

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

رساله دکتری

بررسی اعداد احاطه‌گری مرحله‌ای و جهشی در گراف‌ها و گراف‌های فازی

نگارنده: مرضیه فرهادی جلالوند

استاد راهنما

دکتر نادر جعفری راد

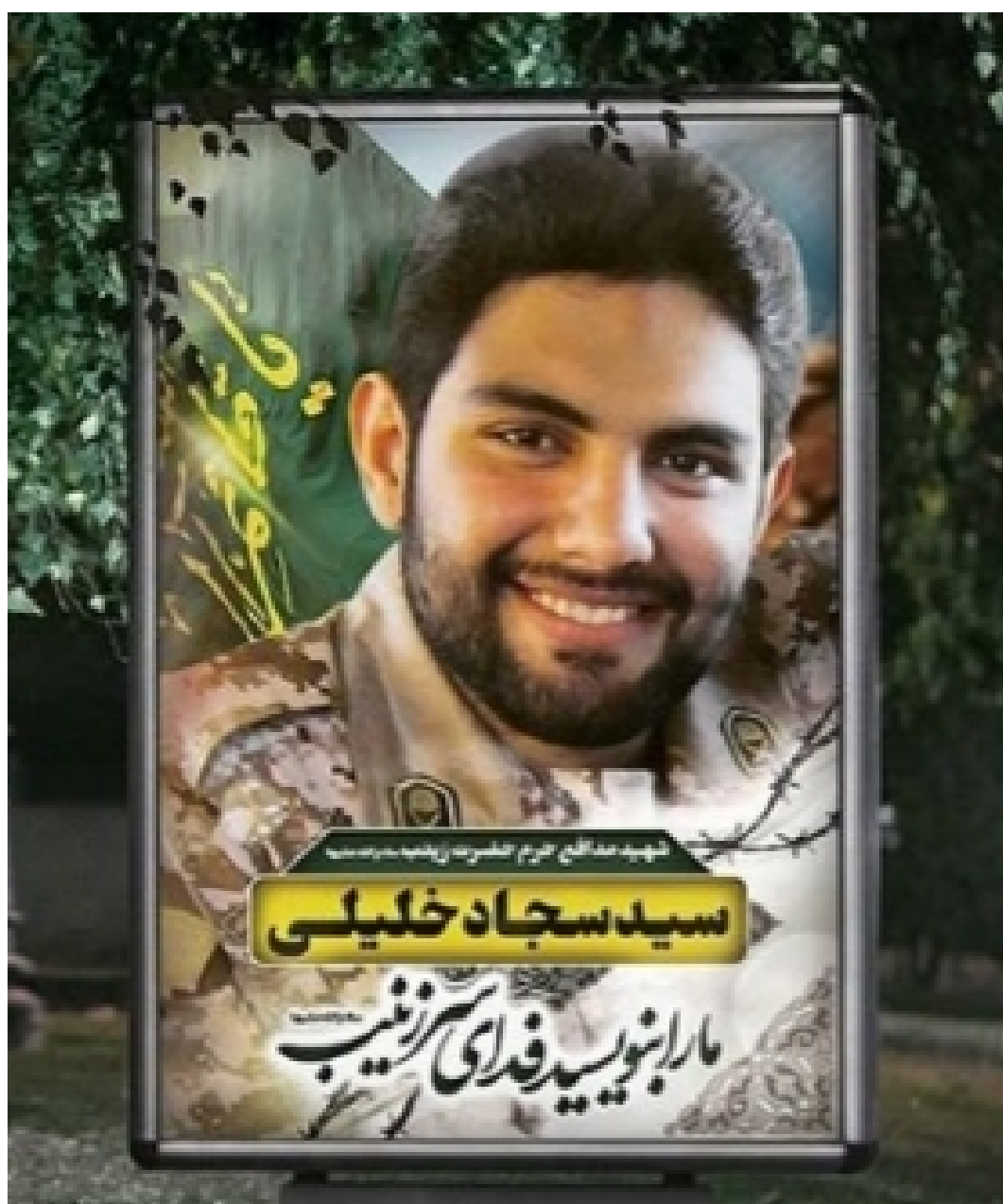
استاد مشاور

دکتر مریم قرآنی

مهر ۱۳۹۹

تقدیم به:

شهید مدافع حرم



با سپاس فراوان از:

خداوند متعال که لطف خود را بر من ارزانی داشته و راه را بر من هموار نموده است
پدر بزرگوارم

مادر مهربانم

همسر عزیز و فرزندان دلبندم

استاد گرامیم

مرضیه فرهادی جلالوند
مهر ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب مرضیه فرهادی جلالوند دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان بررسی اعداد احاطه‌گری مرحله‌ای و جهشی در گراف‌ها و گراف‌های فازی، تحت راهنمایی جناب آقای دکتر نادر جعفری راد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مرضیه فرهادی جلالوند

مهر ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

فرض کنید $k \geq 1$ ، گوییم دو رأس در گراف G به صورت k -مرحله‌ای یکدیگر را احاطه می‌کنند هرگاه درفاصله‌ی دقیقا k از یکدیگر باشند. مجموعه‌ی S از رأس‌های گراف G را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای می‌نامیم هرگاه هر رأس در G به صورت k -مرحله‌ای توسط برخی از رأس‌های S احاطه شود. کوچکترین اندازه از یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای را عدد احاطه‌گری k -مرحله‌ای، $\gamma_{kstep}(G)$ ، از گراف G می‌نامیم. همچنین مجموعه‌ی $S \subseteq V(G)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر جهشی می‌باشد هرگاه برای هر $v \in V \setminus S$ یک رأس $u \in S$ موجود باشد به‌طوری‌که $d_G(u, v) = 2$.

مینیمم اندازه از یک مجموعه احاطه‌گر جهشی را عدد احاطه‌گری جهشی می‌نامیم و با $\gamma_h(G)$ نمایش می‌دهیم.

در این رساله، ما به مطالعه این پارامترها پرداخته و برخی از ویژگی‌ها و کران‌های موجود برای اعداد احاطه‌گری مرحله‌ای را بررسی می‌کنیم و برخی کران‌های مطرح شده برای گراف‌های احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق را بهبود داده و شرایطی که تساوی برای آن‌ها برقرار می‌باشد را بیان می‌کنیم. همچنین نشان می‌دهیم برای هر $k \geq 2$ ، مسئله‌های تصمیم برای مجموعه‌های احاطه‌گر k -مرحله‌ای و احاطه‌گر k -جهشی در گراف‌های دوبخشی مسطح و گراف‌های وتري مسطح NP -کامل می‌باشد.

سپس قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر در گراف فازی را مورد بررسی قرار می‌دهیم و قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر در گراف فازی را برای گراف‌های کامل فازی و دوبخشی کامل فازی به‌دست می‌آوریم. همچنین مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای دقیق در گراف فازی را معرفی کرده و قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق فازی در گراف فازی را مورد بررسی قرار داده و کران‌های بالا و پایین برای آن معرفی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: احاطه‌گری مرحله‌ای، احاطه‌گری جهشی، احاطه‌گری فازی، قدرت احاطه‌گری، گراف ۱-مرحله‌ای دقیق.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. M. Farhadi Jalalvand and N. Jafari Rad, On the complexity of k -step and k -hop dominating sets in graphs. *Math. Montisnigri* 40 (2017), 36–41.
2. M. Farhadi Jalalvand and N. Jafari Rad, Some results on the exact 1-step domination graphs. *Math. Montisnigri* 44 (2019), 15–27.
3. M. Farhadi Jalalvand, N. Jafari Rad and M. Ghorani, Strength of strongest dominating sets in fuzzy graphs. Submitted (2019).
4. M. Farhadi Jalalvand, M. Ghorani, Strength of fuzzy domination in fuzzy graphs. 2th International Conference on Soft Computing, Faculty of Technology and Engineering- East of Guilan, Nov (2017).
5. M. Farhadi Jalalvand, M. Ghorani, Strongest exact 1-step dominating set for fuzzy graphs. 3th International Conference on Soft Computing, Faculty of Technology and Engineering- East of Guilan, Nov (2019).

فهرست مطالب

س	فهرست تصاویر
۱	مقدمه و مفاهیم اولیه
۱	۱.۱ مقدمه
۱	۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه
۷	۳.۱ مفاهیم مقدماتی گراف فازی
۱۴	۴.۱ قضیه های مقدماتی
۱۷	۲ احاطه گیری کلی در گراف های احاطه گر ۱- مرحله ای دقیق
۱۷	۱.۲ مقدمه
۱۹	۲.۲ بررسی عدد احاطه گیری کلی در گراف های احاطه گر ۱- مرحله ای دقیق
۲۰	۳.۲ کران بالا برای درخت ها
۲۹	۳ کران هایی برای اندازه ی گراف های احاطه گر ۱- مرحله ای دقیق
۲۹	۱.۳ اثبات کران بالا برای گراف ها
۳۲	۲.۳ اثبات کران بالا برای گراف های دوبخشی
۳۷	۴ بررسی پیچیدگی محاسباتی
۳۷	۱.۴ مقدمه
۳۸	۲.۴ نتایج موجود
۳۹	۳.۴ پیچیدگی محاسباتی
۴۵	۵ گراف های فازی
۴۵	۱.۵ مقدمه
۴۶	۲.۵ عدد احاطه گیری بالایی در گراف فازی
۴۹	۳.۵ ارائه ی کران بالا برای اندازه ی گراف های فازی
۵۰	۴.۵ قوی ترین مجموعه ی احاطه گر فازی

۵۵	۵.۵ قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر k – مرحله‌ای فازی
۶۱	مراجع
۶۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۶۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۵		یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مرحله‌ای گراف P_6	۱.۱
۶		نمونه‌های دیگر از مجموعه‌ی احاطه‌گر مرحله‌ای گراف P_6	۲.۱
۶		دو گراف احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق	۳.۱
۷		سه گراف احاطه‌گر ۲- مرحله‌ای دقیق	۴.۱
۱۲		گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ در تعریف ۱۹.۳.۱	۵.۱
۱۳		گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ در تعریف ۲۳.۳.۱	۶.۱
۲۱		درخت T_{i+1} به‌دست آمده از T_i با اعمال عملگر σ_1	۱.۲
۲۲		درخت T_{i+1} به‌دست آمده از T_i با اعمال عملگر σ_2	۲.۲
۲۳		درخت T_{i+1} به‌دست آمده از T_i با اعمال عملگر σ_3	۳.۲
۳۰		گراف G متعلق به خانواده‌ی Γ_k	۱.۳
۳۴		گراف G متعلق به خانواده‌ی Ψ_k	۲.۳
۴۱		گراف‌های G و H در اثبات قضیه‌ی ۲.۳.۴	۱.۴
۴۲		گراف‌های G و H در اثبات قضیه‌ی ۳.۳.۴	۲.۴
۵۲		گراف $G = (\sigma, \mu)$ با $ssd(G) = ۰/۹$	۱.۵

فصل ۱

مقدمه و مفاهیم اولیه

۱.۱ مقدمه

در این فصل، پس از تعریف گراف و مفاهیم مقدماتی در نظریه گراف به تاریخچه‌ای مختصر از احاطه‌گری و احاطه‌گری کلی در گراف‌ها می‌پردازیم و سپس احاطه‌گری مرحله‌ای و جهشی در گراف‌ها را بیان می‌کنیم.

گراف‌ها کاربردهای بسیاری در زمینه‌های مختلف علوم از جمله مهندسی و ارتباطات دارند. یک گراف می‌تواند برای نمایش دادن تقریباً هر نوع ارتباطی به کار برده شود. از این رو مدل‌های گرافی اغلب در حل تعداد بسیاری از مسائل کاربردی به کار برده می‌شوند. تعاریف ارائه شده در این فصل و سایر مفاهیم مرتبط با گراف براساس مراجع [۲، ۱۳، ۲۸] می‌باشد.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۱.۲.۱. گراف^۱ $G = (V, E)$ عبارت است از مجموعه‌ی متناهی $V(G)$ و خانواده‌ی $E(G)$ از دوتایی‌های نامرتب از اعضای متمایز در $V(G)$. هر عضو $V(G)$ رأس^۲ و هر عضو $E(G)$ یک

^۱graph

^۲vertex

یال^۳ نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. $|V(G)|$ تعداد رأس‌های گراف G می‌باشد که آن را مرتبه^۴ گراف نامیده و با $n(G)$ نمایش می‌دهیم. $|E(G)|$ نیز اندازه^۵ گراف نامیده شده و با $m(G)$ نشان داده می‌شود. همچنین هرگاه $e = uv \in E(G)$ ، می‌گوییم u و v با هم مجاور^۶ هستند. یک گراف ساده^۷ است اگر بین هر دو رأس آن بیش از یک یال موجود نباشد.

تعریف ۳.۲.۱. یک گراف ناتهی^۸ است اگر شامل حداقل یک یال باشد.

تعریف ۴.۲.۱. مجموعه رأس‌هایی از G که با رأس v از گراف G مجاور باشند را همسایگی^۹ رأس v نامیده و آن را با $N(v)$ نمایش می‌دهیم. همسایگی باز زیرمجموعه‌ی S از رأس‌های گراف G را به صورت $\bigcup_{v \in S} N(v)$ تعریف می‌کنیم و آن را با $N(S)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $N(v) \cup \{v\}$ را همسایگی بسته^{۱۰} رأس v نامیده و آن را با $N[v]$ نمایش می‌دهیم. همسایگی بسته‌ی زیرمجموعه‌ی S از رأس‌های گراف G را نیز به صورت $\bigcup_{v \in S} N[v]$ تعریف می‌کنیم و آن را با $N[S]$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵.۲.۱. درجه^{۱۱} رأس v در گراف G تعداد یال‌های گراف G است که v بر آن‌ها واقع است و آن را با $\deg(v)$ نمایش می‌دهیم و داریم $\deg(v) = |N(v)|$. ماکزیمم درجه و مینیمم درجه در بین رأس‌های گراف G را به ترتیب با $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶.۲.۱. یک گشت در گراف G یک دنباله‌ی متناوب

$$W = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, v_{n-1}, e_n, v_n$$

از رأس‌ها و یال‌ها است، به‌طوری‌که برای $i = 1, 2, \dots, n$ ، داریم $e_i = v_{i-1}v_i$. یک مسیر P یک گشت است که رأس تکراری ندارد. مسیر با n رأس را با P_n نمایش می‌دهیم که دارای $n - 1$ یال می‌باشد. می‌گوییم رأس u به رأس v مرتبط است اگر مسیری بین رأس u و رأس v وجود داشته باشد.

³edge

⁴order

⁵size

⁶adjacent

⁷simple

⁸nonempty

⁹open neighborhood

¹⁰close neighborhood

¹¹degree

تعریف ۷.۲.۱. گراف G همبند^{۱۲} نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر دو رأس متمایز u و v مسیری از u به v موجود باشد. در غیر این صورت گراف G را ناهمبند^{۱۳} گوئیم. گراف همبند و فاقد دور را درخت^{۱۴} می‌نامیم.

تعریف ۸.۲.۱. یک برگ^{۱۵} (رأس آویزان) در گراف G رأسی از درجه یک است. رأسی که در همسایگی یک رأس آویزان باشد را رأس پشتیبان^{۱۶} می‌نامیم. مجموعه‌ی برگ‌های گراف G را با $L(G)$ و مجموعه‌ی رأس‌های پشتیبان آن را با $S(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. فاصله^{۱۷} بین دو رأس u و v در گراف G که با $d_G(u, v)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از طول کوتاهترین مسیر بین u و v در گراف G . رأس‌هایی از $V(G)$ که در فاصله‌ی k از رأس v باشند را با $N_k(v)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۰.۲.۱. گراف G یک گراف n -بخشی است هرگاه $V(G)$ را بتوان به n زیرمجموعه‌ی غیرتهی $V_1, V_2, \dots, V_n$ افراز کرد به گونه‌ای که هیچ یال از G حاصل اتصال دو رأس یک مجموعه نباشد. مجموعه‌های $V_1, V_2, \dots, V_n$ بخش‌ها یا مجموعه بخش‌های G نامیده می‌شود. اگر G یک گراف n -بخشی دارای بخش‌های $V_1, V_2, \dots, V_n$ باشد به گونه‌ای که هر رأس از V_i به تمام رأس‌های V_j که $1 \leq i < j \leq n$ می‌باشد متصل باشد، آنگاه G یک گراف n -بخشی کامل نامیده می‌شود. اگر $|V_i| = P_i$ ، $i = 1, 2, \dots, n$ ، آنگاه G را با $K_{p_1, p_2, \dots, p_n}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۲.۱. گراف وتری^{۱۸} گرافی است که شامل دور القایی به طول بیشتر از ۳ نباشد.

تعریف ۱۲.۲.۱. یک تطابق (جورسازی)^{۱۹} M در گراف G یک زیرگراف ۱-منظم از G است. یعنی زیرگراف القایی توسط یال‌هایی که دو به دو غیر مجاور هستند. تطابق کامل در گراف G تطابقی است که هر رأس از G با یالی در تطابق مجاور باشد. تطابق با بیشترین اندازه در گراف G تطابق ماکزیمم G نامیده می‌شود.

تعریف ۱۳.۲.۱. مجموعه‌ی S از رأس‌های گراف G یک مجموعه‌ی مستقل^{۲۰} است، هرگاه هیچ دو رأسی از S در G مجاور نباشند. یک مجموعه‌ی مستقل S از رأس‌های گراف G مجموعه‌ی مستقل ماکزیمال نامیده می‌شود، هرگاه S زیرمجموعه‌ی سره از مجموعه‌ی مستقل دیگری از رأس‌های G نباشد.

¹²connected

¹³Disconnected

¹⁴tree

¹⁵leaf

¹⁶support vertex

¹⁷distance

¹⁸chordal graph

¹⁹matching

²⁰independent set

تعریف ۱۴.۲.۱. زیرمجموعه‌ی S از $V(G)$ ، به‌طوری‌که هر یال دارای حداقل یک انتها در S باشد، را یک پوشش رأسی ^{۲۱} گراف G می‌نامیم.

تعریف ۱۵.۲.۱. مجموعه‌ی S از رأس‌های گراف G را یک مجموعه‌ی پوششی باز ^{۲۲} برای گراف G می‌نامیم هرگاه همسایگی‌های باز رأس‌های S در G دو به دو مجزا باشند. ماکزیمم اندازه در بین مجموعه‌های پوششی باز در گراف G را عدد پوششی باز ^{۲۳} گراف G می‌نامیم و با $\rho^o(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۶.۲.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رأس‌های V که $|V| = n$ و مجموعه یال‌های E باشد. مجموعه‌ی $S \subseteq V$ را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ^{۲۴} می‌نامیم، هرگاه برای هر رأس $v \in V \setminus S$ ، داشته باشیم $|N(v) \cap S| \geq 1$. مینیمم اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه‌گر در گراف G را عدد احاطه‌گری ^{۲۵} آن گراف نامیده و با $\gamma(G)$ نشان می‌دهیم. به یک مجموعه‌ی احاطه‌گر G با اندازه‌ی $\gamma(G)$ یک $\gamma(G)$ -مجموعه گفته می‌شود.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف بدون رأس تنها، با مجموعه رأس‌های V که $|V| = n$ و مجموعه یال‌های E باشد. مجموعه‌ی $S \subseteq V$ برای گراف G را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی ^{۲۶} می‌نامیم، هرگاه برای هر رأس $v \in V$ ، داشته باشیم $|N(v) \cap S| \geq 1$. مینیمم اندازه‌ی یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی در گراف G را عدد احاطه‌گری کلی آن گراف نامیده و با $\gamma_t(G)$ نشان می‌دهیم. به یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی G با اندازه‌ی $\gamma_t(G)$ یک $\gamma_t(G)$ -مجموعه گفته می‌شود.

تعریف ۱۸.۲.۱. مجموعه‌ی $S = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ از رأس‌های گراف G را مجموعه‌ی احاطه‌گر مرحله‌ای ^{۲۷} می‌نامیم هرگاه اعداد $k_1, k_2, \dots, k_t$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که $\{N_{k_i}(v_i)\}$ تشکیل یک افراز از $V(G)$ را بدهند. افراز $\{N_{k_i}(v_i)\}$ از $V(G)$ را افراز احاطه‌گری مرحله‌ای نامیده و با S نمایش می‌دهیم. دنباله‌ی $k_1, k_2, \dots, k_t$ را دنباله‌ی احاطه‌گری فاصله ^{۲۸} و مجموعه‌ی $\{k_1, k_2, \dots, k_t\}$ را مجموعه‌ی احاطه‌گر فاصله ^{۲۹} می‌نامیم.

²¹vertex cover

²²open packing set

²³open packing number

²⁴dominating set

²⁵domination number

²⁶total dominating set

²⁷step dominating set

²⁸distance domination sequence

²⁹distance dominating set

برای یک گراف G می‌توان بیش از یک دنباله‌ی احاطه‌گری فاصله و افزاز احاطه‌گری مرحله‌ای داشته باشیم.

مثال ۱.۲.۱. گراف P_6 در شکل ۱.۱ را در نظر بگیرید. در این گراف

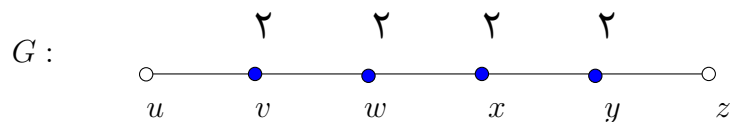
$$N_2(w) = \{u, y\} \text{ و } N_2(x) = \{v, z\}$$

$$N_2(y) = \{w\} \text{ و } N_2(v) = \{x\}$$

می‌باشد و در نتیجه $S = \{v, w, x, y\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مرحله‌ای و مجموعه‌ی

$$S = \{\{x\}, \{w\}, \{u, y\}, \{v, z\}\}$$

افزاز احاطه‌گری مرحله‌ای گراف P_6 می‌باشد.



شکل ۱.۱: یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مرحله‌ای گراف P_6

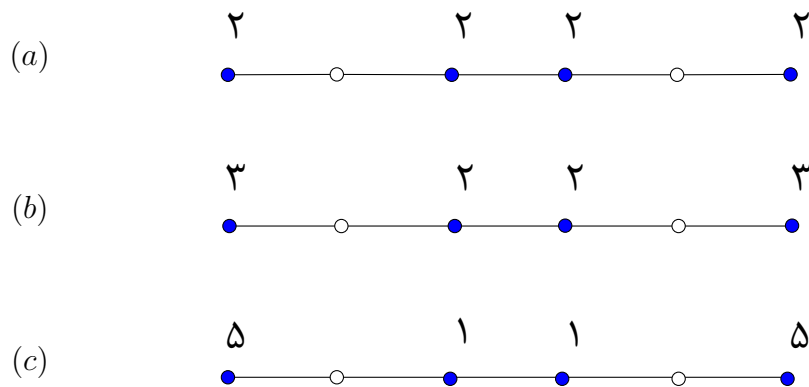
مجموعه‌های احاطه‌گر مرحله‌ای دیگری نیز برای گراف P_6 وجود دارد که در شکل ۲.۱ نشان داده شده است.

دنباله‌های احاطه‌گری فاصله مربوط به شکل‌های بخش a و b و c به ترتیب عبارتند از: $۲, ۲, ۲, ۲$ و $۳, ۲, ۲, ۳$ و $۵, ۱, ۱, ۵$.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید $k \geq 1$ ، گوییم دو رأس در گراف G به صورت k -مرحله‌ای یکدیگر را احاطه می‌کنند هرگاه در فاصله‌ی دقیقا k از یکدیگر باشند. مجموعه‌ی S از رأس‌های گراف G را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای^{۳۰} می‌نامیم هرگاه هر رأس در G به صورت k -مرحله‌ای با برخی رأس‌های S احاطه شود. کوچکترین اندازه از یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای را عدد احاطه‌گری k -مرحله‌ای^{۳۱}، $\gamma_{kstep}(G)$ ، از گراف G می‌نامیم. در این صورت اگر $k = 1$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای همان مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی خواهد بود و در نتیجه $\gamma_{1step}(G) = \gamma_t(G)$ می‌باشد.

³⁰ k -step dominating set

³¹ k -step domination number



شکل ۲.۱: نمونه‌های دیگر از مجموعه‌ی احاطه‌گر مرحله‌ای گراف P_6

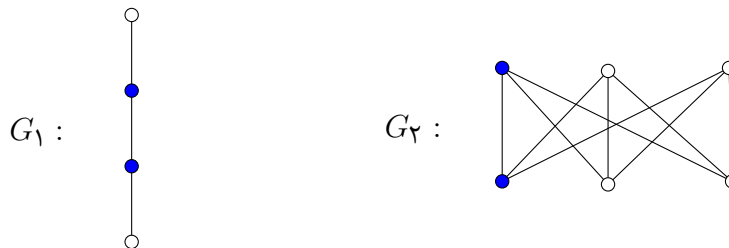
تعریف ۲.۲.۱. مجموعه‌ی $S \subseteq V(G)$ را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای دقیق^{۳۲} گوئیم هرگاه هر رأس v از گراف G توسط دقیقاً یک رأس از S به صورت k -مرحله‌ای احاطه شود. گرافی که دارای مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای دقیق باشد را یک گراف احاطه‌گر k -مرحله‌ای دقیق^{۳۳} می‌نامیم.

مثال ۲.۲.۱. گراف‌های P_4 و $K_{3,3}$ نشان داده شده در شکل ۳.۱ گراف‌های احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق می‌باشند. همچنین هر یک از گراف‌های G_1 و G_2 و G_3 نشان داده شده در شکل ۴.۱ به ترتیب دارای مجموعه‌های احاطه‌گر ۲-مرحله‌ای دقیق زیر می‌باشند.

$$S_1 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$$

$$S_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

$$S_3 = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$$



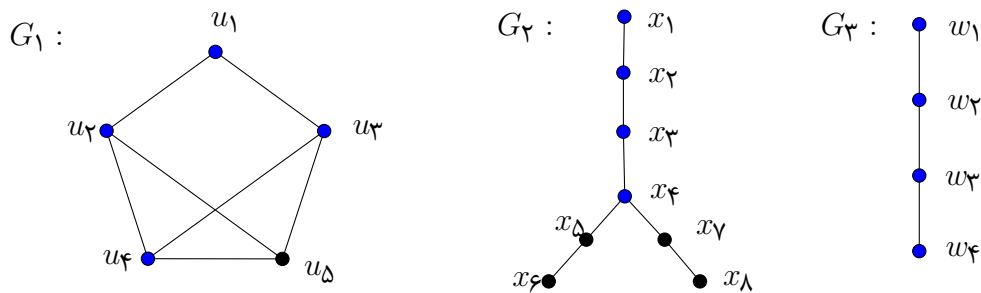
شکل ۳.۱: دو گراف احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق

³²exact k -step dominating set

³³exact k -step domination graph

تعریف ۲۱.۲.۱. مجموعه‌ی $S \subseteq V(G)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر جهشی^{۳۴} می‌باشد هرگاه برای هر $v \in V \setminus S$ یک رأس $u \in S$ موجود باشد به‌طوری‌که $d_G(u, v) = ۲$. مینیمم اندازه از یک مجموعه‌ی احاطه‌گر جهشی را عدد احاطه‌گری جهشی^{۳۵} می‌نامیم و با $\gamma_h(G)$ نمایش می‌دهیم. یک مجموعه‌ی احاطه‌گر جهشی مینیمال^{۳۶} است هرگاه هیچ زیرمجموعه‌ی سره از آن مجموعه‌ی احاطه‌گر جهشی نباشد.

تعریف ۲۲.۲.۱. فرض کنید $k \geq ۲$ ، زیرمجموعه‌ی S از رأس‌های گراف G را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -جهشی^{۳۷} می‌نامیم هرگاه هر رأس خارج از S به صورت k -مرحله‌ای توسط برخی رأس‌های مجموعه‌ی S احاطه شود. اندازه‌ی کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر k -جهشی در گراف G را عدد احاطه‌گری k -جهشی^{۳۸}، $\gamma_{kh}(G)$ ، می‌نامیم. در این صورت اگر $k = ۱$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-جهشی همان مجموعه‌ی احاطه‌گر خواهد بود و در نتیجه $\gamma_{1h}(G) = \gamma(G)$ می‌باشد.



شکل ۴.۱: سه گراف احاطه‌گر ۲-مرحله‌ای دقیق

۳.۱ مفاهیم مقدماتی گراف فازی

در نظریه‌ی مجموعه‌ها که زیر بنای ریاضیات مدرن می‌باشد، مجموعه‌ها به صورت گردایه‌ای معین از اشیا تعریف می‌شوند. به عبارت دیگر هر مجموعه با یک ویژگی خوش تعریف مشخص می‌شود. اگر یک شیء مفروض دارای آن ویژگی باشد، عضو آن مجموعه است و اگر نباشد عضو آن نیست. در این نظریه هر زیرمجموعه‌ای مانند A از مجموعه‌ی مرجع X توسط یک تابع مشخصه به صورت $\chi_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ مشخص می‌شود که $\chi_A(x) = ۱$ اگر $x \in A$ و $\chi_A(x) = 0$ و

^{۳۴}hop dominating set

^{۳۵}hop domination number

^{۳۶}minimal hop dominating set

^{۳۷} k -hop dominating set

^{۳۸} k -hop domination number

اگر $x \notin A$ یا $x \in X \setminus A$.

غالب ابزار متداول برای استدلال و محاسبات معمولی به صورت مشخص و قطعی هستند ولی با توجه به پیچیدگی روز افزون و گسترش اطلاعات بررسی‌های دقیق و همه جانبه بسیار پرهزینه و زمان‌بر هستند. از طرفی بیشتر مفاهیم و ویژگی‌هایی که در زندگی روزمره و واقعی و در شاخه‌های مختلف علوم با آن‌ها سروکار داریم مفاهیمی نادقیق و مبهم هستند. برای مثال مسافت‌های طولانی، ضریب هوشی پایین، فشارخون بالا، هوای ابری و ... همگی از این نوع مفاهیم می‌باشند. نظریه مجموعه‌های فازی نظریه‌ای برای صورت‌بندی و تجزیه و تحلیل این گونه مفاهیم می‌باشد. قانده اصلی در تئوری فازی بیان هر چیز با درجه‌ای از اهمیت آن موضوع است. نظریه‌ی فازی امروزه تقریباً در تمامی شاخه‌های علمی اعم از علوم پزشکی و مهندسی، شبکه‌های عصبی، کامپیوتری و ... وارد شده و کاربردهای بسیاری پیدا کرده است. در این بخش مفاهیم اولیه مربوط به نظریه‌ی زیرمجموعه‌های فازی را ارائه می‌کنیم.

تعاریف ارائه شده در این بخش بر اساس مراجع [۲۲] و [۲۳] می‌باشد که برای مطالعه بیشتر می‌توانید به این مراجع مراجعه نمایید.

مفهوم زیرمجموعه‌ی فازی در سال ۱۹۶۵ توسط لطفی زاده به صورت زیر مطرح شد.

تعریف ۱.۳.۱. زیرمجموعه‌ی فازی از مجموعه‌ی X توسط یک تابع

$$\mu : X \longrightarrow [0, 1]$$

به نام تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر x از X مقدار $\mu(x)$ درجه‌ی عضویت x را نشان می‌دهد که می‌توان به صورت $(x, \mu(x))$ نیز نشان داد.

تعریف ۲.۳.۱. اگر μ و ν دو زیرمجموعه‌ی فازی از X باشند، آنگاه:

$$(1) \mu \subseteq \nu \text{ هرگاه } \mu(x) \leq \nu(x) \text{ برای هر } x \in X.$$

$$(2) \mu = \nu \text{ هرگاه } \mu(x) = \nu(x) \text{ برای هر } x \in X.$$

در ادامه از نماد $\vee$ برای بیان ماکزیمم و $\wedge$ برای بیان مینیمم استفاده می‌کنیم.

تعریف ۳.۳.۱. فرض کنید S و T دو مجموعه باشند و μ و ν به ترتیب زیرمجموعه‌های فازی از مجموعه‌های S و T باشند. رابطه‌ی فازی ρ از زیرمجموعه‌ی فازی μ از S به روی زیرمجموعه‌ی فازی ν از T یک زیرمجموعه‌ی فازی ρ از $S \times T$ می‌باشد، به‌طوری که $\rho(x, y) \leq \mu(x) \wedge \nu(y)$ به ازای هر $x \in S$ و $y \in T$.

ما می‌دانیم که گراف یک رابطه‌ی دوتایی غیر تهی در یک مجموعه می‌باشد. به‌طور مشابه، یک گراف فازی یک رابطه دوتایی فازی بر روی یک مجموعه‌ی فازی است.

تعریف ۴.۳.۱. یک گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ عبارت است از یک مجموعه‌ی ناتهی V به همراه زوج تابع‌های $\sigma : V \rightarrow [0, 1]$ و $\mu : V \times V \rightarrow [0, 1]$ به‌طوری‌که برای هر x و y در V داریم

$$\mu(y, x) = \mu(x, y) \leq \sigma(x) \wedge \sigma(y).$$

مجموعه‌ی فازی σ را مجموعه رأس‌های فازی و مجموعه‌ی فازی μ را مجموعه یال‌های فازی می‌نامیم. مرتبه‌ی گراف فازی برابر است با

$$p = \sum_{x \in V} \sigma(x)$$

و اندازه‌ی آن برابر است با

$$q = \sum_{(x,y) \in V \times V} \mu(x, y).$$

تعریف ۵.۳.۱. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی روی V و $S \subseteq_f V$ یک مجموعه‌ی فازی باشد. اندازه‌ی فازی S ^{۳۹} برابر است با $\sum_{v \in S} \sigma(v)$ و به صورت $|S|_f$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۶.۳.۱. برای هر رأس x همسایگی باز آن برابر است با

$$N(x) = \{y \in V \mid \mu(x, y) > 0\}$$

و همسایگی بسته آن برابر با

$$N[x] = \{N(x) \cup \{x\}\}$$

می‌باشد. رأس u را رأس تنها^{۴۰} در $G = (\sigma, \mu)$ می‌نامیم هرگاه برای هر رأس $v \in V \setminus \{u\}$ داشته باشیم $\mu(u, v) = 0$ ، به عبارت دیگر $N(u) = \emptyset$. همچنین $\mu(v, S)$ کمترین درجه‌ی عضویت یال‌های بین رأس v و مجموعه‌ی S را نشان می‌دهد.

تعریف ۷.۳.۱. درجه‌ی رأس v در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ برابر است با $\sum \sigma(u)$ به‌طوری‌که $u \in N(v)$. بیشترین درجه در گراف فازی را با $\Delta_f(G)$ و کمترین درجه را با $\delta_f(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۸.۳.۱. رأس با مینیمم درجه‌ی عضویت در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ را با v_w و رأس با ماکزیمم درجه‌ی عضویت را با v_s نمایش می‌دهیم. همچنین یال با مینیمم درجه‌ی عضویت را با e_w و یال با ماکزیمم درجه‌ی عضویت را با e_s نمایش می‌دهیم. همچنین $h(\sigma)$ درجه‌ی عضویت رأس با بیشترین درجه‌ی عضویت در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ را نشان می‌دهد و $d(\sigma)$ درجه‌ی عضویت رأس با کمترین درجه‌ی عضویت در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ را نشان می‌دهد.

^{۳۹}fuzzy cardinality

^{۴۰}isolated vertex

تعریف ۹.۳.۱. برای هر رأس v در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ عمق^{۴۱} رأس v عبارت است از مینیمم درجه‌ی عضویت یال‌های مجاور با v که با $d(v)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد. دنباله‌ای از رأس‌های متمایز $x_0, x_1, \dots, x_n$ را یک مسیر فازی^{۴۲} گویند هرگاه رابطه‌ی $\mu(x_{i-1}, x_i) > 0$ به ازای $1 \leq i \leq n$ برقرار باشد. قدرت مسیر را به صورت $\bigwedge_{i=1}^n \mu(x_{i-1}, x_i)$ تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر قدرت مسیر برابر با وزن ضعیف‌ترین یال در مسیر می‌باشد.

تعریف ۱۱.۳.۱. اگر در مسیر فازی که $n \geq 3$ باشد داشته باشیم $x_0 = x_n$ ، آنگاه مسیر فازی یک دور فازی نامیده می‌شود.

تعریف ۱۲.۳.۱. گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ را همبند گوئیم هرگاه بین هر دو رأس دلخواه آن یک مسیر با قدرت مثبت موجود باشد. قدرت همبندی بین دو رأس x و y را با $CONN_G(x, y)$ نشان می‌دهیم که برابر است با بیشترین قدرت مسیرهای بین x و y .

تعریف ۱۳.۳.۱. مکمل^{۴۳} گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ را با $\bar{G} = (\sigma, \bar{\mu})$ نشان می‌دهیم که برابر است با $\bar{G} = (\sigma, \bar{\mu})$ به‌طوری‌که برای هر $x, y \in V$ داشته باشیم

$$\bar{\mu}(x, y) = \sigma(x) \wedge \sigma(y) - \mu(x, y).$$

تعریف ۱۴.۳.۱. برای هر گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ ، گراف زمینه‌ی^{۴۴} $G = (\sigma, \mu)$ که با $G^* = (\sigma, \mu)$ یا G^* نمایش داده می‌شود عبارت است از گرافی با رأس‌ها و یال‌های گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ به‌طوری‌که برای هر رأس x از $G = (\sigma, \mu)$ داشته باشیم $\sigma(x) = 1$ و برای هر یال (x, y) از $G = (\sigma, \mu)$ داشته باشیم $\mu(x, y) = 1$.

تعریف ۱۵.۳.۱. فرض کنید $\sigma : V \rightarrow [0, 1]$ یک مجموعه‌ی فازی از V باشد. گراف فازی کامل^{۴۵} روی σ عبارت است از $G = (\sigma, \mu)$ که برای هر $(x, y) \in E$ داشته باشیم $\mu(x, y) > 0$ و با K_σ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱۶.۳.۱. گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ گراف فازی دوبخشی^{۴۶} نام دارد هرگاه مجموعه رأس‌های V به دو بخش V_1 و V_2 تقسیم شود به‌گونه‌ای که اگر $v_1 \in V_1$ و $v_2 \in V_2$ یا $v_1 \in V_2$ و $v_2 \in V_1$ آنگاه $\mu(v_1, v_2) = 0$. اگر برای هر $u \in V_1$ و $v \in V_2$ داشته باشیم $\mu(u, v) > 0$ ، آنگاه G گراف فازی دوبخشی کامل^{۴۷} نامیده شده و با K_{σ_1, σ_2} نمایش داده می‌شود که σ_1 و σ_2 به ترتیب محدود شده‌ی V روی V_1 و V_2 می‌باشند.

⁴¹depth

⁴²fuzzy path

⁴³complement

⁴⁴underlying graph

⁴⁵complete fuzzy graph

⁴⁶bipartite fuzzy graph

⁴⁷complete bipartite fuzzy graph

تعریف ۱۷.۳.۱. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد و S نیز یک زیرمجموعه از رأس‌های V باشد. رأس v را یک همسایه‌ی خصوصی^{۴۸} رأس $u \in S$ می‌نامیم هرگاه داشته باشیم $N[v] \cap S = \{u\}$. همسایه‌های خصوصی رأس $u \in S$ را به صورت زیر نشان می‌دهیم

$$PN[u, S] = \{v : N[v] \cap S = \{u\}\}.$$

یا به بیان دیگر

$$PN[u, S] = N[u] \setminus N[S \setminus \{u\}].$$

تعریف ۱۸.۳.۱. مجموعه‌ی S از رأس‌های گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ یک مجموعه‌ی غیر زائد فازی^{۴۹} نامیده می‌شود هرگاه برای هر رأس u از S داشته باشیم $PN[u, S] \neq \emptyset$. یک مجموعه‌ی غیر زائد فازی را ماکزیمال نامیم هرگاه برای هر $u \in V \setminus S$ مجموعه‌ی $S \cup \{u\}$ یک مجموعه‌ی غیر زائد فازی نباشد. مینیمم اندازه‌ی فازی در بین همه‌ی مجموعه‌های غیر زائد فازی ماکزیمال را عدد غیر زائد فازی می‌نامیم و با $ir_f(G)$ نمایش می‌دهیم. همچنین ماکزیمم اندازه‌ی فازی در بین همه‌ی مجموعه‌های غیر زائد فازی ماکزیمال را عدد غیر زائد بالایی^{۵۰} گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ نامیده و با $ir_s(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۹.۳.۱. در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ دو رأس x و y یکدیگر را احاطه می‌کنند هرگاه داشته باشیم $\mu(x, y) > 0$. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی باشد. زیرمجموعه‌ی S از V یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی^{۵۱} در G نامیده می‌شود هرگاه برای هر رأس $v \in V \setminus S$ رأس $u \in S$ وجود داشته باشد که رأس v را احاطه کند. مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی S را یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمال می‌نامیم هرگاه به ازای هر رأس $v \in S$ مجموعه‌ی $S \setminus \{v\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی نباشد. مینیمم اندازه‌ی فازی در بین همه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر فازی مینیمال در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ را عدد احاطه‌گری گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ می‌نامیم و با $\gamma_f(G)$ یا γ_f نمایش داده می‌شود.

برای مثال گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ در شکل ۵.۱ ارائه شده است که دارای $\gamma_f = 1/1$ می‌باشد.

تعریف ۲۰.۳.۱. ماکزیمم اندازه‌ی فازی در بین همه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر فازی مینیمم را عدد احاطه‌گری بالایی^{۵۲} گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ می‌نامیم و با $\gamma_s(G)$ یا γ_s نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲۱.۳.۱. دو رأس u و v را در گراف فازی مستقل فازی گوئیم هرگاه $\mu(v, u) = 0$. زیرمجموعه‌ی فازی S از V یک مجموعه‌ی مستقل فازی^{۵۳} نامیده می‌شود هرگاه هر دو رأس

⁴⁸private neighbor

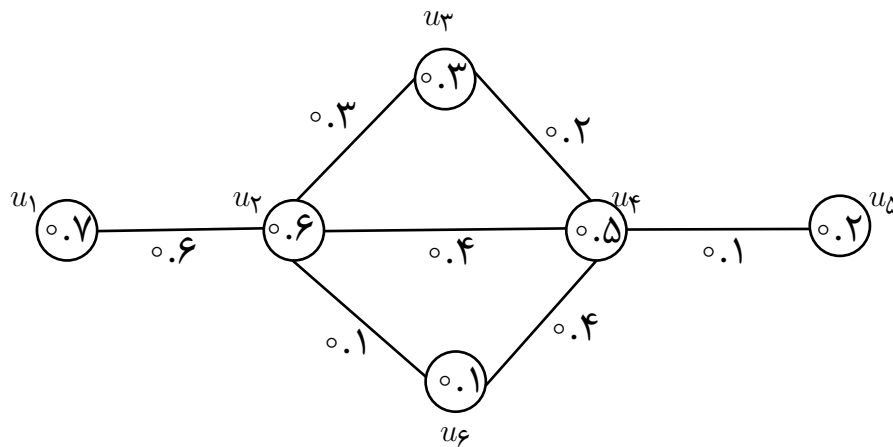
⁴⁹fuzzy irredundant set

⁵⁰superior irredundant number

⁵¹fuzzy dominating set

⁵²superior domination number

⁵³fuzzy independent set



شکل ۵.۱: گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ در تعریف ۱۹.۳.۱

از S مستقل باشند. زیرمجموعه‌ی فازی S از V مستقل فازی ماکزیمال است هرگاه به ازای هر رأس $v \in V \setminus S$ ، مجموعه‌ی $S \cup \{v\}$ یک مجموعه‌ی مستقل فازی نباشد. مینیمم اندازه‌ی فازی در بین همه‌ی مجموعه‌های مستقل فازی ماکزیمال را عدد احاطه‌گری مستقل فازی می‌نامیم و با $i_f(G)$ نمایش می‌دهیم. عدد احاطه‌گری مستقل بالایی ^{۵۴} گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ عبارت است از ماکزیمم اندازه‌ی فازی در بین همه‌ی مجموعه‌های مستقل فازی ماکزیمال که با $i_s(G)$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲۲.۳.۱. زیرمجموعه‌ی S از گراف فازی را مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی فازی ^{۵۵} در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ می‌نامیم هرگاه برای هر رأس v در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ رأس $u \in S$ وجود داشته باشد که رأس v را احاطه کند. مینیمم اندازه‌ی فازی در بین مجموعه‌های احاطه‌گر کلی فازی مینیمال را عدد احاطه‌گری کلی گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ می‌نامیم و با $\gamma_{tf}(G)$ یا γ_{tf} نمایش می‌دهیم.

مبحث احاطه‌گری در گراف‌های فازی در مراجعی مانند [۲۰، ۲۱، ۲۳، ۲۴] مورد بررسی قرار گرفته است.

تعریف ۲۳.۳.۱. مجموعه‌ی $S \subseteq V(G)$ از گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای فازی ^{۵۶} نامیده می‌شود هرگاه برای هر رأس v در گراف G حداقل یک رأس مانند u در S داشته باشیم که در فاصله‌ی k از رأس v باشد.

⁵⁴superior independent domination number

⁵⁵fuzzy total dominating set

⁵⁶fuzzy k -step dominating set

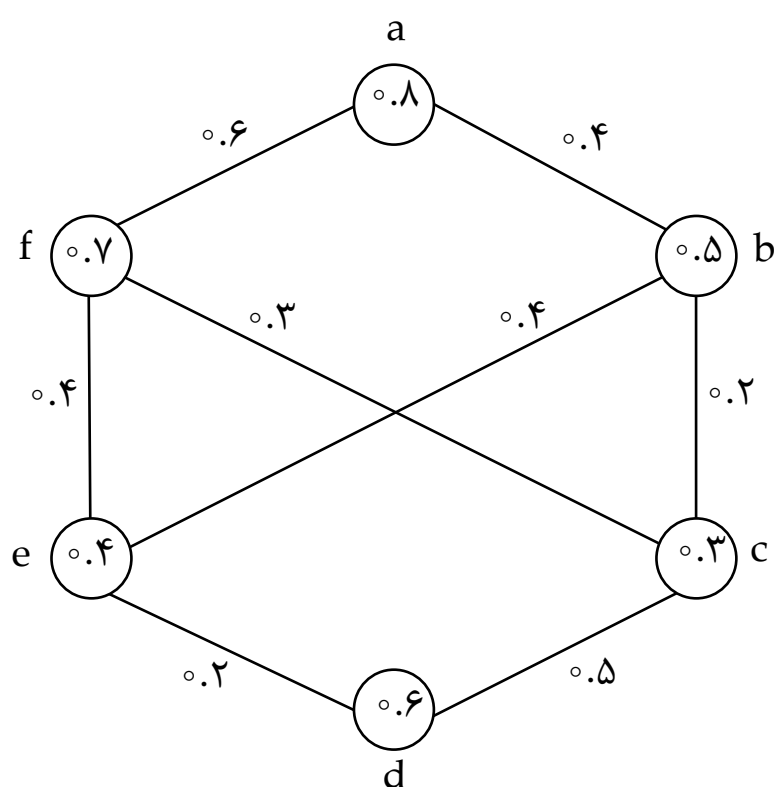
مثال ۱.۳.۱. در شکل ۶.۱ یک گراف فازی نمایش داده شده است. در زیر مجموعه‌های احاطه‌گر ۲-مرحله‌ای فازی این گراف را به دست آورده‌ایم:

$$S_1 = \{a, d, c, b\}, S_2 = \{a, d, e, f\}$$

$$S_3 = \{a, d, e, b\}, S_4 = \{a, d, c, f\}$$

$$S_5 = \{a, f, c, b\}, S_6 = \{f, d, e, c\}$$

$$S_7 = \{f, e, c, b\}, S_8 = \{d, e, c, b\}$$



شکل ۶.۱: گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ در تعریف ۲۳.۳.۱

تعریف ۲۴.۳.۱. یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای فازی S در G به‌طوری‌که مجموعه‌های

$$N_k(v) = \{u \in V(G) | \mu^k(v, u) > \circ, v \in S\}$$

دو به دو مجزا باشند مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای دقیق فازی^{۵۷} نامیده می‌شود. اگر گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ دارای مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای دقیق فازی باشد آن را گراف فازی احاطه‌گر k -مرحله‌ای دقیق^{۵۸} می‌نامیم.

⁵⁷fuzzy exact k -step dominating set

⁵⁸exact k -step domination fuzzy graph

۴.۱ قضیه های مقدماتی

در این بخش برخی از قضایای اثبات شده که در طول رساله مورد استفاده قرار می گیرند را بیان می کنیم.

قضیه ۱.۴.۱. [۱۳] فرض کنید G یک گراف بدون رأس تنها باشد. در این صورت اگر S یک مجموعه احاطه گر مینیمال برای گراف G باشد، آنگاه مجموعه $V \setminus S$ یک مجموعه احاطه گر برای G خواهد بود.

هنینگ^{۵۹} و همکارش در [۱۶] کران بالای زیر را برای عدد احاطه گری کلی در گرافها اثبات کردند.

قضیه ۲.۴.۱. [۱۶] اگر $G = (V, E)$ یک گراف همبند از مرتبه $n \geq 3$ باشد، آنگاه

$$\gamma_t(G) \leq 2n/3.$$

کوکاین^{۶۰} و همکارانش قضیه ی زیر را در [۵] ثابت کردند که عدد احاطه گری کلی را با بیشترین درجه یعنی $\Delta(G)$ ارتباط می دهد.

قضیه ۳.۴.۱. [۵] اگر G گرافی باشد با n رأس و بدون رأس تنها، آنگاه

$$\gamma_t(G) \leq n - \Delta(G) + 1.$$

(۲) اگر گراف G همبند باشد و $\Delta(G) < n - 1$ ، آنگاه

$$\gamma_t(G) \leq n - \Delta(G).$$

در قضیه های زیر کران های بالایی را برای تعداد یال های یک گراف بر اساس عدد احاطه گری کلی و مرتبه ی آن گراف بیان می کنیم که توسط هنینگ و یو در [۱۶] ثابت شده است.

قضیه ۴.۴.۱. [۱۶] اگر G گرافی بدون رأس تنها، از مرتبه ی n و اندازه ی m ، با عدد احاطه گری کلی γ_t باشد، آنگاه

$$m \leq \begin{cases} (n - \gamma_t + 2) + \gamma_t/2 - 1 & \text{اگر } \gamma_t \text{ زوج باشد} \\ (n - \gamma_t + 1) + \gamma_t/2 + 1/2 & \text{اگر } \gamma_t \text{ فرد باشد} \end{cases}$$

⁵⁹Henning

⁶⁰Cockayne

قضیه ۵.۴.۱. [۱۶] فرض کنید G گرافی باشد که هر مولفه‌ی آن دارای مرتبه‌ی حداقل ۳ باشد. همچنین فرض کنید G از مرتبه‌ی n ، اندازه‌ی m با عدد احاطه‌گری کامل γ_t و ماکزیمم درجه‌ی $\Delta(G)$ باشد. اگر $\Delta(G) \geq 3$ باشد، آنگاه $m \leq \Delta(G)(n - \gamma_t)$ می‌باشد و اگر $\Delta(G) = 2$ باشد، آنگاه داریم $m \leq 3(n - \gamma_t)$.

چلالی^{۶۱} و هاینس^{۶۲} کران بالای زیر را برای احاطه‌گری کلی درخت‌ها بر حسب مرتبه و تعداد رأس‌های پشتیبان در [۱۶] بیان و اثبات کردند.

قضیه ۶.۴.۱. [۱۶] اگر T یک درخت با n رأس باشد و s نیز بیانگر تعداد رأس‌های پشتیبان در درخت T باشد، آنگاه

$$\gamma_t(T) \leq (n + s)/2.$$

در ادامه چند قضیه‌ی اثبات شده در زمینه‌ی گراف‌های فازی را بیان می‌کنیم. در قضیه‌ی زیر شرط لازم و کافی برای اینکه یک مجموعه در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمال باشد را بیان می‌کنیم.

قضیه ۷.۴.۱. [۳۱] یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی S از گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ مینیمال است اگر و تنها اگر برای هر رأس v در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ یکی از دو حالت زیر برقرار باشد:

۱. رأس v در همسایگی هیچ کدام از رأس‌های S قرار ندارد.
۲. یک رأس $u \in V \setminus S$ وجود دارد که $N(u) \cap S = \{v\}$.

قضیه ۸.۴.۱. [۳۱] فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی بدون رأس تنها باشد. در این صورت اگر S یک مجموعه احاطه‌گر فازی مینیمال برای گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ باشد، آنگاه مجموعه‌ی $V \setminus S$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی برای $G = (\sigma, \mu)$ خواهد بود.

در قضیه‌ی زیر نیز شرط لازم و کافی برای اینکه یک مجموعه‌ای در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ مجموعه‌ی مستقل فازی ماکزیمال باشد را بیان می‌کنیم.

قضیه ۹.۴.۱. [۲۴] یک مجموعه‌ی مستقل فازی در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ ماکزیمال است اگر و تنها اگر هم یک مجموعه‌ی مستقل فازی برای $G = (\sigma, \mu)$ باشد و هم یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی برای گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ باشد.

قضیه ۱۰.۴.۱. [۲۴] هر مجموعه‌ی مستقل فازی ماکزیمال در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمال در $G = (\sigma, \mu)$ می‌باشد.

در زیر قضیه‌هایی ارائه می‌دهیم که توسط چاندراسکاران^{۶۳} و نجرگنی^{۶۴} در زمینه‌ی مجموعه‌های

⁶¹Chellali

⁶²Haynes

⁶³Chandrasekaran

⁶⁴NagoorGani

احاطه‌گر فازی و مجموعه‌های غیر زائد فازی در گراف‌های فازی بیان و اثبات شده است.

قضیه ۱۱.۴.۱. [۲۳] یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ مینیمال است اگر و تنها اگر هم یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی برای $G = (\sigma, \mu)$ باشد و هم یک مجموعه‌ی غیر زائد فازی برای گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ باشد.

قضیه ۱۲.۴.۱. [۲۳] اگر S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمال از گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ باشد، آنگاه S یک مجموعه‌ی غیر زائد فازی ماکزیمال برای $G = (\sigma, \mu)$ خواهد بود.

قضیه ۱۳.۴.۱. [۲۳] برای هر گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ داریم

$$ir_f(G) \leq \gamma_f(G) \leq i_f(G).$$

فصل ۲

احاطه‌گری کلی در گراف‌های احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق

۱.۲ مقدمه

یکی از حوزه‌های پیشرفته در نظریه‌ی گراف، احاطه‌گری در گراف می‌باشد. در این فصل ما مفاهیمی در زمینه‌ی احاطه‌گری مرحله‌ای در گراف‌ها ارائه می‌دهیم و قضایایی را در این زمینه ثابت می‌کنیم.

مجموعه‌های احاطه‌گر مرحله‌ای توسط شولز^۱ در سال ۱۹۹۵ معرفی شده و ایشان عدد احاطه‌گری مرحله‌ای، که اندازه‌ی کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر مرحله‌ای است را معرفی کردند. مفهوم احاطه‌گری ۲-مرحله‌ای در گراف‌ها توسط شولز و همکاران در [۲۹] و دیگر مقالات مانند [۲۸]، [۳] و [۱۵] مطالعه گردید و مجموعه‌های احاطه‌گر k -مرحله‌ای دقیق توسط هرش^۲ در [۱۷] مورد بررسی قرار گرفت. مفهوم احاطه‌گری جهشی نیز توسط نترجن^۳ و دیگران در [۲۵] بیان گردید. در بخش ۲.۲ کران‌های جدیدی برای گراف‌های احاطه‌گر

^۱Schultz

^۲Hersh

^۳Natarajan

۱- مرحله‌ای دقیق ارائه می‌دهیم و در ادامه در بخش ۳.۲ کران بالایی برای عدد احاطه‌گری کلی یک درخت احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق به دست آورده و شرایطی را که تساوی برای آن‌ها برقرار باشد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

رال^۴ [۲۶] ثابت کرد عدد احاطه‌گری کلی و عدد پوششی باز در هر درخت از مرتبه‌ی حداقل ۲ با هم برابر است.

قضیه ۱.۱.۲. [۲۶] برای هر درخت T از مرتبه حداقل ۲، داریم

$$\gamma_t(T) = \rho^o(T).$$

در ادامه چند قضیه از گراف‌های احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق که توسط گالواس^۵ و شولز در [۱۱] ثابت شده بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۱.۲. [۱۱] هر مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق S یک تطابق القا می‌کند. بنابراین، اندازه‌ی S زوج بوده و $V(G)$ را افزاز می‌کند.

همچنین آن‌ها در قضیه‌ی زیر ثابت کردند که همه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق اندازه‌های یکسان دارند.

قضیه ۳.۱.۲. [۱۱] فرض کنید G یک گراف ۱- مرحله‌ای دقیق باشد. در این صورت همه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق گراف G اندازه‌های یکسان و برابر با $\gamma_t(G)$ دارند.

گالواس و شولز در قضیه‌ی زیر شرایطی را که یک درخت، درخت احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق است مشخص کردند.

قضیه ۴.۱.۲. [۱۱] یک درخت T درخت احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق است اگر و تنها اگر به صورت بازگشتی از گراف K_2 به دست آمده باشد.

به این صورت که $K_2 = T_1, T_2, \dots, T_n = T$ و هر T_i یک درخت احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق با مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق S_i بوده و T_{i+1} از T_i با استفاده از یکی از عملگرهای زیر به دست آمده باشد:

(τ_1) اتصال یک رأس جدید به یک رأس از T_i که در S_i واقع باشد و قرار دادن $S_{i+1} = S_i$.

(τ_2) همسان کردن یک رأس مانند u در $V(T_i) \setminus S_i$ با رأس u از مسیر $H : u, v, w, x$ و قرار دادن $S_{i+1} = S_i \cup \{w, x\}$.

⁴Rall

⁵Galvas

۲.۲ بررسی عدد احاطه‌گری کلی در گراف‌های احاطه‌گر

۱- مرحله‌ای دقیق

کوکاین و همکارانش در قضیه‌ی ۲.۴.۱ ثابت کردند که برای هر گراف همبند G از مرتبه‌ی $n \geq 3$ داریم $\gamma_t(G) \leq 2n/3$. در این بخش این کران بالا را برای گراف‌های احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق بهبود می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۲. اگر G یک گراف احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق از مرتبه‌ی n با مینیمم درجه‌ی δ باشد، آنگاه

$$\gamma_t(G) \leq n/\delta.$$

برهان. فرض کنید G یک گراف احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق از مرتبه‌ی n باشد و S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق از G باشد. از قضیه‌ی ۳.۱.۲ داریم $|S| = \gamma_t(G)$. از آنجایی که هر رأس از گراف G با دقیقاً یک رأس از S مجاور است، برای هر رأس $x \in S$ داریم $|N(x) \cap S| = 1$. چون هر رأس در گراف درجه‌ی حداقل δ دارد، پس

$$|N(x) \cap V \setminus S| \geq \delta - 1.$$

همچنین برای هر زوج رأس $x, y \in S$ اگر $x, y \in N(z)$ باشد، آنگاه رأس z توسط بیش از یک رأس یعنی x و y احاطه می‌شود. در نتیجه داریم $N(x) \cap N(y) = \emptyset$. از طرفی هر رأس در گراف G با دقیقاً یک رأس در S مجاور بوده و دیگر همسایه‌هایش در $V \setminus S$ می‌باشند. بنابراین،

$$|V \setminus S| \geq \gamma_t(G)(\delta - 1)$$

و این نتیجه می‌دهد که

$$\gamma_t(G) \leq n/\delta.$$

□

بسادگی قابل بررسی است که اگر گراف G یک گراف r -منظم باشد، آنگاه در قضیه‌ی ۱.۲.۲ تساوی برقرار خواهد بود.

هر مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی یک فصل مشترک غیرتهی با هر همسایگی باز دارد. بنابراین، اگر G یک گراف بدون رأس تنها باشد، آنگاه $\rho^o(G) \leq \gamma_t(G)$ که $\rho^o(G)$ ماکزیمم اندازه از یک مجموعه‌ی پوششی باز در G می‌باشد. در قضیه‌ی ۱.۱.۲ بیان شد که رال ثابت کرد عدد

۲۰ احاطه‌گری کلی در گراف‌های احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق

احاطه‌گری کلی و عدد پوششی باز در هر درخت از مرتبه‌ی حداقل ۲ با هم برابر است. اما این تساوی برای هر گرافی برقرار نمی‌باشد. برای مثال می‌توان دید که $\gamma_t(C_5) = 3$ ، در حالی که $\rho^o(C_5) = 2$. ما نشان می‌دهیم این تساوی برای هر گراف ۱-مرحله‌ای دقیق برقرار می‌باشد.

قضیه ۲.۲.۲. برای هر گراف احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق داریم

$$\gamma_t(G) = \rho^o.$$

برهان. فرض کنید G یک گراف احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق با عدد احاطه‌گری ۱-مرحله‌ای دقیق $\gamma_t(G)$ باشد و S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق از G باشد. همچنین گراف G دارای عدد پوششی باز $\rho^o(G)$ باشد.

از قضیه‌ی ۳.۱.۲ داریم $|S| = \gamma_t(G)$. از آنجا که برای هر دو رأس $v, w \in S$ داریم $N(v) \cap N(w) = \emptyset$ ، نتیجه می‌گیریم هر مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق یک مجموعه‌ی پوششی باز نیز می‌باشد. بنابراین،

$$\rho^o(G) \geq |S| = \gamma_t(G).$$

حال فرض کنید D یک مجموعه‌ی پوششی باز برای گراف G باشد. برای هر رأس $v \in D$ داریم $|N(v) \cap S| = 1$. از طرفی برای هر دو رأس v, w از D داریم $N(v) \cap N(w) = \emptyset$. بنابراین، داریم

$$\rho^o(G) = |D| \leq |S| = \gamma_t(G).$$

در نتیجه

$$\gamma_t(G) = \rho^o.$$

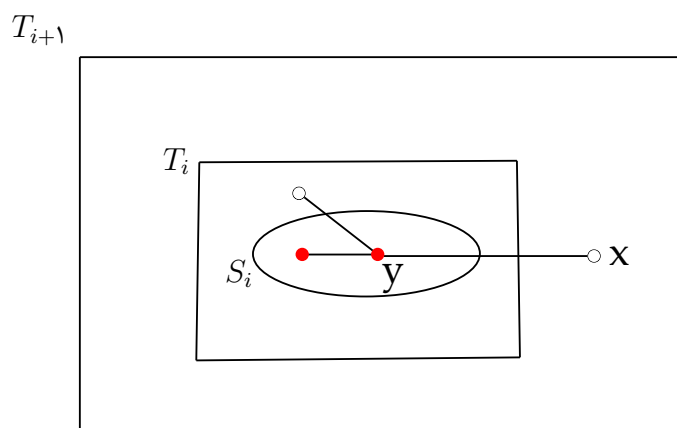
□

۳.۲ کران بالا برای درخت‌ها

در این بخش ما کران بیان شده در قضیه‌ی ۶.۴.۱ را برای درخت‌های احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق بهبود می‌دهیم. فرض کنید s^* تعداد رأس‌های پشتیبان از درجه‌ی ۲ در یک درخت باشد. ما نشان خواهیم داد که برای هر درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق T از مرتبه‌ی $n \geq 3$ داریم $\gamma_t(T) \leq (n + s^*)/2$ و درخت‌هایی که در تساوی صدق می‌کنند را مشخص می‌کنیم.

برای این منظور ابتدا خانواده‌ی Γ را معرفی می‌کنیم.

خانواده‌ی Γ از درخت‌ها، به ازای تعدادی عدد k ، از دنباله‌ی $T_1, T_2, \dots, T_k = T$ به دست می‌آید که $T_1 = P_3$ و اگر $k \geq 2$ ، آنگاه هر درخت T_i یک درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق با



شکل ۱.۲: درخت T_{i+1} به دست آمده از T_i با اعمال عملگر σ_1

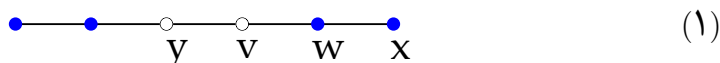
مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق S_i می‌باشد و درخت T_{i+1} از درخت T_i با اعمال یکی از اپراتورهای زیر برای $i = 1, 2, \dots, k-1$ به دست می‌آید:

(σ_1) فرض کنید y یک رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ از یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق S_i از درخت T_i باشد. در این صورت درخت T_{i+1} از درخت T_i با افزودن یک رأس x و اتصال x به y و قرار دادن $S_{i+1} = S_i$ به دست می‌آید، مانند شکل ۱.۲.

(σ_2) فرض کنید $y \in V(T_i) \setminus S_i$ یک برگ از $T_i = P_3$ یا یک رأس از $T_i \neq P_3$ باشد، به طوری که این رأس برگ متصل به رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ نباشد. در این صورت درخت T_{i+1} از درخت T_i با اضافه کردن یک مسیر $P_3 : vwx$ و اتصال v به y و قرار دادن $S_{i+1} = S_i \cup \{w, x\}$ به دست می‌آید، مانند شکل ۲.۲.

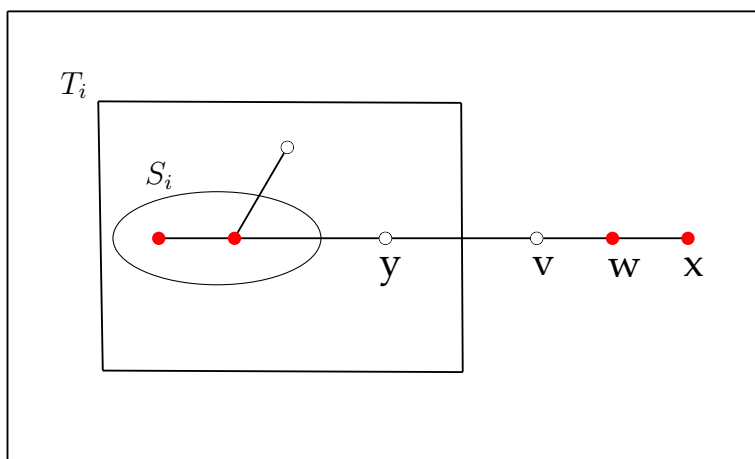
(σ_3) فرض کنید $y \in S_i$ یک برگ متصل به رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ در $T_i \neq P_3$ باشد. در این صورت درخت T_{i+1} از درخت T_i با اضافه کردن یک مسیر $P_4 : uvwx$ و اتصال u به y و قرار دادن $S_{i+1} = S_i \cup \{w, x\}$ به دست می‌آید، مانند شکل ۳.۲.

حال قضیه‌ی زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.



(۱)

T_{i+1}



(۲)

شکل ۲.۲: درخت T_{i+1} به دست آمده از T_i با اعمال عملگر σ_2

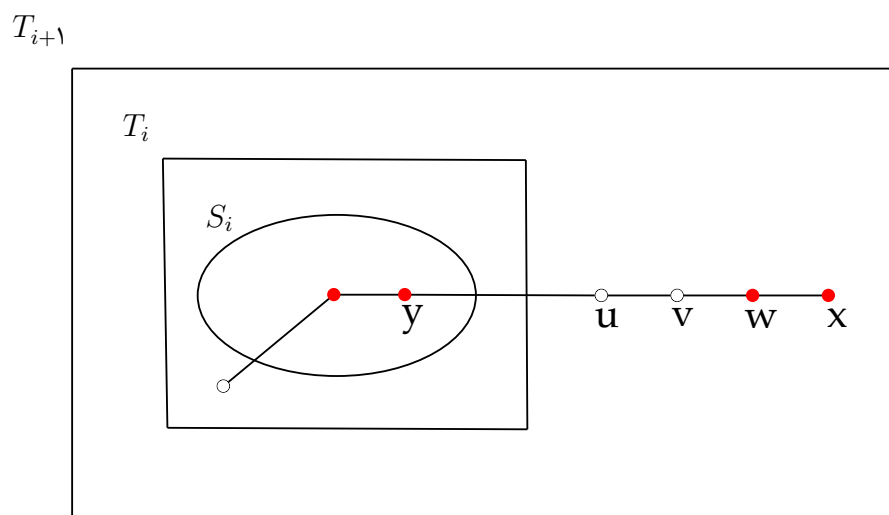
قضیه ۱.۳.۲. برای هر درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق T از مرتبه‌ی $n \geq 3$ داریم

$$\gamma_t(T) \leq (n + s^*)/2$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $T \in \Gamma$.

برهان. فرض کنید T یک درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق از مرتبه‌ی $n \geq 3$ باشد و s^* تعداد رأس‌های پشتیبان از درجه‌ی ۲ در T باشد. قضیه را با استقرا روی مرتبه‌ی n ثابت می‌کنیم. به سادگی می‌توان دید که اگر $n = 3$ قضیه برقرار می‌باشد. فرض کنید قضیه برای هر درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق T' از مرتبه‌ی $n' < n$ برقرار باشد.

حال درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق T از مرتبه‌ی $n < 4$ را در نظر بگیرید. از قضیه‌ی ۴.۱.۲، درخت T از دنباله‌ی $T_1, T_2, \dots, T_k = T$ برای برخی اعداد k به دست آمده است که $T_1 = K_2$ و هر درخت T_i یک درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق با مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق S_i می‌باشد و درخت T_{i+1} از درخت T_i با اعمال یکی از اپراتورهای (τ_1) یا (τ_2) به دست آمده است. ما دو حالت را با قرار دادن n' به عنوان مرتبه‌ی T_{k-1} و $s^{*'}$ به عنوان تعداد رأس‌های پشتیبان از مرتبه‌ی ۲ در درخت T_{k-1} در نظر می‌گیریم.



شکل ۳.۲: درخت T_{i+1} به دست آمده از T_i با اعمال عملگر σ_3

حالت اول. در این حالت فرض کنید درخت T از اعمال عملگر (τ_1) با اضافه کردن رأس جدید x و یال xy که رأس y متعلق به یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق می‌باشد، به دست آمده است. با توجه به عملگر (τ_1) در قضیه‌ی ۴.۱.۲، یک رأس به T_{k-1} اضافه شده است در حالی که مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای ثابت می‌ماند. بنابراین، داریم $n' = n - 1$ و $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_{k-1})$ با فرض استقرا $\gamma_t(T_{k-1}) \leq (n' + s^*)/2$. حال همه‌ی حالت‌های ممکن برای y را در نظر می‌گیریم:

اگر y یک برگ و یا رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ در درخت T_{k-1} نباشد، آنگاه $s' = s^*$ و بنابراین،

$$\begin{aligned} \gamma_t(T) &= \gamma_t(T_{k-1}) \leq (n' + s^*)/2 \\ &= ((n - 1) + s^*)/2 \\ &< (n + s^*)/2. \end{aligned}$$

اگر y یک رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ در درخت T_{k-1} باشد، آنگاه $s^{*'} = s^* + 1$ و بنابراین،

$$\begin{aligned}\gamma_t(T) &= \gamma_t(T_{k-1}) \leq (n' + s^{*'})/2 \\ &= ((n-1) + (s^* + 1))/2 \\ &= (n + s^*)/2.\end{aligned}$$

اگر y یک برگ باشد در T_{k-1} که به رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ متصل نیست، آنگاه $s^{*'} = s^* - 1$ و بنابراین،

$$\begin{aligned}\gamma_t(T) &= \gamma_t(T_{k-1}) \leq (n' + s^{*'})/2 \\ &= ((n-1) + (s^* - 1))/2 \\ &< (n + s^*)/2.\end{aligned}$$

در نهایت فرض کنید که رأس y یک برگ باشد در T_{k-1} که به رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ به نام z متصل است (به‌جز اگر $T_{k-1} = P_3$). در این صورت $s^{*'} = s^*$ و بنابراین،

$$\begin{aligned}\gamma_t(T) &= \gamma_t(T_{k-1}) \leq (n' + s^{*'})/2 \\ &= ((n-1) + s^*)/2 \\ &< (n + s^*)/2.\end{aligned}$$

(اگر $T_{k-1} = P_3$ ، آنگاه رأس‌های z و y رأس‌های پشتیبان از درجه‌ی ۲ هستند و بنابراین، $s^{*'} = s^* - 1$ و $(\gamma_t(T) = \gamma_t(T_{k-1}) \leq (n' + s^{*'})/2 = ((n-1) + (s^* - 1))/2 < (n + s^*)/2$ در نتیجه در این حالت $\gamma_t(T) \leq (n + s^*)/2$).

حالت دوم. در این حالت فرض کنید درخت T با اعمال عملگر (τ_2) از درخت T_{k-1} به دست آمده باشد. فرض کنید $y \in V(T_{k-1}) \setminus S_{k-1}$ یک رأس از T_{k-1} باشد که با یک برگ از مسیر $yxvw : H$ همسان شده است. با اپراتور (τ_2) در قضیه‌ی ۴.۱.۲، داریم $n' = n - 3$ و $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_{k-1}) + 2$. توجه داشته باشید که $y \in V(T_{k-1}) \setminus S_{k-1}$ و یک رأس پشتیبان نیست. از فرض استقرا داریم $\gamma_t(T_{k-1}) \leq (n' + s^{*'})/2$. اگر y یک برگ متصل به رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ در T_{k-1} نباشد، آنگاه $s^{*'} = s^* - 1$ و بنابراین،

$$\begin{aligned}\gamma_t(T) &= \gamma_t(T_{k-1}) + 2 \leq (n' + s^{*'})/2 + 2 \\ &= ((n-3) + (s^* - 1))/2 + 2 \\ &= (n + s^*)/2.\end{aligned}$$

پس فرض می‌کنیم y یک برگ متصل به رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ در T_{k-1} به نام z باشد (به جز اگر $T_{k-1} = P_3$). در این صورت $s^{*'} = s^*$ و $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_{k-1}) + 2$ (اگر $T_{k-1} = P_3$ ، آنگاه

$$\gamma_t(T) = \gamma_t(T_{k-1}) + 2 \leq (n' + s^*)/2 + 2 = ((n-3) + (s^* - 1))/2 + 2 = 9 \text{ و } s^* = s^* - 1 \\ ((n + s^*)/2).$$

برای ادامه‌ی اثبات فرض کنید T_{k-2} درختی باشد که از درخت T_{k-1} با حذف رأس y به دست آمده باشد. چون y برگ‌ی است که در مجموعه‌ی S_{k-1} نمی‌باشد، پس S_{k-1} همچنان یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق برای T_{k-2} بوده و در نتیجه T_{k-2} یک درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق از مرتبه‌ی $n-4 = n' - 1 = n''$ می‌باشد. از فرض استقرا داریم $\gamma_t(T_{k-2}) \leq (n'' + s^{**})/2$. فرض کنید s^{**} تعداد رأس‌های پشتیبان از درجه‌ی ۲ در T_{k-2} باشد. چون T_{k-1} از T_{k-2} با اپراتور (τ_1) به دست آمده است، بنا بر حالت اول $s^{**} \leq s^*$. بنابراین، در این حالت نیز داریم

$$\begin{aligned} \gamma_t(T) &= \gamma_t(T_{k-1}) + 2 = \gamma_t(T_{k-2}) + 2 \leq (n'' + s^{**})/2 + 2 \\ &= (n' - 1 + s^{**})/2 + 2 \leq (n' - 1 + s^*)/2 + 2 \\ &= (n - 4 + s^* + 4)/2 = (n + s^*)/2 \\ &= (n + s^*)/2. \end{aligned}$$

حال قسمت تساوی قضیه را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $T \in \Gamma$ باشد، نشان می‌دهیم T یک درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق از مرتبه‌ی $n \geq 3$ است و $\gamma_t(T) = (n + s^*)/2$. اثبات را با استقرا روی n ادامه می‌دهیم. اگر $T = P_3$ باشد، آنگاه T درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق بوده و P_3 درختی از مرتبه‌ی ۳ و دارای مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق با $\gamma_t(P_3) = 2$ می‌باشد. همچنین این درخت دارای یک رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ است و این نتیجه می‌دهد که $\gamma_t(P_3) = (n + s^*)/2 = (3 + 1)/2 = 2$. بنابراین، پایه‌ی استقرا ثابت می‌شود. فرض کنید هر درخت $T' \in \Gamma$ از مرتبه‌ی $3 < n' < n$ احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق باشد و در رابطه‌ی $\gamma_t(T') = (n' + s^*)/2$ صدق کند. درخت $T \in \Gamma$ از مرتبه‌ی $n \geq 4$ را در نظر بگیرید. چون $T \in \Gamma$ ، بنابراین، به ازای برخی عدد k از دنباله‌ی $T_1, T_2, \dots, T_k = T$ به دست آمده است که در آن $T_1 = P_3$ و هر T_i یک درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق با مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق S_i می‌باشد و درخت T_{i+1} از درخت T_i با اعمال یکی از اپراتورهای (σ_1) ، (σ_2) یا (σ_3) به دست آمده است. به وضوح T یک درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق است. فرض کنید n' مرتبه‌ی درخت T_{k-1} و $s^{*'}$ تعداد رأس‌های پشتیبان از درجه‌ی ۲ در T_{k-1} را نشان بدهد. واضح است که $n' < n$ و $T_{k-1} \in \Gamma$ ، بنابراین، در فرض استقرا صدق می‌کند و $\gamma_t(T_{k-1}) = (n' + s^{*'})/2$. اگر T از با عملگر (σ_1) به دست آمده باشد، آنگاه $n' = n - 1$ و

پس $s^{*'} = s^* + 1$ و همچنین $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_{k-1})$.

$$\begin{aligned}\gamma_t(T) &= \gamma_t(T_{k-1}) = (n' + s^{*'})/2 \\ &= ((n-1) + (s^* + 1))/2 \\ &= (n + s^*)/2\end{aligned}$$

و در نتیجه $\gamma_t(T) = (n + s^*)/2$.

حال فرض کنید T از T_{k-1} با عملگر (σ_2) به دست آمده باشد. در این صورت $n' = n - 3$ ،
و $s^{*'} = s^* - 1$ و $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_{k-1}) + 2$. بنابراین،

$$\begin{aligned}\gamma_t(T) &= \gamma_t(T_{k-1}) + 2 = (n' + s^{*'})/2 + 2 \\ &= ((n-3) + (s^* - 1))/2 + 2 \\ &= (n + s^*)/2.\end{aligned}$$

در نهایت فرض کنید T از T_{k-1} با عملگر (σ_3) به دست آمده باشد. در این صورت $n' = n - 4$ ،
و $s^{*'} = s^*$ و $\gamma_t(T) = \gamma_t(T_{k-1}) + 2$ در نتیجه

$$\begin{aligned}\gamma_t(T) &= \gamma_t(T_{k-1}) + 2 = (n' + s^{*'})/2 + 2 \\ &= ((n-4) + s^*)/2 + 2 \\ &= (n + s^*)/2.\end{aligned}$$

پس اگر $T \in \Gamma$ ، آنگاه $\gamma_t(T) = (n + s^*)/2$.

برعکس، فرض کنید T یک درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق از مرتبه‌ی $n \geq 3$ باشد و
 $\gamma_t(T) = (n + s^*)/2$. نشان می‌دهیم که $T \in \Gamma$.

با استقرا روی مرتبه‌ی n اثبات می‌کنیم. به آسانی می‌توان بررسی کرد که قضیه برای $n = 3$ برقرار است. فرض کنید نتیجه برای درخت‌ها با مرتبه‌ی $n' < n$ برقرار باشد و یک درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق T از مرتبه‌ی $n \geq 4$ را در نظر بگیرید که $\gamma_t(T) = (n + s^*)/2$. بر اساس قضیه‌ی ۴.۱.۲، چون T یک درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق است به طور تناوبی از یک دنباله‌ی $K_2 = T_1, T_2, \dots, T_k = T$ به دست می‌آید، که اگر $k \geq 2$ ، آنگاه T_i درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق با مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق S_i می‌باشد و T_{i+1} از T_i توسط یکی از عملگرهای (τ_1) و (τ_2) به دست آمده است، برای $i = 1, 2, \dots, k-1$.

فرض کنید T از T_{k-1} با مرتبه‌ی $n' < n$ به دست آمده باشد و $s^{*'} = s^*$ تعداد رأس‌های پشتیبان از درجه‌ی ۲ در T_{k-1} باشد. در ابتدا فرض کنید T از T_{k-1} با عملگر (τ_1) به دست آمده باشد. بنابراین، $S_k = S_{k-1}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق برای T می‌باشد و با توجه به

$$\begin{aligned}\gamma_t(T) &= \gamma_t(T_{k-1}) \leq (n' + s^*)/2 \\ &\leq ((n-1) + (s^*)) / 2 \leq (n + s^*) / 2.\end{aligned}$$

چون $\gamma_t(T) = (n + s^*)/2$ داریم

$$\begin{aligned}\gamma_t(T_{k-1}) &= (n' + s^*)/2 \\ &= (n + s^*)/2.\end{aligned}$$

با توجه به فرض استقرا داریم $T_{k-1} \in \Gamma$. از آنجا که $n' = n - 1$ ، داریم $s^* = s^* + 1$ و بنابراین، T از T_{k-1} با افزودن رأس x و اتصال آن به رأس y که رأس پشتیان از درجه‌ی ۲ می‌باشد و قرار دادن $S_k = S_{k-1}$ به عنوان مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق برای درخت T به دست آمده است. بنابراین، T از T_{k-1} با عملگر (σ_1) به دست آمده است و در نتیجه $T \in \Gamma$.

حال فرض کنید T از T_{k-1} با عملگر (τ_1) با ادغام رأس $u \in V(T_{k-1}) \setminus S_{k-1}$ و یک رأس پایانی u از مسیر $H : uvwx$ و قرار دادن $S_k = S_{k-1} \cup \{w, x\}$ به عنوان یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق برای درخت T به دست آمده باشد.

اگر u برگ متصل به رأس پشتیان از درجه‌ی ۲ در T_{k-1} نباشد، آنگاه با افزودن مسیر $H : uvwx$ و ادغام رأس u از مسیر H با رأس u در درخت T_{k-1} رأس w به عنوان یک رأس پشتیان از درجه‌ی ۲ در درخت T_k ظاهر می‌شود. بنابراین، درخت T_k یک رأس پشتیان از درجه‌ی ۲ بیشتر از درخت T_{k-1} خواهد داشت. در نتیجه $s^* = s^* - 1$ و $n' = n - 3$ و از قسمت اول اثبات داریم

$$\begin{aligned}\gamma_t(T) &= \gamma_t(T_{k-1}) + 2 \leq (n' + s^*)/2 + 2 \\ &= ((n-3) + (s^* - 1)) / 2 + 2 \\ &= (n + s^*) / 2.\end{aligned}$$

چون $\gamma_t(T) = (n + s^*)/2$ ، داریم $\gamma_t(T_{k-1}) = (n' + s^*)/2$ و از فرض استقرا $T_{k-1} \in \Gamma$. بنابراین، T از T_{k-1} با عملگر (σ_1) به دست آمده است و در نتیجه $T \in \Gamma$. حال اگر u برگ متصل به رأس پشتیان از درجه‌ی ۲ در T_{k-1} باشد، آنگاه با افزودن مسیر $H : uvwx$ و ادغام رأس u از مسیر H با رأس u در درخت T_{k-1} ، رأس u دیگر یک برگ در درخت T_k نخواهد بود و همچنین رأس y نیز به عنوان یک رأس پشتیان از درجه‌ی ۲ در درخت T_k ظاهر نمی‌شود. اما از طرفی رأس w به عنوان رأس پشتیان از درجه‌ی ۲ به درخت T_k اضافه شده است و این یعنی تعداد رأس‌های پشتیان در درخت T_{k-1} و درخت T_k برابر است. در نتیجه $s^* = s^*$ و $n' = n - 3$ (به جز اگر $T_{k-1} = P_3$).

برای ادامه اثبات فرض کنید T_{k-2} از T_{k-1} با حذف رأس u به دست آمده باشد. چون درخت T

از درخت T_{k-1} با اعمال عملگر τ_2 به دست آمده است، پس رأس u عضو مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق در درخت T_{k-1} نخواهد بود. همچنین رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ نیز در T_{k-1} نمی‌باشد (در غیر این صورت می‌بایست جهت احاطه کردن ۱-مرحله‌ای دقیق رأس برگ متصل به خود در مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق درخت T_{k-1} قرار می‌گرفت). از طرفی u برگ‌ی از درخت T_{k-1} است که متعلق به مجموعه‌ی S_{k-1} نیست. بنابراین، S_{k-1} مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق برای درخت T_{k-2} است و در نتیجه T_{k-2} درخت احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق از مرتبه‌ی $n'' = n' - 1 = n - 4$ می‌باشد.

فرض کنید $s^{*''}$ تعداد رأس‌های پشتیبان از درجه‌ی ۲ در T_{k-2} باشد. از قسمت اول اثبات داریم

$$\begin{aligned}\gamma_t(T) &= \gamma_t(T_{k-1}) + 2 = \gamma_t(T_{k-2}) + 2 \leq (n'' + s^{*''})/2 + 2 \\ &= (n' - 1 + s^{*''})/2 + 2 \leq (n' - 1 + s^{*'})/2 + 2 \\ &= (n - 4 + s^{*'} + 4)/2 = (n + s^{*'})/2 \\ &= (n + s^*)/2.\end{aligned}$$

چون $\gamma_t(T) = (n + s^*)/2$ ، همه‌ی نامساوی‌ها در رابطه بالا به تساوی تبدیل می‌شود و بنابراین، $\gamma_t(T_{k-2}) = (n'' + s^{*''})/2$ و $s^{*''} = s^{*'}$ توجه داشته باشید که در فرض استقرا صدق می‌کند و در نتیجه $T_{k-2} \in \Gamma$.

چون y رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ در T_{k-1} است، یک برگ در T_{k-2} می‌باشد. از طرفی $u \in V(T_{k-1}) \setminus S_{k-1}$ می‌باشد. پس به مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق تعلق ندارد ولی برای احاطه شدن توسط مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق S_{k-1} باید رأس پشتیبان یعنی y متعلق به این مجموعه‌ی باشد. در نتیجه درخت T_{k-1} از درخت T_{k-2} با اعمال عملگر τ_1 به دست آمده است.

همچنین با اضافه شدن رأس u به T_{k-2} تعداد رأس‌های پشتیبان تغییری نمی‌کند و در نتیجه $s^{*''} = s^{*'}$. بنابراین، T از T_{k-2} با افزودن مسیر $uvwx : P_4$ و اتصال رأس u به y و قرار دادن $S_k = S_{k-1} \cup \{w, x\}$ به عنوان مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق برای درخت T به دست آمده است، که y برگ متصل به رأس پشتیبان از درجه‌ی ۲ در T_{k-2} می‌باشد. بنابراین، T از T_{k-2} با عملگر (σ_3) به دست آمده است.

همچنین اگر $T_{k-1} = P_3$ ، آنگاه u یک برگ از $T_{k-1} = P_3$ بوده و T از T_{k-1} با عملگر (σ_2) به دست می‌آید و در نتیجه $T \in \Gamma$. $\square$

فصل ۳

کرانهایی برای اندازه‌ی گراف‌های احاطه‌گر ۱ – مرحله‌ای دقیق

در فصل اول، قضیه‌ی ۴.۴.۱ بیان شد که توسط دانکلمن و همکاران در [۷] ارتباط بین اندازه‌ی گراف و عدد احاطه‌گری کلی در گراف‌ها را مورد بررسی قرار داده است. همچنین بنا بر قضیه‌ی ۳.۱.۲ می‌دانیم که اگر گرافی احاطه‌گر ۱ – مرحله‌ای دقیق باشد، آنگاه عدد احاطه‌گری ۱ – مرحله‌ای دقیق با عدد احاطه‌گری کلی برابر است. در این فصل برخی کرانه‌های مطرح شده در فصل اول را برای گراف‌های احاطه‌گر ۱ – مرحله‌ای دقیق بهبود داده و شرایطی را که تساوی برای آن‌ها برقرار می‌باشد، بیان می‌کنیم.

۱.۳ اثبات کران بالا برای گراف‌ها

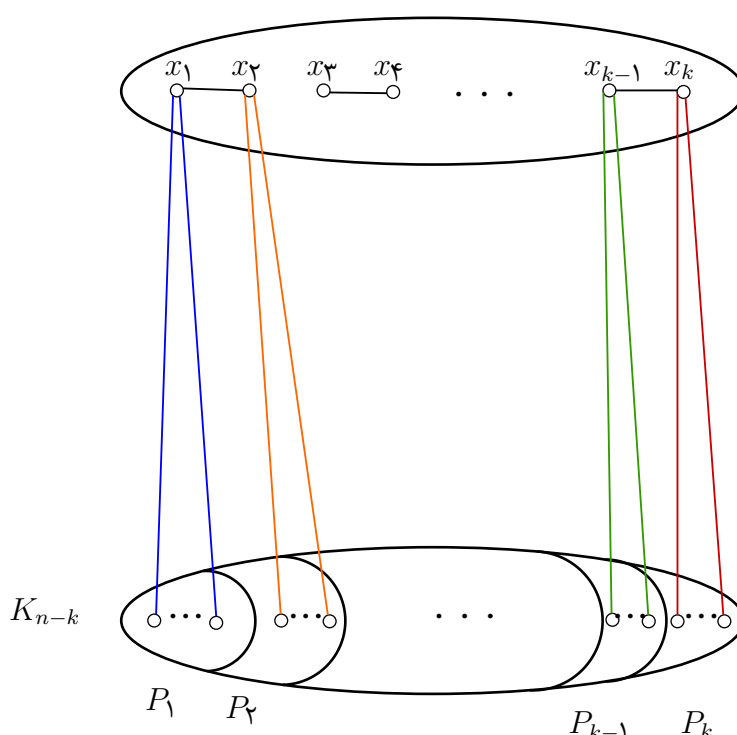
در این بخش قضیه‌ای را بیان و اثبات می‌کنیم که کران گفته شده در قضیه‌ی ۴.۴.۱ را برای گراف‌های احاطه‌گر ۱ – مرحله‌ای دقیق بهبود می‌دهد.

برای این منظور ابتدا خانواده‌ی Γ_k را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

برای هر عدد k ، خانواده‌ی Γ_k را به این صورت تعریف می‌کنیم که یک گراف متعلق به

خانواده‌ی Γ_k می‌باشد اگر و تنها اگر $G = \frac{k}{2}K_2$ یا گراف G به صورت زیر به دست آمده باشد:

فرض کنید $k, P_1, P_2, \dots, P_k$ تا زیر مجموعه‌ی دلخواه و دو به دو مجزا از رأس‌های K_{n-k} باشد، که $n > k$ یک عدد است به طوری که $\cup_{i=1}^k P_i = V(K_{n-k})$ (این امکان وجود دارد که برای برخی اندیس‌های i داشته باشیم $P_i = \emptyset$). در این صورت $G \in \Gamma_k$ از گراف K_{n-k} به دست می‌آید با افزودن k رأس $x_1, x_2, \dots, x_k$ و $k/2$ یال $x_{2i}x_{2i-1}$ و اتصال رأس x_i به هر رأس در P_i هرگاه $P_i \neq \emptyset$ باشد، شکل ۱.۳.



شکل ۱.۳: گراف G متعلق به خانواده‌ی Γ_k

حال قضیه‌ی زیر را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۳. اگر G یک گراف احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق از مرتبه‌ی n و اندازه‌ی m باشد، آنگاه

$$m \leq \binom{n-\gamma_t(G)}{2} + n - \gamma_t(G)/2$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \in \Gamma_k$ ، برای برخی از اعداد زوج k .

برهان. فرض کنید G یک گراف احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق از مرتبه‌ی n و اندازه‌ی m با مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق S باشد. از قضیه ۳.۱.۲ داریم همه‌ی مجموعه‌های

احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق S دارای اندازه‌های یکسان و برابر $\gamma_t(G)$ با می‌باشند، بنابراین، $|S| = \gamma_t(G)$. از قضیه‌ی ۲.۱.۲، $\gamma_t(G)$ زوج است و زیر گراف القایی توسط S ، $G[S]$ ، شامل دقیقا $\gamma_t/2$ یال می‌باشد.

فرض کنید $||S, V(G) \setminus S||$ تعداد یال‌های بین S و $V(G) \setminus S$ را نشان بدهد. از آنجایی که $|S| = \gamma_t(G)$ داریم $|V(G) \setminus S| = n - \gamma_t(G)$. چون S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق است هر رأس از گراف توسط دقیقا یک رأس از S احاطه می‌شود. بنابراین، بین هر رأس از $V(G) \setminus S$ و S دقیقا یک یال وجود دارد و این نشان می‌دهد که بین $V(G) \setminus S$ و S دقیقا $n - \gamma_t(G)$ یال وجود دارد، پس $||S, V(G) \setminus S|| = n - \gamma_t$. از طرفی زیر گراف القا شده توسط $V(G) \setminus S$ دارای حداکثر اندازه‌ی $(n - \gamma_t)$ می‌باشد. بنابراین، داریم:

$$m = |E(G[S])| + ||S, V(G) \setminus S|| + |E(G[V(G) \setminus S])| \quad (1.3)$$

$$\leq \gamma_t/2 + n - \gamma_t + \binom{n - \gamma_t}{2} = \binom{n - \gamma_t}{2} + n - \gamma_t/2 \quad (2.3)$$

حال به اثبات تساوی می‌پردازیم. فرض کنید گراف G یک گراف احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق از اندازه‌ی $m = \binom{n - \gamma_t}{2} + n - \gamma_t/2$ باشد. فرض کنید $k = \gamma_t(G)$ و S یک مجموعی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق برای گراف G باشد. از قضیه‌ی ۲.۱.۲ داریم که k زوج است و $G[S]$ دقیقا $\gamma_t/2$ یال دارد.

مجموعه‌ی $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ را در نظر بگیرید که در آن به ازای $1 \leq i \leq k/2$ رأس x_{2i} با رأس x_{2i-1} مجاور باشد. بنابر تساوی $m = \binom{n - \gamma_t}{2} + n - \gamma_t/2$ ، در اثبات بالا نامساوی‌های (۱.۳) و (۲.۳) مساوی می‌شوند. از آنجا که زیرگراف القایی توسط S به صورت $k/2$ گراف K_2 می‌باشد دقیقا $k/2$ یال دارد و $|E(G[S])| = k/2$. چون S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق است هر رأس از گراف توسط دقیقا یک رأس از S احاطه می‌شود. بنابراین، بین هر رأس از $V(G) \setminus S$ و S دقیقا یک یال وجود دارد و این نشان می‌دهد که بین $V(G) \setminus S$ و S دقیقا $n - \gamma_t(G)$ یال وجود دارد و $||S, V(G) \setminus S|| = n - k$. از طرفی چون $|E(G[V(G) \setminus S])| = \binom{n - k}{2}$ زیرگراف القایی توسط $V(G) \setminus S$ هم دقیقا $\binom{n - k}{2}$ یال دارد و در نتیجه، $G[V(G) \setminus S] \cong K_{n-k}$. حال فرض کنید برای $i = 1, 2, \dots, k$ داشته باشیم $P_i = N(x_i) \cap (V(G) \setminus S)$. چون S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق است، هر رأس از گراف G دقیقا توسط یک رأس در S احاطه شده است. پس هر رأسی از $V(G) \setminus S$ که در نظر بگیریم با دقیقا یک رأس از S مجاور می‌باشد. در صورتی که دو اندیس i و j وجود داشته باشند که $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ به این معنا می‌باشد که رأسی مانند v در همسایگی باز بیش از یک رأس از S یعنی x_i و x_j قرار می‌گیرد، آنگاه این رأس توسط بیش از یک رأس از S احاطه شده است و $N(x_i) \cap N(x_j) \neq \emptyset$. در صورتی که این حالت با اینکه S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق است در تناقض می‌باشد. بنابراین $P_1, \dots, P_k$ دو به دو مجزا هستند. به وضوح $\bigcup_{i=1}^k P_i \subseteq V(K_{n-k})$ از طرفی هر رأس از

$V(G) \setminus S$ که در نظر بگیریم با دقت یک رأس از S احاطه شده است، پس در همسایگی دقیق یکی از رأس‌های S قرار دارد. پس به ازای هر رأس مانند v از $V(G) \setminus S$ یک اندیس i وجود دارد که $v \in N(x_i)$ و بنابراین $V(K_{n-k}) \subseteq \bigcup_{i=1}^k P_i$. در نتیجه $\bigcup_{i=1}^k P_i = V(K_{n-k})$.

این امکان وجود دارد که رأسی مانند x_k از S تنها با یک رأس دیگر از S مجاور بوده باشد و توسط آن احاطه شود در این صورت $P_k = \emptyset$. اما اگر برای برخی اندیس‌های i داشته باشیم $P_i \neq \emptyset$ ، آنگاه هر رأس از P_i با دقت یک رأس x_i از S مجاور می‌باشد. در نتیجه $G \in \Gamma_k$.

برعکس، فرض کنید برای برخی عددهای زوج k داشته باشیم $G \in \Gamma_k$. در صورتی که $G = \frac{k}{2} K_2$ ، نتیجه برقرار است. بنابراین، فرض می‌کنیم $G \neq \frac{k}{2} K_2$. پس از گراف K_{n-k} با افزودن k رأس $x_1, x_2, \dots, x_k$ و $k/2$ یال $x_{2i-1}x_{2i}$ ، $1 \leq i \leq k/2$ و اتصال رأس x_i به هر رأس در P_i به دست آمده است.

اگر $P_i \neq \emptyset$ باشد، آنگاه P_i ها زیر مجموعه‌های دلخواه و دو به دو مجزا از رأس‌های K_{n-k} می‌باشند که $\bigcup_{i=1}^k P_i = V(K_{n-k})$ خواهد بود.

فرض کنید $S = \{x_{2i-1}, x_{2i} \mid 1 \leq i \leq k/2\}$. نشان می‌دهیم که S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق برای G می‌باشد.

رأس $v \in V(G)$ را در نظر می‌گیریم. اگر $v \in \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ ، آنگاه برای $1 \leq i \leq k/2$ داریم $N(x_{2i-1}) \cap S = \{x_{2i}\}$ و $N(x_{2i}) \cap S = \{x_{2i-1}\}$. بنابراین، فرض کنید $v \in V(K_{n-k})$. چون $P_1, P_2, \dots, P_k$ دو به دو مجزا می‌باشند و $\bigcup_{i=1}^k P_i = V(K_{n-k})$ ، دقیقاً یک عدد $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $v \in P_i$ و با توجه به ساختار خانواده‌ی Γ_k داریم $N(v) \cap S = \{x_i\}$. بنابراین، در همه‌ی حالت‌ها $|N(v) \cap S| = 1$ و مجموعه‌ی $S = \{x_{2i-1}, x_{2i} \mid 1 \leq i \leq k/2\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق برای G می‌باشد. در نتیجه G یک گراف احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق است.

از قضیه‌ی ۳.۱.۲ داریم، $|S| = k = \gamma_t(G)$. حال زیر گراف القایی توسط S دقیقاً $k/2$ یال دارد و بین رأس‌های S و $V(G) \setminus S$ نیز دقیقاً $n - k$ یال وجود دارد. همچنین زیرگراف القایی توسط $V(G) \setminus S$ نیز دارای اندازه‌ی $\binom{n-k}{2}$ می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} |E(G)| &= \binom{n-k}{2} + n - k/2 \\ &= \binom{n-\gamma_t(G)}{2} + n - \gamma_t(G)/2. \end{aligned}$$

□

۲.۳ اثبات کران بالا برای گراف‌های دوبخشی

در این بخش کرانی بهتر برای اندازه‌ی یک گراف دوبخشی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق به دست می‌آوریم.

برای این منظور ابتدا خانواده Ψ_k را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

برای هر عدد k ، یک خانواده‌ی Ψ_k از گراف‌ها را به این صورت تعریف می‌کنیم که یک گراف G به خانواده‌ی Ψ_k تعلق دارد اگر و تنها اگر $G = \frac{k}{2}K_2$ یا گراف G به صورت زیر به دست آمده باشد:

فرض کنید A و B بخش‌های گراف $K_{n_1-k/2, n_2-k/2}$ باشند به طوری که

$$|A| = n_1 - k/2$$

و همچنین

$$|B| = n_2 - k/2$$

در حالی که داریم $n_1 \geq k/2$ ، $n_2 \geq k/2$ و $(n_1, n_2) \neq (k/2, k/2)$. (توجه کنید که اگر $n_1 = k/2$ و $A = \emptyset$ آنگاه بدون کاستن از کلیت مسئله $K_{n_1-k/2, n_2-k/2}$ را به صورت $\overline{K_{n_2-k/2}}$ نشان می‌دهیم و اگر $n_2 = k/2$ و $B = \emptyset$ ، آنگاه $K_{n_1-k/2, n_2-k/2}$ را به صورت $\overline{K_{n_1-k/2}}$ نشان می‌دهیم). فرض کنید $P_1, P_2, \dots, P_{k/2}$ مجموعه‌های دلخواه دو به دو مجزا از رأس‌های A باشد که $\bigcup_{i=1}^{k/2} P_i = A$ (امکان دارد برای برخی i ها داشته باشیم $P_i = \emptyset$) و $Q_1, Q_2, \dots, Q_{k/2}$ مجموعه‌های دلخواه دو به دو مجزا از رأس‌های B باشد که $\bigcup_{i=1}^{k/2} Q_i = B$ (امکان دارد برای برخی i ها داشته باشیم $Q_i = \emptyset$). در این صورت گراف $G \in \Psi_k$ از گراف $K_{n_1-k/2, n_2-k/2}$ با اضافه کردن k رأس $x_1, x_2, \dots, x_{k/2}$ و $k/2$ یال $x_{2i}x_{2i-1}$ به طوری که $1 \leq i \leq k/2$ باشد و اتصال x_{2i} به هر رأس از P_i و اتصال x_{2i-1} به هر رأس از Q_i باشد در صورتی که $P_i \neq \emptyset$ و $Q_i \neq \emptyset$ باشد به دست می‌آید، شکل ۲.۳.

حال قضیه‌ی زیر را برای گراف‌های دوبخشی بیان می‌کنیم.

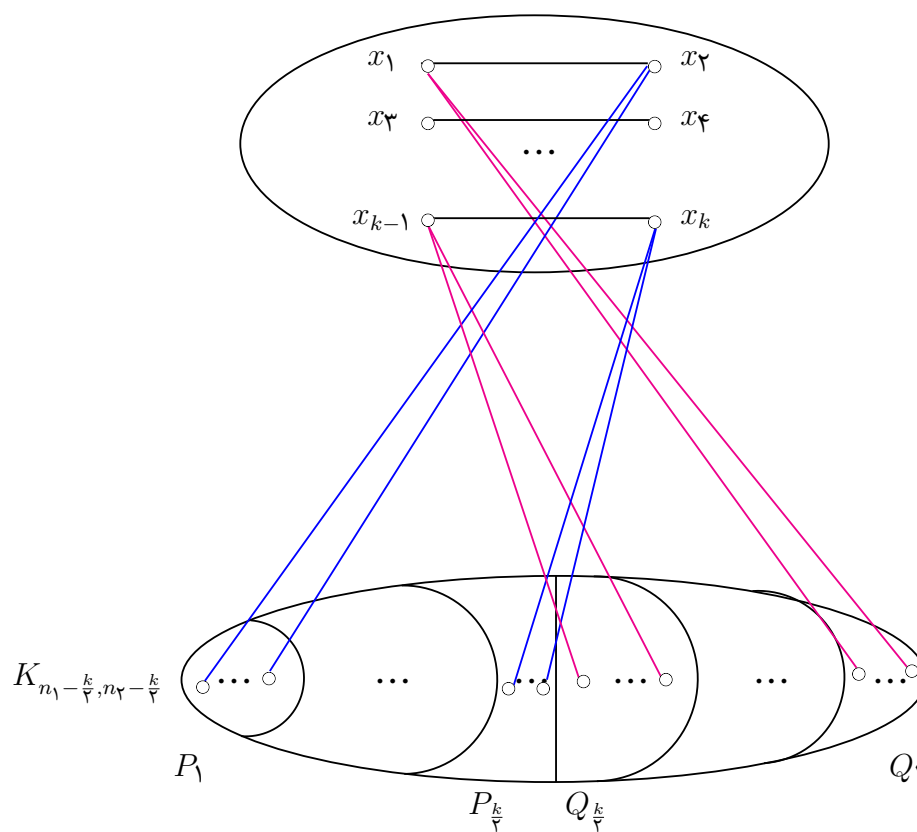
قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید G یک گراف دوبخشی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق از مرتبه‌ی n ، اندازه m و با بخش‌هایی از اندازه‌ی n_1 و n_2 باشد. در این صورت داریم:

$$m \leq (n_1 - \gamma_t/2)(n_2 - \gamma_t/2) + n - \gamma_t/2$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $G \in \Psi_k$ برای برخی از اعداد زوج k .

برهان. اثبات مشابه قضیه‌ی ۱.۱.۳ می‌باشد با این تفاوت که زیر گراف القایی توسط $V(G) \setminus S$ اندازه‌ی حداکثر $(n_1 - \gamma_t/2)(n_2 - \gamma_t/2)$ را دارد. $\square$

حال کرانی برای اندازه‌ی یک گراف احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق به دست می‌آوریم که قضیه‌ی ۵.۴.۱ را برای گراف‌های احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق بهبود می‌دهد.



شکل ۲.۳: گراف G متعلق به خانواده‌ی Ψ_k

برای این منظور ابتدا خانواده‌ی Φ_k از گراف‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

فرض کنید H یک گراف منظم از مرتبه‌ی حداقل k باشد و $P = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ یک افراز از رأس‌های H باشد که $|P_i| \leq \delta(H)$ ، $i = 1, 2, \dots, k$. در این صورت $G \in \Phi_k$ از گراف H با اضافه کردن رأس‌های $x_1, x_2, \dots, x_k$ و $k/2$ یال $x_{2i}x_{2i-1}$ و $1 \leq i \leq k/2$ و وصل کردن رأس x_i به هر رأس از P_i ، برای $i = 1, 2, \dots, k$ ، به دست می‌آید.

قضیه ۲.۲.۳. فرض کنید G یک گراف احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق از مرتبه‌ی n و اندازه‌ی m باشد. اگر $\delta \geq 2$ ، آنگاه

$$m \leq (n(\Delta + 1) - \Delta\gamma_t)/2$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر برای بعضی اعداد k داشته باشیم $G \in \Phi_k$.

برهان. فرض کنید G یک گراف احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق از مرتبه‌ی n و اندازه‌ی m با مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای S باشد. از قضیه ۳.۱.۲ داریم، $|S| = \gamma_t(G)$. با توجه

به قضیه‌ی ۲.۱.۲، $\gamma_t(G)$ زوج است و زیرگراف القایی توسط S ، $G[S]$ ، شامل دقیقاً $\gamma_t/2$ یال می‌باشد.

فرض کنید $||S, V(G) \setminus S||$ تعداد یال‌های بین S و $V(G) \setminus S$ را نشان بدهد. چون G یک گراف احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق است و S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق برای G می‌باشد هر رأس در $V(G) \setminus S$ با دقیقاً یک رأس در S مجاور شده است، بنابراین، دقیقاً به تعداد رأس‌های موجود در $V(G) \setminus S$ یال بین S و $V(G) \setminus S$ وجود دارد و این یعنی $||S, V(G) \setminus S|| = n - \gamma_t$.

از طرفی هر رأس در $V(G) \setminus S$ درجه‌ی حداکثر $\Delta - 1$ را در زیرگراف القا شده توسط $V(G) \setminus S$ دارد. بنابراین، زیرگراف القایی توسط $V(G) \setminus S$ حداکثر $((n - \gamma_t)(\Delta - 1))/2$ یال می‌تواند داشته باشد و نتیجه می‌گیریم

$$m = |E(G[S])| + ||S, V(G) \setminus S|| + |E(G[V(G) \setminus S])| \quad (3.3)$$

$$\leq \gamma_t/2 + n - \gamma_t + ((n - \gamma_t)(\Delta - 1))/2 = (n(\Delta + 1) - \Delta\gamma_t)/2 \quad (4.3)$$

حال تساوی را ثابت می‌کنیم. ابتدا فرض کنید برای بعضی اعداد k داشته باشیم $G \in \Phi_k$. در نظر بگیرید که G از یک گراف r -منظم مانند H به دست آمده باشد. اگر رأس از درجه‌ی $\Delta(G)$ در H بوده و متعلق به P_i نیز باشد، آنگاه در گراف G دقیقاً یک یال به هر رأس از P_i اضافه شده که آن را به x_i متصل می‌کند. بنابراین، با توجه به اینکه H یک گراف r -منظم می‌باشد نتیجه می‌گیریم $\Delta(G) = r + 1$. از طرفی اگر هم رأس از درجه‌ی $\Delta(G)$ در H واقع نشده باشد، آنگاه اندیسی مانند j وجود دارد که x_j از درجه‌ی $\Delta(G)$ باشد. در این حالت نیز با توجه به رابطه‌ی $\Delta(G) = r + 1$ داریم $1 \leq |P_i| \leq \delta(H)$.

مشابه اثبات قضیه‌ی ۱.۱.۳، مجموعه‌ی $S = \{x_{2i-1}, x_{2i} | 1 \leq i \leq k/2\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق برای G می‌باشد. در نتیجه G یک گراف احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق می‌باشد. از قضیه‌ی ۲.۱.۲ داریم $|S| = k = \gamma_t(G)$. حال زیرگراف القایی با S دقیقاً $k/2$ یال دارد و دقیقاً $n - k$ یال بین S و رأس‌های $G \setminus S$ وجود دارد. همچنین زیرگراف القایی با $V(G) \setminus S$ دارای اندازه‌ی $(n - k)(r)/2$ می‌باشد. بنابراین

$$\begin{aligned} |E(G)| &= (n - k)(r)/2 + n - k/2 \\ &= (n - \gamma_t)(r)/2 + n - \gamma_t/2 \\ &= (n(\Delta + 1) - \Delta\gamma_t)/2. \end{aligned}$$

بعکس، فرض کنید G یک گراف احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق از اندازه‌ی $m = (n(\Delta + 1) - \Delta\gamma_t)/2$ باشد. نشان می‌دهیم $G \in \Phi_k$.

فرض کنید $k = \gamma_t(G)$ و S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق برای G باشد. از قضیه‌ی ۲.۱.۲ داریم k زوج است و $G[S]$ شامل دقیقاً $\gamma_t(G)/2$ یال می‌باشد. فرض کنید $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ که برای $1 \leq i \leq k/2$ رأس x_{2i} مجاور با رأس x_{2i-1} باشد. بنابر قسمت اثبات شده در قبل، داریم نامساوی‌ها در رابطه‌های ۳.۳ و ۴.۳ تساوی می‌شوند. در نتیجه تساوی‌های زیر را داریم

$$|E(G[V(G) \setminus S])| = (n - k)(\Delta - 1)/2$$

$$|[S, V(G) \setminus S]| = n - k$$

$$|E(G[S])| = k/2.$$

چون $V(G) \setminus S$ دقیقاً $n - k = n - \gamma_t$ رأس دارد و تعداد یال‌های آن نیز برابر با $(n - k)(\Delta - 1)/2$ است، بنابراین زیرگراف القایی توسط $V(G) \setminus S$ یک گراف $\Delta - 1$ -منظم می‌باشد. برای $i = 1, 2, \dots, k$ قرار می‌دهیم $P_i = N(x_i) \cap (V(G) \setminus S)$. در این صورت $P_1, \dots, P_k$ تشکیل یک افراز برای $G[V(G) \setminus S]$ را می‌دهد و برای $i = 1, 2, \dots, k$ ، هر رأس از P_i با رأس x_i مجاور می‌باشد. در نتیجه $G \in \Phi_k$. $\square$

فصل ۴

بررسی پیچیدگی محاسباتی

۱.۴ مقدمه

در نظریه‌ی پیچیدگی محاسباتی، NP یکی از بنیادی‌ترین کلاس‌ها است. در واقع نظریه‌ی پیچیدگی محاسباتی NP شاخه‌ای از نظریه‌ی محاسبات و ریاضی و علوم کامپیوتر است که به بررسی دشواری حل مسائل به صورت الگوریتمی می‌پردازد. تعداد زیادی از مسئله‌های معمول علوم کامپیوتر در حوزه‌ی مسائل NP قرار دارند. نمونه‌هایی از زمینه‌هایی که شامل این مسائل می‌شوند عبارتند از: جبر بولی، نظریه گراف، طراحی شبکه، نظریه‌ی اعداد و NP - کامل پیچیده‌ترین کلاس در NP است به‌طوری که برای آن‌ها هیچ الگوریتم شناخته شده قابل اجرا در زمان چند جمله‌ای وجود ندارد. تمام مسائل NP - کامل به‌طور مؤثری قابل کاهش به یکدیگر می‌باشند. بنابراین، اگر یکی از آن‌ها با یک مرتبه‌ی زمانی چندجمله‌ای برحسب اندازه‌ی مسئله حل شود، تمامی آن‌ها با این مرتبه‌ی زمانی قابل حل خواهند بود [۱۲].

هنینگ و جعفری راد^۱ در [۱۵] پیچیدگی محاسباتی مجموعه‌های احاطه‌گر ۲- مرحله‌ای و احاطه‌گر جهشی در گراف‌ها را بررسی کردند و نشان دادند که مسئله‌های تصمیم برای مجموعه‌های احاطه‌گر ۲- مرحله‌ای و احاطه‌گر جهشی در گراف‌های دوبخشی مسطح و گراف‌های

¹Jafari rad

وتری سطح NP – کامل می‌باشند. در این بخش ما مجموعه‌های احاطه‌گر k – مرحله‌ای و مجموعه‌های احاطه‌گر k – جهشی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم برای هر $k \geq 2$ ، مسئله‌های تصمیم برای مجموعه‌های احاطه‌گر k – مرحله‌ای و احاطه‌گر k – جهشی در گراف‌های دوبخشی سطح و گراف‌های وتری سطح NP – کامل می‌باشند.

۲.۴ نتایج موجود

در این بخش مساله پیچیدگی مربوط به محاسبات مجموعه‌ی احاطه‌گر ۲ – مرحله‌ای و احاطه‌گر جهشی در یک گراف را بیان می‌کنیم.

مساله مجموعه‌ی احاطه‌گر ۲ – مرحله‌ای ($2SDP$)

نمونه: یک گراف ناتهی G و یک عدد مثبت k .

سوال: آیا G یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۲ – مرحله‌ای از اندازه حداکثر k دارد؟

مساله مجموعه‌ی احاطه‌گر جهشی (HDP)

نمونه: یک گراف ناتهی G و یک عدد مثبت k .

سوال: آیا G یک مجموعه‌ی احاطه‌گر جهشی از اندازه حداکثر k دارد؟

هنینگ و جعفری راد ثابت کردند که مسأله‌ی $2SDP$ برای گراف‌های دوبخشی سطح و گراف‌های وتری سطح NP – کامل می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۴. [۱۵] مسأله $2SDP$ برای گراف‌های دوبخشی سطح NP – کامل می‌باشد.

قضیه ۲.۲.۴. [۱۵] مسأله $2SDP$ برای گراف‌های وتری سطح NP – کامل می‌باشد.

آنها همچنین نشان دادند که مسأله‌ی HDP نیز برای این گراف‌ها NP – کامل می‌باشد.

قضیه ۳.۲.۴. [۱۵] مسأله HDP برای گراف‌های دوبخشی سطح NP – کامل می‌باشد.

قضیه ۴.۲.۴. [۱۵] مسأله HDP برای گراف‌های وتری سطح NP – کامل می‌باشد.

۳.۴ پیچیدگی محاسباتی

در این بخش ما مسأله‌های SDP و HDP بیان شده در قضیه‌های بخش قبل را به مسأله‌های $kSDP$ و $kHDP$ توسعه می‌دهیم و جزء به جزء مسأله‌های تصمیم متناظر با نمونه‌ی استاندارد آن را توضیح خواهیم داد. فرض کنید $k \geq 2$ یک عدد مثبت باشد. مسأله‌های تصمیم زیر را در نظر بگیرید:

مسأله مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای ($kSDP$)

نمونه: یک گراف ناتهی G و یک عدد مثبت t .

سوال: آیا G یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای از اندازه حداکثر t دارد؟

مسأله مجموعه‌ی احاطه‌گر k - جهشی ($kHDP$)

نمونه: یک گراف ناتهی G و یک عدد مثبت t .

سوال: آیا G یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - جهشی از اندازه حداکثر t دارد؟

ما از قضیه‌ی پوشش رأسی که توسط کارپ در [۱۸]^۲ مطرح شده است، استفاده می‌کنیم. قضیه‌ی پوشش رأسی به صورت زیر می‌باشد.

قضیه ۱.۳.۴. [۱۸] فرض کنید G یک گراف ناتهی بوده و k یک عدد مثبت باشد.

آیا G یک پوشش رأسی از اندازه حداکثر k دارد؟

ابتدا مسأله‌ی مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای را برای گراف‌های دوبخشی مسطح بررسی می‌کنیم.

قضیه ۲.۳.۴. $kSDP$ برای گراف‌های دوبخشی مسطح NP - کامل می‌باشد.

برهان. به وضوح، $kSDP$ در NP است. زیرا به راحتی برای نمونه‌ای از $kSDP$ در زمان چند جمله‌ای یک "yes" اثبات می‌شود. ما نشان می‌دهیم چه‌طور مسأله‌ی مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای را با قضیه‌ی ۱.۳.۴ که مسأله‌ی پوشش رأسی را بیان می‌کند ارتباط دهیم تا بتوانیم نتیجه بگیریم یکی از آنها حل می‌شود اگر و تنها اگر دیگری نیز حل شود.

^۲karp

فرض کنید G یک گراف مسطح همبند از مرتبه $n = n_G$ و اندازه $m = m_G \geq 2$ باشد. فرض کنید H گرافی باشد که از گراف G به صورت زیر به دست آمده باشد. برای هر یال e ، ما این یال را $2k-1$ بار تقسیم می‌کنیم و رأس‌های حاصل از تقسیم را با $x_1^e, x_2^e, \dots, x_{2k-1}^e$ نمایش می‌دهیم. همچنین مسیر $v_1^e \dots v_k^e$ را به گراف G اضافه کرده و رأس v_1^e را به رأس‌های u و v وصل می‌کنیم. گراف حاصل دارای مرتبه و اندازه‌ی زیر می‌باشد

$$n_H = n_G + (2k-1)m_G + 2km_G = n_G + (4k-1)m_G$$

$$m_H = (4k+1)m_G$$

مانند شکل ۱.۴.

به وضوح ارتباط در زمان چند جمله‌ای تشکیل می‌شود. توجه می‌کنیم از آنجا که G مسطح و همبند است گراف H نیز مسطح و همبند می‌باشد. بنابر ساختار گفته شده، H گرافی دوبخشی است. به این صورت که در گراف H یک بخش از گراف شامل تمام رأس‌های گراف G می‌شود و از رأس‌های مسیر به وجود آمده $x_1^e, x_2^e, \dots, x_{2k-1}^e$ نیز یکی در میان عضو این بخش می‌باشند. همچنین از رأس‌های مسیر اضافه شده $v_1^e \dots v_k^e$ نیز یکی در میان در این بخش قرار می‌گیرند.

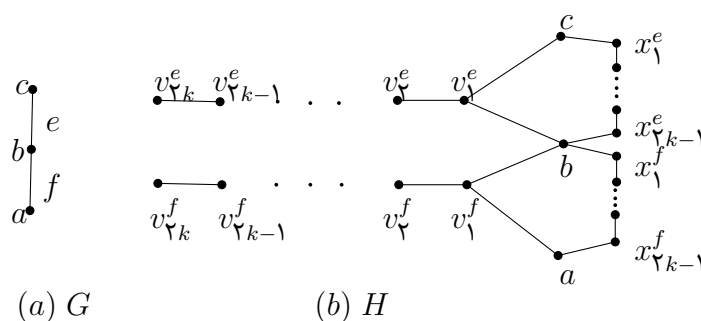
بخش دوم نیز شامل رأس‌هایی می‌شود که به دو سریال‌ها وصل می‌شوند و همچنین رأس‌هایی از مسیرهای به وجود آمده که در بخش اول قرار ندارند. در نتیجه H یک گراف دوبخشی مسطح همبند می‌باشد.

نشان می‌دهیم G یک پوشش رأسی از اندازه‌ی حداکثر t دارد اگر و تنها اگر H یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای از اندازه‌ی حداکثر $t + km_G$ داشته باشد. فرض کنید G یک پوشش رأسی S_G ، از اندازه‌ی حداکثر t داشته باشد. حال ما مجموعه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$S_H = S_G \cup_{e \in E(G)} \{v_1^e, v_2^e, \dots, v_k^e\}$$

چون $m_G \geq 2$ ، داریم $S_G \neq \emptyset$. برای هر یال $e = uv \in E(G)$ و $1 \leq i \leq k-1$ ، رأس v_i^e ، به صورت k -مرحله‌ای رأس‌های v_{k+i}^e و x_{k-i}^e را احاطه می‌کند. همچنین رأس v_k^e به صورت k -مرحله‌ای رأس‌های v_1^e و u را احاطه می‌کند. چون G همبند است و $m_G \geq 2$ ، برای هر دو رأس مجاور یال‌های e و f در G ، برای $1 \leq i \leq k-1$ ، رأس v_i^e به صورت k -مرحله‌ای توسط رأس v_{k-i}^f احاطه می‌شود. چون S_G یک پوشش رأسی برای G است، رأس‌های x_k^e و v_k^e به صورت k -مرحله‌ای توسط مجموعه‌ی S_G در H احاطه می‌شوند. بنابراین، مجموعه‌ی S_H یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای از اندازه‌ی حداکثر $t + km_G$ در H می‌باشد.

حال فرض کنید H دارای یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای به نام D_H از اندازه‌ی حداکثر $t + km_G$ باشد. فرض کنید $e = uv \in E(G)$. به منظور احاطه شدن k -مرحله‌ای رأس v_i^e برای $2k \leq i \leq k+1$ در H ، باید رأس‌های v_i^e ، $1 \leq i \leq k$ ، عضو مجموعه‌ی D_H باشند.



شکل ۱.۴: گراف‌های G و H در اثبات قضیه ۲.۳.۴

همچنین برای احاطه شدن k -مرحله‌ای رأس x_k^e در H باید رأس u یا v و یا هر دو رأس u و v عضو مجموعه‌ی D_H باشند. بنابراین، $D_G = D_H \cap V(G)$ یک پوشش رأسی از G می‌باشد. همچنین، چون به ازای $1 \leq i \leq k$ ، v_i^e ، برای هر $e = uv \in E(G)$ متعلق است به D_H ، داریم $|D_G| \leq |D_H| - km_G = t$. بنابراین، گراف G یک پوشش رأسی از اندازه‌ی حداکثر t دارد.

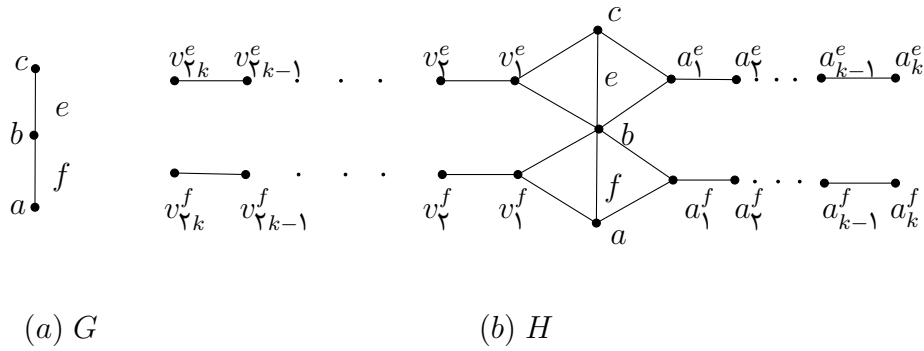
□

حال مسأله‌ی مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای را برای گراف‌های وتری مسطح بررسی می‌کنیم.

قضیه ۳.۳.۴. $kSDP$ برای گراف‌های وتری مسطح NP -کامل می‌باشد.

برهان. بر اساس قضیه ۲.۳.۴، $kSDP$ در NP قرار دارد. حال نشان می‌دهیم چه‌طور قضیه‌ی ۱.۳.۴ که مسأله‌ی پوشش رأسی را بیان می‌کند در ارتباط با $kSDP$ است به‌طوری که یکی از آنها حل می‌شود اگر و تنها اگر دیگری نیز حل شود.

فرض کنید G یک گراف وتری مسطح همبند از مرتبه‌ی n_G و اندازه‌ی $m_G \geq 2$ باشد. فرض کنید H گرافی باشد که از G به‌صورت زیر به‌دست آمده باشد. به ازای هر یال $e = uv \in E(G)$ یک مسیر $P_k : v_1^e v_2^e \dots v_k^e$ را به گراف G اضافه کرده و رأس v_1^e را به هر دو رأس u و v وصل می‌کنیم. همچنین یک مسیر $P_k : a_1^e a_2^e \dots a_k^e$ را اضافه کرده و رأس a_1^e را به هر دو رأس u و v وصل می‌کنیم. گراف حاصل دارای مرتبه‌ی $n_H = n_G + 3km_G$ و اندازه‌ی $m_H = (3k + 3)m_G$ می‌باشد، مانند شکل ۲.۴. ارتباط در زمان چند جمله‌ای حاصل می‌شود. توجه می‌کنیم چون G یک گراف وتری مسطح همبند است، H نیز می‌باشد. نشان می‌دهیم G یک پوشش رأسی از اندازه‌ی حداکثر t دارد اگر و تنها اگر H یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای از اندازه‌ی حداکثر $t + km_G$ داشته باشد.



شکل ۲.۴: گراف‌های G و H در اثبات قضیه ۳.۳.۴

فرض کنید G یک پوشش رأسی از اندازه‌ی حداکثر t به نام S_G داشته باشد. حال مجموعه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$S_H = S_G \cup_{e \in E(G)} \{v_1^e, v_2^e, \dots, v_k^e\}$$

چون $m_G \geq 2$ ، داریم $S_G \neq \emptyset$. برای هر یال $e = uv \in E(G)$ و $1 \leq i \leq k-1$ ، رأس v_i^e به صورت k -مرحله‌ای رأس‌های v_{k+i}^e را احاطه می‌کند. همچنین رأس v_k^e به صورت k -مرحله‌ای رأس‌های $v_1^e, v_2^e, \dots, v_{k-1}^e$ را احاطه می‌کند.

چون G همبند است و $m_G \geq 2$ ، برای هر دو یال مجاور e و f در G ، به ازای $1 \leq i \leq k-1$ ، رأس v_i^e به صورت k -مرحله‌ای توسط رأس v_{k-i}^f احاطه می‌شود. چون S_G یک پوشش رأسی در G می‌باشد، رأس‌های v_k^e و a_k^e به صورت k -مرحله‌ای توسط S_G در H احاطه می‌شوند. بنابراین، S_H یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای از اندازه‌ی حداکثر $t + km_G$ در H می‌باشد.

حال فرض کنید H دارای یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k -مرحله‌ای به نام D_H از اندازه‌ی حداکثر $t + km_G$ باشد. فرض کنید $e = uv \in E(G)$. برای احاطه شدن k -مرحله‌ای رأس‌های v_i^e ، به ازای $k+1 \leq i \leq 2k$ در H ، رأس‌های v_i^e ، به ازای $1 \leq i \leq k$ ، متعلق به مجموعه‌ی D_H می‌باشند. همچنین برای احاطه شدن k -مرحله‌ای رأس‌های a_k^e در H ، رأس u یا هر دو رأس u و v متعلق به مجموعه‌ی D_H می‌باشند. بنابراین، $D_G = D_H \cap V(G)$ یک پوشش رأسی برای G است. چون به ازای $1 \leq i \leq k$ و برای هر یال $e = uv \in E(G)$ رأس v_i^e متعلق به D_H می‌باشد، در نتیجه $|D_G| \leq |D_H| - km_G = t$. بنابراین، گراف G یک پوشش رأسی از اندازه‌ی حداکثر t دارد.

□

در ادامه مسأله‌ی مجموعه‌ی احاطه‌گر k -جهشی را برای گراف‌های دوبخشی مطرح بررسی می‌کنیم.

قضیه ۴.۳.۴. $kHDP$ برای گراف‌های دوبخشی مسطح NP - کامل می‌باشد.

برهان. فرض کنید G یک گراف از مرتبه‌ی n_G و اندازه‌ی m_G و H گراف دوبخشی مسطح همبند ساخته شده در اثبات قضیه‌ی ۲.۳.۴ باشد. نشان می‌دهیم G یک پوشش رأسی از اندازه‌ی حداکثر t دارد اگر و تنها اگر H یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - جهشی از اندازه‌ی حداکثر $t + km_G$ داشته باشد. اگر G یک پوشش رأسی S_G از اندازه‌ی حداکثر t داشته باشد، آنگاه بلافاصله نتیجه حاصل می‌شود زیرا مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای S_H ساخته شده در اثبات قضیه‌ی ۲.۳.۴ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - جهشی در H از اندازه‌ی $|S_H| \leq t + km_G$ نیز می‌باشد.

حال فرض کنید H یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - جهشی D_H از اندازه‌ی حداکثر $t + km_G$ داشته باشد. اگر برای برخی یال‌های $e \in E(G)$ داشته باشیم $|D_H \cap \{v_1^e, v_2^e, \dots, v_k^e\}| \leq k - 1$ ، آنگاه حداقل یک رأس از $\{v_{k+1}^e, v_{k+2}^e, \dots, v_k^e\}$ به صورت k - جهشی توسط D_H احاطه نمی‌شود که این یک تناقض است. بنابراین، برای هر یال $e \in E(G)$ داریم $|D_H \cap \{v_1^e, v_2^e, \dots, v_k^e\}| \geq k$. حال فرض کنید $e = uv$ یالی دلخواه از G باشد. اگر $x_k^e \notin D_H$ ، آنگاه برای احاطه‌ی k - جهشی رأس x_k^e در H باید رأس u یا v و یا هر دو رأس u و v متعلق به مجموعه‌ی D_H باشند. حال مجموعه‌ی D_G به دست آمده از $D_H \cap V(G)$ به صورت زیر را در نظر می‌گیریم. برای هر رأس x_k^e شریک با یال $e \in E(G)$ ، اگر $x_k^e \in D_H$ ، آنگاه u یا v را به مجموعه‌ی D_G اضافه می‌کنیم. مجموعه‌ی حاصل یک پوشش رأسی برای G از اندازه‌ی $|D_H| - km_G \leq t$ می‌باشد. بنابراین، G یک پوشش رأسی از اندازه‌ی حداکثر t دارد.

□

در قضیه‌ی بعد مسأله‌ی مجموعه‌ی احاطه‌گر k - جهشی را برای گراف‌های وتری مسطح بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۵.۳.۴. $kHDP$ برای گراف‌های وتری مسطح NP - کامل می‌باشد.

برهان. فرض کنید G یک گراف از مرتبه‌ی n و اندازه‌ی m باشد، و H گراف وتری مسطح همبند بیان شده در اثبات قضیه‌ی ۳.۳.۴ باشد. نشان می‌دهیم G یک پوشش رأسی از اندازه‌ی حداکثر t دارد اگر و تنها اگر H یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - جهشی از اندازه‌ی حداکثر $t + km_G$ داشته باشد. اگر G یک پوشش رأسی S_G از اندازه‌ی حداکثر t داشته باشد، آنگاه نتیجه بی‌درنگ برقرار است زیرا مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای S_H ساخته شده در اثبات قضیه‌ی ۳.۳.۴ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - جهشی در H از اندازه‌ی $|S_H| \leq t + km_G$ می‌باشد. در ادامه فرض کنید که H یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - جهشی D_H از اندازه‌ی حداکثر $t + km_G$

داشته باشد. اگر برای برخی یال‌های $e \in E(G)$ داشته باشیم $|D_H \cap \{v_1^e, v_2^e, \dots, v_k^e\}| \leq k-1$ ، آنگاه حداقل یک رأس در $\{v_{k+1}^e, v_{k+2}^e, \dots, v_k^e\}$ به صورت k -جهشی توسط D_H احاطه نمی‌شود، که یک تناقض است. بنابراین، برای هر یال $e \in E(G)$ داریم $|D_H \cap \{v_1^e, v_2^e, \dots, v_k^e\}| \geq k$. فرض کنید $e = uv$ یک یال دلخواه از G باشد. اگر $a_k^e \notin D_H$ ، آنگاه برای k -احاطه‌ی k -جهشی رأس a_k^e در H باید u یا v و یا هر دو رأس u و v متعلق به D_H باشند. حال فرض می‌کنیم مجموعه‌ی D_G از $D_H \cap V(G)$ به صورت زیر به دست آمده باشد. برای هر رأس a_k^e متصل به یک یال $e \in E(G)$ ، اگر $a_k^e \in D_H$ ، آنگاه رأس u یا v را به مجموعه‌ی D_G اضافه می‌کنیم. مجموعه‌ی حاصل D_G یک پوشش رأسی برای G از اندازه‌ی حداکثر $|D_H| - km_G \leq t$ می‌باشد. بنابراین G یک پوشش رأسی از اندازه‌ی حداکثر t دارد. $\square$

فصل ۵

گراف‌های فازی

۱.۵ مقدمه

نظریه‌ی مجموعه‌های فازی در حوزه‌های مختلف علم و تکنوژی پدیدار شده است. ریاضیات نظری نیز از تئوری مجموعه‌های فازی متأثر شده است. اهداف تئوری مجموعه‌های فازی در توپولوژی، جبر مجرد، هندسه، نظریه‌ی گراف و آنالیز مطرح شده است.

نظریه‌ی گراف فازی توسط رزنفیلد^۱ مورد بررسی قرار گرفت که نظیر فازی چند مفهوم نظری گراف مانند مسیرها، دورها، درخت‌ها و همبندی بیان شد [۲۷]. همچنین مردسون^۲ و همکارش مفاهیم و قضیه‌هایی از گراف‌های فازی و هایپر گراف‌های فازی را در [۲۲] ارائه کرده‌اند و نیج‌رگنی^۳ و چندرسکاران^۴ مجموعه‌ی احاطه‌گر و عدد احاطه‌گری در گراف‌های فازی را بررسی کردند [۲۴].

در این فصل از رساله ما مفهوم احاطه‌گری در گراف‌های فازی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در ابتدای فصل کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری بالایی در گراف‌های فازی به‌دست می‌آوریم.

¹Rosenfeld

²Mordeson

³Nagoor Gani

⁴Chandrasekaran

سپس کرانی برای اندازه‌ی گراف‌های فازی ۱- مرحله‌ای دقیق و گراف‌های فازی دوبخشی ۱- مرحله‌ای دقیق ارائه می‌دهیم.

در ادامه قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی در گراف‌های فازی را با توجه به درجه‌ی عضویت رأس‌ها و یال‌ها در گراف فازی می‌یابیم. سپس کران‌هایی برای قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی در گراف‌های فازی یافته و در ادامه این قدرت را برای خانواده‌هایی از گراف‌ها مانند گراف‌های فازی کامل و گراف‌های فازی دوبخشی کامل می‌یابیم. همچنین قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی k -مرحله‌ای در گراف‌های فازی را بیان کرده و چندین کران برای قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی ۱- مرحله‌ای دقیق در گراف‌های فازی به دست می‌آوریم.

۲.۵ عدد احاطه‌گری بالایی در گراف فازی

در حالت کلاسیک همه‌ی رأس‌های گراف دارای درجه‌ی عضویت یکسان و برابر با یک در مجموعه‌ی رأس‌های گراف می‌باشند. در صورتی که در حالت فازی هر رأس درجه‌ای بین صفر و یک را به خود اختصاص می‌دهد. بنابراین، دو مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم که در حالت کلاسیک دارای اندازه‌ی یکسان هستند، ممکن است در حالت فازی دارای اندازه‌های فازی متفاوتی باشند.

در این بخش کران‌هایی برای عدد احاطه‌گری بالایی، که بیانگر ماکزیمم اندازه‌ی فازی در بین همه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر فازی مینیمال می‌باشد، ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۵. برای هر گراف فازی بدون رأس تنهای $G = (\sigma, \mu)$ داریم

$$\gamma_s(G) \leq n.h(\sigma)/2.$$

برهان. فرض کنید W مجموعه‌ی همه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر فازی مینیمم از گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ باشد و S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمال از G باشد.

بنابر قضیه‌ی ۸.۴.۱ گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ دارای دو مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی متمایز S و $V \setminus S$ می‌باشد. بنابراین، از قضیه‌های ۱.۴.۱ و ۸.۴.۱ و برای هر عضوی مانند $D_i \in W$ داریم

$$|D_i| \leq \{|S|, |V \setminus S|\} \leq n/2.$$

همه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر فازی مینیمال واقع در W دارای اندازه‌های یکسانی هستند ولی لزوماً اندازه‌ی فازی یکسان ندارند.

از طرفی می‌دانیم $h(\sigma)$ درجه‌ی عضویت رأس با بیشترین درجه‌ی عضویت در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ را نشان می‌دهد. بنابراین،

$$\begin{aligned}\gamma_s(G) &= \max_{D_i \in W} \{|D_i|_f\} \leq \sum_{|D_i|} h(\sigma) \\ &= |D_i| \cdot h(\sigma) \leq n \cdot h(\sigma) / 2\end{aligned}$$

و قضیه ثابت می‌شود.

□

از قضیه‌ی ۱.۲.۵ کران بالای زیر را برای مجموع عدد احاطه‌گری بالایی گراف‌های G و $\bar{G}$ داریم.

نتیجه ۱.۲.۵. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ گراف فازی باشد به طوری که $G = (\sigma, \mu)$ و $\bar{G} = (\sigma, \bar{\mu})$ بدون رأس تنها باشند. در این صورت رابطه‌ی زیر برقرار می‌باشد:

$$\gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G}) \leq n \cdot h(\sigma).$$

در قضیه‌ی زیر کران بالا و پایین جدیدی را برای مجموع عدد احاطه‌گری بالایی گراف‌های فازی $G = (\sigma, \mu)$ و $\bar{G} = (\sigma, \bar{\mu})$ می‌یابیم.

قضیه ۲.۲.۵. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی و $\bar{G} = (\sigma, \bar{\mu})$ مکمل آن باشد. در این صورت داریم

$$3d(\sigma) \leq \gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G}) \leq (n+1)h(\sigma).$$

برهان. ابتدا کران پایین را ثابت می‌کنیم. اگر یک رأس مانند $(x, \mu(x))$ در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ وجود داشته باشد که این گراف را احاطه کند، آنگاه $\gamma_s(G) = \sigma(x) \geq d(\sigma)$. در این صورت رأس $(x, \mu(x))$ در گراف فازی $\bar{G} = (\sigma, \bar{\mu})$ یک رأس تنها خواهد بود و در نتیجه $\gamma_s(\bar{G}) \geq 2d(\sigma)$. همچنین اگر یک رأس مانند $(y, \mu(y))$ در گراف فازی $\bar{G} = (\sigma, \bar{\mu})$ وجود داشته باشد که این گراف را احاطه کند، آنگاه $\gamma_s(\bar{G}) = \sigma(x) \geq d(\sigma)$. در این صورت رأس $(y, \mu(y))$ در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ یک رأس تنها خواهد بود و در نتیجه $\gamma_s(G) \geq 2d(\sigma)$. بنابراین، اگر گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ یا $\bar{G} = (\sigma, \bar{\mu})$ دارای رأس تنها باشد، آنگاه

$$3d(\sigma) \leq \gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G})$$

و کران پایین برقرار می‌باشد.

در ادامه فرض می‌کنیم گراف‌های $G = (\sigma, \mu)$ و $\bar{G} = (\sigma, \bar{\mu})$ هیچ کدام رأس تنها نداشته باشند. در این حالت نیز چون هر دو گراف به حداقل دو رأس برای احاطه کردن گراف نیاز دارند داریم $\gamma_s(G) \geq 2d(\sigma)$ ، $\gamma_s(\bar{G}) \geq 2d(\sigma)$. در نتیجه $3d(\sigma) \leq \gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G})$ که کران پایین اثبات

می‌شود.

حال کران بالا را ثابت می‌کنیم. اگر گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ رأس تنها داشته باشد، آنگاه $\gamma_s(G) \leq n.h(\sigma)$ و $\gamma_s(\bar{G}) \leq h(\sigma)$. بنابراین، در این حالت داریم

$$\gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G}) \leq (n+1)h(\sigma)$$

و کران بالا صدق می‌کند. همچنین اگر گراف فازی $\bar{G} = (\sigma, \bar{\mu})$ رأس تنها داشته باشد، آنگاه $\gamma_s(\bar{G}) \leq n.h(\sigma)$ و $\gamma_s(G) \leq h(\sigma)$. بنابراین، در این حالت نیز کران بالا برقرار می‌باشد.

پس فرض می‌کنیم گراف‌های فازی $G = (\sigma, \mu)$ و $\bar{G} = (\sigma, \bar{\mu})$ هیچ کدام رأس تنها نداشته باشد. در این صورت بنا بر قضیه ۱.۲.۵ رابطه‌های $\gamma_s(G) \leq n.h(\sigma)/2$ و $\gamma_s(\bar{G}) \leq n.h(\sigma)/2$ برقرار می‌باشند.

بنابراین، در این حالت داریم

$$\begin{aligned} \gamma_s(G) + \gamma_s(\bar{G}) &\leq n.h(\sigma)/2 + n.h(\sigma)/2 \\ &< (n+1)h(\sigma) \end{aligned}$$

و در نتیجه قضیه ثابت می‌شود.

□

در زیر ارتباط بین چند پارامتر را در گراف‌های فازی بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۲.۵. برای هر گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ داریم

$$\gamma_f(G) \leq \gamma_s(G) \quad (\text{الف})$$

$$i_f(G) \leq i_s(G) \quad (\text{ب})$$

$$ir_f(G) \leq ir_s(G) \quad (\text{ج})$$

برهان. از آنجایی که ماکزیمم اندازه‌ی فازی در بین مجموعه‌های مینیمال یا ماکزیمال بیشتر از مینیمم اندازه‌ی فازی در بین مجموعه‌های مینیمال یا ماکزیمال می‌باشد، قضیه به راحتی اثبات می‌شود.

□

حال در قضیه‌ی زیر ارتباط بین پارامترهای $\gamma_s(G)$ ، $i_s(G)$ و $ir_s(G)$ را در گراف‌های فازی که فاقد رأس تنها باشند بررسی می‌کنیم.

قضیه ۴.۲.۵. برای هر گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ بدون رأس تنها داریم

$$i_s(G) \leq \gamma_s(G) \leq ir_s(G).$$

برهان. فرض کنید $G(\sigma, \mu)$ یک گراف فازی بدون رأس تنها باشد و S مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمال در گراف فازی $G(\sigma, \mu)$ باشد. چون G بدون رأس تنهاست حالت دوم قضیه‌ی ۷.۴.۱ اتفاق می‌افتد. بنابراین، برای هر رأس $v \in S$ یک رأس $u \in V \setminus S$ وجود دارد که $N(u) \cap S = \{v\}$. بنابراین، u همسایه‌ی خصوصی رأس v در S می‌باشد. باتوجه به این مطلب و بنابر قضیه‌ی ۱۱.۴.۱، S یک مجموعه‌ی غیر زائد فازی برای G می‌باشد. بنابر قضیه‌ی ۱۲.۴.۱، هر مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمال در G یک مجموعه‌ی غیر زائد فازی ماکزیمال برای G نیز می‌باشد. در نتیجه داریم

$$\gamma_s(G) \leq ir_s(G).$$

حال فرض کنید S مجموعه‌ی مستقل فازی ماکزیمال برای G باشد. بنابر قضیه‌ی ۹.۴.۱، S مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی برای G نیز خواهد بود. از قضیه‌ی ۱۰.۴.۱، S مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمال برای G می‌باشد. چون $\gamma_s(G)$ بیشترین اندازه‌ی فازی در بین همه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر فازی مینیمال در G را نشان می‌دهد، داریم

$$i_s(G) \leq \gamma_s(G).$$

□

در نتیجه قضیه ثابت می‌شود.

از قضیه‌های ۱۳.۴.۱، ۳.۲.۵ و ۴.۲.۵ نتیجه‌ی زیر به‌دست می‌آید.

نتیجه ۲.۲.۵. برای هر گراف فازی بدون رأس تنه‌ای $G = (\sigma, \mu)$ داریم

$$\begin{aligned} ir_f(G) &\leq \gamma_f(G) \leq i_f(G) \leq i_s(G) \\ &\leq \gamma_s(G) \leq ir_s(G). \end{aligned}$$

۳.۵ ارائه‌ی کران بالا برای اندازه‌ی گراف‌های فازی

در این بخش ما کرانی برای اندازه‌ی گراف‌های فازی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق و گراف‌های فازی دوبخشی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۳.۵. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق با n رأس باشد. اگر $G = (\sigma, \mu)$ دارای اندازه‌ی فازی q باشد، آنگاه

$$q \leq \binom{n-\gamma_t(G)}{2} \cdot \mu(e_s) + (n - \gamma_t(G)) \cdot \mu(e_s) + \gamma_t(G) \cdot \sigma(v_s) / 2.$$

برهان. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق با n رأس و اندازه‌ی فازی q باشد. مجموعه‌ی S را به عنوان مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق فازی برای G در نظر می‌گیریم. بنابر قضیه‌ی ۳.۱.۲ داریم $|S| = \gamma_t(G)$. همچنین از قضیه‌ی ۲.۱.۲ داریم

$\gamma_t(G)$ زوج بوده و زیرگراف القایی توسط S یعنی $G[S]$ دقیقاً $\gamma_t/2$ یال دارد. از طرفی می‌دانیم $\sigma(v_s)$ درجه‌ی عضویت رأس با بیشترین درجه عضویت را نشان می‌دهد. بنابراین،

$$|E(G[S])|_f \leq (\gamma_t/2) \cdot \sigma(v_s).$$

حال $||[S, V(G) \setminus S]|_f$ را به عنوان مجموع درجه‌ی عضویت یال‌های بین S و $V(G) \setminus S$ در نظر می‌گیریم. چون S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق فازی برای G می‌باشد، پس دقیقاً $n - \gamma_t$ یال بین S و $V(G) \setminus S$ وجود دارد و داریم

$$|[S, V(G) \setminus S]| = n - \gamma_t.$$

می‌دانیم e_s ماکزیمم درجه‌ی عضویت بین یال‌های گراف G را نشان می‌دهد. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} |[S, V(G) \setminus S]|_f &\leq (|[S, V(G) \setminus S]|) \cdot \mu(e_s) \\ &= (n - \gamma_t) \cdot \mu(e_s) \end{aligned}$$

و از آنجایی که زیرگراف القایی توسط $V(G) - S$ حداکثر $\binom{n - \gamma_t}{2}$ یال دارد، داریم

$$\begin{aligned} q &= \sum_{xy \in E} \mu(x, y) = |E(G[S])|_f + |[S, V(G) \setminus S]|_f + |E(G[V(G) \setminus S])|_f \\ &\leq (\gamma_t/2) \cdot \sigma(v_s) + (n - \gamma_t) \cdot \mu(e_s) + \binom{n - \gamma_t}{2} \cdot \mu(e_s). \end{aligned}$$

□

در ادامه کرانی را برای اندازه‌ی گراف‌های فازی دوبخشی ۱-مرحله‌ای دقیق ارائه می‌دهیم.

قضیه ۲.۳.۵. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی دوبخشی احاطه‌گر ۱-مرحله‌ای دقیق با n رأس باشد به‌طوری‌که بخش‌های آن دارای n_1 و n_2 رأس باشند. اگر G دارای اندازه‌ی فازی q باشد، آنگاه

$$q \leq ((n_1 - \gamma_t/2) \cdot (n_2 - \gamma_t/2) \cdot \mu(e_s) + (n - \gamma_t) \cdot \mu(e_s) + \gamma_t(G) \cdot \sigma(v_s))/2.$$

برهان. اثبات مشابه اثبات قضیه ۱.۳.۵ می‌باشد با این تفاوت که زیرگراف القایی توسط $V(G) \setminus S$ حداکثر $(n_1 - \gamma_t/2)(n_2 - \gamma_t/2)$ یال دارد. □

۴.۵ قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی

باتوجه به اینکه هر رأس در گراف فازی درجه‌ای از عضویت را دارد، دو مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم در گراف فازی ممکن است اندازه‌ی فازی متفاوتی داشته باشند. مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی S از گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ را در نظر بگیرید. یک رأس از گراف G ممکن است توسط چند رأس از S با درجه‌های عضویت متفاوت احاطه شود.

در این فصل ما بهترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی را برای گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ با توجه به درجه‌ی عضویت رأس‌ها و یال‌ها می‌یابیم.

برای مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی S از گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ و رأس $v \in G \setminus S$ ، قدرت تسلط^۵ بر رأس v را به صورت $\max\{\mu(u, v) | u \in S, v \in G \setminus S\}$ تعریف می‌کنیم و با $sdom(v, S)$ نمایش می‌دهیم. همچنین $\min\{sdom(v, S) | v \in G \setminus S\}$ را به عنوان قدرت احاطه‌گری^۶ مجموعه‌ی S تعریف کرده و با $sdom(G \setminus S, S)$ نمایش می‌دهیم.

مجموعه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر فازی مینیمم در گراف $G = (\sigma, \mu)$ که دارای قدرت احاطه‌گری ماکزیمم می‌باشند را با $S_s(G)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی با ماکزیمم اندازه‌ی فازی در میان مجموعه‌های احاطه‌گر فازی مینیمم در $S_s(G)$ را قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی^۷ گراف $G = (\sigma, \mu)$ نامیده و اندازه‌ی فازی آن را قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی^۸ گراف $G = (\sigma, \mu)$ می‌نامیم و با $ssd(G)$ نمایش می‌دهیم. جهت درک بهتر این مفاهیم مثال زیر را ارائه می‌کنیم.

مثال ۱.۴.۵. گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ در شکل ۱.۵ را در نظر بگیرید. مجموعه‌های $S_1 = \{a_1, a_6\}$ ، $S_2 = \{a_1, a_5\}$ ، $S_3 = \{a_2, a_6\}$ و $S_4 = \{a_2, a_5\}$ مجموعه‌های احاطه‌گر فازی مینیمم می‌باشند. حال ما $sdom(G \setminus S_i, S_i)$ را برای $i = 1, 2, 3, 4$ محاسبه می‌کنیم. برای S_1 داریم

$$sdom(a_2, S_1) = 0/2, sdom(a_3, S_1) = 0/2, sdom(a_4, S_1) = 0/5, sdom(a_5, S_1) = 0/4, sdom(a_6, S_1) = 0/3$$

بنابراین، $sdom(G \setminus S_1, S_1) = 0/2$ برای S_1 داریم

$$sdom(a_2, S_2) = 0/2, sdom(a_3, S_2) = 0/2, sdom(a_4, S_2) = 0/2, sdom(a_5, S_2) = 0/4, sdom(a_6, S_2) = 0/1$$

بنابراین، $sdom(G \setminus S_2, S_2) = 0/1$ برای S_2 داریم

$$sdom(a_1, S_3) = 0/2, sdom(a_3, S_3) = 0/2, sdom(a_4, S_3) = 0/5, sdom(a_5, S_3) = 0/4, sdom(a_6, S_3) = 0/3$$

بنابراین، $sdom(G \setminus S_3, S_3) = 0/2$ درنهایت برای S_4 داریم

$$sdom(a_1, S_4) = 0/2, sdom(a_3, S_4) = 0/2, sdom(a_4, S_4) = 0/2, sdom(a_5, S_4) = 0/4, sdom(a_6, S_4) = 0/1$$

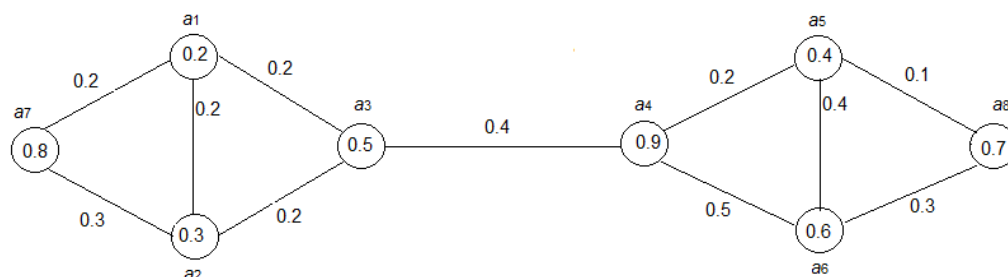
بنابراین، $sdom(G \setminus S_1, S_1) = 0/1$ پس $S_s = \{S_1, S_3\}$ و $|S_3|_f = 0/2 + 0/6 = 0/8$ ، $|S_1|_f = 0/3 + 0/6 = 0/9$ بنابراین، S_1 قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمم برای گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ می‌باشد و $ssd(G) = 0/9$.

⁵strength of dominance

⁶dominate strength

⁷strongest fuzzy dominating set

⁸strength of strongest fuzzy dominating set



شکل ۱.۵: گراف $G = (\sigma, \mu)$ با $ssd(G) = 9/10$

در ادامه کرانی برای قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی گراف $G = (\sigma, \mu)$ ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱.۴.۵. برای هر گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ از مرتبه‌ی p داریم $ssd(G) \leq p$ و تساوی اتفاق می‌افتد اگر و تنها اگر هر رأس از G یک رأس تنها باشد.

برهان. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی و S قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی از $G = (\sigma, \mu)$ باشد. چون $ssd(G)$ اندازه‌ی فازی S بوده و $S \subseteq V(G)$ می‌باشد، داریم

$$|S|_f \leq |V(G)|_f = \sum_{x \in V} \sigma(x) = p.$$

حال قسمت تساوی را اثبات می‌کنیم. فرض کنید همه‌ی رأس‌های گراف $G = (\sigma, \mu)$ رأس‌های تنها باشند. آنگاه $V(G)$ تنها مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی از G می‌باشد. بنابراین، $S = V(G)$ قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی از G بوده و داریم

$$ssd(G) = |S|_f = \sum_{x \in S} \sigma(x) = \sum_{x \in V} \sigma(x) = p.$$

بعکس، فرض کنید $ssd(G) = p$. اگر x رأسی از G باشد که تنها نبوده و رأس y مجاور با x باشد آنگاه رأس x توسط رأس y احاطه می‌شود و در نتیجه $V(G) \setminus \{x\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی برای G بوده و $ssd(G) < p$ می‌باشد که یک تناقض است. بنابراین، هر رأس از G یک رأس تنها می‌باشد. $\square$

در ادامه ثابت می‌کنیم $\gamma_f(G)$ کرانی پایین برای $ssd(G)$ در گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ می‌باشد.

قضیه ۲.۴.۵. در هر گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ داریم

$$\gamma_f(G) \leq ssd(G).$$

برهان. فرض کنید S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمال برای $G = (\sigma, \mu)$ باشد به‌طوری‌که $|S|_f = \gamma_f(G)$. بنابراین، S مینیمم اندازه‌ی فازی را بین همه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر فازی

مینیمال $G = (\sigma, \mu)$ دارد. فرض کنید S' مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمم از $S_s(G)$ با ماکزیمم اندازه‌ی فازی باشد، پس $|S'|_f = ssd(G)$. بنابراین،

$$\begin{aligned}\gamma_f(G) &= |S|_f \leq \min\{|w|_f | w \in S_s\} \\ &\leq \max\{|w|_f | w \in S_s\} \\ &= |S'|_f = ssd(G).\end{aligned}$$

□

در قضیه‌ی زیر کران‌هایی برای $ssd(G)$ برحسب عدد احاطه‌گری گراف زمینه‌ی گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ ارائه می‌کنیم.

قضیه ۳.۴.۵. برای هر گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ داریم

$$\gamma(G^*). \sigma(v_w) \leq ssd(G) \leq \gamma(G^*). \sigma(v_s).$$

برهان. فرض کنید S مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمم از گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ باشد که $|S|_f = ssd(G)$. واضح است که در گراف زمینه‌ی $G = (\sigma, \mu)$ داریم $|S| = \gamma(G^*)$. چون v_s بیشترین درجه‌ی عضویت در $G = (\sigma, \mu)$ را دارد، رابطه‌ی زیر را داریم

$$ssd(G) = |S|_f \leq |S|. \sigma(v_s) = \gamma(G^*). \sigma(v_s).$$

به‌طور مشابه چون v_w کمترین درجه‌ی عضویت در $G = (\sigma, \mu)$ را دارد، داریم

$$\gamma(G^*). \sigma(v_w) = |S|. \sigma(v_w) \leq |S|_f = ssd(G).$$

بنابراین،

$$\gamma(G^*). \sigma(v_w) \leq ssd(G) \leq \gamma(G^*). \sigma(v_s).$$

□

در این قسمت ما قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر را برای گراف‌های فازی کامل و گراف‌های فازی دوبخشی کامل به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۴.۴.۵. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی کامل K_σ باشد. در این صورت داریم

$$ssd(K_\sigma) = \max\{\sigma(v) | v \in S\}$$

که S مجموعه‌ی رأس‌هایی از K_σ با بیشترین عمق می‌باشد.

برهان. فرض کنید K_σ یک گراف فازی کامل باشد. برای هر مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمم $D = \{v\}$ از K_σ و هر رأس $u \in V \setminus D$ داریم $sdom(u, D) = \mu(u, v)$ و قدرت مجموعه‌ی $D = \{v\}$ برابر است با

$$\begin{aligned} sdom(K_\sigma \setminus D, D) &= sdom(K_\sigma \setminus \{v\}, v) \\ &= \min\{\mu(u, v) | u \in K_\sigma \setminus \{v\}\} \\ &= d(v). \end{aligned}$$

بنابراین، مجموعه‌ی S_s شامل رأس‌هایی از K_σ می‌باشد که دارای بیشترین عمق در بین رأس‌های گراف K_σ می‌باشند. در نتیجه قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی در گراف فازی کامل K_σ برابر است با

$$\begin{aligned} ssd(K_\sigma) &= \max\{|v|_f | v \in S_s\} \\ &= \max\{\sigma(v) | v \in S_s\}. \end{aligned}$$

□

قضیه ۵.۴.۵. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازی دوبخشی کامل K_{σ_1, σ_2} باشد. در این صورت داریم

$$ssd(K_{\sigma_1, \sigma_2}) = \max\{\sigma_1(v) + \sigma_2(w) | \{v, w\} \in S\}$$

که S مجموعه‌ی زوج رأس‌های $\{v, w\}$ از K_{σ_1, σ_2} می‌باشد به‌طوری‌که $v \in \sigma_1$ ، $w \in \sigma_2$ و $d(v) \wedge d(w)$ در بین همه‌ی این زوج رأس‌ها بیشترین مقدار می‌باشد.

برهان. فرض کنید K_{σ_1, σ_2} یک گراف فازی دوبخشی کامل باشد و $D = \{v, w\}$ زیر مجموعه‌ای از $V(K_{\sigma_1, \sigma_2})$ باشد که $v \in \sigma_1$ و $w \in \sigma_2$. به وضوح D یک مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی مینیمم برای K_{σ_1, σ_2} می‌باشد. برای هر رأس $u \in V \setminus D$ اگر $u \in \sigma_1$ ، آنگاه $sdom(u, D) = \mu(u, w)$ و اگر $u \in \sigma_2$ ، آنگاه $sdom(u, D) = \mu(u, v)$. و قدرت مجموعه‌ی D برابر است با

$$\begin{aligned} sdom(K_{\sigma_1, \sigma_2} \setminus D, D) &= sdom(K_{\sigma_1, \sigma_2} \setminus \{v, w\}, \{v, w\}) \\ &= d(v) \wedge d(w). \end{aligned}$$

بنابراین، مجموعه‌ی S_s شامل زوج رأس‌های $\{v, w\}$ از K_{σ_1, σ_2} می‌باشد که $v \in \sigma_1$ ، $w \in \sigma_2$ و $d(v) \wedge d(w)$ بیشترین مقدار در بین زوج رأس‌های $\{v, w\}$ از گراف K_{σ_1, σ_2} می‌باشد که $v \in \sigma_1$ و $w \in \sigma_2$. در نتیجه قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر فازی در گراف فازی دوبخشی کامل K_{σ_1, σ_2} برابر است با

$$\begin{aligned} ssd(K_{\sigma_1, \sigma_2}) &= \max\{|\{v, w\}|_f | \{v, w\} \in S_s\} \\ &= \max\{\sigma_1(v) + \sigma_2(w) | \{v, w\} \in S_s\}. \end{aligned}$$

□

در ادامه قضیه‌ای را بیان و اثبات می‌کنیم که ارتباط بین سه پارامتر $\gamma_f(G)$ ، $\gamma_s(G)$ و $ssd(G)$ را نشان می‌دهد.

قضیه ۶.۴.۵. برای هر گراف فاز $G = (\sigma, \mu)$ داریم

$$\gamma_f(G) \leq ssd(G) \leq \gamma_s(G).$$

برهان. گراف فاز $G = (\sigma, \mu)$ را در نظر بگیرید. چون پارامتر $\gamma_s(G)$ اندازه‌ی فاز مجموعه‌ی احاطه‌گر فاز مینیمم با بیشترین اندازه‌ی فاز را نشان می‌دهد، بنابراین داریم

$$ssd(G) \leq \gamma_s(G).$$

از طرفی پارامتر $\gamma_f(G)$ اندازه‌ی فاز مجموعه‌ی احاطه‌گر فاز مینیمال با کمترین اندازه‌ی فاز را در گراف فاز $G = (\sigma, \mu)$ نشان می‌دهد بنابراین،

$$\gamma_f(G) \leq ssd(G).$$

در نتیجه داریم

$$\gamma_f(G) \leq ssd(G) \leq \gamma_s(G).$$

□

۵.۵ قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فاز

در این بخش ما روی قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فاز در گراف‌های فاز مطالعه کرده و نتایجی را به دست آورده‌ایم. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فاز باشد و S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فاز از گراف فاز $G = (\sigma, \mu)$ و همچنین v یک رأس دلخواه از این گراف فاز باشد. باتوجه به تعریف مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فاز، برای هر رأس v در گراف G حداقل یک رأس مانند u در S داریم که در فاصله‌ی k از رأس v باشد. فرض می‌کنیم r رأس u_i ، $i = 1, 2, \dots, r$ ، در S باشند که در فاصله‌ی k از رأس v قرار دارند. r مسیر، $Q_1, \dots, Q_r$ ، به طول k بین رأس v و رأس‌های مجموعه‌ی S را در نظر می‌گیریم به‌طوری‌که $Q_i = (v, u_i)$ برای $i = 1, 2, \dots, r$. حال برای هر رأس $v \in V(G)$ قدرت تسلط بر رأس v را به صورت $\sum_{i=1}^r \mu^k(v, u_i)$ تعریف می‌کنیم که $u_i \in S$ بوده و با $sdom_k(v, S)$ نمایش می‌دهیم. همچنین قدرت احاطه‌گری مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فاز S که آن را با $sdom_k(G, S)$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$sdom_k(G, S) = \min\{sdom_k(v, S) | v \in G\}.$$

مجموعه‌ی شامل مجموعه‌های احاطه‌گر k - مرحله‌ای فازي مینیمم که دارای ماکزیمم اندازه‌ی $sdom_k(G, S)$ باشند را با $S_{sk}(G)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ای که در بین همه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر k - مرحله‌ای فازي مینیمم در $S_{sk}(G)$ دارای ماکزیمم اندازه‌ی فازي باشد را قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فازي در گراف فازي $G = (\sigma, \mu)$ می‌نامیم و اندازه‌ی فازي آن برابر است با قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فازي در گراف فازي $G = (\sigma, \mu)$ که با $ssd_k(G)$ نمایش داده می‌شود.

حال فرض کنید که گراف فازي $G = (\sigma, \mu)$ گراف فازي احاطه‌گر k - مرحله‌ای دقیق باشد و ما بخواهیم قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای دقیق فازي در این گراف فازي را به‌دست آوریم. فرض کنید S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای دقیق فازي از گراف فازي $G = (\sigma, \mu)$ بوده و همچنین v یک رأس دلخواه از این گراف فازي باشد. با توجه به تعریف مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای دقیق، برای هر رأس $v \in V(G)$ دقیقاً یک رأسی مانند x_i در S وجود دارد که در فاصله‌ی k از آن می‌باشد و در نتیجه قدرت تسلط بر رأس v توسط مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱ - مرحله‌ای دقیق S ، که آن را با $sdom_{ek}(v, S)$ نمایش می‌دهیم، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$sdom_{ek}(v, S) = \bigvee_{i=1}^r \mu^k(v, u_i) = \mu^k(v, x_i).$$

همچنین قدرت احاطه‌گری مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای دقیق فازي S ، که آن را با $sdom_{ek}(G, S)$ نمایش می‌دهیم، نیز به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} sdom_{ek}(G, S) &= \min\{sdom_{ek}(v, S) | v \in G\} \\ &= \min\{\mu^k(v, x_i) | v \in G\}. \end{aligned}$$

مجموعه‌ی شامل مجموعه‌های احاطه‌گر k - مرحله‌ای دقیق فازي مینیمم با ماکزیمم اندازه‌ی $sdom_{ek}(G, S)$ را با $S_{esk}(G)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ای که در بین همه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر k - مرحله‌ای دقیق فازي مینیمم در $S_{esk}(G)$ دارای ماکزیمم اندازه‌ی فازي باشد را قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای دقیق فازي در گراف فازي $G = (\sigma, \mu)$ می‌نامیم و اندازه‌ی فازي آن برابر است با قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای دقیق فازي در گراف فازي $G = (\sigma, \mu)$ که با $ssd_{ek}(G)$ نمایش داده می‌شود.

در ادامه ما کران‌های بالا و پایینی را برای قدرت تسلط بر رأس v با مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فازي S از گراف فازي $G = (\sigma, \mu)$ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۵.۵. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فازي باشد و v یک رأس دلخواه از G باشد. اگر S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فازي دلخواه از گراف فازي $G = (\sigma, \mu)$ باشد، آنگاه

$$\mu(e_w) \leq \text{sdom}_k(v, S) \leq \mu(e_s).$$

برهان. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فاز باشد و S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فاز از گراف فاز $G = (\sigma, \mu)$ و v یک رأس از G باشد. حداقل یک رأس در S در فاصله‌ی k از رأس v وجود دارد. فرض کنید r مسیر، $Q_1, \dots, Q_r$ ، به طول k بین v و $u_i \in S$ ، $i = 1, 2, \dots, r$ ، وجود داشته باشد که رأس‌های $u_i \in S$ لزوماً متمایز نیستند. بنابراین، داریم

$$\text{sdom}_k(v, S) = \bigvee_{i=1}^r \mu^k(v, u_i) = \bigvee_{i=1}^r \{ \bigwedge_{j=1}^k \mu(x_{j-1}, x_j) \mid x_0 = v \in G, x_k = u_i \in S \}.$$

چون یال e_s بیشترین درجه‌ی عضویت را بین همه‌ی یال‌ها دارد، برای هر $j = 1, \dots, k$ رابطه‌ی $\mu(x_{j-1}, x_j) \leq \mu(e_s)$ برقرار می‌باشد و بنابراین، $\bigwedge_{j=1}^k \mu(x_{j-1}, x_j) \leq \mu(e_s)$.
در نتیجه

$$\text{sdom}_k(v, S) \leq \mu(e_s).$$

همچنین چون یال e_w کمترین درجه‌ی عضویت را بین همه‌ی یال‌ها دارد رابطه‌ی $\mu(e_w) \leq \bigwedge_{j=1}^k \mu(x_{j-1}, x_j)$ برقرار می‌باشد و بنابراین،

$$\mu(e_w) \leq \text{sdom}_k(v, S).$$

□

حال از قضیه‌ی بالا می‌توان نتیجه‌ی زیر را برای قدرت مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فاز به‌دست آورد.

نتیجه ۱.۵.۵. اگر $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فاز باشد و S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ی فاز برای G باشد، آنگاه داریم

$$\mu(e_w) \leq \text{sdom}_k(G, S) \leq \mu(e_s).$$

قضیه ۲.۵.۵. اگر $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فاز و S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فاز برای G و $r \geq 1$ باشد، آنگاه برای هر رأس $v \in G$ داریم

$$\text{sdom}_k(v, S) \leq \bigvee_{i=1}^r \{ \text{CONN}_G(v, u_i) \mid u_i \in S \}.$$

برهان. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فاز و S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فاز برای G باشد. فرض کنید v یک رأس دلخواه از G باشد. چون S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر k - مرحله‌ای فاز است، حداقل یک رأس در S در فاصله‌ی k از رأس v وجود دارد. فرض کنید r مسیر، $Q_1, \dots, Q_r$ ، به طول k بین v و $u_i \in S$ ، $i = 1, 2, \dots, r$ ، وجود داشته باشد که رأس‌های

$u_i \in S$ لزوماً متمایز نیستند. چون $CONN_G(v, u_i)$ بیانگر قدرت قوی‌ترین مسیر بین v و u_i می‌باشد، برای $i = 1, \dots, r$ داریم $\mu^k(v, u_i) \leq CONN_G(v, u_i)$. بنابراین،

$$\begin{aligned} sdom_k(v, S) &= \bigvee_{i=1}^r \mu^k(v, u_i) \\ &\leq \bigvee_{i=1}^r \{CONN_G(v, u_i) | u_i \in S\}. \end{aligned}$$

□

در ادامه ارتباط بین عدد احاطه‌گری کلی فازی و قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق فازی در گراف‌های فازی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق $G = (\sigma, \mu)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیه ۳.۵.۵. برای هر گراف فازی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق $G = (\sigma, \mu)$ داریم

$$\gamma_{tf}(G) \leq ssd_{e1}(G).$$

برهان. فرض کنید S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی فازی برای گراف فازی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق $G = (\sigma, \mu)$ باشد به‌طوری‌که $|S|_f = \gamma_{tf}(G)$. در این صورت S مینیمم اندازه‌ی فازی را در بین همه‌ی مجموعه‌های احاطه‌گر کلی فازی مینیمال در گراف G دارد. فرض کنید S' مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی فازی مینیمم از $S_{es1}(G)$ با بیشترین اندازه‌ی فازی باشد. بنابراین، $|S'|_f = ssd_{e1}(G)$. در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \gamma_{tf}(G) &= |S|_f \leq \min\{|w|_f | w \in S_{es1}\} \\ &\leq \max\{|w|_f | w \in S_{es1}\} = |S'|_f = ssd_{e1}(G). \end{aligned}$$

□

در قضیه‌ی زیر کران بالا و پایینی برای قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق فازی در گراف فازی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۴.۵.۵. برای هر گراف فازی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق داریم

$$\gamma_t(G^*). \sigma(v_w) \leq ssd_{e1}(G) \leq \gamma_t(G^*). \sigma(v_s).$$

برهان. فرض کنید S یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق برای گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ باشد و $D \in S_{es1}(G)$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱- مرحله‌ای دقیق فازی از گراف فازی $G = (\sigma, \mu)$ باشد به‌طوری‌که $|D|_f = ssd_{e1}(G)$. از قضیه‌ی ۳.۱.۲ داریم $|D| = \gamma_t(G^*)$. چون v_s رأس با بیشترین درجه‌ی عضویت در G می‌باشد داریم

$$ssd_{e1}(G) = |D|_f \leq |D|. \sigma(v_s) = \gamma_t(G^*). \sigma(v_s).$$

در نتیجه کران بالا ثابت شد. برای کران پایین، چون v_w رأس با مینیمم درجه‌ی عضویت در G می‌باشد داریم

$$\gamma_t(G^*). \sigma(v_w) = |D|. \sigma(v_w) \leq |D|_f = ssd_{e_1}(G).$$

□ در نتیجه قضیه ثابت می‌شود.

کوکاین و همکارانش قضیه‌ی ۳.۴.۱ را در [۵] ثابت کردند که عدد احاطه‌گری کلی را با بیشترین درجه یعنی $\Delta(G)$ ارتباط می‌دهد. ما با استفاده از این قضیه کران‌های بالای زیر را برای $ssd_{e_1}(G)$ ثابت می‌کنیم.

قضیه ۵.۵.۵.۱ اگر $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فاز ۱ باشد که گراف زمینه‌ی آن دارای n رأس و بدون رأس تنها باشد، آنگاه

$$ssd_{e_1}(G) \leq (n - \Delta_f(G) + 1). \sigma(v_s).$$

(۲) اگر $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فاز ۱ باشد که گراف زمینه‌ی آن همبند باشد و داشته باشیم $\Delta(G^*) < n - 1$ ، آنگاه داریم

$$ssd_{e_1}(G) \leq (n - \Delta_f(G)). \sigma(v_s).$$

برهان. (۱) فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ یک گراف فاز ۱ باشد. از قضیه ۴.۵.۵ داریم $ssd_{e_1}(G) \leq \gamma_t(G^*). \sigma(v_s)$. از طرفی $\gamma_t(G^*). \sigma(v_s) = \max_{v \in V(G)} \{\sum \sigma(u) | u \in N(v)\}$. به وضوح $\Delta_f(G) \leq \Delta(G^*)$. بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} ssd_{e_1}(G) &\leq \gamma_t(G^*). \sigma(v_s) \leq (n - \Delta(G^*) + 1). \sigma(v_s) \\ &\leq (n - \Delta_f(G) + 1). \sigma(v_s). \end{aligned}$$

(۲) مشابه قسمت اول داریم

$$\begin{aligned} ssd_{e_1}(G) &\leq \gamma_t(G^*). \sigma(v_s) \leq (n - \Delta(G^*)). \sigma(v_s) \\ &\leq (n - \Delta_f(G)). \sigma(v_s). \end{aligned}$$

□

حال با استفاده از قضیه‌ی ۵.۵.۵ کران نوردهاوس – گادوم را برای قدرت قوی‌ترین مجموعه‌ی احاطه‌گر ۱ – مرحله‌ای دقیق فاز ۱ در گراف‌های فاز ۱ بیان می‌کنیم.

قضیه ۶.۵.۵ اگر $G = (\sigma, \mu)$ گراف فاز ۱ باشد که گراف زمینه‌ی آن با n رأس و بدون رأس تنها باشد و $\Delta(G^*) < n - 1$ ، آنگاه

$$ssd_{e_1}(G) + ssd_{e_1}(\bar{G}) \leq (n(2 - \sigma(v_w)) + 2). \sigma(v_s).$$

برهان. فرض کنید $G = (\sigma, \mu)$ گراف فازی باشد که گراف زمینه‌ی آن با n رأس و بدون رأس تنها باشد. چون G یا $\bar{G}$ همبند می‌باشد، بدون کاستن از کلیت مسئله فرض می‌کنیم $\bar{G} = (\sigma, \bar{\mu})$ همبند باشد. از قضیه‌ی ۵.۵.۵ داریم

$$ssd_{e_1}(\bar{G}) \leq (n - \Delta_f(\bar{G})).\sigma(v_s)$$

و همچنین

$$\begin{aligned} ssd_{e_1}(G) &\leq (n - \Delta_f(G) + 1).\sigma(v_s) \\ &\leq (n - \delta_f(G) + 1).\sigma(v_s). \end{aligned}$$

بنابراین،

$$ssd_{e_1}(G) + ssd_{e_1}(\bar{G}) \leq (2n + 1 - (\delta_f(G) + \Delta_f(\bar{G}))).\sigma(v_s).$$

واضح است که

$$(n - 1).\sigma(v_w) \leq \delta_f(G) + \Delta_f(\bar{G}) \leq (n - 1).\sigma(v_s).$$

بنابراین، داریم

$$\begin{aligned} ssd_{e_1}(G) + ssd_{e_1}(\bar{G}) &\leq (2n + 1 - (\delta_f(G) + \Delta_f(\bar{G}))).\sigma(v_s) \\ &\leq (2n + 1 - ((n - 1).\sigma(v_w))).\sigma(v_s) \\ &= (n(2 - \sigma(v_w)) + \sigma(v_w) + 1).\sigma(v_s) \\ &\leq (n(2 - \sigma(v_w)) + 1 + 1).\sigma(v_s) \\ &= (n(2 - \sigma(v_w)) + 2).\sigma(v_s). \end{aligned}$$

□

- [1] S. K. Ayyaswamy, B. Krishnakumari, C. Natarajan and Y. B. Venkatakrishnan, Bounds on the hop domination number of a tree, *Proc. Indian Acad. Sci* (2015), 125, 449–455.
- [2] J.A. Bondy and U.S.R Murty, *Graph Theory*, Springer 2008.
- [3] G. Chartrand, F. Harary, M. Hossain and K. Schultz, Exact 2-step domination in graphs, *Math. Bohem* 120 (1995), 125–134.
- [4] M. Chellali and T.W. Haynes, Total and paired domination numbers of a tree, *AKCE J. Graphs. Combin* 1 (2004), 69–75.
- [5] E.J. Cockayne, R. Dawes and S.T. Hedetniemi, Total domination in graphs, *Networks* 10 (1980), 211–215.
- [6] E.J. Cockayne and S.T. Hedetnieme, Towards a theory of domination in graphs, *Networks* 7(3) (1977), 247–261.
- [7] P. Dankelmann, G. S. Domke, W. Goddard, P. J. P. Grobler, J. H. Hattingh and H. C. Swart, Maximum sizes of graphs with given domination parameters, *Discrete Math* 281(1-3) (2004), 137–148.
- [8] G. Dror, A. Lev and Y. Roditty, A note: some results in step domination of trees, *Discrete Math* 289 (2004), 137–144.
- [9] M. Farhadi Jalalvand and N. Jafari Rad, On the complexity of k -step and k -hop dominating sets in graphs. *Math. Montisnigri* 40 (2017), 36–41.
- [10] M. Farhadi Jalalvand, N. Jafari Rad and M. Ghorani, Some results on the exact 1-step domination graphs, *Math. Montisnigri* 44 (2019), 15–27.
- [11] H. Gavlas and K. Schultz, Efficient open domination, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 11 (2002), 681–691.

- [12] M. R. Garey and D.S. Johnson, Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness, *Freeman, New York* (1979).
- [13] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc. New York 1998.
- [14] M.A. Henning, A linear vizing-like relation relating the size and total domination number of a graph, *J. Graph Theory* 49 (2005), 285–290.
- [15] M. A. Henning, N. Jafari Rad, On 2-step and hop dominating sets in graphs, *Graphs. Combin* 33 (2017), 913–927.
- [16] M. A. Henning and A. Yeo, *Total Domination in Graphs*, Springer Monographs in Mathematics 2013.
- [17] P. Hersh, On exact n-step domination, *Discrete Math.* 205 (1999), 235–239.
- [18] R. M. Karp, Reducibility among combinatorial problems, In R. E. Miller and J. W. Thatcher (editors). *Complexity of Computer Computations*. New York: Plenum. 85–103.
- [19] O.T. Manjusha and M.S. Sunitha, Strong domination in fuzzy graphs, *Fuzzy Inf. Eng* 7 (2015), 369–377.
- [20] D.A. Mojdeh and B. Ashrafi, On domination in fuzzy graphs, *Advances in Fuzzy Math.* 3 (2008), 1–10.
- [21] D.A. Mojdeh and M.M. Pourpasha, On domination in fuzzy graphs, *International Math. Forum* 2(2007), 893–904.
- [22] N. Mordeson and S.Nair, *Fuzzy Graph and Fuzzy Hypergraphs*. Physica-verlage, Heidelberg, New York 2000.
- [23] A. Nagoor Gani and V.T. Chandrasekaran, A study on domination, independent domination and irredundance in fuzzy graph, *Mathematical Sciences*, Vol. 5 (2011), 2317 - 2325.
- [24] A. Nagoor Gani and V.T. Chandrasekaran, Domination in fuzzy graph, *Advances in Fuzzy Sets and Systems* 1 (1) (2006), 17–26.
- [25] C. Natarajan and S. K. Ayyaswamy, Hop domination in graphs-II, *An. Stt. Univ. Ovidius Constanta* 23(2) (2015), 187–199.

- [26] D. F. Rall, Total domination in categorical products of graphs, *Discuss. Math. Graph Theory* 25 (2005), 35–44.
- [27] A. Rosenfeld, Fuzzy graphs, fuzzy sets and their application to cognitive and desision processes. *Academic press* (1975), 77–95.
- [28] K. L. Schultz, *Step Domination in Graphs*, PhD Dissertations 1995.
- [29] K. Schultz, G. Chartrand, F. Harary, Exact 2-step domination in graphs, *Math. Bohem* 120 (1995), 125–134.
- [30] E. Shan, L. Kang and M.A. Henning, Erratum to: A linear vzing-like relation relating the size and total domination number of a graph, *J. Graph Theory* 54 (2007), 350–353.
- [31] A. Somasundaram, S. Somasundaram , Domination in fuzzy graphs-I. *Pattern recognitia letters* 19 (1998), 787–791.
- [32] Y. Zhao, L. Miao, and Z. Liao, A linear-time algorithm for 2-step domination in block graphs, *J. Mathematical Research with Applications* 35 (2015), 285–290.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Domination	احاطه‌گری
Hop domination	احاطه‌گری جهشی
Step domination	احاطه‌گری مرحله‌ای
Exact step domination	احاطه‌گری مرحله‌ای دقیق
Minimal domination	احاطه‌گری مینیمال
Size	اندازه
Leaf	برگ
Maximum	بیشترین
Vertex cover	پوشش راسی
Matching	جورسازی
Degree	درجه
Tree	درخت
Exact	دقیق
Cycle	دور
Vertex	رأس
Support vertex	رأس پشتیبان
Isolated vertex	رأس تنها
Penultimate vertex	رأس ما قبل آخر
Subgraph	زیرگراف
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Spanning subgraph	زیرگراف فراگیر
Domination number	عدد احاطه‌گری
Fuzzy	فازی
Strong	قوی
Bound	کران
Upper bound	کران بالا

Lower bound	کران پایین
Minimum	کمترین
Graph	گراف
n-partite graph	گراف n-بخشی
r-regular graph	گراف r-منظم
Star graph	گراف ستاره
Complete graph	گراف کامل
Complement graph	گراف متمم
Planar graph	گراف مسطح
Regular graph	گراف منتظم
Chordal graph	گراف وتری
Adjacent	مجاور
Dominating set	مجموعه احاطه گر
Total dominating set	مجموعه احاطه گر کلی
Step dominating set	مجموعه‌ی احاطه گر مرحله‌ای
Hop dominating set	مجموعه‌ی احاطه گر جهشی
Independent set	مجموعه‌ی مستقل
Order	مرتبه
Independent	مستقل
Path	مسیر
Connected graph	همبند
Open neighborhood	همسایگی باز
Close neighborhood	همسایه بسته
Edge	یال

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacent	مجاور
Bipartite graph	گراف دو بخشی
Bound	کران
Close neighborhood	همسایه بسته
Complement graph	گراف متمم
Complete graph	گراف کامل
Complexity	پیچیدگی
Connected graph	گراف همبند
Cover	پوشش
Cutvertex	رأس برشی
Cycle	دور
Degree	درجه
Diameter	قطر
Domination	احاطه‌گری
Dominating set	مجموعه‌ی احاطه‌گر
Edge	یال
Efficient dominating set	مجموعه‌ی احاطه‌گر موثر
Exact	دقیق
Graph	گراف
Hop domination	احاطه‌گری جهشی
Independence number	عدد استقلال
Independent set	مجموعه‌ی مستقل
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Isolated vertex	رأس تنها
Leaf	برگ
Lower bound	کران پایین

Maximum	بیشترین
Minimal domination	احاطه‌گری مینیمال
Minimum	کمترین
Number	عدد
Open neighborhood	همسایه باز
Order	مرتبه
Path	مسیر
Planar graph	گراف مسطح
Regular graph	گراف منتظم
Sharp	قابل دستیابی
Simple graph	گراف ساده
Size	اندازه
Star	ستاره
Step domination	احاطه‌گری مرحله‌ای
Strong	قوی
Strongest	قوی‌ترین
Support vertex	رأس پشتیبان
Total dominating set	مجموعه‌ی احاطه‌گر کلی
Tree	درخت
Trivial graph	گراف بدیهی
Upper bound	کران بالا
Vertex	رأس

Aabstract

Given a positive integer $k \geq 2$, two vertices in a graph are said to k -step dominate each other if they are at distance k apart. A set S of vertices in a graph G is a k -step dominating set of G if every vertex is k -step dominated by some vertex of S . The k -step domination number of G is the minimum cardinality of a k -step dominating set of G . A subset S of vertices of G is a k -hop dominating set if every vertex outside S is k -step dominated by some vertex of S . The k -hop domination number of G is the minimum cardinality of a k -hop dominating set of G . In this thesis, we show that for any integer $k \geq 2$, the decision problems for the k -step dominating set and k -hop dominating set problems are NP -complete for planar bipartite graphs and planar chordal graphs. Also we obtain new upper bounds on the size of exact 1-step domination graphs, and present an upper bound on the total domination number of an exact 1-step domination tree and characterize trees achieving equality for this bound. Then we study on strongest dominating set in fuzzy graphs and obtain these strengths for fuzzy complete graphs and fuzzy complete bipartite graphs. Also we define exact k -Step dominating sets in fuzzy graphs and determine strongest exact k -Step dominating set for fuzzy graphs and obtain new upper bound on the size of exact 1-step domination fuzzy graphs.

Keywords : Step domination, Hop domination, Fuzzy domination, Strongest dominating set.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Graphs and Combinatorics

**Investigation on the step and hop
domination numbers in graphs and fuzzy
graphs**

By: Marziyeh Farhadi Jalalvand

Supervisor

Nader Jafari Rad

Advisor

Maryam Ghorani

October 2020