دانشگاه صنعتی شاهرود
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی محض

پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی

عنوان

قانون ترتیب عکس برای معکوس های تعمیم یافته مور-پنروز

نگارش

بهناز احمدی بنکدار

استاد راهنما

دکتر کامران شریفی

استاد مشاور

دکتر مهدی ایرانمنش

شهریور ۱۳۹۰

تقدیم به....

صفحهٔ تصویب نامه توسط هیأت داوران (فرم پیوست ۳ یا ۴ با امضای اصل هیأت داوران مورد قبول است)

قدردانی

نتلنتلئتلغنتذ

چکیده

در این پایان نامه به بیان تعاریف و قضایای مهم در رابطه با قانون ترتیب عکس برای معکوس مور-پنروز عملگرها بر فضاهای هیلبرت می پردازیم و شکل ماتریسی این عملگرها و معکوس مور-پنروز آن ها را بررسی می کنیم. هم چنین شرایط لازم و کافی برای اینکه قانون ترتیب عکس سه گانه برای ماتریس ها برقرار باشد ارائه می دهیم و تعدادی از حالت های خاص آن را بررسی می کنیم.

واژه‌های کلیدی: معکوس مور-پنروز، قانون ترتیب عکس و قانون ترتیب عکس سه گانه.

پیشگفتار

می دانیم که همه ی ماتریس های مربعی معکوس پذیر نیستند. در سال های اخیر محققان در زمینه های متنوعی از ریاضیات کاربردی به نوعی از معکوس جزئی یک ماتریس که معکوس ناپذیر یا حتی مستطیلی باشد نیاز پیدا کرده اند. برای این منظور نوعی معکوس به نام معکوس تعمیم یافته معرفی شده است که اگر A ماتریس دلخواه باشد ماتریس B که در شرط $ABA = A$ صدق می کند معکوس تعمیم یافته می گویند که در برخی موارد به معکوس معمولی شبیه است.

پنروز [۱] در سال ۱۹۵۵ نشان داد که برای هر ماتریس متناهی A با درایه های مختلط یک ماتریس B وجود دارد که در چهار معادله زیر صدق می کند:

۱) $ABA = A$ ۲) $BAB = B$ ۳) $(AB)^* = AB$ ۴) $(BA)^* = BA$

چنین ماتریسی، معکوس مور-پنروز A نامیده می شود و با $A^\dagger$ نمایش داده می شود.

اگر a و b عناصر معکوس پذیر یک نیم گروه باشند آن گاه قاعده $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ قانون ترتیب عکس برای معکوس معمولی نامیده می شود.

در ابتدا گرویل [۲] در سال ۱۹۶۶ در [۱۳] شرایط لازم و کافی برای برقراری قانون ترتیب عکس دوگانه $(AC)^\dagger = C^\dagger A^\dagger$ که در آن A و C ماتریس های مختلط هستند، ارائه داد. این نتایج توسط بولدین [۳] [۴، ۵] و ایزومینو [۴] [۱۷] برای عملگرهای خطی کراندار روی فضاهای هیلبرت تعمیم داده شدند. بعدها ایزومینو در [۱۸] قانون ترتیب عکس را برای معکوس مور-پنروز در حلقه ها اثبات کرد.

تیان [۵] در [۲۳] نتایج جالبی در رابطه با مجموعه های معکوس های تعمیم یافته ماتریس های مستطیلی مختلط در فضای متناهی البعد بدست آورد. همچنین می توانید نتایج جالبی در رابطه با معکوس مور پنروز در [۲، ۸، ۱۰، ۲۲، ۲۴] مشاهده کنید.

---
[۱] Penrose
[۲] Greville
[۳] Bouldin
[۴] Izumino
[۵] Tian

در این پایان نامه، فصل اول به بیان تعاریف و قضایایی اختصاص داده شده است که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می گیرند. در فصل دوم، شکل ماتریسی عملگر خطی کراندار با برد بسته و معکوس مور-پنروز آن را مورد بررسی قرار می دهیم. در فصل سوم، نتایج بدست آمده از قانون ترتیب عکس برای معکوس مور-پنروز را بیان می کنیم و در نهایت در فصل آخر شرایط لازم و کافی برای اینکه قانون ترتیب عکس سه گانه $(ABC)^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger$ برای ماتریس ها برقرار باشد ارائه می دهیم و تعدادی از حالت های خاص آن را بررسی می کنیم.

فهرست مطالب

ر

فصل ۱

پیش نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ نمادگذاری

در این پایان نامه از نمادهای زیر استفاده می شود:

A^*	عملگر الحاق
$A^\dagger$	معکوس مور-پنروز
A^-	معکوس درونی A
A^+	معکوس بازتابی A
$A^{(i,j,...,k)}$	$\{i, j, ..., k\}$ - معکوس A
$\|A\|$	نرم عملگر A
$[A, B]$	جابه جاگر A و B
$\langle x, y\rangle$	حاصل ضرب درونی x و y
$\mathbb{C}$	اعداد مختلط
$\mathbb{C}_r^{m\times n}$	ماتریس مختلط $m \times n$ با رتبه r
$D(A)$	دامنه عملگر A
$d(a, b)$	فاصله a تا b

I_n	ماتریس همانی $n \times n$
$L(X,Y)$	فضای تمام عملگرهای خطی کراندار از X به Y
$L(X)$	فضای تمام عملگرهای خطی کراندار از X به X
$M^{\perp}$	زیرفضای متعامد بر M
$N(A)$	فضای پوچ عملگر A
$R(A)$	برد عملگر A
$RS(A)$	فضای سطری ماتریس A
$\rho(A)$	رتبه ماتریس A
$X \oplus Y$	حاصل جمع مستقیم دو زیر فضا
∞	بی نهایت

۲.۱ تعاریف و قضایای مقدماتی

تعریف ۱.۲.۱. (نیم گروه)

یک مجموعه ناتهی S به همراه یک عمل دوتایی شرکت پذیر نیم گروه نامیده می شود.

تعریف ۲.۲.۱. (قانون ترتیب عکس)

اگر a و b عناصر معکوس پذیر یک نیم گروه باشند آنگاه قاعده ی $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ قانون ترتیب عکس برای معکوس نامیده می شود.

تعریف ۳.۲.۱. (فضای هیلبرت) ([۱۱])

فرض کنیم X یک فضای برداری مختلط باشد. یک ضرب داخلی روی X نگاشتی مانند $\langle x,y\rangle \longrightarrow (x,y)$ از $X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ است به طوری که :

الف) به ازای هر x، y و z از X و هر a و b از $\mathbb{C}$، $\langle ax+by,z\rangle = a\langle x,z\rangle + b\langle y,z\rangle$

ب) به ازای هر x و y از X، $\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$

ج) به ازای هر عضو ناصفر مانند x از X، $\langle x,x\rangle\in(0,\infty)$

هر فضای برداری مختلط مجهز به یک ضرب داخلی یک فضای پیش هیلبرت نامیده می شود. اگر X یک فضای پیش هیلبرت باشد، به ازای هر $x\in X$ تعریف می کنیم :

$$\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}.$$

فضای پیش هیلبرتی که نسبت به نرم $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ کامل باشد یک فضای هیلبرت نامیده می شود.

تعریف ۱.۲.۴. (حاصل جمع مستقیم فضاهای هیلبرت) ([۷])

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. در این صورت $X\oplus Y=\{(x_1,y_1)|x_1\in X,y_1\in Y\}$ را حاصل جمع مستقیم فضاهای هیلبرت می گویند که خودش همچنین یک فضای هیلبرت با حاصل ضرب درونی تعریف شده به صورت زیر برای هر $x_1,x_2\in X$ و $y_1,y_2\in Y$ است :

$$\langle(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle=\langle x_1,x_2\rangle+\langle y_1,y_2\rangle.$$

تعریف ۱.۲.۵. (عملگر خطی)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. نگاشت $T:X\longrightarrow Y$ خطی نامیده می شود هرگاه برای هر x و z در X و برای هر α و β در میدان اسکالرها داشته باشیم:

$$T(\alpha x+\beta z)=\alpha TX+\beta Tz.$$

تعریف ۱.۲.۶. (عملگر کراندار)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. عملگر خطی $A:X\longrightarrow Y$ کراندار نامیده می شود هرگاه یک ثابت $c\geqslant 0$ وجود داشته باشد به طوری که به ازای هر $x\in X$ داشته باشیم:

$$\|A(x)\|\le c\|x\|.$$

تعریف ۷.۲.۱. (متمم پذیر)

زیرمجموعه M از X متمم پذیر است هرگاه زیرمجموعه N از X موجود باشد به طوری که:

$$M \oplus N = X$$

تعریف ۸.۲.۱. (عملگر پوشا)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. عملگر $A : X \to Y$ پوشا نامیده می شود هرگاه برای هر $y \in Y$، $x \in X$ وجود داشته باشد به طوری که $A(x) = y$.

تعریف ۹.۲.۱. (برد عملگر)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. برد عملگر $A \in L(X, Y)$، زیرفضای $AX = \{Ax; x \in X\}$ است و با $R(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۱۰.۲.۱. (فضای پوچ عملگر)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. فضای پوچ عملگر $A \in L(X, Y)$، زیرفضای بسته $\{x \in X; Ax = ۰\}$ است و با $N(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۱۱.۲.۱. (عملگر خودتوان)

عملگر $A : X \longrightarrow X$ را خودتوان (تصویر) گوییم هرگاه در شرط $A^۲ = A$ صدق کند.

تعریف ۱۲.۲.۱. (عملگر الحاق)

هرگاه X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X, Y)$ آنگاه عملگر منحصر به فرد $B \in L(Y, X)$ که در تساوی $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ صدق می کند عملگر الحاق A می نامند و با $B = A^*$ نشان می دهند.

تعریف ۱۳.۲.۱. (عملگر تصویر متعامد)

عملگری که در شرط های $P^۲ = P$ و $P^* = P$ صدق کند عملگر تصویر متعامد می نامند.

تعریف ۱.۲.۱۴. (معکوس تعمیم یافته یک ماتریس)

یک معکوس تعمیم یافته برای ماتریس A، ماتریسی مانند B است که در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای یک رده بزرگتری از رده ماتریس های معکوس پذیر موجود باشد.

۲)تعدادی از خاصیت های معکوس معمولی را داشته باشد.

۳) وقتی A معکوس پذیر باشد به معکوس معمولی تبدیل شود.

با توجه به این شرایط یک ماتریس تعمیم یافته A، هر ماتریسی مانند B است که در شرط $ABA = A$ صدق کند.

تعریف ۱.۲.۱۵. (ماتریس الحاق)

ترانهاده مزدوج ماتریس $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریس $A^* = [\overline{a_{ji}}]_{n\times m}$ می باشد، که به آن ماتریس الحاق گویند.

تعریف ۱.۲.۱۶. (ماتریس هرمیتی)

ماتریس مربعی که $A = A^*$ باشد را ماتریس هرمیتی (خودالحاق) گویند.

تعریف ۱.۲.۱۷. (معادلات پنروز [1]) ([۲])

پنروز در سال ۱۹۵۵ نشان داد که برای هر ماتریس متناهی A با درایه های مختلط، ماتریسی مانند B موجود است که در چهار معادله زیر صدق می کند و معادله های پنروز می نامیم :

۱) $ABA = A$

۲) $BAB = B$

۳) $(AB)^* = AB$

۴) $(BA)^* = BA$

[1] Penrose equation

تعریف ۱۸.۲.۱. $\{i,j,...,k\}$ **- معکوس** A

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. برای هر $A\in L(X,Y)$، فرض کنیم $A\{i,j,...,k\}$ مجموعه عملگرهای $B\in L(Y,X)$ را که در معادله های $i,j,...,k$ (از تعریف ۱۷.۲.۱) صدق می کند نشان دهد. به طور مثال $A\{۱,۲,۳\}$ یعنی مجموعه عملگرهایی مانند B که در معادلات ۱، ۲ و ۳ از تعریف فوق صدق می کنند.

عملگر $B\in A\{i,j,...,k\}$ یک $\{i,j,...,k\}$ - معکوسA نامیده می شود و با $A^{(i,j,...,k)}$ نشان می دهند.

تعریف ۱۹.۲.۱. (معکوس مور-پنروز [۲])

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. معکوس مور-پنروز $A\in L(X,Y)$، عملگر $B\in L(Y,X)$ است که در معادلات پنروز صدق می کند و آن را با $A^{\dagger}$ نشان می دهیم. اگر A معکوس پذیر باشد واضح است که $A^{\dagger}=A^{-۱}$.

تعریف ۲۰.۲.۱. (زیر فضاهای متعامد)

زیر فضاهای M و N را متعامد می نامند، هرگاه به ازای هر $m\in M$ و $n\in N$ داشته باشیم $\langle m,n\rangle=۰$ و آن را با $M\perp N$ نشان می دهیم.

تعریف ۲۱.۲.۱. (ایزومتری)

فرض کنیم H و K فضاهای متریک با متر d_H و d_K باشند. یک نگاشت $A:H\longrightarrow K$ ایزومتری نامیده می شود هرگاه برای هر $a,b\in H$ داشته باشیم:

$$d_K(A(a),A(b))=d_H(a,b).$$

تعریف ۲۲.۲.۱. (ایزومتری جزیی روی فضاهای هیلبرت)

[۲] Moor-Penrose inverse

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. عملگر $A \in L(H,K)$ یک ایزومتری جزیی نامیده می شود هرگاه A یک ایزومتری روی $M = (N(A))^{\perp}$ باشد.

تعریف ۲۳.۲.۱. (معکوس درونی)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X,Y)$. $B \in L(Y,X)$ معکوس درونی A نامیده می شود هرگاه در شرط $ABA = A$ صدق کند و آن را با A^{-} نشان می دهند.

تعریف ۲۴.۲.۱. (معکوس بازتابی)

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X,Y)$. $B \in L(Y,X)$ معکوس بازتابی A نامیده می شود هرگاه در شرط های $ABA = A$ و $BAB = B$ صدق کند و آن را با A^{+} نشان می دهیم.

تعریف ۲۵.۲.۱. (ماتریس EP)

هرگاه $R(A) = R(A^{*})$ باشد ماتریس A، ماتریس EP نامیده می شود.

تعریف ۲۶.۲.۱. (جا به جاگر دو عملگر)

فرض کنیم X فضای هیلبرت باشد و $A, B \in L(X)$. جابه جاگر A و B را به صورت $[A,B]$ نشان می دهند و مطابق زیر بدست می آید:

$$[A,B] = AB - BA.$$

تعریف ۲۷.۲.۱. (ماتریس معکوس پذیر)

ماتریس $n \times n$ معکوس پذیر نامیده می شود هرگاه ماتریسی $n \times n$ مانند B وجود داشته باشد، بطوریکه:

$$AB = BA = I_n.$$

تعریف ۲۸.۲.۱. (ماتریس یکانی)

هرگاه I_n یک ماتریس همانی $n \times n$ باشد، ماتریس $U \in \mathbb{C}^{m\times n}$ که در شرط $U^*U = I_n$ صدق کند ماتریس یکانی نامیده می شود.

تعریف ۲۹.۲.۱. (فضای سطری)

هرگاه $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ باشد، فضای برداری تولید شده توسط بردارهای سطری ماتریس A، فضای سطری ماتریس A نامیده می شود و با $RS(A)$ نشان می دهند.

تعریف ۳۰.۲.۱. رتبه ماتریس ([۳])

هرگاه $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ باشد، بعد برد A را رتبه ماتریس A می نامند و آن را با $\rho(A)$ نشان می دهند.

قضیه ۳۱.۲.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. $A \in L(X,Y)$ و $M = N(A)^\perp$ باشد. بنابراین A ایزومتری جزئی است اگر و تنها اگر A^*A یک عملگر تصویر از X به M باشد.

اثبات . به مرجع ([۶]) مراجعه شود.

■

قضیه ۳۲.۲.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند در این صورت عملگر $A \in L(X,Y)$ دارای برد بسته است اگر و فقط اگر $c > ۰$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in X$

$$\|Ax\| \geq cd(x, N(A)).$$

اثبات . به مرجع [۱۲] مراجعه شود.

■

قضیه ۳۳.۲.۱. ([۱۲])

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X,Y)$ باشد. اگر یک زیرفضای $Y.$ از Y موجود باشد به طوری که $R(A) \oplus Y.$ بسته باشد، آن گاه A دارای برد بسته است.

اثبات. عملگر $A_0 : X\times Y_0 \longrightarrow Y$ را به صورت $A_0(x, y_0) = Ax+y_0$ تعریف می کنیم. فضای $X\times Y_0$ یک فضای هیلبرت با نرم $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$ می باشد. A_0 یک عملگر خطی است و $R(A_0) = R(A)\oplus Y_0$ که بنا به فرض بسته است. از طرفی $N(A_0) = N(A)\times\{0\}$. بنا به قضیه **۳۲.۲.۱**، $c > 0$ موجود است به طوری که برای هر $x \in X$ داریم:

$$\|Ax\| = \|A_0(x, 0)\| \geqslant cd((x, 0), N(A_0)) = cd(x, N(A))$$

$$\Longrightarrow \|Ax\| \geqslant cd(x, N(A)).$$

بنابراین بنا به همین قضیه $R(A)$ بسته است.

■

نتیجه ۳۴.۲.۱. اگر $R(A)$ متمم پذیر باشد آنگاه $R(A)$ بسته است.

اثبات . با توجه به قضیه **۳۳.۲.۱**، اگر $R(A)$ متمم پذیر باشد آنگاه بسته است.

■

قضیه ۳۵.۲.۱. ([۱۲])

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند. عملگر $A \in L(X, Y)$ معکوس تعمیم یافته دارد اگر و تنها اگر $N(A)$ و $R(A)$ به ترتیب در X و Y متمم پذیر باشند.

اثبات . اگر $X = X_0 \oplus N(A)$ و $Y = Y_0 \oplus R(A)$ باشد آنگاه عملگر $T : Y \longrightarrow X$ به طوری که $x_0 \in X$ و $y_0 \in Y_0$ و به صورت $T(Ax_0 \oplus y_0) = x_0$ تعریف شود، معکوس تعمیم یافته A می باشد.

برعکس، اگر $T \in L(Y, X)$ معکوس تعمیم یافته A باشد آنگاه AT و TA خودتوان می باشند زیرا

$$(AT)^2 = (ATA)T = AT \qquad \text{و} \qquad (TA)^2 = T(ATA) = TA.$$

از طرفی $Im(AT) \subset Im(A)$ و با توجه به اینکه $A = (AT)A$، لذا $ImA \subset Im(AT)$. بنابراین AT یک عملگر تصویر بر $R(A)$ است. به طور مشابه $N(A) \subset N(TA)$ و چون $A(TA) = A$، لذا نتیجه می گیریم $N(TA) \subset N(A)$. بنابراین TA یک عملگر تصویر است که فضای پوچ آن همان $N(A)$ می باشد. در این صورت $R(A)$ و $N(A)$ متمم پذیر هستند.

■

نتیجه ۳٦.۲.۱. اگر X و Y فضاهای هیلبرت باشند در این صورت $A \in L(X,Y)$ معکوس تعمیم یافته دارد اگر و تنها اگر $R(A)$ بسته باشد.

اثبات. با توجه به نتیجه **۳٤.۲.۱** و قضیه **۳۵.۲.۱**، A معکوس تعمیم یافته دارد اگر و تنها اگر $R(A)$ بسته باشد.

■

قضیه ۳۷.۲.۱. اگر X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X,Y)$ آنگاه

$$N(A) = R(A^*)^{\perp} \quad \text{و} \quad N(A^*) = R(A)^{\perp}.$$

اثبات. به مرجع [۲] مراجعه شود.

■

قضیه ۳۸.۲.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X,Y)$ دارای برد بسته باشد. در این صورت شرایط زیر برقرار است:

الف) $(A^\dagger)^\dagger = A$

ب) $A^{*\dagger} = A^{\dagger *}$

ج) $A^\dagger = (A^*A)^\dagger A^* = A^*(AA^*)^\dagger$

د) $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$

اثبات . به مرجع [۲] مراجعه شود.

■

قضیه ۳۹.۲.۱. اگر X و Y فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(X,Y)$ دارای برد بسته باشد در این صورت $A^* \in L(Y,X)$ دارای برد بسته است.

اثبات . به مرجع [۱۹] مراجعه شود.

■

لم ۴۰.۲.۱. اگر $R(A)$ بسته باشد آن گاه شرایط زیر برقرار است:

الف) $R(A) = R(AA^*)$

ب) $N(AA^*) = N(A^*)$

ج) $R(A^\dagger) = R(A^*)$

د) $N(A^\dagger) = N(A^*)$

اثبات . به مرجع [۲] مراجعه شود.

■

فصل ۲

نمایش ماتریسی عملگر های خطی کراندار با برد بسته

فرض کنیم X ، Y و Z فضاهای هیلبرت باشند و $L(X, Y)$ مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار از X به Y را نشان دهد. در این صورت معکوس مور-پنروز $A \in L(X, Y)$ عملگر $B \in L(Y, X)$ است که در معادلات پنروز صدق می کند:

(۱) $ABA = A$، (۲) $BAB = B$، (۳) $(AB)^* = (AB)$ و (۴) $(BA)^* = (BA)$.

معکوس مور-پنروز A وجود دارد اگر و تنها اگر $R(A)$ در Y بسته باشد (این نتیجه در فصل اول اثبات شده است.). معکوس مور-پنروز A منحصر به فرد است و با $A^\dagger$ نشان داده می شود.

در این فصل یک نمایش ماتریسی برای عملگر خطی کراندار با برد بسته ارائه می دهیم. این نمایش ماتریسی از تجزیه فضاهای هیلبرت به صورت حاصل جمع زیرفضاهای متعامد بدست می آید.

فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت و $A \in L(X, Y)$ باشد. اگر $X = K \oplus K^\perp$ و $Y = M \oplus M^\perp$ باشد، در این صورت A را می توانیم به صورت یک ماتریس ۲ × ۲ که درایه هایش عملگر است به صورت زیر بنویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$$

که در آن

$A_۱ \in L(K, M)$، $A_۲ \in L(K^{\perp}, M)$، $A_۳ \in L(K, M^{\perp})$ و $A_۴ \in L(K^{\perp}, M^{\perp})$. ([۷])

همچنین با توجه به این نمایش بلوکی، یک نمایش ماتریسی برای معکوس مور-پنروز A بدست می آوریم.

۱.۲ نمایش ماتریسی عملگرهای خطی کراندار دارای برد بسته و معکوس مور-پنروز آن ها

لم ۱.۱.۲. ([۹]) فرض کنیم X و Y فضاهای هیلبرت و $A \in L(X, Y)$ دارای برد بسته باشد. در این صورت $X = R(A^*) \oplus N(A)$ و $Y = R(A) \oplus N(A^*)$ و لذا A دارای یک تجزیه ماتریسی به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} A_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix}$$

که در آن $A_۱$ معکوس پذیر است و به علاوه داریم:

$$A^{\dagger} = \begin{bmatrix} A_۱^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix}.$$

اثبات . عملگر A نمایش ماتریسی به صورت زیر دارد:

$$A = \begin{bmatrix} A_۱ & A_۲ \\ A_۳ & A_۴ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix}$$

یعنی

$$A_۱ : R(A^*) \to R(A) \qquad A_۲ : N(A) \to R(A)$$

$$A_۳ : R(A^*) \to N(A^*) \qquad A_۴ : N(A) \to N(A^*).$$

بنابراین داریم:

$$A_۱^* : R(A) \to R(A^*) \qquad A_۲^* : R(A) \to N(A)$$

$$A_۳^* : N(A^*) \to R(A^*) \qquad A_۴^* : N(A^*) \to N(A).$$

در این صورت نتیجه می گیریم:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* & A_3^* \\ A_2^* & A_4^* \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix}.$$

از طرفی از $A^*(N(A^*)) = \{0\}$ داریم:

$$A_4^* = 0 \text{ و } A_3^* = 0 \Longrightarrow A_4 = 0 \text{ و } A_3 = 0.$$

همچنین $A_2 = 0$. بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

سپس چون $A_1 : R(A^*) \to R(A)$ و $R(A)$ بسته است، آنگاه A_1 معکوس پذیر است و در نتیجه داریم:

$$A_1^{-1} : R(A) \to R(A^*).$$

لذا $A_1^{-1} = A_1^\dagger$ و بنابراین داریم:

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix}.$$

■

لم ۲.۱.۲. ([۹]) فرض کنیم $A \in L(X, Y)$ دارای برد بسته باشد. X_1 و X_2 زیر فضاهای دو به دو متعامد بسته از X باشند، بطوریکه $X = X_1 \oplus X_2$. فرض کنیم Y_1 و Y_2 زیر فضاهای دو به دو متعامد و بسته از Y باشند بطوریکه $Y = Y_1 \oplus Y_2$. بنابراین عملگر A دارای نمایش ماتریسی زیر نسبت به مجموع های متعامد زیرفضاهای $X = X_1 \oplus X_2 = R(A^*) \oplus N(A)$ و $Y = Y_1 \oplus Y_2 = R(A) \oplus N(A^*)$ است :

(الف)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix}$$

که در این نمایش ماتریسی $D = A_1A_1^* + A_2A_2^*$ یک عملگر مثبت و معکوس پذیر است که $R(A)$ را به خودش تصویر می کند. همچنین داریم:

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1} & 0 \\ A_2^*D^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

(ب)

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A^*) \\ N(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

که در این نمایش ماتریسی $D = A_1^*A_1 + A_2^*A_2$ یک عملگر مثبت و معکوس پذیر است که $R(A^*)$ را به خودش تصویر می کند. همچنین داریم:

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} D^{-1}A_1^* & D^{-1}A_2^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

اثبات . قسمت **(الف)** را اثبات می کنیم برهان **(ب)** مشابه **(الف)** است.

عملگر A دارای یک نمایش ماتریسی به صورت زیر است:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix}.$$

یعنی

$$A_1 = A|_{X_1} : X_1 \to R(A) \qquad A_2 = A|_{X_2} : X_2 \to R(A)$$

$$A_3 = A|_{X_1} : X_1 \to N(A^*) \qquad A_4 = A|_{X_2} : X_2 \to N(A^*).$$

در نتیجه داریم:

$$A_1^* : R(A) \to X_1 \qquad A_2^* : R(A) \to X_2$$

$$A_3^* : N(A^*) \to X_1 \qquad A_4^* : N(A^*) \to X_2.$$

بنابراین:

$$A^* = \begin{bmatrix} A_1^* & A_3^* \\ A_2^* & A_4^* \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

از طرفی با توجه به $A^*(N(A^*)) = \{0\}$ داریم:

$$A_4^* = 0 \text{ و } A_3^* = 0 \Longrightarrow A_4 = 0 \text{ و } A_3 = 0.$$

بنابراین

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad A^* = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{bmatrix}.$$

توجه کنیم

$$AA^* = \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix}$$

که در آن $D = A_1A_1^* + A_2A_2^* : R(A) \to R(A)$ می باشد.

از $N(AA^*) = N(A^*)$ نتیجه می شود که D یک به یک است و از $R(AA^*) = R(A)$ نتیجه می شود که D پوشاست. بنابراین D معکوس پذیر است.

در آخر شکل معکوس مور-پنروز A را با استفاده از فرمول $A^\dagger = A^*(AA^*)^\dagger$ به صورت زیر بدست می آوریم:

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1} & 0 \\ A_2^*D^{-1} & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}.$$

■

لم ۳.۱.۲. ([۹، ۲۱])

فرض کنیم X، Y و Z فضاهای هیلبرت باشند و $A \in L(Y, Z)$ و $B \in L(X, Y)$ عملگرهایی دارای برد بسته باشند. بنابراین AB معکوس تعمیم یافته دارد اگر و تنها اگر $A^\dagger ABB^\dagger$ معکوس تعمیم یافته داشته باشد. به عبارت دیگر AB دارای برد بسته است اگر و تنها اگر $A^\dagger ABB^\dagger$ دارای برد بسته باشد.

اثبات . در ابتدا فرض کنیم V معکوس تعمیم یافته AB باشد. بنابراین

$$A^\dagger ABB^\dagger(BVA)A^\dagger ABB^\dagger = A^\dagger A(BB^\dagger B)V(AA^\dagger A)BB^\dagger = A^\dagger ABVABB^\dagger = A^\dagger ABB^\dagger.$$

به طور مشابه

$$BVA(A^\dagger ABB^\dagger)BVA = BVA.$$

در این صورت BVA معکوس تعمیم یافته $A^\dagger ABB^\dagger$ می باشد.

برعکس، فرض کنیم $U \in L(Y)$ معکوس تعمیم یافته $A^\dagger ABB^\dagger$ باشد. قرار می دهیم $P = BB^\dagger$ و $Q = A^\dagger A$ که به ترتیب تصویرهای متعامد بر $R(B)$ و $N(A)^\perp$ هستند. بنابراین

$$QPUQP = QP.$$

قرار دهیم $W = PUQ$ در این صورت داریم:

$$PWQ = W \qquad \text{و} \qquad QWP = QP$$

و از تساوی $QWP = QP$ نتیجه می گیریم:

$$Q(۱ - W)P = ۰.$$

بنابراین $۱ - W$، $R(P) = R(B)$ را بر $N(Q) = N(A)$ تصویر می کند. در این صورت داریم:

$$A(۱ - W)B = ۰$$

بنابراین

$$AB(B^\dagger WA^\dagger)AB = APWQB = AWB = AB.$$

از طرف دیگر داریم:

$$B^\dagger WA^\dagger = B^\dagger PUQA^\dagger = A^\dagger AA^\dagger UB^\dagger BB^\dagger = B^\dagger UA^\dagger$$

که در این صورت نتیجه می گیریم:

$$(B^\dagger WA^\dagger)AB(B^\dagger WA^\dagger) = B^\dagger UA^\dagger = B^\dagger WA^\dagger$$

یعنی $B^\dagger WA^\dagger$ معکوس تعمیم یافته AB است.

به عبارت دیگر با توجه به نتیجه **۱.۲.۳۶**، AB دارای برد بسته است اگر و تنها اگر $A^\dagger ABB^\dagger$ دارای برد بسته باشد.

■

فصل ۳

قانون ترتیب عکس

اگر a و b عناصر معکوس پذیر یک نیم گروه باشند آنگاه قاعده ی $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ قانون ترتیب عکس برای معکوس نامیده می شود. قانون ترتیب عکس برای معکوس های تعمیم یافته برقرار نیست. بنابراین تعدادی از مقاله ها شرایط هم ارز یا کافی را به طوری که قانون ترتیب عکس در بعضی حالت ها برقرار باشد، مورد بررسی قرار داده اند. ما در اینجا تحقیقات خود را به معکوس مور-پنروز عملگرهای خطی کراندار با برد بسته روی فضاهای هیلبرت اختصاص می دهیم.

در مرجع [۱۵] تیان [1] نتایج جالبی در رابطه با معکوس های تعمیم یافته برای ماتریس های مستطیلی بدست آورده است. توجه کنید که تیان نتایج خود را برای فضاهای متناهی البعد بدست آورده است. در این فصل تعدادی نتایج تیان را به فضاهای نامتناهی البعد تعمیم می دهیم و نتایج مربوط به قانون ترتیب عکس برای معکوس مور-پنروز عملگرها را اثبات می کنیم.

۱.۳ قانون ترتیب عکس برای معکوس مور-پنروز

قضیه ۱.۱.۳. فرض کنیم X، Y و Z فضاهای هیلبرت باشند و عملگرهای $A \in L(Y,Z)$، $B \in L(X,Y)$ و AB دارای برد بسته باشند. در اینصورت شرایط زیر هم ارز هستند:

(الف) $ABB^{\dagger}A^{\dagger}AB = AB$

[1] Tian

(ب) $B^\dagger A^\dagger ABB^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

(ج) $A^\dagger ABB^\dagger = BB^\dagger A^\dagger A$

(د) $A^\dagger ABB^\dagger$ خودتوان است.

(ه) $BB^\dagger A^\dagger A$ خودتوان است.

(و) $B^\dagger(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

(ز) $(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger A$

توجه کنید که $A^\dagger ABB^\dagger$ بر طبق لم **۳.۱.۲** برد بسته دارد. هم چنین A^*ABB^* دارای برد بسته است زیرا:

$R(B^*A^*A) = B^*(R(A^*A)) = B^*(R(A^*)) = R((AB)^*)$ بسته است بنابراین

$R(A^*ABB^*) = A^*A(R(BB^*)) = A^*A(R(B)) = R(A^*AB) = R((B^*A^*A)^*)$ بسته است.

اثبات . با استفاده از لم **۱.۱.۲** نتیجه می گیریم که عملگر B دارای شکل ماتریسی زیر است:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(B^*) \\ N(B) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(B) \\ N(B^*) \end{bmatrix}$$

که در آن B_1 معکوس پذیر است. بنابراین

$$B^\dagger = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(B) \\ N(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(B^*) \\ N(B) \end{bmatrix}.$$

حال از لم **۳.۱.۲** نتیجه می شود که عملگر A شکل ماتریسی زیر را دارد:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(B) \\ N(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix}$$

که در آن $D = A_1A_1^* + A_2A_2^*$ یک عملگر معکوس پذیر و مثبت در $L(R(A))$ است بنابراین

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1} & 0 \\ A_2^*D^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

و لذا داریم:

$$BB^\dagger = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(B) \\ N(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(B) \\ N(B^*) \end{bmatrix}$$

$$AA^\dagger = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(A) \\ N(A^*) \end{bmatrix}$$
$$A^\dagger A = \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 & A_1^* D^{-1} A_2 \\ A_2^* D^{-1} A_1 & A_2^* D^{-1} A_2 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(B) \\ N(B^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(B) \\ N(B^*) \end{bmatrix}.$$

بنا بر لم **۳.۱.۲** چون AB دارای برد بسته است لذا $A^\dagger ABB^\dagger$ دارای برد بسته است. بنابراین

$A^\dagger ABB^\dagger = \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 & 0 \\ A_2^* D^{-1} A_1 & 0 \end{bmatrix}$ و $BB^\dagger A^\dagger A = \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 & A_1^* D^{-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

حال بنا بر **(الف)** و با توجه به آنچه گفته شد گزاره های زیر هم ارز هستند:

$$ABB^\dagger A^\dagger AB = AB$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 & A_1^* D^{-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_1 A_1^* D^{-1} A_1 B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow A_1 A_1^* D^{-1} A_1 B_1 = A_1 B_1$$

$$\Longleftrightarrow A_1 A_1^* D^{-1} A_1 = A_1. \tag{۱.۳}$$

بنابراین عبارت **(الف)** با (۱.۳) هم ارز است.

توجه کنید که (۱.۳) هم ارز است با :

$$A_1^* D^{-1} A_1 A_1^* = A_1^*. \tag{۲.۳}$$

با توجه به عبارت **(ب)** هم ارزی های زیر را داریم:

$$B^\dagger A^\dagger ABB^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 & 0 \\ A_2^* D^{-1} A_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} & 0 \\ A_2^* D^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} & 0 \\ A_2^* D^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1} = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow A_1^*D^{-1}A_1A_1^* = A_1^*.$$

بنابراین **(ب)** با (۲.۳) هم ارز است.

در این صورت نتیجه می گیریم:

(الف) $\Longleftrightarrow$ (۱.۳) $\Longleftrightarrow$ (۲.۳) $\Longleftrightarrow$ **(ب)**.

سپس با توجه به عبارت **(ج)** هم ارزی های زیر را داریم:

$$A^\dagger ABB^\dagger = BB^\dagger A^\dagger A$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow A_1^*D^{-1}A_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow A_2^*D^{-1}A_1 = 0. \tag{۳.۳}$$

بنابراین اگر **(ج)** برقرار باشد یعنی $A_2^*D^{-1}A_1 = 0$ پس $A_2A_2^*D^{-1}A_1 = 0$، لذا داریم:

$$(A_1A_1^* + A_2A_2^*)D^{-1} = I \Rightarrow A_1A_1^*D^{-1}A_1 + A_2A_2^*D^{-1}A_1 = A_1 \Longleftrightarrow A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1.$$

بنابراین (۱.۳) برقرار است.

برعکس، فرض کنیم که (۱.۳) برقرار باشد. بنابراین

$$A_2A_2^*D^{-1}A_1 = 0.$$

در این صورت داریم:

$$A_2A_2^*D^{-1}A_1 = 0 \Longrightarrow R(D^{-1}A_1) \subset N(A_2A_2^*) = N(A_2^*) \Longrightarrow A_2^*D^{-1}A_1 = 0.$$

بنابراین گزاره (۳.۳) برقرار است و در نتیجه **(ج)** برقرار است. تا اینجا ثابت کردیم که

(الف) $\Longleftrightarrow$ (۱.۳) $\Longleftrightarrow$ (۳.۳) $\Longleftrightarrow$ (ج)

و اما بنا بر **(د)** که $A^\dagger ABB^\dagger$ خودتوان است، گزاره های زیر هم ارز هستند:

$$(A^\dagger ABB^\dagger)^2 = A^\dagger ABB^\dagger \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1}A_1 & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1A_2^*D^{-1}A_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1^*D^{-1}A_1 \\ A_2^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_2^*D^{-1}A_1 \end{cases} . \tag{۴.۳}$$

بنابراین **(د)** با (۴.۳) هم ارز است.

اگر رابطه (۱.۳) بر قرار باشد آنگاه (۴.۳) نتیجه می شود. حال فرض کنیم رابطه (۴.۳) برقرار باشد سپس اولین معادله (۴.۳) را از چپ در A_1 و دومین معادله (۴.۳) را از چپ در A_2 ضرب می کنیم. مجموع این دو معادله جدید به صورت زیر تساوی (۱.۳) را نتیجه می دهد.

$$(A_1A_1^* + A_2A_2^*)(D^{-1}A_1A_1^*D^{-1}A_1) = (A_1A_1^* + A_2A_2^*)(D^{-1}A_1) \Longrightarrow A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1.$$

بنابراین

(الف) $\Longleftrightarrow$ (۱.۳) $\Longleftrightarrow$ (۴.۳) $\Longleftrightarrow$ (د).

به طور مشابه **(ه)** و (۴.۳) هم ارز هستند. پس داریم:

(د) $\Longleftrightarrow$ (۴.۳) $\Longleftrightarrow$ **(ه)**.

برای اینکه **(و)** را اثبات کنیم فرض می کنیم $Q = A^\dagger ABB^\dagger$. بنا بر لم **۳.۱.۲** می دانیم که Q برد بسته دارد. حال با توجه به تساوی $Q^\dagger = Q^*(QQ^*)^\dagger$ داریم:

$$(A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger = (BB^\dagger A^\dagger AA^\dagger ABB^\dagger)^\dagger BB^\dagger A^\dagger A = (BB^\dagger AA^\dagger BB^\dagger)BB^\dagger A^\dagger A$$

$$= \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^\dagger \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 & A_1^* D^{-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^* D^{-1} A_1 & A_1^* D^{-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger A_1^* D^{-1} A_1 & (A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger A_1^* D^{-1} A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

در این صورت با توجه به **(و)** و بنا بر آنچه گفته شد داریم:

$$B^\dagger (A^\dagger ABB^\dagger)^\dagger A^\dagger - B^\dagger A^\dagger = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} B_1^{-1}(A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger A_1^* D^{-1} - B_1^{-1} A_1^* D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Longleftrightarrow (A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger A_1^* = A_1^*. \tag{۵.۳}$$

حال می خواهیم (۱.۳) $\Longleftrightarrow$ (۵.۳) را اثبات کنیم. فرض کنیم $P = A_1^* D^{-1} A_1$ باشد. بنابراین

$$P^* = P.$$

در ابتدا (۱.۳) $\Longleftarrow$ (۵.۳) را اثبات می کنیم. داریم:

$$P^2 = A_1^* D^{-1} A_1 A_1^* D^{-1} A_1 = A_1^* D^{-1} A_1 = P$$

و

$$P = P^* = P^2 = P^\dagger.$$

بنابراین

$$(A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger A_1^* = A_1^* D^{-1} A_1 A_1^* = A_1^*.$$

سپس (۵.۳)$\Longleftarrow$(۱.۳) را اثبات می کنیم. در این حالت داریم:

$$(A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger A_1^* = A_1^* \Longrightarrow P^\dagger P = P.$$

از طرفی داریم:

$$PP^\dagger = (PP^\dagger)^* = (P^*)^\dagger P^* = P^\dagger P$$

و لذا

$$P^\dagger = P^\dagger P P^\dagger = PP^\dagger = P^\dagger P = P.$$

در این صورت نتیجه می گیریم:

$$A_1^* = (A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger A_1^* = A_1^* D^{-1} A_1 A_1^*.$$

بنابراین اثبات کردیم:

(الف) $\Longleftrightarrow$ (۱.۳) $\Longleftrightarrow$ (۵.۳) $\Longleftrightarrow$ **(و)**.

حال **(ز)** $\Longleftrightarrow$ **(و)** را اثبات می کنیم. مشابه نتایج بدست آمده از **(و)** داریم:

$$(A^\dagger A B B^\dagger)^\dagger - B B^\dagger A^\dagger A = 0$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger A_1^* D^{-1} A_1 = A_1^* D^{-1} A_1 \\ (A_1^* D^{-1} A_1)^\dagger A_1^* D^{-1} A_2 = A_1^* D^{-1} A_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow (A_۱^*D^{-۱}A_۱)^\dagger A_۱^* = A_۱^*.$$

بنابراین

(و) $\Longleftrightarrow$ (۵.۳) $\Longleftrightarrow$ **(ز)**.

■

قضیه ۲.۱.۳. فرض کنیم X، Y و Z فضاهای هیلبرت باشند و عملگرهای $A \in L(Y,Z)$، $B \in L(X,Y)$ و AB دارای برد بسته باشند. در این صورت عبارت های زیر برقرار است:

(الف)

$$AB(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger \Longleftrightarrow A^*AB = BB^\dagger A^*AB \Longleftrightarrow R(A^*AB) \subseteq R(B)$$

$$\Longleftrightarrow B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{۱,۲,۳\}.$$

(ب)

$$(AB)^\dagger AB = B^\dagger A^\dagger AB \Longleftrightarrow ABB^* = ABB^*A^\dagger A \Longleftrightarrow R(BB^*A^*) \subseteq R(A^*)$$

$$\Longleftrightarrow B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{۱,۲,۴\}.$$

(ج) شرایط زیر هم ارز هستند:

(د) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

(ه) $(AB)^\dagger AB = B^\dagger A^\dagger AB$ و $AB(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger$

(و) $ABB^* = ABB^*A^\dagger A$ و $A^*AB = BB^\dagger A^*AB$

(ز) $R(BB^*A^*) \subseteq R(A^*)$ و $R(A^*AB) \subseteq R(B)$

اثبات. فرض کنیم عملگرهای A و B دارای نمایش های ماتریسی مشابه قضیه قبل باشند. بنابراین تساوی های زیر برقرار است:

$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$، $(AB)^\dagger = \begin{bmatrix} (A_1B_1)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B^\dagger A^\dagger = \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(الف)

(۱) $AB(AB)^\dagger = ABB^\dagger A^\dagger \Longleftrightarrow A_1B_1(A_1B_1)^\dagger = A_1^\dagger A_1^* D^{-1}$.

در این جا چون $A_1B_1(A_1B_1)^\dagger = A_1A_1^*D^{-1}$ هرمیتی است، در این صورت داریم:

$$(A_1A_1^*D^{-1})^* = A_1A_1^*D^{-1}$$

بنابراین

$$[A_1A_1^*, D^{-1}] = 0.$$

(۲) $A^*AB = BB^\dagger A^*AB \Longleftrightarrow A_2^*A_1 = 0$.

برای اثبات هم ارزی بالا داریم:

$$A^*AB = BB^\dagger A^*AB$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_1^* & 0 \\ A_2^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^*A_1B_1 & 0 \\ A_2^*A_1B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow A_2^*A_1B_1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow A_2^*A_1 = 0.$$

(۳) $R(A^*AB) \subseteq R(B) \Longleftrightarrow BB^\dagger A^*AB = A^*AB$.

بنابراین **(۲)** $\Longleftrightarrow$ **(۳)** برقرار است.

(٤) $B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{1,2,3\} \Longleftrightarrow A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$ و $[A_1A_1^*, D^{-1}] = 0$.

برای اثبات هم ارزی بالا معادلات پنروز را به صورت زیر بررسی می کنیم:

$$B^{\dagger}A^{\dagger} \in (AB)\{۱,۲,۳\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_۱B_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_۱^{-۱}A_۱^{*}D^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_۱B_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_۱B_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix},$$

$$\left(\begin{bmatrix} A_۱B_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_۱^{-۱}A_۱^{*}D^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right)^{*} = \left(\begin{bmatrix} A_۱B_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_۱^{-۱}A_۱^{*}D^{-۱} & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right)$$

$$\Longleftrightarrow A_۱A_۱^{*}D^{-۱}A_۱ = A_۱,\ [A_۱A_۱^{*}, D^{-۱}] = ۰.$$

حال **(۱)** $\Longleftrightarrow$ **(۲)**، **(٤)** $\Longleftarrow$ **(۲)** و **(۱)** $\Longleftarrow$ **(٤)** را اثبات می کنیم.

توجه کنید که اگر $A_۱B_۱(A_۱B_۱)^{\dagger} = A_۱A_۱^{*}D^{-۱}$ را از چپ در $(A_۱B_۱)^{\dagger}$ ضرب کنیم در این صورت داریم:

$$(A_۱B_۱)^{\dagger} = (A_۱B_۱)^{\dagger}A_۱A_۱^{*}D^{-۱}.$$

حال گزاره های زیر هم ارز هستند:

$$(A_۱B_۱)^{\dagger} = (A_۱B_۱)^{\dagger}A_۱A_۱^{*}D^{-۱} \Longleftrightarrow (A_۱B_۱)^{\dagger}(A_۱A_۱^{*} + A_۲A_۲^{*}) = (A_۱B_۱)^{\dagger}A_۱A_۱^{*}$$

$$\Longleftrightarrow (A_۱B_۱)^{\dagger}A_۲A_۲^{*} = ۰ \Longleftrightarrow R(A_۲A_۲^{*}) \subset N((A_۱B_۱)^{\dagger}) \Longleftrightarrow R(A_۲) \subset N((A_۱B_۱)^{*}))$$

$$\Longleftrightarrow B_۱^{*}A_۱^{*}A_۲ = ۰ \Longleftrightarrow A_۱^{*}A_۲ = ۰ \Longleftrightarrow A_۲^{*}A_۱ = ۰.$$

بنابراین**(۱)** $\Longleftrightarrow$ **(۲)** برقرار است.

حال **(۱)** $\Longleftarrow$ **(٤)** را اثبات می کنیم. اگر $A_۱B_۱(A_۱B_۱)^{\dagger} = A_۱A_۱^{*}D^{-۱}$ را از راست در $A_۱B_۱$ ضرب کنیم داریم:

$$A_۱B_۱(A_۱B_۱)^{\dagger}A_۱B_۱ = A_۱A_۱^{*}D^{-۱}A_۱B_۱ \Longrightarrow A_۱B_۱ = A_۱A_۱^{*}D^{-۱}A_۱B_۱$$

$$\Longrightarrow A_1 = A_1 A_1^* D^{-1} A_1.$$

بنابراین **(٤)** برقرار است.

در پایان **(٤)** $\Longleftarrow$ **(۲)** را اثبات می کنیم.

اگر $A_1 A_1^* D^{-1} A_1 = A_1$ و $[A_1 A_1^*, D^{-1}] = 0$ باشد آنگاه $A_1 A_1^* A_1 = DA_1 = A_1 A_1^* A_1 + A_2 A_2^* A_1$.
در نتیجه داریم:

$$A_2 A_2^* A_1 = 0.$$

بنابراین $R(A_1) \subset N(A_2 A_2^*) = N(A_2^*)$ در نتیجه $A_2^* A_1 = 0$. بنابراین **(۲)** برقرار است.

(ب)

(۱) $(AB)^\dagger AB = B^\dagger A^\dagger AB \Longleftrightarrow (A_1 B_1)^\dagger A_1 B_1 = B_1^{-1} A_1^* D^{-1} A_1 B_1$.

برای اثبات هم ارزی بالا داریم:

$$(AB)^\dagger AB = B^\dagger A^\dagger AB$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} (A_1 B_1)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^{-1} A_1^* D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow (A_1 B_1)^\dagger A_1 B_1 = B_1^{-1} A_1^* D^{-1} A_1 B_1.$$

از طرفی چون $(A_1 B_1)^\dagger A_1 B_1$ هرمیتی است بنابراین $B_1^{-1} A_1^* D^{-1} A_1 B_1$ هرمیتی است، لذا

$$(B_1^{-1} A_1^* D^{-1} A_1 B_1)^* = B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 B_1 = B_1^{-1} A_1^* D^{-1} A_1 B_1.$$

حال تساوی آخر را از چپ در B_1 و از راست در B_1^* ضرب می کنیم، داریم:

$$B_1 B_1^* A_1^* D^{-1} A_1 = A_1^* D^{-1} A_1 B_1 B_1^*$$

بنابراین

$$[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0.$$

(۲) $ABB^* = ABB^*A^\dagger A \iff A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 = 0$ و $A_1B_1B_1^* = A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1$.

برای اثبات هم ارزی بالا داریم:

$$ABB^* = ABB^*A^\dagger A$$

$$\iff \begin{bmatrix}(A_1B_1)^\dagger & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1^* & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_1B_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1^* & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1^*D^{-1}A_1 & A_1^*D^{-1}A_2\\ A_2^*D^{-1}A_1 & A_2^*D^{-1}A_2\end{bmatrix}$$

$$\iff A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 = 0 \quad , \quad A_1B_1B_1^* = A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1.$$

(۳) $R(BB^*A^*) \subseteq R(A^*) \iff A^\dagger ABB^*A^* = BB^*A^*$.

بنابراین **(۲)** $\iff$ **(۳)** برقرار است.

(٤) $B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{1,2,4\} \iff A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$ و $[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$.

برای اثبات هم ارزی بالا معادلات پنروز را به صورت زیر بررسی می کنیم:

$$B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{1,2,4\}$$

$$\iff \begin{bmatrix}B_1A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B_1A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad ,$$

$$\left(\begin{bmatrix}B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)^* = \left(\begin{bmatrix}B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_1A_1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$\iff A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1 \quad , \quad [B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0.$$

حال **(۱)** $\Longleftarrow$ **(٤)** $\Longleftarrow$ **(۲)** $\Longleftarrow$ **(۱)** را اثبات می کنیم.

ابتدا فرض کنیم که **(۱)** برقرار باشد. اگر $(A_1B_1)^\dagger A_1B_1 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1$ را از چپ در A_1B_1 ضرب کنیم داریم:

$$A_1 = A_1A_1^*D^{-1}A_1.$$

بنابراین $[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$ و این یعنی **(٤)** برقرار است.

فرض کنیم **(٤)** برقرار باشد آنگاه داریم:

$$A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = A_1A_1^*D^{-1}A_1B_1B_1^* = A_1B_1B_1^*$$

و همچنین با توجه به اینکه

$$A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1 \Longleftrightarrow A_1^*D^{-1}A_2 = 0$$

لذا $A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 = 0$. در این صورت **(۲)** برقرار است.

برای اینکه **(۲)** $\Longleftarrow$ **(۱)** را اثبات کنیم، تساوی $A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = A_1B_1B_1^*$ را از چپ در $(A_1B_1)^\dagger$ ضرب می کنیم و بدست می آوریم:

$$(A_1B_1)^\dagger A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = (A_1B_1)^\dagger A_1B_1B_1^* \Longrightarrow B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = (A_1B_1)^\dagger A_1B_1B_1^*$$

$$\Longrightarrow B_1^*A_1^*D^{-1}A_1(B_1^*)^{-1} = (A_1B_1)^\dagger A_1B_1.$$

از طرفی چون $(A_1B_1)^\dagger A_1B_1$ هرمیتی است بنابراین

$$B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1 = (A_1B_1)^\dagger A_1B_1.$$

در این صورت **(۱)** برقرار است.

(ج)

برهان این قسمت از قسمت های **(الف)** و **(ب)** نتیجه می شود.

■

قضیه ۳.۱.۳. فرض کنیم X، Y و Z فضاهای هیلبرت باشند و عملگرهای $A \in L(Y,Z)$، $B \in L(X,Y)$ و AB دارای برد بسته باشند. در این صورت داریم:

(الف)

$$AB(AB)^{\dagger}A = ABB^{\dagger} \Longleftrightarrow A^{*}ABB^{\dagger} = BB^{\dagger}A^{*}A \Longleftrightarrow R(A^{*}AB) \subseteq R(B)$$

$$\Longleftrightarrow B^{\dagger}A^{\dagger} \in (AB)\{۱,۲,۳\}.$$

(ب)

$$B(AB)^{\dagger}AB = A^{\dagger}AB \Longleftrightarrow A^{\dagger}ABB^{*} = BB^{*}A^{\dagger}A \Longleftrightarrow R(BB^{*}A^{*}) \subseteq R(A^{*})$$

$$\Longleftrightarrow B^{\dagger}A^{\dagger} \in (AB)\{۱,۲,۴\}.$$

(ج) سه عبارت زیر هم ارز هستند:

(د) $(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}$

(ه) $B(AB)^{\dagger}AB = A^{\dagger}AB$ و $AB(AB)^{\dagger}A = ABB^{\dagger}$

(و) $A^{\dagger}ABB^{*} = BB^{*}A^{\dagger}A$ و $A^{*}ABB^{\dagger} = BB^{\dagger}A^{*}A$

اثبات . فرض کنیم عملگرهای A و B دارای نمایش های ماتریسی مشابه قضیه قبلی باشند.

(الف)

(۱) $AB(AB)^{\dagger}A = ABB^{\dagger} \Longleftrightarrow A_۱B_۱(A_۱B_۱)^{\dagger}A_۲ = ۰$.

برای اثبات هم ارزی بالا داریم:

$$AB(AB)^{\dagger}A = ABB^{\dagger}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_۱B_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_۱B_۱)^\dagger & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_۱ & A_۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow A_۱B_۱(A_۱B_۱)^\dagger A_۱ = A_۱ \quad , \quad A_۱B_۱(A_۱B_۱)^\dagger A_۲ = ۰.$$

از طرفی تساوی $A_۱B_۱(A_۱B_۱)^\dagger A_۱ = A_۱$ همیشه برقرار است، بنابراین

$$AB(AB)^\dagger A = ABB^\dagger \Longleftrightarrow A_۱B_۱(A_۱B_۱)^\dagger A_۲ = ۰.$$

(۲) $A^*ABB^\dagger = BB^\dagger A^*A \Longleftrightarrow A_۱^*A_۲ = ۰$.

برای اثبات هم ارزی بالا داریم:

$$A^*ABB^\dagger = BB^\dagger A^*A$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_۱^* & ۰ \\ A_۲^* & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_۱ & A_۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_۱^* & ۰ \\ A_۲^* & ۰ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_۱ & A_۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} A_۱^*A_۱ & ۰ \\ A_۲^*A_۱ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_۱^*A_۱ & A_۱^*A_۲ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow A_۱^*A_۲ = ۰.$$

(۳) $R(A^*AB) \subseteq R(B) \Longleftrightarrow BB^\dagger A^*AB = A^*AB \Longleftrightarrow A_۲^*A_۱ = ۰$.

اثبات این گزاره مشابه اثبات قضیه **۲.۱.۳ (الف)** می باشد.

بنابراین **(۲)** $\Longleftrightarrow$ **(۳)** برقرار است.

(٤) $B^\dagger A^\dagger \in (AB)\{۱,۲,۳\} \Longleftrightarrow A_۱A_۱^*D^{-۱}A_۱ = A_۱$ و $[A_۱A_۱^*, D^{-۱}] = ۰$.

اثبات این گزاره مشابه اثبات قضیه **۲.۱.۳ (الف)** می باشد.

ابتدا **(۱)** $\Longleftrightarrow$ **(۲)** را اثبات می کنیم، داریم:

$$A_۱B_۱(A_۱B_۱)^\dagger A_۲ = ۰ \Longleftrightarrow R(A_۲) \subset N((A_۱B_۱)(A_۱B_۱)^\dagger) = N((A_۱B_۱)^\dagger) = N((A_۱B_۱)^*)$$

$$= N(B_۱^*A_۱^*) = N(A_۱^*) \Longleftrightarrow A_۱^*A_۲ = ۰.$$

حال اگر $[A_1A_1^*, D^{-1}] = 0$ آنگاه داریم:

$$A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1 \iff A_1A_1^*A_1 = DA_1 \iff A_2A_2^*A_1^* = 0 \iff A_1^*A_2A_2^* = 0$$

$$\iff R(A_2A_2^*) \subset N(A_1^*) \iff R(A_2) \subset N(A_1^*) \iff A_1^*A_2 = 0.$$

بنابراین **(۲)** $\iff$ **(٤)** برقرار است .

در آخر اثبات **(۳)** $\iff$ **(٤)** مشابه اثبات قضیه **۲.۱.۳ (الف)** می باشد.

(ب)

(۱) $B(AB)^\dagger AB = A^\dagger AB \iff A_2^*D^{-1}A_1 = 0$ و $B_1(A_1B_1)^\dagger A_1 = A_1^*D^{-1}A_1$.

برای اثبات گزاره بالا داریم:

$$B(AB)^\dagger AB = A^\dagger AB$$

$$\iff \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (A_1B_1)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1} & 0 \\ A_2^*D^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} B_1(A_1B_1)^\dagger A_1B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1B_1 & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff B_1(A_1B_1)^\dagger A_1 = A_1^*D^{-1}A_1 \quad , \quad A_2^*D^{-1}A_1 = 0.$$

(۲) $A^\dagger ABB^* = BB^*A^\dagger A \iff A_1^*D^{-1}A_2 = 0$ و $[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$.

برای اثبات گزاره بالا داریم:

$$A^\dagger ABB^* = BB^*A^\dagger A$$

$$\iff \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & A_1^*D^{-1}A_2 \\ A_2^*D^{-1}A_1 & A_2^*D^{-1}A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1B_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1B_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1 & A_1^*D^{-1}A_2 \\ A_2^*D^{-1}A_1 & A_2^*D^{-1}A_2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1B_1B_1^* & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1B_1B_1^* & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 & B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff [B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0 \quad , \quad A_1^*D^{-1}A_2 = 0.$$

(۳) $R(BB^*A^*) \subseteq R(A^*) \iff A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 = 0$ و $A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = A_1B_1B_1^*$.

اثبات این گزاره مشابه اثبات قضیه **۲.۱.۳ (ب)** می باشد.

(٤) $B^{\dagger}A^{\dagger} \in (AB)\{۱,۲,۴\} \Longleftrightarrow A_۱A_۱^*D^{-۱}A_۱ = A_۱$ و $[B_۱B_۱^*, A_۱^*D^{-۱}A_۱] = ۰$.

اثبات این گزاره مشابه اثبات قضیه **۲.۱.۳ (ب)** می باشد.

در ابتدا **(۱)** $\Longleftrightarrow$ **(٤)** را اثبات می کنیم.

عبارت $B_۱(A_۱B_۱)^{\dagger}A_۱ = A_۱^*D^{-۱}A_۱$ را از چپ در $A_۱$ و از راست در $B_۱$ ضرب می کنیم، بنابراین

$$A_۱A_۱^*D^{-۱}A_۱ = A_۱.$$

هم چنین داریم:

$$(A_۱B_۱)^{\dagger}A_۱B_۱ = B_۱^{-۱}A_۱^*D^{-۱}A_۱B_۱.$$

حال با توجه به اینکه طرفین تساوی اخیر عملگرهای هرمیتی هستند، $A_۱^*D^{-۱}A_۱B_۱B_۱^*$ نیز هرمیتی است. در این صورت داریم :

$$(A_۱^*D^{-۱}A_۱B_۱B_۱^*)^* = A_۱^*D^{-۱}A_۱B_۱B_۱^* \Longrightarrow B_۱B_۱^*A_۱^*D^{-۱}A_۱ = A_۱^*D^{-۱}A_۱B_۱B_۱^*.$$

بنابراین

$$[B_۱B_۱^*, A_۱^*D^{-۱}A_۱] = ۰.$$

در نتیجه **(٤)** برقرار است.

حال **(٤)** $\Longrightarrow$ **(۱)** را اثبات می کنیم.

اگر **(٤)** برقرار باشد آنگاه $B_۱^{-۱}A_۱^*D^{-۱}A_۱B_۱(A_۱B_۱)^{\dagger}$ معکوس مور-پنروز $A_۱B_۱$ است، یعنی:

$$B_۱^{-۱}A_۱^*D^{-۱}A_۱B_۱(A_۱B_۱)^{\dagger} = (A_۱B_۱)^{\dagger}.$$

در این صورت داریم:

$$B_۱(A_۱B_۱)^{\dagger}A_۱ = A_۱^*D^{-۱}A_۱.$$

ازتساوی $(A_1A_1^*+A_2A_2^*)D^{-1}A_1=A_1$ نتیجه می گیریم $A_2A_2^*D^{-1}A_1=0$. بنابراین

$$R(D^{-1}A_1)\subset N(A_2A_2^*)=N(A_2^*).$$

در این صورت داریم:

$$A_2^*D^{-1}A_1=0.$$

حال **(۲)** $\Longleftarrow$ **(۳)** را اثبات می کنیم.

اگر **(۲)** برقرار باشد، سپس از $A_1^*D^{-1}A_2=0$ تساوی $A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_2=0$ بدست می آید و همچنین با توجه به قضیه **۲.۱.۳ (ب)** داریم:

$$[B_1B_1^*,A_1^*D^{-1}A_1]=0\Longrightarrow B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1=A_1^*D^{-1}A_1B_1B_1^*$$

$$\Longrightarrow A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1=A_1A_1^*D^{-1}A_1B_1B_1^*\Longrightarrow A_1B_1B_1^*A_1^*D^{-1}A_1=A_1B_1B_1^*.$$

لذا **(۲)** برقرار است.

در آخر **(۲)** $\Longleftrightarrow$ **(٤)** با توجه به اثبات قضیه **۲.۱.۳ (ب)** برقرار است.

(ج)

برهان این قسمت از قسمت های **(الف)** و **(ب)** نتیجه می شود.

■

قضیه ٤.۱.۳. فرض کنیم X، Y و Z فضاهای هیلبرت باشند و فرض کنیم $A\in L(Y,Z)$، $B\in L(X,Y)$ و AB دارای برد بسته باشند. در این صورت عبارت های زیر برقرار است:

(الف)

$R(A^*AB)\subseteq R(B)\Longleftrightarrow B^\dagger(ABB^\dagger)^\dagger=B^\dagger A^\dagger\Longleftrightarrow(ABB^\dagger)^\dagger=BB^\dagger A^\dagger$.

(ب)

$R(A^*) \subseteq R(BB^*A^*) \Longleftrightarrow B^\dagger A^\dagger = (A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger \Longleftrightarrow B^\dagger A^\dagger A = (A^\dagger AB)^\dagger$.

(ج) عبارت های زیر هم ارز هستند:

د) $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

ه) $(A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger A$ و $(ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger$

و) $(A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ و $B^\dagger (ABB^\dagger)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$

اثبات. فرض کنیم عملگرهای A و B دارای نمایش های ماتریسی مشابه قضیه قبلی باشند.

(الف)

توجه کنید چون $R(ABB^\dagger) \subseteq R(AB)$ و $R(AB)$ بسته است لذا $R(ABB^\dagger)$ بسته است. بنابراین $(ABB^\dagger)^\dagger$ وجود دارد.

(۱) $(ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger \Longleftrightarrow A^\dagger = A_1^* D^{-1}$.

برای اثبات هم ارزی بالا داریم:

$$
\begin{aligned}
& (ABB^\dagger)^\dagger = BB^\dagger A^\dagger \\
\Longleftrightarrow & \left(\begin{bmatrix} B_1 B_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^\dagger = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 A_1^* D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\Longleftrightarrow & A^\dagger = A_1^* D^{-1}.
\end{aligned}
$$

(۲) $B^\dagger (ABB^\dagger)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \Longleftrightarrow A_1^\dagger = A_1^* D^{-1}$.

برای اثبات هم ارزی بالا داریم:

$$
\begin{aligned}
& B^\dagger (ABB^\dagger)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \\
\Longleftrightarrow & \begin{bmatrix} A_1^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1^{-1} A_1^\dagger D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\Longleftrightarrow & B_1^{-1} A_1^\dagger = B_1^{-1} A_1^* D^{-1} \\
\Longleftrightarrow & A_1^\dagger = A_1^* D^{-1}.
\end{aligned}
$$

(۳) $R(A^*AB) \subseteq R(B) \iff A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$ و $[A_1A_1^*, D^{-1}] = 0$.

اثبات این گزاره مشابه اثبات قضیه **۲.۱.۳ (الف)** است.

در ابتدا **(۱)** $\Longleftarrow$ **(۳)** را اثبات می کنیم.

اگر $A_1^\dagger = A_1^*D^{-1}$ آنگاه $A_1^\dagger D = A_1^*$ و $A_1A_1^\dagger = A_1A_1^*D^{-1}$. چون $A_1A_1^\dagger$ هرمیتی است لذا $A_1A_1^*D^{-1}$ هرمیتی است بنابراین

$$(A_1A_1^*D^{-1})^* = D^{-1}A_1A_1^* = A_1A_1^*D^{-1} \Longrightarrow [A_1A_1^*, D^{-1}] = 0.$$

به علاوه

$$A_1A_1^\dagger D = A_1A_1^* \Rightarrow A_1A_1^\dagger(A_1A_1^* + A_2A_2^*) = A_1A_1^*$$

در این صورت داریم:

$$A_1A_1^\dagger A_2A_2^* = 0.$$

بنابراین نتیجه می گیریم که

$$R(A_2A_2^*) \subset N(A_1A_1^\dagger) = A(A_1^*).$$

لذا $A_1^*A_2A_2^* = 0$ و $A_2^*A_1 = 0$. حال داریم:

$$(A_1A_1^* + A_2A_2^*)A_1 = A_1A_1^*A_1.$$

بنابراین اگر $DA_1 = A_1A_1^*A_1$ را از راست در A_1^{-1} و از چپ در $D^{-1}A_1$ ضرب کنیم، نتیجه می گیریم:

$$A_1 = A_1A_1^*D^{-1}A_1.$$

در این صورت **(۳)** برقرار است.

حال **(۳)** $\Longleftarrow$ **(۱)** را اثبات می کنیم.

اگر **(۳)** برقرار باشد و معادلات پنروز را به صورت زیر بررسی کنیم، مشاهده می کنیم که $A_1^*D^{-1}$ معکوس مور- پنروز A_1 است:

$$A_1(A_1^*D^{-1})A_1 = A_1 \text{،} \quad A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1} = A_1^*D^{-1}\text{،}$$

$$(A_1A_1^*D^{-1})^* = A_1A_1^*D^{-1} \quad \text{و} \quad (A_1^*D^{-1}A_1)^* = A_1^*D^{-1}A_1.$$

بنابراین

$$A_1^\dagger = A_1^*D^{-1}.$$

(ب)

می دانیم که

$$R((A^\dagger AB)^*) = R(B^*A^\dagger A) = R(B^*A^*) = R((AB)^*).$$

چون $R((AB)^*)$ بسته است لذا $R((A^\dagger AB)^*)$ بسته است و بنابراین $R(A^\dagger AB)$ بسته است پس معکوس مور- پنروز $A^\dagger AB$ وجود دارد.

توجه کنید که

$$B^\dagger A^\dagger A = \begin{bmatrix} B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1 & B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A^\dagger AB = \begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1B_1 & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

و لذا با توجه به تساوی $T^\dagger = (T^*T)^\dagger T^*$ داریم:

$$(A^\dagger AB)^\dagger = \left(\begin{bmatrix} B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 & B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1B_1 & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1B_1 & 0 \end{bmatrix}\right)^\dagger \begin{bmatrix} B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 & B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 \\ A_2^*D^{-1}A_1B_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 & B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 & (B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(۱) $(A^\dagger AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger A \iff (B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1$ و

$(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_2$.

(۲) $(A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger \Longleftrightarrow B_1(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^* = A_1^*$.

برای اثبات هم ارزی بالا داریم:

$$(A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger = B^\dagger A^\dagger \Longleftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 & (B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1^*D^{-1} & 0\\ A_2^*D^{-1} & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}B_1^{-1}A_1^*D^{-1} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow (B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}(A_1A_1^*D^{-1} + A_2A_2^*D^{-1}) = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}$$

$$\Longleftrightarrow B_1(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^* = A_1^*.$$

(۳) $R(BB^*A^*) \subseteq R(A^*) \Longleftrightarrow A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1$ و $[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0$.

اثبات این گزاره مشابه اثبات قضیه **۲.۱.۳ (ب)** می باشد.

در ابتدا **(۱)** $\Longleftarrow$ **(۲)** را اثبات می کنیم.

تساوی $(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1$ را از راست در A_1^* ضرب می کنیم، داریم:

$$(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_1A_1^* = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1A_1^* \tag{۶.۳}$$

و تساوی $(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_2$ را از راست در A_2^* ضرب می کنیم، داریم:

$$(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_2A_2^* = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_2A_2^*. \tag{۷.۳}$$

سپس با جمع کردن رابطه (۶.۳) و (۷.۳) نتیجه می گیریم:

$$B_1(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^* = A_1^*.$$

حال (۲) $\Longleftarrow$ (۱) را اثبات می کنیم. تساوی $B_1(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^* = A_1^*$ را یک بار از چپ در B_1^{-1} و از راست در $D^{-1}A_1$ ضرب می کنیم و بدست می آوریم:

$$(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1$$

و بار دیگر از چپ در B_1^{-1} و از راست در $D^{-1}A_2$ ضرب می کنیم و بدست می آوریم:

$$(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_2.$$

بنابراین (۲) برقرار است.

سپس (۲) $\Longleftarrow$ (۳) را اثبات می کنیم.

اگرتساوی $B_1(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^* = A_1^*$ را از چپ در $B_1^*A_1^*D^{-1}A_1$ و از راست در $D^{-1}A_1B_1$ ضرب کنیم، داریم:

$$A_1^*D^{-1}A_1 = A_1^*D^{-1}A_1A_1^*D^{-1}A_1.$$

بنابراین $A_1^*D^{-1}A_1$ تصویر متعامد بر زیرفضای $R(A_1^*)$ است. در این صورت نتیجه می گیریم:

$$A_1A_1^*D^{-1}A_1 = A_1.$$

همچنین با توجه به تساوی $B_1(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^* = A_1^*$ داریم:

$$(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1 = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1.$$

از طرفی چون طرفین تساوی بالا هرمیتی است در این صورت داریم:

$$B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1^* = B_1^{-1}A_1^*D^{-1}A_1B_1$$

بنابراین اگر طرفین این تساوی را از چپ در B_1 و از راست در B_1^* ضرب کنیم، نتیجه می گیریم:

$$[B_1B_1^*, A_1^*D^{-1}A_1] = 0.$$

در پایان **(۳)** $\Longleftarrow$ **(۲)** را اثبات می کنیم.

با توجه به تساوی $T^\dagger = (T^*T)^\dagger T^*$ اگر $T = D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1$ قرار دهیم، نتیجه می گیریم:

$$(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-\frac{1}{2}} = (D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger$$

که با $B_1(B_1^*A_1^*D^{-\frac{1}{2}}D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^* = B_1(D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger D^{-\frac{1}{2}}$ هم ارز است.

حال معادلات پنروز را برای $T = D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1$ بررسی می کنیم:

$D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1B_1^{-1}A_1^*D^{-\frac{1}{2}}D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1 = D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1$، $B_1^{-1}A_1^*D^{-\frac{1}{2}}D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1B_1^{-1}A_1^*D^{-\frac{1}{2}} = B_1^{-1}A_1^*D^{-\frac{1}{2}}$،

$(D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1B_1^{-1}A_1^*D^{-\frac{1}{2}})^* = D^{-\frac{1}{2}}A_1A_1^*D^{-\frac{1}{2}}$ و $(B_1^{-1}A_1^*D^{-\frac{1}{2}}D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^* = B_1^{-1}A_1^*D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1$.

در این صورت نتیجه می گیریم

$$(D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger = B_1^{-1}A_1^*D^{-\frac{1}{2}}.$$

بنابراین **(۲)** برقرار است.

(ج)

برهان این قسمت از قسمت های **(الف)** و **(ب)** نتیجه می شود. ■

قضیه ۵.۱.۳. فرض کنیم X، Y و Z فضاهای هیلبرت باشند و عملگرهای $A \in L(Y,Z)$، $B \in L(X,Y)$ و AB دارای برد بسته باشند. در این صورت داریم:

(الف)

$R(B) = R(A^*AB) \Longleftrightarrow B^\dagger = (AB)^\dagger A$.

(ب)

$R(A^*) = R(BB^*A^*) \Longleftrightarrow A^\dagger = B(AB)^\dagger$.

اثبات . (الف)

فرض کنیم عملگرهای A و B دارای نمایش های ماتریسی مشابه قضیه قبلی باشند.

(۱) $B^{\dagger} = (AB)^{\dagger}A \iff I = (A_1B_1)^{\dagger}A_1B_1$ و $(A_1B_1)^{\dagger}A_2 = 0$.

برای اثبات هم ارزی بالا داریم:

$$B^{\dagger} = (AB)^{\dagger}A$$

$$\iff \begin{bmatrix} B_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1B_1)^{\dagger} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_1B_1)^{\dagger}A_1 & (A_1B_1)^{\dagger}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff I = (A_1B_1)^{\dagger}A_1B_1 \ , \ (A_1B_1)^{\dagger}A_2 = 0.$$

بنابراین تساوی $B^{\dagger} = (AB)^{\dagger}A$ با دو شرط $(A_1B_1)^{\dagger}A_2 = 0$ و A_1 یک به یک با برد بسته است، هم ارز می باشد. زیرا با توجه تساوی به $I = (A_1B_1)^{\dagger}A_1B_1$ نتیجه می گیریم A_1 معکوس پذیر است لذا یک به یک با برد بسته است.

(۲) $R(B) = R(A^*AB) \iff R(A_1^*A_1B_1) = R(B_1)$ و $A_2^*A_1B_1 = 0$.

بنابراین تساوی $R(B) = R(A^*AB)$ با دو شرط $A_1^*A_2 = 0$ و A_1 یک به یک با برد بسته است، هم ارز می باشد.

زیرا با توجه به تساوی $R(A_1^*A_1B_1) = R(B_1)$ نتیجه می گیریم که $A_1^*A_1 = I$. پس A_1 معکوس پذیر است لذا یک به یک و دارای برد بسته است.

حال **(۱)** $\iff$**(۲)** را اثبات می کنیم.

می دانیم گزاره های زیر هم ارز هستند:

$$(A_1B_1)^{\dagger}A_2 = 0 \iff R(A_2) \subset N((A_1B_1)^{\dagger}) = N((A_1B_1)^*) \iff B_1^*A_1^*A_2 = 0 \iff A_1^*A_2 = 0.$$

بنابراین**(۱)** $\iff$**(۲)** برقرار است.

(ب)

از قسمت **(الف)** نتیجه می گیریم:

$$R(B) = R(A^*AB) \Longleftrightarrow (B^*)^\dagger = A^*(B^*A^*)^\dagger.$$

حال A^* را با B و B^* را با A تغییر می دهیم. در این صورت داریم:

$$A^\dagger = B(AB)^\dagger \Longleftrightarrow R(A^*) = R(BB^*A^*).$$

بنابراین **(۱)** $\Longleftrightarrow$**(۲)** برقرار است.

■

لم ۳.۱.۶. فرض کنید X و Y فضاهای هیلبرت باشند و عملگر $C \in L(X, Y)$ دارای برد بسته باشد. همچنین فرض کنیم $D \in L(Y)$ هرمیتی و معکوس پذیر باشد. بنابراین $R(DC) = R(C)$ اگر و تنها اگر

$$[D, CC^\dagger] = ۰$$

.

اثبات . تجزیه های متعامد $X = R(C^*) \oplus N(C)$ و $Y = R(C) \oplus N(C^*)$ را در نظر می گیریم. در این صورت عملگرهای C و D دارای نمایش های ماتریسی زیر خواهند بود:

$$C = \begin{bmatrix} C_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(C^*) \\ N(C) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(C) \\ N(C^*) \end{bmatrix}$$

که $C_۱$ معکوس پذیر است و

$$D = \begin{bmatrix} D_۱ & D_۲ \\ D_۳ & D_۴ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(C) \\ N(C^*) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(C) \\ N(C^*) \end{bmatrix}$$

که $D_۳ = D_۲^*$. همچنین داریم:

$$DC = \begin{bmatrix} D_۱ & D_۲ \\ D_۳ & D_۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_۱C_۱ & ۰ \\ D_۳C_۱ & ۰ \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} R(C^*) \\ N(C) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} R(C) \\ N(C^*) \end{bmatrix}.$$

اگر $R(DC)=R(C)$ باشد در این صورت داریم:

$$R\left(\begin{bmatrix} D_1C_1 & 0 \\ D_3C_1 & 0 \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \Rightarrow D_3C_1 = 0 \Rightarrow D_3 = 0$$

و چون $D_3 = D_2^*$ است آنگاه $D_2 = 0$. بنابراین

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_4 \end{bmatrix}.$$

با توجه به اینکه D هرمیتی است، داریم:

$$D^* = D \Rightarrow \begin{bmatrix} D_1^* & 0 \\ 0 & D_4^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} D_1^* = D_1 \\ D_4^* = D_4 \end{cases}$$

بنابراین D_1 و D_4 هرمیتی هستند.

همچنین D معکوس پذیر است پس D^{-1} موجود است و $DD^{-1} = I$، لذا D_1 و D_4 معکوس پذیرند.

بنابراین اگر D هرمیتی و معکوس پذیر باشد آنگاه D_1 و D_4 نیز چنین است.

از طرفی چون $C^\dagger = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ لذا داریم:

$DCC^\dagger = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $CC^\dagger D = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ID_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

در این صورت نتیجه می گیریم:

$$DCC^\dagger = CC^\dagger D.$$

برعکس، فرض کنیم D معکوس پذیر باشد و $DCC^\dagger = CC^\dagger D$. بنابراین

$$R(DC) = R(DCC^\dagger) = R(CC^\dagger D) = R(CC^\dagger) = R(C).$$

■

قضیه ۷.۱.۳. فرض کنیم X، Y و Z فضاهای هیلبرت باشند و عملگرهای $A \in L(Y,Z)$، $B \in L(X,Y)$ و AB دارای برد بسته باشند. در این صورت داریم:

(الف)

$R(AA^*AB)=R(AB) \Longleftrightarrow (AB)^\dagger=(A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger$.

(ب)

$R(B^*B(AB)^*)=R((AB)^*) \Longleftrightarrow (AB)^\dagger=B^\dagger(ABB^\dagger)^\dagger$.

اثبات . (الف)

توجه کنید که

$$R((A^\dagger AB)^*)=R(B^*A^\dagger A)=B^*R(A^\dagger A)=B^*R(A^*)=R((AB)^*)$$

و از طرفی چون $R((AB)^*)$ بسته است لذا $R(A^\dagger AB)$ نیز بسته است. پس معکوس مور–پنروز $A^\dagger AB$ وجود دارد.

(۱) $(AB)^\dagger=(A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger \Longleftrightarrow (A_1B_1)^\dagger=(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}=(D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger D^{-\frac{1}{2}}$.

برای هم ارزی بالا فرض کنیم $T=A^\dagger AB$، $T^\dagger$ را به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$T^\dagger=(T^*T)^\dagger T^*$$

$$=\left(\begin{bmatrix} B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 & B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_1^*D^{-1}A_1B_1 & 0 \\ A_2^*D^{-1}A_1B_1 & 0 \end{bmatrix}\right)^\dagger \begin{bmatrix} B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 & B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} (B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_1 & (B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}A_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

در این صورت نتیجه می گیریم:

$$(AB)^\dagger=(A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger$$

$$\Longleftrightarrow (A_1B_1)^\dagger=(B_1^*A_1^*D^{-1}A_1B_1)^\dagger B_1^*A_1^*D^{-1}=(D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger D^{-\frac{1}{2}}.$$

(۲) $R(AA^*AB)=R(AB) \Longleftrightarrow R(DA_1B_1)=R(A_1B_1)$.

برای اثبات هم ارزی بالا با توجه به $AA^*AB = \begin{bmatrix} DA_۱B_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ داریم:

$$R(AA^*AB) = R(AB)$$

$$\Longleftrightarrow R\left(\begin{bmatrix} DA_۱B_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right) = R\left(\begin{bmatrix} A_۱B_۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\right)$$

$$\Longleftrightarrow R(DA_۱B_۱) = R(A_۱B_۱).$$

در ابتدا **(۱)** $\Longleftrightarrow$ **(۲)** را اثبات می کنیم.

با استفاده از سومین معادله پنروز و $(A_۱B_۱)^\dagger = (D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱)^\dagger D^{-\frac{۱}{۲}}$ می توان گفت که $A_۱B_۱(D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱)^\dagger D^{-\frac{۱}{۲}}$ هرمیتی است. بنابراین گزاره های زیر هم ارز هستند :

$$A_۱B_۱(D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱)^\dagger D^{-\frac{۱}{۲}} \qquad \text{هرمیتی است}$$

$$D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱(D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱)^\dagger D^{-\frac{۱}{۲}} \qquad \Longleftrightarrow \text{هرمیتی است}$$

$$\Longleftrightarrow [D, D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱(D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱)^\dagger] = ۰$$

$$\Longleftrightarrow D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱(D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱)^\dagger = D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱(D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱)^\dagger D$$

$$\Longleftrightarrow DA_۱B_۱(D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱)^\dagger = A_۱B_۱(D^{-\frac{۱}{۲}}A_۱B_۱)^\dagger D.$$

حال تساوی آخر را از چپ در $D^{-\frac{۱}{۲}}$ ضرب می کنیم، در این صورت داریم:

$$D(A_۱B_۱)(A_۱B_۱)^\dagger = A_۱B_۱(A_۱B_۱)^\dagger D \Longleftrightarrow [D, A_۱B_۱(A_۱B_۱)^\dagger] = ۰.$$

چون D معکوس پذیر و هرمیتی است و $A_۱B_۱$ برد بسته دارد بنابراین بنا بر لم **۶.۱.۳** نتیجه می گیریم:

$$R(DA_۱B_۱) = R(A_۱B_۱).$$

حال (۲) $\Longleftarrow$ (۱) را اثبات می کنیم.

فرض کنیم $R(DA_1B_1) = R(A_1B_1)$. با توجه به اینکه D معکوس پذیر و هرمیتی و A_1B_1 دارای برد بسته است، با استفاده از لم **۶.۱.۳** نتیجه می گیریم:

$$[D, A_1B_1(A_1B_1)^\dagger] = 0.$$

با توجه به نتیجه قبلی مشاهده می کنیم که $A_1B_1(D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger D^{-\frac{1}{2}}$ هرمیتی است.

توجه کنید که چون $(A_1B_1)^\dagger A_1B_1 = (D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1$ و از طرفی $(A_1B_1)^\dagger A_1B_1$ تصویر متعامد است بنابراین $(D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1$ تصویر متعامد بر $R((A_1B_1)^*) \subset R((A_1B_1)^*D^{-\frac{1}{2}})$ است. در این صورت داریم:

$$(D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1(D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1 = (D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1.$$

حال طرفین تساوی بالا را از چپ در $(D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)D^{-\frac{1}{2}}$ ضرب می کنیم، داریم:

$$A_1B_1(D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1 = A_1B_1$$

بنابراین:

$$(A_1B_1)^\dagger = (D^{-\frac{1}{2}}A_1B_1)^\dagger D^{-\frac{1}{2}}.$$

(ب)

با توجه به قسمت **(الف)** گزاره های زیر هم ارز هستند :

$$(AB)^\dagger = (A^\dagger AB)^\dagger A^\dagger \Longleftrightarrow R(A^*AB) = R(AB).$$

در این صورت داریم:

$$(A^*B^*)^\dagger = (A^*)^\dagger(B^*A^\dagger A)^\dagger \Longleftrightarrow R(AA^*AB) = R(AB).$$

حال به جای A^*، B و به جای B^*، A را قرار می دهیم، بنابراین:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger(ABB^\dagger)^\dagger \Longleftrightarrow R(B^*BB^*A^*) = R(B^*A^*).$$

در این صورت **(۱)** $\Longleftrightarrow$ **(۲)** برقرار است.

■

فصل ٤

نگرشی بر قانون ترتیب عکس سه گانه برای ماتریس ها

گرویل [۱] در [۱۳] شرایط لازم و کافی برای برقراری قانون ترتیب عکس $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$ برای دو ماتریس مختلط A و B ارائه داد. این شرایط بعدها توسط آرگیرید [۲] در [۱] در حالتی که A^*ABB^* ماتریس EP است، به طور دقیق بیان شد. در مقاله های زیادی مانند [۲۰، ۱۴، ۱۵] حالت های خاص قانون ترتیب عکس سه گانه $(ABC)^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger$ بیان شده است.

در این فصل شرایط لازم و کافی جهت برقراری قانون ترتیب عکس سه گانه را بررسی می کنیم و سپس تعدادی از حالت های خاص را نتیجه می گیریم.

۱.۴ قانون ترتیب عکس سه گانه

فرض کنیم A، B و C ماتریس های مختلط باشند که برای آنها حاصلضرب ABC تعریف شده است. هدف پیدا کردن شرایط لازم و کافی برای برقراری قانون ترتیب عکس سه گانه است. برای این منظور تعریف می کنیم:

$$M = ABC, \qquad X = C^\dagger B^\dagger A^\dagger$$

$$E = A^\dagger A, \qquad F = CC^\dagger,$$

[۱] Greville
[۲] Argiriade

$$Q = FB^\dagger E \quad \text{و} \quad P = EBF$$

قضیه ۴.۱.۱. ([۱۶])

شرایط زیر هم ارز هستند:

(الف) $(ABC)^\dagger = C^\dagger B^\dagger A^\dagger$

(ب) $Q = P^+$ و A^*APQ و $QPCC^*$ هرمیتی هستند.

(ج) $Q = P^+$ و A^*APQ و $QPCC^*$ ماتریس EP هستند.

(د) $Q = P^-$، $R(A^*AP) = R(Q^*)$ و $R(CC^*P^*) = R(Q)$.

(ه) $(PQ)^۲ = PQ$، $R(A^*AP) = R(Q^*)$ و $R(CC^*P^*) = R(Q)$.

اثبات. (الف) $\Longleftrightarrow$ (ب) :

در ابتدا اثبات می کنیم تساوی $MXM = M$ با $PQP = P$ هم ارز است. اگر $MXM = M$ برقرار باشد آن گاه

$$(ABC)(C^\dagger B^\dagger A^\dagger)(ABC) = ABC$$

و چون $CC^\dagger$ و $A^\dagger A$ خودتوان هستند، داریم:

$$PQP = (A^\dagger ABCC^\dagger)(CC^\dagger A^\dagger A)(A^\dagger ABCC^\dagger) = A^\dagger ABCC^\dagger B^\dagger A^\dagger ABCC^\dagger = A^\dagger ABCC^\dagger = P.$$

لذا تساوی $PQP = P$ برقرار است.

برعکس، اگر تساوی $PQP = P$ برقرار باشد آنگاه

$$(A^\dagger ABCC^\dagger)(CC^\dagger B^\dagger A^\dagger A)(A^\dagger ABCC^\dagger) = A^\dagger ABCC^\dagger$$

و چون $CC^\dagger$ و $A^\dagger A$ خودتوان هستند، در این صورت داریم:

$$(ABC)(C^\dagger B^\dagger A^\dagger)(ABC) = ABC.$$

لذا تساوی $MXM = M$ برقرار است.

همچنین تساوی $QPQ = Q$ با $XMX = X$ هم ارز است. زیرا اگر $QPQ = Q$ برقرار باشد آنگاه

$$(CC^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}A)(A^{\dagger}ABCC^{\dagger})(CC^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}A) = CC^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}A$$

و چون $A^{\dagger}A$ و $CC^{\dagger}$ خودتوان هستند، لذا داریم:

$$C^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}(ABC)(C^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}) = C^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}.$$

بنابراین تساوی $XMX = X$ برقرار است.

برعکس، اگر تساوی $XMX = X$ برقرار باشد آنگاه

$$(C^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger})(ABC)(C^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}) = C^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}.$$

اگر طرفین تساوی بالا را از چپ در C و از راست در A ضرب کنیم، در این صورت نتیجه می گیریم:

$$(CC^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}A)(A^{\dagger}ABCC^{\dagger})(CC^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}A) = CC^{\dagger}B^{\dagger}A^{\dagger}A.$$

لذا تساوی $QPQ = Q$ برقرار است.

سپس اگر MX هرمیتی باشد یعنی $(MX)^* = MX$ آنگاه چون $A^*APQ \overset{(1)}{=} A^*MXA$ و A^*MXA هرمیتی می باشد، لذا A^*APQ نیز هرمیتی است.

برعکس، فرض کنیم A^*APQ هرمیتی باشد. چون $MX \overset{(2)}{=} A^{*\dagger}(A^*APQ)A^{\dagger}$ و $A^{*\dagger}(A^*APQ)A^*$ هرمیتی است، لذا MX هرمیتی است.

در آخر اگر XM هرمیتی باشد یعنی $(XM)^* = XM$ آنگاه چون $QPCC^* \overset{(3)}{=} C(XM)C^*$ و $C(XM)C^*$ هرمیتی است، لذا $QPCC^*$ هرمیتی است.

برعکس، فرض کنیم $QPCC^*$ هرمیتی باشد. چون $XM = C^{\dagger}(QPCC^*)C^{*\dagger}$ و $A^{*\dagger}(A^*APQ)A^{\dagger}$ هرمیتی است، در این صورت XM هرمیتی است.

اثبات تساوی (۱):

با توجه به اینکه $CC^\dagger$ خودتوان و $AA^\dagger A = A$، لذا داریم:

$$A^*APQ = A^*AA^\dagger ABCC^\dagger CC^\dagger B^\dagger A^\dagger A = A^*ABCC^\dagger B^\dagger A^\dagger A = A^*MXA.$$

اثبات تساوی(۲):

چون $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$، لذا داریم:

$$A^{*\dagger}(A^*ABCC^\dagger B^\dagger A^\dagger A)A^\dagger = A^{*\dagger}A^*ABCC^\dagger B^\dagger A^\dagger = MX.$$

اثبات تساوی (۳):

با توجه به اینکه $A^\dagger A$ خودتوان و $CC^\dagger C = C$، لذا نتیجه می گیریم:

$$QPCC^* = (CC^\dagger B^\dagger A^\dagger A)(A^\dagger ABCC^\dagger)CC^* = C(XM)C^*.$$

اثبات (ب) $\Longleftarrow$ (ج):

بنا بر تعریف **۱٦.۲.۲** و **۲۵.۲.۱** هر ماتریس هرمیتی، EP است.

اثبات (ج) $\Longleftarrow$ (د):

اگر $Q = P^+$ و A^*APQ، EP باشد بنابراین

$$Q^*P^*Q^* \overset{(٤)}{=} Q^*$$

و

$$R(A^*AP) \overset{(۵)}{=} R(A^*APQ) \overset{(٦)}{=} R(Q^*P^*A^*A) \overset{(۷)}{=} R(Q^*P^*A^\dagger A) \overset{(۸)}{=} R(Q^*P^*) \overset{(۹)}{=} R(Q^*).$$

به طور مشابه اگر $QPCC^*$ ماتریس EP باشد، در این صورت داریم:

$$R(CC^*P^*) \overset{(۱۰)}{=} R(CC^*P^*Q^*) \overset{(۱۱)}{=} R(QPCC^*) \overset{(۱۲)}{=} R(QPCC^\dagger) \overset{(۱۳)}{=} R(QP) \overset{(۱٤)}{=} R(Q).$$

هم چنین از $Q = P^+$ و طبق تعریف **۲۴.۲.۱**، داریم $PQP = P$ و این یعنی $Q = P^-$.

اثبات تساوی (٤):

$$Q = P^+ \Rightarrow QPQ = Q \Rightarrow (QPQ)^* = Q^* \Rightarrow Q^*P^*Q^* = Q^*.$$

اثبات تساوی (٥):

با استفاده از لم **۳۹.۲.۱**، قسمت **(الف)** داریم:

$$y \in R(A^*APQ) \Longrightarrow \exists \;\; x_۰ \;\; s.t \;\; y = (A^*APQ)x_۰ = (A^*AP)x_۱$$

$$\Longrightarrow y \in R(A^*AP)$$

و

$$y \in R(A^*AP) \Longrightarrow \exists \;\; x_۰ \;\; s.t \;\; y = (A^*AP)x_۰ = (A^*APP^*)x_۱ = (A^*APQ)x_۱$$

$$\Longrightarrow y \in R(A^*APQ).$$

بنابراین با توجه به بحث فوق $R(A^*APQ) = R(A^*AP)$.

اثبات تساوی (٦):

چون A^*APQ ماتریس EP است، داریم:

$$R(A^*APQ) = R((A^*APQ)^*) = R(Q^*P^*A^*A).$$

اثبات تساوی (٧):

با توجه به اینکه $R(A^*) = R(A^\dagger)$، لذا داریم:

$$y \in R(Q^*P^*A^*A) \Longrightarrow \exists \;\; x_۰ \;\; s.t \;\; y = (Q^*P^*A^*A)x_۰ = Q^*P^*(A^*(Ax_۰)) = (Q^*P^*A^\dagger A)x_۱$$

$$\Longrightarrow y \in R(Q^*P^*A^\dagger A)$$

و

$$y \in R(Q^*P^*A^\dagger A) \Longrightarrow \exists \;\; x_0 \;\; s.t \;\; y = (Q^*P^*A^\dagger A)x_0 = Q^*P^*(A^\dagger(Ax_0)) = (Q^*P^*A^*A)x_1$$

$$\Longrightarrow y \in R(Q^*P^*A^*A).$$

بنابراین از بحث فوق نتیجه می گیریم:

$$R(Q^*P^*A^*A) = R(Q^*P^*A^\dagger A).$$

اثبات تساوی (۸):

با توجه به اینکه $A^\dagger A$ خودتوان است، داریم:

$$y \in R(Q^*P^*A^\dagger A) \Longrightarrow \exists \;\; x_0 \;\; s.t \;\; y = (Q^*P^*A^\dagger A)x_0 = (Q^*P^*)x_1$$

$$\Longrightarrow y \in R(Q^*P^*)$$

و

$$y \in R(Q^*P^*) \Longrightarrow \exists \;\; x_0 \;\; s.t \;\; y \in (Q^*P^*)x_0 = (Q^*P^*A^\dagger A)x_1$$

$$\Longrightarrow y \in R(Q^*P^*A^\dagger A).$$

در این صورت نتیجه می گیریم:

$$R(Q^*P^*A^\dagger A) = R(Q^*P^*).$$

اثبات تساوی (۹):

$$y \in R(Q^*P^*) \Longrightarrow \exists \;\; x_0 \;\; s.t \;\; y = (Q^*P^*)x_0 = Q^*(P^*x_0) = Q^*x_1$$

$$\Longrightarrow y \in R(Q^*)$$

و

$$y \in R(Q^*) \Longrightarrow \exists \ \ x_0 \ \ s.t \ \ y = Q^*(x_0) \Longrightarrow y = Q^*P^*Q^*(x_1) \Longrightarrow y = Q^*P^*(x_2)$$

$$\Longrightarrow y \in R(Q^*P^*)$$

لذا از بحث فوق $R(Q^*P^*) = R(Q^*)$ را نتیجه می گیریم.

اثبات تساوی (۱۰):

چون $P^* = P^*Q^*P^*$، لذا داریم:

$$y \in R(CC^*P^*) \Longrightarrow \exists \ x_0 \ s.t \ y = (CC^*P^*)(x_0) \Longrightarrow y = (CC^*P^*Q^*P^*)x_0 = (CC^*P^*Q^*)x_1$$

$$\Longrightarrow y \in R(CC^*P^*Q^*)$$

و

$$y \in R(CC^*P^*Q^*) \Longrightarrow \exists \ \ x_0 \ \ s.t \ \ y = (CC^*P^*Q^*)x_0 = (CC^*P^*)(Q^*x_0) = (CC^*P^*)x_1$$

$$\Longrightarrow y \in R(CC^*P^*)$$

بنابراین نتیجه می گیریم:

$$R(CC^*P^*Q^*) = R(CC^*P^*).$$

اثبات تساوی (۱۱):

چون $QPCC^*$ ماتریس EP است، در این صورت داریم:

$$R(QPCC^*) = R((QPCC^*)^*) = R(CC^*P^*Q^*).$$

اثبات تساوی (۱۲):

با استفاده از لم **۳۹.۲.۱**، قسمت **(ج)** داریم:

$$y \in R(QPCC^*) \Longrightarrow \exists \;\; x_۰ \;\; s.t \;\; y = (QPCC^*)x_۰ = (QPCC^\dagger)x_۱$$

$$\Longrightarrow y \in R(QPCC^\dagger)$$

و

$$y \in R(QPCC^\dagger) \Longrightarrow \exists \;\; x_۰ \;\; s.t \;\; y = (QPCC^\dagger)x_۰ = (QPCC^*)x_۱$$

$$\Longrightarrow y \in R(QPCC^*).$$

بنابراین با توجه به بحث بالا نتیجه می گیریم:

$$R(QPCC^*) = R(QPCC^\dagger).$$

اثبات تساوی (۱۳):

با توجه به اینکه $CC^\dagger$ خودتوان است، داریم:

$$y \in R(QPCC^\dagger) \Longrightarrow \exists \;\; x_۰ \;\; s.t \;\; y = (QPCC^\dagger)x_۰ = (QP)x_۱$$

$$\Longrightarrow y \in R(QP)$$

و

$$y \in R(QP) \Longrightarrow \exists \;\; x_۰ \;\; s.t \;\; y = (QP)x_۰ = (QPCC^\dagger)x_۱$$

$$\Longrightarrow y \in R(QPCC^\dagger).$$

لذا با توجه به بحث بالا نتیجه می گیریم :

$$R(QPCC^\dagger) = R(QP).$$

اثبات تساوی (۱۴):

با توجه به تساوی $QPQ = Q$ داریم:

$$y \in R(QP) \Longrightarrow \exists \ \ x_۰ \ \ s.t \ \ y = QP(x_۰) = Qx_۱$$

$$\Longrightarrow y \in R(Q)$$

و

$$y \in R(Q) \Longrightarrow \exists \ \ x_۰ \ \ s.t \ \ y = Qx_۰ \Longrightarrow y = (QPQ)x_۰ = (QP)x_۱$$

$$\Longrightarrow y \in R(QP).$$

بنابراین نتیجه می گیریم:

$$R(Q) = R(QP).$$

اثبات (د) $\Longleftarrow$ (ه):

اگر $Q = P^-$ آنگاه طبق تعریف **۲۳.۲.۱**، داریم:

$$PQP = P.$$

اگر این تساوی را از راست در Q ضرب کنیم در این صورت داریم:

$$PQPQ = PQ \Longrightarrow (PQ)^۲ = PQ.$$

اثبات (ه) $\Longleftarrow$ (ب):

در این حالت با توجه به اینکه $R(CC^*P^*) = R(Q)$، روابط زیر را نتیجه می گیریم:

$$R(P) \overset{(۱۵)}{=} R(PC) \overset{(۱۶)}{=} R(PCC^*P^*) \overset{(۱۷)}{=} R(PQ).$$

سپس چون $PQ = (PQ)^2$ لذا $PQ = (PQ)^-$ و بنابراین نتیجه می گیریم $PQ(PQ)^-P = PQ(PQ)P =$ P یا $PQP = P$ است.

حال تساوی های زیر را داریم:

$$C^{*\dagger}C^{\dagger}(CC^*P^*) \stackrel{(18)}{=} CC^{\dagger}P^* \stackrel{(19)}{=} P^*.$$

بنابراین

$$\rho(P) \equiv \rho(CC^*P^*) = \rho(Q)$$

و با توجه به اینکه $PQP = P$، لذا نتیجه می گیریم:

$$QPQ = Q.$$

سپس از تساوی $R(Q) = R(CC^*P^*)$ نتیجه می گیریم:

$$QPCC^*P^* = CC^*P^*.$$

حال اگر طرفین تساوی اخیر را از راست در Q^* ضرب کنیم، داریم:

$$QPCC^*P^*Q^* = CC^*P^*Q^* \Longrightarrow QPCC^*(QP)^* = CC^*P^*Q^*$$

و چون $QPCC^*(QP)^*$ هرمیتی است بنابراین $CC^*P^*Q^*$ هرمیتی است.

به طور مشابه از تساوی $R(A^*AP) = R(Q^*)$ نتیجه می گیریم:

$$Q^*P^*A^*AP = A^*AP.$$

حال اگر طرفین این تساوی را از راست در Q ضرب کنیم، داریم:

$$Q^*P^*A^*APQ = A^*APQ \Longrightarrow (PQ)^*A^*A(PQ) = A^*A(PQ)$$

و چون $(PQ)^*A^*A(PQ)$ هرمیتی است بنابراین A^*APQ هرمیتی است.

اثبات تساوی (۱۵):

با استفاده از لم **۳۹.۲.۱**، قسمت **(الف)** داریم:

$$y \in R(PC) \Longrightarrow \exists \ \ x_0 \ \ s.t \ \ y = (PC)x_0 = p(x_1)$$

$$\Longrightarrow y \in R(P)$$

و

$$y \in R(P) \Longrightarrow \exists \ \ x_0 \ \ s.t \ \ y = Px_0 = (A^\dagger ABCC^\dagger)x_0 = (A^\dagger ABCC^\dagger C)x_1 = (PC)x_1$$

$$\Longrightarrow y \in R(PC).$$

در این صورت نتیجه می گیریم:

$$R(P) = R(PC).$$

اثبات تساوی (۱۶):

با استفاده از لم **۳۹.۲.۱**، قسمت **(الف)** داریم:

$$R(PCC^*P^*) = R(PC(PC)^*) = R(PC).$$

اثبات تساوی (۱۷):

چون $R(CC^*P^*) = R(Q)$ است، در این صورت داریم:

$$y \in R(PCC^*P^*) \Longrightarrow \exists \ \ x_0 \ \ s.t \ \ y = (PCC^*P^*)x_0 = PQ(x_0)$$

$$\Longrightarrow y \in R(PQ)$$

و

$$y \in R(PQ) \Longrightarrow \exists \ \ x_۰ \ \ s.t \ \ y = (PQ)x_۱ = P(Qx_۰) = P((CC^*P^*)x_۰) = (PCC^*P^*)x_۱$$

$$\Longrightarrow y \in R(PCC^*P^*).$$

بنابراین نتیجه می گیریم :

$$R(PQ) = R(PCC^*P^*).$$

اثبات تساوی (۱۸):

با استفاده از لم **۳۹.۲.۱**، قسمت **(ج)** داریم:

$$C^{*\dagger}C^{\dagger}(CC^*P^*) = (C^{*\dagger}C^{\dagger})(CC^*)(C^{*\dagger}C^*B^*A^*A^{*\dagger}) = (CC^{\dagger}CC^{\dagger})(C^{*\dagger}C^*B^*A^*A^{*\dagger}) = CC^{\dagger}P^*.$$

اثبات تساوی (۱۹):

با توجه به اینکه $CC^{\dagger}$ خودتوان است، داریم:

$$CC^{\dagger}P^* = (CC^{\dagger})(C^{\dagger *}C^*B^*A^*A^{*\dagger}) = (CC^{\dagger})(CC^{\dagger})^*B^*A^*A^{*\dagger} = CC^{\dagger}(CC^{\dagger})B^*A^*A^{*\dagger}$$

$$= CC^{\dagger}B^*A^*A^{*\dagger} = (CC^{\dagger})^*B^*A^*A^{*\dagger} = C^{*\dagger}C^*B^*A^*A^{*\dagger} = P^*.$$

۲.٤ تعدادی حالت های خاص

در این قسمت تعدادی از نتایج حالت های خاص را که از شرایط قضیه **۱.۱.٤** بدست می آید، بررسی می کنیم. ([۱۶])

۱.۲.٤. $(B = I)$

در این حالت داریم $P = EF$، $Q = FE$ و $PQP = P$. بنابراین

$$(A^{\dagger}ACC^{\dagger})^۲ = A^{\dagger}ACC^{\dagger} \Longrightarrow (EF)^۲ = EF.$$

در این صورت $(EF-FE)^*(EF-FE)=0$. بنابراین اگر $EF-FE=T$ قرار دهیم، داریم:

$$T^*T=0 \Longrightarrow \|T^*T\|=\|T\|^2=0 \Longrightarrow T=0$$

$$\Longrightarrow EF=FE.$$

بنابراین نتیجه می گیریم:

$$P \overset{(1)}{=} Q \overset{(2)}{=} Q^* \overset{(3)}{=} Q^2.$$

با توجه به اینکه $EF=FE$ یعنی $A^\dagger ACC^\dagger = CC^\dagger A^\dagger A$، لذا داریم:

$$[A^\dagger A, CC^\dagger]=0.$$

به علاوه با استفاده از قضیه **۱.۱.٤**، قسمت **(۵)** نتیجه می گیریم:

$$R(CC^*P^*)=R(Q)=R(Q^*)=R(A^*AP)$$

در صورتی که

$$R(CC^*P^*) \overset{(4)}{=} R(CC^*A^\dagger ACC^\dagger) \overset{(5)}{=} R(CC^*A^\dagger A) \overset{(6)}{=} R(CC^*A^*)$$

و

$$R(A^*AP) \overset{(7)}{=} R(A^*AA^\dagger ACC^\dagger) \overset{(8)}{=} R(A^*AC).$$

همچنین چون $R(CC^*P^*)=R(Q)$، $R(A^*AP)=R(Q^*)$ و $Q=Q^*$، در این صورت داریم:

$$R(A^*AC)=R(CC^*A^*).$$

از طرفی می توانیم نتیجه بگیریم:

$$R(A^*AC)=R(A^*)\cap R(C).$$

اثبات تساوی (۱):

$$EF = FE \Longrightarrow P = Q.$$

اثبات تساوی (۲):

$$Q^* = A^* A^{*\dagger} C^{*\dagger} C^* = A^\dagger A C C^\dagger = Q.$$

اثبات تساوی (۳):

$$(EF)^2 = EF \Longrightarrow P^2 = P \Longrightarrow Q^2 = Q.$$

اثبات تساوی (٤):

چون $Q = P^*$، لذا داریم:

$$R(CC^*P^*) = R(CC^*A^\dagger ACC^\dagger).$$

اثبات تساوی (٥):

$$R(CC^*P^*) = R(CC^*C^{*\dagger}C^*A^*A^{*\dagger}) = R(CC^*A^\dagger A).$$

اثبات تساوی (٦):

با استفاده از لم **۳۹.۲.۱**، داریم:

$$y \in R(CC^*A^\dagger A) \Longrightarrow \exists \;\; x_0 \;\; s.t \;\; y = (CC^*A^\dagger A)x_0 = (CC^*A^*)x_1$$

$$y \in R(CC^*A^*)$$

و

$$y \in R(CC^*A^*) \Longrightarrow \exists \;\; x_0 \;\; s.t \;\; y = (CC^*A^*)x_0 = (CC^*A^\dagger A)x_1$$

$$\Longrightarrow y \in R(CC^*A^\dagger A).$$

لذا با توجه به بحث بالا نتیجه می گیریم:

$$R(CC^*A^*) = R(CC^*A^\dagger A).$$

اثبات تساوی (۷):

با توجه به اینکه $P = A^\dagger ACC^\dagger$، لذا داریم:

$$R(A^*AP) = R(A^*AA^\dagger ACC^\dagger).$$

اثبات تساوی (۸):

با استفاده از قضیه **۳۷.۲.۱ (د)** و لم **۳۹.۲.۱ (الف)** داریم:

$$y \in R(A^*AA^\dagger ACC^\dagger) \Longrightarrow \exists \ \ x_۰ \ \ s.t \ \ y = (A^*AA^\dagger ACC^\dagger)x_۰ = (A^*AC)x_۱$$

$$\Longrightarrow y \in R(A^*AC)$$

و

$$y \in R(A^*AC) \Longrightarrow \exists \ \ x_۰ \ \ s.t \ \ y = (A^*AC)x_۰ = (A^*AA^\dagger ACC^\dagger)x_۱$$

$$\Longrightarrow y \in R(A^*AA^\dagger ACC^\dagger).$$

بنابراین با توجه به بحث بالا نتیجه می گیریم:

$$R(A^*AA^\dagger ACC^\dagger) = R(A^*AC).$$

۲.۲.٤ (A و C معکوس پذیر)

در این حالت $E = I$، $F = I$، $P = B$ و $Q = B^\dagger$ را نتیجه می گیریم و با استفاده از قضیه **۱.۱.٤ (د)** داریم :

$$R(A^*AB) = R(Q^*) = R(B^{\dagger *}) = R(B)$$

و

$$R(CC^*B^*) = R(Q) = R(B^\dagger) = R(B^*).$$

همچنین بنا بر قضیه **۱.۱.٤(ب)**، $A^*ABB^\dagger$ و $B^\dagger BCC^*$ هرمیتی است. بنابراین

$[A^*A, BB^\dagger] = ۰$ و $[CC^*, B^\dagger B] = ۰$.

۳.۲.٤ (C معکوس پذیر)

در این حالت $F = I$، $P = EB = A^\dagger AB$ و $Q = B^\dagger E = B^\dagger A^\dagger A$. سپس با توجه به تساوی $Q = P^-$ نتیجه می گیریم:

$$B^\dagger A^\dagger = (AB)^-.$$

٤.۲.٤ ($R(B) \subseteq R(A^*)$ و $R(B^*) \subseteq R(C)$)

در این حالت $EB = B$ و $BF = B$، لذا

$P \overset{(۹)}{=} B$ و $Q \overset{(۱۰)}{=} B^\dagger$.

با توجه به قضیه **۱.۱.٤ (و)** داریم $R(A^*AP) = R(Q^*)$ و $R(CC^*P^*) = R(Q)$. بنابراین نتیجه می گیریم:

$$R(A^*AB) = R(A^*AP) = R(Q^*) = R(B^{\dagger *}) = R(B)$$

و

$$R(CC^*B^*) = R(CC^*P^*) = R(Q) = R(B^\dagger) = R(B^*).$$

اثبات تساوی (۹):

$$P = EBF = BF = B.$$

اثبات تساوی (۱۰):

$$Q = FB^\dagger E = B^\dagger E = B^\dagger.$$

٥.٢.٤. ($A = E$ و $C = F$)

در این حالت $P = EBF$ و $Q = FB^{\dagger}E$. با توجه به قضیه **١.١.٤ (د)** نتیجه می گیریم:

$Q = P^{-}$، $R(P) \overset{(۱۱)}{=} R(Q^*)$ و $R(P^*) \overset{(۱۲)}{=} R(Q)$.

اثبات تساوی (۱۱):

$$R(Q^*) = R(A^*AP) = R(AA^{\dagger}AP) = R(AP) = R(AA^{\dagger}ABCC^{\dagger}) = R(A^{\dagger}AA^{\dagger}ABCC^{\dagger})$$

$$= R(A^{\dagger}ABCC^{\dagger}) = R(P).$$

اثبات تساوی (۱۲):

$$R(Q) = R(CC^*P^*) = R(CC^{\dagger}CP^*) = R(CP^*) = R(CF^*B^*E^*) = R(CC^{\dagger}CC^{\dagger}B^*E^*)$$

$$= R(CC^{\dagger}B^*E^*) = R(F^*B^*E^*) = R(P^*).$$

٦.٢.٤. (B یک ایزومتری جزئی)

اگر $B^* = B^{\dagger}$ باشد آنگاه $Q = P^*$ و از شرط $(PQ)^۲ = PQ$ داریم:

$$(PP^*)^۲ = PP^*.$$

لذا PP^* خودتوان است. بنابراین با توجه به قضیه **۳۱.۲.۱**، P و Q ایزومتری جزئی هستند.

■

مراجع

[1] *E. Arghiriade. Remarques sur inverse generalisee dun produict de matrices.* Atti Accad. Naz. Lincei Rend. CL. Sci. Fis Math. Natur, *42(8):621–625, 1967.* 50

[2] *A. Ben-Israel and T.N.E. Greville.* Generalized inverses: Theory and applications. *Springer, New York, second edition, 2003.* , 5, 10, 11

[3] *D.S. Bernstein.* Matrix Mathematics. *Theory, Facts, and Formulas. Princeton University Press, New York, 2009.* 8

[4] *R.H. Bouldin. The pseudo-inverse of a product.* SIAM J. Appl. Math, *25:489–495, 1973.*

[5] *R.H. Bouldin. Generalized inverses and factorizations.* in: Recent Applications of Generalized Inverses, in: Pitman Ser. Res. Notes in Math, *66:233–248, 1982.*

[6] *S.L. Campbell and C.D. Meyer.* Generalized inverses of linear transformations, *volume 56 of* Classics in applied mathematics. *London: Pitman Pub, North carolina state university, 1979.* 8

[7] *J.B. Conwey.* A course in functional analysis. *Springer, Verlag New York Inc, second edition, 1985.* 3, 13

[8] *D.S. Djordjevic. Unified approach to the reverse order rule for generalized inverses.* Acta Sci. Math, *167:761–776, 2001.*

[9] *D.S. Djordjevic and N.C. Dincic. Reverse order laws for the moore-penrose inverse.* J. Math. Anal. Appl, *361:252–261, 2010.* 13, 14, 16

[10] *D.S. Djordjevic and V. Rakocevic. Lectures on generalized inverses.* Faculty of Sciences and Mathematics, University of Nis, *2008.*

[11] *G.B. Folland.* Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications. *A Wiley Series of Texts, Monographs and Tracts. canada, second edition, 1999.* 2

[12] *I. Gohberg, S. Goldberg, and M.A. Kaashoek.* Classes of linear operators, *volume 1. Birkhauser Verlag Basel, 1990.* 8, 9

[13] *T.N.E. Greville. Note on the generalized inverse of a matrix product.* SIAM Rev*, 8:518–521, 1966. , 50*

[14] *R.E. Hartwig. Block generalized inverses.* Arch. Rational Mech. Anal.*, 61:197–251, 1976. 50*

[15] *R.E. Hartwig. Rank factorization and moore-penrose inversion.* J. lndust. Math.*, 26:49–63, 1976. 50*

[16] *R.E. Hartwig. The reverse order law revisited.* Linear Algebra and its Applications*, 76:241–246, 1986. 51, 61*

[17] *S. Isumino. The product of operators with closed range and an extension of the reverse order law.* Tohoku Math. J*, 34:43–52, 1982.*

[18] *J.J. Koliha, D.S. Djordjevic, and Cvetkovic IIiC. Moore-penrose inverse in rings with involution.* Linear Algebra Appl*, 426:371–381, 2007.*

[19] *E.C. Lance.* Hilbert c*-modules. *A toolkit for operator algebraists. Cambridge university press, second edition, 1995. 11*

[20] *D.W. Robinson. On the covariance of the moore-penrose inverse.* Linear Algebra Appl, to appear*. 50*

[21] *K. Sharifi. The product of operators with closed range in hilbert c*-modules.* Linear Algebra and its Applications*, 435:1122–1130, 2011. 16*

[22] *Y. Tian. Reverse order laws for the generalized inverses of multiple matrix products.* Linear Algebra Appl*, 211:85–100, 1994.*

[23] *Y. Tian. Using rank formulas to characterize equalities for moore-penrose inverses of matrix products.* Appl. Math. Cpmput*, 147:581–600, 2004.*

[24] *M. Wei and W. Guo. Reverse order laws for least squares g-inverses and minimum norm g-inverses of products of two matrices.* Linear Algebra Appl*, 342:117–132, 2002.*

فهرست الفبایی

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

الحاق .... *Adjoint*
ایزومتری .... *Isometry*
ایزومتری جزئی .... *Partial isometry*
برد .... *Range*
برد بسته .... *Closed range*
بعد .... *Dimensional*
تصویری .... *Projection*
تصویری متعامد .... *Orthogonal projection*
جابه جاگر .... *Comutator*
حاصل جمع مستقیم .... *Direct sum*
درایه .... *Entry*
رتبه .... *Rank*
زیرفضاهای متعامد .... *Orthogonal subspaces*
عملگر پوشا .... *Surjection operator*
عملگر خطی .... *Linear operator*
عملگر خودتوان .... *Idempotent operator*
عملگر کراندار .... *Bounded operator*
عملگر یک به یک .... *Injective operator*
فضای برداری مختلط .... *Complex vector space*
فضای پوچ .... *Null space*
فضای پیش هیلبرت .... *Pre Hilbert space*
فضای حاصل ضرب درونی .... *Inner product space*
فضای سطری .... *Row space*
فضای هیلبرت .... *Hilbert space*
قانون ترتیب عکس .... *Reverse order law*
قانون ترتیب عکس سه گانه .... *Triple reverse order law*
کامل .... *Complete*
ماتریس .... *Matrix*
ماتریس همانی .... *Identical matrix*
ماتریس EP .... *EP matrix*
متمم پذیر .... *Complemented*
متناهی البعد .... *Finite dimensional*

مختلط .... *Complex*
معکوس بازتابی .... *Reflexive inverse*
معکوس پذیر .... *Invertible*
معکوس تعمیم یافته .... *Generalized inverse*
معکوس درونی .... *Inner inverse*
معادلات پنروز .... *Penrose equations*
معکوس مور–پنروز .... *Moore-Penrose inverse*
نامتناهی البعد .... *Infinite dimensional*
نامساوی مثلث .... *Triangle inequality*
نرم .... *Norm*
نیم گروه .... *Semigroup*
هرمیتی .... *Hermitian*
هم ارز .... *Equivalent*
یکانی .... *Unital*
$\{i, j, ..., k\}$–معکوس .... $\{i, j, ..., k\}$-*inverse*

Abstract

In this thesis, we present some definitions and some necessary and sufficient conditions for the reverse order law for Moore-Penrose inverse of operators on Hilbert spaces. we also study matrix formes of these operators and their Moore-Penrose inverses. some necessary and sufficient conditions are given for the triple reverse order law to hold for matixes. some special cases are also obtained.

Keywords: *Reverse order law, Moore-Penrose inverse and triple reverse order law.*

Shahrood University of Technology
Department of Mathematics

MS Thesis

Reverse order law for the Moore-Penrose generalized inverses

By:
Behnaz Ahmadi Bonakdar

Supervisor:
Kamran Sharifi

Advisor:
Mahdi Iranmanesh

Jun 2011