

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری آنالیز عددی

یک رهیافت شبه طیفی برای حل معادلات دیفرانسیل - انتگرال تاخیری

نگارنده: مصطفی محمودی

استادان راهنما

دکتر مهدی قوتمند
دکتر محمد هادی نوری اسکندری

مهر ۱۳۹۹

تقدیم بہ

پدر و مادر عزیزم

سپاس‌گزاری

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست. اکنون که با یاری او توانسته‌ام تلاشی هر چند ناچیز را در راه کسب دانش به انجام برسانم، بر خود لازم می‌دانم از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای **دکتر محمد هادی نوری اسکندری** قدردانی نمایم که نحوه‌ی صحیح پژوهش کردن را به بنده آموخت و نگارش این پایان‌نامه جز با راهنمایی‌های ارزنده ایشان میسر نبود. و همچنین از جناب آقای **دکتر حسین جعفری** که در این سال‌ها به واسطه دلبستگی‌ها و حمایت‌های بی‌دریغشان چراغ راه اینجانب بوده کمال تشکر و سپاس‌گزاری را دارم. و از آقای دکتر مهدی قوتمند نیز تشکر می‌نمایم.

در پایان، از خانواده‌ام که در تمام دوران زندگی همواره مشوق بنده بودند و بی‌شک حمایت ایشان باعث تحقق این مهم گردید، نهایت سپاس و قدرشناسی را دارم.

مصطفی محمودی

مهر ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب **مصطفی محمودی** دانشجوی دکتری رشته **ریاضی کاربردی** دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده رساله با عنوان **یک رهیافت شبه طیفی برای حل معادلات دیفرانسیل - انتگرال تاخیری**، تحت راهنمایی آقایان **دکتر مهدی قوتمند** و **دکتر محمد هادی نوری اسکندری** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مصطفی محمودی

مهر ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

معادلات دیفرانسیل و انتگرال تاخیری کاربردهای وسیعی در علوم و مهندسی به خود اختصاص داده است. معمولاً در برخورد با نوع غیرخطی این معادلات، نمی‌توان جواب دقیق را محاسبه کرد. از این رو یافتن یک جواب عددی کارا که دارای سرعت همگرایی بالا و خطای کم باشد ضروری است. در این رساله یک روش شبه طیفی را بر مبنای چند جمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته برای حل برخی از معادلات دیفرانسیل و انتگرال تاخیری غیرخطی ارائه می‌دهیم. در روش پیشنهادی، یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی پیشنهاد می‌کنیم که جواب بهینه آن، یک جواب برای معادله مربوطه است. سپس مساله را با بکارگیری نقاط هم محلی و روش شبه طیفی به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌کنیم. از حل این مساله برنامه‌ریزی غیرخطی جواب‌هایی تقریبی برای معادله تاخیری بدست می‌آوریم. آنالیز همگرایی روش پیشنهادی برای انواعی از معادلات دیفرانسیل و انتگرال تاخیری بررسی می‌شود. بعلاوه با حل چندین مثال عددی و مقایسه روش با دیگر تکنیک‌ها و روش‌های موجود برای معادلات دیفرانسیل و انتگرال تاخیری، کارایی و قابلیت روش پیشنهادی را نشان می‌دهیم. //

کلمات کلیدی

معادلات دیفرانسیل-انتگرال تاخیری، روش شبه طیفی لژاندر، آنالیز همگرایی

لیست مقالات مستخرج از رساله

1. M. Mahmoudi, M. Ghoatmand, M. H. Noori Skandari, A New Convergent Pseudospectral Method for Delay Differential Equations. Iranian journal of science and technology ,transactions A: science 44 (6):1-9 (2020).
 2. M. Mahmoudi, M. Ghoatmand, M. H. Noori Skandari, A novel numerical method and its convergence for nonlinear delay Volterra integro-differential equations, Mathematical Methods in the Applied Sciences 43(5), 2357-2368 (2019).
 3. M. Mahmoudi, M. Ghoatmand, M. H. Noori Skandari, A Convergent approach for nonlinear delay Volterra-Fredholm integro-differential equations. Submitted
۴. محمد هادی نوری اسکندری، مصطفی محمودی، جواد وحیدی، مهدی قوتمند، روش شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چند گانه. ارسال شده است.
۵. مصطفی محمودی، مهدی قوتمند، محمد هادی نوری اسکندری، یک روش جدید شبه طیفی لژاندر انتقال یافته برای حل معادله دیفرانسیل تاخیری، دومین سمینار ملی کنترل و بهینه سازی، دانشگاه صنعتی شاهرود ۲۵-۲۴ آبان ۱۳۹۷.
۶. مصطفی محمودی، مهدی قوتمند، محمد هادی نوری اسکندری، یک روش عددی کارا برای رده ای از معادلات تاخیری، سیزدهمین کنفرانس بین المللی انجمن ایرانی تحقیق در عملیات، دانشگاه صنعتی شاهرود ۱۹-۱۶ شهریور ۱۳۹۹.

فهرست مطالب

س	فهرست تصاویر
ف	فهرست جداول
۱	۱ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۱	۱.۱ روش‌های طیفی و شبه طیفی
۲	۲.۱ چندجمله‌ای‌های لژاندر
۲	۳.۱ روش شبه طیفی لژاندر
۳	۴.۱ مدل‌های تاخیری
۴	۵.۱ کاربردهای معادلات دیفرانسیل تاخیری
۷	۲ روش شبه طیفی لژاندر برای حل رده‌ای از معادلات دیفرانسیل تاخیری
۷	۱.۲ مقدمه
۸	۲.۲ معادلات دیفرانسیل غیرخطی
۸	۳.۲ پیاده‌سازی روش
۱۰	۴.۲ آنالیز همگرایی
۱۴	۵.۲ مثال‌های عددی
۱۹	۳ روش شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل تاخیری
۱۹	۱.۳ مقدمه
۲۰	۲.۳ معادله انتگرال-دیفرانسیل تاخیری غیرخطی
۲۰	۳.۳ پیاده‌سازی روش
۲۲	۴.۳ آنالیز همگرایی
۲۶	۵.۳ مثال‌های عددی
۳۳	۴ روش‌های شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم تاخیری
۳۳	۱.۴ مقدمه

۳۴	۲.۴	معادلات انتگرال- دیفرانسیل فردهلم غیرخطی تاخیری
۳۵	۳.۴	پیاده سازی روش
۳۶	۴.۴	آنالیز همگرایی
۴۰	۵.۴	مثال های عددی
۵ روش های شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال- دیفرانسیل ولترا- فردهلم تاخیری		
۴۳	۱.۵	مقدمه
۴۳	۲.۵	معادلات انتگرال- دیفرانسیل ولترا- فردهلم غیرخطی تاخیری
۴۴	۳.۵	پیاده سازی روش
۴۵	۴.۵	آنالیز همگرایی
۴۷	۵.۵	مثال های عددی
۶ روش شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چند گانه		
۵۵	۱.۶	مقدمه
۵۵	۲.۶	معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چندگانه
۵۶	۳.۶	پیاده سازی روش
۵۶	۴.۶	آنالیز همگرایی
۵۸	۵.۶	مثال های عددی
۶۱		
۶۵		مراجع
۷۱		واژه نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۱۶	خطای مطلق برای مثال ۱.۵.۲	۲.۲
۱۶	جواب‌های تقریبی برای مثال ۱.۵.۲	۱.۲
۱۶	خطای مطلق برای مثال ۲.۵.۲	۴.۲
۱۶	جواب‌های تقریبی برای مثال ۲.۵.۲	۳.۲
۱۷	خطای مطلق برای مثال ۳.۵.۲	۶.۲
۱۷	جواب‌های تقریبی برای مثال ۳.۵.۲	۵.۲
۲۸	جواب‌های تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۱.۵.۳	۱.۳
۲۹	خطاهای مطلق برای مثال ۱.۵.۳	۲.۳
۲۹	جواب‌های تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۲.۵.۳	۳.۳
۲۹	خطاهای مطلق برای مثال ۲.۵.۳	۴.۳
۳۰	جواب‌های تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۳.۵.۳	۵.۳
۳۰	خطاهای مطلق برای مثال ۳.۵.۳	۶.۳
۳۰	جواب‌های تقریبی با $N = 15$ برای مثال ۴.۵.۳	۷.۳
۳۱	خطاهای مطلق برای مثال ۴.۵.۳	۸.۳
۳۱	جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۵.۵.۳	۹.۳
۳۱	خطاهای مطلق برای مثال ۵.۵.۳	۱۰.۳
۳۲	جواب تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۶.۵.۳	۱۱.۳
۳۲	خطاهای مطلق برای مثال ۶.۵.۳	۱۲.۳
۴۱	جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۱.۵.۴	۱.۴
۴۱	خطاهای مطلق برای مثال ۱.۵.۴	۲.۴
۴۲	جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۲.۵.۴	۳.۴
۴۲	خطاهای مطلق برای مثال ۲.۵.۴	۴.۴
۴۲	جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۳.۵.۴	۵.۴
۴۲	خطاهای مطلق برای مثال ۳.۵.۴	۶.۴

۵۲		۱.۵	جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۱.۵.۵
۵۳		۲.۵	خطاهای مطلق برای مثال ۱.۵.۵
۵۳		۳.۵	جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۲.۵.۵
۵۳		۴.۵	خطاهای مطلق برای مثال ۲.۵.۵
۵۳		۵.۵	جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۳.۵.۵
۵۴		۶.۵	خطاهای مطلق برای مثال ۳.۵.۵
۵۴		۷.۵	جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۴.۵.۵
۵۴		۸.۵	خطاهای مطلق برای مثال ۴.۵.۵
۶۲		۱.۶	جواب‌های دقیق و تقریبی با $M = 10$ برای مثال ۱.۵.۶
۶۳		۲.۶	خطاهای مطلق برای مثال ۱.۵.۶
۶۳		۳.۶	جواب‌های دقیق و تقریبی با $M = 9$ برای مثال ۲.۵.۶
۶۳		۴.۶	خطاهای مطلق برای مثال ۲.۵.۶
۶۳		۵.۶	جواب‌های دقیق و تقریبی با $M = 9$ برای مثال ۳.۵.۶
۶۴		۶.۶	خطاهای مطلق برای مثال ۳.۵.۶
۶۴		۷.۶	جواب‌های دقیق و تقریبی با $M = 8$ برای مثال ۴.۵.۶
۶۴		۸.۶	خطاهای مطلق برای مثال ۴.۵.۶

فهرست جداول

۱۷		جواب‌های تقریبی برای مثال ۱.۵.۲	۱.۲
۱۷		جواب‌های تقریبی برای مثال ۲.۵.۲	۲.۲
۱۷		جواب‌های تقریبی برای مثال ۳.۵.۲	۳.۲
۱۷		مقایسه خطای مطلق برای مثال ۳.۵.۲	۴.۲
۲۸		خطاهای مطلق برای مثال ۳.۵.۳	۱.۳
۲۸		خطاهای مطلق برای مثال ۴.۵.۳	۲.۳
۶۲		مقایسه خطاهای مطلق برای مثال ۲.۵.۶ با روش‌های دیگر	۱.۶
۶۲		خطاهای مطلق با مقادیر مختلف M برای مثال ۴.۵.۶	۲.۶

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ روش‌های طیفی و شبه طیفی

روش‌های طیفی^۱ و شبه طیفی^۲، رده‌ای از روش‌های عددی هستند که در ابتدا برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و یا جزئی مورد استفاده قرار گرفتند. مبنای روش‌های طیفی و شبه طیفی از تقریب یک تابع با استفاده از توابع فوریه^۳ سینوسی و کسینوسی گرفته شده است. به صراحت می‌توان گفت روش‌های طیفی، تقریب یک تابع با استفاده از توابع پایه‌ای متعامد هستند و روش‌های شبه طیفی براساس درونیابی و استفاده از نقاط هم محلی است [۳۵].

روش شبه طیفی یکی از روش‌های مهم برای حل مسائل پیوسته زمانی در زمینه‌های مختلفی از علوم پایه و مهندسی است. در این روش، از یک چندجمله‌ای درونیاب برای تقریب یک تابع پیوسته استفاده می‌کنیم. تابع مجهول مسئله می‌تواند با مقادیر تقریبی در گره‌های خاص بیان شود. روش شبه طیفی لژاندر (LPS)^۴ یکی از روش‌های عددی مناسب برای حل مسائل پیوسته زمانی است، که پیشرفت زیادی در حل مسائل خطی و غیرخطی داشته است. یکی از مهم‌ترین مزایا استفاده از روش LPS نسبت به سایر روش‌های تقریبی دقت بالای آن

¹Spectral method

²Pseudospectral methods

³Fourier functions

⁴Legendre pseudo-spectral

می‌باشد. همچنین روش LPS تحت فضای چندجمله‌ای‌ها به وسیله چندجمله‌ای‌های متعامد لژاندر روی بازه $[-1, 1]$ و نسبت به تابع وزن $w(x) = 1$ پدید می‌آید.

۲.۱ چندجمله‌ای‌های لژاندر

چندجمله‌ای‌های لژاندر [۳۵]، چندجمله‌ای‌هایی متعامد در بازه $[-1, 1]$ می‌باشند که در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند،

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.1)$$

که $P_0(x) = 1$ ، $P_1(x) = x$ ، $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$ و $\dots$ و داریم،

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = \begin{cases} \frac{2}{2n+1}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases} \quad (2.1)$$

چندجمله‌ای‌های لژاندر کراندار هستند و در روابط زیر صدق می‌کنند،

$$|P_n(x)| \leq 1, \quad |P'_n(x)| \leq \frac{n(n+1)}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (3.1)$$

با مقادیر مرزی

$$P_n(\pm 1) = (\pm 1)^n, \quad P'_n(\pm 1) = \frac{(\pm 1)^{n+1}}{2}n(n+1) \quad (4.1)$$

رابطه بازگشتی بین این چندجمله‌ای‌ها با مشتق آن به صورت زیر می‌باشد

$$P_n(x) = \frac{P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x)}{2n+1}, \quad n \geq 1. \quad (5.1)$$

۳.۱ روش شبه طیفی لژاندر

در روش شبه طیفی لژاندر از مجموعه گره‌ها و وزن‌ها بصورت $\{x_j, w_j\}_{j=0}^N$ استفاده می‌شود که شامل یکی از حالات زیر است [۳۵]

۱. لژاندر-گاوس (LG)^۵:

$\{x_j\}_{j=0}^N$ صفرهای $P_{N+1}(x)$ هستند و وزن‌های متناظر آن

$$w_j = \frac{2}{(1-x_j^2)(P'_{N+1}(x_j))^2}, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (6.1)$$

⁵Legendre-Gauss

۲. لژاندر-گائوس-رادو (LGR):^۶

$\{x_j\}_{j=0}^N$ صفرهای $P_N(x) + P_{N+1}(x)$ هستند و وزن‌های متناظر آن

$$w_j = \frac{1}{(N+1)^2} \cdot \frac{1-x_j}{(P_N(x_j))^2}, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (7.1)$$

۳. لژاندر-گائوس-لوباتو (LGL):^۷

$\{x_j\}_{j=0}^N$ صفرهای $(1-x^2)P'_N(x)$ هستند و وزن‌های متناظر آن

$$w_j = \frac{2}{N(N+1)} \cdot \frac{1}{(P_N(x_j))^2}, \quad 0 \leq j \leq N. \quad (8.1)$$

با توجه به مجموعه گره‌ها و وزن‌ها، داریم

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{j=0}^N P(x_j) w_j, \quad \forall P \in P_{N+\delta}[-1, 1], \quad (9.1)$$

که $\delta = 1, 0, -1$ به ترتیب برای LGR، LGL و $P_{N+\delta}[-1, 1]$ فضای چندجمله‌ای‌های تعریف شده روی بازه $[-1, 1]$ هستند.

۴.۱ مدل‌های تاخیری

در یک دستگاه مهندسی و کاربردی، طبیعی است که فرض کنیم دستگاه نه تنها متأثر از حالت‌های کنونی است، بلکه وابسته به حالت‌های پیشینی نیز هست. این وابستگی به گذشته، به شکل تاخیر در مدل آن دستگاه ظاهر می‌شود. این گونه مسائل به لحاظ ریاضی با معادلات تاخیری مورد بررسی قرار می‌گیرند. در واقع معادلات تاخیری در مدل‌سازی دستگاه‌هایی روی می‌دهند که سیر تکاملی آن‌ها به‌طور صریح وابسته به گذشته دستگاه است. با در نظر گرفتن معادله دیفرانسیل با پارامتر تاخیر به شکل

$$\frac{dN(t)}{dt} = f(N(t), N(t-\tau)),$$

می‌توان همه این تاخیرها را در مدل رشد جمعیت منظور کرد که در آن، $\tau > 0$ پارامتر تاخیر است. یک چنین مدلی می‌تواند تعمیمی از مدل رشد لجستیک به صورت

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left[1 - \frac{N(t-\tau)}{k} \right]$$

باشد که در آن، τ ، k و r ثابت‌های مثبت هستند. در مدل‌های با پارامتر تاخیر، جمعیت در زمان t به جمعیت در زمان $t - \tau$ بستگی دارد [۲۶].

^۶Legendre-Gauss-Radau

^۷Legendre-Gauss-Lobatto

معادلات دیفرانسیل تاخیری که معادلات دیفرانسیل تفاضلی^۸ نیز نامیده می‌شوند، نوع خاصی از معادلات دیفرانسیل تابعی^۹ هستند. معادلات دیفرانسیل تاخیری شبیه به معادلات دیفرانسیل معمولی هستند ولی تحول آن‌ها به متغیرهای حالت در زمان‌های گذشته نیز بستگی دارد. لذا برای حل یک معادله دیفرانسیل تاخیری، نه تنها به دانستن حالت کنونی دستگاه نیاز داریم، بلکه به دانستن وضعیت دستگاه در یک دوره زمانی گذشته نیز نیازمندیم. برخی از پژوهشگران از مدل معادلات دیفرانسیل معمولی برای توصیف معادله دیفرانسیل تاخیری استفاده کرده‌اند که کوانگ در [۲۱]، خطرات ناشی از چشم‌پوشی از تاخیرهای کوچک را بیان کرده است.

۵.۱ کاربردهای معادلات دیفرانسیل تاخیری

در این قسمت به برخی از کاربردهای معادلات دیفرانسیل تاخیری^{۱۰} (DDEs) در زیست‌شناسی و مکانیک اشاره می‌کنیم.

یک مدل همه‌گیری تاخیری

لوتکا^{۱۱} زیست‌شناس و ریاضیدان در یک سری از مقالات، مدل‌های دیفرانسیل همه‌گیری مالاریا را مورد بررسی قرار داد. به‌طور خاص، او معادلات دیفرانسیل تاخیری همه‌گیری مالاریا زیر را پیشنهاد کرد

$$\begin{cases} \dot{h}(t) = bgm(t - \mu_1) [p - h(t - \mu_1)] / p - (M + r)h(t), \\ \dot{m}(t) = bfh(t - \mu_2) [q - m(t - \mu_2)] / p - (N + s)m(t), \end{cases} \quad (10.1)$$

که $\mu_1 = 0.5$ انسان‌ها و $\mu_2 = 0.6$ حشرات و ثابت‌های p و q کل جمعیت انسان‌ها و حشرات هستند. تابع‌های $h(\cdot)$ و $m(\cdot)$ برای نشان دادن جمعیت‌های انسان‌ها و حشرات که ارگانیسم مالاریا را حمل می‌کنند به کار برده شده است. یک نسبت ثابت از هر کدام از این جمعیت‌ها فرض شده است که عفونت‌زا باشند. با فرض اینکه جمعیت عفونت‌زا به ترتیب fh و gm باشند. مقادیر M و N نرخ مرگ و میر هستند در حالی که r و s نرخ بهبودی هستند. فرض بر این است که هر یک از پشه‌ها در واحد زمان افراد b را نیش می‌زنند و هر فرد در واحد زمان دچار نیش می‌شود [۲۱].

⁸Difference-differential equations

⁹Functional differential equations

¹⁰Delay differential equations

¹¹Lotka

یک مدل تاخیری مکانیکی

حرکت سریع و هموار جرثقیل برای بارگیری امری ضروری است. به این دلیل که اپراتور کنترل آن را از دست ندهد، روش‌های زیادی برای کنترل جرثقیل وجود دارد. در سال ۲۰۰۵ یک روش بر پایه کنترل بازخورد تاخیری معرفی شد. این روش کارآمدتر از روش قراردادی (مرسوم) است [۲۸]. مدل پاندول برای جرثقیل کانتینر توسط معادلات دیفرانسیل تاخیری زیر توضیح داده می‌شود

$$\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + \sin(y) = -\lambda \cos(y) (y(t - \mu) - y), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11.1)$$

که y زاویه را نشان می‌دهد، μ تاخیر و λ ثابت مثبت است. در فصل بعدی، این معادله را با روش پیشنهادی خودمان حل می‌کنیم.

فصل ۲

روش شبه طیفی لژاندر برای حل ردهای از معادلات دیفرانسیل تاخیری

۱.۲ مقدمه

در دهه‌های گذشته، رویکردهای جایگزین برای حل نوع خاصی از معادلات دیفرانسیل تاخیری ارائه شده است. دهقان^۱ و شاکری^۲ [۱۱] روش تجزیه آدومیان را برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری که از الکترودینامیک منشا می‌گیرند ارائه کرده‌اند. یوزباشی^۳ و سزر^۴ [۴۷] یک روش تقریب‌نمایی برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری پانتوگراف تعمیم‌یافته ارائه کرده‌اند. صداقت^۵ و همکاران [۳۱] همچنین یک طرح عددی برای حل معادله پانتوگراف را پیشنهاد کردند. این روش شامل گسترش جواب‌های تقریبی مورد نیاز به عنوان عناصر چندجمله‌ای‌های چبیشف تغییر یافته می‌باشد. صادقی^۶ و همکاران [۳۰] یک جواب عددی از معادلات دیفرانسیل

¹Dehghan

²Shakeri

³Yuzbasi

⁴Sezer

⁵Sedaghat

⁶Sadeghi

تاخیری با استفاده از روش مرکب لژاندر را پیشنهاد کردند. لی^۷ و چی^۸ [۲۵] معادلات دیفرانسیل تاخیری نامتناهی^۹ (IDDEs) را بررسی کردند و راه حل تحلیلی از یک کلاسی از (IDDEs) غیرخطی را پیشنهاد کرده‌اند. در [۳۴] یک روش اختلال هموتوپی برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری ارائه شده است. بهراوی^{۱۰} و همکاران در [۳] روش شبه طیفی ژاکوبی را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل تاخیری-زمانی برگر ارائه کرده‌اند. همچنین در [۴۸] از روش چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته برای حل ردهای از معادلات دیفرانسیل تاخیری استفاده شده است.

سیستم‌های زیست‌شناسی تاخیری توجه بسیاری از محققین زیست‌شناسی و ریاضیدانان را به خود معطوف کرده است [۶، ۸، ۹]. کاربرد معادلات تاخیری در مدل‌های زیست‌شناسی در بسیاری از موارد با مطالعه پدیده دینامیک مانند نوسانات و رفتار بی‌نظمی همراه شده است. در این فصل با استفاده از یک روش شبه طیفی لژاندر انتقال یافته مسئله را به یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی معادل تبدیل می‌کنیم و از حل آن یک جواب تقریبی برای معادله تاخیری بدست می‌آوریم.

۲.۲ معادلات دیفرانسیل غیرخطی

در این فصل معادله دیفرانسیل غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\alpha t + \beta)), & 0 < t \leq T, \\ x(t) = \phi(t), & -\mu \leq t \leq 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

که $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ دو تابع مشتق‌پذیر هستند، $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $f : [0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک تابع مجهول، $\alpha > 0$ و $\beta \leq 0$ دو ثابت مفروض می‌باشند. بعلاوه در اینجا $\mu = -\frac{\beta}{\alpha}$. همچنین فرض می‌کنیم که سیستم (۱.۲) دارای یک جواب است.

۳.۲ پیاده‌سازی روش

ابتدا معادله دیفرانسیل تاخیری (۱.۲) را به صورت سیستم معادل زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\dot{x}(t) = \begin{cases} f(t, x(t), \phi(\alpha t + \beta)), & 0 < t \leq \mu, \\ f(t, x(t), x(\alpha t + \beta)), & \mu < t \leq T, \\ x(0) = \phi(0), \end{cases} \quad (2.2)$$

⁷Lu

⁸Cui

⁹Infinite delay differential equation

¹⁰Bhrawy

اکنون مسئله بهینه سازی پیوسته زمانی زیر را پیشنهاد می‌کنیم

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & J = \|x(\circ) - \phi(\circ)\|^2 \\ \text{subject to} \quad & \dot{x}(t) = \begin{cases} f(t, x(t), \phi(\alpha t + \beta)), & \circ < t \leq \mu, \\ f(t, x(t), x(\alpha t + \beta)), & \mu < t \leq T. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

واضح است که هر جواب مسئله (۲.۲) یک جواب بهینه برای مسئله (۳.۲) می‌باشد. همچنین چون مسئله (۲.۲) دارای یک جواب می‌باشد، مسئله (۳.۲) یک مسئله شدنی است و دارای یک جواب بهینه می‌باشد. جواب بهینه مسئله (۳.۲) را به صورت

$$x(t) \simeq x^N(t) = \sum_{j=\circ}^N \bar{x}_j L_j(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.2)$$

تقریب می‌زنیم که $\bar{x}_j$ ها ضرایبی نامعین می‌باشند و $L_j(\cdot)$ ها چندجمله‌ای‌های لاگرانژ هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$L_j(t) = \prod_{\substack{i=\circ \\ i \neq j}}^N \frac{t - t_i}{t_j - t_i}, \quad j = \circ, 1, \dots, N. \quad (5.2)$$

در اینجا $\{t_j\}_{j=\circ}^N \in [\circ, T]$ نقاط هم‌محلی یا همان نقاط درونیابی هستند که ریشه‌های $\left(1 - \left(\frac{\gamma}{T}t - 1\right)^2\right) \frac{dP_N(t)}{dt}$ می‌باشند و بعلاوه $p_N(\cdot)$ چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته از مرتبه N است. این چندجمله‌ای‌ها روی بازه $[\circ, T]$ با استفاده از فرمول بازگشتی زیر قابل محاسبه می‌باشند

$$\begin{cases} p_\circ(t) = 1, & p_1(t) = \left(\frac{\gamma}{T}t - 1\right), \\ p_{j+1}(t) = \left(\frac{\gamma(j+1)}{j+1}\right) \left(\frac{\gamma}{T}t - 1\right) p_j(t) - \left(\frac{j}{j+1}\right) p_{j-1}(t), & j = 1, 2, \dots, N. \end{cases} \quad (6.2)$$

$$L_j(t_k) = \begin{cases} 1, & j = k \\ \circ, & j \neq k \end{cases} \quad \text{توجه داریم که}$$

$$x(t_k) \simeq x^N(t_k) = \bar{x}_k. \quad (7.2)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۴.۲) و (۷.۲) مسئله بهینه سازی (۳.۲) را با مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی زیر تقریب می‌زنیم

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & J = \|x_\circ - \phi(\circ)\|^2 \\ \text{subject to} \quad & \begin{cases} \sum_{j=\circ}^N \bar{x}_j D_{kj} = f(t_k, x_k, \phi(\alpha t_k + \beta)), & k = 1, 2, \dots, l_\mu, \\ \sum_{j=\circ}^N \bar{x}_j D_{kj} = f\left(t_k, x_k, \sum_{j=\circ}^N \bar{x}_j L_j(\alpha t_k + \beta)\right), & k = l_\mu + 1, \dots, N, \end{cases} \end{aligned} \quad (8.2)$$

که در آن $D_{kj} = \dot{L}_j(t_k)$ و می‌توان نشان داد که

$$D_{kj} = \begin{cases} \frac{L_N(t_k)}{L_N(t_j)} \cdot \frac{1}{t_k - t_j}, & k \neq j, \\ \frac{2}{T} \cdot \frac{-N(N+1)}{4}, & k = j = 0, \\ \frac{2}{T} \cdot \frac{N(N+1)}{4}, & k = j = N, \\ 0, & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (9.2)$$

در (۸.۲) اندیس l_μ را طوری انتخاب می‌کنیم که در رابطه $t_{l_\mu} \leq \mu < t_{l_\mu+1} < T$ صدق کند. توجه داریم که

$$\frac{d}{dt}x(t_k) \simeq \frac{dx^N}{dt}(t_k) = \sum_{j=0}^N \bar{x}_j \dot{L}_j(t_k) = \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj}. \quad (10.2)$$

با حل مسئله بهینه سازی غیرخطی (۸.۲) بدست می‌آوریم $\bar{x}^* = (\bar{x}_0^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_N^*)$ و بنابراین

$$x^N(t) = \sum_{j=0}^N \bar{x}_j^* L_j(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (11.2)$$

یک جواب تقریبی برای سیستم (۱.۲) می‌باشد.

۴.۲ آنالیز همگرایی

در این بخش، آنالیز همگرایی این روش را بررسی می‌کنیم. نشان می‌دهیم که محدودیت‌های مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (۸.۲) می‌تواند آزادسازی شود تا شدنی بودن جواب مسئله تضمین شود. در اینجا $W^{m,p}$ فضای سوبولف را نشان می‌دهد که شامل همه‌ی توابع $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ که $\eta^{(j)} : 0 \leq j \leq m$ در نرم L^p قرار می‌گیرد.

$$\|\eta\|_{W^{m,p}} = \sum_{j=0}^m \left(\int_0^T \|\eta^{(j)}(t)\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

که $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m)$ معادله (۸.۲) را می‌توان بصورت زیر آزادسازی کرد

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad J = \|x_{\circ} - \phi(\circ)\|^2 \\ & \text{subject to} \quad \begin{cases} \left\| \sum_{j=\circ}^N \bar{x}_j D_{kj} - f(t_k, x_k, \phi(\alpha t_k + \beta)) \right\| \leq (N-1)^{\frac{1}{2}-m}, \\ k = 1, 2, \dots, l_{\mu}, \\ \left\| \sum_{j=\circ}^N \bar{x}_j D_{kj} - f(t_k, x_k, \sum_{j=\circ}^N \bar{x}_j L_j(\alpha t_k + \beta)) \right\| \leq (N-1)^{\frac{1}{2}-m}, \\ k = l_{\mu} + 1, \dots, N. \end{cases} \end{aligned} \quad (12.2)$$

لم ۱.۴.۲. [۷] برای هر تابع $\eta(\cdot) \in W^{m,\infty}$ ، یک چندجمله‌ای $p_N(\cdot)$ از درجه حداکثر N وجود دارد به‌طوری که

$$\|\eta(t) - p_N(t)\|_{\infty} \leq CC_{\circ} N^{-m}, \quad \circ \leq t \leq T,$$

که C ثابت و مستقل از N است و $C_{\circ} = \|\eta\|_{W^{m,\infty}}$.

قضیه ۱.۴.۲. فرض کنید $x(\cdot) \in W^{m,\infty}$ ، $m \geq 2$ یک جواب برای مسئله (۳.۲) باشد. آنگاه عدد صحیح و مثبت مانند N_1 وجود دارد به‌طوری که برای هر $N > N_1$ ، مسئله (۱۲.۲) دارای یک جواب شدنی $\bar{x} = (\bar{x}_{\circ}, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$ است که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\|x(t_k) - \bar{x}_k\|_{\infty} \leq L(N-1)^{1-m}, \quad k = \circ, 1, \dots, N$$

که نقاط هم محلی است و L ثابت مثبت و مستقل از N است.

برهان. با استفاده از لم ۱.۴.۲ نشان می‌دهیم که یک چندجمله‌ای $p(\cdot)$ از درجه $(N-1)$ و ثابت C_1 مستقل از N وجود دارد به‌طوری که

$$\|\dot{x}(t) - p(t)\|_{\infty} \leq C_1 (N-1)^{1-m}.$$

تعریف می‌کنیم

$$x^N(t) = \int_{\circ}^t p(\tau) d\tau + x(\circ).$$

بنابراین داریم

$$\dot{x}^N(t) = p(t), \quad x^N(\circ) = x(\circ).$$

درنتیجه

$$\begin{aligned} \|x(t) - x^N(t)\|_{\infty} &= \left\| \int_{\circ}^t (\dot{x}(s) - p(s)) ds \right\|_{\infty} \\ &\leq \int_{\circ}^t \|\dot{x}(s) - p(s)\|_{\infty} ds \\ &\leq C_1 (N-1)^{1-m} \int_{\circ}^t ds \\ &\leq C_1 T (N-1)^{1-m}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

با استفاده از رابطه بالا، $x(t_k)$ و $\bar{x}_k$ برای $k = 0, 1, \dots, N$ یک مجموعه فشرده مانند $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ هستند. از آنجایی که $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ به‌طور پیوسته بر $[\cdot, T] \times \Omega^2$ مشتق‌پذیر است، یک ثابت M مستقل از N وجود دارد به‌طوری که

$$\|f(t, \eta_1, \eta_2) - f(t, \psi_1, \psi_2)\| \leq M (\|\eta_1 - \psi_1\| + \|\eta_2 - \psi_2\|), \quad (14.2)$$

برای همه (t, η_1, η_2) و (t, ψ_1, ψ_2) در $[\cdot, T] \times \Omega^2$. با استفاده از تعریف $x^N(\cdot)$ چندجمله‌ای از درجه کمتر یا مساوی N ، داریم

$$\sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj} = \dot{x}^N(t_k). \quad (15.2)$$

سپس برای رابطه (13.2)، (14.2) و (15.2) برای $k = 1, 2, \dots, l_\mu$ داریم،

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj} - f(t_k, \bar{x}_k, \phi(\alpha t_k + \beta)) \right\|_\infty \\ & \leq \|\dot{x}^N(t_k) - \dot{x}(t_k)\|_\infty + \|\dot{x}(t_k) - f(t_k, \bar{x}_k, \phi(\alpha t_k + \beta))\|_\infty \\ & = \|p(t_k) - \dot{x}(t_k)\|_\infty + \|f(t_k, x(t_k), \phi(\alpha t_k + \beta)) - f(t_k, \bar{x}_k, \phi(\alpha t_k + \beta))\|_\infty \\ & \leq C_1(N-1)^{1-m} + M(\|x(t_k) - \bar{x}_k\|_\infty + \|\phi(\alpha t_k + \beta) - \phi(\alpha t_k + \beta)\|_\infty) \\ & \leq C_1(N-1)^{1-m} + MC_1 T(N-1)^{1-m} = C_1(1+MT)(N-1)^{1-m}, \end{aligned}$$

و برای $k = l_\mu + 1, \dots, N$ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj} - f(t_k, \bar{x}_k, x^N(\alpha t_k + \beta)) \right\|_\infty \\ & \leq \|\dot{x}^N(t_k) - \dot{x}(t_k)\|_\infty + \|\dot{x}(t_k) - f(t_k, \bar{x}_k, x^N(\alpha t_k + \beta))\|_\infty \\ & \leq \|p(t_k) - \dot{x}(t_k)\|_\infty + \|f(t_k, x(t_k), x(\alpha t_k + \beta)) - f(t_k, \bar{x}_k, x^N(\alpha t_k + \beta))\|_\infty \\ & \leq C_1(N-1)^{1-m} + M(\|x(t_k) - \bar{x}_k\|_\infty + \|x(\alpha t_k + \beta) - x^N(\alpha t_k + \beta)\|_\infty) \\ & \leq C_1(N-1)^{1-m} + M(C_1 T(N-1)^{1-m} + C_1 T(N-1)^{1-m}) \\ & = C_1(1+2MT)(N-1)^{1-m}. \end{aligned}$$

در نتیجه با انتخاب $N_1 \in \mathbb{N}$ به‌طوری که $C_1(1+2MT) \leq (N-1)^{\frac{1}{\tau}}$ ، بدست می‌آوریم

$$\begin{cases} \left\| \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj} - f(t_k, \bar{x}_k, \phi(\alpha t_k + \beta)) \right\|_\infty \leq (N-1)^{\frac{1}{\tau}-m}, & k = 1, 2, \dots, l_\mu, \\ \left\| \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj} - f(t_k, \bar{x}_k, x(\alpha t_k + \beta)) \right\|_\infty \leq (N-1)^{\frac{1}{\tau}-m}, & k = l_\mu + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (16.2)$$

□

برای همه $N \geq N_1$.

اگر $(\bar{x}_0^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_N^*)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۸.۲) باشد، تعریف می‌کنیم

$$x_N^*(t) = \sum_{k=0}^N \bar{x}_k^* L_k(t), \quad t \in [0, T], \quad (17.2)$$

که $k = 0, 1, \dots, N, L_k(\cdot)$ چند جمله‌ای‌های لاگرانژ هستند. در اینجا مجموعه‌ای از جواب‌های گسسته $\{\bar{x}_0^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_N^*\}_{N=N_1}^\infty$ و مجموعه‌ای از توابع $\{x_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ را داریم.

فرض ۱.۴.۲. فرض می‌کنیم مجموعه $\{\bar{x}_0^*, \dot{x}_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ زیرمجموعه‌ای دارد که به‌طور یکنواخت همگرا به $\{x_0^\infty, q(\cdot)\}$ می‌باشد که $q(\cdot)$ تابعی پیوسته و $x_0^\infty \in \mathbb{R}^n$ است.

قضیه ۲.۴.۲. اگر $\{\bar{x}_0^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_N^*\}_{N=N_1}^\infty$ یک مجموعه از جواب بهینه مسئله (۸.۲) باشد و $\{x_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ مجموعه درونیابی شده آن‌ها باشد که در فرض ۱.۴.۲ صدق کند آنگاه

$$x^*(t) = \int_0^t q(\tau) d\tau + x_0^\infty, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (18.2)$$

یک جواب بهینه برای مسئله (۳.۲) است.

برهان. با استفاده از فرض ۱.۴.۲ $\{\dot{x}_{N_i}^*(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ یک زیرمجموعه از مجموعه $\{\dot{x}_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ است به‌طوری که $\lim_{i \rightarrow \infty} N_i = \infty$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} \dot{x}_{N_i}^*(\cdot) = q(\cdot)$. با استفاده از رابطه (۱۸.۲) و فرض ۱.۴.۲ داریم

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \dot{x}_{N_i}^*(\cdot) = \dot{x}^*(\cdot).$$

اثبات به دو مرحله تقسیم می‌شود، ابتدا نشان می‌دهیم که $x^*(\cdot)$ یک جواب شدنی برای مسئله (۳.۲) است. سپس ثابت می‌کنیم که $x^*(\cdot)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۳.۲) می‌باشد.

مرحله ۱. فرض کنیم که $x^*(\cdot)$ در محدودیت‌های مسئله (۳.۲) صدق نکند. بنابراین یک $\bar{t} \in [0, T]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\dot{x}(\bar{t}) - g(\bar{t}, x^*(\bar{t}), x^*(\alpha \bar{t} + \beta)) \neq 0,$$

که

$$g(t, x(t), x(\alpha t + \beta)) = \begin{cases} f(t, x(t), \phi(\alpha t + \beta)), & 0 < t \leq \mu, \\ f(t, x(t), x(\alpha t_k + \beta)), & \mu \leq t \leq T. \end{cases}$$

از آنجایی که مجموعه $\{t_k\}_{k=0}^\infty$ در بازه $[0, T]$ چگال هستند [۱۵] یک زیرمجموعه k_{N_i} وجود دارد به‌طوری که $0 < k_{N_i} < N_i$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} t_{k_{N_i}} = \bar{t}$. بنابراین

$$\dot{x}(\bar{t}) - g(\bar{t}, x^*(\bar{t}), x^*(\alpha \bar{t} + \beta)) = \lim_{i \rightarrow \infty} (\dot{x}_{N_i}^*(t_{k_{N_i}}) - g(t_{k_{N_i}}, x_{N_i}^*(t_{k_{N_i}}), x_{N_i}^*(\alpha t_{k_{N_i}} + \beta))) \neq 0.$$

از طرفی $\lim_{i \rightarrow \infty} (N_i - 1)^{\frac{1}{N_i - 1}} = 0$. بنابراین با استفاده از محدودیت‌های مسئله (۱۲.۲)، داریم

$$\lim_{i \rightarrow \infty} (\dot{x}_{N_i}^*(t_{k_{N_i}}) - g(t_{k_{N_i}}, x_{N_i}^*(t_{k_{N_i}}), x_{N_i}^*(\alpha t_{k_{N_i}} + \beta))) = 0.$$

که با رابطه (۱۹.۲) در تناقض است. بنابراین $\{x^*(\cdot)\}$ یک جواب شدنی برای مسئله (۳.۲) است.

مرحله ۲. اگر $x^{**}(\cdot) \in W^{m,\infty}, m \geq 2$ یک جواب بهینه برای مسئله (۳.۲) باشند، مجموعه‌ای از جواب‌های شدنی $\{\tilde{x}_0^*, \tilde{x}_1^*, \dots, \tilde{x}_N^*\}_{N=N_1}^\infty$ برای مسئله (۱۲.۲) وجود دارد به‌طوری که به‌طور یکنواخت به $x^{**}(\cdot)$ همگرا می‌شوند. بنابراین با استفاده از بهینگی $x^{**}(\cdot)$ و $\bar{x}^* = (\bar{x}_0^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_N^*)$ داریم

$$\begin{aligned} \circ &= \|x^{**}(\circ) - \phi(\circ)\|^2 \leq \|x^*(\circ) - \phi(\circ)\|^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \|x_{N_i}^*(\circ) - \phi(\circ)\|^2 \\ &= \|\bar{x}_0^* - \phi(\circ)\|^2 \leq \|\tilde{x}_0^* - \phi(\circ)\|^2 = \|x^{**}(\circ) - \phi(\circ)\|^2 = \circ. \end{aligned}$$

بنابراین $\|x^*(\circ) - \phi(\circ)\|^2 = \circ$ و $x^*(\cdot)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۳.۲) است. $\square$

۵.۲ مثال‌های عددی

در این بخش، کارایی روش ارائه شده را با حل چند مثال DDEs نشان می‌دهیم. در اینجا خطای مطلق را با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم

$$E(t) = \|x(t) - \bar{x}(t)\|, \quad 0 \leq t \leq T,$$

که $x(\cdot)$ و $\bar{x}(\cdot)$ به ترتیب جواب تقریبی و دقیق هستند. همچنین اگر جواب دقیق وجود نداشته باشد، خطای باقی‌مانده را با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم

$$E(t) = \left\| \dot{x}(t) - g(t, x(t), x(\alpha t + \beta)) \right\|, \quad 0 \leq t \leq T,$$

که $x(\cdot)$ جواب تقریبی بدست آمده می‌باشد. برای حل مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (۸.۲) بدست آمده از دستور FMINCON در نرم‌افزار متلب استفاده می‌کنیم.

مثال ۱.۵.۲. معادله تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{H}(t) = e^{-\gamma\mu} \mu H(t - \mu) - \gamma H(t), \quad 0 \leq t \leq T.$$

که $\gamma = 0.15$ ، $\mu = 0.25$ و $\phi(t) = e^{\wedge t}$. مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (۸.۲) متناظر با معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\text{Minimize} \quad J = (\bar{x}_0 - 1)^2,$$

$$\text{subject to} \begin{cases} \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj} = e^{-\gamma\mu} \mu \phi(t_k - \mu) - \gamma \bar{x}_k, & k = 1, 2, \dots, l_\mu, \\ \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj} = e^{-\gamma\mu} \mu \sum_{j=0}^N \bar{x}_j L_j(t_k - \mu) - \gamma \bar{x}_k, & k = l_\mu + 1, \dots, N. \end{cases}$$

که $\bar{x}_k \simeq H(t_k)$ با $T = 2$ و $N = 5$ مسئله را حل می‌کنیم. جواب بهینه $(\bar{x}_0^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_N^*)$ در جدول ۱.۲ نشان داده شده است. همچنین یک جواب تقریبی پیوسته به‌صورت

همچنین خطای جواب‌های تقریبی برای $N = 6$ و $N = 7$ در شکل ۱.۲ نشان داده شده است.

مثال ۲.۵.۲. معادله تاخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\ddot{y} + \varepsilon \dot{y} + \sin(y) = -\lambda \cos(y) (y(t - \mu) - y), \quad 0 \leq t \leq T,$$

که $\varepsilon = 0.1, T = 2, \mu = 1, \lambda = -0.15$ و $\dot{y}(t) = 0$ و $y(t) = 1$ برای $-\mu \leq t \leq 0$. ابتدا معادله را به دستگاه معادلات زیر تبدیل می‌کنیم

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), & 0 \leq t \leq 2, \\ \dot{x}_2(t) = -\lambda \cos(x_1) (x_1(t - \mu) - x_1) - \varepsilon x_2 - \sin(x_1), & 0 \leq t \leq 2, \\ x_1(t) = \phi_1(t) = 1, & -\mu \leq t \leq 0, \\ x_2(t) = \phi_2(t) = 0, & -\mu \leq t \leq 0, \end{cases}$$

که $x_1(t) = y(t)$ و $x_2(t) = \dot{y}(t)$ مسئله برنامه‌ریزی (۸.۲) مطابق مسئله بالا به شرح زیر است

$$\text{Minimize } J = (\bar{x}_{10} - 1)^2 + (\bar{x}_{20})^2,$$

subject to

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^N \bar{x}_{1j} D_{kj} = \bar{x}_{2k}, & k = 1, 2, \dots, N, \\ \sum_{j=0}^N \bar{x}_{2j} D_{kj} = -\lambda \cos(\bar{x}_{1k}) (\phi_1(t_k - \mu) - \bar{x}_{1k}) - \varepsilon \bar{x}_{2k} - \sin(\bar{x}_{1k}), & k = 1, \dots, l_\mu, \\ \sum_{j=0}^N \bar{x}_{2j} D_{kj} = -\lambda \cos(\bar{x}_{1k}) (\sum_{j=0}^N \bar{x}_{1j} l_j (t_k - \mu) - \bar{x}_{1k}) - \varepsilon \bar{x}_{2k} - \sin(\bar{x}_{1k}), & k = l_\mu + 1, \dots, N, \end{cases}$$

حال فرض می‌کنیم $T = 5$ و $N = 20$. مسئله برنامه‌ریزی خطی فوق را حل می‌کنیم. جواب تقریبی گسسته مانند $(\bar{x}_0^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_N^*)$ که در جدول ۲.۲ نشان داده شده است بدست می‌آوریم. جواب تقریبی پیوسته را می‌توان به صورت زیر بدست می‌آوریم

$$x(t) = \sum_{j=0}^N \bar{x}_j^* L_j(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

که در شکل ۳.۲ نشان داده شده است. خطای مانده از جواب تقریبی بالا برای مقادیر مختلف N در شکل ۴.۲ نشان داده شده است.

مثال ۳.۵.۲. معادله غیرخطی مرتبه اول DDE را در نظر بگیرید

$$\dot{x}(t) = x(t) + t x^2(0.5t) + f(t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

با شرط اولیه $x(0) = 0$ در اینجا فرض می‌کنیم که

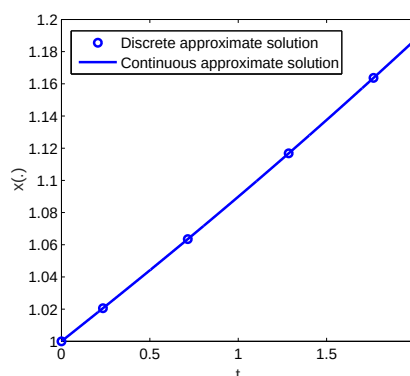
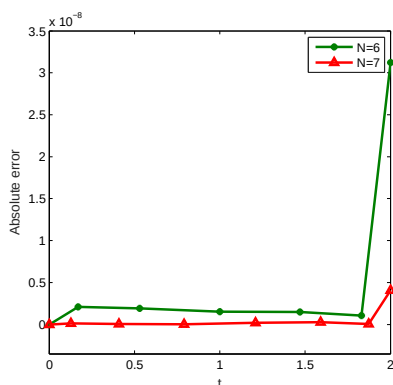
$$f(t) = 9(e^{t-1} - 1) + 9te^{t-1} - 9t(e^{t-1} - 1) - \frac{81}{4}t^3(e^{\frac{t}{3}-1} - 1)^2.$$

و $x(t) = 9t(e^{t-1} - 1)$ جواب دقیق DDE است. مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (۸.۲) مطابق با DDE به صورت زیر است

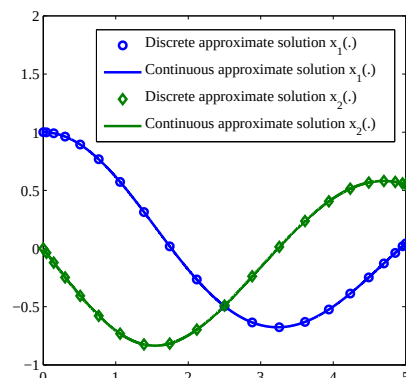
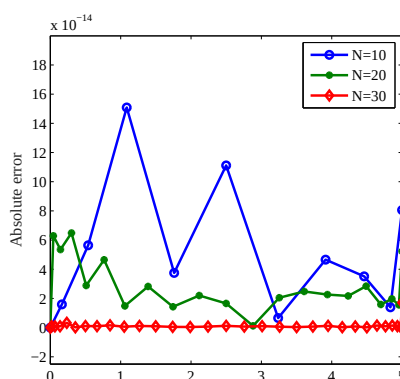
$$\text{Minimize } J = \bar{x}_0^2$$

$$\text{subject to } \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj} = \bar{x}_k + t_k \sum_{j=0}^N \bar{x}_j^2 L_j(t_k/\Delta t_k) + f(t_k), \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

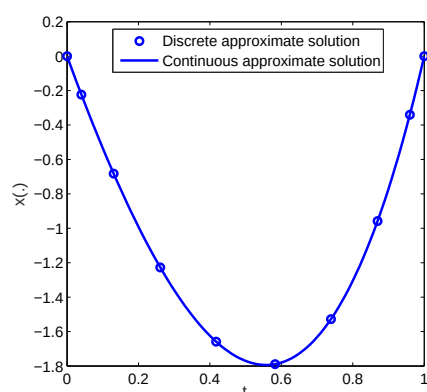
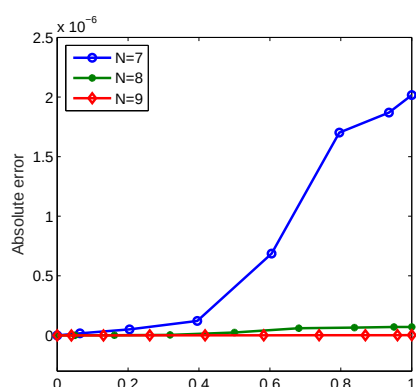
که $T = 1$ و $N = 9$ و جواب بهینه بدست آمده $(\bar{x}_0^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_N^*)$ که در جدول ۳.۲ نشان داده شده است. همچنین یک جواب تقریبی پیوسته مانند $x(t) = \sum_{j=0}^N \bar{x}_j^* L_j(t)$ ، $0 \leq t \leq T$ می‌توان مطرح کرد که در شکل ۵.۲ نشان داده شده است. خطای مطلق جواب‌های تقریبی برای مقادیر مختلف N در شکل ۶.۲ نشان داده شده است. همچنین خطای مطلق جواب‌های تقریبی بدست آمده را با روش بکار رفته در [۲۵] مقایسه می‌کنیم که در جدول ۴.۲ نشان داده شده است. نتایج در جدول ۴.۲ نشان می‌دهد که روش پیشنهادی ما برای DDE بهتر از جواب پیشنهادی در [۲۵] است.



شکل ۱.۲: جواب‌های تقریبی برای مثال ۱.۵.۲. شکل ۲.۲: خطای مطلق برای مثال ۱.۵.۲.



شکل ۳.۲: جواب‌های تقریبی برای مثال ۲.۵.۲. شکل ۴.۲: خطای مطلق برای مثال ۲.۵.۲.



شکل ۵.۲: جواب‌های تقریبی برای مثال ۳.۵.۲. شکل ۶.۲: خطای مطلق برای مثال ۳.۵.۲.

جدول ۱.۲: جواب‌های تقریبی برای مثال ۱.۵.۲.

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\bar{x}_k^*$	۱/۰۰۰۰۰	۱/۰۲۰۶	۱/۰۶۳۵	۱/۱۱۶۸	۱/۱۶۳۷	۱/۱۸۷۳

جدول ۲.۲: جواب‌های تقریبی برای مثال ۲.۵.۲.

k	$k=1,2$	$k=3,4$	$k=5,6$	$k=7,8$	$k=9,10$	$k=11,12$	$k=13,14$	$k=15,16$	$k=17,18$	$k=19,20$
$\bar{x}_k^*$	۰/۹۹۹۲	۰/۹۹۲۲	۰/۷۶۷۷	۰/۳۱۴۱	۰/۲۶۶۱	۰/۶۳۴۷	۰/۶۳۰۶	۰/۳۸۶۶	۰/۱۲۷۹	۰/۲۰۲
	۰/۹۹۱۲	۰/۸۹۳۹	۰/۵۷۲۷	۰/۱۹۳	۰/۴۹۴۹	۰/۶۷۶۲	۰/۵۲۳۷	۰/۲۴۷۹	۰/۳۷۳	۰/۴۴۴

جدول ۳.۲: جواب‌های تقریبی برای مثال ۳.۵.۲.

k	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
$\bar{x}_k^*$	۰/۰۰۰۰	-۰/۲۲۳۴	-۰/۶۸۲۷	-۱/۲۲۷۳	-۱/۶۵۸۷	-۱/۷۸۹۳	-۱/۵۲۸۰	-۰/۹۵۸۱	-۰/۳۴۰۶	۰/۰۰۰۰

جدول ۴.۲: مقایسه خطای مطلق برای مثال ۳.۵.۲.

t	روش در [۲۵] برای $N=100$	روش ارائه شده برای $N=9$
۰/۰۱	$۶/۱۹ \times 10^{-4}$	$۱/۸۳ \times 10^{-12}$
۰/۰۴	$۶/۴۰ \times 10^{-4}$	$۹/۳۳ \times 10^{-12}$
۰/۰۹	$۶/۷۷ \times 10^{-4}$	$۱/۰۵ \times 10^{-11}$
۰/۱۶	$۷/۲۹ \times 10^{-4}$	$۱/۷۱ \times 10^{-11}$
۰/۲۵	$۷/۹۳ \times 10^{-4}$	$۴/۸۳ \times 10^{-11}$
۰/۳۶	$۸/۵۹ \times 10^{-4}$	$۴/۵۸ \times 10^{-11}$
۰/۴۹	$۹/۰۴ \times 10^{-4}$	$۲/۰۲ \times 10^{-11}$
۰/۶۴	$۸/۸۵ \times 10^{-4}$	$۸/۹۱ \times 10^{-10}$
۰/۸۱	$۷/۳۵ \times 10^{-4}$	$۱/۲۹ \times 10^{-9}$

فصل ۳

روش شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل تاخیری

۱.۳ مقدمه

معادلات دیفرانسیل-انتگرال تاخیری^۱ کاربردهای وسیعی در علوم پایه و مهندسی دارند. در چند دهه گذشته معادلات دیفرانسیل-انتگرال تاخیری توجه بسیاری از محققین را به خود جذب کرده است. اخیراً روش‌های مختلفی برای حل معادلات انتگرالی یا معادلات دیفرانسیل-انتگرال ارائه شده‌اند. در [۱۳، ۱۸، ۳۹، ۴۹] روش رانگ کوتا^۲ برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال تاخیری استفاده شده است. همچنین روش‌های عددی گوناگونی برای معادلات دیفرانسیل و انتگرال تاخیری در [۲۴، ۲۳، ۴، ۵، ۱۶، ۴۱] بحث شده است. الهاواری^۳ و الشامی^۴ در [۱۲] ترکیبی از روش‌های اسپلین-طیفی را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترای تاخیری ارائه کردند. وی^۵ و چن^۶ در [۴۰] روش‌های هم‌محلی

¹Delay integro-differential equations

²Runge Kutta method

³El-Hawary

⁴El-Shami

⁵Wei

⁶Chen

طیفی لژاندر را برای حل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال ولترای تاخیری پانتوگراف بکار برده‌اند. بلور^۷ و بوسلسال^۸ در [۲] یک رویکرد عددی جدیدی براساس چندجمله‌ای‌های تیلور هم‌محلی پیوسته برای حل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال تاخیری بکار برده‌اند. ریحان^۹ و همکارانش در [۲۹] یک تکنیک جدید برای حل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرال ولترای تاخیری که کاربردهای بسیاری در علوم زیست‌شناسی و فیزیک دارند بکار برده‌اند. در [۳۶، ۵۰] روش‌های طیفی برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی تاخیری با هسته منفرد بطور ضعیف استفاده شده است. توحیدی^{۱۰} و صمدی^{۱۱} در [۳۸] یک رویکرد عددی موثر جهت حل مسائل کنترل بهینه برای معادلات انتگرالی ولترای غیر خطی بر اساس چند جمله ایهای لژاندر بکار برده‌اند.

در این فصل، یک روش عددی جدیدی برای حل رده‌ای از معادلات دیفرانسیل-انتگرال تاخیری ارائه می‌دهیم. ابتدا با یک تکنیک تابع مربوط به تاخیر را در معادله دیفرانسیل-انتگرال لحاظ می‌کنیم. سپس یک مساله بهینه‌سازی پیوسته زمانی معادل ارائه می‌دهیم و روش شبه‌طیفی لژاندر را برای حل آن پیشنهاد می‌کنیم. در این روش از نقاط هم‌محلی لژاندر-گاوس-لوباتو برای تبدیل مساله به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی استفاده می‌کنیم و با حل چند مثال عددی کارایی و قابلیت روش را نشان می‌دهیم.

۲.۳ معادله انتگرال-دیفرانسیل تاخیری غیرخطی

در این فصل، معادله انتگرال-دیفرانسیل تاخیری غیرخطی زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = f(x, y(x), y(x-\mu)) + \int_{x-\mu}^x g(x, s, y(s))ds, & 0 < x \leq T, \\ y(x) = \phi(x), & -\mu \leq x \leq 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

که $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $g : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $\phi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ توابع مشتق‌پذیر می‌باشند، $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع مجهول و $0 < \mu < T$ مقدار ثابت است. فرض می‌کنیم که دستگاه (۱.۳) دارای جواب است.

۳.۳ پیاده‌سازی روش

به ترتیب از تبدیلات $s_1 = \frac{\mu-x}{\tau}t + \frac{x-\mu}{\tau}$ ، $s_2 = \frac{x}{\tau}t + \frac{x}{\tau}$ و $s_3 = \frac{\mu}{\tau}t + \frac{x-\mu}{\tau}$ برای انتقال بازه از $[x-\mu, 0]$ ، $[0, x]$ و $[x-\mu, x]$ به $[-1, 1]$ استفاده می‌کنیم. با این فرض دستگاه (۱.۳) به

⁷Bellour

⁸Bousselsal

⁹Rihan

¹⁰Tohidi

¹¹Samadi

دستگاه معادل زیر تبدیل می‌شود
(۲.۳)

$$\dot{y}(x) = \begin{cases} f(x, y(x), \phi(x - \mu)) + \frac{\mu - x}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} g\left(x, \frac{\mu - x}{\varphi}t + \frac{x - \mu}{\varphi}, \phi\left(\frac{\mu - x}{\varphi}t + \frac{x - \mu}{\varphi}\right)\right) dt \\ \quad + \frac{x}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} g\left(x, \frac{x}{\varphi}t + \frac{x}{\varphi}, y\left(\frac{x}{\varphi}t + \frac{x}{\varphi}\right)\right) dt, & 0 < x \leq \mu \\ f(x, y(x), y(x - \mu)) + \frac{\mu}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} g\left(x, \frac{\mu}{\varphi}t + \frac{\varphi x - \mu}{\varphi}, y\left(\frac{\mu}{\varphi}t + \frac{\varphi x - \mu}{\varphi}\right)\right) dt, & \mu < x \leq T, \\ y(0) = \phi(0). \end{cases}$$

اکنون مسئله بهینه‌سازی پیوسته زمانی زیر را پیشنهاد می‌کنیم

$$\text{Minimize } J = (y(0) - \phi(0))^2$$

subject to

$$\dot{y}(x) = \begin{cases} f(x, y(x), \phi(x - \mu)) + \frac{\mu - x}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} g\left(x, \frac{\mu - x}{\varphi}t + \frac{x - \mu}{\varphi}, \phi\left(\frac{\mu - x}{\varphi}t + \frac{x - \mu}{\varphi}\right)\right) dt \\ \quad + \frac{x}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} g\left(x, \frac{x}{\varphi}t + \frac{x}{\varphi}, y\left(\frac{x}{\varphi}t + \frac{x}{\varphi}\right)\right) dt, & 0 < x \leq \mu \\ f(x, y(x), y(x - \mu)) + \frac{\mu}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} g\left(x, \frac{\mu}{\varphi}t + \frac{\varphi x - \mu}{\varphi}, y\left(\frac{\mu}{\varphi}t + \frac{\varphi x - \mu}{\varphi}\right)\right) dt, & \mu < x \leq T. \end{cases} \quad (3.3)$$

اکنون مسئله بهینه‌سازی (۳.۳) به مسئله زیر تبدیل می‌شود

$$\text{Minimize } J = (y_0 - \phi(0))^2,$$

subject to

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^N \bar{y}_j D_{kj} = f(x_k, \bar{y}_k, \phi(x_k - \mu)) + \frac{\mu - x_k}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} g\left(x_k, \frac{\mu - x_k}{\varphi}t + \frac{x_k - \mu}{\varphi}, \phi\left(\frac{\mu - x_k}{\varphi}t + \frac{x_k - \mu}{\varphi}\right)\right) dt \\ \quad + \frac{x_k}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} g\left(x_k, \frac{x_k}{\varphi}t + \frac{x_k}{\varphi}, y^N\left(\frac{x_k}{\varphi}t + \frac{x_k}{\varphi}\right)\right) dt \quad k = 1, 2, \dots, l_\mu, \\ \sum_{j=0}^N \bar{y}_j D_{kj} = f(x_k, \bar{y}_k, y^N(x_k - \mu)) + \frac{\mu}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} g\left(x_k, \frac{\mu}{\varphi}t + \frac{\varphi x_k - \mu}{\varphi}, y^N\left(\frac{\mu}{\varphi}t + \frac{\varphi x_k - \mu}{\varphi}\right)\right) dt \\ \quad k = l_\mu + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (4.3)$$

در اینجا فرض می‌کنیم که اندیس l_μ در رابطه $x_{l_\mu} \leq \mu < x_{l_\mu+1} < T$ صدق می‌کند. انتگرال در محدودیت مسئله (۴.۳) می‌تواند با استفاده از لم زیر تقریب زده شود.

لم ۱.۳.۳. برای هر چندجمله‌ای $P(\cdot)$ از درجه $2N - 1$ ، فرمول زیر دقیق است

$$\int_{-1}^1 P(t) dt \simeq \sum_{j=0}^N P(t_j) \omega_j,$$

که

$$\omega_j = \frac{2}{N(N+1)} \cdot \frac{1}{(P_N(t_j))^2}, \quad j = 0, 1, \dots, N.$$

$P_N(\cdot)$ و $\{t_j\}_{j=0}^N$ به ترتیب نقاط لژاندر- گاوس- لوباتو انتقال یافته و چندجمله‌ای لژاندر انتقال یافته از درجه N در $[-1, 1]$ می‌باشند.

□

برهان. اثبات در قضیه ۲۹.۳ مرجع [۳۵].

اکنون مسئله (۴.۳) می‌تواند به مسئله زیر تبدیل شود

$$\text{Minimize } J = (y_0 - \phi(0))^2,$$

subject to

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^N \bar{y}_j D_{kj} = f(x_k, \bar{y}_k, \phi(x_k - \mu)) + \frac{\mu - x_k}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^N \omega_j g\left(x_k, \frac{\mu - x_k}{\sqrt{2}} t_j + \frac{x_k - \mu}{\sqrt{2}}, \right. \\ \left. \phi\left(\frac{\mu - x_k}{\sqrt{2}} t_j + \frac{x_k - \mu}{\sqrt{2}}\right) + \frac{x_k}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^N \omega_j g\left(x_k, \frac{x_k}{\sqrt{2}} t_j + \frac{x_k}{\sqrt{2}}, \sum_{i=0}^N y_i L_i\left(\frac{x_k}{\sqrt{2}} t_j + \frac{x_k}{\sqrt{2}}\right)\right), \right. \\ \left. k = 1, 2, \dots, l_\mu, \right. \\ \sum_{j=0}^N \bar{y}_j D_{kj} = f\left(x_k, \bar{y}_k, \sum_{i=0}^N \bar{y}_i L_i(x_k - \mu)\right) + \frac{\mu}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^N \omega_j g\left(x_k, \frac{\mu}{\sqrt{2}} t_j + \frac{\sqrt{2} x_k - \mu}{\sqrt{2}}, \right. \\ \left. \sum_{i=0}^N y_i L_i\left(\frac{\mu}{\sqrt{2}} t_j + \frac{\sqrt{2} x_k - \mu}{\sqrt{2}}\right)\right), \quad k = l_\mu + 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

با حل مسئله بهینه‌سازی (۴.۳)، $\bar{y}^* = (\bar{y}_0^*, \bar{y}_1^*, \dots, \bar{y}_N^*)$ بدست می‌آید و بنابراین

$$y^N(x) = \sum_{j=0}^N \bar{y}_j^* L_j(x), \quad 0 \leq x \leq T \quad (6.3)$$

یک جواب تقریبی برای دستگاه (۱.۳) می‌باشد.

۴.۳ آنالیز همگرایی

در این بخش، همگرایی این روش را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که محدودیت‌های مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی (۴.۳) می‌تواند آزادسازی شود تا شدنی بودن مسئله تضمین شود. مسئله

(۵.۳) به صورت زیر آزادسازی می شود

$$\text{Minimize } J = (y_\circ - \phi(\circ))^{\mathfrak{r}},$$

subject to

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{j=\circ}^N \bar{y}_j D_{kj} - f(x_k, \bar{y}_k, \phi(t_k - \mu)) - \frac{\mu - x_k}{\mathfrak{r}} \int_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} g\left(x_k, \frac{\mu - x_k}{\mathfrak{r}} t + \frac{x_k - \mu}{\mathfrak{r}}, \right. \right. \\ \left. \left. \phi\left(\frac{\mu - x_k}{\mathfrak{r}} t + \frac{x_k - \mu}{\mathfrak{r}}\right) dt - \frac{x_k}{\mathfrak{r}} \int_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} g\left(x_k, \frac{x_k}{\mathfrak{r}} t + \frac{x_k}{\mathfrak{r}}, y^N\left(\frac{x_k}{\mathfrak{r}} t + \frac{x_k}{\mathfrak{r}}\right)\right) dt \right| \leq (N - \mathfrak{r})^{\mathfrak{r}-m}, \\ k = \mathfrak{r}, \mathfrak{r} + 1, \dots, l_\mu, \\ \left| \sum_{j=\circ}^N \bar{y}_j D_{kj} - f(x_k, \bar{y}_k, y^N(t_k - \mu)) - \frac{\mu}{\mathfrak{r}} \int_{-\mathfrak{r}}^{\mathfrak{r}} g\left(x_k, \frac{\mu}{\mathfrak{r}} t + \frac{\mathfrak{r} x_k - \mu}{\mathfrak{r}}, \right. \right. \\ \left. \left. y^N\left(\frac{\mu}{\mathfrak{r}} t + \frac{\mathfrak{r} x_k - \mu}{\mathfrak{r}}\right) dt \right| \leq (N - \mathfrak{r})^{\mathfrak{r}-m} \quad k = l_\mu + \mathfrak{r}, \dots, N, \end{array} \right. \quad (7.3)$$

از آنجایی که $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ و $g(\cdot, \cdot, \cdot)$ به طور پیوسته مشتق پذیر در $[\circ, T] \times \Omega^{\mathfrak{r}}$ و $[\circ, T]^{\mathfrak{r}} \times \Omega$ می باشند،
ثابت های $M_{\mathfrak{r}}$ و $M_{\mathfrak{r}}$ مستقل از N وجود دارند به طوری که

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(x, \eta_{\mathfrak{r}}, \eta_{\mathfrak{r}}) - f(x, \psi_{\mathfrak{r}}, \psi_{\mathfrak{r}})| \leq M_{\mathfrak{r}} (|\eta_{\mathfrak{r}} - \psi_{\mathfrak{r}}| + |\eta_{\mathfrak{r}} - \psi_{\mathfrak{r}}|), \\ |g(x, t, \eta_{\mathfrak{r}}) - g(x, t, \eta_{\mathfrak{r}})| \leq M_{\mathfrak{r}} |\eta_{\mathfrak{r}} - \eta_{\mathfrak{r}}|, \end{array} \right. \quad (8.3)$$

که در آن $(x, \eta_{\mathfrak{r}}, \eta_{\mathfrak{r}})$ و $(x, \psi_{\mathfrak{r}}, \psi_{\mathfrak{r}})$ در $[\circ, T] \times \Omega^{\mathfrak{r}}$ و $(x, t, \eta_{\mathfrak{r}})$ و $(x, t, \eta_{\mathfrak{r}})$ در $[\circ, T]^{\mathfrak{r}} \times \Omega$ می باشند.
برای هر چند جمله ای از درجه حداکثر N ، در نقاط لژاندر-گوس-لوباتو انتقال یافته $x_\circ, x_{\mathfrak{r}}, \dots, x_N$ مشتق محاسبه شده و به طور دقیق در ماتریس D ضرب شده است. پس داریم

$$\sum_{j=\circ}^N \bar{y}_j D_{kj} = \dot{y}^N(x_k). \quad (9.3)$$

برای $k = 1, 2, \dots, l_\mu$ داریم

$$\begin{aligned}
 & \left| \dot{y}^N(x_k) - f((x_k, y^N(x_k), \phi(x_k - \mu)) - \frac{\mu - x_k}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g \left(x_k, \frac{\mu - x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k - \mu}{\Upsilon}, \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \phi \left(\frac{\mu - x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k - \mu}{\Upsilon} \right) \right) dt - \frac{x_k}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g \left(x_k, \frac{x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k}{\Upsilon}, y^N \left(\frac{x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k}{\Upsilon} \right) \right) dt \right| \\
 & \leq |\dot{y}^N(x_k) - \dot{y}(x_k)| + |f(x_k, y^N(x_k), \phi(x_k - \mu)) - f(x_k, y(x_k), \phi(x_k - \mu))| \\
 & \quad + \left| \frac{x_k}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g \left(x_k, \frac{x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k}{\Upsilon}, y^N \left(\frac{x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k}{\Upsilon} \right) \right) dt \right. \\
 & \quad \left. - \frac{x_k}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g \left(x_k, \frac{x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k}{\Upsilon}, y \left(\frac{x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k}{\Upsilon} \right) \right) dt \right| \\
 & \quad + \left| \dot{y}(x_k) - f(x_k, y(x_k), \phi(x_k - \mu)) - \frac{\mu - x_k}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g \left(x_k, \frac{\mu - x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k - \mu}{\Upsilon}, \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \phi \left(\frac{\mu - x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k - \mu}{\Upsilon} \right) \right) dt - \frac{x_k}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g \left(x_k, \frac{x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k}{\Upsilon}, y \left(\frac{x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k}{\Upsilon} \right) \right) dt \right| \\
 & \leq |p(x_k) - \dot{y}(x_k)| + M_1 (|y^N(x_k) - y(x_k)| \\
 & \quad + M_\Upsilon \frac{x_k}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} \left| y^N \left(\frac{x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k}{\Upsilon} \right) - y \left(\frac{x_k}{\Upsilon} t + \frac{x_k}{\Upsilon} \right) \right| dt \\
 & \leq C_1 (N-1)^{1-m} + M_1 T C_1 (N-1)^{1-m} + M_\Upsilon C_1 T^\Upsilon (N-1)^{1-m} \\
 & = C_1 (N-1)^{1-m} (1 + M_1 T + M_\Upsilon T^\Upsilon),
 \end{aligned}$$

و برای هر $k = l_\mu + 1, \dots, N$ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 & \left| \dot{y}^N(x_k) - f(x_k, y^N(x_k), y^N(x_k - \mu)) - \frac{\mu}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g \left(x_k, \frac{\mu}{\Upsilon} t + \frac{\Upsilon x_k - \mu}{\Upsilon}, y^N \left(\frac{\mu}{\Upsilon} t + \frac{\Upsilon x_k - \mu}{\Upsilon} \right) \right) dt \right| \\
 & \leq |\dot{y}^N(x_k) - \dot{y}(x_k)| + |f(x_k, y(x_k), y(x_k - \mu)) - f(x_k, y^N(x_k), y^N(x_k - \mu))| \\
 & \quad + \left| \frac{\mu}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g \left(x_k, \frac{\mu}{\Upsilon} t + \frac{\Upsilon x_k - \mu}{\Upsilon}, y^N \left(\frac{\mu}{\Upsilon} t + \frac{\Upsilon x_k - \mu}{\Upsilon} \right) \right) dt \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\mu}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g \left(x_k, \frac{\mu}{\Upsilon} t + \frac{\Upsilon x_k - \mu}{\Upsilon}, y \left(\frac{\mu}{\Upsilon} t + \frac{\Upsilon x_k - \mu}{\Upsilon} \right) \right) dt \right| \\
 & \quad + \left| \dot{y}(x_k) - f(x_k, y(x_k), y(x_k - \mu)) - \frac{\mu}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g \left(x_k, \frac{\mu}{\Upsilon} t + \frac{\Upsilon x_k - \mu}{\Upsilon}, y \left(\frac{\mu}{\Upsilon} t + \frac{\Upsilon x_k - \mu}{\Upsilon} \right) \right) dt \right| \\
 & \leq |p(x_k) - \dot{y}(x_k)| + M_1 (|y^N(x_k) - y(x_k)| + |y^N(x_k - \mu) - y(x_k - \mu)|) \\
 & \quad + M_\Upsilon \frac{\mu}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} \left| y^N \left(\frac{\mu}{\Upsilon} t + \frac{\Upsilon x_k - \mu}{\Upsilon} \right) - y \left(\frac{\mu}{\Upsilon} t + \frac{\Upsilon x_k - \mu}{\Upsilon} \right) \right| dt \\
 & \leq C_1 (N-1)^{1-m} + \Upsilon M_1 T C_1 (N-1)^{1-m} + M_\Upsilon \mu C_1 T (N-1)^{1-m} \\
 & = C_1 (N-1)^{1-m} (1 + \Upsilon M_1 T + M_\Upsilon \mu T),
 \end{aligned}$$

که M_1, M_2 ثابت‌های لپ‌شیتز هستند. عدد صحیح مثبت N_1 را در نظر می‌گیریم به‌طوری که برای همه $N \geq N_1$

$$\max\{C_1(1 + M_1T + M_2T^2), C_1(1 + 2M_1T + M_2T\mu)\} \leq (N - 1)^{\frac{1}{2}}$$

بنابراین $\bar{y} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N)$ در محدودیت‌های مسئله (۷.۳) صدق می‌کند. اگر $(\bar{y}_0^*, \bar{y}_1^*, \dots, \bar{y}_N^*)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۷.۳) باشد. تعریف می‌کنیم

$$y_*^N(x) = \sum_{k=0}^N \bar{y}_k^* L_k(x), \quad x \in [0, T], \quad (10.3)$$

که $L_k(\cdot)$, $k = 0, 1, \dots, N$ چندجمله‌ای‌های درونیاب لژاندر هستند. بنابراین یک مجموعه از جواب‌های مستقیم $\{\bar{y}_0^*, \bar{y}_1^*, \dots, \bar{y}_N^*\}_{N=N_1}^\infty$ و مجموعه‌ای از توابع درونیاب $\{y_*^N(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ را داریم.

فرض ۱.۴.۳. فرض کنید دنباله $\{\bar{y}_0^*, \bar{y}_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ زیردنباله‌ای دارد که به‌طور یکنواخت همگرا به $\{y_*^\infty, q(\cdot)\}$ می‌باشد که $q(\cdot)$ تابع پیوسته و $y_*^\infty \in \mathbb{R}^n$ است.

قضیه ۱.۴.۳. اگر $\{\bar{y}_0^*, \bar{y}_1^*, \dots, \bar{y}_N^*\}_{N=N_1}^\infty$ دنباله‌ای از جواب‌های بهینه مسئله (۷.۳) باشد و $\{y_*^N(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ دنباله درونیاب آن‌ها باشد که در فرض ۱.۴.۳ صدق کند آن‌گاه

$$y_*(x) = \int_0^x q(\tau) d\tau + y_*^\infty, \quad 0 \leq x \leq T, \quad (11.3)$$

یک جواب بهینه برای مسئله (۳.۳) است.

برهان. با استفاده از فرض ۱.۴.۳ نشان می‌دهیم که زیردنباله $\{\dot{y}_*^{N_i}(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ از دنباله $\{\dot{y}_*^N(\cdot)\}_{N=1}^\infty$ وجود دارد به‌طوری که $\lim_{i \rightarrow \infty} N_i = \infty$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} \dot{y}_*^{N_i}(\cdot) = q(\cdot)$ با استفاده از فرض ۱.۴.۳ بدست می‌آوریم $\lim_{i \rightarrow \infty} \dot{y}_*^{N_i}(\cdot) = y_*(\cdot)$. همچنین با در نظر گرفتن مسئله (۱۱.۳) و فرض ۱.۴.۳ داریم

$$J = (\bar{y}_0^* - \phi(0))^2 = \left(\lim_{i \rightarrow \infty} y_*^{N_i} - \phi(0) \right)^2 = (y_*(0) - \phi(0))^2 = 0.$$

اکنون نشان می‌دهیم $y_*(\cdot)$ یک جواب شدنی است.

فرض کنیم که $y_*(\cdot)$ در محدودیت‌های مسئله (۳.۳) صدق نمی‌کند. بنابراین یک $\bar{x} \in [0, T]$ وجود دارد به‌طوری که

$$\dot{y}_*(\bar{x}) - \psi(\bar{x}, y_*(\bar{x}), y_*(\bar{x} - \mu)) \neq 0,$$

که

$$\psi(x, y_*(x), y_*(x - \mu)) = \begin{cases} f(x, y_*(x), \phi(x - \mu)) + \frac{\mu - x}{\tau} \int_{-1}^1 g\left(x, \frac{\mu - x}{\tau}t + \frac{x - \mu}{\tau}, \phi\left(\frac{\mu - x}{\tau}t + \frac{x - \mu}{\tau}\right)\right) dt \\ + \frac{x}{\tau} \int_{-1}^1 g\left(x, \frac{x}{\tau}t + \frac{x}{\tau}, y_*\left(\frac{x}{\tau}t + \frac{x}{\tau}\right)\right) dt & 0 < x \leq \mu \\ f(x, y_*(x), y_*(x - \mu)) + \frac{\mu}{\tau} \int_{-1}^1 g\left(x, \frac{\mu}{\tau}t + \frac{\tau x - \mu}{\tau}, y_*\left(\frac{\mu}{\tau}t + \frac{\tau x - \mu}{\tau}\right)\right) dt, & \mu < x \leq T, \end{cases}$$

از آنجا که مجموعه $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ در $[0, T]$ چگال هستند [۱۵] یک زیر دنباله $x_{k_{N_i}}$ وجود دارد به طوری که $0 < k_{N_i} < N_i$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_{N_i}} = \bar{x}$. بنابراین

$$\dot{y}_*(\bar{x}) - \psi(\bar{x}, y_*(\bar{x}), y_*(\bar{x} - \mu)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\dot{y}_*^{N_i}(x_{k_{N_i}}) - \psi(x_{k_{N_i}}, y_*^{N_i}(x_{k_{N_i}}), y_*^{N_i}(x_{k_{N_i}} - \mu)) \right) \neq 0. \quad (12.3)$$

از طرفی دیگر $\lim_{i \rightarrow \infty} (N_i - 1)^{\frac{3}{2} - m} = 0$. بنابراین با استفاده از محدودیت‌های مسئله (۷.۳) داریم

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\dot{y}_*^{N_i}(x_{k_{N_i}}) - \psi(x_{k_{N_i}}, y_*^{N_i}(x_{k_{N_i}}), y_*^{N_i}(x_{k_{N_i}} - \mu)) \right) = 0.$$

که با رابطه (۱۲.۳) در تناقض است. بنابراین $\{y_*(\cdot)\}$ یک جواب شدنی برای مسئله (۳.۳) است و اثبات کامل می‌شود. $\square$

۵.۳ مثال‌های عددی

مثال ۱.۵.۳. معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{y}(x) = y(x - 1) + \int_{x-1}^x y(s) ds, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

که $y(x) = \phi(x) = e^x$ و $-1 \leq x \leq 0$ جواب دقیق معادله است. جواب‌های تقریبی و جواب‌های دقیق برای $N = 10$ در شکل ۱.۳ نشان داده شده است. خطاهای مطلق برای $N = 6, 8, 10, 12$ در شکل ۲.۳ نمایش داده شده که نشان می‌دهد با افزایش N خطا به صفر میل می‌کند.

مثال ۲.۵.۳. معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{y}(x) = (\lambda - 1)e^{1-x} - (\lambda + 1)y(x) + y(x - 1) - \lambda \int_{x-1}^x y(s) ds, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

که $y(x) = \phi(x) = e^{-x}$ و $-1 \leq x \leq 0$ جواب دقیق معادله است. خطای مطلق را با روش ارائه شده برای $\lambda = 3$ محاسبه می‌کنیم. جواب‌های تقریبی و جواب‌های دقیق برای

$N = 10$ در شکل ۳.۳ نشان داده شده است. خطاهای مطلق برای $N = 6, 8, 10, 12$ در شکل ۴.۳ نشان داده شده است که نشان می‌دهد با افزایش N خطا به صفر میل می‌کند.

مثال ۳.۵.۳. معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{y}(x) = g(x) + \int_{x-1}^x k(x, s)y(s) ds, \quad 0 \leq x \leq 3,$$

که $y(x) = \phi(x) = \sin(x) + 1$ برای $-1 \leq x \leq 0$ ، $k(x, s) = \cos(x + s + 1) + 2$ و g را طوری انتخاب می‌کنیم که $y(x) = \sin(x) + 1$ جواب دقیق معادله باشد. در شکل ۵.۳ جواب دقیق و تقریبی برای $N = 10$ نشان داده شده است. خطاهای مطلق برای $N = 8, 10, 12, 14$ در شکل ۶.۳ نشان داده شده است که نشان می‌دهد با افزایش N خطا به صفر میل می‌کند. همچنین خطاهای مطلق روش پیشنهادی را با روش [۲] مقایسه کرده که در جدول ۱.۳ نشان داده است.

مثال ۴.۵.۳. معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{y}(x) = g(x) + \int_{x-1}^x k(x, s)y(s) ds, \quad 0 \leq x \leq 6,$$

که $y(x) = \phi(x) = \cos(x) e^{-x}$ برای $-1 \leq x \leq 0$ ، $k(x, s) = (x - s) e^{x-s}$ و g را طوری انتخاب می‌کنیم که $y(x) = \cos(x) e^{-x}$ جواب دقیق معادله باشد. در شکل ۷.۳ جواب دقیق و تقریبی برای $N = 15$ نشان داده شده است. همچنین خطاهای مطلق برای $N = 13, 15, 17, 19$ در شکل ۸.۳ نمایش داده شده است که نشان می‌دهد با افزایش N خطا به صفر میل می‌کند. همچنین خطاهای مطلق روش پیشنهادی را با روش [۲] مقایسه کرده که در جدول ۲.۳ نشان داده شده است.

مثال ۵.۵.۳. معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا غیرخطی تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{y}(x) = y(x-1) + g(x) + \int_{x-1}^x y^2(s) ds, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

که $y(x) = \phi(x) = e^x$ ، $-1 \leq x \leq 0$ و $g(\cdot)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $y(x) = e^x$ جواب دقیق معادله باشد. شکل ۹.۳ جواب دقیق و تقریبی را برای $N = 10$ نشان می‌دهد. خطاهای مطلق برای $N = 10, 12, 14$ در شکل ۱۰.۳ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که وقتی N افزایش می‌یابد خطا به صفر میل می‌کند.

مثال ۶.۵.۳. معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا غیرخطی تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\dot{y}(x) = y^2(x-1) + \int_{x-1}^x \sin(y) ds, \quad 0 \leq x \leq 2,$$

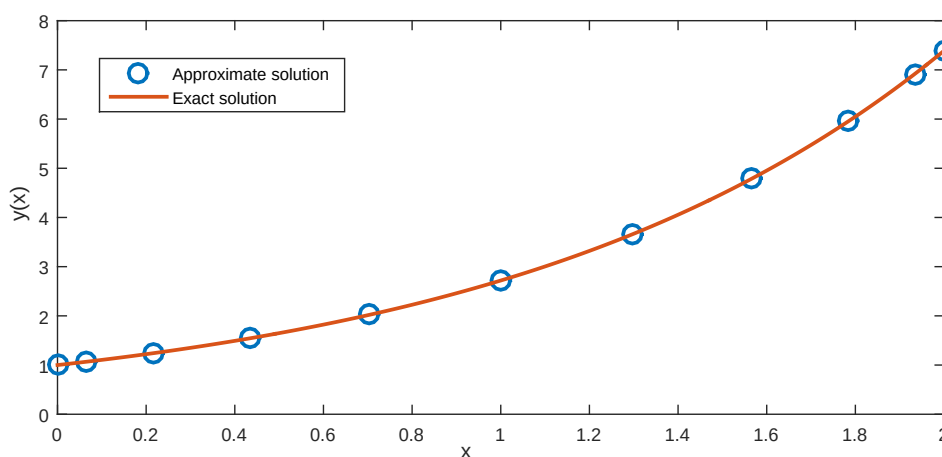
که $y(x) = \phi(x) = \sin(x)$ ، $-1 \leq x < 0$ معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا جواب دقیق ندارد. یک جواب تقریبی را محاسبه کرده و خطای باقیمانده را بدست آوردیم. جواب تقریبی برای $N = 10$ و خطای باقیمانده برای $N = 6, 8, 10$ به ترتیب در شکل ۱۱.۳ و شکل ۱۲.۳ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که وقتی N افزایش می‌یابد خطا به صفر میل می‌کند.

جدول ۱.۳: خطاهای مطلق برای مثال ۳.۵.۳

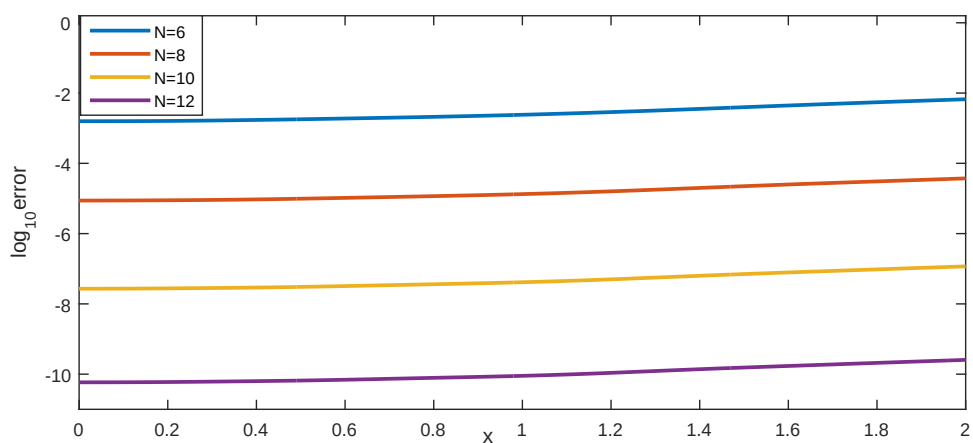
x	روش هم محلی تیلور برای روش لژاندر ارائه شده برای $N+1=13$ $M=N=5, r=3$ تعداد نقاط هم محلی $r(N+1)=21$ [۲]	روش هم محلی تیلور برای روش لژاندر ارائه شده برای $N+1=11$ $M=N=4, r=3$ تعداد نقاط هم محلی $r(N+1)=15$ [۲]	روش هم محلی تیلور برای روش لژاندر ارائه شده برای $N+1=11$ $M=N=4, r=3$ تعداد نقاط هم محلی $r(N+1)=15$ [۲]
۰/۵	$0/378 \times 10^{-8}$	$0/1 \times 10^{-8}$	$0/104 \times 10^{-5}$
۱	$0/571 \times 10^{-8}$	$0/7 \times 10^{-8}$	$0/213 \times 10^{-5}$
۱/۵	$0/831 \times 10^{-8}$	$0/13 \times 10^{-7}$	$0/303 \times 10^{-5}$
۲	$0/136 \times 10^{-7}$	$0/26 \times 10^{-7}$	$0/412 \times 10^{-5}$
۲/۵	$0/271 \times 10^{-7}$	$0/47 \times 10^{-7}$	$0/619 \times 10^{-5}$
۳	$0/582 \times 10^{-7}$	$0/89 \times 10^{-7}$	$0/1 \times 10^{-4}$

جدول ۲.۳: خطاهای مطلق برای مثال ۴.۵.۳

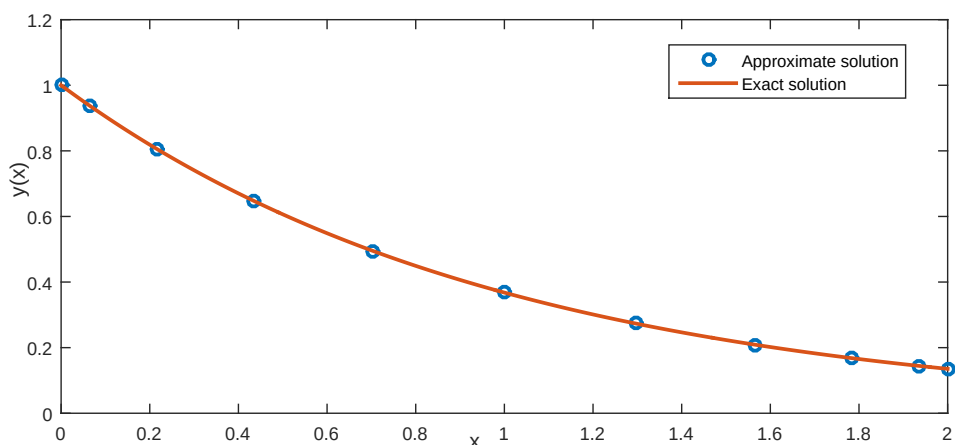
x	روش هم محلی تیلور برای روش لژاندر ارائه شده برای $N+1=18$ $M=N=6, r=6$ تعداد نقاط هم محلی $r(N+1)=42$ [۲]	روش هم محلی تیلور برای روش لژاندر ارائه شده برای $N+1=16$ $M=N=5, r=6$ تعداد نقاط هم محلی $r(N+1)=36$ [۲]	روش هم محلی تیلور برای روش لژاندر ارائه شده برای $N+1=16$ $M=N=5, r=6$ تعداد نقاط هم محلی $r(N+1)=36$ [۲]
۱	$0/178 \times 10^{-7}$	$0/143 \times 10^{-7}$	$0/805 \times 10^{-6}$
۲	$0/345 \times 10^{-7}$	$0/208 \times 10^{-7}$	$0/215 \times 10^{-5}$
۳	$0/654 \times 10^{-7}$	$0/363 \times 10^{-7}$	$0/418 \times 10^{-5}$
۴	$0/124 \times 10^{-6}$	$0/686 \times 10^{-7}$	$0/788 \times 10^{-5}$
۵	$0/234 \times 10^{-6}$	$0/130 \times 10^{-6}$	$0/148 \times 10^{-4}$
۶	$0/444 \times 10^{-6}$	$0/246 \times 10^{-6}$	$0/281 \times 10^{-4}$



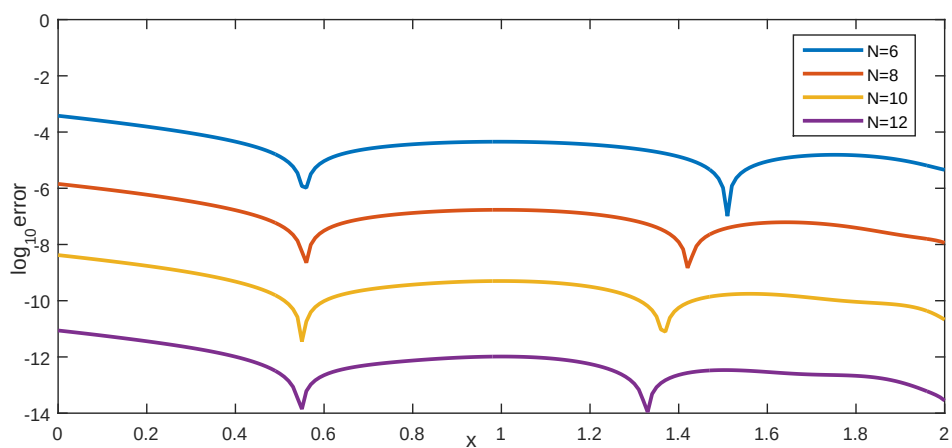
شکل ۱.۳: جوابهای تقریبی با $N=10$ برای مثال ۱.۵.۳.



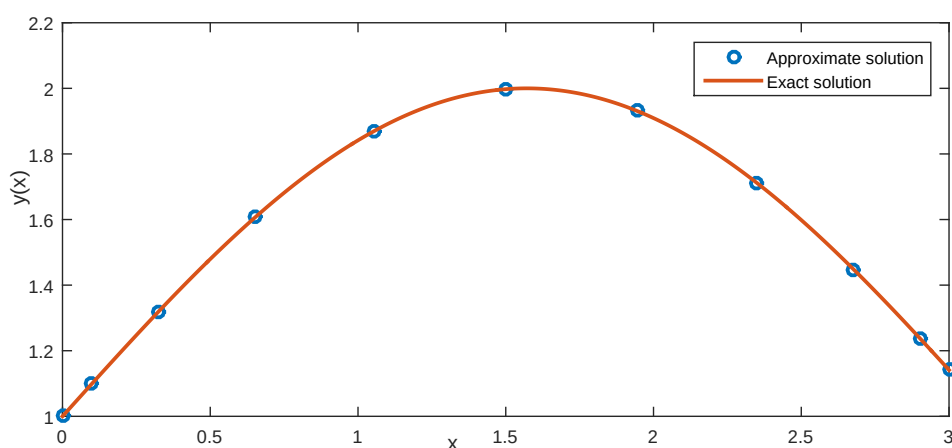
شکل ۲.۳: خطاهای مطلق برای مثال ۱.۵.۳.



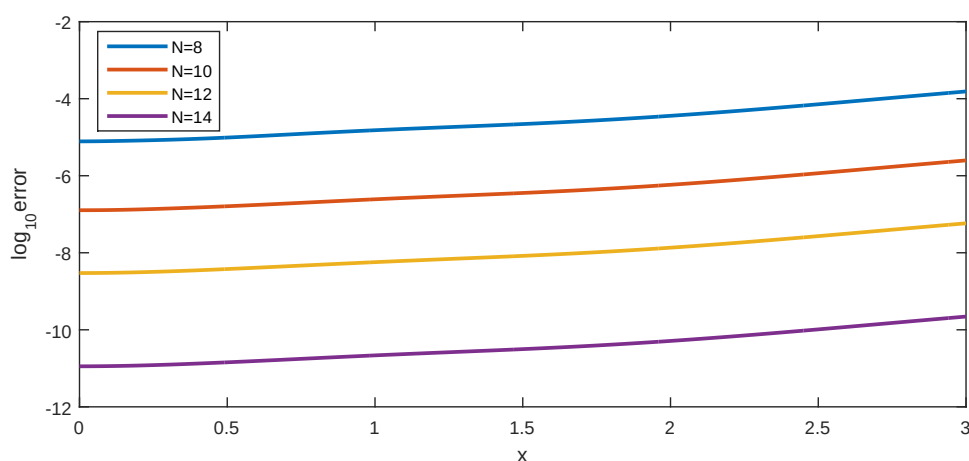
شکل ۳.۳: جواب‌های تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۲.۵.۳.



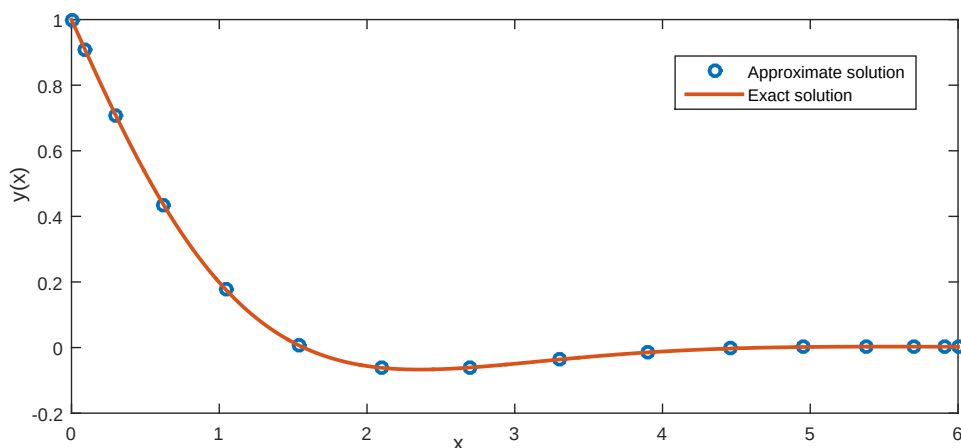
شکل ۴.۳: خطاهای مطلق برای مثال ۲.۵.۳.



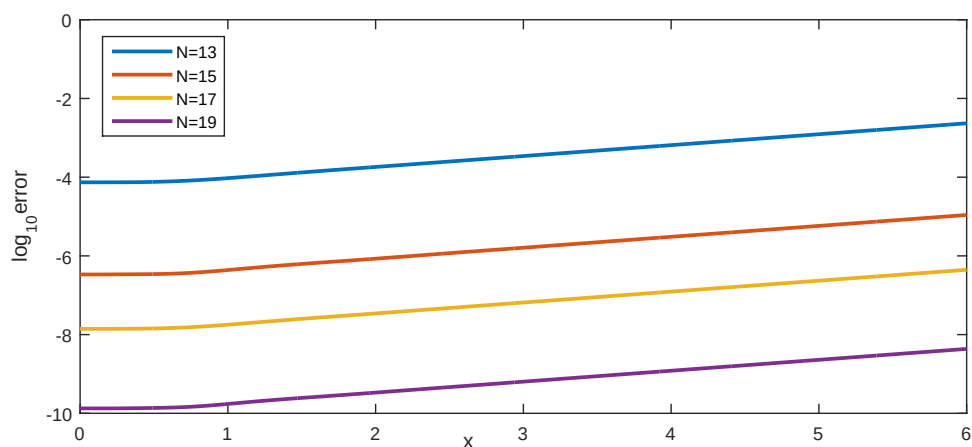
شکل ۵.۳: جواب‌های تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۳.۵.۳.



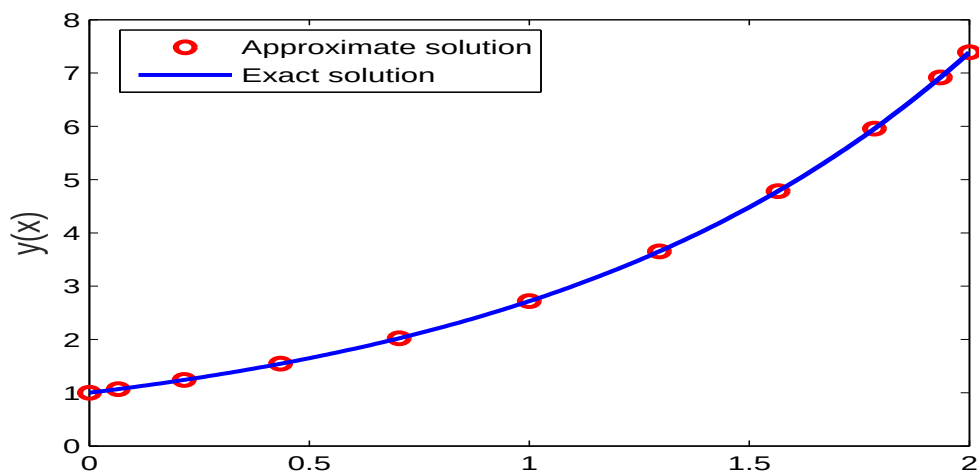
شکل ۶.۳: خطاهای مطلق برای مثال ۳.۵.۳.



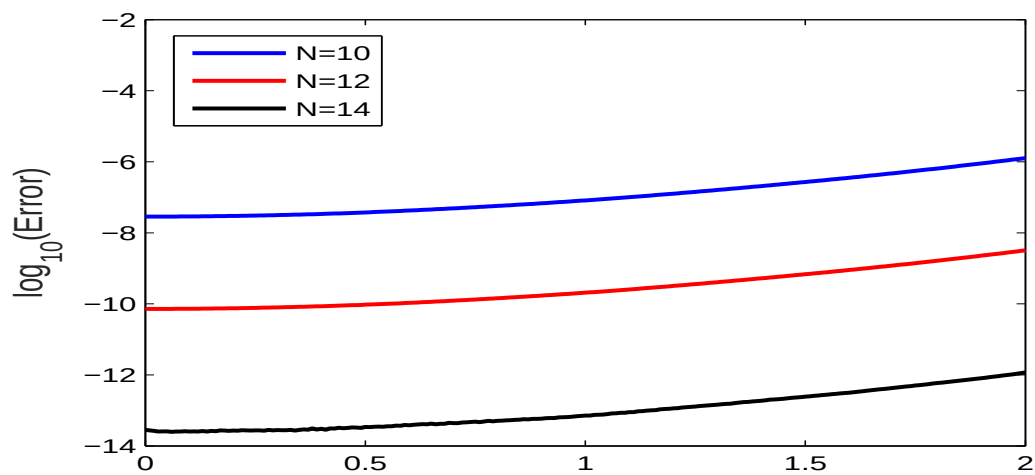
شکل ۷.۳: جواب‌های تقریبی با $N = 15$ برای مثال ۴.۵.۳.



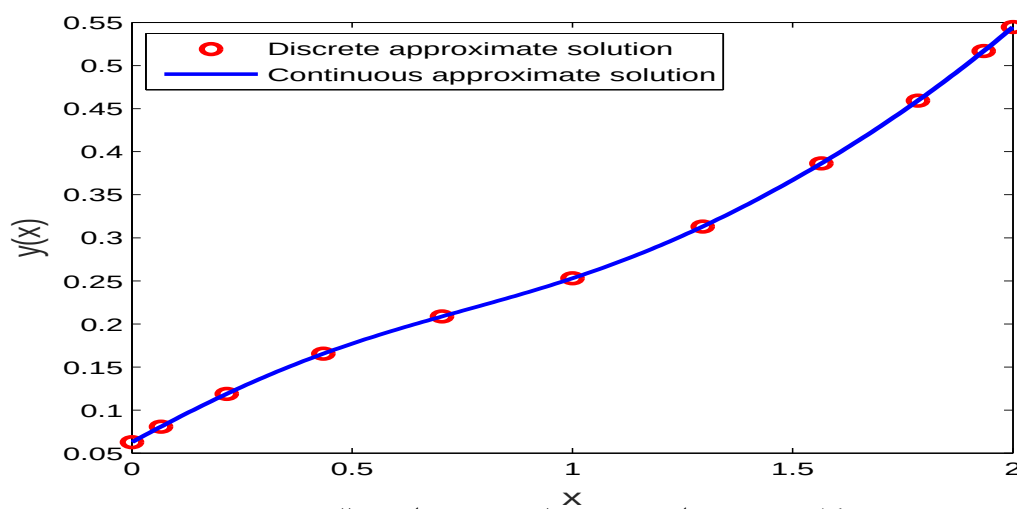
شکل ۸.۳: خطاهای مطلق برای مثال ۴.۵.۳.



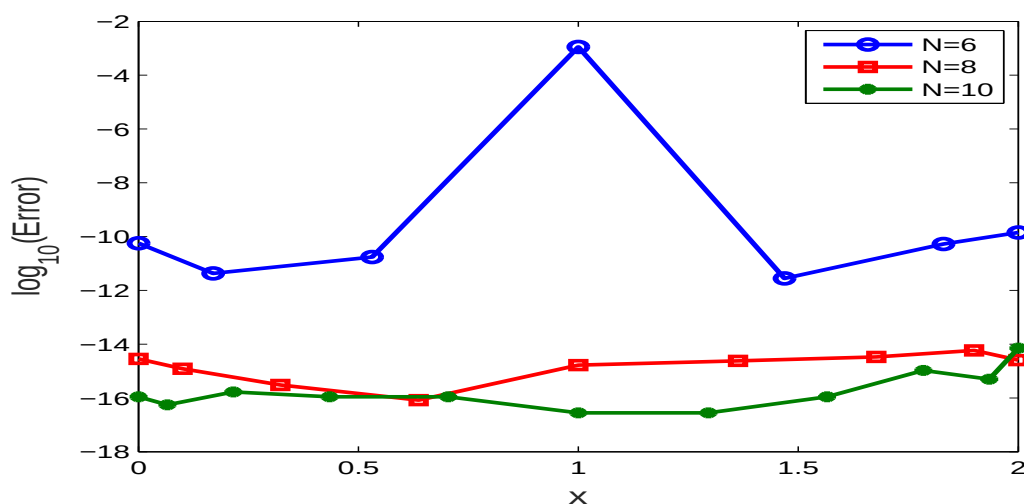
شکل ۹.۳: جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۵.۵.۳.



شکل ۱۰.۳: خطاهای مطلق برای مثال ۵.۵.۳.



شکل ۱۱.۳: جواب تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۶.۵.۳.



شکل ۱۲.۳: خطاهای مطلق برای مثال ۶.۵.۳.

فصل ۴

روش‌های شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم تاخیری

۱.۴ مقدمه

معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم تاخیری^۱ (DFIDEs) توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است. اخیراً برخی محققین روش‌های مختلفی را برای حل این گونه معادلات به کار برده‌اند. یوزباشی و همکارانش در [۴۶] روش ماتریس لژاندر-مونتس^۲ را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی تاخیری با ضرایب ثابت ارائه کرده‌اند. و همچنین یوزباشی و همکارانش در [۴۵] جوابهای چند جمله‌ایهای لژاندر-مونتس را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم تاخیری و تصحیح باقی مانده نیز بکار برده‌اند. اردوخانی^۳ و محتشمی^۴ در [۲۷] روش تیلور^۵ را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم غیرخطی با تاخیری زمانی

¹Delay Fredholm integro-differential equations

²Muntz-Legendre matrix method

³Ordokhani

⁴Mohtashami

⁵Taylor method

به کار برده‌اند. ایاد^۶ در [۱] تقریب اسپلاین^۷ را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم تاخیری ارائه کرده است. یوزباشی در [۴۴] یک الگوی ماتریسی براساس چندجمله‌ای‌های لژاندر انتقال یافته برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم خطی تاخیری با ضرایب ثابت ارائه کرده است.

در این فصل از روش شبه طیفی لژاندر برای حل رده‌ای از معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم تاخیری می‌پردازیم و همگرایی روش را آنالیز می‌کنیم.

۲.۴ معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم غیرخطی تاخیری

در این فصل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم غیرخطی تاخیری زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = f(x, y(x), y(x-\sigma)) + \int_0^T h(x, s, y(s), y(s-\sigma)) ds, & 0 < x \leq T, \\ y(x) = \xi(x), & -\sigma \leq x \leq 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

که $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $g : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $\xi : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ توابع بطور پیوسته مشتق‌پذیر هستند و $y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مجهول است و $0 < \sigma < T$ مقدار ثابت است. فرض می‌کنیم دستگاه (۱.۴) دارای یک جواب منحصر بفرد است.

ابتدا به ترتیب از تبدیلات $s_1 = \frac{\sigma}{T}t + \frac{\sigma}{T}$ و $s_2 = \frac{T-\sigma}{T}t + \frac{\sigma+T}{T}$ جهت انتقال بازه $[0, \sigma]$ و $[\sigma, T]$ به $[-1, 1]$ استفاده می‌کنیم. با این فرض دستگاه (۱.۴) به دستگاه معادل زیر تبدیل می‌شود.

$$(2.4) \quad \dot{y}(x) = \begin{cases} f\left(x, y(x), \xi\left(x-\sigma\right)\right) + \frac{\sigma}{T} \int_{-1}^1 h\left(x, \frac{\sigma}{T}t + \frac{\sigma}{T}, y\left(\frac{\sigma}{T}t + \frac{\sigma}{T}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{T}t - \frac{\sigma}{T}\right)\right) dt \\ + \frac{T-\sigma}{T} \int_{-1}^1 h\left(x, \frac{T-\sigma}{T}t + \frac{T+\sigma}{T}, y\left(\frac{T-\sigma}{T}t + \frac{T+\sigma}{T}\right), y\left(\frac{T-\sigma}{T}t + \frac{T-\sigma}{T}\right)\right) dt, \\ \quad 0 < x \leq \sigma, \\ f\left(x, y(x), y(x-\sigma)\right) + \frac{\sigma}{T} \int_{-1}^1 h\left(x, \frac{\sigma}{T}t + \frac{\sigma}{T}, y\left(\frac{\sigma}{T}t + \frac{\sigma}{T}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{T}t - \frac{\sigma}{T}\right)\right) dt \\ + \frac{T-\sigma}{T} \int_{-1}^1 h\left(x, \frac{T-\sigma}{T}t + \frac{T+\sigma}{T}, y\left(\frac{T-\sigma}{T}t + \frac{T+\sigma}{T}\right), y\left(\frac{T-\sigma}{T}t + \frac{T-\sigma}{T}\right)\right) dt, \\ \quad \sigma < x \leq T, \\ y(0) = \xi(0). \end{cases}$$

⁶Ayad

⁷Spline

اکنون مسئله بهینه‌سازی پیوسته زمانی زیر را پیشنهاد می‌کنیم

$$\text{Minimize } J = (y(\circ) - \xi(\circ))^2$$

subject to

$$\dot{y}(x) = \begin{cases} f\left(x, y(x), \xi(x - \sigma)\right) + \frac{\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x, \frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}, y\left(\frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\varphi}t - \frac{\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \\ + \frac{T - \sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x, \frac{T - \sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma + T}{\varphi}, y\left(\frac{T - \sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma + T}{\varphi}\right), y\left(\frac{T - \sigma}{\varphi}t + \frac{T - \sigma}{\varphi}\right)\right) dt, \\ \quad \circ < x \leq \sigma, \\ f\left(x, y(x), y(x - \sigma)\right) + \frac{\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x, \frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}, y\left(\frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\varphi}t - \frac{\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \\ + \frac{T - \sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x, \frac{T - \sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma + T}{\varphi}, y\left(\frac{T - \sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma + T}{\varphi}\right), y\left(\frac{T - \sigma}{\varphi}t + \frac{T - \sigma}{\varphi}\right)\right) dt, \\ \quad \sigma < x \leq T, \end{cases} \quad (3.4)$$

واضح است که هر جواب مسئله (۲.۴) یک جواب بهینه برای مسئله (۳.۴) می‌باشد. از آنجایی که مسئله (۲.۴) دارای جواب منحصر بفرد می‌باشد مسئله (۳.۴) یک مسئله شدنی است و دارای جواب بهینه منحصر بفرد می‌باشد.

۳.۴ پیاده‌سازی روش

اکنون مسئله بهینه‌سازی پیوسته زمانی (۳.۴) را به مسئله زیر تبدیل می‌کنیم

$$\text{Minimize } J = (y_{\circ} - \xi(\circ))^2,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^N \bar{y}_j D_{kj} = f\left(x_k, \bar{y}_k, \xi(x_k - \sigma)\right) + \frac{\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x_k, \frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}, y_N\left(\frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\varphi}t - \frac{\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \\ + \frac{T - \sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x_k, \frac{T - \sigma}{\varphi}t + \frac{T + \sigma}{\varphi}, y_N\left(\frac{T - \sigma}{\varphi}t + \frac{T + \sigma}{\varphi}\right), y_N\left(\frac{T - \sigma}{\varphi}t + \frac{T - \sigma}{\varphi}\right)\right) dt \\ \quad k = 1, 2, \dots, l_{\sigma}, \\ \sum_{j=0}^N \bar{y}_j D_{kj} = f\left(x_k, \bar{y}_k, y_N(x_k - \sigma)\right) + \frac{\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x_k, \frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}, y_N\left(\frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\varphi}t - \frac{\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \\ + \frac{T - \sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x_k, \frac{T - \sigma}{\varphi}t + \frac{T + \sigma}{\varphi}, y_N\left(\frac{T - \sigma}{\varphi}t + \frac{T + \sigma}{\varphi}\right), y_N\left(\frac{T - \sigma}{\varphi}t + \frac{T - \sigma}{\varphi}\right)\right) dt \\ \quad k = l_{\sigma} + 1, \dots, N. \end{array} \right.$$

(۴.۴)

در اینجا فرض می‌کنیم که اندیس l_σ در رابطه $x_{l_\sigma} \leq \sigma < x_{l_\sigma+1}$ صدق می‌کند. انتگرال در محدودیت‌های مسئله (۴.۴) می‌تواند با استفاده از لم زیر تقریب زده شود. اکنون با لم ۱.۳.۳ مسئله (۴.۴) می‌تواند به مسئله زیر تبدیل شود

$$\begin{aligned} \text{Minimize } J &= (y_0 - \xi(0))^2, \\ \left\{ \begin{aligned} \sum_{j=0}^N \bar{y}_j D_{kj} &= f\left(x_k, \bar{y}_k, \xi(x_k - \sigma)\right) + \frac{\sigma}{\tau} \sum_{j=0}^N \omega_j h\left(x_k, \frac{\sigma}{\tau} t_j + \frac{\sigma}{\tau}, \sum_{i=0}^N y_i L_i\left(\frac{\sigma}{\tau} t_j + \frac{\sigma}{\tau}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\tau} t_j - \frac{\sigma}{\tau}\right)\right) \\ &+ \frac{T-\sigma}{\tau} \sum_{j=0}^N w_j h\left(x_k, \frac{T-\sigma}{\tau} t_j + \frac{\sigma+T}{\tau}, \sum_{i=0}^N y_i L_i\left(\frac{T-\sigma}{\tau} t_j + \frac{\sigma+T}{\tau}\right), \sum_{i=0}^N y_i L_i\left(\frac{T-\sigma}{\tau} t_j + \frac{T-\sigma}{\tau}\right)\right) \\ k &= 1, 2, \dots, l_\sigma, \\ \sum_{j=0}^N \bar{y}_j D_{kj} &= f\left(x_k, \bar{y}_k, \sum_{i=0}^N \bar{y}_i L_i(x_k - \sigma)\right) + \frac{\sigma}{\tau} \sum_{j=0}^N \omega_j h\left(x_k, \frac{\sigma}{\tau} t_j + \frac{\sigma}{\tau}, \sum_{i=0}^N y_i L_i\left(\frac{\sigma}{\tau} t_j + \frac{\sigma}{\tau}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\tau} t_j - \frac{\sigma}{\tau}\right)\right) \\ &+ \frac{T-\sigma}{\tau} \sum_{j=0}^N w_j h\left(x_k, \frac{T-\sigma}{\tau} t_j + \frac{\sigma+T}{\tau}, \sum_{i=0}^N y_i L_i\left(\frac{T-\sigma}{\tau} t_j + \frac{\sigma+T}{\tau}\right), \sum_{i=0}^N y_i L_i\left(\frac{T-\sigma}{\tau} t_j + \frac{T-\sigma}{\tau}\right)\right) \\ k &= l_\sigma + 1, \dots, N, \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (5.4)$$

با حل مسئله بهینه‌سازی (۵.۴)، $\bar{y}^* = (\bar{y}_0^*, \bar{y}_1^*, \dots, \bar{y}_N^*)$ بدست می‌آید و بنابراین

$$y_N(x) = \sum_{j=0}^N \bar{y}_j^* L_j(x), \quad 0 \leq x \leq T, \quad (6.4)$$

یک جواب تقریبی برای مسئله (۱.۴) می‌باشد.

۴.۴ آنالیز همگرایی

در این بخش همگرایی روش را آنالیز می‌کنیم. می‌توانیم مسئله (۴.۴) را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\text{Minimize } J = (y_0 - \xi(0))^2,$$

subject to

$$\left\{ \begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^N \bar{y}_j D_{kj} - f\left(x_k, \bar{y}_k, \xi(x_k - \sigma)\right) - \frac{\sigma}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} h\left(x_k, \frac{\sigma}{\tau} t + \frac{\sigma}{\tau}, y_N\left(\frac{\sigma}{\tau} t + \frac{\sigma}{\tau}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\tau} t - \frac{\sigma}{\tau}\right)\right) dt \right. \\ \left. - \frac{T-\sigma}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} h\left(x_k, \frac{T-\sigma}{\tau} t + \frac{\sigma+T}{\tau}, y_N\left(\frac{T-\sigma}{\tau} t + \frac{\sigma+T}{\tau}\right), y_N\left(\frac{T-\sigma}{\tau} t + \frac{T-\sigma}{\tau}\right)\right) dt \right| \\ \leq (N-1)^{\frac{\tau}{\tau}-m}, \quad k = 1, 2, \dots, l_\sigma, \\ \left| \sum_{j=0}^N \bar{y}_j D_{kj} - f\left(x_k, \bar{y}_k, y_N(x_k - \sigma)\right) - \frac{T-\sigma}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} h\left(x_k, \frac{T-\sigma}{\tau} t + \frac{\sigma+T}{\tau}, y_N\left(\frac{T-\sigma}{\tau} t + \frac{\sigma+T}{\tau}\right), \right. \right. \\ \left. \left. y_N\left(\frac{T-\sigma}{\tau} t + \frac{T-\sigma}{\tau}\right)\right) dt - \frac{\sigma}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} h\left(x_k, \frac{\sigma}{\tau} t + \frac{\sigma}{\tau}, y_N\left(\frac{\sigma}{\tau} t + \frac{\sigma}{\tau}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\tau} t - \frac{\sigma}{\tau}\right)\right) dt \right| \leq (N-1)^{\frac{\tau}{\tau}-m} \\ k = l_\sigma + 1, \dots, N. \end{aligned} \right. \quad (7.4)$$

از آنجایی که $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ به طور پیوسته در $[\circ, T] \times \Omega^2$ مشتق پذیر می باشد و $h(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ در $[\circ, T]^2 \times \Omega^2$ بطور پیوسته مشتق پذیر می باشد، ثابت های M_1, M_2 و مستقل از N وجود دارند بطوری که

$$\begin{cases} |f(x, \sigma_1, \sigma_2) - f(x, \psi_1, \psi_2)| \leq M_1 (|\sigma_1 - \psi_1| + |\sigma_2 - \psi_2|), \\ |h(x, t, \sigma_1, \sigma_2) - h(x, t, \psi_1, \psi_2)| \leq M_2 (|\sigma_1 - \psi_1| + |\sigma_2 - \psi_2|). \end{cases} \quad (۸.۴)$$

برای همه $x, t \in [\circ, T]$ و $\sigma_1, \sigma_2, \psi_1, \psi_2 \in \Omega$ یک چندجمله ای از درجه حداکثر N در نقاط لژاندر گاوس لوباتو انتقال یافته، که $x_\circ, x_1, \dots, x_N$ مشتق محاسبه شده و بطور دقیق در ماتریس D ضرب شده است، بنابراین داریم

$$\sum_{j=\circ}^N \bar{y}_j D_{kj} = \dot{y}_N(x_k). \quad (۹.۴)$$

بنابراین برای $k = 1, 2, \dots, l_\sigma$ داریم

$$\begin{aligned} & \left| \dot{y}_N(x_k) - f\left(x_k, y_N(x_k), \xi(x_k - \sigma)\right) - \frac{\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x_k, \frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}, y_N\left(\frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\varphi}t - \frac{\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{T-\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x_k, \frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T+\sigma}{\varphi}, y_N\left(\frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T+\sigma}{\varphi}\right), y_N\left(\frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T-\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \right| \\ & \leq \left| \dot{y}_N(x_k) - \dot{y}(x_k) \right| + \left| f\left(x_k, y_N(x_k), \xi(x_k - \sigma)\right) - f\left(x_k, y(x_k), \xi(x_k - \sigma)\right) \right| \\ & \quad + \left| \frac{\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x_k, \frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}, y_N\left(\frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\varphi}t - \frac{\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x_k, \frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}, y\left(\frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\varphi}t - \frac{\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \right| \\ & \quad + \left| \frac{T-\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x_k, \frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T+\sigma}{\varphi}, y_N\left(\frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T+\sigma}{\varphi}\right), y_N\left(\frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T-\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{T-\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x_k, \frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T+\sigma}{\varphi}, y\left(\frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T+\sigma}{\varphi}\right), y\left(\frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T-\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \right| \\ & \quad + \left| \dot{y}(x_k) - f\left(x_k, y(x_k), \xi(x_k - \sigma)\right) - \frac{\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x_k, \frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}, y\left(\frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\varphi}t - \frac{\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{T-\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x_k, \frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T+\sigma}{\varphi}, y\left(\frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T+\sigma}{\varphi}\right), y\left(\frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T-\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \right| \\ & \leq \left| p(x_k) - \dot{y}(x_k) \right| + M_1 \left| y_N(x_k) - y(x_k) \right| + M_2 \frac{\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} \left| y_N\left(\frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}\right) - y\left(\frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}\right) \right| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + M_{\Upsilon} \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} \right) \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} \left| y_N \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T+\sigma}{\Upsilon} \right) - y \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T+\sigma}{\Upsilon} \right) \right| dt \\
 & + M_{\Upsilon} \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} \right) \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} \left| y_N \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T-\sigma}{\Upsilon} \right) - y \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T-\sigma}{\Upsilon} \right) \right| dt \\
 & \leq C_1 (N-1)^{1-m} + M_1 T C_1 (N-1)^{1-m} + M_{\Upsilon} \sigma C_1 T (N-1)^{1-m} + \Upsilon M_{\Upsilon} (T-\sigma) C_1 T (N-1)^{1-m} \\
 & = C_1 (N-1)^{1-m} (1 + M_1 T + M_{\Upsilon} \sigma T + \Upsilon M_{\Upsilon} T (T-\sigma)),
 \end{aligned}$$

همچنین برای $k = l_{\sigma} + 1, \dots, N$ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 & \left| \dot{y}_N(x_k) - f \left(x_k, y_N(x_k), y_N(x_k - \sigma) \right) - \frac{\sigma}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h \left(x_k, \frac{\sigma}{\Upsilon} t + \frac{\sigma}{\Upsilon}, y_N \left(\frac{\sigma}{\Upsilon} t + \frac{\sigma}{\Upsilon} \right), \xi \left(\frac{\sigma}{\Upsilon} t - \frac{\sigma}{\Upsilon} \right) \right) dt \right. \\
 & \quad \left. - \frac{T-\sigma}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h \left(x_k, \frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T+\sigma}{\Upsilon}, y_N \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T+\sigma}{\Upsilon} \right), y_N \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T-\sigma}{\Upsilon} \right) \right) dt \right| \\
 & \leq \left| \dot{y}_N(x_k) - \dot{y}(x_k) \right| + \left| f \left(x_k, y_N(x_k), y_N(x_k - \sigma) \right) - f \left(x_k, y(x_k), y(x_k - \sigma) \right) \right| \\
 & \quad + \left| \frac{\sigma}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h \left(x_k, \frac{\sigma}{\Upsilon} t + \frac{\sigma}{\Upsilon}, y_N \left(\frac{\sigma}{\Upsilon} t + \frac{\sigma}{\Upsilon} \right), \xi \left(\frac{\sigma}{\Upsilon} t - \frac{\sigma}{\Upsilon} \right) \right) dt \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\sigma}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h \left(x_k, \frac{\sigma}{\Upsilon} t + \frac{\sigma}{\Upsilon}, y \left(\frac{\sigma}{\Upsilon} t + \frac{\sigma}{\Upsilon} \right), \xi \left(\frac{\sigma}{\Upsilon} t - \frac{\sigma}{\Upsilon} \right) \right) dt \right| \\
 & \quad + \left| \frac{T-\sigma}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h \left(x_k, \frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T+\sigma}{\Upsilon}, y_N \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T+\sigma}{\Upsilon} \right), y_N \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T-\sigma}{\Upsilon} \right) \right) dt \right. \\
 & \quad \left. - \frac{T-\sigma}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h \left(x_k, \frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T+\sigma}{\Upsilon}, y \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T+\sigma}{\Upsilon} \right), y \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T-\sigma}{\Upsilon} \right) \right) dt \right| \\
 & \quad + \left| \dot{y}(x_k) - f(x_k, y(x_k), y(x_k - \sigma)) - \frac{\sigma}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h \left(x_k, \frac{\sigma}{\Upsilon} t + \frac{\sigma}{\Upsilon}, y \left(\frac{\sigma}{\Upsilon} t + \frac{\sigma}{\Upsilon} \right), \xi \left(\frac{\sigma}{\Upsilon} t - \frac{\sigma}{\Upsilon} \right) \right) dt \right. \\
 & \quad \left. - \frac{T-\sigma}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h \left(x_k, \frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T+\sigma}{\Upsilon}, y \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T+\sigma}{\Upsilon} \right), y \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T-\sigma}{\Upsilon} \right) \right) dt \right| \\
 & \leq \left| p(x_k) - \dot{y}(x_k) \right| + M_1 \left(\left| y_N(x_k) - y(x_k) \right| + \left| y_N(x_k - \sigma) - y(x_k - \sigma) \right| \right) \\
 & \quad + M_{\Upsilon} \frac{\sigma}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} \left| y_N \left(\frac{\sigma}{\Upsilon} t + \frac{\sigma}{\Upsilon} \right) - y \left(\frac{\sigma}{\Upsilon} t + \frac{\sigma}{\Upsilon} \right) \right| dt \\
 & \quad + M_{\Upsilon} \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} \right) \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} \left| y_N \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T+\sigma}{\Upsilon} \right) - y \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T+\sigma}{\Upsilon} \right) \right| dt \\
 & \quad + M_{\Upsilon} \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} \right) \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} \left| y_N \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T-\sigma}{\Upsilon} \right) - y \left(\frac{T-\sigma}{\Upsilon} t + \frac{T-\sigma}{\Upsilon} \right) \right| dt \\
 & \leq C_1 (N-1)^{1-m} + \Upsilon M_1 T C_1 (N-1)^{1-m} + M_{\Upsilon} \sigma C_1 T (N-1)^{1-m} + \Upsilon M_{\Upsilon} (T-\sigma) C_1 T (N-1)^{1-m} \\
 & = C_1 (N-1)^{1-m} (1 + \Upsilon M_1 T + M_{\Upsilon} \sigma T + \Upsilon M_{\Upsilon} T (T-\sigma)),
 \end{aligned}$$

که M_1 و M_2 ثابت‌های لیپ‌شیتز هستند. عدد صحیح مثبت N_1 را در نظر می‌گیریم بطوری که برای همه $N \geq N_1$

$$C_1(1 + 2M_1T + M_2\sigma T + 2M_2T(T - \sigma)) \leq (N - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

برای هر $N \geq N_1$ ، $\bar{y} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N)$ در محدودیت‌های مسئله (۷.۴) صدق می‌کند. اکنون اگر $(\bar{y}_0^*, \bar{y}_1^*, \dots, \bar{y}_N^*)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۷.۴) باشد تعریف می‌کنیم

$$y_N^*(x) = \sum_{k=0}^N \bar{y}_k^* L_k(x), \quad x \in [0, T], \quad (10.4)$$

که $L_k(\cdot)$ ، $k = 0, 1, \dots, N$ چندجمله‌ای‌های درونیاب لژاندر هستند. یک مجموعه از جواب‌های مستقیم $\{\bar{y}_0^*, \bar{y}_1^*, \dots, \bar{y}_N^*\}_{N=N_1}^\infty$ و مجموعه‌ای از درونیابی توابع $\{y_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ داریم.

قضیه ۱۰.۴.۴. اگر $\{\bar{y}_0^*, \bar{y}_1^*, \dots, \bar{y}_N^*\}_{N=N_1}^\infty$ دنباله‌ای از جواب بهینه مسئله (۷.۴) باشد و $\{y_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ دنباله از درونیاب آن‌ها باشد و فرض کنید دنباله $\{y_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ یک زیردنباله دارد که بطور یکنواخت به $q(\cdot)$ همگرا می‌باشد. بنابراین

$$y^*(x) = \int_0^x q(\tau) d\tau + \xi(0), \quad 0 \leq x \leq T, \quad (11.4)$$

یک جواب بهینه برای مسئله (۳.۴) است.

برهان. فرض کنیم که $\{y_{N_i}^*(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ زیردنباله‌ای از دنباله $\{y_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ باشد بطوری که $\lim_{i \rightarrow \infty} N_i = \infty$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} y_{N_i}^*(\cdot) = q(\cdot)$ بنابراین داریم $\lim_{i \rightarrow \infty} y_{N_i}^*(\cdot) = y^*(\cdot)$. همچنین با در نظر گرفتن مسئله (۱۱.۴) داریم

$$J = (\bar{y}_0^* - \eta(0))^2 = \left(\lim_{i \rightarrow \infty} y_{N_i}^*(0) - \eta(0) \right)^2 = (y^*(0) - \eta(0))^2 = (\eta(0) - \eta(0))^2 = 0.$$

اکنون نشان می‌دهیم $y^*(\cdot)$ یک جواب شدنی است. فرض می‌کنیم $y^*(\cdot)$ در محدودیت مسئله (۳.۴) صدق نمی‌کند. بنابراین یک $\bar{x} \in [0, T]$ وجود دارد بطوری که

$$\dot{y}^*(\bar{x}) - \psi(\bar{x}, y^*(\bar{x}), y^*(\bar{x} - \sigma)) \neq 0,$$

$$\psi\left(x, y^*(x), y^*(x-\sigma)\right) = \begin{cases} f\left(x, y^*(x), \xi(x-\sigma)\right) + \frac{\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x, \frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}, y^*\left(\frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\varphi}t - \frac{\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \\ + \frac{T-\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x, \frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T+\sigma}{\varphi}, y^*\left(\frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T+\sigma}{\varphi}\right), y^*\left(\frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T-\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \\ \quad \circ < x \leq \sigma, \\ f\left(x, y^*(x), y^*(x-\sigma)\right) + \frac{\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x, \frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}, y^*\left(\frac{\sigma}{\varphi}t + \frac{\sigma}{\varphi}\right), \xi\left(\frac{\sigma}{\varphi}t - \frac{\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \\ + \frac{T-\sigma}{\varphi} \int_{-\varphi}^{\varphi} h\left(x, \frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T+\sigma}{\varphi}, y^*\left(\frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T+\sigma}{\varphi}\right), y^*\left(\frac{T-\sigma}{\varphi}t + \frac{T-\sigma}{\varphi}\right)\right) dt \\ \quad \sigma < x \leq T. \end{cases}$$

از آنجایی که مجموعه $\{x_k\}_{k=\circ}^{\infty}$ در $[\circ, T]$ چگال هستند [۱۵] یک زیردنباله $x_{k_{N_i}}$ وجود دارد بطوری که $\circ < k_{N_i} < N_i$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_{N_i}} = \bar{x}$ بنابراین

$$\dot{y}^*(\bar{x}) - \psi\left(\bar{x}, y^*(\bar{x}), y^*(\bar{x} - \sigma)\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\dot{y}_{N_i}^*(x_{k_{N_i}}) - \psi\left(x_{k_{N_i}}, y_{N_i}^*(x_{k_{N_i}}), y_{N_i}^*(x_{k_{N_i}} - \sigma)\right) \right) \neq \circ. \quad (۱۲.۴)$$

از طرفی دیگر $\lim_{i \rightarrow \infty} (N_i - 1)^{\frac{1}{\varphi} - m} = \circ$ بنابراین با استفاده از محدودیت‌های مسئله (۷.۴) داریم

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\dot{y}_{N_i}^*(x_{k_{N_i}}) - \psi\left(x_{k_{N_i}}, y_{N_i}^*(x_{k_{N_i}}), y_{N_i}^*(x_{k_{N_i}} - \sigma)\right) \right) = \circ.$$

که با رابطه (۱۲.۴) در تناقض است. بنابراین $y^*(\cdot)$ یک جواب شدنی برای مسئله (۳.۴) است و اثبات کامل می‌شود. $\square$

۵.۴ مثال‌های عددی

مثال ۱.۵.۴. معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = y(x-1) + e^x - e^{x-1} + e^{-1} - e + \int_{\circ}^{\varphi} y(s-1) ds, & \circ \leq x \leq 2, \\ y(x) = \xi(x), & -1 \leq x \leq \circ. \end{cases}$$

که $y(x) = e^x$ جواب دقیق معادله است. جواب‌های تقریبی و دقیق برای $N = 10$ در شکل ۱.۴ نشان داده شده است و خطاهای مطلق برای $N = 8, 10, 12$ در شکل ۲.۴ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش N خطا به صفر میل می‌کند.

مثال ۲.۵.۴. معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

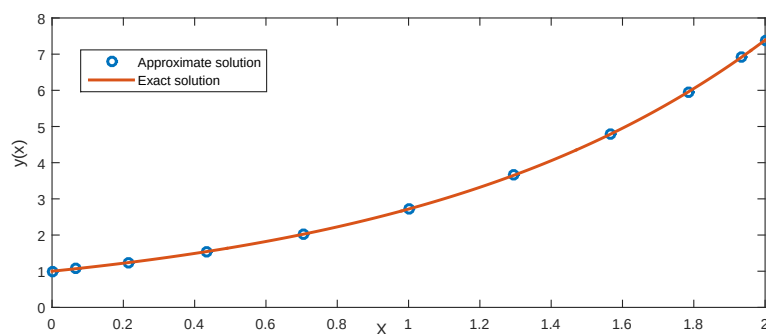
$$\begin{cases} \dot{y}(x) = y(x-1) + \cos(x) - \sin(x-1) + \sin(1) - \cos(1) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} y(s-1) ds, & 0 \leq x \leq 2, \\ y(x) = \xi(x), & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

که $y(x) = \sin x$ جواب دقیق معادله است. جواب‌های تقریبی و دقیق برای $N = 10$ در شکل ۳.۴ نشان داده شده است و خطاهای مطلق برای $N = 8, 10, 12$ در شکل ۴.۴ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش N خطا به صفر میل می‌کند.

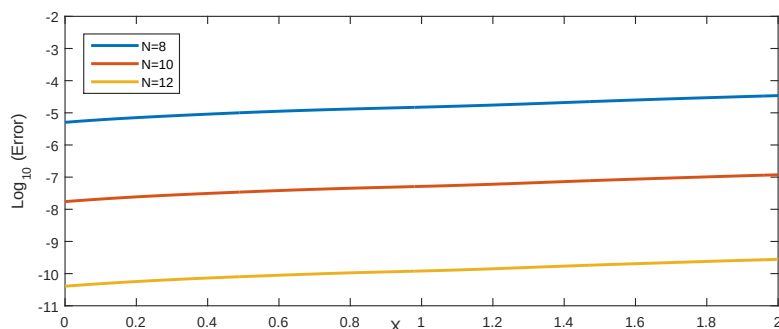
مثال ۳.۵.۴. معادله انتگرال-دیفرانسیل فردهلم تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = y(x-1) - \cos(x-1) - \frac{1}{\pi} \sin(2) - \pi/4 - \sin(x) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} y^2(s-1) ds, & 0 \leq x \leq 2, \\ y(x) = \xi(x), & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

که $y(x) = \cos x$ جواب دقیق معادله است. جواب‌های تقریبی و دقیق برای $N = 10$ در شکل ۵.۴ نشان داده شده است و خطاهای مطلق برای $N = 8, 10, 12$ در شکل ۶.۴ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش N خطا به صفر میل می‌کند.

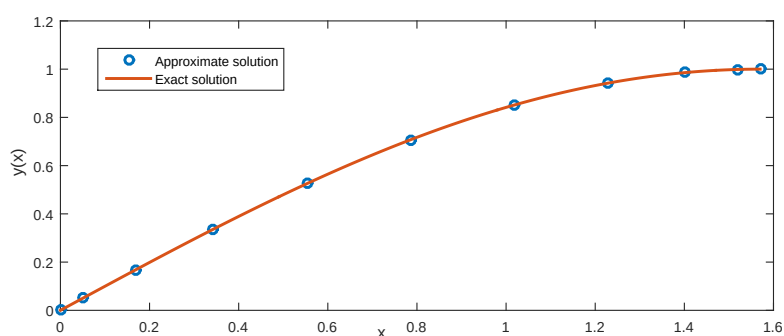


شکل ۱.۴: جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۱.۵.۴.

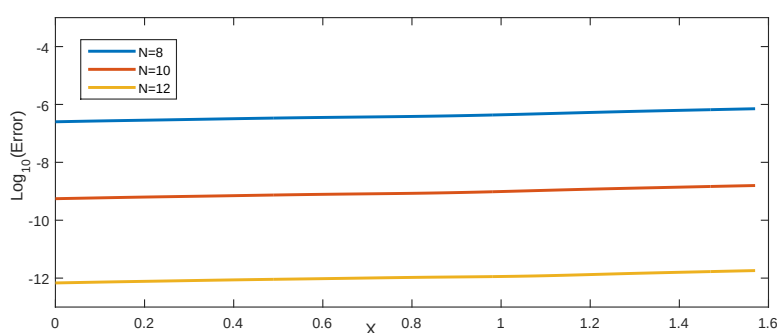


شکل ۲.۴: خطاهای مطلق برای مثال ۱.۵.۴.

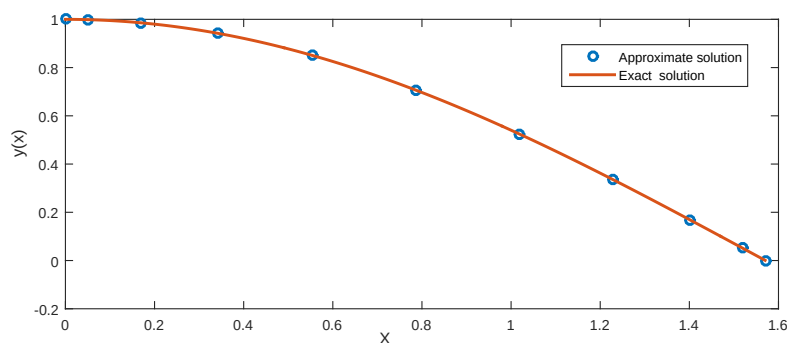
۴۲ روش‌های شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال – دیفرانسیل فردهلم تاخیری



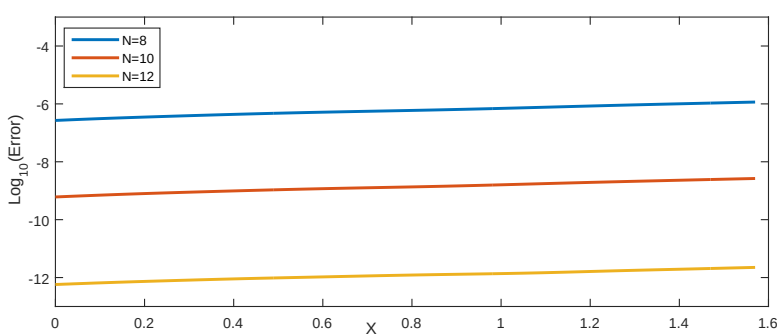
شکل ۳.۴: جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۲.۵.۴.



شکل ۴.۴: خطاهای مطلق برای مثال ۲.۵.۴.



شکل ۵.۴: جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۲.۵.۴.



شکل ۶.۴: خطاهای مطلق برای مثال ۲.۵.۴.

فصل ۵

روش‌های شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم تاخیری

۱.۵ مقدمه

معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم تاخیری^۱ توجه بسیاری از ریاضی‌دانان را به خود جلب کرده است. اخیراً برخی محققین روش‌های مختلفی را برای حل این‌گونه معادلات به کار برده‌اند. تیان^۲ و همکارانش در [۳۷] رده‌ای از معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم غیرخطی تاخیری نوع نامساوی‌های انتگرال دینامیکی را در مقیاس زمان ارائه کرده‌اند. قومنجانی^۳ و همکارانش در [۱۷] روش منحنی‌های بزیر^۴ را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم خطی و غیرخطی به کار برده‌اند. عیسی^۵ و همکارانش در [۲۰] روش

^۱Delay Volterra-Fredholm integro-differential equations

^۲Tian

^۳Ghomanjani

^۴Bezier Curves

^۵Issa

۴۴ روش‌های شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم تاخیری

اشفتگی گالرکین^۶ را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا و فردهلم تاخیری به کار برده‌اند. شاهمراد^۷ و استادزاد^۸ در [۳۳] روش تاو^۹ را برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل فردهلم و ولترا تاخیری به کار برده‌اند.

در این فصل، روش عددی جدیدی را برای حل یک رده از معادلات انتگرال-دیفرانسیل تاخیری ارائه می‌دهیم.

۲.۵ معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم غیرخطی تاخیری

در این فصل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم غیرخطی تاخیری زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} \dot{u}(x) = f(x, u(x), u(x-\tau)) + \lambda_1 \int_{x-\tau}^x g(x, s, u(s)) ds \\ \quad + \lambda_2 \int_0^T h(x, s, u(s), u(s-\tau)) ds, & 0 < x \leq T, \\ u(x) = \eta(x), & -\tau \leq x \leq 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

که $h : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $g : [0, T] \times [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ و $\eta : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ توابع بطور پیوسته مشتق‌پذیر هستند و $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع مجهول و $0 < \tau < T$ مقدار ثابت است و λ_1, λ_2 اعداد حقیقی هستند که $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$. فرض کنیم دستگاه (۱.۵) دارای جواب منحصر بفرد است.

با $u(x) = \eta(x)$ ، $-\tau \leq x \leq 0$ رابطه زیر را داریم

$$\int_{x-\tau}^x g(x, s, u(s)) ds = \int_{x-\tau}^0 g(x, s, \eta(s)) ds + \int_0^x g(x, s, u(s)) ds, \quad 0 \leq x \leq T, \quad (2.5)$$

$$\int_0^T h(x, s, u(s), u(s-\tau)) ds = \int_0^\tau h(x, s, u(s), \eta(s-\tau)) ds + \int_\tau^T h(x, s, u(s), u(s-\tau)) ds, \quad 0 \leq x \leq T. \quad (3.5)$$

ابتدا به ترتیب از تبدیلات $s_4 = \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}$ ، $s_3 = \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau-x}{\tau}$ ، $s_2 = \frac{x}{\tau}t + \frac{x}{\tau}$ ، $s_1 = \frac{\tau-x}{\tau}t + \frac{x-\tau}{\tau}$ و $s_5 = \frac{T-\tau}{\tau}t + \frac{\tau+T}{\tau}$ جهت انتقال بازه $[x-\tau, x]$ ، $[0, x]$ ، $[x-\tau, 0]$ و $[\tau, T]$ به $[-1, 1]$ استفاده می‌کنیم. با این فرض و رابطه (۲.۵) و (۳.۵) دستگاه (۱.۵) به دستگاه معادل زیر تبدیل می‌شود.

⁶Perturbed Galerkin method

⁷Shahmorad

⁸Ostadzad

⁹Tau method

Minimize $J = (u(\circ) - \eta(\circ))^2$

subject to

$$\dot{u}(x) = \begin{cases} f(x, u(x), \eta(x - \tau)) + \frac{\tau - x}{\tau} \int_{-\tau}^1 g\left(x, \frac{\tau - x}{\tau}t + \frac{x - \tau}{\tau}, \eta\left(\frac{\tau - x}{\tau}t + \frac{x - \tau}{\tau}\right)\right) dt \\ + \frac{x}{\tau} \int_{-\tau}^1 g\left(x, \frac{x}{\tau}t + \frac{x}{\tau}, u\left(\frac{x}{\tau}t + \frac{x}{\tau}\right)\right) dt + \frac{\tau}{\tau} \int_{-\tau}^1 h\left(x, \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}, u\left(\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\tau}t - \frac{\tau}{\tau}\right)\right) dt \\ + \frac{T - \tau}{\tau} \int_{-\tau}^1 h\left(x, \frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{\tau + T}{\tau}, u\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{\tau + T}{\tau}\right), u\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T - \tau}{\tau}\right)\right) dt, \\ \circ < x \leq \tau, \\ f(x, u(x), u(x - \tau)) + \frac{\tau}{\tau} \int_{-\tau}^1 g\left(x, \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau - x - \tau}{\tau}, u\left(\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau - x - \tau}{\tau}\right)\right) dt \\ + \frac{\tau}{\tau} \int_{-\tau}^1 h\left(x, \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}, u\left(\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\tau}t - \frac{\tau}{\tau}\right)\right) dt \\ + \frac{T - \tau}{\tau} \int_{-\tau}^1 h\left(x, \frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}, u\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{\tau + T}{\tau}\right), u\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T - \tau}{\tau}\right)\right) dt, \\ \tau < x \leq T, \end{cases} \quad (۴.۵)$$

از آنجاکه مسئله (۱.۵) دارای جواب بهینه منحصر بفرد می باشد مسئله (۴.۵) نیز دارای جواب بهینه منحصر بفرد است.

۳.۵ پیاده سازی روش

اکنون مسئله بهینه سازی (۴.۵) را به مسئله زیر تبدیل می کنیم

Minimize $J = (u_{\circ} - \eta(\circ))^2$,

subject to

$$\begin{cases} \sum_{j=\circ}^N \bar{u}_j D_{kj} = f(x_k, \bar{u}_k, \eta(x_k - \tau)) + \frac{\tau - x_k}{\tau} \int_{-\tau}^1 g\left(x_k, \frac{\tau - x_k}{\tau}t + \frac{x_k - \tau}{\tau}, \eta\left(\frac{\tau - x_k}{\tau}t + \frac{x_k - \tau}{\tau}\right)\right) dt + \frac{x_k}{\tau} \int_{-\tau}^1 g\left(x_k, \frac{x_k}{\tau}t + \frac{x_k}{\tau}, u_N\left(\frac{x_k}{\tau}t + \frac{x_k}{\tau}\right)\right) dt \\ + \frac{\tau}{\tau} \int_{-\tau}^1 h\left(x_k, \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}, u_N\left(\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\tau}t - \frac{\tau}{\tau}\right)\right) dt \\ + \frac{T - \tau}{\tau} \int_{-\tau}^1 h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}, u_N\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}\right), u_N\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T - \tau}{\tau}\right)\right) dt \\ k = 1, 2, \dots, l_{\tau}, \\ \sum_{j=\circ}^N \bar{u}_j D_{kj} = f(x_k, \bar{u}_k, u_N(x_k - \tau)) + \frac{\tau}{\tau} \int_{-\tau}^1 g\left(x_k, \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau - x_k - \tau}{\tau}, u_N\left(\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau - x_k - \tau}{\tau}\right)\right) dt \\ + \frac{\tau}{\tau} \int_{-\tau}^1 h\left(x_k, \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}, u_N\left(\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\tau}t - \frac{\tau}{\tau}\right)\right) dt \\ + \frac{T - \tau}{\tau} \int_{-\tau}^1 h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}, u_N\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}\right), u_N\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T - \tau}{\tau}\right)\right) dt \\ k = l_{\tau} + 1, \dots, N, \end{cases} \quad (۵.۵)$$

در اینجا فرض می‌کنیم که اندیس l_τ در رابطه $x_{l_\tau} \leq \tau < x_{l_\tau+1}$ صدق می‌کند. بالم ۱.۳.۳ و مسئله (۵.۵) به صورت زیر تقریب می‌زنیم

$$\text{Minimize } J = (u_\circ - \eta(\circ))^{\mathfrak{Y}},$$

subject to

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=\circ}^N \bar{u}_j D_{kj} = f(x_k, \bar{u}_k, \eta(x_k - \tau)) + \frac{\tau - x_k}{\mathfrak{Y}} \sum_{j=\circ}^N \omega_j g\left(x_k, \frac{\tau - x_k}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{x_k - \tau}{\mathfrak{Y}}, \right. \\ \left. \eta\left(\frac{\tau - x_k}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{x_k - \tau}{\mathfrak{Y}}\right) + \frac{x_k}{\mathfrak{Y}} \sum_{j=\circ}^N \omega_j g\left(x_k, \frac{x_k}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{x_k}{\mathfrak{Y}}, \sum_{i=\circ}^N u_i L_i\left(\frac{x_k}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{x_k}{\mathfrak{Y}}\right)\right), \right. \\ \left. + \frac{\tau}{\mathfrak{Y}} \sum_{j=\circ}^N w_j h\left(x_k, \frac{\tau}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{\tau}{\mathfrak{Y}}, \sum_{i=\circ}^N u_i L_i\left(\frac{\tau}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{\tau}{\mathfrak{Y}}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\mathfrak{Y}} t_j - \frac{\tau}{\mathfrak{Y}}\right)\right) \right. \\ \left. + \frac{T - \tau}{\mathfrak{Y}} \sum_{j=\circ}^N w_j h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{\tau + T}{\mathfrak{Y}}, \sum_{i=\circ}^N u_i L_i\left(\frac{T - \tau}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{\tau + T}{\mathfrak{Y}}\right), \sum_{i=\circ}^N u_i L_i\left(\frac{T - \tau}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{T - \tau}{\mathfrak{Y}}\right)\right) \right. \\ \left. k = \mathfrak{Y}, \dots, l_\tau, \right. \\ \\ \sum_{j=\circ}^N \bar{u}_j D_{kj} = f\left(x_k, \bar{u}_k, \sum_{i=\circ}^N \bar{u}_i L_i(x_k - \tau)\right) + \frac{\tau}{\mathfrak{Y}} \sum_{j=\circ}^N \omega_j g\left(x_k, \frac{\tau}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{\mathfrak{Y} x_k - \tau}{\mathfrak{Y}}, \sum_{i=\circ}^N u_i L_i\left(\frac{\tau}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{\mathfrak{Y} x_k - \tau}{\mathfrak{Y}}\right)\right), \\ \left. + \frac{\tau}{\mathfrak{Y}} \sum_{j=\circ}^N w_j h\left(x_k, \frac{\tau}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{\tau}{\mathfrak{Y}}, \sum_{i=\circ}^N u_i L_i\left(\frac{\tau}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{\tau}{\mathfrak{Y}}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\mathfrak{Y}} t_j - \frac{\tau}{\mathfrak{Y}}\right)\right), \right. \\ \left. + \frac{T - \tau}{\mathfrak{Y}} \sum_{j=\circ}^N w_j h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{\tau + T}{\mathfrak{Y}}, \sum_{i=\circ}^N u_i L_i\left(\frac{T - \tau}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{\tau + T}{\mathfrak{Y}}\right), \sum_{i=\circ}^N u_i L_i\left(\frac{T - \tau}{\mathfrak{Y}} t_j + \frac{T - \tau}{\mathfrak{Y}}\right)\right) \right. \\ \left. k = l_\tau + \mathfrak{Y}, \dots, N, \right. \end{array} \right. \quad (۶.۵)$$

با حل مسئله بهینه‌سازی (۶.۵)، $\bar{u}^* = (\bar{u}_\circ^*, \bar{u}_1^*, \dots, \bar{u}_N^*)$ بدست می‌آید. بنابراین

$$u_N^*(x) = \sum_{j=\circ}^N \bar{u}_j^* L_j(x), \quad \circ \leq x \leq T, \quad (۷.۵)$$

یک جواب تقریبی برای مسئله (۱.۵) می‌باشد.

۴.۵ آنالیز همگرایی

در این بخش همگرایی این روش را بررسی می‌کنیم. می‌توانیم مسئله (۵.۵) را به صورت زیر بازنویسی کنیم

$$\text{Minimize } J = (u_{\circ} - \eta(\circ))^2,$$

subject to

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \sum_{j=\circ}^N \bar{u}_j D_{kj} - f(x_k, \bar{u}_k, \eta(t_k - \tau)) - \frac{\tau - x_k}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} g\left(x_k, \frac{\tau - x_k}{\tau}t + \frac{x_k - \tau}{\tau}, \eta\left(\frac{\tau - x_k}{\tau}t + \frac{x_k - \tau}{\tau}\right)\right) dt \right. \\ \left. - \frac{x_k}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} g\left(x_k, \frac{x_k}{\tau}t + \frac{x_k}{\tau}, u_N\left(\frac{x_k}{\tau}t + \frac{x_k}{\tau}\right)\right) dt - \frac{\tau}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} h\left(x_k, \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}, u_N\left(\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\tau}t - \frac{\tau}{\tau}\right)\right) dt \right. \\ \left. - \frac{T - \tau}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}, u_N\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}\right), u_N\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T - \tau}{\tau}\right)\right) dt \right| \leq (N - 1)^{\tau - m}, \\ k = 1, 2, \dots, l_{\tau}, \\ \left| \sum_{j=\circ}^N \bar{u}_j D_{kj} - f(x_k, \bar{u}_k, u_N(t_k - \tau)) - \frac{\tau}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} g\left(x_k, \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau x_k - \tau}{\tau}, u_N\left(\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau x_k - \tau}{\tau}\right)\right) dt \right. \\ \left. - \frac{\tau}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} h\left(x_k, \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}, u_N\left(\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\tau}t - \frac{\tau}{\tau}\right)\right) dt \right. \\ \left. - \frac{T - \tau}{\tau} \int_{-\tau}^{\tau} h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}, u_N\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}\right), u_N\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T - \tau}{\tau}\right)\right) dt \right| \leq (N - 1)^{\tau - m}, \\ k = l_{\tau} + 1, \dots, N, \end{array} \right. \quad (۸.۵)$$

از آنجایی که $f(\cdot, \cdot, \cdot)$ به طور پیوسته در $[\circ, T] \times \Omega^2$ مشتق پذیر می‌باشد، $g(\cdot, \cdot, \cdot)$ در $[\circ, T] \times [\circ, T] \times \Omega$ و $h(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$ در $[\circ, T]^2 \times \Omega^2$ بطور پیوسته مشتق پذیر می‌باشد، ثابت‌های M_1, M_2, M_3 مستقل از N وجود دارند بطوری که

$$\left\{ \begin{array}{l} |f(x, \sigma_1, \sigma_2) - f(x, \psi_1, \psi_2)| \leq M_1 (|\sigma_1 - \psi_1| + |\sigma_2 - \psi_2|), \\ |g(x, t, \sigma_1) - g(x, t, \sigma_2)| \leq M_2 |\sigma_1 - \sigma_2|, \\ |h(x, t, \sigma_1, \sigma_2) - h(x, t, \psi_1, \psi_2)| \leq M_3 (|\sigma_1 - \psi_1| + |\sigma_2 - \psi_2|). \end{array} \right. \quad (۹.۵)$$

برای همه $x, t \in [\circ, T]$ و $\sigma_1, \sigma_2, \psi_1, \psi_2 \in \Omega$ یک چندجمله‌ای از درجه کمتری یا مساوی N در نقاط لژاندر گاوس لوباتو انتقال یافته $x_{\circ}, x_1, \dots, x_N$ مشتق محاسبه شده

و بطور دقیق در ماتریس D ضرب شده است. بنابراین داریم

$$\sum_{j=\circ}^N \bar{u}_j D_{kj} = \dot{u}_N(x_k). \quad (۱۰.۵)$$

بنابراین برای $k = ۱, ۲, \dots, l_\tau$ داریم

$$\begin{aligned} & \left| \dot{u}_N(x_k) - f\left((x_k, u_N(x_k), \eta(x_k - \tau))\right) - \frac{\tau - x_k}{\varphi} \int_{-1}^1 g\left(x_k, \frac{\tau - x_k}{\varphi}t + \frac{x_k - \tau}{\varphi}, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \eta\left(\frac{\tau - x_k}{\varphi}t + \frac{x_k - \tau}{\varphi}\right)\right) dt - \frac{x_k}{\varphi} \int_{-1}^1 g\left(x_k, \frac{x_k}{\varphi}t + \frac{x_k}{\varphi}, u_N\left(\frac{x_k}{\varphi}t + \frac{x_k}{\varphi}\right)\right) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{\tau}{\varphi} \int_{-1}^1 h\left(x_k, \frac{\tau}{\varphi}t + \frac{\tau}{\varphi}, u_N\left(\frac{\tau}{\varphi}t + \frac{\tau}{\varphi}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\varphi}t - \frac{\tau}{\varphi}\right)\right) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{T - \tau}{\varphi} \int_{-1}^1 h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T + \tau}{\varphi}, u_N\left(\frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T + \tau}{\varphi}\right), u_N\left(\frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T - \tau}{\varphi}\right)\right) dt \right| \\ & \leq \left| \dot{u}_N(x_k) - \dot{u}(x_k) \right| + \left| f\left(x_k, u_N(x_k), \eta(x_k - \tau)\right) - f\left(x_k, u(x_k), \eta(x_k - \tau)\right) \right| \\ & \quad + \left| \frac{x_k}{\varphi} \int_{-1}^1 g\left(x_k, \frac{x_k}{\varphi}t + \frac{x_k}{\varphi}, u_N\left(\frac{x_k}{\varphi}t + \frac{x_k}{\varphi}\right)\right) dt - \frac{x_k}{\varphi} \int_{-1}^1 g\left(x_k, \frac{x_k}{\varphi}t + \frac{x_k}{\varphi}, u\left(\frac{x_k}{\varphi}t + \frac{x_k}{\varphi}\right)\right) dt \right| \\ & \quad + \left| \frac{T - \tau}{\varphi} \int_{-1}^1 h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T + \tau}{\varphi}, u_N\left(\frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T + \tau}{\varphi}\right), u_N\left(\frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T - \tau}{\varphi}\right)\right) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{T - \tau}{\varphi} \int_{-1}^1 h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T + \tau}{\varphi}, u\left(\frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T + \tau}{\varphi}\right), u\left(\frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T - \tau}{\varphi}\right)\right) dt \right| \\ & \quad + \left| \frac{\tau}{\varphi} \int_{-1}^1 h\left(x_k, \frac{\tau}{\varphi}t + \frac{\tau}{\varphi}, u_N\left(\frac{\tau}{\varphi}t + \frac{\tau}{\varphi}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\varphi}t - \frac{\tau}{\varphi}\right)\right) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{\tau}{\varphi} \int_{-1}^1 h\left(x_k, \frac{\tau}{\varphi}t + \frac{\tau}{\varphi}, u\left(\frac{\tau}{\varphi}t + \frac{\tau}{\varphi}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\varphi}t - \frac{\tau}{\varphi}\right)\right) dt \right| \\ & \quad + \left| \dot{u}(x_k) - f(x_k, u(x_k), \eta(x_k - \tau)) - \frac{\tau - x_k}{\varphi} \int_{-1}^1 g\left(x_k, \frac{\tau - x_k}{\varphi}t + \frac{x_k - \tau}{\varphi}, \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \eta\left(\frac{\tau - x_k}{\varphi}t + \frac{x_k - \tau}{\varphi}\right)\right) dt - \frac{x_k}{\varphi} \int_{-1}^1 g\left(x_k, \frac{x_k}{\varphi}t + \frac{x_k}{\varphi}, u\left(\frac{x_k}{\varphi}t + \frac{x_k}{\varphi}\right)\right) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{T - \tau}{\varphi} \int_{-1}^1 h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T + \tau}{\varphi}, u\left(\frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T + \tau}{\varphi}\right), u\left(\frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T - \tau}{\varphi}\right)\right) dt \right. \\ & \quad \left. - \frac{\tau}{\varphi} \int_{-1}^1 h\left(x_k, \frac{\tau}{\varphi}t + \frac{\tau}{\varphi}, u\left(\frac{\tau}{\varphi}t + \frac{\tau}{\varphi}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\varphi}t - \frac{\tau}{\varphi}\right)\right) dt \right| \\ & \leq \left| p(x_k) - \dot{u}(x_k) \right| + M_1 \left(\left| u_N(x_k) - u(x_k) \right| \right) + M_\varphi \frac{x_k}{\varphi} \int_{-1}^1 \left| u_N\left(\frac{x_k}{\varphi}t + \frac{x_k}{\varphi}\right) - u\left(\frac{x_k}{\varphi}t + \frac{x_k}{\varphi}\right) \right| dt \\ & \quad + M_\varphi \left(\frac{T - \tau}{\varphi} \right) \int_{-1}^1 \left(\left| u_N\left(\frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T + \tau}{\varphi}\right) - u\left(\frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T + \tau}{\varphi}\right) \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| u_N\left(\frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T - \tau}{\varphi}\right) - u\left(\frac{T - \tau}{\varphi}t + \frac{T - \tau}{\varphi}\right) \right| \right) dt + M_\varphi \left(\frac{\tau}{\varphi} \right) \int_{-1}^1 \left| u_N\left(\frac{\tau}{\varphi}t + \frac{\tau}{\varphi}\right) - u\left(\frac{\tau}{\varphi}t + \frac{\tau}{\varphi}\right) \right| dt \\ & \leq C_1(N-1)^{1-m} + M_1 TC_1(N-1)^{1-m} + M_\varphi C_1 T^\gamma (N-1)^{1-m} \\ & \quad + \gamma M_\varphi (T - \tau) TC_1(N-1)^{1-m} + M_\varphi \tau TC_1(N-1)^{1-m} \\ & = C_1(N-1)^{1-m} \left(1 + M_1 T + M_\varphi T^\gamma + \gamma M_\varphi T(T - \tau) + M_\varphi \tau T \right). \end{aligned}$$

همچنین برای $k = l_\tau + 1, \dots, N$ بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned}
 & \left| \dot{u}_N(x_k) - f\left(x_k, u_N(x_k), u_N(x_k - \tau)\right) - \frac{\tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g\left(x_k, \frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\Upsilon x_k - \tau}{\Upsilon}, u_N\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\Upsilon x_k - \tau}{\Upsilon}\right)\right) dt \right. \\
 & \quad - \frac{\tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h\left(x_k, \frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\tau}{\Upsilon}, u_N\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\tau}{\Upsilon}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t - \frac{\tau}{\Upsilon}\right)\right) dt \\
 & \quad \left. - \frac{T - \tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T + \tau}{\Upsilon}, u_N\left(\frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T + \tau}{\Upsilon}\right), u_N\left(\frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T - \tau}{\Upsilon}\right)\right) dt \right| \\
 & \leq \left| \dot{u}_N(x_k) - \dot{u}(x_k) \right| + \left| f\left(x_k, u(x_k), u(x_k - \tau)\right) - f\left(x_k, u_N(x_k), u_N(x_k - \tau)\right) \right| \\
 & \quad + \left| \frac{\tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g\left(x_k, \frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\Upsilon x_k - \tau}{\Upsilon}, u_N\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\Upsilon x_k - \tau}{\Upsilon}\right)\right) dt \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g\left(x_k, \frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\Upsilon x_k - \tau}{\Upsilon}, u\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\Upsilon x_k - \tau}{\Upsilon}\right)\right) dt \right| \\
 & \quad + \left| \frac{T - \tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T + \tau}{\Upsilon}, u_N\left(\frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T + \tau}{\Upsilon}\right), u_N\left(\frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T - \tau}{\Upsilon}\right)\right) dt \right. \\
 & \quad \left. - \frac{T - \tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T + \tau}{\Upsilon}, u\left(\frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T + \tau}{\Upsilon}\right), u\left(\frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T - \tau}{\Upsilon}\right)\right) dt \right| \\
 & \quad + \left| \frac{\tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h\left(x_k, \frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\tau}{\Upsilon}, u_N\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\tau}{\Upsilon}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t - \frac{\tau}{\Upsilon}\right)\right) dt \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h\left(x_k, \frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\tau}{\Upsilon}, u\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\tau}{\Upsilon}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t - \frac{\tau}{\Upsilon}\right)\right) dt \right| \\
 & \quad + \left| \dot{u}(x_k) - f(x_k, u(x_k), u(x_k - \tau)) - \frac{\tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} g\left(x_k, \frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\Upsilon x_k - \tau}{\Upsilon}, u\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\Upsilon x_k - \tau}{\Upsilon}\right)\right) dt \right. \\
 & \quad \left. - \frac{T - \tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T + \tau}{\Upsilon}, u\left(\frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T + \tau}{\Upsilon}\right), u\left(\frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T - \tau}{\Upsilon}\right)\right) dt \right. \\
 & \quad \left. - \frac{\tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} h\left(x_k, \frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\tau}{\Upsilon}, u\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\tau}{\Upsilon}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t - \frac{\tau}{\Upsilon}\right)\right) dt \right| \\
 & \leq |p(x_k) - \dot{u}(x_k)| + M_1 \left(|u_N(x_k) - u(x_k)| + |u_N(x_k - \tau) - u(x_k - \tau)| \right) \\
 & \quad + M_{\Upsilon} \frac{\tau}{\Upsilon} \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} \left| u_N\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\Upsilon x_k - \tau}{\Upsilon}\right) - u\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\Upsilon x_k - \tau}{\Upsilon}\right) \right| dt \\
 & \quad + M_{\Upsilon} \left(\frac{T - \tau}{\Upsilon} \right) \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} \left(\left| u_N\left(\frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T + \tau}{\Upsilon}\right) - u\left(\frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T + \tau}{\Upsilon}\right) \right| dt \right. \\
 & \quad \left. + \left| u_N\left(\frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T - \tau}{\Upsilon}\right) - u\left(\frac{T - \tau}{\Upsilon}t + \frac{T - \tau}{\Upsilon}\right) \right| \right) dt \\
 & \quad + M_{\Upsilon} \left(\frac{\tau}{\Upsilon} \right) \int_{-\Upsilon}^{\Upsilon} \left| u_N\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\tau}{\Upsilon}\right) - u\left(\frac{\tau}{\Upsilon}t + \frac{\tau}{\Upsilon}\right) \right| dt \leq C_1(N - 1)^{1-m} + \Upsilon M_1 T C_1(N - 1)^{1-m} \\
 & \quad + M_{\Upsilon} \tau C_1 T(N - 1)^{1-m} + \Upsilon M_{\Upsilon} (T - \tau) T C_1(N - 1)^{1-m} + M_{\Upsilon} \tau T C_1(N - 1)^{1-m} \\
 & = C_1(N - 1)^{1-m} \left(1 + \Upsilon M_1 T + M_{\Upsilon} \tau T + \Upsilon M_{\Upsilon} T(T - \tau) + M_{\Upsilon} \tau T \right),
 \end{aligned}$$

که M_1 , M_{Υ} و M_{Υ} ثابت‌های لیپشیتز هستند و در رابطه (۹.۵) صدق می‌کند. عدد صحیح

۵. روش‌های شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم تاخیری

مثبت N_1 را در نظر می‌گیریم بطوری که برای همه $N \geq N_1$

$$\max \left\{ C_1(1 + M_1 T + M_2 T^2 + 2M_3 T(T - \tau) + M_3 \tau T), C_1(1 + 2M_1 T + M_2 \tau T + 2M_3 T(T - \tau) + M_3 \tau T) \right\} \leq (N - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

بنابراین $\bar{u} = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N)$ در محدودیت‌های مسئله (۸.۵) صدق می‌کند. اکنون اگر $(\bar{u}_0^*, \bar{u}_1^*, \dots, \bar{u}_N^*)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۸.۵) باشد تعریف می‌کنیم

$$u_N^*(x) = \sum_{k=0}^N \bar{u}_k^* L_k(x), \quad x \in [0, T], \quad (11.5)$$

که $L_k(\cdot)$, $k = 0, 1, \dots, N$ چندجمله‌ای‌های درونیاب لاگرانژ هستند. یک مجموعه از جواب‌های مستقیم $\{\bar{u}_0^*, \bar{u}_1^*, \dots, \bar{u}_N^*\}_{N=N_1}^\infty$ و مجموعه‌ای از درونیابی توابع $\{u_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ داریم.

قضیه ۱.۴.۵. اگر $\{\bar{u}_0^*, \bar{u}_1^*, \dots, \bar{u}_N^*\}_{N=N_1}^\infty$ دنباله‌ای از جواب بهینه مسئله (۸.۵) باشد و $\{u_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ دنباله درونیاب آن‌ها باشد و فرض کنید دنباله $\{\dot{u}_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ زیردنباله‌ای دارد که بطور یکنواخت به $q(\cdot)$ همگرا می‌باشد. بنابراین

$$u^*(x) = \int_0^x q(\tau) d\tau + \eta(0), \quad 0 \leq x \leq T, \quad (12.5)$$

یک جواب بهینه برای مسئله (۴.۵) است.

برهان. فرض می‌کنیم که $\{\dot{u}_{N_i}^*(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ یک زیردنباله از دنباله $\{\dot{u}_N^*(\cdot)\}_{N=N_1}^\infty$ باشد بطوری که $\lim_{i \rightarrow \infty} N_i = \infty$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} \dot{u}_{N_i}^*(\cdot) = q(\cdot)$ بنابراین داریم $\lim_{i \rightarrow \infty} u_{N_i}^*(\cdot) = u^*(\cdot)$. همچنین با در نظر گرفتن مسئله (۸.۵) داریم

$$J = (\bar{u}_0^* - \eta(0))^2 = \left(\lim_{i \rightarrow \infty} u_{N_i}^*(0) - \eta(0) \right)^2 = (u^*(0) - \eta(0))^2 = (\eta(0) - \eta(0))^2 = 0.$$

اکنون نشان می‌دهیم $u^*(\cdot)$ یک جواب شدنی است. فرض می‌کنیم $u^*(\cdot)$ برای محدودیت مسئله (۴.۵) برقرار نیست. بنابراین یک $\bar{x} \in [0, T]$ وجود دارد بطوری که

$$\dot{u}^*(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}, u^*(\bar{x}), u^*(\bar{x} - \tau)) \neq 0,$$

$$\varphi(x, u^*(x), u^*(x - \tau)) = \begin{cases} f(x, u^*(x), \eta(x - \tau)) + \frac{\tau - x}{\tau} \int_{-1}^1 g\left(x, \frac{\tau - x}{\tau}t + \frac{x - \tau}{\tau}, \eta\left(\frac{\tau - x}{\tau}t + \frac{x - \tau}{\tau}\right)\right) dt \\ + \frac{x}{\tau} \int_{-1}^1 g\left(x, \frac{x}{\tau}t + \frac{x}{\tau}, u^*\left(\frac{x}{\tau}t + \frac{x}{\tau}\right)\right) dt + \frac{\tau}{\tau} \int_{-1}^1 h\left(x_k, \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}, u^*\left(\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\tau}t - \frac{\tau}{\tau}\right)\right) dt \\ + \frac{T - \tau}{\tau} \int_{-1}^1 h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}, u^*\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}\right), u^*\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T - \tau}{\tau}\right)\right) dt, \\ \quad \circ < x \leq \tau, \\ \\ f(x, u^*(x), u^*(x - \tau)) + \frac{\tau}{\tau} \int_{-1}^1 g\left(x, \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau x - \tau}{\tau}, u^*\left(\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau x - \tau}{\tau}\right)\right) dt, \\ + \frac{\tau}{\tau} \int_{-1}^1 h\left(x_k, \frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}, u^*\left(\frac{\tau}{\tau}t + \frac{\tau}{\tau}\right), \eta\left(\frac{\tau}{\tau}t - \frac{\tau}{\tau}\right)\right) dt \\ + \frac{T - \tau}{\tau} \int_{-1}^1 h\left(x_k, \frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}, u^*\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T + \tau}{\tau}\right), u^*\left(\frac{T - \tau}{\tau}t + \frac{T - \tau}{\tau}\right)\right) dt, \\ \quad \tau < x \leq T. \end{cases}$$

از آنجا که مجموعه $\{x_k\}_{k=\circ}^\infty$ در $[\circ, T]$ چگال هستند [۱۵] زیردنباله‌ای $x_{k_{N_i}}$ وجود دارد بطوری که $\lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_{N_i}} = \bar{x}$ و $\circ < k_{N_i} < N_i$ بنابراین (۱۳.۵)

$$\dot{u}^*(\bar{x}) - \varphi(\bar{x}, u^*(\bar{x}), u^*(\bar{x} - \tau)) = \lim_{i \rightarrow \infty} \left(\dot{u}_{N_i}^*(x_{k_{N_i}}) - \varphi(x_{k_{N_i}}, u_{N_i}^*(x_{k_{N_i}}), u_{N_i}^*(x_{k_{N_i}} - \tau)) \right) \neq \circ.$$

از طرفی دیگر $\lim_{i \rightarrow \infty} (N_i - 1)^{\tau - m} = \circ$ بنابراین با استفاده از محدودیت‌های مسئله (۸.۵) داریم

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\dot{u}_{N_i}^*(x_{k_{N_i}}) - \varphi(x_{k_{N_i}}, u_{N_i}^*(x_{k_{N_i}}), u_{N_i}^*(x_{k_{N_i}} - \tau)) \right) = \circ,$$

که با رابطه (۱۳.۵) در تضاد است. بنابراین $u^*(\cdot)$ یک جواب شدنی برای مسئله (۴.۵) است و اثبات کامل می‌شود. $\square$

۵.۵ مثال‌های عددی

مثال ۱.۵.۵. معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{u}(x) = u(x - 1) + e^{-1} - e + \int_{x-1}^x u(s) ds + \int_{\circ}^{\tau} u(s - 1) ds, & \circ \leq x \leq \tau, \\ u(x) = e^x, & -1 \leq x \leq \circ. \end{cases}$$

۵۲ روش‌های شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم تاخیری

$u(x) = e^x$ جواب دقیق است. جواب‌های تقریبی و جواب‌های دقیق برای $N = 10$ در شکل ۱.۵ نشان داده شده است و خطاهای مطلق برای $N = 8, 10, 12$ در شکل ۲.۵ نشان می‌دهد که با افزایش N خطا به صفر میل می‌کند.

مثال ۲.۵.۵. معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{u}(x) = e^{1-x} - 3u(x) + u(x-1) + \frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}e^2 - 2 \int_{x-1}^x u(s) ds + \int_0^2 u^2(s-1) ds, & x \geq 0, \\ u(x) = e^{-x}, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

$u(x) = e^{-x}$ جواب دقیق است. جواب‌های تقریبی و جواب‌های دقیق برای $N = 10$ در شکل ۳.۵ نشان داده شده است و خطاهای مطلق برای $N = 8, 10, 12$ در شکل ۴.۵ می‌دهد که با افزایش N خطا به صفر میل می‌کند.

مثال ۳.۵.۵. معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

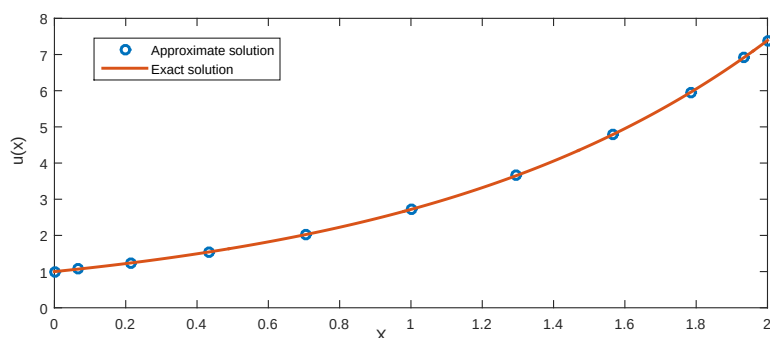
$$\begin{cases} \dot{u}(x) = e^{-2}u(x) + \frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}e + 2 \int_{x-1}^x e^{s-x}u(s) ds + \int_0^2 u^2(s-1) ds, & x \geq 0, \\ u(x) = e^x, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

$u(x) = e^x$ جواب دقیق است. جواب‌های تقریبی و جواب‌های دقیق برای $N = 10$ در شکل ۵.۵ نشان داده شده است و خطاهای مطلق برای $N = 8, 10, 12$ در شکل ۶.۵ می‌دهد که با افزایش N خطا به صفر میل می‌کند.

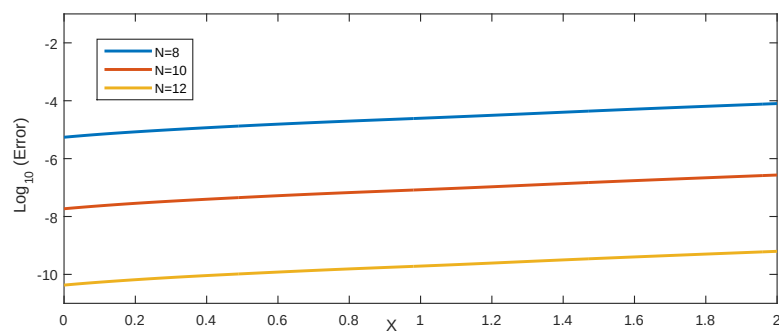
مثال ۴.۵.۵. معادله انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم تاخیری زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{u}(x) = u^2(x-1) + 2 \cos x - \sin^2(x-1) - \cos(x-1) + \int_0^2 u(s-1) + \int_{x-1}^x u(s) ds, & x \geq 0, \\ u(x) = \sin x, & -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

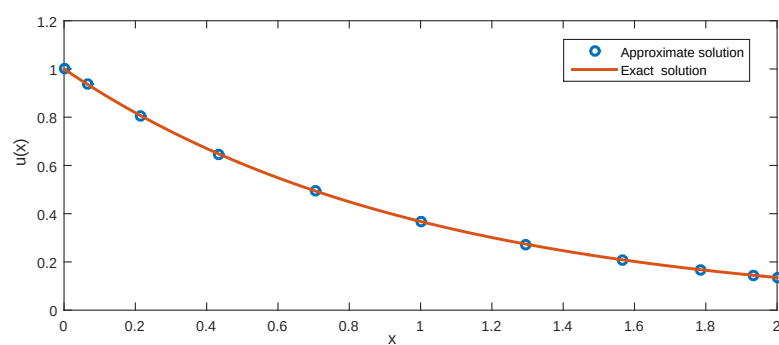
$u(x) = \sin x$ جواب دقیق است. جواب‌های تقریبی و جواب‌های دقیق برای $N = 10$ در شکل ۷.۵ نشان داده شده است و خطاهای مطلق برای $N = 8, 10, 12$ در شکل ۸.۵ می‌دهد که با افزایش N خطا به صفر میل می‌کند.



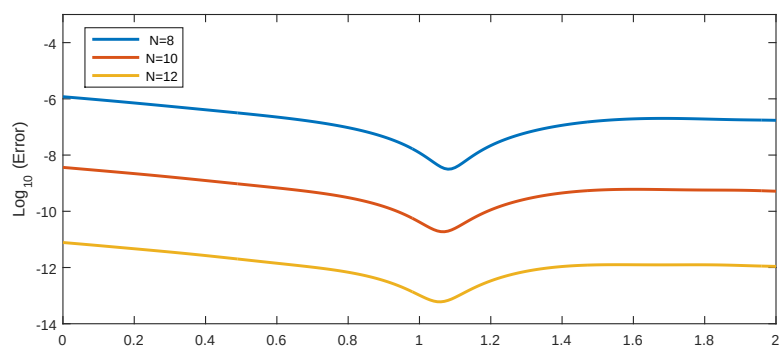
شکل ۱.۵: جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۱.۵.۵.



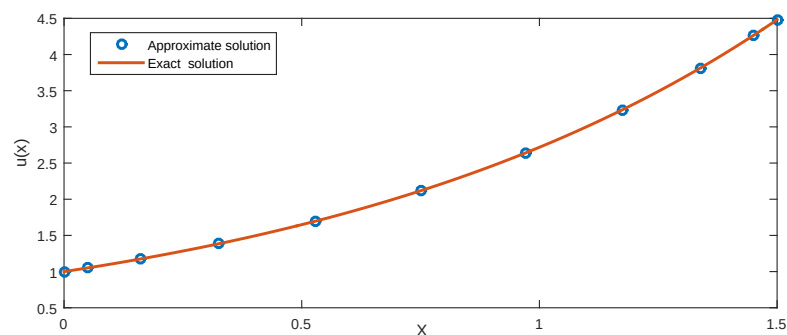
شکل ۲.۵: خطاهای مطلق برای مثال ۱.۵.۵.



شکل ۳.۵: جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۲.۵.۵.

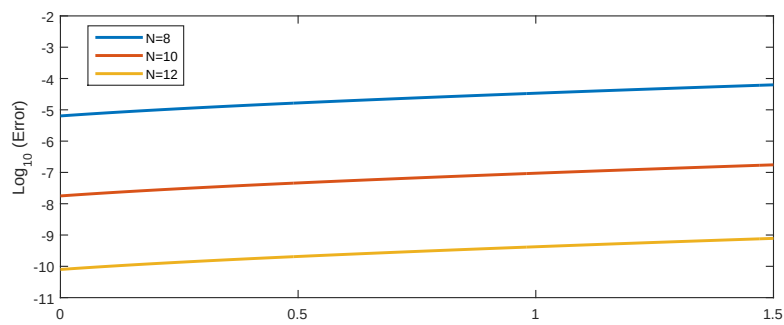


شکل ۴.۵: خطاهای مطلق برای مثال ۲.۵.۵.

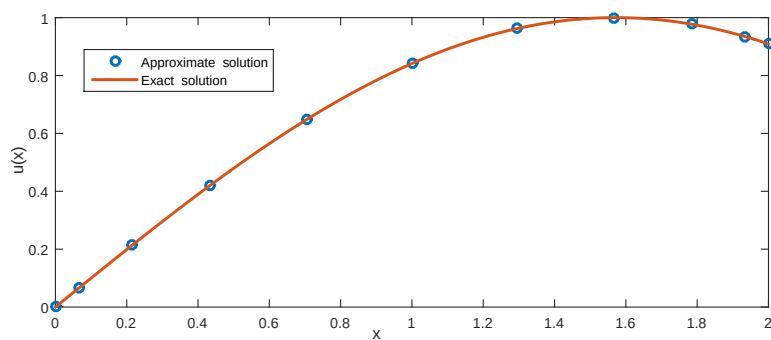


شکل ۵.۵: جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۳.۵.۵.

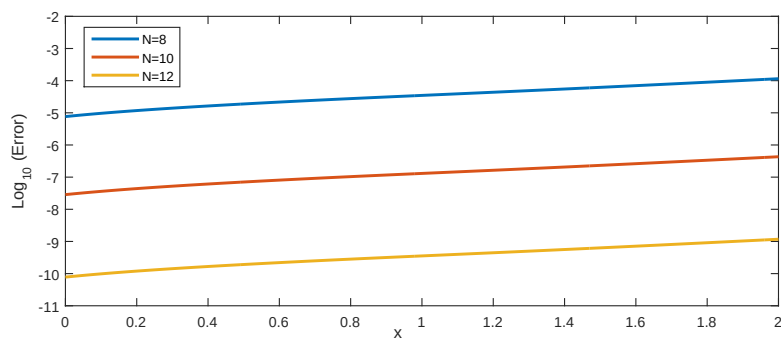
۵۴ روش‌های شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولترا-فردهلم تاخیری



شکل ۳.۵.۵: خطاهای مطلق برای مثال ۳.۵.۵.



شکل ۴.۵.۵: جواب‌های دقیق و تقریبی با $N = 10$ برای مثال ۴.۵.۵.



شکل ۴.۵.۵: خطاهای مطلق برای مثال ۴.۵.۵.

فصل ۶

روش شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چند گانه

۱.۶ مقدمه

در دهه‌های گذشته، روش‌های مختلفی برای حل نوع خاصی از معادلات دیفرانسیل تاخیری پانتوگراف چند گانه ^۱ (MPDDEs) ارائه شده است. داوری‌فر ^۲ و رشیدی‌نیا ^۳ در [۱۰] یک روش هم‌محلی ارائه کرده‌اند تا جواب تقریبی از سیستم MPDDEs با ضرایب متغیر و با شرایط اولیه داده شده را بدست آورند. یوزباشی ^۴ و سزر ^۵ در [۴۸] یک روش هم‌محلی لژاندر جهت حل MPDDEs براساس تکنیک‌های تصحیح باقی‌مانده ارائه کرده‌اند. یانگ ^۶ و توحیدی ^۷ در [۴۲]

¹Multi Pantograph delay differential equations

²Davarifar

³Rashidinia

⁴Yuzbasi

⁵Sezer

⁶Yang

⁷Tohidi

۵۶ روش شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چند گانه

روش هم محلی طیفی لژاندر را برای حل MPDDEs با مسائل مقادیر مرزی ارائه کرده اند. یو^۸ در [۴۳] روش تکرار متغیر^۹ (VIM) را جهت حل MPDDEs بکار برده اند. در [۱۴] روش آشفتگی هموتویی^{۱۰} (HPM) را برای حل MPDDEs با ضرایب متغیر بکار برده اند. سزر و همکاران در [۳۲] جواب تقریبی از معادلات پانتوگراف چند گانه با ضرایب متغیر را با استفاده از چند جمله ای های تیلور^{۱۱} بکار برده اند. همچنین در [۲۲] روش های رانگ- کوتا^{۱۲} برای حل MPDDEs را بکار برده شده است.

در این فصل آنالیز روش شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چند گانه می پردازیم و همگرایی روش را بررسی می کنیم. همچنین با حل چند مثال عددی کارایی روش را نشان می دهیم و به مقایسه روش پیشنهادی با سایر روش ها می پردازیم.

۲.۶ معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چند گانه

در این فصل معادله دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چند گانه زیر را در نظر می گیریم

(۱.۶)

$$\begin{cases} \dot{f}(r) = a(r)f(r) + b_1(r)f(q_1r) + b_2(r)f(q_2r) + \dots + b_L(r)f(q_Lr) + g(r), & 0 \leq r \leq R, \\ f(0) = \gamma, \end{cases}$$

که $a(\cdot), b_1(\cdot), b_2(\cdot), \dots, b_L(\cdot)$ و $g(\cdot)$ توابع مشتق پذیر هستند، $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ تابع مجهول، γ مقدار ثابت است و $0 < q_1 < q_2 < \dots < q_L < 1$ است. همچنین فرض می کنیم که سیستم (۱.۶) دارای یک جواب است.

۳.۶ پیاده سازی روش

ابتدا معادله (۱.۶) را به صورت سیستم معادل زیر بازنویسی می کنیم

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad I = \|f(0) - \gamma\|^2 \\ &\text{subject to} \quad \dot{f}(r) = a(r)f(r) + b_1(r)f(q_1r) + b_2(r)f(q_2r) + \dots + b_L(r)f(q_Lr) + g(r), \quad 0 \leq r \leq R. \end{aligned}$$

(۲.۶)

واضح است که هر جواب مسئله (۱.۶) یک جواب بهینه برای مسئله (۲.۶) می باشد. همچنین از آنجایی که مسئله (۱.۶) دارای یک جواب می باشد، مسئله (۲.۶) یک مسئله شدنی است و

⁸Yu

⁹Variational iteration method

¹⁰Homotopy perturbation method

¹¹Taylor polynomials

¹²Runge-Kutta

دارای یک جواب بهینه می باشد. جواب بهینه مسئله (۲.۶) را به صورت

$$f(r) \simeq f^M(r) = \sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j L_j(r), \quad \circ \leq r \leq R, \quad (۳.۶)$$

تقریب می زنیم که $\bar{f}_j$ ها ضرایبی نامعین می باشند و $L_j(\cdot)$ ها چند جمله ای های لاگرانژ هستند و به صورت زیر تعریف می شوند

$$L_j(r) = \prod_{i=\circ, i \neq j}^M \frac{r - r_i}{r_j - r_i}, \quad j = \circ, ۱, \dots, M. \quad (۴.۶)$$

در اینجا $\{r_j\}_{j=\circ}^M \in [\circ, R]$ نقاط لژاندر - گاوس - لوباتو انتقال یافته هستند. توجه داریم که

$$L_j(r_k) = \begin{cases} ۱, & j = k \\ \circ, & j \neq k \end{cases}$$

$$f(r_k) \simeq f^M(r_k) = \bar{f}_k. \quad (۵.۶)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۳.۶) و (۵.۶) مسئله بهینه سازی (۲.۶) را با مسئله برنامه ریزی غیرخطی زیر تقریب می زنیم

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & I = \|\bar{f}_\circ - \gamma\|^2 \\ \text{subject to} \quad & \sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j D_{kj} = a(r_k) \bar{f}_k + b_۱(r_k) \sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j L_j(q_۱ r_k) + b_۲(r_k) \sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j L_j(q_۲ r_k) + \dots \\ & + b_L(r_k) \sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j L_j(q_L r_k) + g(r_k), \quad k = ۱, ۲, \dots, M, \end{aligned} \quad (۶.۶)$$

توجه داریم که

$$\frac{d}{dr} f(r_k) \simeq \frac{df^M}{dr}(r_k) = \sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j \dot{L}_j(r_k) = \sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j D_{kj}. \quad (۷.۶)$$

با حل مسئله بهینه سازی غیرخطی (۶.۶) بدست می آوریم $\bar{f}^* = (\bar{f}_\circ^*, \bar{f}_1^*, \dots, \bar{f}_M^*)$ و بنابراین

$$f^M(r) = \sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j^* L_j(r), \quad \circ \leq r \leq R, \quad (۸.۶)$$

یک جواب تقریبی برای سیستم (۱.۶) می باشد.

۴.۶ آنالیز همگرایی

در این بخش، آنالیز همگرایی این روش را بررسی می‌کنیم. می‌توانیم مسئله (۶.۶) را بصورت زیر بازنویسی کنیم

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad I = \|\bar{f}_\circ - \gamma\|^2 \\ & \text{subject to} \\ & \left\| \sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j D_{kj} - a(r_k) \bar{f}_k - b_1(r_k) \sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j L_j(q_1 r_k) - b_2(r_k) \sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j L_j(q_2 r_k) - \dots \right. \\ & \left. - b_L(r_k) \sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j L_j(q_L r_k) - g(r_k) \right\|_\infty \leq (M-1)^{\frac{1}{2}-\beta}, \quad k = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (9.6)$$

قضیه ۱.۴.۶. فرض کنید $\beta \geq 2$ ، $f(\cdot) \in V^{\beta, \infty}$ یک جواب برای مسئله (۲.۶) باشد. عدد صحیح و مثبت مانند M_1 وجود دارد به طوری که برای هر $M_1 < \mathbb{N}$ ، مسئله (۹.۶) دارای یک جواب شدنی $\bar{f} = (\bar{f}_\circ, \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_M)$ است که در رابطه زیر صدق می‌کند

$$\|f(r_k) - \bar{f}_k\|_\infty \leq L(M-1)^{1-\beta}, \quad k = \circ, 1, \dots, M,$$

که $\{r_k\}_{k=\circ}^M$ نقاط هم محلی است و L ثابت مثبت و مستقل از M است.

برهان. با استفاده از لم ۱.۴.۲ نشان می‌دهیم که یک چندجمله‌ای $p(\cdot)$ از درجه $(M-1)$ و ثابت C_1 مستقل از M وجود دارد به طوری که

$$\|\dot{f}(r) - p(r)\|_\infty \leq C_1 (M-1)^{1-\beta}.$$

تعریف می‌کنیم

$$f^M(r) = \int_\circ^r p(\tau) d\tau + f(\circ), \quad r \geq \circ.$$

بنابراین داریم

$$\dot{f}^M(r) = p(r), \quad f^M(\circ) = f(\circ).$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} \|f(r) - f^M(r)\|_\infty &= \left\| \int_\circ^r (\dot{f}(s) - p(s)) ds \right\|_\infty \leq \int_\circ^r \|\dot{f}(s) - p(s)\|_\infty ds \\ &\leq C_1 (M-1)^{1-\beta} \int_\circ^r ds \leq C_1 R (M-1)^{1-\beta}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

با استفاده از رابطه بالا، $f(r_k)$ و $\bar{f}_k$ برای $k = \circ, 1, \dots, M$ یک مجموعه فشرده مانند $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ هستند. با استفاده از تعریف $f^M(\cdot)$ چندجمله‌ای از درجه کمتر یا مساوی M ، داریم

$$\sum_{j=\circ}^M \bar{f}_j D_{kj} = \dot{f}^M(r_k). \quad (11.6)$$

سپس برای رابطه (۱۰.۶) و (۱۱.۶) برای $k = ۱, ۲, \dots, M$ داریم،

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=0}^M \bar{f}_j D_{kj} - a(r_k) f(r_k) - b_1(r_k) f(q_1 r_k) - b_2(r_k) f(q_2 r_k) - \dots - b_L(r_k) f(q_L r_k) - g(r_k) \right\|_{\infty} \\ & \leq \left\| \dot{f}^M(r_k) - \dot{f}(r_k) \right\|_{\infty} + \left\| a(r_k) f^M(r_k) - a(r_k) f(r_k) \right\|_{\infty} + \left\| b_1(r_k) f^M(q_1 r_k) - b_1(r_k) f(q_1 r_k) \right\|_{\infty} \\ & \quad + \left\| b_2(r_k) f^M(q_2 r_k) - b_2(r_k) f(q_2 r_k) \right\|_{\infty} + \dots + \left\| b_L(r_k) f^M(q_L r_k) - b_L(r_k) f(q_L r_k) \right\|_{\infty} \\ & \leq \left\| p(r_k) - \dot{f}(r_k) \right\|_{\infty} + \|a(r_k)\|_{\infty} \|f^M(r_k) - f(r_k)\|_{\infty} + \|b_1(r_k)\|_{\infty} \|f^M(q_1 r_k) - f(q_1 r_k)\|_{\infty} \\ & \quad + \|b_2(r_k)\|_{\infty} \|f^M(q_2 r_k) - f(q_2 r_k)\|_{\infty} + \dots + \|b_L(r_k)\|_{\infty} \|f^M(q_L r_k) - f(q_L r_k)\|_{\infty} \\ & \leq C_1(M-1)^{1-\beta} + \alpha_1 C_1 R(M-1)^{1-\beta} + \alpha_2 C_1 R(M-1)^{1-\beta} + \dots + \alpha_{L+1} C_1 R(M-1)^{1-\beta} \\ & = C_1(M-1)^{1-\beta} (1 + \alpha_1 R + \alpha_2 R + \dots + \alpha_{L+1} R), \end{aligned}$$

که $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{L+1}$ کران بالایی برای توابع پیوسته $a(\cdot), b_1(\cdot), \dots, b_L(\cdot)$ روی بازه $[0, R]$ می‌باشند و در نتیجه با انتخاب $M \in \mathbb{N}$ به‌طوری که

$$C_1(1 + \alpha_1 R + \alpha_2 R + \dots + \alpha_{L+1} R) \leq (M-1)^{\frac{1}{\beta}}$$

بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{j=0}^M \bar{f}_j D_{kj} - a(r_k) f(r_k) - b_1(r_k) f(q_1 r_k) - b_2(r_k) f(q_2 r_k) - \dots - b_L(r_k) f(q_L r_k) - g(r_k) \right\|_{\infty} \\ & \leq (M-1)^{\frac{1}{\beta}-\beta}, \quad k = 1, 2, \dots, M, \end{aligned} \quad (۱۲.۶)$$

برای همه $M \geq \mathbb{N}$. $\square$

اگر $(\bar{f}_0^*, \bar{f}_1^*, \dots, \bar{f}_M^*)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۹.۶) باشد، تعریف می‌کنیم

$$f_M^*(r) = \sum_{k=0}^M \bar{f}_k^* L_k(r), \quad r \in [0, R], \quad (۱۳.۶)$$

که $k = 0, 1, \dots, M, L_k(\cdot)$ چند جمله‌ای‌های لاگرانژ هستند. در اینجا مجموعه‌ای از جواب‌های گسسته $\{\bar{f}_0^*, \bar{f}_1^*, \dots, \bar{f}_M^*\}_{M=M_1}^{\infty}$ و مجموعه‌ای از توابع $\{f_M^*(\cdot)\}_{M=M_1}^{\infty}$ را داریم.

فرض ۱.۴.۶. فرض می‌کنیم مجموعه $\{\bar{f}_0^*, \bar{f}_1^*, \dots, \bar{f}_M^*\}_{M=M_1}^{\infty}$ زیرمجموعه‌ای دارد که به‌طور یکنواخت همگرا به $\{f^{\infty}, q(\cdot)\}$ می‌باشد که $q(\cdot)$ تابعی پیوسته و $f^{\infty} \in \mathbb{R}^m$ است.

قضیه ۲.۴.۶. اگر $\{\bar{f}_0^*, \bar{f}_1^*, \dots, \bar{f}_M^*\}_{M=M_1}^{\infty}$ یک مجموعه از جواب بهینه مسئله (۹.۶) باشد و مجموعه درونیایی شده آن‌ها باشد که در فرض ۱.۴.۶ صدق کند آنگاه

$$f^*(r) = \int_0^r q(\tau) d\tau + f^{\infty}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad (۱۴.۶)$$

یک جواب بهینه برای مسئله (۲.۶) است.

۶۰ روش شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چند گانه

برهان. با استفاده از فرض ۱.۴.۶ یک زیرمجموعه از مجموعه $\{f_{M_i}^*(\cdot)\}_{i=1}^\infty$ $\{f_M^*(\cdot)\}_{M=M_1}$ است به طوری که $\lim_{i \rightarrow \infty} M_i = \infty$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{M_i}^*(\cdot) = q(\cdot)$ با استفاده از رابطه (۱۴.۶) و فرض ۱.۴.۶ داریم

$$\lim_{i \rightarrow \infty} f_{M_i}^*(\cdot) = f^*(\cdot).$$

اثبات به دو مرحله تقسیم می شود، ابتدا نشان می دهیم که $f^*(\cdot)$ یک جواب شدنی برای مسئله (۲.۶) است. سپس ثابت می کنیم که $f^*(\cdot)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۲.۶) می باشد. **مرحله ۱.** فرض کنیم که $f^*(\cdot)$ در محدودیت های مسئله (۲.۶) صدق نکند. بنابراین یک $\bar{r} \in [\circ, R]$ وجود دارد به طوری که

$$f^*(\bar{r}) - a(\bar{r})f^*(\bar{r}) - b_1(\bar{r})f^*(q_1\bar{r}) - b_2(\bar{r})f^*(q_2\bar{r}) - \dots - b_L(\bar{r})f^*(q_L\bar{r}) - g(\bar{r}) \neq \circ,$$

از آنجایی که مجموعه $\{r_k\}_{k=\circ}^\infty$ در بازه $[\circ, R]$ چگال هستند [۱۵] یک زیرمجموعه k_{M_i} وجود دارد به طوری که $\circ < k_{M_i} < M_i$ و $\lim_{i \rightarrow \infty} r_{k_{M_i}} = \bar{r}$ بنابراین

$$\begin{aligned} & f^*(\bar{r}) - a(\bar{r})f^*(\bar{r}) - b_1(\bar{r})f^*(q_1\bar{r}) - b_2(\bar{r})f^*(q_2\bar{r}) - \dots - b_L(\bar{r})f^*(q_L\bar{r}) - g(\bar{r}) = \\ & \lim_{i \rightarrow \infty} \left(f_{M_i}^*(r_{k_{M_i}}) - a(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(r_{k_{M_i}}) - b_1(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(q_1r_{k_{M_i}}) - b_2(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(q_2r_{k_{M_i}}) - \dots \right. \\ & \left. - b_L(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(q_Lr_{k_{M_i}}) - g(r_{k_{M_i}}) \right) \neq \circ. \end{aligned} \quad (۱۵.۶)$$

از طرفی $\lim_{i \rightarrow \infty} (M_i - 1)^{\frac{2}{\beta} - \beta} = \circ$ بنابراین با استفاده از محدودیت های مسئله (۹.۶)، داریم

$$\begin{aligned} & \lim_{i \rightarrow \infty} \left(f_{M_i}^*(r_{k_{M_i}}) - a(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(r_{k_{M_i}}) - b_1(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(q_1r_{k_{M_i}}) - b_2(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(q_2r_{k_{M_i}}) - \dots \right. \\ & \left. - b_L(r_{k_{M_i}})f_{M_i}^*(q_Lr_{k_{M_i}}) - g(r_{k_{M_i}}) \right) = \circ, \end{aligned}$$

که با رابطه (۱۵.۶) در تناقض است. بنابراین $\{f^*(\cdot)\}$ یک جواب شدنی برای مسئله (۲.۶) است.

مرحله ۲. اگر $f^{**}(\cdot) \in V^{\beta, \infty}, \beta \geq 2$ یک جواب بهینه برای مسئله (۲.۶) باشند، مجموعه ای از جواب های شدنی $\{\tilde{f} = (\tilde{f}^*, \tilde{f}_1^*, \dots, \tilde{f}_M^*)\}_{M=M_1}^\infty$ برای مسئله (۹.۶) وجود دارد به طوری که به طور یکنواخت به $f^{**}(\cdot)$ همگرا می شوند. بنابراین با استفاده از بهینگی $f^*(\cdot)$ و $\tilde{f}^* = f^{**}(\cdot)$ داریم $(\tilde{f}^*, \tilde{f}_1^*, \dots, \tilde{f}_M^*)$

$$\circ = \|f^{**}(\circ) - \gamma\|^2 \leq \|f^*(\circ) - \gamma\|^2 = \lim_{i \rightarrow \infty} \|f_{M_i}^*(\circ) - \gamma\|^2$$

$$= \|\tilde{f}^* - \gamma\|^2 \leq \|\tilde{f}^* - \gamma\|^2 = \|f^{**}(\circ) - \gamma\|^2 = \circ.$$

□

بنابراین $\|f^*(\circ) - \gamma\|^2 = \circ$ و $f^*(\cdot)$ یک جواب بهینه برای مسئله (۲.۶) است.

۵.۶ مثال‌های عددی

مثال ۱.۵.۶. معادله دیفرانسیل تاخیری پانتوگراف چند گانه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{f}(r) = f(r) + f(r/2) + f(r/4) + f(r/8) + g(r), & 0 \leq r \leq R. \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$g(r)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(r) = e^r$ جواب دقیق مسئله باشد. شکل ۱.۶ جواب دقیق و تقریبی را برای $M = 10$ نشان می‌دهد. خطاهای مطلق برای $M = 6, 8, 10$ در شکل ۲.۶ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که وقتی M افزایش می‌یابد خطا به صفر میل می‌کند.

مثال ۲.۵.۶. معادله دیفرانسیل تاخیری پانتوگراف چندگانه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{f}(r) = -f(r) - e^{-0.5r} \sin(0.5r) f(0.5r) - 2 e^{-0.75r} \cos(0.5r) \sin(0.25r) f(0.25r), \\ & 0 \leq r \leq R. \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

که $f(r) = \cos(r) e^r$ جواب دقیق مسئله است. شکل ۳.۶ جواب دقیق و تقریبی را برای $M = 9$ نشان می‌دهد. خطاهای مطلق برای $M = 7, 9, 11$ در شکل ۴.۶ نشان داده شده است که نشان می‌دهد با افزایش M خطا به صفر میل می‌کند. همچنین خطاهای مطلق روش پیشنهادی را با روش‌های دیگر مقایسه کرده که در جدول ۱.۶ نشان داده شده است.

مثال ۳.۵.۶. معادله دیفرانسیل تاخیری پانتوگراف چند گانه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{f}(r) = f(r) + f(r/2) + f(r/4) + f(r/8) + f(r/16) + g(r), & 0 \leq r \leq R. \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$g(r)$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $f(r) = \sin(r)$ جواب دقیق مسئله باشد. شکل ۵.۶ جواب دقیق و تقریبی را برای $M = 8$ نشان می‌دهد. خطاهای مطلق برای $M = 6, 8, 10$ در شکل ۶.۶ نشان داده شده است که نشان می‌دهد با افزایش M خطا به صفر میل می‌کند.

مثال ۴.۵.۶. معادله دیفرانسیل تاخیری پانتوگراف چندگانه زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \dot{f}(r) = \frac{1}{4} f(r) + \frac{1}{4} e^{\frac{r}{4}} f\left(\frac{r}{4}\right) + \frac{3}{8} r f\left(\frac{r}{8}\right) + g(r), & 0 \leq r \leq R. \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

که $g(r) = \frac{-1}{8} e^{-r} (-8 \cos(r) + 3 e^{\frac{r}{4}} r \sin(\frac{r}{4}) + 4 e^r \sin(\frac{r}{8}) + 12 \sin(r))$ جواب دقیق مسئله $f(r) = e^r \sin r$ است. شکل ۷.۶ جواب دقیق و تقریبی را برای $M = 8$ نشان می‌دهد. خطاهای مطلق برای $M = 6, 8, 10$ در شکل ۸.۶ نشان داده شده است. همچنین خطاهای مطلق با مقادیر مختلف از M که در جدول ۲.۶ نشان داده شده است.

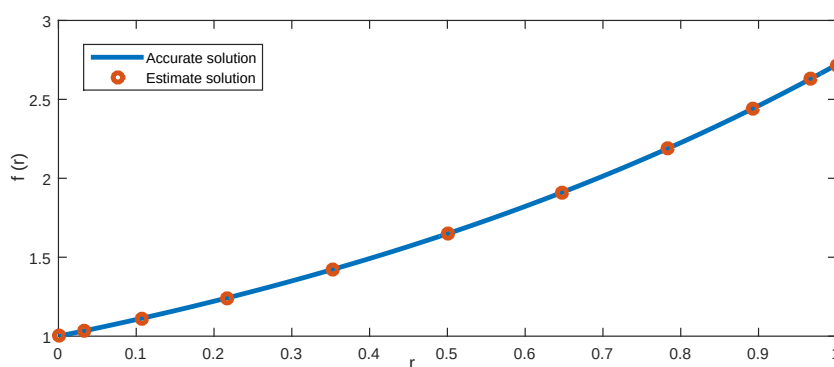
۶۲ روش شبه طیفی لژاندر برای حل معادلات دیفرانسیل تاخیری از نوع پانتوگراف چند گانه

جدول ۱.۶: مقایسه خطاهای مطلق برای مثال ۲.۵.۶ با روش‌های دیگر.

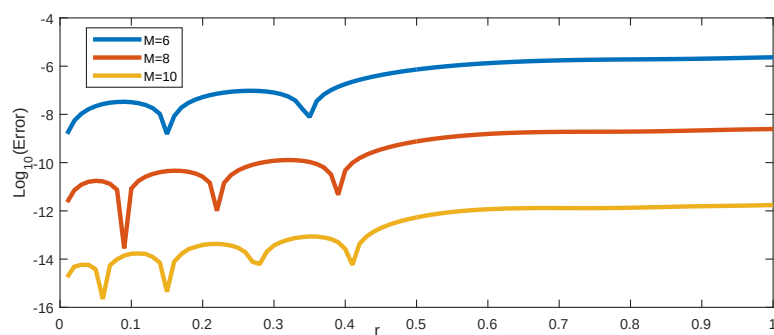
r	تیلور از درجه پنجم [۳۲]	روش تکرار متغیر [۴۳]	برنشتاین از درجه ششم [۱۹]	روش پیشنهاد شده با $M = 6$
۰/۱	$1/27806 \times 10^{-10}$	$9/78000 \times 10^{-11}$	$1/16135 \times 10^{-6}$	$4/1 \times 10^{-8}$
۰/۲	$1/91535 \times 10^{-8}$	$5/65000 \times 10^{-9}$	$8/68254 \times 10^{-6}$	$8/6 \times 10^{-8}$
۰/۳	$3/21533 \times 10^{-7}$	$5/81000 \times 10^{-8}$	$9/03692 \times 10^{-5}$	$1/11 \times 10^{-7}$
۰/۴	$2/35133 \times 10^{-6}$	$2/95000 \times 10^{-7}$	$4/18845 \times 10^{-4}$	$2/24 \times 10^{-7}$
۰/۵	$1/09354 \times 10^{-5}$	$1/01000 \times 10^{-6}$	$1/37448 \times 10^{-3}$	$8/10 \times 10^{-7}$
۰/۶	$3/82097 \times 10^{-5}$	$2/72000 \times 10^{-6}$	$3/65412 \times 10^{-3}$	$1/313 \times 10^{-6}$
۰/۷	$1/09609 \times 10^{-4}$	$6/18000 \times 10^{-6}$	$8/40153 \times 10^{-3}$	$1/469 \times 10^{-6}$
۰/۸	$2/72162 \times 10^{-4}$	$1/24000 \times 10^{-5}$	$1/73570 \times 10^{-2}$	$1/3 \times 10^{-6}$
۰/۹	$6/05246 \times 10^{-4}$	$2/25000 \times 10^{-5}$	$3/30259 \times 10^{-2}$	$1/081 \times 10^{-6}$
۱/۰	$1/23389 \times 10^{-3}$	$3/80000 \times 10^{-5}$	$5/88661 \times 10^{-2}$	$9/90 \times 10^{-7}$

جدول ۲.۶: خطاهای مطلق با مقادیر مختلف M برای مثال ۴.۵.۶.

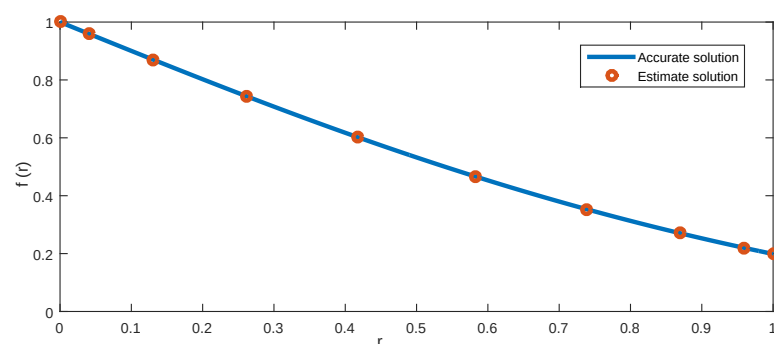
r	$M = 6$	$M = 8$	$M = 10$
۰/۱	$1/27 \times 10^{-7}$	$2/8 \times 10^{-11}$	$2/9 \times 10^{-13}$
۰/۲	$2/34 \times 10^{-7}$	$8/4 \times 10^{-11}$	$5/7 \times 10^{-13}$
۰/۳	$3/53 \times 10^{-7}$	$3/03 \times 10^{-10}$	$6/3 \times 10^{-13}$
۰/۴	$6/68 \times 10^{-7}$	$1/41 \times 10^{-10}$	$4/1 \times 10^{-13}$
۰/۵	$2/708 \times 10^{-6}$	$1/857 \times 10^{-9}$	$8/14 \times 10^{-12}$
۰/۶	$4/817 \times 10^{-6}$	$3/573 \times 10^{-9}$	$1/707 \times 10^{-11}$
۰/۷	$6/049 \times 10^{-6}$	$4/142 \times 10^{-9}$	$1/818 \times 10^{-11}$
۰/۸	$6/276 \times 10^{-6}$	$4/040 \times 10^{-9}$	$1/786 \times 10^{-11}$
۰/۹	$6/336 \times 10^{-6}$	$4/309 \times 10^{-9}$	$1/968 \times 10^{-11}$
۱	$6/934 \times 10^{-6}$	$4/655 \times 10^{-9}$	$2/082 \times 10^{-11}$



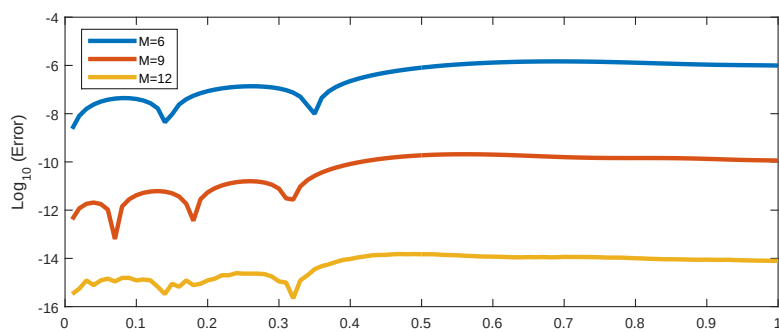
شکل ۱.۶: جواب‌های دقیق و تقریبی با $M = 10$ برای مثال ۱.۵.۶.



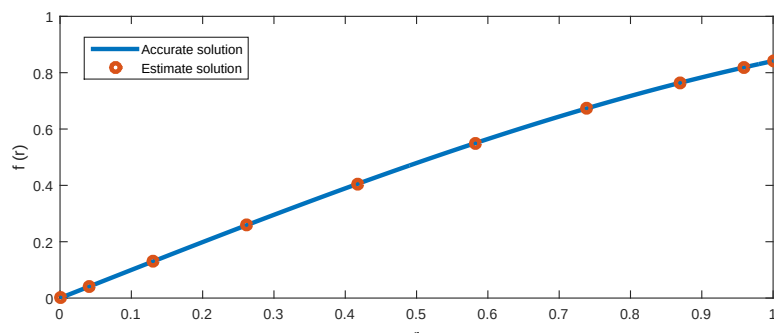
شکل ۲.۶: خطاهای مطلق برای مثال ۱.۵.۶.



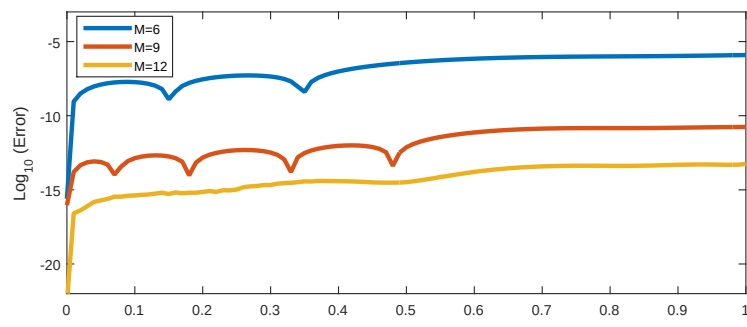
شکل ۳.۶: جواب‌های دقیق و تقریبی با $M = 9$ برای مثال ۲.۵.۶.



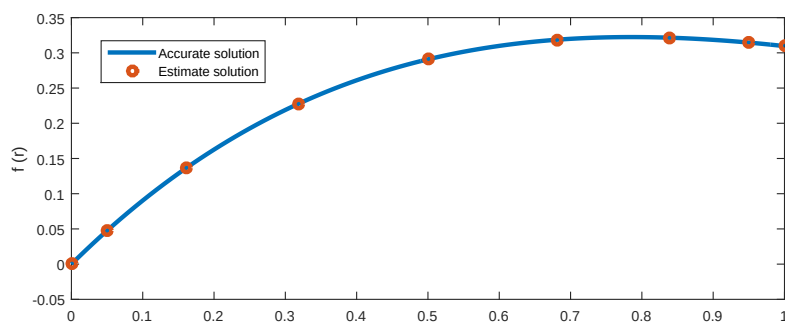
شکل ۴.۶: خطاهای مطلق برای مثال ۲.۵.۶.



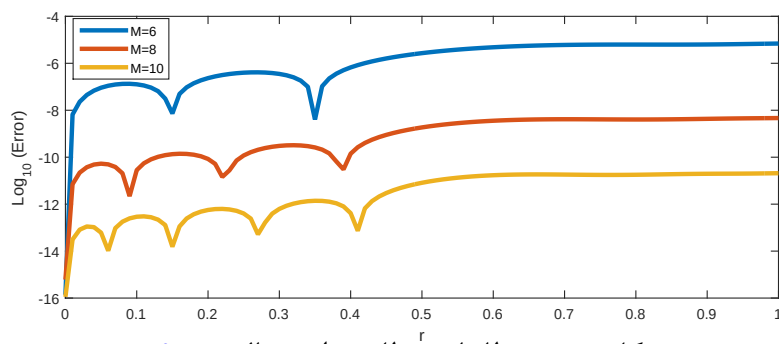
شکل ۵.۶: جواب‌های دقیق و تقریبی با $M = 9$ برای مثال ۳.۵.۶.



شکل ۶.۶: خطاهای مطلق برای مثال ۳.۵.۶.



شکل ۷.۶: جواب‌های دقیق و تقریبی با $M = 8$ برای مثال ۴.۵.۶.



شکل ۸.۶: خطاهای مطلق برای مثال ۴.۵.۶.

مراجع

- [1] Ayad A., Spline approximation for first order Fredholm delay integro-differential equations, International Journal of Computer Mathematics, 467-476 (1999).
- [2] Belloura A., Bousselsal M., Numerical solution of delay integro-differential equations by using Taylor collocation method. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 37(10), 1491-1506 (2014).
- [3] Bhrawy A. H., Assas L. M., Alghamdi M. A., Fast spectral collocation method for solving nonlinear time-delayed Burgers-type equations with positive power terms, Abstract and Applied Analysis, 12 pages (2013).
- [4] Brunner H., Current work and open problems in the numerical analysis of Volterra functional equations with vanishing delays, Frontiers of Mathematics in China, 4, 322 (2009).
- [5] Brunner H., Iterated collocation methods for Volterra integral equations with delay arguments. American Mathematical Society, 62(206), 581-599 (1994).
- [6] Busenbrg S., Martell M., Delay Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1999).
- [7] Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A., spectral method in Fluid Dynamics, Springer, New York (1988).
- [8] Carvalho L. A. V., Cooke K. L., A nonlinear equation with piecewise continuous argument, Differential and Integral Equations. 1, 359-367 (1988).
- [9] Cohen D. S., Rosenblat S. A., A delay logistic equation with variable growth rate, SIAM Journal on Applied Mathematics , 608-624 (1982).

-
- [10] Davaeifar S., Rashidinia J., Solution of a system of delay differential equations of multi pantograph type, Journal of Taibah University for science 11, 1141-1157 (2017).
 - [11] Dehghan M., Shakeri F., The use of the decomposition procedure of Adomian for solving a delay differential equation arising in electrodynamics, Physica Scripta 78(6), 11 pages (2008).
 - [12] EL-Hawary H. M., EL-Shami K. A., Numerical solution of Volterra delay integro-differential equations via spling/spectral methods, International Journal of Differential Equations and Applications, 12(3), 149-157 (2013).
 - [13] Enright W. H., Hu M., Continuous Runge-Kutta methods for neutral Volterra integro-differential equations with delay. Applied Numerical Mathematics., 24(1), 175-190 (1997).
 - [14] Feng X., An analytic study on the multi-pantograph delay equations with variable coefficients, Bulletin Mathematique De La Societe Des Sciences Mathematiques De Roumanie 56(104) No. 2, 205-215, (2013).
 - [15] Freud G., Orthogonal Polynomials, Pergamom Press, Elmsford (1971).
 - [16] Gan S., Dissipativity of θ -methods for nonlinear Volterra delay-integro-differential equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 206(2), 898-907 (2007).
 - [17] Ghomanjani F., Farahi M. H., Pariz N., A new approach for numerical solution of a linear system with distributed delays, Volterra delay-integro-differential equations, and nonlinear Volterra-Fredholm integral equation by Bezier curves, Computational and Applied Mathematics, 36, 1349-1365 (2017).
 - [18] Huang C. M., Vandewalle S., Stability of Runge-Kutta-Pouzet methods for Volterra integro-differential equation with delays. Frontiers of Mathematics in China, 4(1), 63-87 (2009).
 - [19] Isika O.R., Guneyb Z. and Sezera M., Bernstein series solutions of pantograph equations using polynomial interpolation, Journal of Difference Equations and Applications, 18(3), 357-374 (2012).

- [20] Issa K., Biazar J. and Yisa B. M., Shifted Chebyshev Approach for the Solution of Delay Fredholm and Volterra Integro-Differential Equations via Perturbed Galerkin Method, Iranian Journal of Optimization 11(2), 149-159 (2019).
- [21] Kuang Y., Delay Differential Equations with Applications in population Dynamics, Academic press. Inc, New York (1993).
- [22] Li D. and Liu M.Z., Runge–Kutta methods for the multi-pantograph delay equation, Applied Mathematics and Computation, 163, 383–395 (2005).
- [23] Li Y. K., Kuang Y., Periodic solutions of periodic delay Lotka-Volterra equations and systems. Journal of Mathematical Analysis and Applications , 255(1), 260-280 (2001).
- [24] Linz P., Wang R. L. C., Error bounds for the solution of Volterra and delay equations. Applied Numerical Mathematics, 9, 201-207 (1992).
- [25] Lu Xu., Cui M., Analytic solutions to a class of nonlinear infinite delay differential equations, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 343(2), 724-732 (2008).
- [26] Murray J.D., Mathematical Biology, Springer-Verlag, New York, Berlin (1993).
- [27] Ordokhani Y., Mohtashami M. J., Approximate solution of nonlinear Fredholm integro-differential equations with time delay by using Taylor method, Journal of Science Tarbiat Moallem University, 9(1), 73-84 (2010).
- [28] Park H., Hong K. S., Boundary control of container cranes, Control Systems and Robotics, 6042, (2005).
- [29] Rihan F. A., Doha E. H., Hassan M. I., and Kamel N. M., Numerical treatment for Volterra delay integro-differential equations, computational methods in applied mathematics, 292-308 (2009).
- [30] Sadeghi Hafshejani M., Karimi Vanani S. and Sedighi Hafshejani J., Numerical Solution of Delay Differential Using Legendre Wavelet Method, World Applied Sciences Journal, 13, 27-33 (2011).
- [31] Sedaghat S., Ordokhani Y., Dehghan M., Numerical solution of the delay differential equations of pantograph type via chebyshev polynomials, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17(12), 4815-4830 (2012).

-
- [32] Sezer M., yalcinbasb S., Sahin N., Approximate solution of multi-pantograph equation with variable Coefficients, Journal of Computational and Applied Mathematics 214, 406 – 416 (2008).
 - [33] Shahmorad S., Ostadzad M. H., An Operational Matrix Method for solving Delay Fredholm and Volterra Integro-Differential Equations, International Journal of Computational Methods, 13(6) (2016).
 - [34] Shaker F., Dhegihan M., Solution of delay differential equations via a homotopy perturbation method, mathematical and computer modelling, 48, 486-498 (2008).
 - [35] Shen J., Tang T., Wang L., Spectral Methods, algorithms, analysis and applications. Springer, Berlin (2011).
 - [36] Shi Xi. and Chen Y., Spectral-Collocation Method for Volterra Delay Integro-Differential Equations with Weakly Singular Kernels, Advances in Applied Mathematics and Mechanics, 8(4), 648-669 (2016).
 - [37] Tian Y., El-Deeb A. A., Meng F., Some Nonlinear Delay Volterra-Fredholm Type Dynamic Integral Inequalities on Time Scales, Discrete Dynamics in Nature and Society, 5, 1-8 (2018).
 - [38] Tohidi E. and Samadi O. R. N., Optimal control of nonlinear Volterra integral equations via Legendre polynomials, IMA Journal of Mathematical Control and Information, 30(1), 67-83 (2012).
 - [39] Wang W. S., Li S. F., Convergence of Runge-Kutta methods for neural Volterra delay-integro-differential equations. Frontiers of Mathematics in China, 4, 195-216 (2009).
 - [40] Wei YX., Chen YP., Legendre spectral collocation methods for pantograph Volterra delay-integro-differential equations. Journal of Scientific Computing , 53(3), 672-688 (2012).
 - [41] Wu S., Gan S., Analytical and numerical stability of neutral delay integro-differential equations and neutral delay partial differential equations , Computers and Mathematics with Applications, 55(11), 2426-2443 (2008).

- [42] Yang Y., Tohidi E., Numerical solution of multi-Pantograph delay boundary value problems via an efficient approach with the convergence analysis, Computational and Applied Mathematics 38, 127 (2019).
- [43] Yu Zh., Variational iteration method for solving the multi-pantograph delay equation, Physics Letters A 372, 6475–6479 (2008).
- [44] Yuzbasi S., Shifted Legendre method with residual error estimation for delay linear Fredholm integro-differential equations, Journal of Taibah University for Science 344-352 (2017).
- [45] Yuzbasi S., Gok E. and Sezer M., Muntz-Legendre polynomial solutions of linear delay Fredholm integro-differential equations and residual correction, Mathematical and Computational Applications, 476-485 (2013).
- [46] Yuzbasi S., Gok E. and Sezer M., Muntz-Legendre matrix method to solve the delay Fredholm integro-differential equations with constant coefficients, New Trends in Mathematical Sciences 159-167 (2015).
- [47] Yuzbasi S., Sezer M., An exponential approximation for solutions of generalized pantograph-delay differential equations, Applied Mathematical Modelling, 37(22), 9160-9173 (2013).
- [48] Yuzbasi S., Sezer M., Shifted Legendre approximation with the residual correction to solve pantograph-delay type differential equations, Applied Mathematical Modelling, 39(21), 6529-6542 (2015).
- [49] Zhang C. J., Vandewalle S., Stability analysis of Runge-Kutta methods for nonlinear Volterra delay-integro- differential equations, IMA Journal of Numerical Analysis 24(2):193-214,(2004).
- [50] Zhang R., Zhu B., Xie H., Spectral methods for weakly singular Volterra integral equations with pantograph delays, Frontiers of Mathematics in China , 8(2): 281-299 (2013).

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Absolute error	خطای مطلق
Accuracy	دقت
Algorithm	الگوریتم
Approximate solution	جواب تقریبی
Coefficient	ضریب
Collocation	هم‌محلی
Compact	فشرده
Comparison	مقایسه
Component	مولفه
Computation	محاسبه
Constant	ثابت
Continuous	پیوسته
Continuous-time	پیوسته-زمانی
Convergent	همگرا
Degree	درجه
Delay differential equation	معادله دیفرانسیل-تاخیری
Derivation	مشتق
Differential equation	معادله دیفرانسیل
Differentiation	مشتق‌گیری
Discrete	گسسته
Divergent	واگرا
Effectiveness	کارایی
Equivalent	برابر
Error	خطا
Estimate	تخمین
Exact solution	جواب دقیق

Feasible	شدنی
Figure	شکل
Fourier function	تابع فوریه
Fredholm integro equation	معادله انتگرال فردهلم
Gauss	گاوس
Infeasible	نشدنی
Integral-differential equation	معادله انتگرال-دیفرانسیل
Integral equation	معادله انتگرال
Integration	انتگرال‌گیری
Interpolation	درونیابی
Lagrange	لاگرانژ
Legendre	لژاندر
Legendre Gauss	لژاندر-گاوس
Legendre Gauss-Lobatto	لژاندر-گاوس-لوباتو
Legendre Gauss-Radau	لژاندر-گاوس-رادو
Lemma	لم
Linear	خطی
Method	روش
Multi Pantograph	پانتوگراف چندگانه
Negative	منفی
Nonlinear	غیرخطی
Norm	نرم
Numerical	عددی
Optimal	بهینه
Optimal control problem	مساله کنترل بهینه
Optimal solution	جواب بهینه
Orthogonal	متعامد
Otherwise	در غیر این صورت
Polynomial	چندجمله‌ای
Positive	مثبت
Property	خاصیت
Pseudospectral	شبه طیفی
Recurrence	بازگشتی
Residue	مانده

Scalar	اسکالر
Sequence	دنباله
Series	سری
Shift	انتقال
Smooth	هموار
Sobolev space	فضای سوبولف
Space	فضا
Spectral	طیفی
Stable	پایدار
Theorem	قضیه
Theory	نظریه
Transformation	تبدیل
Uniqueness	یکتایی
Unstable	ناپایدار
Value	مقدار
Vanish	صفرشدن
Vector	بردار
Volterra integro equation	معادله انتگرال والترا
Weight function	تابع وزن

Aabstract

Delay differential and integral equations (DDIEs) have a wide range of applications in science and engineering. When these equations are nonlinear, we cannot usually obtain an exact solution. Hence, we must utilize an efficient numerical method with high convergence rate and low error to approximate the solution. In this thesis, we propose a new shifted pseudo spectral method to solve different classes of DDIEs. First, we transform the problem into a nonlinear programming (NLP) problem and then utilize a pseudo spectral method to discrete the problem. After solving this discrete problem, we can achieve the pointwise and continuous approximate solutions for the main DDIES. We analyze the convergence of the suggested methods for DDIEs. Moreover,by solving some practical DDIEs and comparing the method with some other methods, we show the efficiency of the method.

Keywords

Delay integro-differential equations, Legendre pseudo spectral method,convergence analysis



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Numerical Analysis

A pseudo-spectral approach for solving delay integro-differential equations

By: Mostafa Mahmoudi

Supervisors:

Dr. Mehdi Ghovatmand

Dr. Mohammad Hadi Noori Skandari

October 2020