

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش بهینه‌سازی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رهیافتی برای مسائل برنامه‌ریزی کسری زمان-پیوسته

نگارنده: سمیه دهنوئی

استاد راهنما

دکتر محمدهادی نوری اسکندری

آذر ۱۳۹۹

شماره: ۲-۲۲-۳۵۳
تاریخ: ۹۹/۱۰/۱۴

باسمه تعالی



فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم سمیه دهنوئی
با شماره دانشجویی ۹۶۳۴۰۶۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش بهینه سازی تحت عنوان: رهیافتی برای مسائل برنامه
ریزی کسری زمان - پیوسته که در تاریخ ۹۹/۱۰/۰۴ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار
گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

(الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ☐ (ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸-۱۸/۹۹ ☒ (ج) درجه خوب: نمره ۱۶-۱۷/۹۹ ☐ (د) درجه متوسط: نمره ۱۴-۱۵/۹۹ ☐ (ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐ نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی			
عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر محمد هادی نوری اسکندری	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم	—	—	—
۳- استاد مشاور	—	—	—
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سمیه مغاری	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر حجت احسنی طهرانی	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر مهرداد غزنوی	دانشیار	

نام و نام خانوادگی دانشجو: _____



تقديم به
پدر و مادر و همسر عزیزم

سپاس گزاری...

اینک که به فضل خداوند این پروژه به سرانجام رسیده، وظیفه خود می دانم از زحمات بی دریغ استاد گرامی جناب آقای دکتر محمدهادی نوری اسکندری که در اجرای این پروژه مرا یاری فرموده اند، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشم. همواره از خداوند متعال سلامتی و توفیق روز افزون شما را خواهانم.

سمیه دهنوئی

آذر ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب سمیه دهنوئی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان رهیافتی برای مسائل برنامه ریزی کسری زمان-پیوسته، تحت راهنمایی محمدهادی نوری اسکندری متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

سمیه دهنوئی

آذر ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، مسائل برنامه ریزی کسری خطی و غیرخطی زمان-پیوسته را در نظر می گیریم. این مسائل شامل یک معادله دینامیکی و یک تابع هدف است که تابع هدف نسبت دو کسر به شکل انتگرال می باشد. ابتدا رهیافت دینکل باخ برای مسائل برنامه ریزی کسری خطی زمان-پیوسته مطرح می شود. با این رهیافت می توان مساله را از شکل کسری خارج کرد و به مسائل کنترل بهینه معادلی تبدیل کرد که شامل یک پارامتر است. سپس یک روش تکراری بر اساس موجک ها برای حل این مسائل پیشنهاد شده است. در ادامه یک رهیافت بهینه سازی سراسری برای حل رده ای از مسائل برنامه ریزی کسری غیرخطی ارائه می شود. نهایتاً یک روش شبه طیفی جدید برای حل این مسائل در شکل کلی پیشنهاد می کنیم و با مثال های عددی کارایی روش را نشان می دهیم.

کلمات کلیدی: برنامه ریزی کسری خطی، برنامه ریزی کسری غیرخطی، رهیافت بهینه سازی سراسری، رهیافت دینکل باخ، روش شبه طیفی

فهرست مطالب

ک	فهرست تصاویر
م	فهرست جداول
۱	۱ رهیافت دینکل باخ برای مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی
۱	۱.۱ مقدمه
۲	۲.۱ مسائل کنترل بهینه کسری
۳	۳.۱ یک رده از مسائل کنترل بهینه کسری
۴	۱.۳.۱ مساله کنترل بهینه خطی (P_q)
۷	۴.۱ حل مساله (P)
۷	۱.۴.۱ بیان تحلیلی تابع $F(q)$
۱۰	۲.۴.۱ مقدار بهینه مساله (P)
۱۱	۵.۱ مساله بیشینه کردن کارایی تبلیغات
۱۵	۲ یک روش تکراری برای یک رده از مسائل برنامه‌ریزی کسری
۱۵	۱.۲ مقدمه
۱۶	۲.۲ یک طرح تکراری براساس روش هم‌محلی موجک
۱۶	۱.۲.۲ خانواده هار
۱۷	۲.۲.۲ ماتریس موجک‌های هار
۲۰	۳.۲ الگوریتم
۲۱	۴.۲ مثال‌های عددی
۲۵	۳ یک رهیافت بهینه‌سازی سراسری برای رده‌ای از مسائل برنامه‌ریزی کسری
۲۵	۱.۳ مقدمه
۲۶	۲.۳ مساله کنترل بهینه کسری
۳۰	۳.۳ الگوریتم‌های پیشنهادی
۳۴	۴.۳ مثال‌های عددی

۳۷	یک روش شبه طیفی برای مسائل برنامه ریزی کسری غیر خطی	۴
۳۷	معرفی مساله	۱.۴
۳۹	تبدیل مساله $CTNFP$ به یک مساله غیر کسری	۲.۴
۴۱	روش شبه طیفی لژاندر	۳.۴
۴۳	آنالیز شدنی بودن مساله زمان-گسسته	۴.۴
۴۶	همگرایی روش	۵.۴
۴۸	مثال های عددی	۶.۴
۵۵	نتیجه گیری	۵
۵۷	مراجع	

فهرست تصاویر

۹	 تابع دینکل باخ $F(q)$	۱.۱
۲۲	 کنترل بهینه دقیق و تقریبی برای مثال ۱.۴.۲	۱.۲
۲۳	 وضعیت بهینه دقیق و تقریبی برای مثال ۱.۴.۲	۲.۲
۲۴	 کنترل بهینه دقیق و تقریبی برای مثال ۲.۴.۲	۳.۲
۲۴	 وضعیت دقیق و تقریبی بهینه برای مثال ۲.۴.۲	۴.۲
۵۰	 وضعیت بهینه تقریبی برای مثال (۱.۶.۴)	۱.۴
۵۱	 متغیر کنترل بهینه تقریبی برای مثال (۱.۶.۴)	۲.۴
۵۱	 خطای مطلق برای وضعیت بهینه تقریبی به دست آمده برای مثال (۱.۶.۴)	۳.۴
۵۲	 خطای مطلق کنترل بهینه تقریبی به دست آمده برای مثال (۱.۶.۴)	۴.۴
۵۲	 متغیر وضعیت بهینه تقریبی به دست آمده برای مثال (۲.۶.۴)	۵.۴
۵۳	 متغیر کنترل بهینه تقریبی به دست آمده برای مثال (۲.۶.۴)	۶.۴
۵۳	 خطای مطلق متغیر وضعیت بهینه تقریبی برای مثال (۲.۶.۴)	۷.۴
۵۴	 خطای مطلق متغیر کنترل بهینه تقریبی برای مثال (۲.۶.۴)	۸.۴

فهرست جداول

۲۲	نتایج استفاده از روش پیشنهادی برای مثال ۱.۴.۲	۱.۲
۲۳	نتایج استفاده از روش تکراری پیشنهادی برای مثال ۲.۴.۲	۲.۲
۳۶		۱.۳

پیشگفتار

مساله بهینه‌سازی که در آن تابع هدف به صورت نسبت دو تابع حقیقی مقدار می‌باشد، به عنوان یک مساله برنامه‌ریزی کسری^۱ شناخته می‌شود. برخی از کاربردهای این نوع مسائل بهینه‌سازی را می‌توان در نظریه اطلاعات، برنامه‌ریزی تصادفی و الگوریتم تجزیه برای سیستم‌های خطی بزرگ یافت [۱۹، ۲۹، ۳۳، ۳۷، ۴۲]. چندین مساله نظری و محاسباتی مربوط به برنامه‌ریزی کسری، در دهه‌های اخیر ارائه شده‌اند. زلمای^۲ [۵۱-۵۳] به بررسی مسائل برنامه‌ریزی کسری زمان-پیوسته $FP(CTLFP)$ ^۳ می‌پردازد. استانکو-مینژن^۴ و تیگون^۵ [۴۳] مسائل تصادفی CT ^۶ خطی $FP(CTFP)$ ^۷ را مورد مطالعه قرار دادند. آن‌ها نشان دادند که تحت برخی شرایط، مسائل $CTLFP$ معادل مسائل جبری $CTLFP$ هستند. ون^۸ و سایرین [۵۰] از تبدیلات چارنس^۹ و کوپر^{۱۰} برای توسعه یک الگوریتم عددی برای حل یک کلاس از مسائل $CTLFP$ استفاده کردند. همچنین ون و وو^{۱۱} [۴۹] و ون [۴۸-۴۶] روش‌های محاسباتی را با ترکیب روش پارامتری و روش تقریب گسسته برای حل برخی از رده‌ها توسعه داده‌اند. لوور^{۱۲} و همکاران [۳۱] یک ترکیب از روش پارامتریک و روش گسسته‌سازی برای حل یک رده از مسائل FP درجه ۲ ارائه کردند.

علاوه بر روش‌های نظری و محاسباتی فوق‌الذکر، برخی محققان تلاش کرده‌اند تا مسائل $CTFP$ را با استفاده از روش دینکل‌باخ^{۱۳} حل کنند [۱۲]. با نزدیک شدن دینکل‌باخ به یک خانواده مسائل هم‌ارز تبدیل می‌شود که نسبت از بین می‌رود و تابع هدف با اختلاف وزن کسر و مخرج کسر مشخص می‌شود. برای مثال در [۶] یک الگوریتم از نوع دینکل‌باخ برای حل

¹Fractional programming (FP)

²Zalmai

³Continuous time fractional programming

⁴Stancu-Minsion

⁵Tigon

⁶Continuous time

⁷Continuous time linear fractional programming

⁸Wen

⁹Charnes

¹⁰Cooper

¹¹Wu

¹²Lur

¹³Dinkelbach

یک رده از مسائل *CTLFP* وجود دارد. در [۴۵] یک روش مبتنی بر رهیافت دینکل باخ برای حل یک رده ویژه از مسائل برنامه‌نویسی کسری *CTFP* از جمله انتگرال آفین و دینامیک خطی ارائه شده است. اینخبات^{۱۴} و ژو^{۱۵} [۳۵] یک رهیافت بهینه‌سازی سراسری را برای مسائل کنترل بهینه کسری بر اساس الگوریتم دینکل باخ ارائه داده‌اند.

علی‌رغم وجود برخی روش‌ها برای رده‌های ویژه مسائل *CTFP*، به نظر می‌رسد که یک روش قدرتمند عملی برای حل مسئله *CTFP* وجود ندارد. از این رو هدف اصلی این پایان‌نامه توسعه یک روش شبه طیفی برای حل مسائل برنامه‌ریزی کسری *CT* است. روش‌های طیفی شبه طیفی [۳، ۱۳، ۱۶، ۱۷، ۲۰، ۲۲، ۲۳، ۳۹] یکی از بهترین روش‌های عددی برای حل مسائل *CTFP* هستند؛ زیرا دقت بالا (با همگرایی نمایی) و کاربرد زیادی دارند. قبل از به کارگیری این روش، یک تکنیک جدید برای تبدیل مساله *CTFP* به یک روش غیر کسری ارائه می‌کنیم.

¹⁴Enkibat

¹⁵Zhou

فصل ۱

رهیافت دینکل باخ برای مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی

۱.۱ مقدمه

در این فصل رده‌ای از مسائل کنترل بهینه کسری یا برنامه‌ریزی زمان-پیوسته را در نظر می‌گیریم که در آن تابع هدف با نسبت دو انتگرال داده می‌شود. این نوع مسائل، پیش از این، توسط استانکو-مینژن^۱، بهات^۲ و در یک چارچوب کلی‌تر توسط مایل^۳ حل شده است. به طور خاص روی مسائل با انتگرال‌های خطی و دینامیک خطی بر حسب متغیر وضعیت و کنترل تمرکز می‌کنیم، روش ارائه شده در این فصل از مقاله [۵] گرفته شده است.

با وجود سادگی این مسائل، نظریه کنترل بهینه کلاسیک نمی‌تواند به طور مستقیم برای حل آن‌ها مورد استفاده قرار گیرد. استانکو-مینژن یک روش با استفاده از روش دینکل باخ^۴ برای مسائل کنترل بهینه کلی پیشنهاد کرده است. روش دینکل باخ مساله را از فرم کسری خارج می‌کند. با رویکرد دینکل باخ، مساله کنترل بهینه کسری تبدیل به یک خانواده یک پارامتری معادل $\{P_q\}$ از مسائل کنترل بهینه تبدیل می‌شود. در حالتی که نسبت از بین می‌رود

¹ Stancu-Minasian

² Bhatt

³ Miele

⁴ Dinkelbach

و تابع هدف به وسیله تفاضل وزنی صورت و مخرج بیان می‌شود. در کلاس ویژه‌ای از مسائل با انتگرال آفین و دینامیک خطی، خانواده $\{P_q\}$ شامل مسائل کنترل بهینه خطی است. ساختار خاصی از مسائل که در نظر می‌گیریم، به ما اجازه می‌دهد تا به طور صریح آن‌ها را حل کنیم یا نیاز به تکنیک‌های عددی کلاسیک برای حل یک معادله واحد داریم.

این فصل به صورت زیر سازمان‌دهی شده است.

در بخش ۲.۱، مساله کنترل بهینه کسری را فرمول‌سازی می‌کنیم و رویکرد خطی سازی دینکل باخ را برای برنامه‌ریزی کسری به کار می‌بریم. در بخش ۳.۱، به یک رده از مسائل کنترل بهینه کسری با انتگرال آفین و دینامیک خطی رو به رو هستیم و ساختار کنترل بهینه، مسائل کنترل بهینه خطی مربوطه را پیدا می‌کنیم. در بخش ۴.۱، جواب مساله کسری را ارائه می‌کنیم؛ در حالی که در بخش ۵.۱، یک مدل کاربردی برای افزایش حداکثر بهره‌وری آگهی‌های تبلیغاتی را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۲.۱ مسائل کنترل بهینه کسری

یک مساله کنترل بهینه کسری را به صورت زیر در نظر بگیرید: [۴۰]

$$(FP) \quad \max \quad \frac{\int_0^T f(x(t), u(t), t) dt}{\int_0^T g(x(t), u(t), t) dt}, \quad (1.1)$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = h(x(t), u(t), t), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

که $t \in [0, T]$ ، $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ ، $x(t) \in \mathbb{R}^n$ به طور معمول در برنامه‌ریزی کسری استاندارد—مینژن فرض می‌شود که مخرج کسر کاملاً مثبت است؛ به این معنی که

$$\int_0^T g(x(t), u(t), t) dt > 0,$$

برای هر $u(t) \in U$.

استانکو—مینژن یک روش عددی برای حل (FP) پیشنهاد می‌کند. ایده کلیدی این است که از الگوریتم دینکل باخ برای برنامه‌ریزی کسری استفاده می‌شود که توسط بهات اصلاح شده است و همچنین توسط استانکو—مینژن نیز برای حل مسائل کنترل بهینه کسری استفاده می‌شود. رهیافت شامل تبدیل مساله اصلی کسری به یک خانواده مسائل کنترل بهینه پارامتری معادل می‌باشد. حال یک تابع کمکی F را تعریف می‌کنیم که برای هر $q \in \mathbb{R}^1$ ، $F(q)$ حداکثر مقدار تابع هدف مساله کنترل بهینه (غیرکسری) زیر باشد:

$$(P_q) \quad \max_{(x,u) \in \Omega} [\int_0^T \{f(x(t), u(t), t) - qg(x(t), u(t), t)\} dt],$$

که Ω توسط سیستم دینامیک

$$\dot{x}(t) = h(x(t), u(t), t),$$

با $x(\circ) = x_\circ$ و $u \in U$ تعریف شده است.

اگر برای هر $q \in \mathbb{R}$ ، یک تابع کنترل بهینه $u(t) \in U$ برای مساله (P_q) وجود داشته باشد، آنگاه تابع F به طور اکید نزولی، محدب و دارای یک صفر q^* منحصر به فرد می باشد. [۴۰] ویژگی خوبی که مساله اصلی کنترل بهینه کسری (FP) را با خانواده مسائل کمکی (P_q) مرتبط می کند، این است که اگر $F(q^*) = \circ$ ، آنگاه q^* مقدار بهینه (FP) و کنترل بهینه و مسیر بهینه (p_q) برای مساله (FP) نیز بهینه است. از این رو است که جواب مساله (FP) معادل تعیین ریشه معادله $F(q) = \circ$ است. لذا به دنبال ایده دینکل باخ، حل مساله کسری (FP) را می توان با استفاده از یک روش تکراری شبه نیوتن به دست آورد که از مقدار q شروع می شود به طوری که $F(q) > \circ$ و دنباله مقادیر $F(q)$ به صفر می رسد. اثر بخشی این روش به طور خاص بر ویژگی های خانواده مسائل کنترل بهینه کمکی بستگی دارد.

۳.۱ یک رده از مسائل کنترل بهینه کسری

مساله کنترل بهینه کسری زیر با یک کنترل و یک وضعیت را در نظر بگیرید:

$$(P) \quad \max \quad \frac{x(T) + k \int_{\circ}^T (x(t) + c) dt}{u_{\circ} + \int_{\circ}^T u(t) dt},$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \\ x(\circ) = x_{\circ}, \\ u \in [\circ, \bar{u}], \end{cases}$$

که در آن $c, k \in \mathbb{R}$ و $u_{\circ} > \circ$ ، $\bar{u} > \circ$ ، $b \neq \circ$ ، $a \neq \circ$ ، $x(t), u(t) \in \mathbb{R}$

متغیر وضعیت $x(t)$ پیوسته و به طور قطعه ای دارای مشتق پیوسته است و متغیر کنترل $u(t)$ قطعه ای پیوسته است. حتی اگر (P) یک مساله کنترل بهینه کسری با یک افق متناهی، انتگرال های آفین و دینامیک خطی باشد، برای حل آن نمی توانیم به طور مستقیم از نظریه کنترل بهینه استاندارد استفاده کنیم. یک روش ممکن برای حل مساله (P) این است که از رهیافت دینکل باخ استفاده کنید که در بخش قبلی بیان شد. بنابراین تابع کمکی F را تعریف می کنیم طوری که $F(q)$ به عنوان حداکثر مقدار تابعی مساله کنترل بهینه زیر که خطی است تعیین می شود:

$$(P_q) \quad \max_{(x,u) \in \Omega} \left[\left(x(t) + k \int_{\circ}^T (x(t) + c) dt \right) - q \left(u_{\circ} + \int_{\circ}^T u(t) dt \right) \right].$$

در اینجا Ω توسط محدودیت‌های مساله (P) تعریف می‌شود

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \\ x(\circ) = x_\circ, \\ u \in [\circ, \bar{u}]. \end{cases}$$

توجه کنید برای هر ثابت q ، (P_q) می‌تواند با تکنیک‌های کنترل بهینه خطی کلاسیک حل شود.

برای هر $q \in \mathbb{R}$ ، یک تابع کنترل بهینه $u(t) \in U$ برای مساله (P_q) وجود دارد، (همان طور که در بخش ۲.۱ ذکر شده است) و به علاوه تابع F اکیداً نزولی، محدب و دارای یک صفر منحصر به فرد q^* است که مقدار بهینه مساله (P) نیز می‌باشد.

۱.۳.۱ مساله کنترل بهینه خطی (P_q)

تعریف ۱.۳.۱. یک مساله کنترل بهینه می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$\min J(x, u) = \int_{t_0}^{t_f} f(t, x, u) dt, \quad (۳.۱)$$

به طوری که

$$\dot{x} = g(t, x, u), \quad t_0 \leq t \leq t_f, \quad (۴.۱)$$

$$x(t_0) = \alpha, \quad x(t_f) = \beta, \quad (۵.۱)$$

که در آن u به ترتیب متغیرهای وضعیت و کنترل نامیده می‌شوند. اکنون تابع هامیلتونی برای این مساله به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H = H(t, x, u) = -f(t, x, u) + \lambda(t)g(t, x, u)$$

که در آن $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ، $g = (g_1, \dots, g_n)$ و

$$\lambda(t)g(t, x, u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)g_i(t, x, u).$$

لذا

$$H = -f(t, x, u) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t)g_i(t, x, u).$$

تعریف ۲.۳.۱ (اصل ماکزیمم پونتریاگین). مساله کنترل بهینه (۱.۴.۴)–(۳.۴.۴) مفروض است. فرض کنید t_f و $x(t_f)$ هر دو معلوم باشند. در این صورت اگر (x^*, u^*) یک زوج جواب بهینه برای این مساله باشند، آنگاه

(۱) تابع هامیلتونی H ماکزیمم خود را نسبت به u در u^* اختیار می‌کند. یعنی

$$H(t, x, \dot{x}, u^*) = \max H(t, x, \dot{x}, u).$$

لذا

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0$$

(۲) بردار $\lambda^*(t)$ وجود دارد به طوری که (x^*, u^*, λ^*) در روابط زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x, u) \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

(۳) تابع هامیلتونی در $(x^*, \dot{x}^*, u^*)$ ثابت است؛ یعنی c وجود دارد به طوری که $t_0 \leq t \leq t_f$ و

$$H(t) = H(t, x^*, \dot{x}^*, u^*) = c.$$

(۴) اگر t_f نامعین و $x(t_f)$ معین باشد، آنگاه

$$H(t, x^*(t), \dot{x}^*(t), u^*(t)) = 0, \quad t_0 \leq t \leq t_f.$$

(۵) اگر t_f معین و $x(t_f)$ نامعین باشد، آنگاه

$$\lambda^*(t_f) = 0.$$

(۶) اگر t_f و $x(t_f)$ هر دو نامعین باشد، آنگاه

$$H(t_f)\delta t_f + \lambda(t_f)\delta x_f = 0$$

که در آن

$$\begin{cases} \delta x_f = x(t_f) - x^*(t_f) \\ \delta t_f = t_f - t_f^* \end{cases}$$

کنترل بهینه مساله (P_q) در گزاره ۱.۳.۱ شرح داده شده است. برای اثبات آن به لم زیر نیاز داریم:

لم ۱.۳.۱. فرض کنید $q = \frac{-kb}{a}$ و $a = -k$. در این صورت $F(q) = x_0 + kcT - bu_0$.

اثبات. با استفاده از مساله (P_q) ، ما می‌توانیم این تابع هدف را بازنویسی کنیم (توجه کنید که در اینجا $q = b$):

$$\begin{aligned} F(q) &= \left(x(t) + k \int_0^T (x(t) + c) dt \right) - q \left(u_0 + \int_0^T u(t) dt \right) \\ &= \int_0^T [kx(t) - qu(t) + kc] dt + x(T) - qu_0 \\ &= \int_0^T [kx(t) - qu(t)] dt + \int_0^T \dot{x}(t) dt + x_0 + kcT - qu_0 \\ &= \int_0^T [kx(t) - qu(t) + ax(t) + bu(t)] dt + x_0 + kcT - qu_0 \\ &= x_0 + kcT - bu_0. \end{aligned}$$

□

حال تعریف می‌کنیم:

$$L = \left(1 + \frac{k}{a}\right)e^{aT} - \frac{k}{a}. \quad (۶.۱)$$

گزاره ۱.۳.۱. کنترل بهینه $u(t)$ مساله (P_q) به صورت زیر است:
 (a) فرض کنید $b(k+a) < 0$. اگر $q \leq bL$ ، آنگاه $u(t) = \bar{u}$ ، برای هر $t \in (0, T)$. به علاوه
 اگر $q \in (bL, b)$ ، آنگاه

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, \tau), \\ \bar{u}, & t \in (\tau, T), \end{cases}$$

همچنین اگر $q \geq b$ ، آنگاه $u(t) = 0$ ، برای هر $t \in (0, T)$. که در آن زمان سوئیچ τ توسط عبارت زیر داده شده است:

$$\tau = T - \frac{1}{a} \log \frac{kb + aq}{b(k+a)}. \quad (۷.۱)$$

(b) فرض کنید $b(k+a) > 0$. اگر $q \leq b$ ، آنگاه $u(t) = \bar{u}$ ، برای هر $t \in (0, T)$. به علاوه اگر
 $q \in (b, bL)$ ، آنگاه

$$u(t) = \begin{cases} \bar{u}, & t \in (0, \tau), \\ 0, & t \in (\tau, T), \end{cases}$$

همچنین اگر $q \geq bL$ ، آنگاه $u(t) = 0$ ، برای هر $t \in (0, T)$.
 (c) فرض کنید $b(k+a) = 0$. اگر $q < b$ ، آنگاه $u(t) = \bar{u}$ ، برای هر $t \in (0, T)$. به علاوه اگر
 $q > b$ ، آنگاه $u(t) = 0$ ، برای هر $t \in (0, T)$ همچنین اگر $q = b$ ، آنگاه هر کنترل ممکن، بهینه است.

اثبات. تابع هامیلتونی مساله (P_q) را در نظر بگیرید

$$H_q = kx(t) - qu(t) + \lambda(t)[ax(t) + bu(t)] = [k + \lambda(t)a]x(t) + [\lambda(t)b - q]u(t),$$

که با توجه به اصل حداکثری پونتریاگین، تابع $\lambda(t)$ در روابط زیر صدق می‌کند:

$$\dot{\lambda}(t) = -a\lambda(t) - k, \quad \lambda(T) = 1,$$

لذا

$$\lambda(t) = \left(1 + \frac{k}{a}\right)e^{a(T-t)} - \frac{k}{a}.$$

بنابراین تابع سوئیچ به صورت زیر است:

$$G_q(t) = \frac{\partial H_q}{\partial u} = \lambda(t)b - q = \frac{b(a+k)}{a}e^{a(T-t)} - \frac{bk}{a} - q.$$

توجه داشته باشید که با تعریف (۶.۱)، $G_q(T) = b - q$ و $G_q(\circ) = Lb - q$ ،
 (a) فرض کنید $b(a+k) < \circ$ باشد. تابع $G_q(t)$ اکیداً صعودی است. بنابراین اگر $G_q(\circ) \geq \circ$ ،
 به این معنی که $Lb - q \geq \circ$ ، آنگاه کنترل بهینه $u(t) = \bar{u}$ می‌باشد و اگر $G_q(T) \leq \circ$ باشد، یعنی
 $b - q \leq \circ$ باشد، آنگاه کنترل بهینه $u(t) = \circ$ است.
 اگر $G_q(\circ) < \circ$ و $G_q(T) > \circ$ ، ما می‌توانیم زمان منحصر به فرد $\tau \in (\circ, T)$ برای تغییر از
 $u(t) = \bar{u}$ به $u(t) = \circ$ از حل معادله $G_q(t) = \circ$ تعیین کنیم. از این رو زمان سوئیچ به صورت
 زیر است:

$$\tau = T - \frac{1}{a} \log \frac{kb + aq}{b(k + a)}.$$

مشاهده می‌شود که در این حالت $\frac{kb + aq}{b(k + a)} > \circ$ و لذا τ به خوبی تعریف شده است.
 (b) اگر $b(a + k) > \circ$ ، تابع $G_q(t)$ به طور اکید نزولی است و اگر $G_q(t) \geq \circ$ باشد، کنترل
 بهینه $u(t) = \bar{u}$ است؛ در حالی که اگر $G_q(\circ) \leq \circ$ باشد، $u(t) = \circ$.
 اگر $G_q(\circ) > \circ$ و $G_q(T) < \circ$ ، ما باید زمان τ را کنترل و از $u(t) = \bar{u}$ به $u(t) = \circ$ تغییر
 دهیم. همچنین در این حالت $\frac{kb + aq}{b(k + a)} > \circ$ و τ به خوبی تعریف شده است.
 (c) در حالت $b(a + k) = \circ$ یعنی $a = -k$ ، چون $b \neq \circ$ ، تابع $G_q(t)$ ثابت است و علامت آن
 با علامت $\frac{-(bk + aq)}{a}$ یعنی با علامت $b - q$ یکسان است. بنابراین کنترل بهینه $u(t) = \bar{u}$ اگر
 $q < b$ و $u(t) = \circ$ اگر $q > b$. در این حالت خاص $bk + aq = \circ$ یعنی $q = b$ ، تابع سوئیچ صفر
 است. در این حالت امکان استفاده از اصل حداکثری پونتریاگین وجود ندارد. اما با توجه به
 لم ۱.۳.۱، تابع $F(q)$ در این حالت یک تابع ثابت است و هر کنترل شدنی برای (P_q) یک کنترل
 بهینه است. $\square$

۴.۱ حل مساله (P)

در این بخش ابتدا شکل تحلیلی تابع $F(q)$ را بیان می‌کنیم و سپس مقدار بهینه تابع هدف را
 مشخص می‌کنیم.

۱.۴.۱ بیان تحلیلی تابع $F(q)$

برای به دست آوردن یک جواب صریح از مساله (FP) ، می‌خواهیم تابع $F(q)$ را به شکل تحلیلی
 بیان و محاسبه کنیم. با استفاده از بخش (۶.۱)، گزاره زیر را داریم.

گزاره ۱.۴.۱. تابع $F(q)$ به صورت زیر است:

(a) اگر $b(k + a) < \circ$ آنگاه

$$F(q) = \begin{cases} F_{\setminus}(q), & q \leq bL, \\ F_{\prec}(q), & bL < q < b, \\ F_{\succ}(q), & q \geq b. \end{cases}$$

(b) اگر $b(k+a) > \circ$ آنگاه

$$F(q) = \begin{cases} F_{\setminus}(q), & q \leq b, \\ F_{\prec}(q), & b < q < bL, \\ F_{\succ}(q), & q \geq bL. \end{cases}$$

(c) اگر $b(k+a) = \circ$ آنگاه

$$F(q) = \begin{cases} F_{\setminus}(q), & q \leq b, \\ F_{\succ}(q), & q \geq b, \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{aligned} F_{\setminus}(q) &= -(u_{\circ} + \bar{u}T)q + x_{\circ}L + ckT - \frac{b\bar{u}}{a}(\setminus - L + kT), \\ F_{\prec}(q) &= -\left(u_{\circ} - \frac{\bar{u}}{a}\right)q + x_{\circ}L + ckT - \frac{b\bar{u}}{a}\left[\setminus + \frac{aq + kb}{ab} \log \frac{aq + kb}{b(a+k)}\right], \\ F_{\succ}(q) &= -u_{\circ}q + x_{\circ}L + ckT, \\ F_{\prec}(q) &= -\left(u_{\circ} - \frac{\bar{u}}{a}\right)q + x_{\circ}L + ckT \\ &\quad + \frac{b\bar{u}}{a}\left\{L + \frac{aq + kb}{ab}\left[-aT + \log \frac{aq + kb}{b(a+k)}\right]\right\}. \end{aligned}$$

اثبات. با جایگزینی کنترل بهینه $u(t)$ در معادله وضعیت به صورتی که در گزاره (۱.۳.۱) بیان شد، می‌توانیم بگوییم اگر $u(t) = \bar{u}$ ، به ازای هر $t \in (\circ, T)$ ، آنگاه

$$x(t) = \left(x_{\circ} + \frac{b\bar{u}}{a}\right)e^{at} - \frac{b\bar{u}}{a}, \quad (۸.۱)$$

اگر $u(t) = \circ$ به ازای هر $t \in (\circ, T)$ ، آنگاه

$$x(t) = x_{\circ}e^{at}, \quad (۹.۱)$$

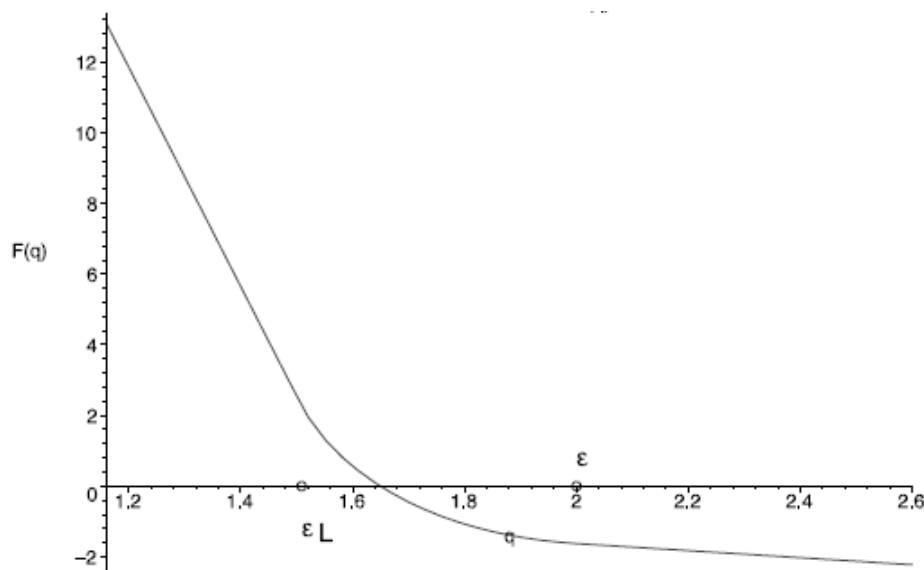
اگر $u(t) = \circ$ تا τ و سپس $u(t) = \bar{u}$ ، داریم

$$x(t) = \begin{cases} x_{\circ}e^{at}, & t \in (\circ, \tau), \\ \left(x_{\circ} + \frac{b\bar{u}}{a}e^{-a\tau}\right)e^{at} - \frac{b\bar{u}}{a}, & t \in (\tau, T). \end{cases} \quad (۱۰.۱)$$

در نهایت اگر $u(t) = \bar{u}$ تا τ و سپس $u(t) = 0$ ، مسیرهای بهینه به دست می‌آید

$$x(t) = \begin{cases} (x_0 + \frac{b\bar{u}}{a})e^{at} - \frac{b\bar{u}}{a}, & t \in (0, \tau), \\ (x_0 + \frac{b\bar{u}}{a}(1 - e^{-a\tau}))e^{at}, & t \in (\tau, T). \end{cases} \quad (11.1)$$

با جایگزینی (۸.۱)–(۱۱.۱) در تابع هدف مساله (P_q) و با در نظر گرفتن گزاره ۱.۳.۱، به طور صریح تابع $F(q)$ به دست می‌آید. $\square$



شکل ۱.۱: تابع دینکل باخ $F(q)$

یادآوری می‌کنیم که توابع $F_1(q)$ و $F_3(q)$ خطی هستند. این ویژگی در الگوریتم پیشنهاد شده در زیر استفاده می‌شود. می‌توان ثابت کرد که اگر $b(k+a) \neq 0$ ، آنگاه تابع $F(q)$ در حالت کلی پیوسته نیست.

به عنوان مثال، فرض کنید $\bar{u} = 3$ ، $k = 3$ ، $c = 0.1$ ، $T = 1$ ، $a = -4$ ، $b = 2$ ، $x_0 = 0.1$ و $u_0 = 1$ باشد. از آنجا که $b(k+a) < 0$ ، لذا مورد (a) در گزاره ۱.۳.۱ و ۱.۴.۱ را داریم. تابع F به صورت زیر است:

$$F(q) = \begin{cases} -31q + 49.05677, & q \leq 1.50916, \\ -8.5q + 15.37546 + 1.875(4q - 6) \log(2q - 3), & 1.50916 < q < 2, \\ -q + 0.37546, & q \geq 2. \end{cases}$$

تابع $F(q)$ را در شکل ۱.۱ ترسیم کردیم. صفر منحصر به فرد تابع $F(q)$ در بازه $(1.50916, 2)$ قرار دارد. بنابراین می‌توان با حل معادله $F_3(q^*) = 0$ ، مقدار بهینه q^* را به دست آوریم. مقدار بهینه مساله (P) متناظر حل معادله

$$-8.5q^* + 15.37546 + 1.875(4q^* - 6) \log(2q^* - 3) = 0.$$

است.

محاسبات عددی ساده، ما را قادر می‌سازد تا $q^* = ۱.۶۴۹۶۰$ را از (۷.۱) پیدا کنیم. زمان سوئیچ بهینه $\tau^* \simeq ۰.۶۹۸۳۴$ می‌باشد.

۲.۴.۱ مقدار بهینه مساله (P)

توجه داشته باشید که گزاره ۱.۳.۱ به ما اجازه می‌دهد، به محض این که مقدار بهینه q^* را به دست آورده‌ایم، کنترل بهینه برای مساله (P) را تعیین کنیم. در این بخش، الگوریتمی برای یافتن q^* ارائه می‌شود.

در حالی که رهیافت دینکل باخ نیاز به حل معادله $F(q) = ۰$ دارد که در آن تابع F معمولاً فقط به طور ضمنی شناخته می‌شود، ساختار خاصی از مساله (P) اجازه می‌دهد تا امکان بیان صریح تابع F برای هر مقدار q را داشته باشیم (گزاره ۱.۴.۱ را ملاحظه کنید).

به عنوان یک نتیجه از گزاره ۱.۴.۱، با استفاده از خواص یکنوایی تابع دینکل باخ $F(q)$ ، می‌توان یک روش برای یافتن q^* و در نتیجه کنترل بهینه u^* ارائه داد.

گام اول شامل محاسبه مقدار $b(k+a)$ است که تابع تحلیلی $F(q)$ را مشخص می‌کند. هنگامی که F شناخته می‌شود، می‌توان بازه‌ای که صفر منحصر به فرد تابع $F(q)$ را شامل است، مشخص کرد. جزئیات حل مساله (P) در الگوریتم زیر بیان می‌شود: مقدار بهینه q^* و کنترل بهینه u^* از مساله (P) را می‌توان به صورت زیر مشخص کرد:

۱. فرض کنید $b(k+a) < ۰$ ، در این صورت اگر $F_1(bL) \leq ۰$ ، آنگاه $F_1(q^*) = ۰$ و برای هر $u^*(t) = u$ ، $t \in (۰, T)$

در غیر این صورت اگر $F_3(bL) \geq ۰$ ، آنگاه $F_3(q^*) = ۰$ و برای هر $u^*(t) = ۰$ ، $t \in (۰, T)$ در غیر این صورت $F_4(q^*) = ۰$ و

$$u^*(t) = \begin{cases} ۰, & t \in (۰, \tau^*), \\ \bar{u}, & t \in (\tau^*, T). \end{cases} \quad (۱۲.۱)$$

۲. فرض کنید $b(k+a) > ۰$ ، در این صورت اگر $F_1(bL) \leq ۰$ ، آنگاه $F_1(q^*) = ۰$ و برای هر $u^*(t) = \bar{u}$ ، $t \in (۰, T)$

در غیر این صورت اگر $F_3(b) \geq ۰$ ، آنگاه $F_3(q^*) = ۰$ و برای هر $u^*(t) = ۰$ ، $t \in (۰, T)$ در غیر این صورت $F_4(q^*) = ۰$ و

$$u^*(t) = \begin{cases} \bar{u}, & t \in (\tau^*, T), \\ ۰, & t \in (۰, \tau^*). \end{cases} \quad (۱۳.۱)$$

۳. فرض کنید $b(k+a) = ۰$ ، در این صورت اگر $F_1(b) = F_3(b) = ۰$ ، آنگاه $q^* = b$ و هر کنترل شدنی، یک کنترل بهینه است.

در غیراین صورت $F_1(b) \leq 0$ ، آنگاه $F_1(q^*) = 0$ و برای هر $t \in (0, T)$ $u^*(t) = \bar{u}$.
در غیراین صورت $F_2(q^*) = 0$ و برای هر $t \in (0, T)$ $u^*(t) = 0$.

با اشاره به روش مشخص شده در الگوریتم معادلات $F_1(q^*) = 0$ و $F_2(q^*) = 0$ برحسب q^* خطی است؛ در حالی که برای حل $F_2(q^*) = 0$ و $F_4(q^*) = 0$ ممکن است برخی از تکنیک‌های حل عددی مانند روش شبه نیوتن مورد نیاز باشد. در واقع توابع F_2 و F_4 هر دو نزولی، محدب و از هر مرتبه‌ای مشتق‌پذیر به ترتیب در فواصل (bL, b) و (b, bL) هستند. اکنون مثال بخش قبل را در نظر بگیرید. با استفاده از الگوریتم مقدار بهینه q^* را می‌توان از حل معادله $F_2(q) = 0$ با توجه به شکل (۱.۱) به‌دست آورد.

۵.۱ مساله بیشینه کردن کارایی تبلیغات

در این بخش، مساله بیشینه سازی کارایی تبلیغات یک شرکت را در طی دوره فروش $[0, T]$ و به عنوان یک مساله کنترل کسری بیان می‌کنیم و از نتایج به دست آمده در بخش‌های قبلی برای یافتن سیاست‌های تبلیغاتی بهینه استفاده می‌کنیم.

مساله تعیین خط مشی تبلیغات بهینه تا حد زیادی در ادبیات بازاریابی با استفاده از مدل‌های کنترل بهینه دینامیکی مورد بررسی قرار گرفته است. مدل‌های مختلف تبلیغات عمدتاً در دینامیک با یکدیگر تمایز دارند که تبلیغات را به فروش و اهداف دنبال شده توسط شرکت متصل می‌کند [۳۸، ۱۸].

معمولاً در مدل‌های شناخته شده، تبلیغات به عنوان سرمایه‌گذاری در نظر گرفته می‌شود که یک سهام تبلیغاتی را ایجاد می‌کند و دارای اثرات بلندمدت روی تقاضای مشتریان است ([۳۲] را ملاحظه کنید). اما برخلاف سایر مدل‌های تبلیغاتی، ما بر مفهوم کارایی فنی شرکت متمرکز هستیم که به عنوان نسبت بین خروجی تولید شده توسط شرکت و ورودی مورد استفاده در فرایند تولید تعریف می‌شود (یک نوع نسبت بهره‌وری).

فرض کنید سهام تبلیغاتی در زمان t را با $A(t)$ و نرخ فروش در زمان t را با $S(t)$ نمایش دهیم. خروجی‌های مرتبط از سرمایه‌گذاری تبلیغات را سهام نهایی تبلیغات $A(T)$ و کل فروش در طول دوره فروش در نظر می‌گیریم. ورودی‌ها فعالیت شرکت، هزینه کل تبلیغات و برخی از هزینه‌های ثابت در نظر گرفته می‌شود. نرخ هزینه تبلیغات را در زمان t با تابع $a(t)$ نشان می‌دهیم. بازدهی تبلیغات را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$E = \frac{\alpha A(T) + (1 - \alpha) \int_0^T S(t) dt}{C_0 + \int_0^T a(t) dt},$$

به طوری که $\alpha \in (0, 1)$ نشان دهنده وزن اختصاص یافته به سهام نهایی تبلیغات و C_0 نشان دهنده هزینه‌های ثابت است.

با فرض $k = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$ ، می‌توانیم بازدهی تبلیغات را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$E = \alpha \frac{A(T) + k \int_0^T S(t) dt}{C_0 + \int_0^T a(t) dt},$$

که در آن پارامتر $k > 0$ وزن مربوط به کل فروش است. در اینجا دینامیک سهام تبلیغات را به صورت

$$\dot{A}(t) = -\delta A(t) + \epsilon a(t),$$

تعریف می‌کنیم. که مشابه مدل نرلو-آرو [۳۲] می‌باشد و پارامتر $\epsilon > 0$ نشان دهنده بهره‌وری تبلیغاتی از لحاظ سهام تبلیغات است. نرخ فروش $S(t)$ به صورت یک تبدیل آفین از سهام تبلیغاتی در زمان t به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(t) = A(t) + b, \quad b \geq 0.$$

بنابراین مساله بیشینه سازی بازدهی تبلیغات می‌تواند به صورت زیر بیان شود:

$$(EP) \quad \max \quad \frac{A(T) + k \int_0^T (A(t) + b) dt}{C_0 + \int_0^T a(t) dt},$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{A}(t) = -\delta A(t) + \epsilon a(t), \\ A(0) = A_0, \quad a \in [0, \bar{a}], \end{cases}$$

به طوری که $\bar{a} > 0$ حداکثر میزان هزینه تبلیغات و A_0 سهام اولیه تبلیغات است. ما می‌توانیم گزاره ۱.۳.۱ را به منظور دستیابی به سیاست‌های تبلیغاتی مطلوب در نظر بگیریم. در مساله (EP) علامت پارامترها به صورت $k > 0, \epsilon > 0, \delta > 0, b \geq 0$ و $\bar{a} > 0$ است. بنابراین از گزاره ۱.۳.۱ می‌توان دو حالت اصلی زیر را مشخص کرد. حالت اول: اگر $\delta > k$ ، آنگاه سیاست تبلیغات مطلوب $a(t)$ دارای ساختار زیر است:

$$a(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, \tau), \\ \bar{a}, & t \in (\tau, T). \end{cases}$$

یعنی در ابتدا تبلیغاتی نباشد اما در انتهای دوره بیشترین تبلیغات صورت گیرد.

حالت دوم: اگر $\delta < k$ ، یعنی نرخ از بین رفتن سهام تبلیغات کم است، آنگاه سیاست تبلیغات مطلوب $a(t)$ به شکل زیر خواهد بود

$$a(t) = \begin{cases} \bar{a}, & t \in (0, \tau), \\ 0, & t \in (\tau, T). \end{cases}$$

ساختار خاص مساله (EP) این امکان را می دهد تا برخی از ویژگی های تابع مقدار بهینه $F(q)$ متناظرش را مشخص کرد. در حقیقت مقدار بهینه q^* از (EP) به طور ضمنی توسط معادله زیر تعریف می شود

$$F(q^*) = 0.$$

با توجه به بخش قبل، حل مساله EP آسان است. علاوه براین، اگر $k \neq \delta$ ، آنگاه تابع F مشتق پذیر و و نزولی است. لذا $\frac{\partial F}{\partial q} < 0$ و می توان از قضیه تابع ضمنی برای به دست آوردن علامت مشتق q^* نسبت به پارامترها استفاده کرد و نشان داد که

$$\frac{\partial q^*}{\partial b} > 0, \frac{\partial q^*}{\partial \delta} < 0, \frac{\partial q^*}{\partial A_0} > 0, \frac{\partial q^*}{\partial C_0} < 0, \frac{\partial q^*}{\partial a} \geq 0, \frac{\partial q^*}{\partial k} > 0, \frac{\partial q^*}{\partial \epsilon} \geq 0.$$

فصل ۲

یک روش تکراری برای یک رده از مسائل برنامه‌ریزی کسری

۱.۲ مقدمه

در میان روش‌های عددی مستقیم و غیر مستقیم حل مسائل کنترل بهینه، استفاده از روش‌های جابجایی موجک برای رسیدن به جواب‌های تقریبی بسیار برجسته است. به این دلیل که بر خلاف سایر روش‌های عددی، این روش می‌تواند جواب‌های تقریبی خوبی برای یک رده گسترده از مسائل کنترل بهینه به عنوان مسائل زمان‌بندی، مسائل با شرط اولیه و نهایی ناشناخته ارائه دهد. این رهیافت از پیشنهاد تئوری و خواص موج‌های حار از جمله موجک حار و ماتریس عملیاتی آن استفاده می‌کند. در این جا روش ترکیبی موجک و رهیافت دینکل باخ را برای ایجاد یک طرح تکراری برای حل یک رده از مسائل برنامه‌ریزی کسری به صورت زیر ارائه می‌کنیم

$$(FP) \quad \max \quad \frac{\int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt}{\int_0^T g(t, x(t), u(t)) dt}, \quad (1.2)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{x} = h(t, x(t), u(t)), \\ x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T, \end{cases} \quad (2.2)$$

که در آن $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ و $t \in [0, T]$ فرض می‌شود که مخرج کسر کاملاً مثبت است؛ به این معنی که

$$\int_0^T g(t, x(t), u(t)) dt > 0,$$

برای هر $u(t) \in U$.

۲.۲ یک طرح تکراری براساس روش هم‌محلی موجک

۱.۲.۲ خانواده هار

در تجزیه معین $J \in \mathbb{N}$; 2^{J+1} موجک هار در بازه $[0, 1)$ داریم. در میان این موجک‌ها دو موجک به نام موجک‌های پدر و مادر مهم هستند. $2^{J+1} - 2$ موجک باقی مانده، موجک دختر نامیده می‌شوند که این‌ها را می‌توان از طریق اتساع و انتقال (تبدیل) موجک مادر به دست آورد. این خانواده یک زیر مجموعه متعامد از فضای هیلبرت $L_2[0, 1)$ با ضرب داخلی

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \overline{g(t)} dt$$

است. برای تکمیل، خانواده هار و خصوصیات آن را که در بازه پیوسته $[0, 1)$ تعریف می‌شوند، یادآوری می‌کنیم
موجک پدر:

$$h_1(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1) \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$h_2(x) = \begin{cases} 1 & x \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1 & x \in [\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

موجک‌های دختر: برای $m = 2^\ell$, $\ell = \{0, 1, 2, \dots, J\}$ که به وسیله فرمول زیر به دست می‌آیند:

$$h_i(x) = h_2(mx - k) = \begin{cases} 1 & x \in [\frac{k}{m}, \frac{k + 0.5}{m}) \\ -1 & x \in [\frac{k + 0.5}{m}, \frac{k + 1}{m}) \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

در این‌جا، $i = m + k + 1$ و $k = 0, 1, \dots, m-1$ که m و k پارامترهای اتساع و انتقال نامیده می‌شوند. کمترین مقدار i برابر ۲ ($m = 1, k = 0$) و بیشترین مقدار i برابر 2^{J+1} ($m = 2^J, k = 2^J - 1$) است.

۲.۲.۲ ماتریس موجک‌های هار

برای یک $K = J + 1$ ($J \in \mathbb{N}$) معین، بازه $[0, 1)$ را به 2^K بازه فرعی تقسیم کنید و بازه فرعی j -ام را با $I_j = [\frac{j-1}{2^K}, \frac{j}{2^K}]$ برای $j = 1, 2, \dots, 2^K$ نشان دهید. نقطه میانی هر بازه فرعی را نقطه هم‌مکانی j -ام می‌نامیم و با $\frac{2j-1}{2^{K+1}}$ تعریف می‌شود. ما مجموعه تمام نقاط هم‌مکان را با C نمایش می‌دهیم. پس

$$C = \{x_j = \frac{2j-1}{2^{K+1}}, j = 1, 2, \dots, 2^K\} = \{x_j = \frac{j-0.5}{2^K}, j = 1, 2, \dots, 2^K\}.$$

ماتریس موجک‌های هار H را با اندازه $2^K = N = 2^{J+1}$ با ارزیابی 2^K موجک‌های هار که در بازه $[0, 1)$ در نقاط C تعریف می‌شوند، می‌توان به دست آورد و آن‌ها را در سطرهای H قرار داد. به عبارت دیگر ورودی $(i, j)^{th}$ ماتریس H به صورت زیر فرمول‌دهی می‌شود.

برای $H(i, j) = h_i(x_j)$ برای هر $i, j \in \{1, 2, \dots, 2^K\}$ رفتار هر موجک h_i برای $i = 1, 2, \dots, 2^K$ به صورت زیر است:

$$h_1(x_j) = \begin{cases} 1 & x_j \in [0, 1) \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

$$h_i(x_j) = \begin{cases} 1 & x_j \in [\frac{k}{m}, \frac{k+0.5}{m}) \\ -1 & x_j \in [\frac{k+0.5}{m}, \frac{k+1}{m}) \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases} \quad (3.2)$$

قرار دهید

$$C_i = \{x_j \in C, h_i(x_j) = \pm 1\}.$$

عناصر C_i را به ترتیب صعودی مرتب کنید و C_i را به دو زیر مجموعه C_i^+ و C_i^- تقسیم کنید.

$$h_i(x_j) = +1 \iff x_j \in C_i^+,$$

$$h_i(x_j) = -1 \iff x_j \in C_i^-.$$

در این جا $\ell \in \{0, 1, \dots, J\}$ ، $k = 0, 1, \dots, m-1$ و $m = 2^\ell$ و $i = m + k + 1$ است. بنابراین معادلات بالا را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$H(1, j) = 1, \quad j = 1, 2, \dots, 2^K,$$

$$H(i, j) = \begin{cases} 1 & x_j \in C_i^+ \\ -1 & x_j \in C_i^- \\ 0 & x_j \in C - C_i \end{cases}$$

ماتریس عملیاتی انتگرال با استفاده از انتگرال گیری از (۳.۲) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Ph_i(x) = \int_0^x h_i(x) dx,$$

$$Qh_i(x) = \int_0^x Ph_i(x) dx,$$

$$Ch_i(x) = \int_0^1 Ph_i(x) dx.$$

همان طور که در فصل قبل اشاره شد، رویکرد دینکل باخ شامل تبدیل مسئله کسری اصلی به یک خانواده معادل از مسائل کنترل بهینه پارامتریک است. تابع کمکی F را تعریف می‌کنیم به طوری که برای هر $q \in \mathbb{R}$ ، $F(q)$ حداکثر مقدار مساله کنترل بهینه (غیر کسری) زیر باشد:

$$(P_q) \quad \max_{(x,u) \in \mathcal{P}} \left\{ \int_0^T \zeta_q(t, x(t), u(t)) dt \right\}, \quad (4.2)$$

که در آن

$$\zeta_q(t, x(t), u(t)) = f(t, x(t), u(t)) - qg(t, x(t), u(t)).$$

خصوصیات جالب تابع F یک انگیزه شدید برای ایجاد طرح تکراری عددی برای به دست آوردن تقریبی برای جواب بهینه مساله FP است. برای این منظور فقط باید دو پارامتر مختلف q_l و q_u را در نظر گرفت که حاصل ضرب $F(q_l)$ و $F(q_u)$ منفی است، تا بتوان یک بازه برای تولید یک دنباله $\{q_v\}$ به دست آورد که به ریشه معادله $F(q) = 0$ همگرا است. برای به دست آوردن مقدار تابع F برای هر $q \in \mathbb{R}$ باید از مساله کنترل بهینه (۴.۲) استفاده کنیم. برای این منظور سعی شده است که از روش هم‌محلی مویک به عنوان یک طرح عددی برای تعیین جواب تقریبی بهینه (۴.۲) برای هر q استفاده شود.

با یک تبدیل خطی ساده، فاصله $[0, T)$ را می‌توان به فاصله $[0, 1)$ تبدیل کرد. بازه استاندارد در این جا به صورت $[0, 1)$ با نقاط هم‌محلی τ_k به صورت

$$\tau_k = (k - 0.5)/M, \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

می‌باشد که در آن M تعداد گره‌های استفاده شده می‌باشد و همچنین شماره اندیس بیشترین موجک است. توجه داشته باشید که مقدار M در توان ۲ است به طوری که تعداد نقاط هم‌محلی نیز در آن توان افزایش می‌یابد. تمام نقاط هم‌محلی به تمام فاصله زمانی $[0, 1)$ با $\frac{1}{M}$ از یکدیگر قرار دارند. فرض می‌کنیم که مشتق متغیر حالت $\dot{x}(\tau)$ و متغیرهای کنترل $u(\tau)$ را می‌توان با موجک‌های هار در نقاط هم‌محلی تقریب زد؛ یعنی

$$\dot{x}(\tau) \approx C_x^T \Psi_M(\tau), \quad u(\tau) \approx C_u^T \Psi_M(\tau),$$

که در آن Ψ_M بردار موجک هار [۱۰] متعامد است که در اینجا

$$C_x^T = [C_{x1}, C_{x2}, \dots, C_{xM}], \quad C_u^T = [C_{u1}, C_{u2}, \dots, C_{uM}].$$

با استفاده از ماتریس انتگرال عملیاتی هار که آن را توسط P مشخص می‌کنیم، متغیرهای حالت $x(\tau)$ را می‌توان به صورت زیر بیان کنیم [۲۴]:

$$x(\tau) = \int_0^\tau \dot{x}(\tau') d\tau' + x_0 = \int_0^\tau C_x^T \Psi_M(\tau') d\tau' + x_0 = C_x^T P \Psi_M(\tau) + x_0.$$

گسترش ماتریس $\Psi_M(\tau)$ در M نقطه هم‌محلی ماتریس هار H با بعد $M \times M$ را به صورت زیر نتیجه می‌دهد

$$H = [\Psi_M(\tau_1), \Psi_M(\tau_2), \dots, \Psi_M(\tau_M)].$$

در نتیجه

(۵.۲)

$$\dot{x}(\tau_k) = C_x^T \Psi_M(\tau_k), u(\tau_k) = C_u^T \Psi_M(\tau_k), x(\tau_k) = C_x^T P \Psi_M(\tau_k) + x_0, \quad k = 1, \dots, M.$$

لذا می‌توانیم متغیرها را در هر نقطه هم‌محلی با استفاده از حاصلضرب بردار ضرایب آن‌ها در بردار ستون مربوطه در ماتریس هار مقداردهی کنیم.

هنگامی که روش هم‌محلی هار در مسائل کنترل بهینه اعمال می‌شود، متغیرهای برنامه‌ریزی غیر خطی می‌تواند به صورت بردار ضرایب مجهول مشتق متغیرهای حالت و متغیرهای کنترل همراه با زمان نهایی تعیین شوند؛ یعنی

$$\mathcal{X} = [C_{x1}, C_{x2}, \dots, C_{xM}, C_{u1}, C_{u2}, \dots, C_{uM}, T].$$

تابع هدف مساله P_q را دوباره به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$T \int_0^1 \zeta_q(\tau, (C_x^T P \Psi_M(\tau) + x_0), C_u^T \Psi_M(\tau)) d\tau.$$

از آنجایی که موجک‌های هار در هر بازه زمانی ثابت هستند، تابع هدف فوق می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود

$$J_q^* = J_q(\mathcal{X}) = \frac{T}{M} \sum_{k=1}^M \zeta_q(\tau_k, (C_x^T P \Psi_M(\tau_k) + x_0), C_u^T \Psi_M(\tau_k)). \quad (6.2)$$

۲۰ یک روش تکراری برای یک رده از مسائل برنامه‌ریزی کسری

با جایگذاری $\dot{x}$ و u و x در (۱.۲) و (۲.۲) و با توجه به بسط موجک هار (۵.۲) نتیجه می‌گیریم

$$C_x^T \Psi_M(\tau_k) = Th(\tau_k, (C_x^T P \Psi_M(\tau_k) + x_\circ), C_u^T \Psi_M(\tau_k)). \quad (7.2)$$

از آن‌جا که اولین و آخرین نقاط هم‌محلی به عنوان زمان اولیه و نهایی تنظیم نمی‌شود، متغیر وضعیت در ابتدا و انتهای بازه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{cases} x_\circ &= x(1) - \dot{x}(1)/2M, \\ x_T &= x(M) + \dot{x}(M)/2M. \end{cases} \quad (8.2)$$

به این ترتیب، مساله به یک مساله برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود.

۳.۲ الگوریتم

لازم به ذکر است که باید ریشه معادله $F(q) = 0$ را به دست آوریم. در نتیجه مقدار J_q^* تعریف شده با (۶.۲) به عنوان تقریبی برای $F(q)$ می‌باشد. بر اساس مباحث فوق، الگوریتم را در دو مرحله، گام ابتدایی و گام اصلی ارائه به صورت زیر خلاصه می‌کنیم.

گام ابتدایی:

یک $\varepsilon > 0$ و یک فاصله اولیه $[q_l, q_u]$ به طوری که $J_{q_l} \times J_{q_u} < 0$ در نظر بگیرید و قرار دهید $K = 1$

گام‌های اصلی:

$$(1) \text{ تعریف کنید } q_m = \frac{q_l + q_u}{2},$$

(۲) $J_{q_m}^*$ را محاسبه کنید. اگر $|J_{q_m}^*| < \varepsilon$ یا $K > \log_2 \frac{q_u - q_l}{\varepsilon}$ متوقف شوید. در غیر این صورت به مرحله ۳ بروید.

(۳) اگر $J_{q_m}^* \times J_{q_u}^* < 0$ در این صورت قرار دهید $q_l = q_m$ و در غیر این صورت قرار دهید $q_u = q_m$. حال قرار دهید $K = K + 1$ و به مرحله (۱) بروید.

۴.۲ مثال‌های عددی

مثال ۱.۴.۲. مساله زیر را در نظر بگیرید [۵]

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{x(1) + 3 \int_0^1 (x(t) + 0.1) dt}{1 + \int_0^1 u(t) dt}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \dot{x} = -4x(t) + 2u(t), \\ x(0) = 0.1, \\ u \in [0, 3]. \end{cases} \end{aligned}$$

به طور معادل سعی می‌کنیم جواب معادله زیر را بیابیم

$$F(q) = x(1) + 3 \int_0^1 (x(t) + 0.1) dt - q(1 + \int_0^1 u(t) dt).$$

با انتخاب $M = 8$ و استفاده از روش تکراری الگوریتم داده شده نتایج یه دست آمده در جدول ۱.۲ آمده است. کنترل بهینه دقیق و تقریبی و وضعیت بهینه دقیق و تقریبی می‌تواند در شکل ۱.۲ و ۲.۲ دیده شود.

مثال ۲.۴.۲. $FOCP$ غیر خطی زیر را در نظر بگیرید.

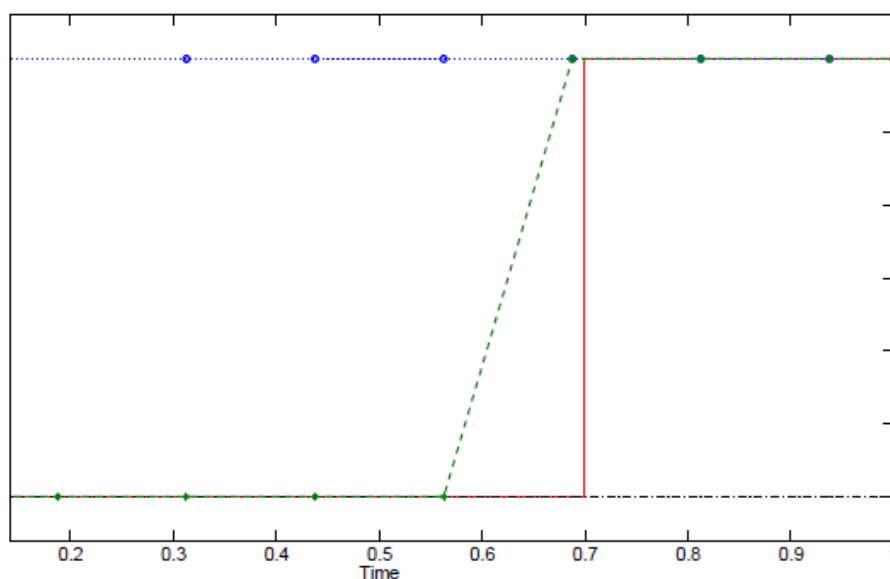
$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{\int_0^1 [1 - (x(t) - e^t)^2 - (u(t) - t)^2] dt}{\int_0^1 [(tx(t) - e^t)^2 + 1] dt}, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \dot{x} = x(t)[u(t)^2 e^t - t^2 x(t) + 1], \\ x(0) = 1, \\ u \in [0, 1]. \end{cases} \end{aligned}$$

به طوری که مسیر بهینه دقیق و توابع کنترل به ترتیب $x(t) = e^t$ و $u(t) = t$ هستند. به طور معادل سعی می‌کنیم جواب معادله $F(q) = 0$ را به دست آوریم.

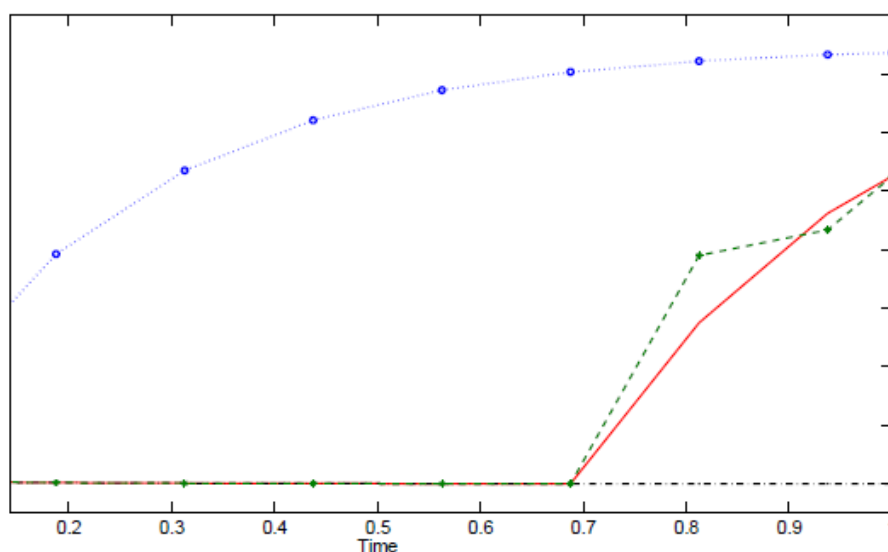
$$F(q) = \int_0^1 [(1 - (x(t) - e^t)^2 - (u(t) - t)^2] - q[(tx(t) - e^t)^2 + 1] dt.$$

تکرار	q_l	q_u	q_m	$J_{q_m}^*$
۱	-۵	۳	-۱	-۷۹/۹۷۹۰۱
۲	-۱	۳	۱	-۱۷/۹۷۹۰۱
۳	۱	۳	۲	۱/۳۹۹۰۲
۴	۱	۲	۱/۵	-۳/۹۷۹۰۱۳
۵	۱/۵	۲	۱/۷۵	-۰/۱۱۰۹۷۹۸
۶	۱/۷۵	۲	۱/۸۷۵۰	۰/۸۰۵۲۲۷۰۲
۷	۱/۷۵	۱/۸۷۵۰	۱/۸۱۲۵	۰/۴۲۰۲۷۰۲
۸	۱/۷۵	۱/۸۱۲۵	۱/۷۸۱۳	۰/۱۵۵۰۷۰۲
۹	۱/۷۵	۱/۷۸۱۳	۱/۷۶۵۶	۰/۰۲۱۶۲۰۲۲
۱۰	۱/۷۵	۱/۷۶۵۶	۱/۷۵۷۸	-۰/۰۴۴۶۷۹۷۷۸
۱۱	۱/۷۵۷۸	۱/۷۶۵۶	۱/۷۶۱۷	-۰/۰۱۱۵۲۹۷۸
۱۲	۱/۷۶۱۷	۱/۷۶۵۶	۱/۷۶۳۷	۰/۰۰۵۴۷۰۲۲۴
۱۳	۱/۷۶۱۷	۱/۷۶۳۷	۱/۷۶۲۷	-۰/۰۰۳۰۲۹۷۷۶
۱۴	۱/۷۶۲۷	۱/۷۶۳۷	۱/۷۶۳۲	۰/۰۰۱۲۲۰۲۲۴
۱۵	۱/۷۶۲۷	۱/۷۶۳۲	۱/۷۶۳۰	-۰/۰۰۰۰۴۷۹۸۷۷۶۰

جدول ۱.۲: نتایج استفاده از روش پیشنهادی برای مثال ۱.۴.۲



شکل ۱.۲: کنترل بهینه دقیق و تقریبی برای مثال ۱.۴.۲

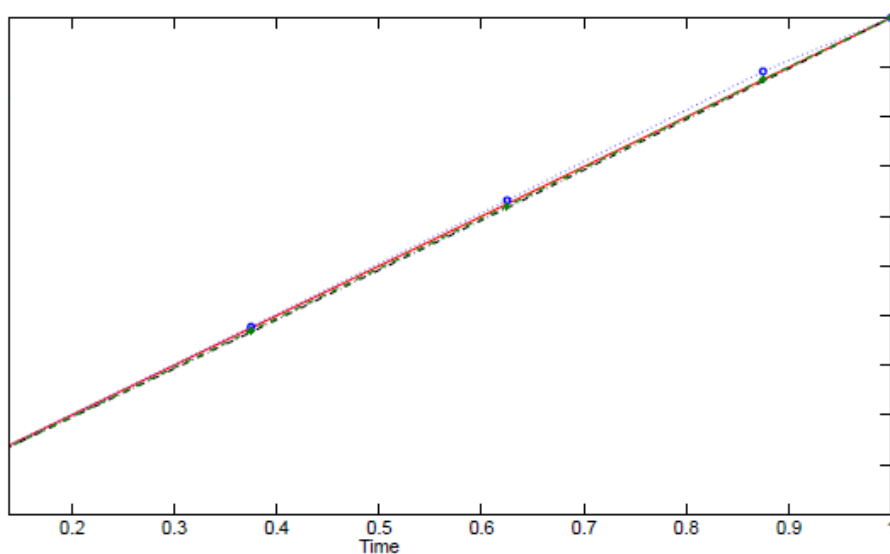


شکل ۲.۲: وضعیت بهینه دقیق و تقریبی برای مثال ۱.۴.۲

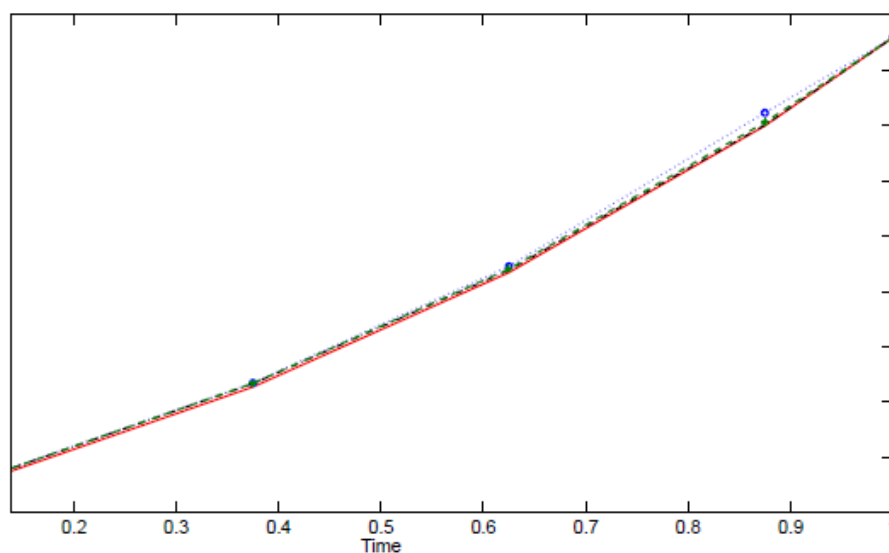
در جدول ۲.۲، نتایج استفاده از رهیافت تکراری برای این مساله نشان داده شده است که در آن تعداد نقطه هم‌محلی به صورت $M = 4$ در نظر گرفته شده است. کنترل بهینه دقیق و تقریبی و متغیر وضعیت دقیق و تقریبی را می‌توان در شکل ۳.۲ و شکل ۴.۲ ملاحظه کرد.

تکرار	q_1	q_u	q_m	$J_{q_m}^*$
۱	-۸۶	۱۷۰	۴۲	-۴۱/۰۰۰۹۳
۲	-۸۶	۴۲	-۲۲	۴۱/۵۱۳۵۰
۳	-۲۲	۴۲	۱۰	-۹/۰۰۰۷۴۰
۴	-۲۲	۱۰	-۶	۱۱/۷۰۰۴۱
۵	-۶	۱۰	۲	-۱/۰۰۰۴۰۶
۶	-۶	۲	-۲	۴/۲۴۷۱۳۵
۷	-۲	۲	۰	۰/۹۹۹۸۷۸۸
۸	۰	۲	۱	-۰/۰۰۰۲۹۲۵۰۳۴

جدول ۲.۲: نتایج استفاده از روش تکراری پیشنهادی برای مثال ۲.۴.۲



شکل ۳.۲: کنترل بهینه دقیق و تقریبی برای مثال ۲.۴.۲



شکل ۴.۲: وضعیت دقیق و تقریبی بهینه برای مثال ۲.۴.۲

فصل ۳

یک رهیافت بهینه‌سازی سراسری برای رده‌ای از مسائل برنامه‌ریزی کسری

۱.۳ مقدمه

مساله برنامه‌ریزی کسری را در نظر بگیرید:

$$\max_{x \in D} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad (1.3)$$

که در آن $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ یک زیر مجموعه محدب از $\mathbb{R}^n$ است، $f(x)$ روی D محدب و $g(x)$ روی D مقعر است. مساله فوق که با $(P1)$ نشان داده می‌شود، کاربردهای زیادی در مهندسی و اقتصاد دارد. روش‌های فراوانی در زمینه حل مساله $(P1)$ وجود دارد. برخی از آن‌ها شامل تبدیل متغیر [۱۴]، روش برنامه‌ریزی غیرخطی [۲۷] و روش پارامتریک [۱۵] می‌باشند. مساله $(P1)$ در [۱، ۲، ۴، ۷، ۹، ۱۱، ۲۵، ۲۶، ۲۸، ۳۰، ۳۶، ۵۴] در نظر گرفته شده است که در آن $f(x)$ مقعر و $g(x)$ محدب است. مساله $(P1)$ می‌تواند با استفاده از الگوریتم دینکل باخ حل شود. اما در این روش، الگوریتم نیازمند حل مسائل برنامه‌ریزی در هر مرحله است که ممکن است سخت‌تر از حل مساله اصلی (۱.۳) باشد.

در اینجا یک مساله کنترل بهینه کسری شامل یک سیستم معادلات دیفرانسیل خطی در نظر می‌گیریم که در آن تابع هزینه آن به صورت نسبت تابع محدب به یک تابع مقعر نشان

داده می‌شود. مجموعه قابل دستیابی برای سیستم خطی را معرفی می‌کنیم. در این روش، مساله به یک مساله بهینه‌سازی شبه‌محدب در یک فضای با بعد متناهی تبدیل می‌شود. بر اساس یک شرط بهینگی سراسری، یک الگوریتم مؤثر برای حل این مساله کنترل بهینه کسری پیشنهاد می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این الگوریتم یک دنباله از کنترل بهینه‌های موضعی با کاهش مقادیر هزینه تولید می‌کند. الگوریتم پیشنهادی بر روی چندین مساله اعمال می‌شود که در آن مقدار هزینه بهینه سراسری برای هر مورد به دست می‌آید. ادامه این فصل به شرح زیر سازمان‌دهی شده است. در بخش ۲.۳ فرمول‌بندی مساله کنترل بهینه کسری داده می‌شود. الگوریتم و نتایج عددی برای چندین مثال در بخش ۴.۳ ارائه شده است.

۲.۳ مساله کنترل بهینه کسری

سیستم زیر از معادلات دیفرانسیل خطی در بازه زمانی $[t_0, t_f]$ را در نظر بگیرید.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + C(t), \quad (۲.۳)$$

$$x(t_0) = x^0, \quad (۳.۳)$$

که در آن t_0 و t_f متناهی هستند،

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)]^T \in \mathbb{R}^r.$$

به ترتیب متغیرهای وضعیت و کنترل هستند و عناصر ماتریس‌های $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ و $C(t) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ توابعی قطعه‌ای پیوسته روی $[t_0, t_f]$ هستند. فرض کنید $U \subset \mathbb{R}^r$ یک زیر مجموعه فشرده و محدب باشد. مجموعه کنترل‌های قابل قبول به صورت زیر تعریف می‌شود

$$u \in V = \{u \in L_2([t_0, t_f]) \mid u(t) \in U, t \in [t_0, t_f]\}. \quad (۴.۳)$$

مساله کنترل بهینه کسری که با مساله $(P2)$ نشان داده می‌شود را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

مساله $(P2)$: سیستم دینامیکی (۲.۳) را در نظر بگیرید کنترل قابل قبول $u \in V$ را طوری بیابید که تابع هزینه

$$\varphi(x(t_f)) = \frac{\langle D_1 x(t_f), x(t_f) \rangle}{\langle D_2 x(t_f), x(t_f) \rangle + d}, \quad (۵.۳)$$

روی V مینیمم شود که در آن $\langle \cdot, \cdot \rangle$ بیانگر ضرب داخلی، D_1 یک ماتریس معین مثبت متقارن، D_2 یک ماتریس معین منفی متقارن و d یک ثابت مثبت است طوری که

$$g_2(x(t_f)) = \langle D_2 x(t_f), x(t_f) \rangle + d > 0, \quad \forall u \in V,$$

$$g_1(x(t_f)) = \langle D_1 x(t_f), x(t_f) \rangle > 0, \quad \forall u \in V.$$

جواب سیستم (۲.۳) می تواند به صورت زیر به دست آورده شود

$$x(t|u) = F(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t F(t, \tau)[B(\tau)u(\tau) + C(\tau)]d\tau, \quad (6.3)$$

که در آن $F(t, \tau) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ جواب معادله ماتریسی زیر است

$$\frac{\partial F(t, \tau)}{\partial t} = A(t)F(t, \tau), \quad t \geq \tau \in [t_0, t_f], \quad (7.3)$$

$$F(\tau, \tau) = I, \quad (8.3)$$

که I ماتریس همانی را نشان می دهد. توجه داشته باشید که $x(t|u)$ یک تابع برداری مطلقاً پیوسته است. $x(t|u)$ تقریباً همه جا روی $[t_0, t_f]$ در (۲.۳) و (۳.۳) صدق می کند. برای ادامه، تعریف می کنیم

$$D = D(t_f) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y = x(t_f|u), u \in V\}. \quad (9.3)$$

D مجموعه قابل دسترسی از سیستم (۲.۳) نسبت به $u \in V$ نامیده می شود. واضح است که $D \subset \mathbb{R}^n$ مجموعه محدب و فشرده است. مساله (P۲) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$\max_{x \in D} \varphi(x) \quad (10.3)$$

که از آن به عنوان مساله (P۳) یاد می کنیم. تعریف کنید

$$L(\varphi, c) = \{y \in D, \mid \varphi(y) \leq c\}. \quad (11.3)$$

واضح است که $L(\varphi, c)$ برای هر $c > 0$ یک مجموعه محدب است.

تعریف ۱.۲.۳. [۱۴] تابع $h: D \rightarrow \mathbb{R}$ ، شبه محدب نامیده می شود، اگر نامعادله زیر برای هر $x, y \in D$ و $\alpha \in [0, 1]$ برقرار باشد:

$$h(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{h(x), h(y)\}.$$

لم ۱.۲.۳. [۱۴] تابع $h(x)$ روی D ، شبه محدب است، اگر و فقط اگر مجموعه $L(h, c)$ برای هر $c > 0$ محدب باشد.

با استفاده از لم ۱.۲.۳، واضح است که تابع φ روی D ، شبه محدب است. بنابراین مساله (P۳) یک مساله ماکزیم سازی شبه محدب است. حال شرایط بهینگی سراسری را به مساله (P۳) اعمال خواهیم کرد.

قضیه ۱.۲.۳. [۱۵] فرض کنید

$$E_c(\varphi) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(y) = c\}. \quad (۱۲.۳)$$

در این صورت رابطه

$$\langle \varphi'(y), x - y \rangle \leq 0, \quad (۱۳.۳)$$

برای هر $y \in E_{\varphi(z)}(\varphi)$ و $x \in D$ برقرار است که φ' بیانگر گرادیان φ می‌باشد. به علاوه، فرض کنید که $\varphi'(y) \neq 0$ برای هر $y \in E_{\varphi(z)}(\varphi)$ برقرار باشد. در این صورت شرط (۱۳.۳) یک شرط کافی برای $z \in D$ است تا یک جواب سراسری برای مساله (P۳) باشد.

واضح است که شرط (۱۳.۳) را می‌توان به صورت معادل زیر نوشت:

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \frac{\partial g_1(y)}{\partial x_i} g_2(y) - \frac{\partial g_2(y)}{\partial x_i} g_1(y) \right\} \left(\frac{x_i - y_i}{g_2(y)} \right) \leq 0, \quad (۱۴.۳)$$

برای هر $y \in E_{\varphi(z)}(\varphi)$ و $x \in D$.

لم ۲.۲.۳. فرض کنید برای هر نقطه شدنی $x, y \in D$ ، نامعادله

$$\langle \varphi'(y), x - y \rangle > 0,$$

برقرار باشد. در این صورت $\varphi(x) \geq \varphi(y)$.

اثبات. به برهان خلف، فرض کنید $\varphi(x) < \varphi(y)$. از آن جا که φ شبه‌محدب است داریم

$$\varphi(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \max\{\varphi(x), \varphi(y)\} = \varphi(y).$$

با استفاده از فرمول تیلور، یک همسایگی از نقطه y وجود دارد که در آن

$$\varphi(y + \alpha(x - y)) - \varphi(y) = \alpha \left(\langle \varphi'(y), x - y \rangle + \frac{o(\alpha \|x - y\|)}{\alpha} \right) \leq 0,$$

برای $\alpha > 0$ به اندازه کافی کوچک که

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{o(\alpha \|x - y\|)}{\alpha} = 0.$$

بنابراین $\langle \varphi'(y), x - y \rangle \leq 0$ که با $\langle \varphi'(y), x - y \rangle > 0$ در تناقض است. $\square$

لم ۳.۲.۳. فرض کنید $\varphi(x)$ تابع تعریف شده توسط (۵.۳) باشد. در این صورت داریم

$$\varphi'(x) = \frac{\nabla(D_1 - D_2 \varphi(x))x}{\langle D_2 x, x \rangle + d}. \quad (۱۵.۳)$$

اثبات. اثبات از تعریف تابع $\varphi(x)$ به دست می‌آید. $\square$

در محاسبات عددی باید یک نقطه $y \in E_{\varphi(z)}(\varphi)$ برای چک کردن اعتبار شرایط بهینگی (۱۳.۳) پیدا کنیم. برای انجام این کار، لم زیر را نیاز داریم.

لم ۴.۲.۳. فرض کنید $z \in D$ و $h \in \mathbb{R}^n$ طوری باشد که $\langle \varphi'(z), h \rangle < 0$. در این صورت عدد مثبت $\alpha > 0$ وجود دارد به طوری که

$$y = z + \alpha h \in E_{\varphi(z)}(\varphi).$$

اثبات. باتعریف $\varphi(x)$ داریم $\varphi(x) > 0$ برای هر $x \in D$. با توجه به لم ۳.۲.۳، شرط $\langle \varphi'(z), h \rangle < 0$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\langle (D_1 - D_2 \varphi(z))z, h \rangle < 0. \quad (16.3)$$

برای پیدا کردن یک α که در رابطه $y \in E_{\varphi(z)}(\varphi)$ صدق کند، نیاز به حل معادله زیر داریم

$$\varphi(z + \alpha h) = \varphi(z), \quad (17.3)$$

که در آن $h \in \mathbb{R}^n$ ، $z \in D$ و

$$\varphi(z) = \frac{\langle D_1 z, z \rangle}{\langle D_2 z, z \rangle + d}, \quad (18.3)$$

یا به طور معادل

$$\varphi(z) \langle D_2 z, z \rangle + \varphi(z)d = \langle D_1 z, z \rangle. \quad (19.3)$$

از آن جا که $D_1^T = D_2$ و $D_1^T = D_1$ به دست می‌آوریم

$$\frac{\langle D_1(z + \alpha h), z + \alpha h \rangle}{\langle D_2(z + \alpha h), (z + \alpha h) \rangle + d} = \varphi(z). \quad (20.3)$$

لذا

$$\begin{aligned} \langle D_1 z, z \rangle + 2\alpha \langle D_1 z, h \rangle + \alpha^2 \langle D_1 h, h \rangle &= \varphi(z) \langle D_2 z, z \rangle + 2\alpha \varphi(z) \langle D_2 z, h \rangle \\ &+ \alpha^2 \varphi(z) \langle D_2 h, h \rangle + \varphi(z)d. \end{aligned} \quad (21.3)$$

با جایگزین کردن (۱۹.۳) در (۲۱.۳)، به دست می‌آوریم:

$$2\alpha \langle D_1 z, h \rangle + \alpha^2 \langle D_1 h, h \rangle = 2\alpha \varphi(z) \langle D_2 z, h \rangle + \alpha^2 \varphi(z) \langle D_2 h, h \rangle.$$

چون $\alpha \neq 0$ داریم

$$\alpha = \frac{2[(\varphi(z)D_2 - D_1)z, h]}{\langle D_1 h, h \rangle - \varphi(z) \langle D_2 h, h \rangle} = -\frac{2\langle (D_1 - \varphi(z)D_2)z, h \rangle}{\langle D_1 h, h \rangle - \varphi(z) \langle D_2 h, h \rangle}. \quad (22.3)$$

علاوه بر این، از آن جا که $\varphi(z) > 0$ و $D_2 < 0$ ، واضح است که

$$\langle D_1 h, h \rangle - \varphi(z) \langle D_2 h, h \rangle > 0. \quad (23.3)$$

□

این نشان می‌دهد که $\alpha > 0$ و در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

ملاحظه ۱.۲.۳. توجه داشته باشید که شرط فرض شده در لم ۴.۲.۳ (یعنی $\langle \varphi'(z), h \rangle < 0$) اگر $h = \bar{x} - z$ که یک نقطه ماکزیمم موضعی است و $\bar{x} \in D$ ، برآورده می‌شود. در نتیجه

$$\langle \varphi'(z), x - z \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D.$$

فرض کنید u^* یک کنترل قابل قبول باشد که یک کنترل بهینه سراسری برای مساله $(P3)$ است و فرض کنید x^* جواب متناظر با سیستم (۲.۳) باشد. یک تابع کمکی $\Pi(y)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Pi(y) = \max_{x \in D} \langle \varphi'(y), x - y \rangle, \quad y \in \mathbb{R}^n. \quad (24.3)$$

حال بر اساس قضیه ۱.۲.۳، می‌توانیم شرایط بهینگی سراسری را برای مساله $(P2)$ به دست آوریم که در قضیه زیر بیان شده است.

قضیه ۲.۲.۳. یک کنترل $u^* \in V$ ، یک کنترل بهینه سراسری برای مساله $(P2)$ است اگر و فقط اگر

$$\max \{ \Pi(y) \mid y \in E_{\varphi(x^*)}(\varphi) \} \leq 0, \quad (25.3)$$

که

$$x^* = x^*(t_f | u^*) \in D(t_f).$$

اثبات. اعتبار قضیه ۲.۲.۳، معادل با بهینگی شرط (۱۳.۳) است. از قضیه ۲.۲.۳ می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر $(\tilde{x}, \tilde{u})$ و $\tilde{y} \in E_{\varphi(\tilde{x})}(\varphi)$ موجود باشد به طوری که

$$\langle \varphi'(\tilde{y}), \tilde{x} - \tilde{y} \rangle > 0. \quad (26.3)$$

آنگاه کنترل $\bar{u}$ ، کنترل بهینه سراسری برای مساله $(P2)$ نیست که در آن $\tilde{x} = x(t_f | \tilde{u})$

□

$\tilde{u}, \bar{u} \in V$ و $\bar{x} = x(t_f | \bar{u})$.

۳.۳ الگوریتم‌های پیشنهادی

قبل از این که الگوریتمی برای حل مساله $(P2)$ به دست آوریم، باید $\Pi(y)$ را برای هر $y \in \mathbb{R}^n$ محاسبه کنیم. ابتدا مساله کنترل بهینه خطی زیر را نظر می‌گیریم و آن را با $(P4)$ نشان می‌دهیم.

$$\max_{x \in D} \langle \varphi'(y), x \rangle. \quad (27.3)$$

حال برای هر $y \in \mathbb{R}^n$ معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A^T \psi, \\ \psi(t_f) = -\varphi'(y). \end{cases} \quad (28.3)$$

این سیستم که به عنوان سیستم هم‌وضعیت شناخته می‌شود، دارای یک جواب قطعه‌ای مشتق‌پذیر منحصر به فرد $\psi(t) = y(t|y)$ است که روی $[t_0, t_f]$ تعریف می‌شود که در آن

$$\psi(t, y) = [\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)]^T$$

$\psi(t)$ به عنوان متغیر هم‌وضعیت یاد می‌شود. مساله (P۴) را می‌توان با استفاده از نتایج ارائه شده در قضیه زیر حل کرد.

قضیه ۱.۳.۳. [۱۴] فرض کنید $\psi(t) = \psi(t|y)$ ، $t \in [t_0, t_f]$ ، یک جواب برای (۲۸.۳) به ازای $y \in \mathbb{R}^n$ باشد. فرض کنید $z(t) = z(t|y)$ یک کنترل قابل قبول باشد. $z(t)$ یک کنترل بهینه برای مساله (P۴) است اگر و فقط اگر

$$\langle \psi(t|y), B(t)z(t|y) \rangle = \min_{u \in V} \langle \psi(t|y), B(t)u(t) \rangle, \quad (29.3)$$

برای تقریباً هر $t \in [t_0, t_f]$.

بر اساس قضیه ۱.۳.۳، مقدار $\Pi(y)$ را می‌توان با استفاده از الگوریتم زیر محاسبه کرد.

الگوریتم ۱:

مرحله ۱. سیستم (۲۸.۳) را برای یک $y \in \mathbb{R}^n$ داده شده حل کنید. فرض کنید $\psi(t) = \psi(t|y)$ جواب باشد.

مرحله ۲. کنترل بهینه $z(t) = z(t|y)$ را به عنوان جواب مساله زیر روی بازه $[t_0, t_f]$ بیابید

$$\min_{u \in U} \langle \psi(t), B(t)u(t) \rangle.$$

مرحله ۳. یک جواب $x(t) = x(t|y)$ از سیستم (۲.۳) برای $u(t) = z(t|y)$ پیدا کنید.

مرحله ۴. $x(t_f) = x(t_f|z)$ را با استفاده از (۶.۳) با $t = t_f$ پیدا کنید.

مرحله ۵. $\Pi(y)$ را با استفاده از فرمول

$$\Pi(y) = \langle \varphi'(y), x(t_f) - y \rangle$$

محاسبه کنید.

تعریف ۱.۳.۳. برای عدد صحیح m داده شده، فرض کنید A_z^m مجموعه تعریف شده توسط رابطه زیر باشد

$$A_z^m = \{y^1, y^2, \dots, y^m \mid y^i \in E_{\varphi(z)}(\varphi) \cap D, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

در این صورت آن را یک مجموعه تقریب می‌نامیم که در آن $z = x(t_f|u)$ ، $u \in V$

لم ۱.۳.۳. فرض کنید یک نقطه شدنی $z \in D$ و یک نقطه $y^i \in A_z^m$ وجود داشته باشند که

$$\langle \varphi'(y^j), u^j - y^j \rangle > 0.$$

در این صورت $\varphi(u^j) > \varphi(z)$ که در آن

$$\langle \varphi'(y^j), u^j \rangle = \max_{x \in D} \langle \varphi'(y^j), x \rangle.$$

□

اثبات. نتیجه‌ای از لم ۲.۲.۳ است.

اکنون الگوریتمی برای حل مساله (۲) به صورت زیر می‌توان بیان کرد.

الگوریتم ۲:

مرحله ۱. قرار دهید $k := 0$ و فرض کنید $\bar{u}^k \in V$ یک کنترل داده شده دلخواه باشد. با شروع با کنترل $\bar{u}^k$ ، یک کنترل بهینه محلی u^k با استفاده از پکیج نرم‌افزاری کنترل بهینه [۴۴] پیدا می‌کنیم.

مرحله ۲. $x^k = x(t_f | u^k)$ را با حل سیستم (۲.۳) برای $u = u^k$ پیدا کنید.

مرحله ۳. مجموعه تقریب $A_{x^k}^m$ را به صورت زیر بسازید:

$$A_{x^k}^m = \{y^1, y^2, \dots, y^m \mid y^i \in E_{\varphi(x^k)}(\varphi) \cap D(t_f), i = 1, 2, \dots, m\}.$$

مرحله ۴. مسائل کنترل بهینه خطی زیر را حل کنید.

$$\max_{x \in D(t_f)} \langle \varphi'(y^i), x \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

مرحله ۵. $\Pi(y^i)$ که $i = 1, 2, \dots, m$ را با استفاده از الگوریتم ۱ محاسبه کنید.

مرحله ۶. η_k را با رابطه زیر محاسبه کنید:

$$\eta_k = \Pi(y^i) = \max_{1 \leq i \leq m} \Pi(y^i).$$

فرض کنید $z^j = z^j(t | y^j)$ جواب مساله زیر باشد:

$$\langle \psi^j(t), B(t)z^j \rangle = \min_{u \in U} \langle \psi^j(t), B(t)u(t) \rangle, t \in [t_0, t_f],$$

که

$$\begin{cases} \dot{\psi}^j(t) = -A^T(t)\psi^j(t), \\ \psi^j(t_f) = -\varphi'(y^j). \end{cases}$$

مرحله ۷. اگر $\eta_k \leq 0$ ، آنگاه توقف کنید. u^k یک جواب تقریبی سراسری است.

در غیر این صورت به مرحله بعدی بروید.

مرحله ۸. قرار دهید $\bar{u}^{k+1} := z^j(t | y^j)$ و $k := k + 1$ و به مرحله ۲ بروید.

لم ۲.۳.۳. فرض کنید نقطه $y' \in A_{x^k}^m$ برای $u^k \in D(t_f)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\langle \varphi'(y^j), x(t_f, z^j) - y^j \rangle > 0,$$

که z^j در رابطه زیر صدق کند:

$$\langle \varphi'(y^j), x(t_f|z^j) \rangle = \min_{x(t_f) \in D} \langle \varphi'(y^j), x \rangle,$$

در این صورت داریم

$$\varphi(x(t_f|z^j)) > \varphi(x^k(t_f|z^k)),$$

اثبات. با استفاده از لم ۲.۲.۳، داریم

$$\langle \varphi'(y^j), x(t_f|z^j) - y^j \rangle > 0,$$

بنابراین

$$\varphi(x(t_f|z^j)) \geq \varphi(y^j) = \varphi(x^k(t_f|u^k)).$$

□

و لذا اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۲.۳.۳. اگر به ازای هر $k = 1, 2, \dots, s$ ، داشته باشیم $\eta_k > 0$ ، آنگاه دنباله $\{J(u^k)\}$ که با الگوریتم ۲ ساخته شده است، یک دنباله یکنوای صعودی است؛ به این معنی که

$$J(u^{k+1}) \geq J(u^k), k = 1, 2, \dots, s,$$

که $J(u^k) = \varphi(x(t_f|u^k))$.

ملاحظه ۱.۳.۳. اگر برای هر $x \in \mathbb{R}^n$ ، توابع $g_1(x(t_f)) > 0$ و $g_2(x(t_f)) > 0$ ، آنگاه از (۲۲.۳) نتیجه می‌شود:

$$A_{x^k}^m = \{y^1, y^2, \dots, y^m \mid y^i \in E_{\varphi(x^k)}(\varphi), i = 1, 2, \dots, m\},$$

که $(i = 1, 2, \dots, m)$ $y^i = x^k + \alpha_i h^i$ ، $\alpha_i > 0$ و

$$\alpha_i = \frac{2 \left[\langle (\varphi(x^k(t_f|u^k)) D_2 - D_1) x^k(t_f|u^k), h^i \rangle \right]}{\langle D_1 h^i, h^i \rangle - \varphi(x^k(t_f|u^k)) \langle D_2 h^i, h^i \rangle}.$$

۴.۳ مثال‌های عددی

مثال ۱.۴.۳. مساله زیر را در نظر بگیرید

$$\max \left\{ \varphi(x(1)) = \frac{x_1^2(1) + x_2^2(1)}{2x_1(1) + 4x_2(1)} \right\}, \quad (30.3)$$

یا به طور معادل، مساله

$$\min \left\{ -\varphi(x(1)) = -\frac{x_1^2(1) + x_2^2(1)}{2x_1(1) + 4x_2(1)} \right\}, \quad (31.3)$$

که در آن

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2, \end{cases} \quad (32.3)$$

با شرایط اولیه

$$\begin{cases} x_1(0) = 0, \\ x_2(0) = 1. \end{cases} \quad (33.3)$$

فرض کنید مجموعه کنترل قابل قبول به صورت زیر تعریف شود:

$$u \in V = \left\{ u \in L_2^2([0, 1]) \mid 0 \leq u_1(t) \leq 7, \ 0 \leq u_2(t) \leq 4, \ t \in [0, 1] \right\}. \quad (34.3)$$

می‌توانیم به راحتی بررسی کنیم این مساله سه کنترل $u^1 = [7, 4]^T$ ، $u^0 = [0, 4]^T$ و $u^2 = [7, 0]^T$ دارد که اصل بیشینه را برآورده می‌کند. اکنون اجازه دهید که بررسی کنیم آیا کنترل $u^0 = [0, 4]^T$ یک بهینه سراسری است یا خیر. برای انجام این کار ابتدا با حل سیستم (۳۲.۳) برای $u = u^0$ ، به دست می‌آوریم

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(t) = 1 + 4t, \quad t \in [0, 1].$$

بنابراین $x_1(0) = 0$ ، $x_2(1) = 5$ و $\varphi(x, 1) = \frac{5}{4}$. مجموعه سطح $E_{\varphi(x)}(\varphi)$ در نقطه $x(1, u^0)$ به صورت زیر است:

$$E_{\varphi(x(1))}(\varphi) = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{y_1^2 + y_2^2}{2y_1 + 4y_2} = \frac{5}{4} \right\}.$$

می‌توان نشان داد که $\tilde{y} = [\frac{5}{2}, 5]^T \in E_{\varphi(x(1))}(\varphi)$. اکنون نقطه $\tilde{u} = [6, 4]^T \in V$ را بررسی می‌کنیم. فرض کنید مسیر متناظر به دست آمده از (۳۲.۳) و شرایط (۳۳.۳) باشد، یعنی

$$\tilde{x}_1(t) = 6t, \quad \tilde{x}_2(t) = 1 + 4t, \quad t \in [0, 1].$$

لذا $\tilde{x}_1(1) = 6$ و $\tilde{x}_2(1) = 5$. با گرفتن مشتق جزئی از φ ، نسبت به مؤلفه‌های x ، به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi(x(1))}{\partial x_1} = \frac{2x_1^2 + 8x_1x_2 - 2x_2^2}{(2x_1 + 4x_2)^2}, \\ \frac{\partial \varphi(x(1))}{\partial x_2} = \frac{4x_2^2 + 4x_1x_2 - 4x_1^2}{(2x_1 + 4x_2)^2}. \end{cases}$$

با محاسبه $\langle \varphi'(\tilde{y}), \tilde{x} - \tilde{y} \rangle$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \langle \varphi'(\tilde{y}), \tilde{x} - \tilde{y} \rangle &= \frac{2\tilde{y}_1^2 + 8\tilde{y}_1\tilde{y}_2 - 2\tilde{y}_2^2}{(2\tilde{y}_1 + 4\tilde{y}_2)^2}(\tilde{x}_1 - \tilde{y}_1) \\ &\quad + \frac{4\tilde{y}_2^2 + 4\tilde{y}_1\tilde{y}_2 - 4\tilde{y}_1^2}{(2\tilde{y}_1 + 4\tilde{y}_2)^2}(\tilde{x}_2 - \tilde{y}_2) \\ &= \frac{875}{2500} > 0. \end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد که کنترل $u^\circ = [6, 4]^T$ ، کنترل سراسری برای مساله نیست.

در حقیقت، کنترل $u^1 = [7, 4]^T$ یک کنترل سراسری با ارزش هزینه $\varphi(x(1, u^1)) = \frac{74}{37}$ است.

مثال ۲.۴.۳. یک کنترل بهینه را در نظر بگیرید که در آن تابع هدف به صورت زیر است

$$\varphi(x(2)) = \frac{\langle D_1 x(2), x(2) \rangle}{\langle D_2 x(2), x(2) \rangle + 15000},$$

که در آن

$$D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

و بعلاوه $V = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid -4 \leq u_i \leq 7, \quad i = 1, 2, \quad t \in [0, 2]\}$. در اینجا سیستم دینامیکی به صورت

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1, \\ \dot{x}_2 = x_1 + u_2, \end{cases}$$

با شرط اولیه $x_1(0) = x_2(0) = 0$ می‌باشد.

مثال ۳.۴.۳. یک کنترل بهینه در نظر بگیرید که در آن تابع هدف به صورت زیر است

$$\varphi(x(1)) = \frac{\langle D_1 x(1), x(1) \rangle}{\langle D_2 x(1), x(1) \rangle + 10000},$$

به حداکثر اندازه $V = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq u_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad 3u_1 + 4u_2 \leq 6, \quad t \in [0, 1]\}$ موضوع سیستم دینامیکی

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2 + 2u_1 - 3u_2, \end{cases}$$

با شرایط اولیه $x_1(0) = 2$ و $x_2(0) = 1$ باشد.

بر اساس کنترل‌های بهینه محلی به دست آمده دو مساله کنترل بهینه با استفاده از روش‌های بهینه‌سازی فهرست شده در الگوریتم ۲ حل می‌شوند. جواب‌های بهینه سراسری برای هر دو مساله به دست می‌آیند. به جدول ۱.۳ مراجعه کنید.

مثال	مقدار موضعی ψ	مقدار سراسری ψ	محاسبات زمان
۲	$1.4958e - 004$	$3.3348e + 000$	۰۰ : ۱۱.۱۱۴۴
۳	$1.6639e - 001$	$2.0531e + 001$	۰۰ : ۰۲.۸۰۹۳

جدول ۱.۳

فصل ۴

یک روش شبه طیفی برای مسائل برنامه‌ریزی کسری غیر خطی

این فصل به شرح زیر سازمان‌دهی شده است: در بخش ۱.۴ یک مساله $CTNFP$ را در نظر می‌گیریم. در بخش ۲.۴، روشی را برای تبدیل مساله $CTNFP$ به یک مساله غیر کسری CT معادل پیشنهاد می‌کنیم. در بخش ۳.۴، از روش لژاندر برای حل مساله برنامه‌ریزی CT استفاده می‌کنیم. در بخش ۴.۴، شدنی بودن مساله گسسته را تجزیه و تحلیل می‌کنیم. در بخش ۵.۴، تحلیل همگرایی روش را ارائه می‌دهیم. در بخش ۶.۴، دو مثال عددی را حل می‌کنیم تا کارایی روش را نشان دهیم.

۱.۴ معرفی مساله

در این فصل روی مسئله $CTNFP$ زیر متمرکز می‌شویم

$$\text{Min} \quad J(x, u) = \frac{\int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt}{\int_0^T g(t, x(t), u(t)) dt}, \quad (1.4)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = h(t, x(t), u(t)), & 0 \leq t \leq T, \\ x(t_0) = \alpha, \end{cases} \quad (2.4)$$

که $x : [\circ, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ و $u : [\circ, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ به ترتیب متغیرهای وضعیت و کنترل هستند و $\alpha \in \mathbb{R}^n$. همچنین توابع $f : [\circ, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ و $g : [\circ, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ را غیر خطی و پیوسته در نظر می‌گیریم که دارای خاصیت لیپ‌شیتز^۱ در مجموعه $[\circ, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ می‌باشند. علاوه بر این فرض می‌کنیم که مخرج کسر در تابع هدف اکیداً مثبت است؛ یعنی

$$\int_{\circ}^T g(t, x(t), u(t)) dt \geq \varepsilon > 0. \quad (3.4)$$

فرض می‌کنیم که مساله (۲.۴)–(۱.۴) $CTNFP$ حداقل یک جواب بهینه دارد. تاکنون کارهای بسیاری روی مساله (۲.۴)–(۱.۴) انجام شده است و اکثر آن‌ها مبتنی بر مساله برنامه‌ریزی غیر کسری CT زیر است.

$$\text{Min} \quad J_p(x, u) = \int_{\circ}^T (f(t, x, u) - pg(t, x, u)) dt, \quad (4.4)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = h(t, x, u), & \circ \leq t \leq T, \\ x(\circ) = \alpha, \end{cases} \quad (5.4)$$

که p یک پارامتر است. تعریف می‌کنیم

$$\Omega = \{(x, u) : \dot{x} = h(t, x, u), x(\circ) = \alpha\},$$

و

$$F(p) = \min_{(x, u) \in \Omega} J_p(x, u). \quad (6.4)$$

می‌توان ثابت کرد که برای هر $p \in \mathbb{R}$ ، یک جواب بهینه برای مساله (۵.۴)–(۴.۴) وجود دارد. برخی از ویژگی‌های تابع $F(\cdot)$ که توسط (۶.۴) تعریف شده است در موارد زیر ارائه شده است [۲۹].

لم ۱.۱.۴. تابع F مقعر روی $\mathbb{R}$ می‌باشد.

لم ۲.۱.۴. تابع F اکیداً نزولی است. به این معنا که برای هر مقدار داده شده p_1 و p_2 در $\mathbb{R}$ ، اگر $p_1 < p_2$ ، آنگاه $F(p_1) > F(p_2)$.

لم ۳.۱.۴. معادله $F(p) = 0$ یک جواب حقیقی منحصر به فرد دارد.

لم ۴.۱.۴. برای هر $(x, u) \in \Omega$ ، اگر

$$p = \frac{\int_{\circ}^T f(t, x, u) dt}{\int_{\circ}^T g(t, x, u) dt},$$

آنگاه $F(p) \leq 0$.

¹Lipschitz property

رابطه بین تابع $F(\cdot)$ و جواب بهینه مساله اصلی (۲.۴)–(۱.۴)، در قضیه زیر ارائه شده است.

قضیه ۱.۱.۴. [۲۹] اگر $F(p^*) = J_{p^*}(x^*, u^*) = \circ$ ، آنگاه

$$p^* = \frac{\int_0^T f(t, x^*, u^*) dt}{\int_0^T g(t, x^*, u^*) dt} = \min_{(x, u) \in \Omega} \frac{\int_0^T f(t, x, u) dt}{\int_0^T g(t, x, u) dt},$$

و (x^*, u^*) یک جواب بهینه برای مساله (۲.۴)–(۱.۴) می باشد.

با استفاده از قضیه ۱.۱.۴، حل مساله (۲.۴)–(۱.۴)، معادل تعیین ریشه معادله $F(p) = \circ$ است به طوری که $F(\cdot)$ توسط (۶.۴) تعریف می شود. از این رو برخی محققین تلاش کردند تا مساله (۲.۴)–(۱.۴)، را بر اساس تابع $F(\cdot)$ حل کنند؛ اما بیشتر کارها برای رده ای از مسائل $CTNFP$ ، مانند مسائل با کنترل خطی، انتگرال های آفین و دینامیک های خطی با توجه به متغیرهای وضعیت و کنترل می باشد. علاوه بر این، روش های ارائه شده در گذشته به پارامتر p وابسته هستند. همچنین نظریه استاندارد بهینه سازی CT (یا نظریه کنترل بهینه) نمی تواند مستقیماً برای حل مسائل $CTNFP$ به کار رود. از این رو، در این مقاله روش شبه طیفی را برای حل مساله (۲.۴)–(۱.۴) $CTNFP$ اعمال می کنیم که یکی از مهمترین روش های عددی برای حل مسائل CT است. در این جا نشان می دهیم که مسائل (۲.۴)–(۱.۴) $CTNFP$ را، می توان به یک مساله غیر کسری معادل تبدیل کرد و روش طیفی را می توان برای حل آن به صورت عددی به کار برد. همچنین همگرایی روش را تحلیل خواهیم کرد.

۲.۴ تبدیل مساله $CTNFP$ به یک مساله غیر کسری

متغیرهای وضعیت جدید $y(\cdot)$ و $z(\cdot)$ را برای مساله (۲.۴)–(۱.۴) $CTNFP$ به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$y(t) = \int_0^t f(t, x, u) dt, \quad z(t) = \int_0^t g(t, x, u) dt, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (7.4)$$

با استفاده از (۷.۴) داریم:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, x, u), & y(0) = 0, \\ \dot{z}(t) = g(t, x, u), & z(0) = 0. \end{cases}$$

از این رو می‌توانیم مساله (۲.۴) – (۱.۴) $CTNFP$ را به صورت معادل زیر در نظر بگیریم:

$$\min \quad J = \frac{y(T)}{z(T)}, \quad (۸.۴)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{x} = h(t, x, u), & 0 \leq t \leq T, \\ \dot{y} = f(t, x, u), & 0 \leq t \leq T, \\ \dot{z} = g(t, x, u), & 0 \leq t \leq T, \\ x(0) = x_0, y(0) = 0, z(0) = 0. \end{cases} \quad (۹.۴)$$

اکنون تعریف می‌کنیم $\lambda = \frac{y(T)}{z(T)}$ که در آن $z(T) > 0$ است. با این روش می‌توان به مساله برنامه‌ریزی غیر کسری خطی CT زیر رسید.

$$\min \quad J = \lambda, \quad (۱۰.۴)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{x} = h(t, x, u), & 0 \leq t \leq T, \\ \dot{y} = f(t, x, u), & 0 \leq t \leq T, \\ \dot{z} = g(t, x, u), & 0 \leq t \leq T, \\ y(T) - \lambda z(T) = 0, \\ x(0) = \alpha, y(0) = 0, z(0) = 0. \end{cases} \quad (۱۱.۴)$$

قضیه ۱.۲.۴. اگر $(x^*, y^*, z^*, u^*, \lambda^*)$ یک جواب بهینه برای مساله غیر کسری (۱۰.۴) و (۱۱.۴) باشد، آنگاه (x^*, u^*) یک جواب بهینه برای مساله کسری (۱.۴) و (۲.۴) است.

اثبات. فرض کنید (x^*, u^*) برای مساله (۱.۴) و (۲.۴) $CTNFP$ بهینه نباشد. بنابراین یک جواب بهینه $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega$ برای مساله (۱.۴) و (۲.۴) به طوری که $J(x^*, u^*) > J(\bar{x}, \bar{y})$ وجود دارد. اکنون تعریف می‌کنیم

$$\bar{y}(t) = \int_0^t f(s, \bar{x}, \bar{u}) ds, \quad \bar{z}(t) = \int_0^t g(s, \bar{x}, \bar{u}) ds, \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{y}(T)}{\bar{z}(T)}.$$

بنابراین داریم

$$\bar{y} = f(s, \bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{z} = g(s, \bar{x}, \bar{u}), \quad \bar{y}(0) = 0, \quad \bar{z}(0) = 0.$$

از این رو $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda})$ یک جواب قابل قبول برای مساله (۱۰.۴) و (۱۱.۴) است و همچنین

$$\lambda^* = \frac{y^*(T)}{z^*(T)} = J(x^*, u^*) > J(\bar{x}, \bar{u}) = \frac{\bar{y}(T)}{\bar{z}(T)} = \bar{\lambda},$$

که در تناقض با بهینگی $(x^*, y^*, z^*, u^*, \lambda^*)$ برای مساله (۱۰.۴) و (۱۱.۴) است. $\square$

۳.۴ روش شبه‌طیفی لژاندر

قبل از اعمال روش شبه‌طیفی لژاندر، از تبدیل زمان $t = \frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1)$ ، $-1 \leq \tau \leq 1$ استفاده می‌کنیم و تعریف می‌کنیم

$$X(\tau) = x\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1)\right), \quad Y(\tau) = y\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1)\right),$$

$$Z(\tau) = z\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1)\right), \quad U(\tau) = u\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1)\right).$$

با این تعاریف مساله (۱۱.۴) – (۸.۴) به مساله معادل زیر تبدیل می‌شود:

$$\text{Min} \quad J = \lambda, \quad (12.4)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{X}(\tau) = H(\tau, x(\tau), U(\tau)), & -1 \leq \tau \leq 1, \\ \dot{Y}(\tau) = F(\tau, x(\tau), u(\tau)), & -1 \leq \tau \leq 1, \\ \dot{Z}(\tau) = G(\tau, x(\tau), u(\tau)), & -1 \leq \tau \leq 1, \\ Y(1) - \lambda Z(1) = 0, \\ X(-1) = \alpha, Y(-1) = 0, Z(-1) = 0. \end{cases} \quad (13.4)$$

به طوری که

$$H(\tau, x(\tau), u(\tau)) = \frac{T}{\Upsilon} h\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1), x\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1)\right), u\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1)\right)\right),$$

$$F(\tau, x(\tau), u(\tau)) = \frac{T}{\Upsilon} f\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1), x\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1)\right), u\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1)\right)\right),$$

$$G(\tau, x(\tau), u(\tau)) = \frac{T}{\Upsilon} g\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1), x\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1)\right), u\left(\frac{T}{\Upsilon}(\tau + 1)\right)\right).$$

اکنون فرض می‌کنیم $p_j(\cdot)$ چندجمله‌ای لژاندر از درجه j است. این چندجمله‌ای را می‌توان با فرمول تکراری زیر به دست آورد

$$\begin{cases} p_{j+1}(\tau) = \frac{2j+1}{j+1} \tau p_j(\tau) - \frac{j}{j+1} p_{j-1}(\tau), & -1 \leq \tau \leq 1, \\ p_0(\tau) = 1, \quad p_1(\tau) = \tau. \end{cases}$$

فرض کنید $\{\tau_k\}_{k=0}^N$ ریشه چندجمله‌ای $(1 - \tau^2)p'_N(\tau)$ باشد. این نقاط لژاندر-گاوس-لوباتو نامیده می‌شوند. برای درونیابی متغیرهای مساله (۱۳.۴) – (۱۲.۴) به چندجمله‌های لاگرانژ نیاز داریم که با رابطه زیر مشخص می‌شوند

$$L_i(\tau) = \prod_{j=0, j \neq N}^N \frac{\tau - \tau_j}{\tau_i - \tau_j}, \quad -1 \leq \tau \leq 1.$$

اکنون جواب‌های بهینه مساله (۱۳.۴)–(۱۲.۴) را به صورت زیر تقریب می‌زنیم

$$\begin{cases} X(\tau) \approx X_N(\tau) = \sum_{l=0}^N \bar{x}_l L_l(\tau), & U(\tau) \approx U_N(\tau) = \sum_{l=0}^N \bar{u}_l L_l(\tau), \\ Y(\tau) \approx X_N(\tau) = \sum_{l=0}^N \bar{y}_l L_l(\tau), & Z(\tau) \approx X_N(\tau) = \sum_{l=0}^N \bar{z}_l L_l(\tau), \end{cases} \quad (14.4)$$

که در آن ضرائبی مجهول هستند. چون برای هر $k = 0, 1, \dots, N$ ، $L_k(\tau_k) = 1$ و برای هر $k = 0, 1, \dots, N$ پس برای هر $k = 0, 1, \dots, N$ داریم

$$\begin{cases} X(\tau_k) \approx X_N(\tau_k) = \bar{x}_k, & U(\tau_k) \approx U_N(\tau_k) = \bar{u}_k, \\ Y(\tau_k) \approx Y_N(\tau_k) = \bar{y}_k, & Z(\tau_k) \approx Z_N(\tau_k) = \bar{z}_k. \end{cases} \quad (15.4)$$

همچنین

$$\begin{cases} X'(\tau_k) \approx X'_N(\tau_k) = \sum_{l=0}^N \bar{x}_l D_{kl}, & Y'(\tau_k) \approx Y'_N(\tau_k) = \sum_{l=0}^N \bar{y}_l D_{kl}, \\ Z'(\tau_k) \approx Z'_N(\tau_k) = \sum_{l=0}^N \bar{z}_l D_{kl}, & k = 0, 1, \dots, N, \end{cases} \quad (16.4)$$

که

$$D_{kl} = L'_l(\tau_k) \begin{cases} -\frac{N(N+1)}{4}, & k = l = 0, \\ \frac{p_N(\tau_k)}{(\tau_k - \tau_l)p_N(\tau_l)}, & k \neq l, 0 \leq k, l \leq N, \\ \frac{N(N+1)}{4}, & k = l = N, \\ 0, & 1 \leq k = l \leq N-1, \end{cases} \quad (17.4)$$

و $D = (D_{kl})$ ماتریس مشتق نامیده می‌شود. با استفاده از (۱۴.۴)، (۱۵.۴) و (۱۶.۴) می‌توانیم مساله CT (۱۳.۴)–(۱۲.۴) را با مساله زمان گسسته زیر تقریب بزنیم:

$$\text{Min} \quad J_N = \lambda, \quad (18.4)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{l=0}^N \bar{x}_l D_{kl} = H(\tau_k, \bar{x}_k, \bar{u}_k), & k = 0, 1, \dots, N, \\ \sum_{l=0}^N \bar{y}_l D_{kl} = F(\tau_k, \bar{x}_k, \bar{u}_k), & k = 0, 1, \dots, N, \\ \sum_{l=0}^N \bar{z}_l D_{kl} = G(\tau_k, \bar{x}_k, \bar{u}_k), & k = 0, 1, \dots, N, \\ \bar{y}_N - \lambda \bar{z}_N = 0, \bar{x}_0 = \alpha, \bar{y}_0 = 0, \bar{z}_0 = 0, \end{cases} \quad (19.4)$$

که در آن

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \lambda) = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_N, \bar{y}_0, \dots, \bar{y}_N, \bar{z}_0, \dots, \bar{z}_N, \bar{u}_0, \dots, \bar{u}_N, \lambda)$$

متغیر مساله است. در بخش بعد، شدنی بودن مساله DT (۱۹.۴)–(۱۸.۴) را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۴.۴ آنالیز شدنی بودن مساله زمان-گسسته

تعریف ۱.۴.۴. فضاهای سوبولوف، فضاهای برداری توپولوژیکی هستند که اعضای آنها، توابع تعریف شده روی فضاهای اقلیدسی n بعدی $\mathbb{R}^n$ هستند و مشتق آنها در نامساوی خاصی صدق می‌کند.

فرض کنید $W^{m,p}$ که $m \geq 2$ و $p \geq 1$ فضای سوبولوف^۲ روی $[-1, 1]$ باشد که از همه توابع $\varphi : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ تشکیل شده است که $\varphi^{(j)}(\cdot)$ ، $j = 0, 1, 2, \dots, m$ در فضای L^p با نرم زیر قرار دارد

$$\|\varphi\|_{W^{m,p}} = \sum_{j=1}^m \left(\int_{-1}^1 \|\varphi^{(j)}(\tau)\|_p^p dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

در این بخش به لم زیر نیاز داریم:

لم ۱.۴.۴. [۸] برای هر تابع داده شده $\varphi \in W^{m,p}$ روی $[-1, 1]$ ، یک چندجمله‌ای $p_N(\cdot)$ از درجه N یا کمتر وجود دارد به طوری که

$$\|\varphi(\tau) - p_N(\tau)\|_{\infty} \leq c c_0 N^{-m}, \quad -1 \leq \tau \leq 1,$$

که در آن c ثابت و مستقل از N و $c_0 = \|\varphi\|_{W^{m,p}}$.

اکنون برای تضمین شدنی بودن مساله DT (۱۹.۴)–(۱۸.۴) محدودیت‌های مساله را تغییر داده و مساله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\text{Min} \quad J_N = \lambda, \quad (20.4)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \left\| \sum_{l=0}^N \bar{x}_l D_{kl} - H(\tau_k, \bar{x}_k, \bar{u}_k) \right\|_{\infty} \leq (N-1)^{\frac{1}{p}-m}, \\ \left| \sum_{l=0}^N \bar{y}_l D_{kl} - F(\tau_k, \bar{x}_k, \bar{u}_k) \right| \leq (N-1)^{\frac{1}{p}-m}, \\ \left| \sum_{l=0}^N \bar{z}_l D_{kl} - G(\tau_k, \bar{x}_k, \bar{u}_k) \right| \leq (N-1)^{\frac{1}{p}-m}, \\ \left| \bar{y}_N - \lambda \bar{z}_N \right| \leq (N-1)^{\frac{1}{p}-m}, \quad \left\| \bar{x}_0 - \alpha \right\|_{\infty} \leq (N-1)^{\frac{1}{p}-m}, \\ \left| \bar{y}_0 \right| \leq (N-1)^{\frac{1}{p}-m}, \quad \left| \bar{z}_0 \right| \leq (N-1)^{\frac{1}{p}-m}, \end{cases} \quad (21.4)$$

که در آن $m \geq 2$. تبدیل فوق بر اساس نظریه تقریب سازگار پولاک است [۳۴]. توجه داشته باشید که وقتی N به بی‌نهایت میل کند، بین محدودیت‌های مسائل (۱۹.۴)–(۱۸.۴) و (۲۱.۴)–(۲۰.۴) تفاوتی وجود ندارد.

²Sobolov space

ملاحظه ۱.۴.۴. از آنجایی که توابع F ، G و H خاصیت لیپ‌شیتز را دارند، ثابت‌های M_1 ، M_2 و M_3 وجود دارند به طوری که برای هر $(\bar{X}, \bar{U})$ و $(\tilde{X}, \tilde{U})$ داریم:

$$\left| F(t, \bar{X}, \bar{U}) - F(t, \tilde{X}, \tilde{U}) \right| \leq M_1 (\| \bar{X} - \tilde{X} \| + \| \bar{U} - \tilde{U} \|),$$

$$\left| G(t, \bar{X}, \bar{U}) - G(t, \tilde{X}, \tilde{U}) \right| \leq M_2 (\| \bar{X} - \tilde{X} \| + \| \bar{U} - \tilde{U} \|),$$

$$\left\| H(t, \bar{X}, \bar{U}) - H(t, \tilde{X}, \tilde{U}) \right\| \leq M_3 (\| \bar{X} - \tilde{X} \| + \| \bar{U} - \tilde{U} \|).$$

قضیه ۱.۴.۴. [شدنی بودن] فرض کنیم $(X^*, Y^*, Z^*, U^*, \lambda)$ یک جواب بهینه برای مساله CT (۱۳.۴)–(۱۲.۴) باشد. در این صورت یک عدد صحیح مثبت K وجود دارد به طوری که برای هر $N \geq k$ ، مساله DT (۱۹.۴)–(۱۸.۴) یک جواب بهینه به صورت زیر دارد

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda}) = (\bar{x}_0, \dots, \bar{x}_N, \bar{y}_0, \dots, \bar{y}_N, \bar{z}_0, \dots, \bar{z}_N, \bar{u}_0, \dots, \bar{u}_N, \bar{\lambda}),$$

طوری که $\bar{u}_k = U^*(\tau_k)$ و

$$\| X^*(\tau_k) - \bar{x}_k \|_\infty \leq L_1 (N-1)^{1-m}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (22.4)$$

$$\left| Y^*(\tau_k) - \bar{y}_k \right| \leq L_2 (N-1)^{1-m}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (23.4)$$

$$\left| Z^*(\tau_k) - \bar{z}_k \right| \leq L_3 (N-1)^{1-m}, \quad k = 0, 1, \dots, N, \quad (24.4)$$

که در آن L_1 ، L_2 و L_3 ثابت‌هایی مستقل از N هستند.

اثبات. فرض کنیم $P(\cdot)$ ، $Q(\cdot)$ و $R(\cdot)$ به ترتیب بهترین تقریب‌های چندجمله‌ای $\bar{X}^*(\cdot)$ ، $\dot{Y}^*(\cdot)$ و $\dot{Z}^*(\cdot)$ باشند. با استفاده از لم ۱.۴.۴، متغیرهای وضعیت c_1 ، c_2 و c_3 مستقل از N وجود دارند به طوری که

$$\| \dot{X}^*(\tau) - P(\tau) \|_\infty \leq c_1 (N-1)^{1-m}, \quad (25.4)$$

$$\| \dot{Y}^*(\tau) - Q(\tau) \|_\infty \leq c_2 (N-1)^{1-m}, \quad (26.4)$$

$$\| \dot{Z}^*(\tau) - R(\tau) \|_\infty \leq c_3 (N-1)^{1-m}. \quad (27.4)$$

تعریف می‌کنیم

$$X_N(\tau) = X^*(-1) + \int_{-1}^{\tau} P(s) ds, \quad Y_N(\tau) = \int_{-1}^{\tau} Q(s) ds, \quad Z_N(\tau) = \int_{-1}^{\tau} R(s) ds, \quad (28.4)$$

$$\bar{x}_k = X_N(\tau_k), \quad \bar{y}_k = Y_N(\tau_k), \quad \bar{z}_k = Z_N(\tau_k), \quad \bar{u}_k = U_N(\tau_k), \quad k = 0, 1, \dots, N. \quad (29.4)$$

ابتدا نشان می‌دهیم که $(\bar{x}, \bar{u})$ در رابطه (۲۲.۴) صدق می‌کند. با استفاده از روابط (۲۵.۴)، (۲۸.۴) و (۲۹.۴)، برای هر $\tau \in [-1, 1]$ داریم

$$\begin{aligned} \|X^*(\tau) - X^N(\tau)\|_\infty &= \left\| \int_{-1}^{\tau} (\dot{X}^*(s) - P(s)) ds \right\|_\infty \\ &\leq \int_{-1}^{\tau} \|\dot{X}^*(s) - P(s)\|_\infty ds \\ &\leq c_1(N-1)^{1-m} \int_{-1}^{\tau} ds \\ &\leq 2c_1(N-1)^{1-m}. \end{aligned} \quad (30.4)$$

به طور مشابه داریم

$$|Y^*(\tau) - Y^N(\tau)| \leq 2c_2(N-1)^{1-m}, \quad (31.4)$$

$$|Z^*(\tau) - Z^N(\tau)| \leq 2c_3(N-1)^{1-m}. \quad (32.4)$$

به علاوه، از آن جا که $x^*(-1) = \alpha$ ، لذا داریم

$$\begin{aligned} \|\bar{x}_0 - \alpha\| - \|X^*(-1) - \alpha\| &\leq \| (X^*(-1) - \alpha) - (\bar{x}_0 - \alpha) \| \\ &= \|X^*(-1) - \bar{x}_0\| \\ &\leq 2c_1(N-1)^{1-m}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|\bar{x}_0 - \alpha\| \leq \|X^*(-1) - \alpha\| + 2c_1(N-1)^{1-m} = 2c_1(N-1)^{1-m}. \quad (33.4)$$

به طور مشابه می‌توانیم نشان دهیم

$$|\bar{y}_0| \leq 2c_2(N-1)^{1-m}, \quad |\bar{z}_0| \leq 2c_3(N-1)^{1-m}. \quad (34.4)$$

همچنین چون $Y^*(1) - \bar{\lambda}Z^*(1) = 0$ ، پس داریم

$$\begin{aligned} |Y_N(1) - \lambda Z_N(1)| &= |(Y^*(1) - \bar{\lambda}Z^*(1)) - (Y_N(1) - \bar{\lambda}Z_N(1))| \\ &= |Y^*(1) - Y_N(1) - \bar{\lambda}(Z^*(1) - Z_N(1))| \\ &\leq |Y^*(1) - Y_N(1)| + |\bar{\lambda}| |Z^*(1) - Z_N(1)| \\ &\leq \left(2c_2 + \frac{|Y^*(1)|}{|Z^*(1)|} 2c_3 \right) (N-1)^{1-m}. \end{aligned} \quad (35.4)$$

بنابراین اگر K را به گونه‌ای انتخاب کنیم که برای هر $N \geq K$

$$\max \left\{ 2c_1, 2c_2, 2c_3, 2c_2(N-1) + 2c_3 \frac{|Y^*(1)|}{|Z^*(1)|} \right\} \leq (N-1)^{\frac{1}{\bar{\gamma}}},$$

آنگاه $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda})$ در محدودیت‌های (۲۱.۴)–(۲۰.۴) صدق می‌کند. از این رو $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{u}, \bar{\lambda})$ یک جواب شدنی برای مساله DT (۲۱.۴)–(۲۰.۴) است. در نهایت با انتخاب $L_1 = 2c_1$ ، $L_2 = 2c_2$ و $L_3 = 2c_3$ می‌توانیم از (۳۲.۴)–(۳۰.۴) به (۲۴.۴)–(۲۲.۴) برسیم. $\square$

ملاحظه ۲.۴.۴. توجه داریم که در اثبات قضیه ۱.۴.۴، با توجه به رابطه (۳.۴) داریم

$$Z^*(1) = \int_{-1}^1 G(\tau, X(\tau), U(\tau)) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T g(t, x(t), u(t)) dt \geq \varepsilon > 0.$$

ملاحظه ۳.۴.۴. با استفاده از روابط (۳۲.۴)–(۳۰.۴)، مجموعه شدنی مساله DT (۲۱.۴)–(۲۰.۴) غیر تهی و فشرده است. بنابراین تابع پیوسته $J_N = \lambda$ مینیمم خود را در یک نقطه از ناحیه شدنی دریافت می‌کند.

۵.۴ همگرایی روش

در این بخش نشان می‌دهیم که دنباله جواب‌های بهینه مساله DT (۲۱.۴)–(۲۰.۴) همگرا به جواب بهینه مساله CT (۱۳.۴)–(۱۲.۴) است. روش، تعمیم آنالیز همگرایی داده شده [۱] است. فرض کنید $(\bar{x}_k^*, \bar{y}_k^*, \bar{z}_k^*, \bar{u}_k^*, \bar{\lambda}_N^*)$ که $k = 0, 1, \dots, N$ یک جواب بهینه مساله DT (۲۱.۴)–(۲۰.۴) باشد. تعریف می‌کنیم

$$X_N^*(\tau) = \sum_{k=0}^N \bar{x}_k^* L_k(\tau), \quad Y_N^*(\tau) = \sum_{k=0}^N \bar{y}_k^* L_k(\tau), \quad Z_N^*(\tau) = \sum_{k=0}^N \bar{z}_k^* L_k(\tau), \quad (36.4)$$

و

$$U_N^*(\tau) = \sum_{k=0}^N \bar{u}_k^* L_k(\tau), \quad -1 \leq \tau \leq 1, \quad (37.4)$$

که در آن $L_k(\cdot)$ برای $k = 0, 1, \dots, N$ چندجمله‌ای لاگرانژ است. بنابراین دنباله‌ای از جواب‌های بهینه

$$\{\bar{x}_k^*, \bar{y}_k^*, \bar{z}_k^*, \bar{u}_k^*, \bar{\lambda}_N^*, k = 0, 1, \dots, N\}_{N=N_1}^{\infty},$$

و دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های درونیاب به شکل

$$\{X_N^*(\cdot), Y_N^*(\cdot), Z_N^*(\cdot), U_N^*(\cdot), \bar{\lambda}_N^*\}_{N=N_1}^{\infty},$$

داریم.

فرض I. دنباله $\{\bar{x}_0^*, \bar{y}_0^*, \bar{z}_0^*, x_N'^*(\cdot), y_N'^*(\cdot), z_N'^*(\cdot), u_N'^*(\cdot)\}_{N=N_1}^{\infty}$ یک زیر دنباله دارد که به صورت یکنواخت به

$$(x_0^\infty, x_0^\infty, x_0^\infty, q_1(\cdot), q_2(\cdot), q_3(\cdot), u^*(\cdot))$$

همگرا می‌باشد که در آن $q_i(\cdot)$ برای $i = 1, 2, 3$ توابعی پیوسته هستند.

قضیه ۱.۵.۴. (همگرایی) فرض کنید که چندجمله‌ای‌های درونیاب (۳۶.۴) و (۳۷.۴) فرض I را برآورده سازد. در این صورت $(X^*(.), Y^*(.), Z^*(.), U^*(.), \lambda^*) = \varphi^*(.)$ یک جواب بهینه برای مساله CT (۱۳.۴)–(۱۲.۴) می‌باشد که در آن

$$X^*(\tau) = x_0^\infty + \int_{-1}^{\tau} q_1(s)ds, \quad -1 \leq \tau \leq 1, \quad (38.4)$$

$$Y^*(\tau) = \int_{-1}^{\tau} q_2(s)ds, \quad -1 \leq \tau \leq 1, \quad (39.4)$$

$$Z^*(\tau) = \int_{-1}^{\tau} q_3(s)ds, \quad -1 \leq \tau \leq 1, \quad (40.4)$$

$$\lambda^* = \lim_{N \rightarrow \infty} \lambda_N^*. \quad (41.4)$$

اثبات. با فرض I ، زیر دنباله $N_i \in \{1, 2, \dots\}$ با $\lim_{i \rightarrow \infty} N_i = \infty$ وجود دارد به طوری که

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X'_{N_i}^* = q_1(.), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} Y'_{N_i}^* = q_2(.), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} Z'_{N_i}^* = q_3(.), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{N_i}^* = \lambda^*. \quad (42.4)$$

از این رو با (۴۰.۴)–(۳۸.۴) و (۴۲.۴) داریم

$$\lim_{i \rightarrow \infty} X_{N_i}^*(.) = X^*(.), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} Y_{N_i}^*(.) = Y^*(.), \quad \lim_{i \rightarrow \infty} Z_{N_i}^*(.) = Z^*(.). \quad (43.4)$$

اثبات را در سه مرحله دنبال می‌کنیم. در مرحله ۱، نشان می‌دهیم که $\varphi^*(.)$ یک جواب شدنی برای مساله CT (۱۳.۴)–(۱۲.۴) است. در مرحله ۲، همگرایی $J_{N_i}^*$ را به J^* نشان می‌دهیم که در آن $J_{N_i}^*$ و J^* به ترتیب مقادیر بهینه تابع هدف برای مساله (۱۳.۴)–(۱۲.۴) و (۲۱.۴)–(۲۰.۴) هستند. در نهایت نشان می‌دهیم که $\varphi^*(.)$ یک جواب بهینه برای مساله CT (۱۳.۴)–(۱۲.۴) است.

مرحله ۱. نشان خواهیم داد که $\varphi^*(.)$ محدودیت‌های (۱۳.۴)–(۱۲.۴) را برآورده می‌کند. فرض کنید $\varphi^*(.)$ در معادله (۱۳.۴)–(۱۲.۴) صدق نکند. پس زمان $\bar{\tau} \in [-1, 1]$ وجود دارد به طوری که

$$\dot{X}^*(\bar{\tau}) - H(\bar{\tau}, X^*(\bar{\tau}), U^*(\bar{\tau})) \neq 0. \quad (44.4)$$

از آن جا که نقاط LGL در $[-1, 1]$ چگال هستند [۲۱]، یک دنباله k_{N_i} وجود دارد به طوری که

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tau_{k_{N_i}} = \bar{\tau} \text{ و } 0 < k_{N_i} < N_i \text{ بنابراین} \quad (45.4)$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(X'_{N_i}^*(\tau_{k_{N_i}}) - H(\tau_{k_{N_i}}, X(\tau_{k_{N_i}}), U(\tau_{k_{N_i}})) \right) = X^*((\bar{\tau} - H(\bar{\tau}, X^*(\bar{\tau}), U^*(\bar{\tau}))) \neq 0.$$

حال چون $\lim_{i \rightarrow \infty} (N_i - 1)^{\frac{1}{p}-m} = 0$ ، با محدودیت (۱۳.۴)–(۱۲.۴) داریم

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(X'_{N_i}^*(\tau_{k_{N_i}}) - H(\tau_{k_{N_i}}, X(\tau_{k_{N_i}}), U(\tau_{k_{N_i}})) \right) = 0,$$

که در تناقض با (۴۴.۴) است. بنابراین $\varphi^*(.)$ محدودیت اول مساله (۱۳.۴)–(۱۲.۴) را برآورده می‌کند. با یک فرآیند مشابه می‌توانیم ببینیم که $\varphi^*(.)$ بقیه محدودیت‌های مساله (۱۳.۴)–(۱۲.۴) را نیز برآورده می‌کند. به عنوان مثال داریم

$$\begin{aligned} 0 &\leq |Y^*(1) - \lambda^* Z^*(1)| = \left| \lim_{i \rightarrow \infty} (Y_{N_i}^*(1) - \lambda_{N_i}^*(1)) \right| \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} |Y_{N_i}^*(1) - \lambda_{N_i}^*(1)| = \lim_{i \rightarrow \infty} |\bar{y}_{N_i}^* - \lambda_{N_i}^* \bar{z}_{N_i}^*| \\ &\leq \lim_{i \rightarrow \infty} (N_i - 1) \bar{\gamma}^{-m} = 0. \end{aligned}$$

بنابراین $Y^*(1) - \lambda^* Z^*(1) = 0$. همچنین با یک روش مشابه داریم $X^*(-1) = \alpha$. علاوه بر این، بدیهی است که $X^*(.)$ و $Y^*(.)$ در روابط $Y(-1) = 0$ و $Z(-1) = 0$ صدق می‌کند.

مرحله ۲. با استفاده از (۱۸.۴) و (۴۱.۴) داریم $J^* = \lambda^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{N_i}^* = \lim_{i \rightarrow \infty} J_{N_i}$.
مرحله ۳. فرض کنید

$$\tilde{\varphi}(.) = (\tilde{X}(.), \tilde{Y}(.), \tilde{Z}(.), \tilde{U}(.), \tilde{\lambda}).$$

یک جواب بهینه برای مساله CT (۱۳.۴)–(۱۲.۴) باشد. با استفاده از همان بحث قضیه ۱.۱.۴، دنباله جواب‌های شدنی $\{\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{u}, \tilde{\lambda}_N\}_{N=N_1}^{\infty}$ برای مساله DT (۲۱.۴)–(۲۰.۴) وجود دارد که چندجمله‌ای درونیاب متناظر با آن به طور یکنواخت به $\tilde{\varphi}(.)$ همگرا می‌شود. اکنون با بهینه بودن $\tilde{\varphi}(.)$ داریم:

$$\tilde{J} = \tilde{\lambda} \leq J^* = \lambda^* = \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_{N_i}^* \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\lambda}_{N_i} = \tilde{J}.$$

بنابراین $\lambda^* = \tilde{\lambda}$. لذا $\varphi^*(.)$ یک جواب بهینه شدنی برای تابع هدف J می‌باشد. $\square$

۶.۴ مثال‌های عددی

در این بخش از روش پیشنهادی خود برای حل دو مساله $CTFP$ استفاده می‌کنیم. در اینجا از دستور $FMINCON$ در نرم‌افزار $MATLAB$ برای حل مساله DT (۱۹.۴)–(۱۸.۴) استفاده کرده‌ایم. علاوه بر این، خطای مطلق جواب‌های بهینه تقریبی را با روابط زیر محاسبه می‌کنیم:

$$e_x(t_k) = |x^*(t_k) - \bar{x}_k|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$e_u(t_k) = |u^*(t_k) - \bar{u}_k|, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N,$$

که در آن $x^*(.)$ و $u^*(.)$ جواب‌های بهینه دقیق و $x(.)$ و $u(.)$ جواب‌های بهینه تقریبی هستند.

مثال ۱.۶.۴. مساله $CTFP$ زیر را در نظر بگیرید

$$\min J = \frac{\int_0^1 (t^2 (x(t) - e^t)^2 + 1) dt}{\int_0^1 (1 - (x(t) - e^t)^2 (u(t) - t)^2) dt}, \quad (46.4)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(u^2(t)e^t - t^2x(t) + 1), & 0 \leq t \leq 1, \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (47.4)$$

جواب بهینه دقیق این مساله $(x^*(.), u^*(.)) = (e^t, t)$ است. همچنین مقدار بهینه تابع هدف $J^* = 1$ می‌باشد. مساله DT متناظر (۱۹.۴)–(۱۸.۴) برای (۴۷.۴)–(۴۶.۴) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & J_n = \lambda, \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj} = \frac{1}{\tau} \bar{x}_k \left(\bar{u}_k^2 e^{\frac{1}{\tau}(\tau_k+1)} - \left(\frac{1}{\tau}(\tau_k+1) \right)^2 \bar{x}_k + 1 \right), & k = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \sum_{j=0}^N \bar{y}_j D_{kj} = \frac{1}{\tau} \left(\left(\frac{1}{\tau}(\tau_k+1) \right)^2 (\bar{x}_k - e^{\frac{1}{\tau}(\tau_k+1)})^2 + 1 \right), & k = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \sum_{j=0}^N \bar{z}_j D_{kj} = \frac{1}{\tau} \left(1 - (\bar{x}_k - e^{\frac{1}{\tau}(\tau_k+1)})^2 - (\bar{u}_k - \frac{1}{\tau}(\tau_k+1)) \right), & k = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \bar{y}_N - \lambda \bar{z}_N = 0, \quad \bar{x}_0 = 1, \quad \bar{y}_0 = \bar{z}_0 = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

که در آن $\bar{u} = (\bar{u}_0, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_N)$ و $\bar{z} = (\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_N)$ ، $\bar{y} = (\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_N)$ ، $\bar{x} = (\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_N)$ و λ متغیرهای مساله هستند. پس از حل مساله DT برای $N = 5$ ، به جواب تقریبی $(\bar{x}, \bar{u})$ برای مساله $CTFP$ (۴۷.۴)–(۴۶.۴) رسیدیم که در شکل‌های ۱.۴ و ۲.۴ نشان داده شده است. همچنین خطای تقریبی برای وضعیت و کنترل در شکل‌های ۳.۴ و ۴.۴ نشان داده شده است. در این جا مقداری بهینه تقریبی را

$$\lambda^* = J_5^* = 1 + 2.11 \times 10^{-11},$$

به دست می‌آوریم که مقدار نزدیک به مقدار بهینه دقیق $J^* = 1$ می‌باشد.

مثال ۲.۶.۴. مساله $CTFP$ زیر را در نظر بگیرید.

$$\min J = \frac{\int_0^\pi (1 + (x(t) \cos t - u(t) \sin t)^2) dt}{\int_0^\pi (1 - (x(t) - \sin t)^2 - (u(t) - \cos t)^2) dt}, \quad (48.4)$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = u(t), & 0 \leq t \leq \pi, \\ x(0) = 0. \end{cases} \quad (49.4)$$

جواب بهینه دقیق و مقدار بهینه تابع هدف به ترتیب $(x^*(.), u^*(.)) = (\sin t, \cos t)$ و $J^* = 1$ هستند. مساله DT متناظر (۱۹.۴)–(۱۸.۴) برای مساله CT (۴۹.۴)–(۴۸.۴) به صورت زیر

است:

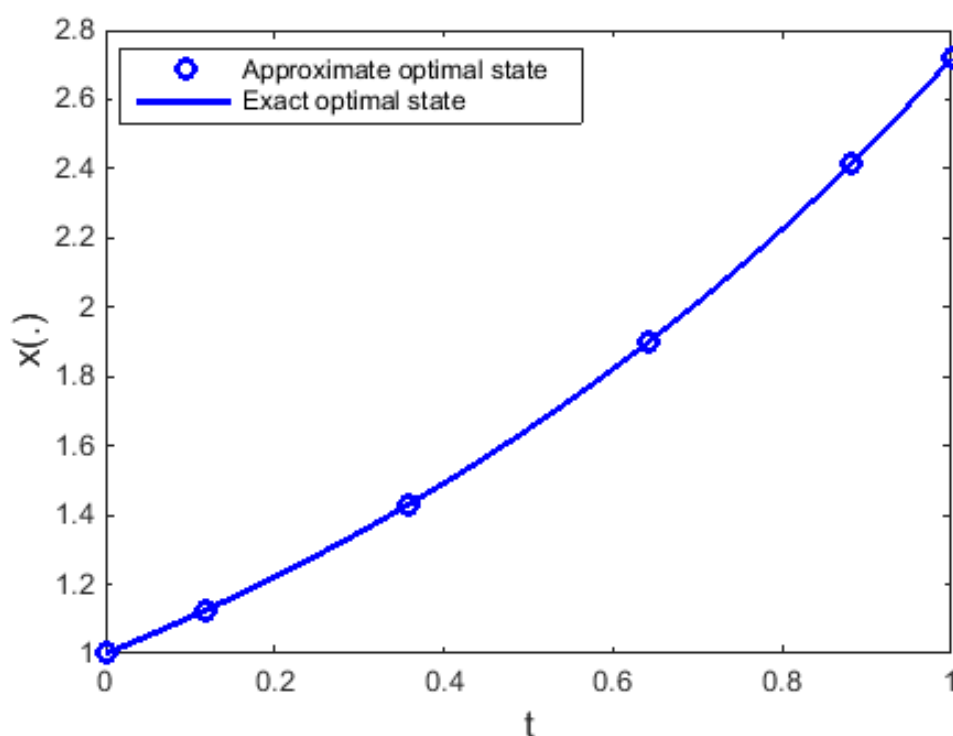
$$\min J_N = \lambda,$$

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^N \bar{x}_j D_{kj} = \frac{\pi}{\tau} \bar{u}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \sum_{j=0}^N \bar{y}_j D_{kj} = \frac{\pi}{\tau} \left(1 + \left(\bar{x}_k \cos\left(\frac{1}{\tau}(\tau_k + 1)\right) - \bar{u}_k \sin\left(\frac{1}{\tau}(\tau_k + 1)\right) \right)^2 \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \sum_{j=0}^N \bar{z}_j D_{kj} = \frac{1}{\tau} \left(1 - \left(\bar{x}_k - \sin\left(\frac{1}{\tau}(\tau_k + 1)\right) \right)^2 - \left(\bar{u}_k - \cos\left(\frac{1}{\tau}(\tau_k + 1)\right) \right)^2 \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, N, \\ \bar{y}_N - \lambda \bar{z}_N = 0, \quad \bar{x}_0 = \bar{y}_0 = \bar{z}_0 = 0. \end{cases}$$

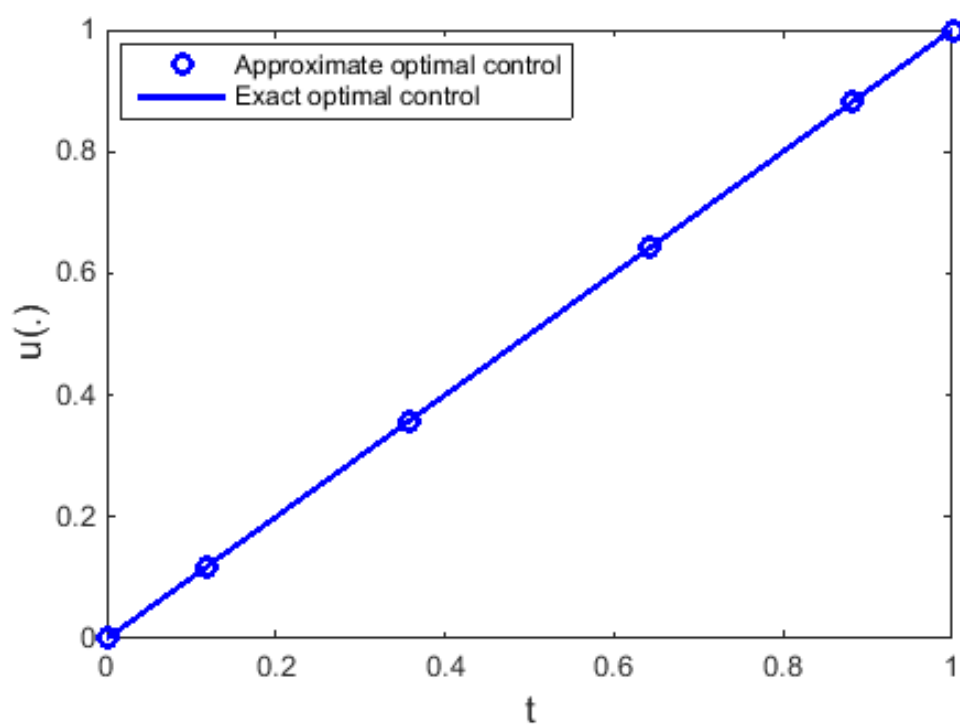
مساله DT را برای $N = 10$ حل کردیم و جواب بهینه تقریبی $(\bar{x}, \bar{u})$ را که در شکل‌های ۵.۴ و ۶.۴ ارائه شده‌اند، به دست آوردیم. علاوه بر این، در شکل‌های ۷.۴ و ۸.۴، خطای مطلق جواب بهینه تقریبی را نشان دادیم، در این جا

$$\lambda^* = J_1^* = 1 + 1.88 \times 10^{-9},$$

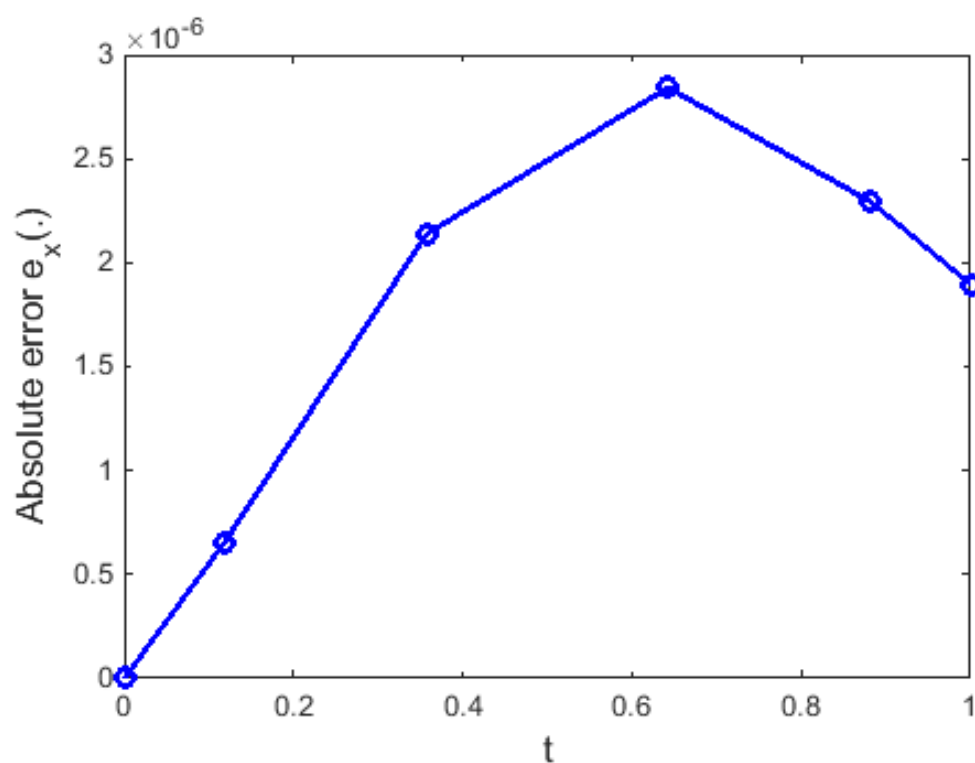
که مقداری نزدیک به مقدار بهینه دقیق $J^* = 1$ می‌باشد.



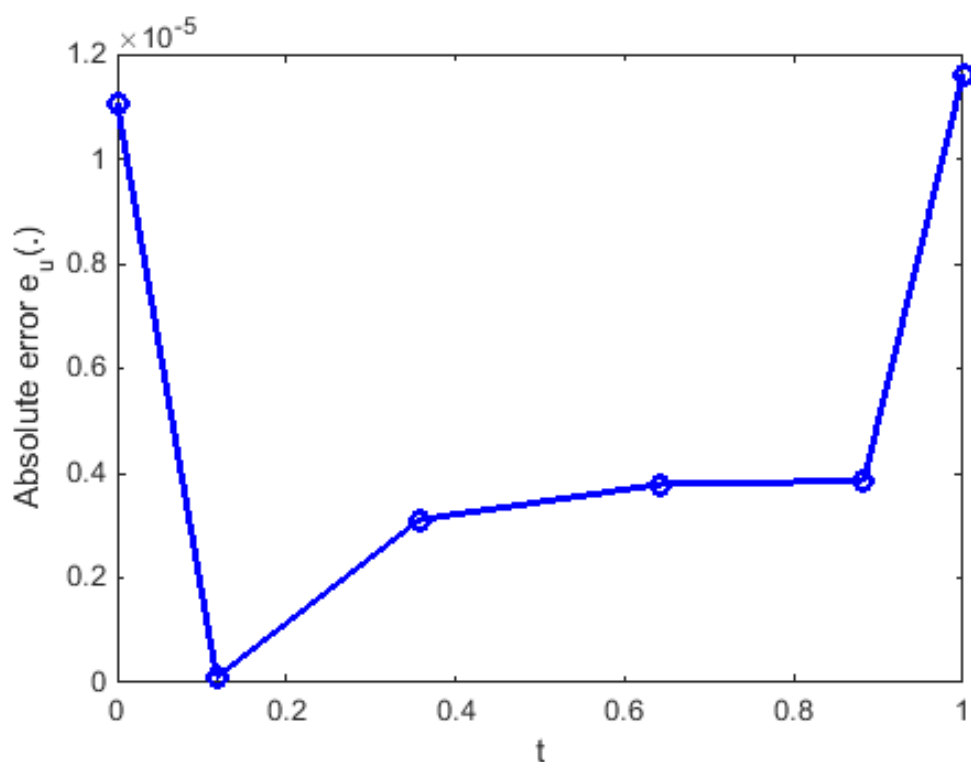
شکل ۱.۴: وضعیت بهینه تقریبی برای مثال (۱.۶.۴)



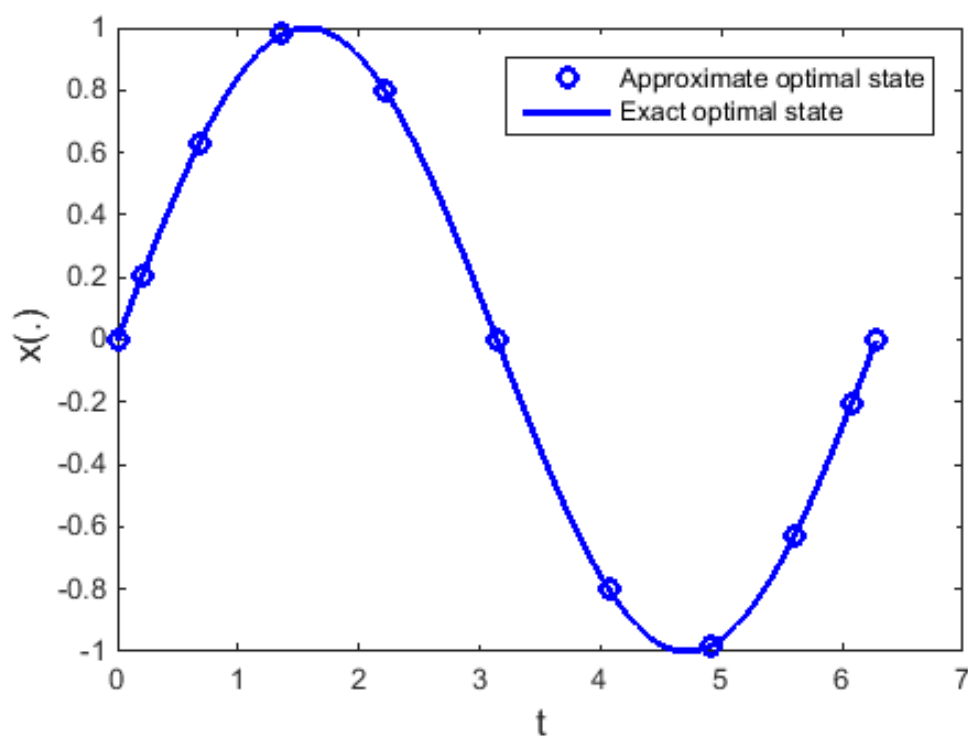
شکل ۲.۴: متغیر کنترل بهینه تقریبی برای مثال (۱.۶.۴)



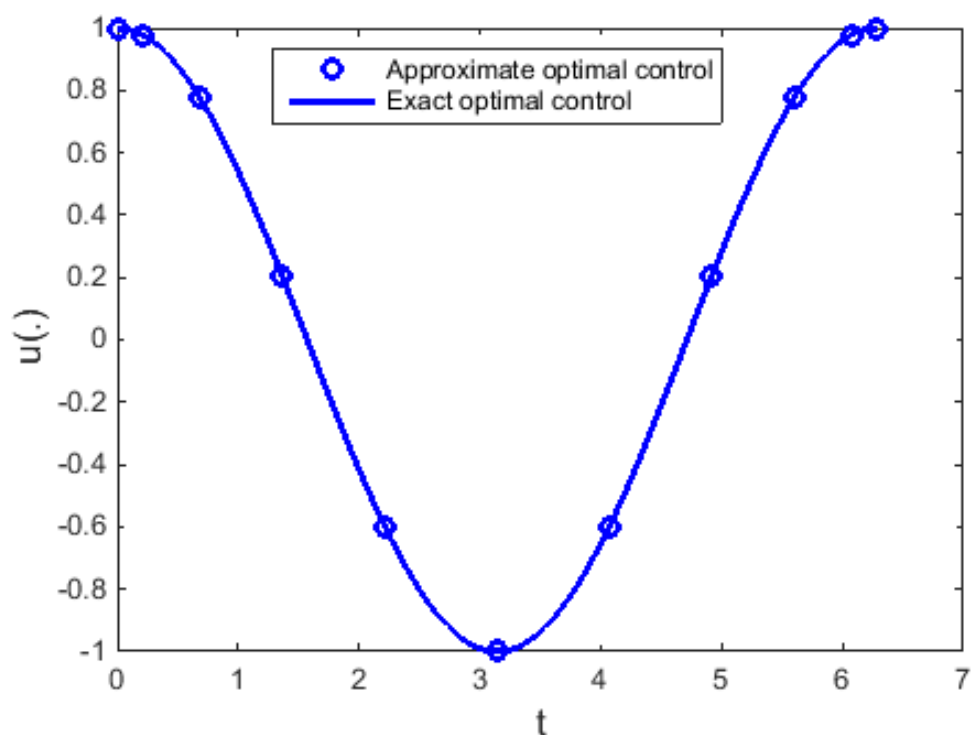
شکل ۳.۴: خطای مطلق برای وضعیت بهینه تقریبی به دست آمده برای مثال (۱.۶.۴)



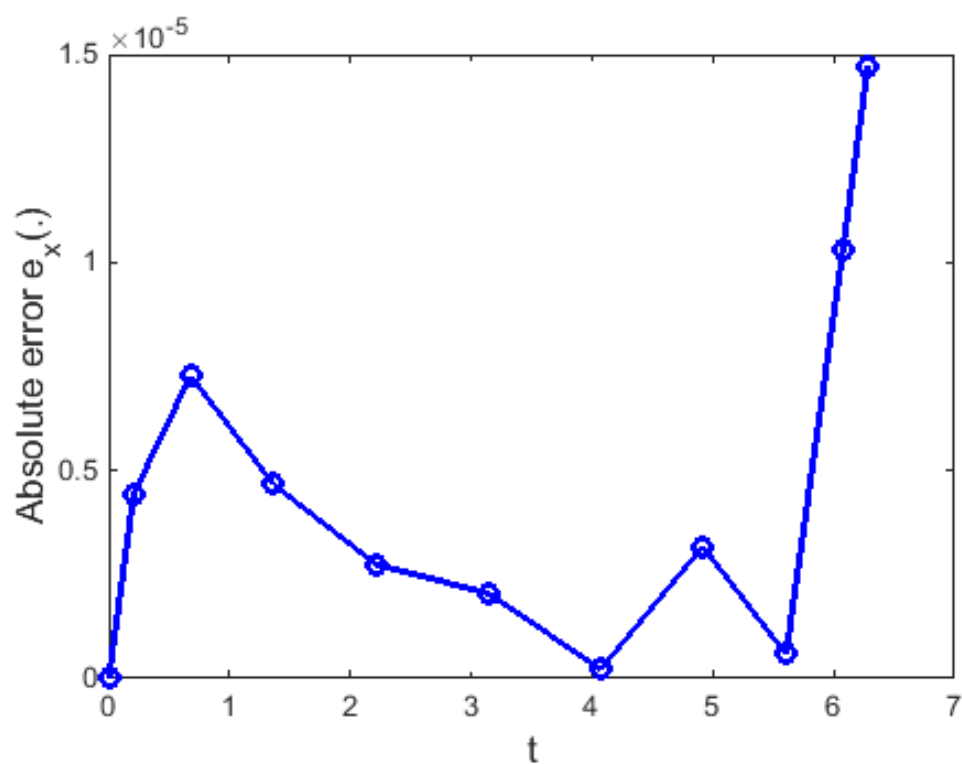
شکل ۴.۴: خطای مطلق کنترل بهینه تقریبی به دست آمده برای مثال (۱.۶.۴)



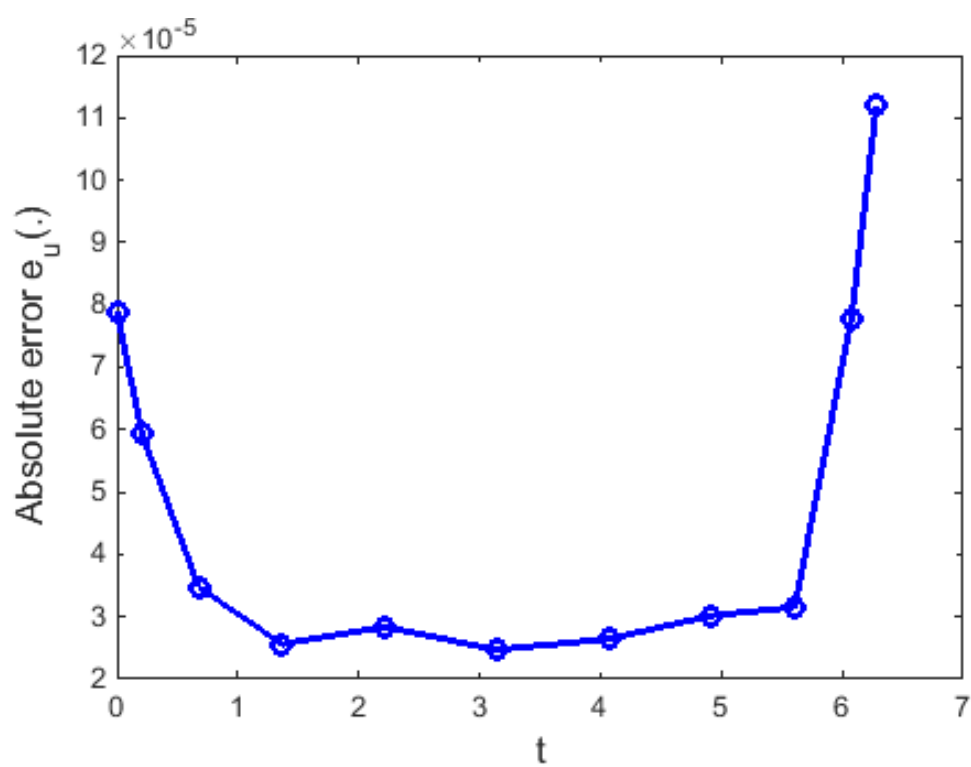
شکل ۵.۴: متغیر وضعیت بهینه تقریبی به دست آمده برای مثال (۲.۶.۴)



شکل ۶.۴: متغیر کنترل بهینه تقریبی به دست آمده برای مثال (۲.۶.۴)



شکل ۷.۴: خطای مطلق متغیر وضعیت بهینه تقریبی برای مثال (۲.۶.۴)



شکل ۸.۴: خطای مطلق متغیر کنترل بهینه تقریبی برای مثال (۲.۶.۴)

فصل ۵

نتیجه‌گیری

یک مساله کنترل بهینه کسری خطی را در نظر گرفتیم و آن را با استفاده از روش دینکل باخ حل کردیم. ساختار خاص تابع هدف و دینامیک مساله، اجازه دستیابی به یک جواب تقریباً صریح از مساله را می‌دهد. این روش می‌تواند در مورد مسائل با کنترل‌های بیشتر و یا متغیرهای وضعیت بیشتر مورد استفاده قرار گیرد. با یک متغیر حالت و چندین کنترل تمام زمان‌های سوئیچ را می‌توان به طور صریح به دست آورد. در مسائل دارای چندین متغیر وضعیت، زمان‌های سوئیچ می‌تواند محاسبه شوند اما به شکل بسته قابل نمایش نیستند. سپس یک طرح ترکیبی برای به دست آوردن جواب‌های تقریبی برای یک کلاس از کنترل بهینه کسری ارائه دادیم که با استفاده از مزایای رهیافت دینکل باخ با استفاده از موجک و نقاط هم محلی، الگوریتمی برای استخراج جواب‌های عددی نزدیک بهینه ارائه شد. دیدیم که اگر تعداد زیادی از نقاط هم‌پوشانی را انتخاب کنیم، ممکن است به جواب دقیق بهینه برسد و نیز مساله به مساله حداکثر رساندن تحت محدودیت‌های خطی کاهش می‌یابد. علاوه بر این براساس شرایط بهینگی سراسری و ویژگی‌های تابع شبه‌محدب یک الگوریتم مؤثر برای حل مساله در سطح سراسری به دست آمد و نتایج عددی برای نشان دادن قابلیت کاربرد الگوریتم پیشنهاد شد. نهایتاً یک رهیافت جدید برای تبدیل مسائل برنامه‌ریزی غیر خطی کسری زمان-پیوسته به شکل غیر کسری پیشنهاد کردیم. نشان دادیم که مساله غیر کسری را می‌توان با استفاده از روش شبه‌طیفی لژاندر با دقت نسبتاً خوبی حل کرد.

- [1] Almog, Y., and Levin, O. (1971). A class of fractional programming problems. *Operations Research*, 19(1), 57-67.
- [2] Bector, C. R. (1973). Duality in nonlinear fractional programming. *Zeitschrift für Operations Research*, 17(5), 183-193.
- [3] Benson, D. A., Huntington, G. T., Thorvaldsen, T. P., and Rao, A. V. (2006). Direct trajectory optimization and costate estimation via an orthogonal collocation method. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 29(6), 1435-1440.
- [4] Benson, H. P. (2002). Global optimization algorithm for the nonlinear sum of ratios problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 112(1), 1-29.
- [5] Bykadorov, I., Ellero, A., Funari, S., and Moretti, E. (2009). Dinkelbach approach to solving a class of fractional optimal control problems. *Journal of optimization theory and applications*, 142(1), 55-66.
- [6] Bykadorov, I., Ellero, A., Funari, S., and Moretti, E. (2009). Dinkelbach approach to solving a class of fractional optimal control problems. *Journal of optimization theory and applications*, 142(1), 55-66.
- [7] Cambini, A., Castagnoli, E., Martein, L., Mazzoleni, P., and Schaible, S. (Eds.). (2012). *Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications: Proceedings of the International Workshop on "Generalized Concavity, Fractional Programming and Economic Applications" Held at the University of Pisa, Italy, May 30–June 1, 1988 (Vol. 345)*. Springer Science and Business Media.
- [8] Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., and Thomas Jr, A. (2012). *Spectral methods in fluid dynamics*. Springer Science and Business Media.
- [9] Craven, B. D. (1988). *Fractional programming (Vol. 4)*. Heldermann.

- [10] Dai, R., and Cochran, J. E. (2009). Wavelet collocation method for optimal control problems. *Journal of optimization theory and applications*, 143(2), 265-278.
- [11] Dinkelbach, W. (1967). On nonlinear fractional programming. *Management science*, 13(7), 492-498.
- [12] Dinkelbach, W. (1967). On nonlinear fractional programming. *Management science*, 13(7), 492-498.
- [13] Elnagar, G., Kazemi, M. A., and Razzaghi, M. (1995). The pseudospectral Legendre method for discretizing optimal control problems. *IEEE transactions on Automatic Control*, 40(10), 1793-1796.
- [14] Enkhbat, R., and Bayartugs, T. (2013). Semidefinite Quasiconcave programming. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 87(4), 547-557.
- [15] Enkhbat, R., and Ibaraki, T. (2003). On the maximization and minimization of a quasiconvex function. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, 4(1), 43-76.
- [16] Fahroo, F., and Ross, I. M. (2001). Costate estimation by a Legendre pseudospectral method. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 24(2), 270-277.
- [17] Fahroo, F., and Ross, I. M. (2002). Direct trajectory optimization by a Chebyshev pseudospectral method. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 25(1), 160-166.
- [18] Feichtinger, G., Hartl, R. F., and Sethi, S. P. (1994). Dynamic optimal control models in advertising: recent developments. *Management Science*, 40(2), 195-226.
- [19] Floudas, C. A., and Pardalos, P. M. (Eds.). (2001). *Encyclopedia of optimization* (Vol. 1). Springer Science and Business Media.
- [20] Françolin, C. C., Benson, D. A., Hager, W. W., and Rao, A. V. (2015). Costate approximation in optimal control using integral Gaussian quadrature orthogonal collocation methods. *Optimal Control Applications and Methods*, 36(4), 381-397.
- [21] Freud, G. (2014). *Orthogonal polynomials*. Elsevier.
- [22] Garg, D., Patterson, M. A., Françolin, C., Darby, C. L., Huntington, G. T., Hager, W. W., and Rao, A. V. (2011). Direct trajectory optimization and costate estimation of finite-horizon and infinite-horizon optimal control problems using a Radau pseudospectral method. *Computational Optimization and Applications*, 49(2), 335-358.

- [23] Gong, Q., Ross, I. M., Kang, W., and Fahroo, F. (2008). Connections between the covector mapping theorem and convergence of pseudospectral methods for optimal control. *Computational Optimization and Applications*, 41(3), 307-335.
- [24] Guf, J. S., and Jiang, W. S. (1996). The Haar wavelets operational matrix of integration. *International Journal of Systems Science*, 27(7), 623-628.
- [25] Hadjisavvas, N., Komlósi, S., and Schaible, S. S. (Eds.). (2006). *Handbook of generalized convexity and generalized monotonicity* (Vol. 76). Springer Science and Business Media.
- [26] Horst, R., and Tuy, H. (2013). *Global optimization: Deterministic approaches*. Springer Science and Business Media.
- [27] Ibaraki, T. (1983). Parametric approaches to fractional programs. *Mathematical Programming*, 26(3), 345-362.
- [28] Konno, H., and Kuno, T. (1990). Generalized linear multiplicative and fractional programming. *Annals of Operations Research*, 25(1), 147-161.
- [29] Liang, Z. A., Huang, H. X., and Pardalos, P. M. (2001). Optimality conditions and duality for a class of nonlinear fractional programming problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 110(3), 611-619.
- [30] Long, X. J., and Quan, J. (2011). Optimality conditions and duality for minimax fractional programming involving nonsmooth generalized univexity. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 1(3), 361.
- [31] Lur, Y. Y., Ho, W. H., Lu, T. H., and Wen, C. F. (2014). Approximate solutions for continuous-time quadratic fractional programming problems. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 18(6), 1791-1826.
- [32] Nerlove, M., and Arrow, K. J. (1962). Optimal advertising policy under dynamic conditions. *Economica*, 129-142.
- [33] Pardalos, P. M., and Phillips, A. T. (1991). Global optimization of fractional programs. *Journal of Global Optimization*, 1(2), 173-182.
- [34] Polak, E. (1997). Algorithms and consistent approximations. *Optimization, Applied Mathematical Sciences*, 124.

-
- [35] Rentsen, E., Zhou, J., and Teo, K. L. (2016). A global optimization approach to fractional optimal control. *Journal of Industrial and Management Optimization (JIMO)*, 12(1), 73-82.
- [36] Schaible, S. (1981). Fractional programming: applications and algorithms. *European Journal of Operational Research*, 7(2), 111-120.
- [37] Schaible, S., and Shi, J. (2004). Recent developments in fractional programming: single-ratio and max-min case. *Nonlinear analysis and convex analysis*, 493506.
- [38] Sethi, S. P. (1977). Dynamic optimal control models in advertising: a survey. *SIAM review*, 19(4), 685-725.
- [39] Skandari, M. N., and Ghaznavi, M. (2018). A numerical method for solving shortest path problems. *Calcolo*, 55(1), 14.
- [40] Stancu-Minasian, I. M. (2012). Fractional programming: theory, methods and applications (Vol. 409). Springer Science and Business Media.111
- [41] Stancu-Minasian, I. M. (2012). Fractional programming: theory, methods and applications (Vol. 409). Springer Science and Business Media.
- [42] Stancu-Minasian, I. M. (2012). Fractional programming: theory, methods and applications (Vol. 409). Springer Science and Business Media.
- [43] Stancu-Minasian, I. M., and Tigan, S. (2000). Continuous time linear-fractional programming. The minimum-risk approach. *RAIRO-Operations Research-Recherche Opérationnelle*, 34(4), 397-409.
- [44] Teo, K. L., Goh, C., and Wong, K. (1991). A unified computational approach to optimal control problems.
- [45] Wen, C. F., and Wu, H. C. (2011). Using the Dinkelbach-type algorithm to solve the continuous-time linear fractional programming problems. *Journal of Global Optimization*, 49(2), 237-263.
- [46] Wen, C. F., and Wu, H. C. (2012). Approximate solutions and duality theorems for continuous-time linear fractional programming problems. *Numerical functional analysis and optimization*, 33(1), 80-129.
- [47] Wen, C. F., and Wu, H. C. (2012). Using the parametric approach to solve the continuous-time linear fractional max–min problems. *Journal of Global Optimization*, 54(1), 129-153.

- [48] Wen, C. F., Lur, Y. Y., and Lai, H. C. (2012). Approximate solutions and error bounds for a class of continuous-time linear programming problems. *Optimization*, 61(2), 163-185.
- [49] Wen, C. F., Lur, Y. Y., and Wu, Y. K. (2010). A recurrence method for a special class of continuous time linear programming problems. *Journal of Global Optimization*, 47(1), 83-106.
- [50] Wen, C. F., Lur, Y. Y., Guu, S. M., and Lee, E. S. (2010). On a recurrence algorithm for continuous-time linear fractional programming problems. *Computers and mathematics with applications*, 59(2), 829-852.
- [51] Zalmai, C. J. (1996). Continuous-time generalized fractional programming. *Optimization*, 36(3), 195-217.
- [52] Zalmai, G. J. (1990). Optimality conditions and duality for a class of continuous-time generalized fractional programming problems. *Journal of mathematical analysis and applications*, 153(2), 356-371.
- [53] Zalmai, G. J. (1997). Optimality conditions and duality models for a class of nonsmooth constrained fractional optimal control problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 210(1), 114-149.
- [54] Zhang, A., Hayashi, S. (2011). Celis-Dennis-Tapia based approach to quadratic fractional programming problems with two quadratic constraints. *Numer. Algebra Control Optim*, 1(1), 83-98.

Aabstract

In this thesis we consider time-continuous linear and nonlinear Fractional programming problems. These problems include a dynamical equation and an objective functional where the objective functional is given by the ratio of two integrals. First Dinkelbach approach is considered for time-continuous linear Fractional programming problems. With this approach, the problem can be taken out the fraction form and converted into equivalent optimal control problems that includes a parameter. Then a wavelets-based iterative method is proposed to solve these problems. Moreover, a global optimization approach is given to numerically solve a class of nonlinear fractional programming problems. Finally, we propose a new pseudo-spectral method to to solve general form of these problems and show the efficiency of the approach by numerical examples.

Keywords: Dinkelbach approach, global optimization approach, linear fractional programming, pseudospectral method, nonlinear fractional programming.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Optimization

**An approache for continuous-time fractional
programming**

By: Somayeh Dehnoee

Supervisor

Mohammad Hadi Noori Skandari

December 2020