توجه به فرض، داریم $e + x \in vnr(R)$ و در نتیجه $e + x \in vnr(R) + Nil(R) = \pi - r(R) = vnr(R) \cup Nil(R)$ قضیه ۱.۱.۴(۲)، $x - ex = (1 - e)x = (1 - e)(e + x) \in vnr(R)$ ، همچنین، چون R دارای خاصیت IFP است، لذا $x - ex = (1 - e)x \in Nil(R)$ ، پس بنابه قضیه ۱.۱.۴(۳)، $x - ex = 0$ ، با جای‌گذاری e به جای $1 - e$ و استدلالی مشابه، می‌توان نتیجه گرفت $ex = 0$ ، و از این رو $x = 0$ بنابراین $Nil(R) = \{0\}$.

بالعکس، فرض کنیم $Idem(R) = \{0, 1\}$ یا $Nil(R) = \{0\}$. چون بنابه نتیجه ۶.۲.۴(۱)، $\pi - r(R) = vnr(R) + Nil(R)$ و با توجه به اینکه داریم $U(R) + Nil(R) = U(R)$ ، لذا هر دو شرط نتیجه می‌دهد $\pi - r(R) = vnr(R) \cup Nil(R)$. $\square$

قضیه ۸.۲.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد. در این صورت،

$$\pi - r(R[x; \alpha, \delta]) = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x^i \in R[x; \alpha, \delta] \mid a_0 \in \pi - r(R) \text{ و } a_i \in Nil(R), i \geq 1 \right\}.$$

برهان. چون R حلقه‌ی دوئو راست است، بنابه نتیجه ۵.۲.۳، $R[x; \alpha, \delta]$ حلقه‌ی آبلای می‌باشد. همچنین، بنابه گزاره ۷.۱.۳، داریم $Nil(R)[x; \alpha, \delta] = L - rad(R[x; \alpha, \delta]) = Nil(R[x; \alpha, \delta])$. پس $Nil(R[x; \alpha, \delta])$ ایده‌آل دوطرفه از حلقه‌ی $R[x; \alpha, \delta]$ می‌باشد. بنابراین بنابه نتیجه ۶.۲.۴ (۱) و قضیه ۵.۱.۴ داریم:

$$\begin{aligned} \pi - r(R[x; \alpha, \delta]) &= vnr(R[x; \alpha, \delta]) + Nil(R[x; \alpha, \delta]) \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{j=0}^m w_j x^j \mid a_0 = ue \text{ و } a_i \in e(Nil(R)), i \geq 1, \right. \\ &\quad \left. w_j \in Nil(R), j \geq 0 \text{ برای } u \in U(R) \text{ و } e \in Idem(R) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x; \alpha, \delta] \mid a_0 = ue + w, u \in U(R), e \in Idem(R) \right. \\ &\quad \left. \text{و } w \in Nil(R), a_i \in Nil(R), i \geq 1 \text{ برای هر } \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x; \alpha, \delta] \mid a_0 \in \pi - r(R) \text{ و } a_i \in Nil(R), i \geq 1 \text{ برای هر } \right\}. \end{aligned}$$

□

گوییم $Nil(R)$ از اندیس کران‌داری n است، هرگاه n کمترین عدد صحیح مثبتی باشد که برای هر $w^n = 0, w \in Nil(R)$ همچنین، حلقه‌ی R را از اندیس کران‌داری n می‌نامیم، هرگاه n کمترین عدد صحیح مثبتی باشد که برای هر $a \in \pi - r(R), a^n \in vnr(R)$ (برای جزئیات بیشتر به [۴۰، صفحه‌ی ۳۳۲] مراجعه شود). توجه می‌کنیم که هر حلقه‌ی منظم فن نیومان، از اندیس کران‌داری ۱ می‌باشد.

قضیه ۹.۲.۴. فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP باشد و $n \in \mathbb{N}$. در این صورت، R از اندیس کران‌داری n است اگر و تنها اگر $Nil(R)$ از اندیس کران‌داری n باشد.

برهان. ابتدا فرض کنیم حلقه‌ی R از اندیس کران‌داری n باشد و همچنین، فرض کنیم $w \in Nil(R) \subseteq \pi - r(R)$. در این صورت، بنابه قضیه ۱.۱.۴ (۳)، داریم $w^n \in vnr(R) \cap Nil(R) = \{0\}$ و در نتیجه $w^n = 0$. بنابراین $Nil(R)$ از اندیس کران‌داری حداکثر n می‌باشد.

بالعکس، فرض کنیم $Nil(R)$ از اندیس کران‌داری n باشد. همچنین، فرض کنیم $a \in \pi - r(R)$ ، لذا بنابه قضیه ۵.۲.۴، برای $u \in U(R), e \in Idem(R)$ و $w \in Nil(R)$ داریم $a = ue + w$. چون حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP و e خودتوانی از R است، لذا $\alpha \in Nil(R)$ وجود دارد به طوری که $a^n = u^n e + \alpha e + w^n = (u^n + \alpha)e$. قرار می‌دهیم $u^n + \alpha = v$ به وضوح v وارون‌پذیر است. در نتیجه برای $w \in U(R)$ و $a^n = ve$ و از این رو بنابه گزاره ۲.۱.۴، داریم $a^n \in vnr(R)$. لذا حلقه‌ی R از اندیس کران‌داری حداکثر n دارد. □

در ادامه، عناصر تمیز حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اربیب $R[x; \alpha, \delta]$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. به عنوان کاربردی از نتایج فصل قبل، می‌توانیم عناصر تمیز $R[x; \alpha, \delta]$ را هنگامی که حلقه‌ی R دوئو راست و (α, δ) -سازگار است، مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۲.۴. فرض کنیم R و S حلقه‌های آبلای و $\{R_\alpha\}$ خانواده‌ای از حلقه‌های آبلای باشند. در این صورت،

(۱) $Idem(R) \subseteq vnr(R) \subseteq vnl(R) \subseteq cln(R)$ به‌خصوص، هر حلقه‌ی بولی، هر حلقه‌ی منظم فن نیومان و هر حلقه‌ی موضعی فن نیومان، حلقه‌ی تمیز است.

$$U(R) \cup J(R) \subseteq U(R) \cup (1 + U(R)) \subseteq cln(R) \quad (۲)$$

(۳) اگر $Idem(R) = \{0, 1\}$ ، آن‌گاه $cln(R) = vnl(R)$. به‌خصوص، $cln(R) = vnl(R)$ هنگامی‌که حلقه‌ی R دامنه یا موضعی باشد (توجه می‌کنیم هنگامی‌که حلقه‌ی R موضعی باشد، داریم $cln(R) = vnl(R) = R$).

$$cln(\prod R_\alpha) = \prod cln(R_\alpha) \quad (۴)$$

به‌خصوص، $\prod R_\alpha$ حلقه‌ی تمیز است اگر و تنها اگر هر R_α تمیز باشد.

(۵) فرض کنیم $f: R \rightarrow S$ یک همریختی از حلقه‌های آبدی باشد. در این صورت، $f(cln(R)) \subseteq cln(S)$. به‌خصوص، $cln(R) \subseteq cln(S)$ هنگامی‌که R زیرحلقه‌ای از S باشد، و هر تصویر همریخت از حلقه‌ی تمیز، نیز تمیز است.

(۶) اگر $2 \in U(R)$ ، آن‌گاه هر $a \in cln(R)$ را می‌توان به‌صورت مجموع سه عنصر وارون‌پذیر از حلقه‌ی R نوشت.

$$vnl(R) \text{ تحت ضرب بسته باشد، آن‌گاه } cln(R) = vnl(R) \quad (۷)$$

برهان. با استدلالی مشابه برهان [۴، قضیه ۶.۱]، ثابت می‌شود. $\square$

۱۱.۲.۴. فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP باشد. در این صورت، $vnr(R) \subseteq \pi - r(R) \subseteq cln(R)$. به‌خصوص، هر حلقه‌ی π -منظم، حلقه‌ی تمیز می‌باشد.

برهان. با استدلالی مشابه برهان [۴، قضیه (۲) ۶.۱]، می‌توان ثابت نمود. $\square$

نتیجه ۱۱.۲.۴. اگر حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP باشد و $R = vnr(R) \cup Nil(R)$ ، آن‌گاه R حلقه‌ی تمیز می‌باشد.

برهان. چون هر حلقه‌ی موضعی فن نیومان (یا هر حلقه‌ی π -منظم) حلقه‌ی تمیز است، از این‌رو بنابه قضیه ۱۰.۲.۴(۱)، لم ۱۱.۲.۴ و نتایج ۲.۲.۴ و ۷.۱.۴، نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

قضیه ۱۳.۲.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار باشد. در این صورت،

$$cln(R[x; \alpha, \delta]) = \{ \sum_{i=0}^n a_i x^i \in R[x; \alpha, \delta] \mid a_0 \in cln(R) \text{ و } a_i \in Nil(R), i \geq 1 \}.$$

برهان. بنابه گزاره ۷.۱.۳، نتایج ۹.۱.۳ و ۴.۲.۳، نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

۳.۴ بررسی عناصر منظم و تمیز حلقه‌ی توسیع جردن $A(R, \alpha)$ و حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب

در این بخش، ابتدا عناصر منظم فن نیومان، π -منظم، موضعی فن نیومان و تمیز را در حلقه‌ی توسیع جردن $A(R, \alpha) = A$ مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس با مطالعه این عناصر در حلقه‌ی $A[x, x^{-1}; \alpha]$ در حالتی که R ، α -صلب می‌باشد، عناصر فوق را در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب $R[x, x^{-1}; \alpha]$ مشخص می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی آبدی و α تکریختی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت،

(۱)

$$\text{vnr}(A) = \{x^{-i}(er)x^i \in A \mid e \in \text{Idem}(R), r \in R, i \geq 0 \text{ و } \alpha^n(r) \in U(R), \\ n \geq 0 \text{ برای برخی}\}.$$

(۲)

$$\text{vnl}(A) = \{x^{-i}ax^i \in A \mid a = er \text{ یا } a = 1 - er, i \geq 0, e \in \text{Idem}(R), r \in R \\ \alpha^n(r) \in U(R), n \geq 0 \text{ برای برخی}\}.$$

برهان. (۱) ابتدا فرض کنیم $x^{-i}ax^i \in A$ به‌طوری که برای برخی $e \in \text{Idem}(R)$ و $a = er$ و برای برخی عدد صحیح نامنفی n ، $\alpha^n(r) \in U(R)$. در این صورت، بنابه ۱.۳.۳، $x^{-i}ex^i \in \text{Idem}(R)$ و $x^{-i}rx^i \in U(A)$. بنابه ۳.۳.۳، A آبدی است و در نتیجه بنابه گزاره ۲.۱.۴، $x^{-i}ax^i \in \text{vnr}(A)$ و لذا نتیجه حاصل می‌شود. حال فرض کنیم $x^{-i}ax^i \in \text{vnr}(A)$ بنابه ۳.۳.۳، A آبدی است. پس بنابه گزاره ۲.۱.۴، داریم $x^{-i}ax^i = (x^{-k}ex^k)(x^{-j}rx^j)$ به‌طوری که $x^{-j}rx^j \in U(A)$ و $x^{-k}ex^k \in \text{Idem}(A)$ ، لذا بنابه ۱.۳.۳، $e \in \text{Idem}(R)$ و برای برخی عدد صحیح نامنفی n ، $\alpha^n(r) \in U(R)$. از طرفی داریم

$$x^{-i}ax^i = (x^{-k}ex^k)(x^{-j}rx^j) = x^{-(k+j)}\alpha^j(e)\alpha^k(r)x^{k+j}. \quad (۱.۴)$$

سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. اگر $k > j$ ، آن‌گاه بنابه معادله ۱.۴، $x^{-i}ax^i = x^{-(k+j)}\alpha^j(e)\alpha^j(\alpha^{k-j}(r))x^{k+j}$ قرار می‌دهیم $\alpha^{k-j}(r) = s$ ، لذا بنابه [۳۱، صفحه‌ی ۴۳۶]، داریم

$$x^{-i}ax^i = x^{-(k+j)}\alpha^j(es)x^{k+j} = x^{-k}esx^k. \quad (۲.۴)$$

دو زیرحالت زیر را در نظر می‌گیریم:

زیرحالت ۱. اگر $n \geq k - j$ ، آن‌گاه $\alpha^n(r) = \alpha^{n-(k-j)}(\alpha^{k-j}(r)) = \alpha^{n-(k-j)}(s)$ لذا $\alpha^m(s) \in U(R)$ به‌طوری که $m = n - (k - j)$ عدد صحیح نامنفی است. پس بنابه معادله ۲.۴، برای برخی $e \in \text{Idem}(R)$

نتیجه حاصل می‌گردد. $x^{-i}ax^i = x^{-k}esx^k$, $s \in R$ به‌طوری که برای برخی عدد صحیح نامنفی m داریم $\alpha^m(s) \in U(R)$ و از این‌رو

زیر حالت ۲. اگر $n < k - j$ آن‌گاه بنابه تذکر ۷.۴.۳، $s = \alpha^{k-j}(r) \in U(R)$ و در نتیجه برای هر $m \geq 1$ ، $\alpha^m(s) \in U(R)$ پس بنابه معادله ۲.۴، داریم $x^{-i}ax^i = x^{-k}esx^k$ به‌طوری که $e \in Idem(R)$ و برای هر $m \geq 1$ ، $\alpha^m(s) \in U(R)$ و لذا نتیجه حاصل می‌شود. حالت ۲. اگر $k < j$ ، آن‌گاه بنابه معادله ۱.۴، داریم

$$x^{-i}ax^i = x^{-(k+j)}\alpha^k(\alpha^{j-k}(e))\alpha^k(r)x^{k+j} = x^{-(k+j)}\alpha^k(\alpha^{j-k}(e)r)x^{k+j}.$$

قرار می‌دهیم $\alpha^{j-k}(e) = e'$ در این‌صورت، بنابه [۳۱، صفحه ۴۳۶]، داریم

$$x^{-i}ax^i = x^{-(k+j)}\alpha^k(e'r)x^{k+j} = x^{-j}e'rx^j$$

به‌طوری که $e' \in Idem(R)$ و برای برخی عدد صحیح نامنفی n ، $\alpha^n(r) \in U(R)$ و لذا نتیجه حاصل می‌شود.

حالت ۳. اگر $k = j$ ، آن‌گاه با جای‌گذاری j به‌جای k ، در معادله ۱.۴، خواهیم داشت $x^{-i}ax^i = x^{-(j+j)}\alpha^j(er)x^{j+j} = x^{-j}(er)x^j$ و برای برخی $n \geq 0$ ، $\alpha^n(r) \in U(R)$ بنابراین نتیجه حاصل می‌گردد.

(۲) بنابه (۱)، ثابت می‌شود. $\square$

قضیه ۲.۳.۴. فرض کنیم حلقه‌ی R دارای خاصیت IFP و α تکریختی از حلقه‌ی R باشد. در این‌صورت،

$$\pi - r(A) = \{x^{-i}(er + w)x^i \in A \mid e \in Idem(R), i \geq 0, w \in Nil(R), r \in R \text{ و } \alpha^n(r) \in U(R), n \geq 0 \text{ برای برخی}\}.$$

برهان. ابتدا فرض کنیم $x^{-i}ax^i \in A$ به‌طوری که برای $e \in Idem(R)$ ، $w \in Nil(R)$ و $r \in R$ ، $a = er + w$ و برای برخی $n \geq 0$ ، $\alpha^n(r) \in U(R)$ در این‌صورت بنابه لم ۱.۳.۳ و قضیه ۱.۳.۴، برای $x^{-i}erx^i \in \text{vnr}(A)$ و $x^{-i}wx^i \in Nil(A)$ خواهیم داشت $x^{-i}ax^i = x^{-i}(er + w)x^i = x^{-i}erx^i + x^{-i}wx^i$ چون بنابه لم ۳.۳.۳، حلقه‌ی A دارای خاصیت IFP است، لذا بنابه قضیه ۵.۲.۴، داریم $x^{-i}ax^i \in \pi - r(A)$ و از این‌رو نتیجه حاصل می‌شود.

حال فرض کنیم $x^{-i}ax^i \in \pi - r(A)$ چون بنابه لم ۳.۳.۳، حلقه‌ی A دارای خاصیت IFP است، لذا بنابه قضیه ۵.۲.۴، برای برخی $x^{-j}bx^j \in \text{vnr}(A)$ و $x^{-k}cx^k \in Nil(A)$ داریم

$$x^{-i}ax^i = x^{-j}bx^j + x^{-k}cx^k = x^{-(j+k)}(\alpha^k(er) + \alpha^j(c))x^{j+k}.$$

پس بنابه لم ۱.۳.۳ و قضیه ۱.۳.۴، داریم $c \in Nil(R)$ ، $e \in Idem(R)$ و برای برخی عدد صحیح نامنفی n ، $\alpha^n(r) \in U(R)$ حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. اگر $j \geq k$ ، آن‌گاه خواهیم داشت

$$x^{-i}ax^i = x^{-(j+k)}(\alpha^k(er) + \alpha^k(\alpha^{j-k}(c)))x^{j+k} = x^{-j}(er + \alpha^{j-k}(c))x^j$$

به‌طوری که $\alpha^{j-k}(c) \in Nil(R)$ و $e \in Idem(R)$ و $r \in R$ و برای برخی عدد صحیح نامنفی n $\alpha^n(r) \in U(R)$ و از این‌رو نتیجه به‌دست می‌آید.

حالت ۲. اگر $k < j$ ، آن‌گاه

$$x^{-i}ax^i = x^{-(j+k)}(\alpha^j(\alpha^{k-j}(er)) + \alpha^j(c))x^{j+k} = x^{-k}(\alpha^{k-j}(e)\alpha^{k-j}(r) + c)x^k.$$

قرار می‌دهیم $\alpha^{k-j}(e) = e'$ و $\alpha^{k-j}(r) = s$ لذا

$$x^{-i}ax^i = x^{-(j+k)}\alpha^j(e's + c)x^{j+k} = x^{-k}(e's + c)x^k \quad (۳.۴)$$

و $e' \in Idem(R)$ اگر $n \geq k - j$ آن‌گاه $\alpha^{n-(k-j)}(s) = \alpha^{n-(k-j)}(\alpha^{k-j}(r)) = \alpha^n(r)$ پس

$\alpha^m(s) \in U(R)$ به‌طوری که $m = n - (k - j) \geq 0$ اگر $k - j > n$ ، آن‌گاه

$$s = \alpha^{k-j}(r) = \alpha^{(k-j)-n}(\alpha^n(r)) \in U(R),$$

چون $\alpha^n(r) \in U(R)$ بنابراین برای $e' \in Idem(R)$ ، $c \in Nil(R)$ و $s \in R$ خواهیم داشت $x^{-i}ax^i = x^{-k}(e's + c)x^k$ و همچنین، عدد صحیح نامنفی m وجود دارد به‌طوری که $\alpha^m(s) \in U(R)$ و بنابراین نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

قضیه ۳.۳.۴. فرض کنیم α تکریرختی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت،

$\text{cln}(A) = \{x^{-i}(e+r)x^i \in A \mid e \in Idem(R), i \geq 0, r \in R \text{ و } \alpha^n(r) \in U(R), n \geq 0\}$.

برهان. فرض کنیم $x^{-i}ax^i \in A$ به‌طوری که برای برخی $e \in Idem(R)$ و $r \in R$ و $a = e + r$ و برای برخی عدد صحیح نامنفی n $\alpha^n(r) \in U(R)$. در این صورت، بنابه لم ۱.۳.۳، $x^{-i}ax^i = x^{-i}(e+r)x^i = x^{-i}ex^i + x^{-i}rx^i$ ، به‌طوری که $x^{-i}ex^i \in Idem(R)$ و $x^{-i}rx^i \in U(R)$ پس $x^{-i}ax^i \in \text{cln}(A)$ و لذا نتیجه حاصل می‌شود.

حال فرض می‌کنیم $x^{-i}ax^i \in \text{cln}(A)$ در این صورت، بنابه لم ۱.۳.۳، برای برخی $x^{-j}ex^j \in Idem(A)$ و داریم $x^{-k}rx^k \in U(A)$ و لذا $x^{-i}ax^i = x^{-j}ex^j + x^{-k}rx^k$ و برای هر عدد صحیح نامنفی n $\alpha^n(r) \in U(R)$ از طرفی داریم $x^{-i}ax^i = x^{-(j+k)}(\alpha^k(e) + \alpha^j(r))x^{j+k}$ حال با استدلالی مشابه برهان قضیه ۲.۳.۴، می‌توان اثبات را کامل کرد. $\square$

قضیه ۴.۳.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی α -صلب باشد. در این صورت،

$$\text{vnr}(R[x, x^{-1}; \alpha]) = \left\{ \sum_{i=0}^m ea_i x^{i+n} \in A[x, x^{-1}; \alpha] \mid e \in Idem(R) \text{ و } d_j \in A \text{ وجود دارد} \right\},$$

$$\left\{ \sum_{i+j=m} a_i d_j = 1 = \sum_{i+j=m} d_j a_i \text{ و } a_i d_j = 0, i + j \neq m \right\}.$$

برهان. چون R حلقه‌ی کاهشی و α -سازگار است، پس بنابه لم‌های ۲.۳.۳ و ۸.۲.۲، A نیز کاهشی و α -سازگار می‌باشد. در این صورت، بنابه نتیجه ۶.۴.۳، $A[x, x^{-1}; \alpha]$ آبلی است. لذا بنابه گزاره ۲.۱.۴، $\text{vnr}(A[x, x^{-1}; \alpha]) = U(A[x, x^{-1}; \alpha])Idem(A[x, x^{-1}; \alpha])$ و تذکر ۲.۳.۳ داریم $Idem(A[x, x^{-1}; \alpha]) = Idem(A) = Idem(R)$. در نتیجه بنابه قضیه ۱۲.۴.۳، عناصر منظم فن

نیومان $A[x, x^{-1}; \alpha]$ به شکل $\sum_{i=0}^m ea_i x^{i+n} \in A[x, x^{-1}; \alpha]$ می‌باشند به‌طوری که $e \in Idem(R)$ و برای $0 \leq j \leq m$ $d_j \in A$ وجود دارد که $\sum_{i+j=m} a_i d_j = \sum_{i+j=m} d_j a_i = 1$ و برای هر $i+j \neq m$ $a_i d_j = 0$ از آن جایی که $R[x, x^{-1}; \alpha] \cong A[x, x^{-1}; \alpha]$ پس نتیجه حاصل خواهد شد. $\square$

قضیه ۵.۳.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی α -صلب باشد. در این صورت، $f \in \text{vnl}(R[x, x^{-1}; \alpha])$ اگر و تنها اگر $f = \sum_{i=0}^m ea_i x^{i+n}$ یا $f = 1 + \sum_{i=0}^m ea_i x^{i+n}$ به‌طوری که $e \in Idem(R)$ و $a_i \in A$ و $d_j \in A$ وجود دارد که $\sum_{i+j=m} a_i d_j = \sum_{i+j=m} d_j a_i = 1$ و برای هر $i+j \neq m$ $a_i d_j = 0$.

برهان. چون $R[x, x^{-1}; \alpha] \cong A[x, x^{-1}; \alpha]$ حلقه‌ی آبلی می‌باشد، پس بنابه قضیه ۶.۱.۴(۲)، $e \in Idem(A[x, x^{-1}; \alpha])$ و $u \in U(A[x, x^{-1}; \alpha])$ اگر و تنها اگر برای برخی $f \in \text{vnl}(A[x, x^{-1}; \alpha])$ داشته باشیم $f = eu$ یا $f = 1 + eu$. بنابراین بنابه قضایای ۵.۴.۳ و ۱۲.۴.۳ نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

لم ۶.۳.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی آبلی و $Nil(R)$ ایده‌آل دوطرفه از R باشد. در این صورت، برای هر $a \in R$ گزاره‌های زیر معادلند:

$$a \in \pi - r(R) \quad (۱)$$

$$(۲) \text{ عناصر } b \in \text{vnr}(R) \text{ و } w \in Nil(R) \text{ وجود دارند به‌طوری که } a = b + w$$

$$(۳) \text{ عناصر } a \in U(R), e \in Idem(R) \text{ و } w \in Nil(R) \text{ موجودند به‌طوری که } a = ue + w$$

$$(۴) a + Nil(R) \in \text{vnr}(R/Nil(R))$$

برهان. $(۲) \Leftrightarrow (۳)$ بنابه قضیه ۲.۱.۴، نتیجه حاصل می‌شود، زیرا R حلقه‌ی آبلی است.

$(۱) \Rightarrow (۳)$ چون R حلقه‌ی آبلی و $Nil(R)$ ایده‌آل دوطرفه از R می‌باشد، پس بنابه نتیجه ۳۰.۱.۲، نتیجه به‌دست می‌آید.

$$(۲) \Rightarrow (۴) \text{ چون } R \text{ حلقه‌ی آبلی است، پس بنابه قضیه ۱.۱.۴(۸)، نتیجه حاصل می‌گردد.}$$

$(۴) \Rightarrow (۱)$ چون R حلقه‌ی آبلی و $Nil(R)$ ایده‌آل دوطرفه از R می‌باشد، پس بنابه قضیه ۲۹.۱.۲، نتیجه به‌دست می‌آید. $\square$

قضیه ۷.۳.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی α -صلب باشد. در این صورت، $f \in \pi - r(R[x, x^{-1}; \alpha])$ اگر و تنها اگر $f = \sum_{i=0}^m (ea_i + w_i) x^{i+n}$ به‌طوری که $e \in Idem(R)$ و $a_i \in A$ و $w_i \in Nil(R)$ و $d_j \in A$ وجود داشته باشد که $\sum_{i+j=m} a_i d_j = \sum_{i+j=m} d_j a_i = 1$ و برای هر $i+j \neq m$ $a_i d_j = 0$.

برهان. بنابه نتیجه ۶.۴.۳ $A[x, x^{-1}; \alpha]$ حلقه‌ی آبلی است. همچنین، بنابه گزاره ۳.۴.۳ $Nil(A[x, x^{-1}; \alpha]) = Nil(A[x, x^{-1}; \alpha])$ ، لذا $Nil(A[x, x^{-1}; \alpha])$ ایده‌آل دوطرفه از $A[x, x^{-1}; \alpha]$ می‌باشد. در نتیجه بنابه لم ۶.۳.۴ داریم $\pi - r(A[x, x^{-1}; \alpha]) = \text{vnr}(A[x, x^{-1}; \alpha]) + Nil(A[x, x^{-1}; \alpha])$ بنابراین بنابه قضیه ۴.۳.۴ نتیجه حاصل می‌شود، زیرا $R[x, x^{-1}; \alpha] \cong A[x, x^{-1}; \alpha]$. $\square$

قضیه ۸.۳.۴. فرض کنیم R حلقه‌ی α -صلب باشد. در این صورت،

وجود دارد $\text{cln}(R[x, x^{-1}; \alpha]) = \{e + \sum_{i=0}^m a_i x^{i+n} \in A[x, x^{-1}; \alpha] \mid e \in \text{Idem}(R), a_i \in A \text{ و } d_j \in A\}$,

که $\sum_{i+j=m} a_i d_j = 1 = \sum_{i+j=m} d_j a_i$ و $a_i d_j = 0, i + j \neq m$ برای هر i, j .

برهان. چون $\text{Idem}(A[x, x^{-1}; \alpha]) = \text{Idem}(A) = \text{Idem}(R)$ بنابراین بنابه قضیه ۱۲.۴.۳، نتیجه حاصل

□

می‌گردد، زیرا $R[x, x^{-1}; \alpha] \cong A[x, x^{-1}; \alpha]$.

فصل ۵

بررسی رادیکال جیکبسون، خواص رادیکال و تمیز حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب

فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ یک تابع α -مشتق روی R باشد. حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب را با نماد $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ نشان می‌دهیم. هر عنصر از این حلقه به فرم $f(x) = \sum_{i=-\infty}^n a_i x^i$ می‌باشد به‌طوری که x متغیر و n یک عدد صحیح است و $a_i \in R$. دو عمل جمع و ضرب روی حلقه‌ی $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ به‌طور طبیعی تعریف می‌شوند به‌طوری که ضرب از روابط زیر تبعیت می‌کند:

$$xa = \alpha(a)x + \delta(a)$$

۹

$$x^{-1}a = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{-1}(-\delta\alpha^{-1})^{i-1}(a)x^{-i}.$$

برای مثال، فرض کنیم $a_0 \in R$. در این صورت، داریم:

$$x^{-1}a_0 = \alpha^{-1}(a_0)x^{-1} + \alpha^{-1}(-\delta\alpha^{-1})(a_0)x^{-2} + \alpha^{-1}(-\delta\alpha^{-1})^2(a_0)x^{-3} + \dots$$

$$\begin{aligned} x^{-2}a_0 &= x^{-1}(x^{-1}a_0) \\ &= x^{-1}(\alpha^{-1}(a_0))x^{-1} + x^{-1}(\alpha^{-1}(-\delta\alpha^{-1})(a_0))x^{-2} + \dots \\ &= \alpha^{-1}(\alpha^{-1}(a_0))x^{-2} + \alpha^{-1}(-\delta\alpha^{-1})(\alpha^{-1}(a_0))x^{-3} + \alpha^{-1}(-\delta\alpha^{-1})^2(\alpha^{-1}(a_0))x^{-4} \\ &\quad + \dots + \alpha^{-1}\alpha^{-1}(-\delta\alpha^{-1})(a_0)x^{-3} + \alpha^{-1}(-\delta\alpha^{-1})\alpha^{-1}(-\delta\alpha^{-1})(a_0)x^{-4} + \dots \end{aligned}$$

فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ یک تابع α -مشتق روی R باشد و i و j به ترتیب اعداد صحیح و صحیح نامنفی باشند. در این صورت، برای هر $a \in R$ ، اثر تک جمله‌های بر حسب α و δ روی a (به طوری که در آن‌ها i بار α و j بار δ روی a ظاهر شده) را با $\omega_{i,j}(\alpha, \delta)(a)$ نشان می‌دهیم.

در این فصل، ابتدا رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ را هنگامی که α خودریختی از حلقه‌ی R و δ یک تابع α -مشتق روی R می‌باشد، به دست می‌آوریم. برای این منظور، شرط (JC) را معرفی می‌کنیم که توسط آن می‌توان رابطه بین $J(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ و $P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ را مشخص کرد. در انتهای بخش اول، مثال‌هایی از حلقه‌هایی که در شرط (JC) صدق می‌کنند، ارائه داده می‌شود.

در ادامه در بخش دوم، برخی از خواص نظری رادیکال حلقه‌ها را بررسی می‌کنیم. ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر R حلقه‌ی ۲-اولیه و هر ایده‌آل اول مینیمال از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد، آن‌گاه رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ با $P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ مطابقت دارد. به عنوان کاربردی از نتایج به دست آمده در این بخش، می‌توانیم یک کلاس جدید از حلقه‌ها را اضافه کنیم که در حدس کوتاه صدق می‌کنند. در واقع نشان می‌دهیم که اگر R حلقه‌ی ۲-اولیه با خودریختی α و تابع α -مشتق، δ باشد به طوری که هر ایده‌آل اول مینیمال از R یک (α, δ) -ایده‌آل است و $Nil(R)$ شمارا موضعاً پوچ توان باشد، آن‌گاه حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ در حدس کوتاه صدق می‌کند.

در بخش سوم، به مطالعه ویژگی‌های نیم‌کامل و تمیز در حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب می‌پردازیم. در حقیقت، برخی شرایط لازم و کافی برای اینکه حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ تمیز یا نیم‌کامل باشد، ارائه خواهیم داد.

این فصل برگرفته از مراجع [۲۱] و [۲۲] می‌باشد.

۱.۵ بررسی رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب

در این بخش، ابتدا رابطه بین برخی از عناصر وارون پذیر حلقه‌ی R با حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ را به دست می‌آوریم. سپس به مطالعه رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ با معرفی شرط (JC) روی حلقه‌ی R ، می‌پردازیم. در ادامه مثال‌هایی از حلقه‌هایی که در شرط (JC) صدق می‌کنند، ارائه می‌دهیم.

تذکر ۱.۱.۵. برای هر عدد صحیح m و n ، گوییم ax^nbx^m از مرتبه k است، هرگاه k بزرگترین درجه جملات ax^nbx^m باشد.

برای به‌دست آوردن رادیکال جیکبسون یک حلقه، ضروری است که در مورد عناصر وارون‌پذیر آن حلقه اطلاعاتی داشته باشیم. گزاره بعدی برای هدف اصلی مفید خواهد بود.

گزاره ۲.۱.۵. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R ، δ یک تابع α -مشتق روی R و $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{n-i}$ عنصر ناصفر از حلقه‌ی $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ باشد به‌طوری که f از مرتبه n و a_0 ضریب پیشرو آن است. در این صورت، اگر a_0 در R وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه f در $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ وارون‌پذیر خواهد بود. به‌علاوه، f^{-1} از مرتبه $-n$ و $\alpha^{-n}(a_0^{-1})$ ضریب پیشرو آن است.

برهان. ابتدا عنصر $g = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^{-n-j} \in R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ را طوری پیدا می‌کنیم که $gf = 1$.

با بسط ضرب gf ، به آسانی می‌توان دید

$$(۱) \quad b_0 x^{-n} a_0 x^n \text{ از مرتبه } 0 \text{ است،}$$

$$(۲) \quad b_0 x^{-n} a_1 x^{n-1} \text{ و } b_1 x^{-n-1} a_0 x^n \text{ از مرتبه } -۱ \text{ می‌باشند،}$$

$$(۳) \quad b_0 x^{-n} a_2 x^{n-2}, b_1 x^{-n-1} a_1 x^{n-1} \text{ و } b_2 x^{-n-2} a_0 x^n \text{ دارای مرتبه } -۲ \text{ هستند،}$$

⋮

در این صورت، با مقایسه ضرایب در معادله $gf = 1$ ، خواهیم داشت $b_0 \alpha^{-n}(a_0) = 1$ چون a_0 در R وارون‌پذیر است، پس $b_0 = \alpha^{-n}(a_0^{-1})$. همچنین، بنابه (۱) و (۲)، برای برخی $p_{i1}, q_{i1}, r_{i1}, s_{i1}$ و $1 \leq k_{i1}, t_{i1} \leq 2$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$b_1 = \left(\sum_i (-1)^{k_{i1}} b_0 \omega_{p_{i1}, q_{i1}}(\alpha, \delta)(a_0) + \sum_i (-1)^{t_{i1}} b_0 \omega_{r_{i1}, s_{i1}}(\alpha, \delta)(a_1) \right) \cdot \alpha^{-n-1}(a_0^{-1}).$$

بنابه (۱)، (۲) و (۳)، برای برخی $p_{i2}, q_{i2}, r_{i2}, s_{i2}, \beta_{i2}, \gamma_{i2}, \mu_{i2}, \lambda_{i2}, u_{i2}, v_{i2}$ و $1 \leq k_{i2}, t_{i2}, l_{i2}, d_{i2}, z_{i2} \leq 2$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} b_2 = & \left(\sum_i (-1)^{k_{i2}} b_0 \omega_{p_{i2}, q_{i2}}(\alpha, \delta)(a_0) + \sum_i (-1)^{t_{i2}} b_0 \omega_{r_{i2}, s_{i2}}(\alpha, \delta)(a_1) \right. \\ & + \sum_i (-1)^{l_{i2}} b_0 \omega_{\beta_{i2}, \gamma_{i2}}(\alpha, \delta)(a_2) + \sum_i (-1)^{d_{i2}} b_1 \omega_{\mu_{i2}, \lambda_{i2}}(\alpha, \delta)(a_0) \\ & \left. + \sum_i (-1)^{z_{i2}} b_1 \omega_{u_{i2}, v_{i2}}(\alpha, \delta)(a_1) \right) \cdot \alpha^{-n-2}(a_0^{-1}). \end{aligned}$$

با استدلالی مشابه بالا، به آسانی می‌توان دید برای برخی p_{im}, q_{im} و $1 \leq k_{im} \leq 2$ داریم:

$$b_m = \left(\sum_i \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r \neq m}} (-1)^{k_{im}} b_r \omega_{p_{im}, q_{im}}(\alpha, \delta)(a_s) \right) \cdot \alpha^{-n-m}(a_0^{-1}).$$

حال به دنبال عنصر $h \in R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ هستیم به‌طوری که $hg = 1$. چون b_0 وارون‌پذیر است، پس با استدلالی مشابه بالا می‌توانیم وارون چپی مانند h برای g به‌دست آوریم. لذا $f = h$. بنابراین g وارون f در $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ می‌باشد، و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

برای هر ایده‌آل M از حلقه‌ی R ، قرار می‌دهیم

$$M((x^{-1}; \alpha, \delta)) = \left\{ \sum_{i=-\infty}^n a_i x^i \in R((x^{-1}; \alpha, \delta)) \mid a_i \in M \right\}.$$

گزاره ۳.۱.۵. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ یک تابع α -مشتق روی R باشد. در این صورت،
 $J(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) \subseteq J(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$

برهان. کافی است نشان دهیم برای هر ایده‌آل راست ماکسیمال M از R ، $M((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ایده‌آل راست ماکسیمالی از $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ می‌باشد. بدیهی است $M((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ایده‌آل راست از T می‌باشد. فرض کنیم $f = \sum_{i=-\infty}^n a_i x^i \notin M((x^{-1}; \alpha, \delta))$ باشد به‌طوری که $f \notin M((x^{-1}; \alpha, \delta))$. در این صورت، داریم $f x^{-n} \notin M((x^{-1}; \alpha, \delta))$. لذا بدون کم شدن از کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد $f = \sum_{i=-\infty}^0 a_i x^i \notin M((x^{-1}; \alpha, \delta))$.

می‌توانیم فرض کنیم $a_0 \notin M$ ، زیرا $M((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ایده‌آل راست از T است. از این رو $a_0 R + M = R$. پس $r \in R$ و $m \in M$ موجودند به‌طوری که $a_0 r + m = 1$. بنابراین بنابه گزاره ۲.۱.۵، سری $f r + m \in f T + M((x^{-1}; \alpha, \delta))$ وارون‌پذیر می‌باشد و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

لم‌های بعدی، نتایج شناخته شده‌ای می‌باشند.

لم ۴.۱.۵. فرض کنیم α درون‌ریختی از حلقه‌ی R و δ یک تابع α -مشتق روی R باشد. در این صورت، برای هر عدد صحیح مثبت n ، داریم $\delta^n(ab) = \sum_{i=0}^n f_i^{n-i}(a) \delta^i(b)$

لم ۵.۱.۵. اگر α خودریختی از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه $\alpha(J(R)) = J(R)$

گوییم حلقه‌ی R دارای خاصیت (JC) است، هرگاه $J(R)$ یک (α, δ) -ایده‌آل باشد و برای هر $a \in J = J(R)$ و اعداد صحیح $i_1, i_2, \dots, i_n$ و اعداد صحیح نامنفی $j_1, j_2, \dots, j_n$ داشته باشیم $J \alpha^{i_1} \delta^{j_1} \alpha^{i_2} \delta^{j_2} \dots \alpha^{i_n} \delta^{j_n}(a) \subseteq a R$. در ادامه، می‌توانیم ضریب پیشرو عناصر $J(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ را در حالتی که حلقه‌ی R دارای خاصیت (JC) است، مشخص کنیم.

گزاره ۶.۱.۵. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ یک تابع α -مشتق روی R باشد. اگر R دارای خاصیت (JC) باشد، آن‌گاه برای هر عنصر f در $J(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ ، ضریب پیشرو f یک ایده‌آل راست پوچ توان در R تولید می‌کند.

برهان. فرض کنیم $f = \sum_{i=-\infty}^n a_i x^i \in J(T)$ که $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$. چون $J(T)$ ایده‌آلی از T است، پس $f x^{-n+1} \in J(T)$. لذا بدون کم شدن از کلیت مسئله، می‌توان فرض کرد $f = \sum_{i=-\infty}^1 a_i x^i$. در نتیجه بنابه گزاره ۳.۱.۵، برای هر $a_i \in J(R)$ ، $i \leq 1$ ، قرار می‌دهیم $g = \sum_{i=-\infty}^0 a_i x^i$. بنابه گزاره ۲.۱.۵، داریم $1 + g \in U(T)$ ، زیرا $1 + a_0 \in U(R)$. حال فرض کنیم $h = \sum_{i=-\infty}^0 b_i x^i$ وارونی برای $1 + g$ باشد. چون $1 + g \in 1 + J(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ، لذا:

$$h = 1 + (h - 1) = 1 + (h - h(1 + g)) = 1 + h(1 - (1 + g)) \in 1 + J(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)).$$

پس $b_0 \in U(R)$ و دیگر ضرایب h در $J(R)$ قرار دارند. همچنین، از آنجایی که $(1 + a_0)b_0 = 1$ ، از این‌رو $b_0 = 1 - a_0b_0$ و لذا $\delta(b_0) = \delta(1 - a_0b_0) = \delta(-a_0b_0)$ چون $a_0 \in J(R)$ و $J(R)$ یک (α, δ) -ایدئال است، پس داریم $\delta(b_0) \in J(R)$. حال $(1 - f)h$ را در نظر می‌گیریم. لذا این عنصر وارون‌پذیر است، زیرا حاصلضرب دو عنصر وارون‌پذیر می‌باشد ($f \in J(T)$). از طرفی $(1 - f)h = 1 - a_1xh$. فرض کنیم k وارون $(1 - f)h$ باشد. به‌آسانی می‌توان دید که درجه k منفی نیست، زیرا در غیر این صورت، درجه k می‌بایست -1 باشد و $-a_1\alpha(b_0)\alpha(c_{-1}) = 1$ ، که یک تناقض است ($a_1 \in J(R)$). فرض کنیم $k = \sum_{i=-\infty}^{m-1} c_i x^i$ به‌طوری که m عدد صحیح مثبت باشد. از طرفی رابطه زیر را داریم:

$$\left(1 + (a_1xh) + (a_1xh)^2 + \cdots + (a_1xh)^m\right)(1 - a_1xh) = 1 - (a_1xh)^{m+1}.$$

با ضرب k از سمت راست در معادله قبل، خواهیم داشت:

$$1 + (a_1xh) + (a_1xh)^2 + (a_1xh)^3 + \cdots + (a_1xh)^m = k - (a_1xh)^{m+1}k. \quad (۱.۵)$$

در نظر می‌گیریم:

$$a_1xh = (a_1\alpha(b_0))x + (a_1\alpha(b_{-1}) + a_1\delta(b_0)) + (a_1\alpha(b_{-2}) + a_1\delta(b_{-1}))x^{-1} + \cdots.$$

حال می‌خواهیم ضریب x^m را در دو طرف معادله ۱.۵، پیدا کنیم. به‌وضوح، ضریب x^m در سمت چپ معادله ۱.۵، برابر است با:

$$a_1\alpha(b_0)\alpha(a_1)\alpha^2(b_0) \cdots \alpha^{m-1}(a_1)\alpha^m(b_0).$$

همچنین، ضریب x^m در سمت راست معادله ۱.۵، برابر است با:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^z a_1 \left(\alpha^{l_{i1}} \delta^{s_{i1}} \alpha^{l_{2i1}} \delta^{s_{2i1}} \cdots \alpha^{l_{w_{i1}}} \delta^{s_{w_{i1}}} (b_{i1}) \right) \\ & \times \left(\alpha^{t_{1i2}} \delta^{k_{1i2}} \alpha^{t_{2i2}} \delta^{k_{2i2}} \cdots \alpha^{t_{w_{i2}}} \delta^{k_{w_{i2}}} (a_1) \right) \\ & \times \left(\alpha^{l_{i2}} \delta^{s_{i2}} \alpha^{l_{2i2}} \delta^{s_{2i2}} \cdots \alpha^{l_{w_{i2}}} \delta^{s_{w_{i2}}} (b_{i2}) \right) \\ & \times \cdots \times \\ & \times \left(\alpha^{t_{1i(m+1)}} \delta^{k_{1i(m+1)}} \alpha^{t_{2i(m+1)}} \delta^{k_{2i(m+1)}} \cdots \alpha^{t_{w_{i(m+1)}}} \delta^{k_{w_{i(m+1)}}} (a_1) \right) \\ & \times \left(\alpha^{l_{i(m+1)}} \delta^{s_{i(m+1)}} \alpha^{l_{2i(m+1)}} \delta^{s_{2i(m+1)}} \cdots \alpha^{l_{w_{i(m+1)}}} \delta^{s_{w_{i(m+1)}}} (b_{i(m+1)}) \right) r_i, \end{aligned}$$

به‌طوری که $l_i, t_i, r_i \in R$ اعداد صحیح و s_i, k_i اعداد صحیح نامنفی هستند. داریم:

$$\begin{aligned}
 & a_1 \left(\alpha^{l_{i1}} \delta^{s_{i1}} \dots \alpha^{l_{wi1}} \delta^{s_{wi1}} (b_{i1}) \right) \\
 & \times \left(\alpha^{t_{i2}} \delta^{k_{i2}} \dots \alpha^{t_{wi2}} \delta^{k_{wi2}} (a_1) \right) \\
 & \times \left(\alpha^{l_{i2}} \delta^{s_{i2}} \dots \alpha^{l_{wi2}} \delta^{s_{wi2}} (b_{i2}) \right) \\
 & \times \dots \times \\
 & \times \left(\alpha^{t_{1(m+1)}} \delta^{k_{1(m+1)}} \dots \alpha^{t_{wi(m+1)}} \delta^{k_{wi(m+1)}} (a_1) \right) \\
 & \times \left(\alpha^{l_{1(m+1)}} \delta^{s_{1(m+1)}} \dots \alpha^{l_{wi(m+1)}} \delta^{s_{wi(m+1)}} (b_{i_{m+1}}) \right) \\
 & = \left(a_1 \alpha(b_0) \right) \left(\alpha(b_0^{-1}) \alpha^{l_{i1}} \delta^{s_{i1}} \dots \alpha^{l_{wi1}} \delta^{s_{wi1}} (b_{i1}) \right) \\
 & \times \left(\alpha^{t_{i2}} \delta^{k_{i2}} \dots \alpha^{t_{wi2}} \delta^{k_{wi2}} \alpha^{-1} (\alpha(a_1) \alpha^2(b_0) \alpha^2(b_0^{-1})) \right) \\
 & \times \left(\alpha^{l_{i2}} \delta^{s_{i2}} \dots \alpha^{l_{wi2}} \delta^{s_{wi2}} (b_{i2}) \right) \\
 & \times \dots \times \\
 & \times \left(\alpha^{t_{1(m+1)}} \delta^{k_{1(m+1)}} \dots \alpha^{t_{wi(m+1)}} \delta^{k_{wi(m+1)}} \alpha^{-m} (\alpha^m(a_1) \alpha^{m+1}(b_0) \alpha^{m+1}(b_0^{-1})) \right) \\
 & \times \left(\alpha^{l_{1(m+1)}} \delta^{s_{1(m+1)}} \dots \alpha^{l_{wi(m+1)}} \delta^{s_{wi(m+1)}} (b_{i_{m+1}}) \right).
 \end{aligned}$$

بنابراین ۴.۱.۵، اعداد صحیح i_2 و صحیح نامنفی j_2 موجودند به‌طوری که معادله قبل برابر است با:

$$\begin{aligned}
 & \left(a_1 \alpha(b_0) \right) \left(\alpha(b_0^{-1}) \alpha^{l_{i1}} \delta^{s_{i1}} \dots \alpha^{l_{wi1}} \delta^{s_{wi1}} (b_{i1}) \right) \\
 & \times \left(\sum_{i_2, j_2} \omega_{i_2, j_2}(\alpha, \delta) (\alpha(a_1) \alpha^2(b_0)) \omega_{i_2, j_2}(\alpha, \delta) (\alpha^2(b_0^{-1})) \right) \\
 & \times \left(\alpha^{l_{i2}} \delta^{s_{i2}} \dots \alpha^{l_{wi2}} \delta^{s_{wi2}} (b_{i2}) \right) \\
 & \times \dots \times \\
 & \times \left(\alpha^{t_{1(m+1)}} \delta^{k_{1(m+1)}} \dots \alpha^{t_{wi(m+1)}} \delta^{k_{wi(m+1)}} \alpha^{-m} (\alpha^m(a_1) \alpha^{m+1}(b_0) \alpha^{m+1}(b_0^{-1})) \right) \\
 & \times \left(\alpha^{l_{1(m+1)}} \delta^{s_{1(m+1)}} \dots \alpha^{l_{wi(m+1)}} \delta^{s_{wi(m+1)}} (b_{i_{m+1}}) \right) \\
 & = \left(a_1 \alpha(b_0) \right) \left(\sum_{i_2, j_2} (\alpha(b_0^{-1}) \alpha^{l_{i1}} \delta^{s_{i1}} \dots \alpha^{l_{wi1}} \delta^{s_{wi1}} (b_{i1})) \omega_{i_2, j_2}(\alpha, \delta) (\alpha(a_1) \alpha^2(b_0)) \right. \\
 & \left. \omega_{i_2, j_2}(\alpha, \delta) (\alpha^2(b_0^{-1})) \right) \\
 & \times \left(\alpha^{l_{i2}} \delta^{s_{i2}} \dots \alpha^{l_{wi2}} \delta^{s_{wi2}} (b_{i2}) \right) \\
 & \times \dots \times \\
 & \times \left(\alpha^{t_{1(m+1)}} \delta^{k_{1(m+1)}} \dots \alpha^{t_{wi(m+1)}} \delta^{k_{wi(m+1)}} \alpha^{-m} (\alpha^m(a_1) \alpha^{m+1}(b_0) \alpha^{m+1}(b_0^{-1})) \right) \\
 & \times \left(\alpha^{l_{1(m+1)}} \delta^{s_{1(m+1)}} \dots \alpha^{l_{wi(m+1)}} \delta^{s_{wi(m+1)}} (b_{i_{m+1}}) \right).
 \end{aligned}$$

چون $r_{i_2} \in R$ پس بنابر فرض، $(\alpha(b_0^{-1}) \alpha^{l_{i1}} \delta^{s_{i1}} \dots \alpha^{l_{wi1}} \delta^{s_{wi1}} (b_{i1}), (\alpha(a_1) \alpha^2(b_0))) \in J(R)$ موجود

است به‌طوری که معادله قبل برابر است با:

$$\begin{aligned} & \left(a_1 \alpha(b_0) \right) \left(\alpha(a_1) \alpha^2(b_0) r_{i_2} \right) \left(\sum_{i_2, j_2} \omega_{i_2, j_2}(\alpha, \delta) (\alpha^2(b_0^{-1})) \right) \\ & \times \left(\alpha^{l_{i_2}} \delta^{s_{i_2}} \dots \alpha^{l_{w_{i_2}}} \delta^{s_{w_{i_2}}} (b_{i_2}) \right) \\ & \times \dots \times \\ & \times \left(\alpha^{t_{i(m+1)}} \delta^{k_{i(m+1)}} \dots \alpha^{t_{w_{i(m+1)}}} \delta^{k_{w_{i(m+1)}}} \alpha^{-m} (\alpha^m(a_1) \alpha^{m+1}(b_0) \alpha^{m+1}(b_0^{-1})) \right) \\ & \times \left(\alpha^{l_{i(m+1)}} \delta^{s_{i(m+1)}} \dots \alpha^{l_{w_{i(m+1)}}} \delta^{s_{w_{i(m+1)}}} (b_{i(m+1)}) \right). \end{aligned}$$

لذا با ادامه این روند و با به‌کار بردن لم ۴.۱.۵، می‌توان نتیجه گرفت ضریب x^m در سمت راست معادله ۱.۵، برای برخی $r_{i(m+1)} \in R$ ، برابر با $a_1 \alpha(b_0) \alpha(a_1) \alpha^2(b_0) \dots \alpha^m(a_1) \alpha^{m+1}(b_0) r_{i(m+1)}$ خواهد بود. پس برای برخی $r \in R$ ، خواهیم داشت:

$$a_1 \alpha(b_0) \alpha(a_1) \alpha^2(b_0) \dots \alpha^{m-1}(a_1) \alpha^m(b_0) = a_1 \alpha(b_0) \alpha(a_1) \alpha^2(b_0) \dots \alpha^m(a_1) \alpha^{m+1}(b_0) r,$$

و در نتیجه

$$a_1 \alpha(b_0) \alpha(a_1) \alpha^2(b_0) \dots \alpha^{m-1}(a_1) \alpha^m(b_0) \left(1 - \alpha^m(a_1) \alpha^{m+1}(b_0) r \right) = 0.$$

چون $a_1 \in J(R)$ و $J(R)$ یک (α, δ) -ایده‌آل است، پس $\alpha^m(a_1) \alpha^{m+1}(b_0) r \in J(R)$ و از این‌رو $1 - \alpha^m(a_1) \alpha^{m+1}(b_0) r \in U(R)$. بنابراین $a_1 \alpha(b_0) \alpha(a_1) \alpha^2(b_0) \dots \alpha^{m-1}(a_1) \alpha^m(b_0) = 0$. فرض کنیم $a = a_1 \alpha(b_0)$ در این‌صورت، $a \alpha(a) \alpha^2(a) \dots \alpha^m(a) = 0$. حال نشان می‌دهیم aR ایده‌آل راست پوچ‌توان از R می‌باشد. چون RaR مشمول در J است، پس

$$(aR)^{2m} = (aR)(aR) \dots (aR) \subseteq aJaJ \dots aJaR$$

(a در رابطه، m بار ظاهر شده است). از طرفی بنابه فرض، $J\alpha^{-1}(a) \subseteq aR$. لذا بنابه لم ۵.۱.۵، خواهیم داشت $Ja \subseteq \alpha(a)R$. با استدلالی مشابه، می‌توان نتیجه گرفت برای هر عدد صحیح m ، $Ja \subseteq \alpha^m(a)R$. در نتیجه $(aR)^{2m} \subseteq a\alpha(a)\alpha^2(a) \dots \alpha^m(a)R = 0$. از این‌رو $(aR)^{2m} = 0$. بنابراین $aR = a_1 \alpha(b_0)R \subseteq P(R)$. لذا ضریب پیشرو f در $P(R)$ قرار دارد، و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

حال رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ را هنگامی که R دارای خاصیت (JC) است، معین می‌کنیم.

قضیه ۷.۱.۵. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ یک تابع α -مشتق روی R باشد. اگر R دارای خاصیت (JC) باشد، آن‌گاه $J(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر a عنصر دلخواهی از $P(R)$ باشد، آن‌گاه ایده‌آل راست aR پوچ‌توان است. به‌وضوح، a پوچ‌توان می‌باشد. فرض کنیم $a^m = 0$. چون RaR مشمول در $J = J(R)$ است، پس $(aR)^{2m}$ مشمول در $aJaJa \dots aJaR$ خواهد بود (a در عبارت m بار ظاهر شده است). چون $Ja \subseteq aR$ ، بنابه فرض، $aJaJ$ مشمول در aR می‌باشد. لذا خواهیم داشت $aR = 0$ و نتیجه حاصل می‌گردد.

حال ثابت می‌کنیم که اگر ایده‌آل راست aR پوچ‌توان باشد، آن‌گاه ایده‌آل راست $aR((x^{-1}; \alpha, \delta))$ نیز پوچ‌توان خواهد بود. فرض کنیم برای برخی از اعداد صحیح مثبت k $(aR)^k = 0$ و $\sum_{i=-\infty}^n (agi)x^i \in aR((x^{-1}; \alpha, \delta))$ هر جمعونند از $\left(\sum_{i=-\infty}^n (agi)x^i\right)^{2k}$ به شکل زیر می‌باشد:

$$ag_{i_1} \alpha^{p_{21}} \delta^{q_{21}} \dots \alpha^{p_{2m}} \delta^{q_{2m}} (ag_{i_2}) \alpha^{p_{31}} \delta^{q_{31}} \dots \alpha^{p_{3m}} \delta^{q_{3m}} (ag_{i_3}) \dots \alpha^{p_{(2k)1}} \delta^{q_{(2k)1}} \dots \alpha^{p_{(2k)m}} \delta^{q_{(2k)m}} (ag_{i_{2k}}).$$

چون R دارای خاصیت (JC) است، برای برخی $r_{i_2}, r_{i_4}, \dots, r_{i_{2k}} \in R$ داریم:

$$\begin{aligned} \underbrace{ag_{i_1} \alpha^{p_{21}} \delta^{q_{21}} \dots \alpha^{p_{2m}} \delta^{q_{2m}} (ag_{i_2})}_{\in J(R)} &= ag_{i_2} r_{i_2}, \\ \underbrace{\alpha^{p_{31}} \delta^{q_{31}} \dots \alpha^{p_{3m}} \delta^{q_{3m}} (ag_{i_3}) \alpha^{p_{41}} \delta^{q_{41}} \dots \alpha^{p_{4m}} \delta^{q_{4m}} (ag_{i_4})}_{\in J(R)} &= ag_{i_4} r_{i_4}, \dots, \\ \underbrace{\alpha^{p_{(2k-1)1}} \delta^{q_{(2k-1)1}} \dots \alpha^{p_{(2k-1)m}} \delta^{q_{(2k-1)m}} (ag_{i_{2k-1}}) \alpha^{p_{(2k)1}} \delta^{q_{(2k)1}} \dots \alpha^{p_{(2k)m}} \delta^{q_{(2k)m}} (ag_{i_{2k}})}_{\in J(R)} \\ &= ag_{i_{2k}} r_{i_{2k}}, \end{aligned}$$

به‌طوری که $p_{21}, \dots, p_{(2k)m}$ اعداد صحیح و $q_{21}, \dots, q_{(2k)m}$ اعداد صحیح نامنفی هستند. بنابراین

$$(ag_{i_2} r_{i_2})(ag_{i_4} r_{i_4})(ag_{i_6} r_{i_6}) \dots (ag_{i_{2k}} r_{i_{2k}}) = ar'_1 ar'_2 \dots ar'_k = 0.$$

پس $\left(\sum_{i=-\infty}^n (agi)x^i\right)^{2k} = 0$ و از این‌رو ایده‌آل راست $aR((x^{-1}; \alpha, \delta))$ پوچ‌توان است و نتیجه حاصل می‌شود.

حال فرض کنیم f عنصر دلخواه از $J(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ باشد. بنابه گزاره ۴.۱.۵، ضریب پیشرو f مشمول در $P(R)$ است. همان‌طور که در بالا ثابت شد، ضریب پیشرو f مشمول در $J(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ است. بنابراین $f' = f - a_n x^n \in J(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ با ادامه این روند، نتیجه می‌گیریم تمام ضرایب f مشمول در $P(R)$ خواهد بود. بنابراین $J(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) \subseteq P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$.

بالعکس، کافی است نشان دهیم برای عنصر دلخواه $f \in N(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ $1 + f, f = \sum_{i=-\infty}^n a_i x^i$ وارون راست دارد. اگر بزرگترین درجه f منفی باشد، آن‌گاه بنابه گزاره ۲.۱.۵، $1 + f$ وارون‌پذیر است. حال فرض کنیم $n \geq 0$ و $f_1 = \sum_{i=-\infty}^{-1} a_i x^i$. لذا بنابه گزاره ۲.۱.۵، $1 + f_1$ وارون‌پذیر می‌باشد. به‌علاوه، داریم

$$\begin{aligned} (1 + f)(1 + f_1)^{-1} &= (1 + f)(1 + f_1)^{-1} + 1 - 1 \\ &= (1 + f)(1 + f_1)^{-1} + 1 - (1 + f_1)(1 + f_1)^{-1} \\ &= 1 + (f - f_1)(1 + f_1)^{-1}, \end{aligned}$$

اما بنابه خواصی که در بالا ثابت کردیم، خواهیم داشت $f - f_1 = \sum_{i=0}^n a_i x^i \in J(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ بنابراین $1 + (f - f_1)(1 + f_1)^{-1} \in U(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ و لذا $1 + f \in U(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

در ادامه، مثال‌هایی از حلقه‌هایی که دارای خاصیت (JC) می‌باشند، ارائه می‌دهیم.

مثال ۸.۱.۵. فرض کنیم حلقه‌ی R ، نیم‌ابتدائی و α خودریختی از R و δ یک تابع α -مشتق روی R باشد. در این صورت، α را می‌توان به $T_2(R) \rightarrow T_2(R)$ با ضابطه $\bar{\alpha}(a_{ij}) = (\alpha(a_{ij}))$ ، توسعه داد. همچنین، $\bar{\delta} : T_2(R) \rightarrow T_2(R)$ با ضابطه $\bar{\delta}(a_{ij}) = (\delta(a_{ij}))$ ، یک تابع $\bar{\alpha}$ -مشتق بر $T_2(R)$ است. لذا داریم $J(T_2(R) = S) = \{ae_{12} \mid a \in R\}$. به‌وضوح، $\alpha(J(S)) = J(S)$ و $\delta(J(S)) \subseteq J(S)$ چون R حلقه‌ی نیم‌ابتدائی است، پس برای هر $A \in J(S)$ ، $J(S)\bar{\alpha}^{s_1}\bar{\delta}^{k_1} \dots \bar{\alpha}^{s_m}\bar{\delta}^{k_m}(A) = 0 \in AS$ ، $A \in J(S)$ به‌طوری که $s_1, \dots, s_m$ اعداد صحیح و $k_1, \dots, k_m$ اعداد صحیح نامنفی هستند. بنابراین S دارای خاصیت (JC) می‌باشد.

فرض کنیم D حلقه‌ی تقسیم باشد به‌طوری که α خودریختی از D و δ یک تابع α -مشتق باشد. حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $n \times n$ روی D را با نماد $T(D, n)$ نشان می‌دهیم به‌طوری که درایه‌های روی قطرهای آن ثابت و $n \geq 2$ یک عدد صحیح مثبت است.

مثال ۹.۱.۵. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی D و δ یک تابع α -مشتق باشد. در این صورت، α را می‌توان به $T(D, 4) \rightarrow T(D, 4)$ با ضابطه $\bar{\alpha}(a_{ij}) = (\alpha(a_{ij}))$ ، توسعه داد. همچنین، $\bar{\delta} : T(D, 4) \rightarrow T(D, 4)$ با ضابطه $\bar{\delta}(a_{ij}) = (\delta(a_{ij}))$ ، یک تابع $\bar{\alpha}$ -مشتق بر $T(D, 4)$ است. می‌خواهیم نشان دهیم که $T(D, 4)$ دارای خاصیت (JC) می‌باشد. واضح است که

$$J(T(D, 4) = S) = \{a(e_{12} + e_{23} + e_{34}) + b(e_{13} + e_{24}) + ce_{14} \mid a, b, c \in D\}.$$

لذا به‌آسانی می‌توان نشان داد $\alpha(J(S)) = J(S)$ و $\delta(J(S)) \subseteq J(S)$. در ادامه، ثابت می‌کنیم برای هر $A \in J(S)$ ، اعداد صحیح $s_1, \dots, s_m$ و اعداد صحیح نامنفی $k_1, \dots, k_m$ داریم $J(S)\bar{\alpha}^{s_1}\bar{\delta}^{k_1} \dots \bar{\alpha}^{s_m}\bar{\delta}^{k_m}(A) \in AS$. فرض کنیم $A = a_1(e_{12} + e_{23} + e_{34}) + a_2(e_{13} + e_{24}) + a_3e_{14}$. به‌طوری که $B \in J(S)$ ، حال می‌خواهیم $B = b_1(e_{12} + e_{23} + e_{34}) + b_2(e_{13} + e_{24}) + b_3e_{14}$ و $X = x_1(e_{11} + e_{22} + e_{33} + e_{44}) + x_2(e_{12} + e_{23} + e_{34}) + x_3(e_{13} + e_{24}) + x_4e_{14} \in S$ را طوری پیدا کنیم که $B\bar{\alpha}^{s_1}\bar{\delta}^{k_1} \dots \bar{\alpha}^{s_m}\bar{\delta}^{k_m}(A) = AX$ فرض کنیم

$$\bar{\alpha}^{s_1}\bar{\delta}^{k_1} \dots \bar{\alpha}^{s_m}\bar{\delta}^{k_m}(A) = a'_1(e_{12} + e_{23} + e_{34}) + a'_2(e_{13} + e_{24}) + a'_3e_{14}$$

به‌طوری که $a'_1, a'_2, a'_3 \in D$. با مقایسه معادله $B\bar{\alpha}^{s_1}\bar{\delta}^{k_1} \dots \bar{\alpha}^{s_m}\bar{\delta}^{k_m}(A) = AX$ ، نتیجه می‌گیریم

$$a_1x_1 = 0,$$

$$a_1x_2 + a_2x_1 = b_1a'_1,$$

$$a_1x_3 + a_2x_2 + a_3x_1 = b_1a'_2 + b_2a'_1.$$

لذا سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. اگر $a_1 \neq 0$ ، آن‌گاه داریم $x_2 = a_1^{-1}b_1a'_1$ و $x_3 = a_1^{-1}(b_1a'_2 + b_2a'_1 - a_2a_1^{-1}b_1a'_1)$. همچنین، فرض کنیم $x_4 = a_1^{-1}(b_1a'_2 + b_2a'_1 - a_2a_1^{-1}b_1a'_1)$ قرار می‌دهیم و $X = v(e_{12} + e_{23} + e_{34}) + w(e_{13} + e_{24}) + we_{14}$ بنابراین $a_1^{-1}(b_1a'_2 + b_2a'_1 - a_2a_1^{-1}b_1a'_1) = w$

حالت ۲. اگر $a_1 = 0$ و $a_2 \neq 0$ ، آن‌گاه $a_2^{-1}b_1a_2' = v$ قرار می‌دهیم لذا $X = v(e_{12} + e_{23} + e_{34}) + (e_{13} + e_{24}) + e_{14}$.
حالت ۳. اگر $a_1 = a_2 = 0$ ، آن‌گاه $X = 0$.
در هر یک از سه حالت فوق، می‌توانیم X را به‌دست آوریم به‌طوری که $B\bar{\alpha}^{s_1}\bar{\delta}^{k_1} \dots \bar{\alpha}^{s_m}\bar{\delta}^{k_m}(A) = AX$ و نتیجه حاصل می‌گردد.

با استدلالی مشابه مثال ۹.۱.۵، می‌توانیم نشان دهیم که برای هر عدد مثبت $n \geq 2$ ، $T(D, n)$ دارای خاصیت (JC) است.

۲.۵ بررسی خواص رادیکال حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب

در نظریه حلقه‌ها، بررسی هم‌زمان برخی رادیکال‌ها در یک کلاس مشخص از حلقه‌ها، مسئله مهمی است. شاید بزرگترین مسئله حل نشده در نظریه حلقه‌های ناجابه‌جایی امروز حدس کوتاه باشد که این تصور وجود دارد یک حلقه بدون ایده‌آل پوچ ناصفر، ایده‌آل یک‌طرفه پوچ ناصفر ندارد. حدس کوتاه در چندین مورد خاص حل شده است، از جمله برای حلقه‌هایی با بعد کرول، برای PI حلقه‌ها، برای جبرهایی روی میدان‌های ناشمارا و حلقه‌های (α, δ) -آرمنداریز اریب از نوع سری‌های لوران معکوس اریب (به‌طور مختصر (α, δ) -آرمنداریز سلما) که α -سازگار هستند (به مراجع [۱] و [۱۷] و منابع آن‌ها رجوع شود). در حال حاضر می‌خواهیم یک کلاس جدید از حلقه‌ها را به این لیست اضافه کنیم. برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد رفتار و ویژگی‌های رادیکال تحت توسیع‌های چندجمله‌ای، خواننده را به مرجع [۱۴] ارجاع می‌دهیم.

فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ یک تابع α -مشتق روی R باشد. اگر I یک (α, δ) -ایده‌آل از R باشد، آن‌گاه نگاشت $\bar{\alpha} : R/I \rightarrow R/I$ خودریختی از R/I ، القا شده توسط α خواهد بود و $\bar{\delta} : R/I \rightarrow R/I$ یک تابع $\bar{\alpha}$ -مشتق می‌باشد.

توجه داریم که اگر I یک (α, δ) -ایده‌آل از R باشد، آن‌گاه مجموعه تمام عناصری از $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ با ضرایب در I ایده‌آلی از $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ خواهد بود که با نماد $I((x^{-1}; \alpha, \delta))$ نشان می‌دهیم.

در [۵۳، گزاره ۲.۴]، توگانبائف رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران اریب $R((x; \alpha))$ را هنگامی که α خودریختی از R می‌باشد، مشخص کرده است. او ثابت کرد که اگر $P(R)$ پوچ‌توان، حلقه‌ی $R/P(R)$ با اندیس کران‌دار و برای هر ایده‌آل اول مینیمال P از R ، $\alpha(P) = P$ ، آن‌گاه رادیکال جیکبسون $R((x; \alpha))$ پوچ‌توان و برابر با $P(R)((x; \alpha))$ می‌باشد. در این بخش، هدف اولیه توسیع نتایج [۵۳] برای حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ می‌باشد.

این بخش را با لم‌های اساسی زیر شروع می‌کنیم.

لم ۱.۲.۵. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ ، تابع α -مشتق روی R و $P(R)$ ، یک (α, δ) -ایده‌آل از R باشد. همچنین، فرض کنیم $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$. در این صورت، گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اگر $P(R)$ ایده‌آل پوچ‌توان از R باشد، آن‌گاه $P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ نیز ایده‌آل پوچ‌توان از T خواهد بود (به‌خصوص، $(P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))) \subseteq J(T)$).

(۲) اگر $(R/P(R))((x^{-1}; \bar{\alpha}, \bar{\delta}))$ حلقه‌ی نیم‌ابتدائی باشد و $J(T) \subseteq P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ، آن‌گاه $J(T) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$.

برهان. (۱) چون $P(R)$ یک α -ایده‌آل می‌باشد، لذا نتیجه حاصل می‌گردد.

(۲) از آن‌جایی که حلقه‌ی $(R/P(R))((x^{-1}; \bar{\alpha}, \bar{\delta}))$ نیم‌ابتدائی است، لذا

$$T/P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)) \cong (R/P(R))((x^{-1}; \bar{\alpha}, \bar{\delta}))$$

نیز نیم‌ابتدائی می‌باشد. پس $J(T) \subseteq P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$. از طرفی بنابه فرض داریم

$$\square \quad P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)) \subseteq J(T) \quad \text{بنابراین} \quad J(T) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)).$$

ایده‌ی اثبات لم بعدی، از برهان لم ۱۷.۲.۲، به‌دست می‌آید.

لم ۲.۲.۵. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ تابع α -مشتق روی R باشد و $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ همچنین، فرض کنیم $J(T) \neq 0$ و C ایده‌آل ناصفر از R ، تولید شده توسط تمام ضرایب پیشرو سری‌های مشمول در $J(T)$ باشد. در این صورت، برای هر عنصر ناصفر c از C ، دو عنصر ناصفر $c', c'' \in C$ موجودند به‌طوری که $cc' = c''c = 0$.

برهان. فرض کنیم $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{n-i} \in J(T)$ و $0 \neq c = a_0$ ضریب پیشرو f باشد. نشان می‌دهیم $c' \in C$ وجود دارد به‌طوری که $cc' = 0$. از آن‌جایی که برای هر n ، $fx^{1-n} \in J(T)$ ، می‌توان بزرگترین درجه f را ۱ در نظر گرفت. از طرفی $1 - f$ وارون‌پذیر است، لذا $g = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^{m-j} \in T$ موجود است به‌طوری که برای $b_0 \neq 0$ ، $(1 - f)g = 1$ و $g(1 - f) = 1$. پس داریم $g = 1 + fg$ و $g = 1 + gf$. چون $fg, gf \in J(T)$ ، بنابه گزاره ۳.۱.۵، تمام ضرایب متعارف از fg و gf مشمول در $J(R)$ می‌باشد. از این‌رو تمام ضرایب $1 - g$ ، از جمله $1 - b_m$ ، نیز مشمول در $J(R)$ خواهند بود. لذا b_m وارون‌پذیر است و در نتیجه $cb_m, b_m c \neq 0$. بنابراین از آن‌جایی که $b_m \neq 0$ خواهیم داشت $m \geq 0$.

اگر $m = 0$ ، آن‌گاه $b_m c \neq 0 \neq b_0 c$ بزرگترین ضریب gf می‌باشد. چون $g = 1 + gf$ ، نتیجه می‌گیریم که بزرگترین درجه m از g ، برابر با ۱ است، که یک تناقض می‌باشد.

اگر $m > 0$ ، آن‌گاه از آن‌جایی که $g = 1 + fg$ ، داریم $c\alpha(b_0) = 0$ و m بزرگترین درجه $fg \in J(T)$ خواهد بود. لذا $\alpha(b_0) \in C$. قرار می‌دهیم $c' = \alpha(b_0)$. با استدلالی مشابه، به آسانی می‌توان نشان داد که $c'' \in C$ وجود دارد به‌طوری که $c''c = 0$. $\square$

توگانبائف در مرجع [۵۲، گزاره ۱۴.۵(۶)]، نشان داد که اگر R حلقه‌ی اول با اندیس کران‌دار باشد، آن‌گاه هر ایده‌آل ناصفر از R شامل مقسوم‌علیه ناصفر خواهد بود. همچنین، توگانبائف در [۵۳، لم ۱.۲]، ثابت کرد که اگر R حلقه‌ی نیم‌اول و گلدی راست و B ایده‌آل ناصفر از حلقه‌ی R باشد، آن‌گاه عنصر ناصفر $b \in B$ موجود است به‌طوری که برای هر عنصر ناصفر $b' \in B$ ، داریم $bb' \neq 0$.

در گزاره بعدی، مشخص می‌کنیم که تحت چه شرایطی حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ نیم‌ابتدائی است.

گزاره ۳.۲.۵. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ تابع α -مشتق روی R باشد و $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ در این صورت،

(۱) اگر R حلقه‌ی نیم‌اول و گلدی راست و یا حلقه‌ی اول با اندیس کران‌دار باشد، آن‌گاه T نیم‌ابتدائی است.

(۲) اگر R حلقه‌ی نیم‌اول با اندیس کران‌دار و هر ایده‌آل اول مینیمال P از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد، آن‌گاه T نیم‌ابتدائی است.

برهان. (۱) فرض کنیم $J(T) \neq 0$ و C ایده‌آل ناصفر از R ، تولید شده توسط تمام ضرایب پیشرو سری‌های مشمول در $J(T)$ باشد. در این صورت، بنابه لم ۲.۲.۵، برای هر عنصر ناصفر $c \in C$ ، عنصر ناصفر $c' \in C$ موجود است به‌طوری که $cc' = 0$. بنابراین بنابه گزاره ۴.۸.۱.۲، R حلقه‌ی اول با اندیس کران‌دار نیست. همچنین، بنابه لم ۵.۲.۱.۲، R حلقه‌ی نیم‌اول و گلدی راست نمی‌باشد.

(۲) فرض کنیم $\{P_i\}_{i \in I}$ مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول مینیمال از R باشد. چون برای هر ایده‌آل اول مینیمال R از P_i داریم $\alpha(P_i) = P_i$ و $\delta(P_i) \subseteq P_i$ ، لذا با استدلالی مشابه برهان [۵۳]، گزاره (۲) ۱.۵.۱، می‌توان نتیجه را ثابت کرد. $\square$

اگر α خودریختی از حلقه‌ی R و $P(R)$ رادیکال اول R باشد، آن‌گاه به‌وضوح داریم $\alpha(P(R)) = P(R)$.

لم ۴.۲.۵. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ تابع α -مشتق روی R باشد و $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ همچنین، فرض کنیم $P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)) \subseteq J(T)$. اگر $R/P(R)$ حلقه‌ی با اندیس کران‌دار و هر ایده‌آل اول مینیمال P از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد، آن‌گاه $J(T) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$.

برهان. فرض کنیم $\bar{\alpha}$ خودریختی از حلقه‌ی $R/P(R)$ ، القا شده توسط α و $\bar{\delta}$ یک تابع $\bar{\alpha}$ -مشتق از $R/P(R)$ ، القا شده توسط تابع α -مشتق، δ باشد. بنابه لم ۱.۲.۵، کافی است نشان دهیم $(R/P(R))((x^{-1}; \bar{\alpha}, \bar{\delta}))$ نیم‌ابتدائی است. اگر هر ایده‌آل اول مینیمال P از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد، آن‌گاه هر ایده‌آل اول مینیمال $\bar{P}$ از $\bar{R} = R/P(R)$ نیز یک $(\bar{\alpha}, \bar{\delta})$ -ایده‌آل خواهد بود. از طرفی، چون $R/P(R)$ نیم‌اول است و بنابه فرض $R/P(R)$ حلقه‌ی با اندیس کران‌دار می‌باشد، پس بنابه گزاره ۳.۲.۵، نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

گزاره بعدی، برای هدف اصلی در این بخش مفید خواهد بود.

گزاره ۵.۲.۵. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ تابع α -مشتق روی R باشد و $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ همچنین، فرض کنیم رادیکال اول $P(R)$ از R پوچ‌توان باشد. در این صورت اگر $R/P(R)$ حلقه‌ی با اندیس کران‌دار و هر ایده‌آل اول مینیمال P از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد، آن‌گاه $J(T)$ ایده‌آل پوچ‌توان از T است و داریم $J(T) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$.

برهان. بنابه فرض $P(R)$ یک (α, δ) -ایده‌آل است. چون $P(R)$ پوچ‌توان می‌باشد، پس بنابه لم ۱.۲.۵، $P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)) \subseteq J(T)$ نیز ایده‌آل پوچ‌توان از T خواهد بود و به‌خصوص، داریم $J(T) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ، بنابرین بنابه لم ۴.۲.۵، و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

حال می‌توانیم رادیکال جیکبسون حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ را هنگامی که حلقه‌ی R ، ۲-اولیه و هر ایده‌آل اول مینیمال از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد، توصیف کنیم.

قضیه ۶.۲.۵. فرض کنیم R حلقه‌ی ۲-اولیه باشد به‌طوری که α خودریختی از R و δ تابع α -مشتق روی R است. همچنین، فرض کنیم $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ و هر ایده‌آل اول مینیمال از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد. در این صورت، داریم $J(T) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$.

برهان. چون R ، ۲-اولیه است، پس $R/P(R)$ کاهشی می‌باشد و در نتیجه $R/P(R)$ حلقه‌ی با اندیس کران‌دار است. از طرفی بنابه فرض، هر ایده‌آل اول مینیمال از R یک (α, δ) -ایده‌آل می‌باشد. بنابراین بنابه گزاره ۵.۲.۵، داریم $J(T) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

مجموعه‌ی $S \subseteq R$ را به‌طور شمارا موضعاً پوچ‌توان^۱ می‌نامیم، هرگاه برای هر زیر مجموعه‌ی شمارای $\{s_1, s_2, \dots\} \subseteq S$ ، عدد صحیح N وجود داشته باشد به‌طوری که حاصلضرب هر N عنصر از $\{s_1, s_2, \dots\}$ صفر باشد. به‌عنوان مثال اگر $Nil(R)$ پوچ‌توان باشد، آن‌گاه $Nil(R)$ به‌طور شمارا موضعاً پوچ‌توان خواهد بود.

گزاره ۷.۲.۵. فرض کنیم R حلقه‌ی ۲-اولیه باشد به‌طوری که α خودریختی از R و δ تابع α -مشتق روی R است. همچنین، فرض کنیم $Nil(R)$ به‌طور شمارا موضعاً پوچ‌توان و هر ایده‌آل اول مینیمال از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد. در این صورت، $Nil^*(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) = Nil^*(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$.

برهان. بنابه قضیه ۶.۲.۵، $J(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$. از طرفی داریم $Nil^*(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) \subseteq J(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ چون R ، ۲-اولیه است، لذا

$$Nil^*(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) \subseteq P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)) = Nil^*(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)).$$

بالعکس، کافی است نشان دهیم که $P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ایده‌آل پوچ می‌باشد، از آن‌جایی که R ، ۲-اولیه است. فرض کنیم $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{n-i} \in P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$. بنابه فرض، $P(R)$ یک (α, δ) -ایده‌آل می‌باشد، پس برای عدد صحیح r ، عدد صحیح نامنفی s و $t \geq 0$ ، $\omega_{r,s}(\alpha, \delta)(a_t) \in P(R)$ چون $P(R) = Nil(R)$ به‌طور شمارا موضعاً پوچ‌توان است و $\cup_{r,s} (\cup_t \omega_{r,s}(\alpha, \delta)(a_t))$ شماراست، پس عدد صحیح نامنفی k وجود دارد به‌طوری که $f^k = 0$ و در نتیجه $f \in Nil(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$. بنابراین $P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ایده‌آل پوچ است، و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

حال در مرحله‌ای هستیم که می‌توانیم نتیجه جالبی را که مرتبط با حدس کوتاه می‌باشد، ثابت کنیم. فرض کنیم $A(R)$ نمایانگر مجموع تمام ایده‌آل‌های چپ پوچ از R باشد (که با مجموع تمام ایده‌آل‌های راست پوچ از R منطبق می‌باشد). حدس کوتاه معادل این است که $A(R)$ همواره پوچ است، یعنی برای هر حلقه‌ی R ، $Nil^*(R) = A(R)$.

قضیه ۸.۲.۵. فرض کنیم R حلقه‌ی ۲-اولیه باشد به‌طوری که α خودریختی از R و δ تابع α -مشتق روی R است. همچنین، فرض کنیم $Nil(R)$ به‌طور شمارا موضعاً پوچ‌توان و هر ایده‌آل اول مینیمال از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد. در این صورت، حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ در حدس کوتاه صدق می‌کند.

^۱Countable locally nilpotent

برهان. می‌دانیم $A(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) \subseteq J(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ چون R ، ۲-اولیه است، از این‌رو بنابه قضیه ۶.۲.۵، داریم:

$$J(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)) = Nil^*(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)).$$

لذا $A(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) \subseteq Nil^*(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ، و در نتیجه بنابه گزاره ۷.۲.۵، خواهیم داشت $A(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) \subseteq Nil^*(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ بنابراین

$$A(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) = Nil^*(R((x^{-1}; \alpha, \delta))),$$

□

و نتیجه حاصل می‌گردد.

واضح است که هر حلقه‌ی کاهشی در شرایط گزاره ۷.۲.۵ و قضیه ۸.۲.۵ صدق می‌کند، با توجه به این‌که برای هر حلقه‌ی کاهشی داریم $Nil(R) = P(R) = 0$. در ادامه مثالی از حلقه‌ی غیرکاهشی که در شرایط گزاره و قضیه ذکر شده صدق می‌کند، ارائه می‌دهیم.

فرض کنیم R حلقه‌ی دلخواه و M ، R -دومدول یکانی باشد. در این صورت،

$$R \oplus M = \{(r, m) \mid r \in R, m \in M\}$$

با جمع

$$(r, m) + (r', m') = (r + r', m + m')$$

و ضرب

$$(r, m)(r', m') = (rr', rm' + mr')$$

تشکیل حلقه می‌دهد که آن را توسیع بدیهی^۲ R توسط M می‌نامیم. عنصر همانی در این حلقه $(1, 0)$ می‌باشد. توجه داریم که $R \oplus M$ دارای نمایش ماتریسی به شکل زیر می‌باشد:

$$R \oplus M = \left\{ \begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} : r \in R, m \in M \right\}$$

به‌طوری که جمع و ضرب، همان جمع و ضرب ماتریس‌ها می‌باشد. به‌وضوح، $R \oplus M$ جابه‌جایی است اگر و تنها اگر R جابه‌جایی باشد.

مثال ۹.۲.۵. فرض کنیم $R = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty}$ به‌طوری که p عددی اول است. در این صورت،

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & m \\ 0 & a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_{p^\infty} \right\},$$

حلقه‌ی جابه‌جایی و در نتیجه ۲-اولیه می‌باشد. در این صورت، مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اول از R به فرم زیر است:

²Trivial extension

$$D = \{q\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_{p^\infty} : q \text{ عدد اول می‌باشد}\} \cup \{0\} \cup \{\mathbb{Z}_{p^\infty}\}.$$

در نتیجه،

$$P(R) = Nil(R) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}_{p^\infty} \right\}.$$

لذا ایده‌آل $Nil(R)$ از R پوچ‌توان است و از این‌رو $Nil(R)$ به‌طور شمارا موضعاً پوچ‌توان می‌باشد. حال فرض کنیم k عدد صحیحی باشد به‌طوری که $(k, p) = 1$. نگاشت $\alpha : R \rightarrow R$ را با ضابطه‌ی زیر در نظر می‌گیریم:

$$\alpha \left(\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & km \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

به‌وضوح، α خودریختی از حلقه‌ی R می‌باشد. فرض کنیم $\delta : R \rightarrow R$ به شکل زیر تعریف شود:

$$\delta \left(\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

به‌وضوح، δ یک تابع α -مشتق است. چون $\alpha(P) = P$ و $\delta(P) \subseteq P$ ، لذا هر ایده‌آل اول مینیمال P از R یک (α, δ) -ایده‌آل می‌باشد. بنابراین R حلقه‌ی غیرکاهشی می‌باشد که در شرایط گزاره ۷.۲.۵ و قضیه ۸.۲.۵ صدق می‌کند.

۳.۵ بررسی خاصیت تمیز حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب

در این بخش، برخی شرایط لازم و کافی برای اینکه حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ تمیز باشد را ارائه می‌دهیم. در این قسمت ابتدا، باید خودتوان‌های $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ را مشخص کنیم. هدف اولیه در این بخش بیان و اثبات این نتیجه خواهد بود.

لم ۱.۳.۵. فرض کنیم α خودریختی از R و δ تابع α -مشتق روی R باشد. اگر R ، α -صلب باشد، آن‌گاه $Idem(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) = Idem(R)$

برهان. فرض کنیم $f \in Idem(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$. کافی است نشان دهیم $f \in Idem(R)$. چون R ، α -صلب است، پس بنابه قضیه ۲.۲.۲، R حلقه‌ی (α, δ) -آرمنداریز سلما می‌باشد. بنابراین بنابه گزاره ۲.۱.۲.۲، $f \in Idem(R)$ ، و نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

لم ۲.۳.۵. فرض کنیم α خودریختی از R و δ تابع α -مشتق روی R باشد. اگر R حلقه‌ی α -صلب باشد به‌طوری که $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ تمیز است، آن‌گاه R منظم فن نیومان خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $a \in R$. در این‌صورت، $-ax = e + u$ به‌طوری که $e \in Idem(T)$ و $u \in U(T)$. لذا بنابه لم ۱.۳.۵، $e \in Idem(R)$. پس $ax + e \in U(T)$ از این‌رو $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{n-i}$ وجود دارد به‌طوری که $(ax + e)(\cdots + a_{n+1}x^{-1} + a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_1x^{n-1} + a_0x^n) = 1$. لذا:

$$a\alpha(a_0) = 0$$

$$a\delta(a_0) + a\alpha(a_1) + ea_0 = 0$$

$$a\delta(a_1) + a\alpha(a_2) + ea_1 = 0$$

⋮

$$a\delta(a_{n-1}) + a\alpha(a_n) + ea_{n-1} = 0$$

$$a\delta(a_n) + a\alpha(a_{n+1}) + ea_n = 1.$$

چون $R, (\alpha, \delta)$ -سازگار است، پس از اولین معادله نتیجه می‌گیریم $aa_0 = 0$ و در نتیجه $a\delta(a_0) = 0$. حال با ضرب a از چپ در دومین معادله، خواهیم داشت $a\alpha(a_1) = 0$ زیرا R کاهشی است. از آنجایی که $R, (\alpha, \delta)$ -سازگار است، لذا $aa_1 = 0$. با استقرای ساده‌ای می‌توان نشان داد $aa_0 = aa_1 = aa_2 = \dots = aa_n = 0$. حال با ضرب a از راست در آخرین معادله، داریم $a\alpha(a_{n+1})a = a$ زیرا R, α -صلب است. بنابراین نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

در گزاره بعدی عناصر تمیز حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب را بررسی می‌نمائیم.

گزاره ۳.۳.۵. فرض کنیم α خودریختی از R و δ ، تابع α -مشتق روی R باشد. همچنین، فرض کنیم $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ و $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{-i}$ عنصری از T باشد. اگر a_0 عنصری تمیز از R باشد، آن‌گاه f عنصری تمیز از $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ خواهد بود.

برهان. بنابه فرض، $a_0 = e + u$ به‌طوری که $e \in Idem(R)$ و $u \in U(R)$ لذا داریم $f = (\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{-i} + u) + e$. از آنجایی که بنابه گزاره ۲.۱.۵، $(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^{-i} + u) \in U(R((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ ، از این‌رو f عنصری تمیز از $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ می‌باشد و نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

حلقه‌ی R را حلقه‌ی قویاً منظم^۳ می‌نامیم هرگاه R کاهشی و منظم باشد. همچنین، توجه داریم که حلقه‌ی R نیم‌منظم است هرگاه $R/J(R)$ منظم و خودتوان‌ها به پیمانه $J(R)$ بالا می‌آیند. بنابه [۴۷]، اگر برای هر $x \in R$ $e^2 = e \in R$ وجود داشته باشد به‌طوری که $e - x \in R(x - x^2)$ ، آن‌گاه حلقه‌ی R را حلقه‌ی مناسب می‌نامیم. توجه داریم که بنابه قضیه ۵۷.۱.۲، حلقه‌های تبادلی و مناسب یکی هستند.

حال می‌توانیم یکی از نتایج مهم این بخش را بیان کنیم که توسط آن می‌توان برخی از شرایط معادل برای تمیز بودن حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ را فراهم سازیم.

قضیه ۴.۳.۵. فرض کنیم R حلقه‌ی ۲-اولیه باشد به‌طوری که α خودریختی از R ، δ تابع α -مشتق روی R و برای هر $e \in Idem(R)$ ، داشته باشیم $\alpha(e) = e$ و $\delta(e) = 0$. همچنین، فرض کنیم $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ و هر ایده‌آل اول مینیمال P از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد. در این‌صورت، گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) حلقه‌ی T تمیز است.

(۲) حلقه‌ی $T/J(T)$ تمیز می‌باشد.

(۳) حلقه‌ی T تبادلی است.

³Strongly regular

(۴) حلقه‌ی $T/J(T)$ تبادلی می‌باشد.

(۵) حلقه‌ی R نیم‌منظم است به‌طوری که $J(R)$ پوچ می‌باشد.

(۶) $R/J(R)$ قویاً منظم است به‌طوری که $J(R)$ پوچ می‌باشد.

برهان. $(۴) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۱)$ و $(۱) \Rightarrow (۳) \Rightarrow (۴)$ واضح هستند.

$(۴) \Rightarrow (۵)$ بنابه لم ۶.۲.۵ داریم $J(T) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ لذا

$$(R/P(R))((x^{-1}; \bar{\alpha}, \bar{\delta})) \cong T/P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)) \cong T/J(T)$$

حلقه‌ی تبادلی و در نتیجه مناسب می‌باشد. از این‌رو بنابه نتیجه ۵۸.۱.۲، خودتوان‌ها به پیمانه $J(R)$ بالا می‌آیند. از آن‌جایی که R ، ۲-اولیه است، لذا $R/P(R)$ کاهشی و هر ایده‌آل اول مینیمال P از R کاملاً اول می‌باشد. پس $P(R)$ ، (α, δ) -سازگار است و در نتیجه $R/P(R)$ ، $(\bar{\alpha}, \bar{\delta})$ -سازگار می‌باشد. از این‌رو $R/P(R)$ ، $\bar{\alpha}$ -صلب خواهد بود. لذا بنابه لم ۱.۳.۵، تمام خودتوان‌های $(R/P(R))((x^{-1}; \bar{\alpha}, \bar{\delta}))$ ، مرکزی هستند. بنابراین بنابه گزاره ۵۹.۱.۲، $(R/P(R))((x^{-1}; \bar{\alpha}, \bar{\delta}))$ تمیز است. پس بنابه لم ۲.۳.۵، $R/P(R)$ منظم می‌باشد. لذا نتیجه می‌گیریم $J(R) \subseteq P(R)$ ، و از این‌رو $P(R) = J(R)$. بنابراین $J(R)$ پوچ و R نیم‌منظم می‌باشد.

$(۵) \Rightarrow (۶)$ بنابه فرض، داریم $J(R) = P(R)$. چون R ۲-اولیه است، لذا $R/J(R)$ کاهشی می‌باشد. از

آن‌جایی که R نیم‌منظم است، پس $R/J(R)$ منظم خواهد بود. بنابراین $R/J(R)$ قویاً منظم می‌باشد.

$(۶) \Rightarrow (۱)$ در ابتدا، متذکر می‌شویم که ایده اصلی این قسمت از برهان [۵۷، قضیه ۲.۵]، نتیجه می‌شود.

بنابه لم ۶.۲.۵ و با استفاده از فرض، داریم $J(T) = J(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$. فرض کنیم $f \in T$ به‌طوری که $f = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$. نشان می‌دهیم $f \in \text{cln}(T)$. چون $\bar{R} := R/J(R)$ قویاً منظم است، پس بنابه گزاره ۲.۱.۴، $\bar{a}_0 = \bar{e}_0 \bar{u}_0$ به‌طوری که $\bar{e}_0 \in \text{Idem}(\bar{R})$ عنصر مرکزی از $\bar{R}$ است و $\bar{u}_0 \in U(\bar{R})$. توجه داریم که $e_0^2 = e_0$ زیرا خودتوان‌ها به پیمانه $J(R)$ بالا می‌آیند. لذا $a_0 = e_0 u_0 e_0 + j_0$ به‌طوری که $e_0 u_0 e_0 \in U(e_0 R e_0)$ و $j_0 \in J(R)$. چون بنابه فرض، برای هر $e \in \text{Idem}(R)$ داریم $\alpha(e) = e$ و $\delta(e) = 0$ ، پس

$$\begin{aligned} e_0 f e_0 &= \cdots + e_0 a_{n+1} x^{-1} e_0 + e_0 a_n e_0 + e_0 a_{n-1} x e_0 + \cdots + e_0 a_1 x^{n-1} e_0 \\ &\quad + e_0 a_0 x^n e_0 \\ &= \cdots + e_0 a_{n+1} e_0 x^{-1} + e_0 a_n e_0 + e_0 a_{n-1} e_0 x + \cdots + e_0 a_1 e_0 x^{n-1} \\ &\quad + (e_0 u_0 e_0 + e_0 j_0 e_0) x^n. \end{aligned}$$

بنابه گزاره ۲.۱.۵، $e_0 f e_0 \in U(e_0 R e_0((x^{-1}; \alpha, \delta))) = e_0 R((x^{-1}; \alpha, \delta)) e_0$ (بنابراین $e_0 f e_0$ عنصری تمیز از $e_0 R e_0((x^{-1}; \alpha, \delta))$ می‌باشد). از آن‌جایی که $\bar{e}_0 \in \bar{R}$ مرکزی است، پس $\bar{e}_0 \bar{f} = \bar{f} \bar{e}_0$. لذا $e_0 f - f e_0, f e_0 - e_0 f \in J(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)) = J(T)$:

$$e_0 f (1 - e_0), (1 - e_0) f e_0 \in J(T).$$

بنابه لم ۳۶.۱.۲، کافی است ثابت کنیم $(1 - e_0) f (1 - e_0)$ عنصری تمیز از

$$(1 - e_0) R (1 - e_0)((x^{-1}; \alpha, \delta)) = (1 - e_0) R((x^{-1}; \alpha, \delta)) (1 - e_0)$$

می‌باشد. قرار می‌دهیم:

$$f_1 := (1 - e_0)f(1 - e_0) = \cdots + (1 - e_0)a_{n+1}x^{-1}(1 - e_0) + (1 - e_0)a_n(1 - e_0) \\ + (1 - e_0)a_{n-1}x(1 - e_0) + \cdots + (1 - e_0)a_1x^{n-1}(1 - e_0) + (1 - e_0)a_0x^n(1 - e_0).$$

بنابه فرض، داریم:

$$f_1 = \cdots + (1 - e_0)a_{n+1}(1 - e_0)x^{-1} + (1 - e_0)a_n(1 - e_0) + (1 - e_0)a_{n-1}(1 - e_0)x \\ + \cdots + (1 - e_0)a_1(1 - e_0)x^{n-1} + (1 - e_0)a_0(1 - e_0)x^n.$$

فرض کنیم $R_1 := (1 - e_0)R(1 - e_0)$ ، لذا R_1 ، ۲-اولیه و قویاً منظم به پیمانه $J(R_1)$ است به‌طوری که $J(R_1)$ پوچ می‌باشد. پس بنابه توضیحات فوق داریم $e_1u_1e_1 + j_1(1 - e_0)a_1(1 - e_0) = e_1f_1e_1$ به‌طوری که $e_1 \in Idem(R_1)$ مرکزی به پیمانه $J(R_1)$ است، $e_1u_1e_1 \in U(e_1R_1e_1)$ و $j_1 \in J(R_1)$ چون $\alpha(R_1) \subseteq R_1$ و $\delta(R_1) \subseteq R_1$ از این رو $R_1((x^{-1}; \alpha, \delta))$ حلقه خواهد بود. توجه داریم که بنابه فرض، داریم:

$$e_1f_1e_1 = \cdots + e_1(1 - e_0)a_{n+1}(1 - e_0)e_1x^{-1} + e_1(1 - e_0)a_n(1 - e_0)e_1 \\ + e_1(1 - e_0)a_{n-1}(1 - e_0)e_1x + \cdots + e_1(1 - e_0)a_1(1 - e_0)e_1x^{n-1} \\ + e_1(1 - e_0)a_0(1 - e_0)e_1x^n.$$

لذا

$$e_1f_1e_1 = \cdots + e_1a_{n+1}e_1x^{-1} + e_1a_ne_1 + e_1a_{n-1}e_1x + \cdots + e_1a_1e_1x^{n-1} + e_1j_0e_1x^n \\ = (\cdots + e_1a_{n+1}e_1x^{-1} + e_1a_ne_1 + \cdots + (e_1u_1e_1 + e_1j_1e_1)x^{n-1}) + e_1j_0e_1x^n.$$

بنابراین بنابه گزاره ۲.۱.۵، $e_1f_1e_1$ عنصری وارون‌پذیر از $e_1R_1((x^{-1}; \alpha, \delta))e_1$ است. چون $\bar{e}_1 \in \bar{R}_1$ مرکزی می‌باشد، پس می‌باشد و در نتیجه $e_1f_1e_1 \in e_1R_1e_1((x^{-1}; \alpha, \delta))$ تمیز است. برای $\bar{e}_1\bar{f}_1 = \bar{f}_1\bar{e}_1$ از این رو $e_1f_1(1 - e_0 - e_1), (1 - e_0 - e_1)f_1e_1 \in J(R_1((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ بنابه ۳.۶.۱.۲، برای اینکه ثابت کنیم $f_1 \in \text{cln}(R_1((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ کافی است نشان دهیم $f_2 := (1 - e_0 - e_1)f_1(1 - e_0 - e_1)$ عنصری تمیز از $(1 - e_0 - e_1)R(1 - e_0 - e_1)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ خواهد بود.

توجه می‌کنیم که برای $i = 1, 2, \dots, n - 1$ داریم

$$(1 - e_0 - \cdots - e_{i-1})a_i(1 - e_0 - \cdots - e_{i-1}) = e_iu_ie_i + j_i$$

به‌طوری که $e_i \in Idem(R_i := (1 - e_0 - \cdots - e_{i-1})R(1 - e_0 - \cdots - e_{i-1}))$ مرکزی به پیمانه $J(R_i)$ است، $e_iu_ie_i \in U(e_iR_ie_i)$ و $j_i \in J(R_i)$ برای $i = 1, 2, \dots, n - 1$ قرار می‌دهیم $f_i := (1 - e_0 - \cdots - e_{i-1})f(1 - e_0 - \cdots - e_{i-1})$ بنابه توضیحات فوق نتیجه می‌گیریم:

$$f \in \text{cln}(R((x^{-1}; \alpha, \delta))) \Leftrightarrow f_1 \in \text{cln}(R_1((x^{-1}; \alpha, \delta))) \Leftrightarrow f_2 \in \text{cln}(R_2((x^{-1}; \alpha, \delta))) \\ \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow f_n \in \text{cln}(R_n((x^{-1}; \alpha, \delta))).$$

حال فرض کنیم $f_n = g + h$ باشد به‌طوری که

$$g = (1 - e_0 - \cdots - e_{n-1})(j_{n-1}x + \cdots + j_1x^{n-1} + j_0x^n)(1 - e_0 - \cdots - e_{n-1})$$

9

$$h = (1 - e_0 - \cdots - e_{n-1})(\cdots + a_{n+1}x^{-1} + a_n)(1 - e_0 - \cdots - e_{n-1}).$$

بنابه قضیه ۱۴.۱.۲، داریم $j_0, j_1, \dots, j_{n-1} \in J(R)$ پس $J(R_n((x^{-1}; \alpha, \delta))) = J(R_n((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ چون R_n تمیز است، بنابه گزاره ۳.۳.۵، خواهیم داشت $h \in \text{cln}(R_n((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ لذا $h = v + e$ به‌طوری که $v \in U(R_n((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ و $e \in \text{Idem}(R_n((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ از طرفی $g \in J(R_n((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ از این‌رو $g + v \in U(R_n((x^{-1}; \alpha, \delta)))$ بنابراین $f_n = (g + v) + e$ عنصری تمیز از $R_n((x^{-1}; \alpha, \delta))$ خواهد بود و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

در ادامه، به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیه ۴.۳.۵، شرایطی را بیان می‌کنیم که تحت آن‌ها حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب تمیز خواهد بود.

نتیجه ۵.۳.۵. فرض کنیم R حلقه‌ی کاهشی باشد به‌طوری که α خودریختی از R ، δ تابع α -مشتق روی R و برای هر $e \in \text{Idem}(R)$ ، داشته باشیم $\alpha(e) = e$ و $\delta(e) = 0$. همچنین، فرض کنیم هر ایده‌آل اول مینیمال از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد. در این‌صورت، $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ تمیز است اگر و تنها اگر R قویاً منظم باشد.

حلقه‌ی R را قویاً π -منظم^۴ می‌نامیم هرگاه برای هر $x \in R$ ، عدد صحیح مثبت $m = m(a)$ وابسته به a ، موجود باشد به‌طوری که $a^m R = a^{m+1} R$. توجه می‌کنیم که بنابه لم ۲.۵.۱.۲، حلقه‌ی جابه‌جایی R ، قویاً π -منظم است اگر و تنها اگر حلقه‌ی $R/J(R)$ (قویاً) منظم باشد به‌طوری که $J(R)$ پوچ است. نتیجه بعدی از قضیه ۴.۳.۵، نتیجه می‌گردد.

نتیجه ۶.۳.۵. فرض کنیم R حلقه‌ی جابه‌جایی باشد به‌طوری که α خودریختی از R ، δ تابع α -مشتق روی R و برای هر $e \in \text{Idem}(R)$ ، داشته باشیم $\alpha(e) = e$ و $\delta(e) = 0$. همچنین، فرض کنیم هر ایده‌آل اول مینیمال از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد. در این‌صورت، $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ تمیز است اگر و تنها اگر R قویاً π -منظم باشد.

نتیجه بعدی، شرط کافی برای اینکه حلقه‌ی $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ کاهشی باشد را بیان می‌کند.

لم ۷.۳.۵. فرض کنیم R حلقه‌ی کاهشی باشد به‌طوری که α خودریختی از R ، δ تابع α -مشتق روی R و هر ایده‌آل اول مینیمال P از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد. در این‌صورت، $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ کاهشی است.

برهان. فرض کنیم $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{n-i} \in R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ به‌طوری که $f^2 = 0$. در این‌صورت، ضریب پیشرو f^2 برابر ۰ خواهد بود. از این‌رو $a_0 \alpha^n(a_0) = 0$ چون R کاهشی است (و در نتیجه ۲-اولیه می‌باشد)، پس هر ایده‌آل اول مینیمال P از R کاملاً اول خواهد بود. لذا $a_0 \in P$ یا $\alpha^n(a_0) \in P$ در هر دو مورد، نتیجه می‌گیریم $a_0 \in P$ زیرا P یک (α, δ) -ایده‌آل می‌باشد. از این‌رو $a_0 \in \cap P = \{0\}$ زیرا R کاهشی است. بنابراین $f = 0$ ، و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

⁴Strongly π -regular

نتیجه بعدی شرط لازم برای اینکه حلقه‌ی $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ منظم فن نیومان باشد را بیان می‌کند.

لم ۸.۳.۵. فرض کنیم R حلقه‌ی کاهشی باشد به‌طوری که α خودریختی از R ، δ تابع α -مشتق روی R و هر ایده‌آل اول مینیمال P از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد. در این صورت، اگر $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ حلقه‌ی منظم فن نیومان باشد، آن‌گاه R نیز منظم فن نیومان خواهد بود.

برهان. چون $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ منظم فن نیومان است، پس برای هر $a \in R$ داریم $afa = a$ به‌طوری که $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{n-i} \in R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ حلقه‌ی $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ کاهشی است، بنا به لم ۷.۳.۵. لذا $a = a^2 f$ از این رو $a = a^2 a_n$ و در نتیجه $a = aa_n a$ ، زیرا R کاهشی است. بنابراین a منظم فن نیومان می‌باشد و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

گزاره ۹.۳.۵. فرض کنیم α خودریختی از حلقه‌ی R و δ تابع α -مشتق روی R باشد و برای هر $e \in Idem(R)$ داشته باشیم $\alpha(e) = e$ و $\delta(e) = 0$. در این صورت، اگر $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ منظم فن نیومان باشد، آن‌گاه R شامل مجموعه‌ی نامتناهی از خودتوان‌های متعامد نمی‌باشد.

برهان. به فرض خلف، فرض کنیم دنباله‌ی نامتناهی $e_0, e_1, \dots$ موجود باشد به‌طوری که برای هر $i = 0, 1, 2, \dots$ e_i ها خودتوان‌های متعامد ناصفر از R باشند. قرار می‌دهیم $Z = \sum_{i=0}^{\infty} e_i x^{-i}$ و به‌عنوان ایده‌آل راست از T تولید شده توسط Z در نظر می‌گیریم. چون T منظم فن نیومان می‌باشد، پس $f = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{s-j} \in Idem(T)$ وجود دارد به‌طوری که $a_0 \neq 0$ و $ZT = fT$. با مقایسه ضرایب در دو سمت معادله‌ی $fZ = Z$ برای توان $-i$ ، برای $i = 0, 1, 2, \dots$ خواهیم داشت

$$\sum_{m+n=s+i} a_m e_n = e_i.$$

با ضرب e_i از سمت راست، برای $0 \leq i < \infty$ ، در معادله قبل، داریم $a_s e_i = e_i$ چون f مشمول در ZT است، پس $g = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^{t-j}$ وجود دارد به‌طوری که $b_0 \neq 0$ و $Zg = f$. از مقایسه ضرایب x^0 در معادله $Zg = f$ ، نتیجه می‌گیریم:

$$a_s = \sum_{i+j=t} e_i \alpha^{-i}(b_j). \quad (۲.۵)$$

فرض کنیم $k > t$. حال با ضرب e_k از راست در معادله ۲.۵، خواهیم داشت:

$$e_k = a_s e_k = \sum_{i+j=t} e_i \alpha^{-i}(b_j) e_k.$$

اگر e_k را دوباره از چپ در معادله قبل ضرب کنیم، آن‌گاه نتیجه می‌گیریم $e_k = 0$ ، که یک تناقض است. بنابراین R شامل مجموعه‌ی نامتناهی از خودتوان‌های متعامد نمی‌باشد و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

یادآوری می‌کنیم که بنابه [۳۹]، حلقه‌ی R را نیم‌موضعی می‌نامیم، هرگاه $R/J(R)$ نیم‌ساده باشد. همچنین، حلقه‌ی R نیم‌کامل است، هرگاه R نیم‌موضعی باشد و خودتوان‌های R به پیمانه $J(R)$ بالا آیند. در ادامه، با ارائه شرایطی ویژگی‌های نیم‌کامل و نیم‌موضعی را بین حلقه‌ی R و حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب $R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ نتیجه خواهیم گرفت.

قضیه ۱۰.۳.۵. فرض کنیم R حلقه‌ی ۲-اولیه باشد به‌طوری که α خودریختی از R ، δ تابع α -مشتق روی R و برای هر $e \in Idem(R)$ ، داشته باشیم $\alpha(e) = e$ و $\delta(e) = 0$. همچنین، فرض کنیم $T = R((x^{-1}; \alpha, \delta))$ و هر ایده‌آل اول مینیمال P از R یک (α, δ) -ایده‌آل باشد. در این صورت، گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) T نیم‌کامل است.

(۲) T نیم‌موضعی می‌باشد.

(۳) T نیم‌منظم است.

(۴) $T/J(T)$ منظم فن نیومان می‌باشد.

(۵) R نیم‌کامل است به‌طوری که $J(R)$ پوچ می‌باشد.

(۶) $R/J(R)$ با حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی حلقه‌ی تقسیم برابر است به‌طوری که $J(R)$ پوچ می‌باشد.

برهان. $(۴) \Rightarrow (۲) \Rightarrow (۱)$ و $(۱) \Rightarrow (۳) \Rightarrow (۴)$ به آسانی به‌دست می‌آیند.

$(۴) \Rightarrow (۵)$ بنابه لم ۶.۲.۵، $J(T) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$. لذا

$$(R/P(R))((x^{-1}; \bar{\alpha}, \bar{\delta})) \cong T/P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)) \cong T/J(T)$$

منظم فن نیومان است. چون R ، ۲-اولیه می‌باشد، پس $R/P(R)$ کاهشی و هر ایده‌آل اول مینیمال از $R/P(R)$ ، یک $(\bar{\alpha}, \bar{\delta})$ -ایده‌آل است. از این‌رو بنا به لم ۷.۳.۵، $(R/P(R))((x^{-1}; \bar{\alpha}, \bar{\delta}))$ کاهشی است. چون $(R/P(R))((x^{-1}; \bar{\alpha}, \bar{\delta}))$ منظم فن نیومان است، پس بنابه لم ۸.۳.۵، $R/P(R)$ نیز منظم فن نیومان است. از طرفی بنابه گزاره ۹.۳.۵، $R/P(R)$ شامل مجموعه‌ی نامتناهی از خودتوان‌های متعامد نمی‌باشد. لذا بنابه قضیه ۶.۱.۲، $R/P(R)$ آرئینی نیم‌ساده می‌باشد، زیرا $R/P(R)$ منظم فن نیومان است. بنابراین $J(R) = P(R)$ و نتیجه حاصل می‌گردد.

$(۵) \Rightarrow (۶)$ چون حلقه‌ی R ، ۲-اولیه است، پس $R/P(R)$ کاهشی می‌باشد و در نتیجه $J(R) = P(R)$. لذا

$R/J(R)$ با حاصلضرب مستقیم تعداد متناهی حلقه‌ی تقسیم برابر است، زیرا R نیم‌کامل می‌باشد. بنابراین نتیجه حاصل می‌شود.

$(۶) \Rightarrow (۱)$ بنابه فرض، داریم

$$R/J(R) = D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_k,$$

به‌طوری که برای $1 \leq i \leq k$ ، D_i ها حلقه‌ی تقسیم می‌باشند. چون $R/J(R)$ نیم‌ساده است، پس $R/J(R)$ منظم فن نیومان خواهد بود. بنابه فرض، R حلقه‌ی ۲-اولیه و $J(R)$ پوچ است، لذا $R/J(R)$ کاهشی می‌باشد. از این‌رو $R/J(R)$ قویاً منظم خواهد بود. پس بنابه قضیه ۴.۳.۵، T تمیز است. لذا بنابه گزاره ۳۷.۱.۲، خودتوان‌های T به پیمانه $J(T)$ بالا می‌آیند. بنابه لم ۶.۲.۵، داریم $J(T) = P(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$. چون $J(R)$ پوچ است، پس $J(T) = J(R)((x^{-1}; \alpha, \delta))$ از این‌رو

$$T/J(T) = T/J(R)((x^{-1}; \alpha, \delta)) \cong (R/J(R))((x^{-1}; \bar{\alpha}, \bar{\delta})).$$

چون برای $1 \leq i \leq k$ ، D_i ها حلقه‌های تقسیم غیرهمریخت مجزا هستند و هر ایده‌آل از $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_k$ به شکل $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_k$ می‌باشد به‌طوری که $I_i \leq D_i$. پس اگر α خودریختی از $D_1 \times D_2 \times \cdots \times D_k$ باشد، آن‌گاه برای هر $a_i \in D_i$ داریم:

$$\alpha(\underbrace{(0, \dots, a_i, 0, \dots, 0)}_k) = \underbrace{(0, \dots, 0, b_i, 0, \dots, 0)}_k$$

به‌طوری که $1 \leq i \leq k$. در نتیجه برای هر $1 \leq i \leq k$ ، α به‌عنوان خودریختی از D_i تعریف می‌شود.

همچنین، برای $1 \leq i \leq k$ ، δ می‌تواند برای هر D_i تعریف شود، چون اگر

$$\delta(\underbrace{(a_1, 0, \dots, 0)}_k) = (a'_1, a'_2, \dots, a'_k),$$

آن‌گاه داریم

$$\begin{aligned} (0, 0, \dots, 0) &= \delta((a_1, 0, \dots, 0)(0, 1, 0, \dots, 0)) = \delta((a_1, 0, \dots, 0))(0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \alpha((a_1, 0, \dots, 0))\delta((0, 1, 0, \dots, 0)) \\ &= (a'_1, a'_2, \dots, a'_k)(0, 1, 0, \dots, 0) + (x'_1, 0, \dots, 0)(b_{12}, b_{22}, \dots, b_{k2}), \\ (0, 0, \dots, 0) &= \delta((a_1, 0, \dots, 0)(0, 0, 1, 0, \dots, 0)) = \delta((a_1, 0, \dots, 0))(0, 0, 1, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \alpha((a_1, 0, \dots, 0))\delta((0, 0, 1, 0, \dots, 0)) \\ &= (a'_1, a'_2, \dots, a'_k)(0, 0, 1, 0, \dots, 0) + (x'_1, 0, \dots, 0)(b_{13}, b_{23}, \dots, b_{k3}), \\ &\vdots \\ (0, 0, \dots, 0) &= \delta((a_1, 0, \dots, 0)(0, 0, \dots, 0, 1)) = \delta((a_1, 0, \dots, 0))(0, 0, \dots, 0, 1) \\ &\quad + \alpha((a_1, 0, \dots, 0))\delta((0, 0, \dots, 0, 1)) \\ &= (a'_1, a'_2, \dots, a'_k)(0, 0, \dots, 0, 1) + (x'_1, 0, \dots, 0)(b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{kk}). \end{aligned}$$

بنابه استدلال فوق، می‌توان نتیجه گرفت $a'_2 = a'_3 = \cdots = a'_k = 0$ لذا

$$\delta(\underbrace{(a_1, 0, \dots, 0)}_k) = \underbrace{(a'_1, 0, \dots, 0)}_k.$$

با استدلالی مشابه، برای هر $a_i \in D_i$ خواهیم داشت

$$\delta(\underbrace{(0, \dots, a_i, 0, \dots, 0)}_k) = \underbrace{(0, \dots, a'_i, 0, \dots, 0)}_k,$$

به‌طوری که $1 \leq i \leq k$. بنابراین

$$(R/J(R))((x^{-1}; \bar{\alpha}, \bar{\delta})) \cong D_1((x^{-1}; \alpha, \delta)) \times \cdots \times D_k((x^{-1}; \alpha, \delta)).$$

چون برای هر $1 \leq i \leq k$ ، D_i ها حلقه‌ی تقسیم هستند، پس بنابه گزاره ۲.۱.۵، برای $1 \leq i \leq k$ ، $D_i((x^{-1}; \alpha, \delta))$ ها نیز حلقه‌ی تقسیم خواهند بود. از این‌رو $(R/J(R))((x^{-1}; \alpha, \delta))$ آرینی نیم‌ساده می‌باشد و در نتیجه $T/J(T)$ آرینی نیم‌ساده خواهد بود. بنابراین T نیم‌کامل است و نتیجه حاصل می‌گردد. $\square$

فصل ۶

پیشنهادهای برای کارهای آتی

سالهاست که پژوهشگران در مورد ساختارهای توسیع‌های آر تحقیق و بررسی می‌کنند. لذا عناصر وارون‌پذیر و خودتوان در این حلقه‌ها حائز اهمیت می‌باشد. در این رساله ابتدا عناصر خودتوان و وارون‌پذیر را در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x; \alpha, \delta]$ هنگامی که حلقه‌ی R دوئو راست و (α, δ) -سازگار است، مشخص کردیم. سپس روابط بین عناصر خودتوان و وارون‌پذیر و عناصر منظم و تمیز را در این حلقه به دست آوردیم و عناصر منظم و تمیز را در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x; \alpha, \delta]$ هنگامی که R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار است، بررسی کردیم. مسئله قابل توجه این است که اگر حلقه‌ی R ، ۲-اولیه و (α, δ) -سازگار باشد، آن‌گاه آیا عناصر وارون‌پذیر، خودتوان، منظم و تمیز را در حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x; \alpha, \delta]$ می‌توان مشخص کرد.

عنصر $r \in R$ را پوچ تمیز^۱ می‌نامیم هرگاه r را بتوان به فرم مجموع یک عنصر خودتوان و یک عنصر پوچ‌توان بنویسیم. مسئله باز بررسی عناصر پوچ تمیز حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب $R[x; \alpha, \delta]$ می‌باشد هنگامی که حلقه‌ی R دوئو راست و (α, δ) -سازگار است.

مرتبط کردن مفاهیم موجود بین شاخه‌های مختلف ریاضیات یکی از روش‌های کارآمد برای بررسی کردن آن مفاهیم می‌باشد. نسبت دادن گراف به حلقه و ارتباط بین ساختار حلقه‌ها و گراف‌ها موضوعاتی است که پژوهشگران زیادی به‌خصوص در شاخه جبر جذب آن‌ها شدند.

فرض کنیم R حلقه‌ی یک‌دار (نه لزوماً جابه‌جایی) باشد. گراف تمیز^۲ حلقه‌ی R ، گرافی است که مجموعه‌ی رئوس آن به فرم (e, u) است به‌طوری که e یک عنصر خودتوان و u یک عنصر وارون‌پذیر می‌باشد. دو رأس مجزای (e, u) و

^۱Nil clean

^۲Clean graph

(f, v) مجاورند اگر و تنها اگر $ef = fe = 0$ یا $uv = vu = 0$. گراف تمیز حلقه‌ی R را با نماد $Cl(R)$ نشان می‌دهیم. مسئله قابل تأمل بررسی خواص نظری گراف مانند قطر، مجموعه‌ی احاطه‌گر و کمر گراف‌های $Cl(R[x])$ ، $Cl(R[x; \alpha])$ و $Cl(R[x; \alpha, \delta])$ می‌باشد هنگامی که R حلقه‌ی دوئو راست و (α, δ) -سازگار است.

- [1] A. Alhevaz and D. Kiani, Radicals of skew inverse Laurent series rings, *Comm. Algebra*, **41**(8) (2013), 2884–2902.
- [2] A. Alhevaz and D. Kiani, On zero-divisors in skew inverse Laurent series over noncommutative rings, *Comm. Algebra*, **42**(2) (2014), 469–487.
- [3] S. A. Amitsur, Radicals of polynomial rings, *Canad. J. Math.*, **8** (1956), 355–361.
- [4] D. F. Anderson and A. Badawi, Von Neumann regular and related elements in commutative rings, *Algebra Colloq.*, **19** (2012), 1017–1040.
- [5] S. Annin, Associated primes over skew polynomial rings, *Comm. Algebra*, **30**(5) (2002), 2511–2528.
- [6] A. Badawi, On abelian π -regular rings, *Comm. Algebra*, **25**(4) (1997), 1009–1021.
- [7] H. E. Bell, Near-rings in which each element is a power of itself, *Bull. Austral. Math. Soc.*, **2** (1970), 363–368.
- [8] G. F. Birkenmeier, H. E. Heatherly and E. K. Lee, Completely prime ideals and associated radicals, in: *Proceeding of the Biennial Ohio State-Denison Conference* (Granville, USA, 1992), eds. S.K. Jain and S.T. Rizvi, World Scientific, New Jersey, (1993), 102–129.
- [9] V. P. Camillo and H. P. Yu, Exchange rings, units and idempotents, *Comm. Algebra*, **22**(12) (1994), 4737–4749.
- [10] W. Chen, On constant products of elements in skew polynomial rings, *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, **41**(2) (2015), 45–462.
- [11] W. X. Chen and S. Y. Cui, On weakly semicommutative rings, *Commun. Math. Res.*, **27**(2) (2011), 179–192.
- [12] P. M. Cohn, Reversible rings, *Bull. London Math. Soc.*, **31**(6) (1999), 641–648.

-
- [13] M. Contessa, On certain classes of MP rings, *Comm. Algebra*, **12** (1984), 1447–1469.
 - [14] B. J. Gardner and R. Wiegandt, *Radical Theory of rings*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, Vol. 261, Marcel Dekker Inc., New York, (2004).
 - [15] K. R. Goodearl and R. B. Warfield, *An introduction to noncommutative Noetherian rings*, Cambridge University Press (2004).
 - [16] K. R. Goodearl, Centralizers in differential, pseudo-differential, and fractional differential operator rings, *Rocky. Mount. J. Math.*, **13**(4) (1983), 573–618.
 - [17] R. Gordon and J. C. Robson, Krull dimension, *Mem. Amer. Math. Soc.*, **133** (1973).
 - [18] M. Habibi, A. Moussavi and A. Alhevaz, The McCoy condition on Ore extensions, *Comm. Algebra*, **41** (2013), 124–141.
 - [19] E. Hashemi, M. Hamidizadeh and A. Alhevaz, Some types of ring elements in Ore extensions over noncommutative rings, *Journal of Algebra and Its Applications*, **16**(8) (2017), 1750201 (17 pages).
 - [20] E. Hashemi, M. Hamidizadeh and A. Alhevaz, On clean and regular elements of noncommutative ring extensions, *Comm. Algebra*, **47**(4) (2019), 1650–1661.
 - [21] E. Hashemi, M. Hamidizadeh and A. Alhevaz, On the Jacobson radical of skew inverse Laurent series ring, *Journal of Algebra and Its Applications*, **18**(09) (2019), 1950177 (10 pages).
 - [22] E. Hashemi, M. Hamidizadeh and A. Alhevaz, A fresh look into skew inverse Laurent series rings, *Comm. Algebra*, **48**(4) (2020), 1439–1451.
 - [23] E. Hashemi, Compatible ideals and radicals of Ore extensions, *New-York J. Math*, **12** (2006), 349–356.
 - [24] E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial extensions of quasi-Baer rings, *Acta Math. Hungar.*, **107**(3) (2005), 207–224.
 - [25] Y. Hirano, Some studies on strongly π -regular rings, *Math. J. Okayama Univ.*, **20**(2) (1978), 141–149.
 - [26] Y. Hirano, On the uniqueness of rings of coefficients in skew polynomial rings, *Publ. Math. Debrecen.*, **54**(3-4) (1999), 489–495.

- [27] C. Y. Hong, N. K. Kim and T. K. Kwak, Ore extensions of Baer and p.p.-rings, *J. Pure Appl. Algebra*, **151**(3) (2000), 215–226.
- [28] C. Y. Hong, T. K. Kwak and S. T. Rizvi, rigid ideals and radicals of Ore extensions, *Algebra Colloq.*, **12**(3) (2005), 399–412.
- [29] J. A. Huckaba and J. M. Keller, Annihilation of ideals in commutative rings, *Pacific J. Math.*, **83** (1979), 375–379.
- [30] C. Huh, H. K. Kim, N. K. Kim and Y. Lee, Basic examples and extensions of symmetric rings, *J. Algebra Appl.*, **202** (2005), 154–167.
- [31] D. A. Jordan, Bijective extensions of injective ring endomorphisms, *J. London Math. Soc.*, **2**(3) (1982), 435–448.
- [32] P. Kanwar, A. Leroy and J. Matczuk, Idempotents in ring extensions, *J. Algebra*, **389** (2013), 128–136.
- [33] P. Kanwar, A. Leroy and J. Matczuk, Clean elements in polynomial rings, *Contemp. Math.*, **634** (2015), 197–204.
- [34] I. Kaplansky, *Commutative rings*, Revised edition. The University of Chicago Press, Chicago, Ill.-London, 1974.
- [35] O. A. S. Karamzadeh, On constant products of polynomials, *Int. J. Math. Edu. Technol.*, **18** (1987), 627–629.
- [36] S. Karimi, Sh. Sahebi and M. Habibi, The Jacobson radical of inverse Laurent power series of rings, *Journal of Algebra and Its Applications*, **17**(4) (2018), 1850061.
- [37] D. Khurana, G. Marks and A. K. Srivastava, On unit-central rings, *Advances in Ring Theory*, Birkhauser-Springer, Basel, (2010), 205–212.
- [38] J. Krempa, Some examples of reduced rings, *Algebra Colloq.*, **3**(4) (1996), 289–300.
- [39] T. Y. Lam, *A first course in noncommutative rings*, Springer, New York, (1991).
- [40] T. Y. Lam, *Exercises in classical ring theory*, Second edition. Problem Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, (2003).
- [41] J. Lambek, *Lectures on Rings and Modules*, Blaisdell Publishing Company, Waltham-Toronto-London, 1966.

-
- [42] Z. K. Liu and R. Y. Zhao, On weak Armendariz rings, *Comm. Algebra*, **34**(7) (2006), 2607–2616.
 - [43] G. Marks, A taxonomy of 2-primal rings, *J. Algebra*, **266**(2) (2003), 494–520.
 - [44] N. H. McCoy, Remarks on divisors of zero, *Amer. Math. Monthly*, **49** (1942), 286–295.
 - [45] A. R. Nasr-Isfahani, Ore extensions of 2-Primal rings, *Journal of Algebra and Its Applications*, **13** (3) (2014), 1350117.
 - [46] A. R. Nasr-Isfahani, Radicals of skew polynomial and skew Laurent polynomial rings over skew Armendariz rings, *Comm. Algebra*, **42**(3) (2014), 1337–1349.
 - [47] W. K. Nicholson, Lifting idempotents and exchange rings, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **229** (1977), 269–278.
 - [48] W. K. Nicholson and Y. Zhou, Clean rings: a survey, *Advances in Ring Theory*, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2005), 181–198.
 - [49] M. Prest, *Model theory and modules*, Vol. 130, *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, (1988).
 - [50] L. Rowen, *Ring theory*, Vol. I. Pure and Applied Mathematics, 127. Academic Press, Inc., Boston, MA, (1988).
 - [51] G.Y. Shin, Prime ideals and sheaf representation of a pseudo symmetric ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **184** (1973), 43–60.
 - [52] A. A. Tuganbaev, *Rings close to regular*, Springer Science & Business Media, Vol. 545 (2013).
 - [53] A. A. Tuganbaev, The Jacobson radical of the Laurent series ring, *J. Math. Sci.*, **149**(2) (2008), 1182–1186.
 - [54] D. A. Tuganbaev, Laurent series rings and pseudo-differential operator rings, *J. Math. Sci.*, **128**(3) (2005), 2843–2893.
 - [55] D. A. Tuganbaev, The Jacobson radical and Laurent series ring, *J. Math. Sci.*, **152**(2) (2008), 304–306.
 - [56] R. B. Warfield, Exchange rings and decompositions of modules, *Math. Ann.*, **199** (1972), 31–36.

- [57] Y. Zhou and M. Ziemkowski, On clean Laurent series rings, *J. Austral. Math. Soc.*, **95**(3) (2013), 421–427.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Skew Armendariz	آرمنداریز اریب
Prime ideal	ایده‌آل اول
Minimal prime ideal	ایده‌آل اول مینیمال
Completely prime ideal	ایده‌آل کاملاً اول
Maximal ideal	ایده‌آل ماکسیمال
(α, δ) -ideal	(α, δ) -ایده‌آل
α -ideal	α -ایده‌آل
δ -ideal	δ -ایده‌آل
Reversible	برگشت پذیر
Nilpotent	پوچ توان
Monomorphism	تک‌ریختی
Ore extension	توسیع اُر
Trivial extension	توسیع بدیهی
Jordan's construction	توسیع جردن
Köthe's conjecture	حدس کوته
Abelian ring	حلقه‌ی آبلی
Armendariz ring	حلقه‌ی آرمنداریز
Bounded index ring	حلقه‌ی اندیس کران دار
2-primal ring	حلقه‌ی ۲-اولیه
Weakly 2-primal ring	حلقه‌ی ۲-اولیه ضعیف
Reversible ring	حلقه‌ی برگشت پذیر
Boolean ring	حلقه‌ی بولی
Exchange ring	حلقه‌ی تبادلی
Clean ring	حلقه‌ی تمیز
Skew polynomial ring	حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب

Skew Laurent polynomial ring	حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب
Dedekind-finite ring	حلقه‌ی ددکیند-متناهی
Duo ring	حلقه‌ی دوئو
Laurent series ring	حلقه‌ی سری‌های لوران
Skew inverse Laurent series ring	حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب
Strongly regular ring	حلقه‌ی قویاً منظم
Reduceh ring	حلقه‌ی کاهشی
Right Goldie ring	حلقه‌ی گلدی راست
Suitable ring	حلقه‌ی مناسب
Von Neumann regular ring	حلقه‌ی منظم فن نیومان
Local ring	حلقه‌ی موضعی
Von Neumann local ring	حلقه‌ی موضعی فن نیومان
Semiprimitive ring	حلقه‌ی نیم‌ابتدائی
Semiperfect ring	حلقه‌ی نیم‌کامل
Semiregular ring	حلقه‌ی نیم‌منظم
Semilocal ring	حلقه‌ی نیم‌موضعی
α -compatible ring	حلقه‌ی α -سازگار
δ -compatible ring	حلقه‌ی δ -سازگار
α -rigid	حلقه‌ی α -صلب
π -regular ring	حلقه‌ی π -منظم
Insertion-of-factors-property	خاصیت IFP
Idempotent	خودتوان
Orthogonal idempotent	خودتوان‌های متعامد
Automorphism	خودریختی
Endomorphism	درون‌ریختی
Right duo	دوئو راست
Prime radical	رادیکال اول
Upper nilradical	رادیکال پوچ بالایی
Lower nilradical	رادیکال پوچ پایینی
Jacobson radical	رادیکال جیکبسون
Vertices	رئوس
Ascending chain condition	شرط زنجیر افزایشی

Descending chain condition	شرط زنجیر کاهشی
Countable locally nilpotent	شمارا موضعاً پوچ‌توان
Nil clean element	عنصر پوچ تمیز
Clean element	عنصر تمیز
Von Neumann regular element	عنصر منظم فن نیومان
Unit-regular element	عنصر منظم-وارون‌پذیر
Von Neumann local element	عنصر موضعی فن نیومان
Invertible element	عنصر وارون‌پذیر
π -regular element	عنصر π -منظم
Diameter	قطر
Strongly π -regular	قویاً π -منظم
Girth	کمر
Clean graph	گراف تمیز
Adjacent	مجاور
Dominating set	مجموعه‌ی احاطه‌گر
Zero divisor	مقسوم‌علیه صفر

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Abelian ring	حلقه‌ی آبلی
Adjacent	مجاور
Armendariz ring	حلقه‌ی آرمنداریز
Ascending chain condition	شرط زنجیر افزایشی
Automorphism	خودریختی
Boolean ring	حلقه‌ی بولی
Bounded index ring	حلقه‌ی اندیس کران‌دار
Clean element	عنصر تمیز
Clean graph	گراف تمیز
Clean ring	حلقه‌ی تمیز
Completely prime ideal	ایده‌آل کاملاً اول
α -compatible	حلقه‌ی α -سازگار
δ -compatible	حلقه‌ی δ -سازگار
Countable locally nilpotent	شمارا موضعاً پوچ‌توان
Dedekind-finite ring	حلقه‌ی ددکیند-متناهی
Descending chain condition	شرط زنجیر کاهش‌ی
Diameter	قطر
Dominating set	مجموعه‌ی احاطه‌گر
Duo ring	حلقه‌ی دوئو
Endomorphism	درون‌ریختی
Exchange ring	حلقه‌ی تبدلی
Girth	کمر
Idempotent	خودتوان
Insertion-of-factors-property	خاصیت <i>IFP</i>
Invertible element	عنصر وارون‌پذیر

(α, δ) -ideal	(α, δ) -ایده‌آل
α -ideal	α -ایده‌آل
δ -ideal	δ -ایده‌آل
Jacobson radical	رادی‌کال جیکبسون
Jordan's construction	توسیع جردن
Köthe's conjecture	حدس کوته
Laurent series ring	حلقه‌ی سری‌های لوران
Local ring	حلقه‌ی موضعی
Lower nilradical	رادی‌کال پوچ پایینی
Maximal ideal	ایده‌آل ماکسیمال
Minimal prime ideal	ایده‌آل اول مینیمال
Monomorphism	تک‌ریختی
Nil clean element	عنصر پوچ تمیز
Nilpotent	پوچ‌توان
Ore extension	توسیع اُره
Orthogonal idempotent	خودتوان‌های متعامد
Prime ideal	ایده‌آل اول
Prime radical	رادی‌کال اول
2-primal ring	حلقه‌ی ۲-اولیه
Reduced ring	حلقه‌ی کاهشی
Reversible	برگشت‌پذیر
Reversible ring	حلقه‌ی برگشت‌پذیر
Right duo	دوئو راست
Right Goldie ring	حلقه‌ی گلدی راست
α -rigid	حلقه‌ی α -صلب
π -regular element	عنصر π -منظم
π -regular ring	حلقه‌ی π -منظم
Semilocal ring	حلقه‌ی نیم‌موضعی
Semiperfect ring	حلقه‌ی نیم‌کامل
Semiprimitive ring	حلقه‌ی نیم‌ابتدائی
Semiregular ring	حلقه‌ی نیم‌منظم
Skew Armendariz	آرمنداریز اریب

Skew inverse Laurent series ring	حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب
Skew Laurent polynomial ring	حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های لوران اریب
Skew polynomial ring	حلقه‌ی چندجمله‌ای‌های اریب
Strongly π -regular	قویاً π -منظم
Strongly regular ring	حلقه‌ی قویاً منظم
Trivial extension	توسیع بدیهی
Unit-regular element	عنصر منظم-وارون‌پذیر
Upper nilradical	رادیکال پوچ بالایی
Vertices	رئوس
Von Neumann local element	عنصر موضعی فن نیومان
Von Neumann local ring	حلقه‌ی موضعی فن نیومان
Von Neumann regular element	عنصر منظم فن نیومان
Von Neumann regular ring	حلقه‌ی منظم فن نیومان
Weakly 2-primal ring	حلقه‌ی ۲-اولیه ضعیف
Zero divisor	مقسوم‌علیه صفر

نمایه

- آرمنداریز اریب، ۱۸
- ایده آل اول مینیمال، ۴
- ایده آل کاملاً اول، ۹
- ایده آل ماکسیمال، ۲
- (α, δ) -ایده آل، ۴
- α -ایده آل، ۱۲
- δ -ایده آل، ۳
- برگشت پذیر، ۱
- پوچ توان، ۷
- تک ریختی، ۱۷
- توسیع آر، ۱
- توسیع بدیهی، ۶۶
- توسیع جردن، ۱۸
- خاصیت IFP ، ۱
- حدس کوتاه، ۱
- حلقه‌ی آبل، ۱
- حلقه‌ی اندیس کران دار، ۳
- حلقه‌ی ۲-اولیه، ۱
- حلقه‌ی ۲-اولیه ضعیف، ۹
- حلقه‌ی برگشت پذیر، ۷
- حلقه‌ی بولی، ۲
- حلقه‌ی تبدالی، ۱۱
- حلقه‌ی تمیز، ۱۲
- حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های اریب، ۴
- حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های لوران اریب، ۴
- حلقه‌ی ددکیند-متناهی، ۸
- حلقه‌ی سری‌های لوران معکوس اریب، ۳
- حلقه‌ی سری‌های لوران، ۳
- حلقه‌ی قویاً منظم، ۶۸
- حلقه‌ی کاهشی، ۱
- حلقه‌ی گلدی راست، ۳
- حلقه‌ی مناسب، ۱۶
- حلقه‌ی منظم فن نیومان، ۲
- حلقه‌ی موضعی، ۹
- حلقه‌ی موضعی فن نیومان، ۱۱
- حلقه‌ی نیم ابتدائی، ۳
- حلقه‌ی نیم کامل، ۳
- حلقه‌ی نیم منظم، ۳
- حلقه‌ی نیم موضعی، ۱۱
- حلقه‌ی α -سازگار، ۱۳
- حلقه‌ی δ -سازگار، ۱۳
- حلقه‌ی α -صلب، ۴
- حلقه‌ی π -منظم، ۲
- خودتوان، ۲
- خودتوان‌های متعامد، ۱۲
- خودریختی، ۳
- درون ریختی، ۱۲
- دوئو راست، ۴
- رادیکال اول، ۳
- رادیکال پوچ بالایی، ۷
- رادیکال جیکبسون، ۲
- شرط زنجیر افزایشی، ۱۵

شرط زنجیر کاهشی، ۱۶

شمارا موضعاً پوچ توان، ۶۴

عنصر پوچ تمیز، ۷۵

عنصر تمیز، ۱۲

عنصر منظم فن نیومان ، ۱۰

عنصر منظم-وارون پذیر، ۱۲

عنصر موضعی فن نیومان ، ۱۱

عنصر وارون پذیر، ۷

عنصر π -منظم، ۱۰

قطر، ۷۶

قویاً π -منظم، ۷۱

کمر، ۷۶

گراف تمیز، ۷۵

مجاور، ۷۶

مجموعه‌ی احاطه‌گر، ۷۶

مقسوم‌علیه صفر، ۱۰

Abstract

In this thesis, we investigate the structure of Ore extensions. Also, we want to peruse some notable results in noncommutative rings. In this regard, we study some important classes of noncommutative rings such as reversible, right duo, *IFP* and also abelian. By using these properties, we get closer to the commutative rings, and for this reason they are called cousins of commutative rings. Also, we determine some elements such as unit, idempotent, von Neumann regular, von Neumann local, π -regular and clean in skew polynomial rings, skew Laurent polynomial rings and skew inverse Laurent series rings. In the following, we also investigate some radical-theoretic properties of skew inverse Laurent series rings and specify their Jacobson radicals.

Keywords: Abelian rings; Clean elements; Idempotent elements; *IFP*; Jacobson radical; π -regular elements; Reversible rings; Right duo rings; Skew inverse Laurent series rings; Skew Laurent polynomial rings; Skew polynomial rings; Unit elements; Von Neumann local elements; Von Neumann regular elements.

Mathematics Subject Classification: Primary 16S36, 16S15, 16N20, 16N40, 16W60; Secondary 16U99, 16U60.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Pure Mathematics (Algebra)

**On the structure of regular elements in
noncommutative ring extensions**

By: Maryam Hamidizadeh

Supervisor

Prof. Ebrahim Hashemi

Advisor

Dr. Abdollah Alhevaz

February 2021