





دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد

بررسی برخی از مسائل مرتبه متغیر کسری زمان پیوسته و زمان گسسته

نگارنده: دانیال عرب یارمحمدی

استاد راهنما

دکتر حجت احسنی طهرانی

آبان ۱۳۹۹

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی



فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای دانیال عرب یارمحمدی با شماره دانشجویی ۹۷۱۱۶۴۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان مشخصات و جواب های سیستم های زمان گسسته مرتبه متغیر کسری که در تاریخ ۱۳۹۹/۰۷/۲۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☒ الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	☒ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۸
☐ ج) درجه خوب: نمره ۱۶-۱۷/۹۹	☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۴-۱۵/۹۹
☐ ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد	
نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی	

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر حجت احسنی طهرانی	دانشیار	
۲- استاد راهنمای دوم	-	-	-
۳- استاد مشاور	-	-	-
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سمیه مغاری	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر هادی نوری اسکندری	استادیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر مهدی قوتمند	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تقدیم به پدر و مادر عزیزم

سپاس‌گزاری...

با سپاس فراوان از زحمات پدر و مادر عزیزم و استاد راهنمای گرانقدرم که مرا در پیمودن این راه یاری نمودند.

تعهد نامه

اینجانب **دانیال عرب یار محمدی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **بررسی برخی از مسائل مرتبه متغیر کسری زمان پیوسته و زمان گسسته**، تحت راهنمایی **دکتر حجت احسنی طهرانی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه قصد بررسی سیستم های فضا حالت گسسته مرتبه متغیر کسری بر پایه ی تعاریف مختلفی از تفاضلات مرتبه متغیر کسری را داریم. علاوه بر این شرایط ضروری و کافی برای دسترس پذیری و مشاهده پذیری ارائه و اثبات شده اند. همچنین شرایط کافی برای کنترل پذیری نیز پیشنهاد شده است. پیش از این در فصل های مقدماتی به مطالعه ی عمیق درباره ی حساب کسری با تاکید بر عملگرهای مرتبه ی متغیر پرداخته ایم. فصل اول این پایان نامه شامل مفاهیم پایه و پیش نیاز است که در آن به مرور مختصری از حساب کسری و معرفی برخی توابع خاص پرداخته ایم. سپس تعاریفی از عملگرهای کسری مختلف را بیان و برخی از ویژگی های آنها را معرفی و در پایان فرمول های انتگرال جزء به جزء برای عملگر های مختلف را مرور می کنیم. در فصل دوم حساب تغییرات کسری را ارائه کرده ایم و به معرفی مختصری از حساب تغییرات کلاسیک و مرور مسائل متغیر مختلف مانند مسائل ایزوپریمتریک یا مسائل با نقاط پایانی متغیر می پردازیم سپس در پایان این فصل، قضیه ی حساب تغییرات کسری و تعدادی مسائل متغیر کسری با مرتبه ی متغیر را ارائه می نمائیم. در ادامه برخی نتایج جدید را روی حساب تغییرات کسری مرتبه متغیر، قاعده مند می کنیم. در فصل سوم با در نظر گرفتن سه نوع از مشتقات کسری کاپوتو مرتبه متغیر، فرمول هایی تقریبی برای آنها ارائه کرده و کران هایی بالا برای خطای این تقریبات بدست می آوریم. در فصل چهارم، ترکیب مشتق کسری کاپوتو از مرتبه ی متغیر را معرفی و به عملگر های مرتبه بالاتر آن تعمیم می دهیم سپس معادلات اویلر- لاگرانژ کسری را برای انواع مختلف مسائل کسری حساب تغییرات، همراه با و بدون وجود قید ها اثبات می کنیم. در فصل آخر به بررسی سیستم های فضا حالت گسسته ی مرتبه متغیر کسری بر پایه ی تعاریف مختلفی از تفاضلات مرتبه متغیر کسری پرداخته ایم و شرایط کافی و ضروری برای دسترس پذیری و مشاهده پذیری ارائه و اثبات کرده ایم.

کلمات کلیدی: حساب تغییرات، شرایط لازم بهینگی، مرتبه متغیر کسری، کنترل پذیری، دسترس پذیری، مشاهده پذیری، مسائل ایزوپریمتریک

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
۱	۱ پیش نیازها
۱	۱.۱ پیشگفتار
۳	۲.۱ توابع خاص
۵	۳.۱ مشتقات و انتگرال های کسری
۵	۱.۳.۱ عملگرهای کلاسیک
۸	۲.۳.۱ برخی خواص مشتق کاپوتو
۱۰	۳.۳.۱ ترکیب مشتق کاپوتو
۱۲	۴.۳.۱ عملگرهای مرتبه متغیر
۱۴	۵.۳.۱ عملگرهای کسری تعمیم یافته
۱۵	۶.۳.۱ قاعده انتگرال جزء به جزء برای انتگرال کسری
۱۷	۲ حساب تغییرات
۱۷	۱.۲ حساب تغییرات کلاسیک
۱۹	۱.۱.۲ معادلات اویلر-لاگرانژ
۲۰	۲.۱.۲ مسائل با نقاط پایانی متغیر
۲۲	۳.۱.۲ مسائل حساب تغییرات محدود شده
۲۳	۲.۲ حساب تغییرات کسری
۲۳	۱.۲.۲ معادلات اویلر-لاگرانژ کسری
۲۵	۲.۲.۲ مسائل تغییرات کسری از مرتبه متغیر
۲۷	۳ بسط فرمول ها برای مشتقات کسری
۲۸	۱.۳ عملگرهای کسری نوع کاپوتو از مرتبه متغیر
۲۸	۱.۱.۳ مشتقات کاپوتو برای توابع تک متغیره
۳۴	۲.۱.۳ مشتقات کاپوتو برای توابع چند متغیره
۳۷	۲.۳ تقریب های عددی
۴۵	۳.۳ مثال ها

۴۶	کاربردها	۴.۳
۴۷	یک معادله انتشار زمان-کسری	۱.۴.۳
۴۹	یک معادله دیفرانسیل جزئی کسری در مکانیک سیالات	۲.۴.۳
۵۱	حساب تغییرات کسری	۴
۵۲	معرفی	۱.۴
۵۲	ترکیب عملگرهای مرتبه متغیر	۱.۱.۴
۵۶	تعمیم انتگرال جزء به جزء کسری	۲.۱.۴
۵۷	مسئله‌ی حساب تغییرات اساسی	۲.۴
۵۸	شرایط لازم بهینگی	۱.۲.۴
۶۲	حالت‌های خاص	۲.۲.۴
۶۲	مثال‌ها	۳.۲.۴
۶۳	مسائل متغیر از مرتبه‌ی بالاتر	۳.۴
۶۴	شرایط لازم بهینگی	۱.۳.۴
۷۰	مثال	۲.۳.۴
۷۱	مسائل متغیر با تأخیر زمانی	۴.۴
۷۱	شرایط لازم بهینگی	۱.۴.۴
۷۵	مثال	۲.۴.۴
۷۵	مسائل ایزوپریمتریک	۵.۴
۷۵	شرایط لازم بهینگی	۱.۵.۴
۸۰	شرایط لازم بهینگی	۲.۵.۴
۸۲	مثال	۳.۵.۴
۸۳	مسائل حساب تغییرات با قیدهای هولونومیک	۶.۴
۸۴	شرایط لازم بهینگی	۱.۶.۴
۸۸	مثال	۲.۶.۴
۸۸	مسئله‌ی متغیر کسری هرگلوتر	۷.۴
۸۸	مسئله اساسی هرگلوتر	۱.۷.۴
۹۱	متغیرهای مستقل چندتایی	۲.۷.۴
۹۵	مثال‌ها	۳.۷.۴
۹۹	سیستم‌های زمان-گسسته از مرتبه‌ی متغیر کسری	۵
۹۹	معرفی	۱.۵
۱۰۰	تفاضلات مرتبه متغیر کسری	۲.۵
۱۰۲	سیستم‌های فضا-حالت مرتبه متغیر کسری گسسته	۳.۵
۱۰۷	دسترس پذیری	۴.۵
۱۰۸	کنترل پذیری	۵.۵
۱۰۹	مشاهده پذیری	۶.۵
۱۱۱	مثال‌های عددی	۷.۵

۸.۵ پیشنهادات ۱۱۳

۱۱۵ مراجع

۱۱۹ آ کدهای MATLAB

۱.آ انتگرال های کسری ریمن- لیوویل از مرتبه بالاتر ۱۲۰

۲.آ مشتقات کسری کاپوتو از مرتبه بالاتر ۱۲۱

۳.آ مشتق کاپوتوی کسری مرکب از مرتبه بالا ۱۲۵

فهرست تصاویر

۳۵	۱.۳	مقایسه میان مشتقات کسری مرتبه ثابت و مرتبه متغیر
	۲.۳	نوع III مشتق چپ کاپوتو از مرتبه $\alpha(t)$ برای مثال بخش ۳.۳ – تحلیلی
۴۶		در مقابل تقریب های عددی بدست آمده از قضیه ی ۵.۳
	۳.۳	نوع I مشتق چپ کاپوتو از مرتبه $\alpha(t)$ برای مثال بخش ۳.۳ – تحلیلی در
۴۶		مقابل تقریب های عددی بدست آمده از قضیه ی ۶.۳
	۴.۳	نوع II مشتق چپ کاپوتو از مرتبه $\alpha(t)$ برای مثال بخش ۳.۳ – تحلیلی در
۴۷		مقابل تقریب های عددی بدست آمده از قضیه ی ۷.۳
	۵.۳	نوع III مشتق چپ کاپوتو از مرتبه $\beta(t)$ برای مثال بخش ۳.۳ – تحلیلی
۴۷		در مقابل تقریب های عددی بدست آمده از قضیه ی ۵.۳
	۶.۳	نوع I مشتق چپ کاپوتو از مرتبه $\beta(t)$ برای مثال بخش ۳.۳ – تحلیلی در
۴۸		مقابل تقریب های عددی بدست آمده از قضیه ی ۶.۳
	۷.۳	نوع II مشتق چپ کاپوتو از مرتبه $\beta(t)$ برای مثال بخش ۳.۳ – تحلیلی در
۴۸		مقابل تقریب های عددی بدست آمده از قضیه ی ۷.۳
۹۷	۱.۴	نمودار های تابع $z(\bar{x}, t)$
	۱.آ	انتگرال های کسری ریمن – لیوویل از مثال ۱.آ: $x(t) = t^2$ با نمودار پیوسته، انتگرال چپ ${}_a I_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} x(t)$ با حالت ” – ” و انتگرال راست ${}_t I_b^{\alpha(\cdot, \cdot)} x(t)$ با حالت ” – ” $\times$ ۱۲۲
	۲.آ	مشتقات کسری کاپوتو از مثال ۲.آ: $x(t) = t^4$ با نمودار پیوسته، مشتق چپ ${}_a^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} x(t)$ با حالت ” – ” و مشتق راست ${}_t D_b^{\alpha(\cdot, \cdot)} x(t)$ با حالت ” – ” $\times$ ۱۲۳
	۳.آ	مشتقات کسری کاپوتو از مثال ۳.آ: $x(t) = e^t$ با نمودار پیوسته، مشتق چپ ${}_a^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} x(t)$ با حالت ” – ” و مشتق راست ${}_t D_b^{\alpha(\cdot, \cdot)} x(t)$ با حالت ” – ” $\times$ ۱۲۴
	۴.آ	مقادیر دقیق بدست آمده از لم ۱.۴ برای توابع مثال ۴.آ و تقریب های محاسباتی بدست آمده از کد Chebfun ۱۲۵

- ۵.آ مشتق کسری مرکب کاپوتو ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t)$ برای $\alpha(\cdot, \cdot)$ ، $\beta(\cdot, \cdot)$ و $x(t)$ از
 مثال ۵.آ: خط پیوسته برای $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (0/2, 0/8)$ ، حالت ” $\rightarrow$ ” برای
 ۱۲۶ $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (0/5, 0/5)$ و حالت ” $\times$ ” برای $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (0/8, 0/2)$

فهرست جداول

- ۱.آ مشتق کسری مرکبِ کاپوتو ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot,\cdot),\beta(\cdot,\cdot)} x(t)$ برای $\alpha(\cdot,\cdot)$ ، $\beta(\cdot,\cdot)$ و $x(t)$ از
 مثال آ.۵. حالت ۱: $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (0/2, 0/8)$ ؛ حالت ۲: $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) =$
 ۱۲۷ $(0/5, 0/5)$ ؛ و حالت ۳: $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (0/8, 0/2)$

فصل ۱

پیش نیاز ها

۱.۱ پیشگفتار

حساب کسری (FC)^۱ حوزه ای از آنالیز ریاضی است که به بررسی و همچنین کاربرد انتگرالها و مشتقات مرتبه دلخواه می پردازد. بنابراین (FC) ادامه حساب مرتبه صحیحی است که انتگرالها و مشتقات هر مرتبه حقیقی یا مختلط را بررسی می کند.

ایده ی FC در سال ۱۶۹۵ طی نامه ای که ال هوپیتال^۲ به لایب نیتز^۳ مشتق مرتبه $1/2$ را پیشنهاد کرد به وجود آمد. پس از آنکه لایب نیتز در نشریات خود نظریه ای راجع به مشتق n ام تابع y بصورت $\frac{d^n y}{dx^n}$ معرفی کرد، ال هوپیتال نامه ای به لایب نیتز نوشت و از او درباره معنای مشتق مرتبه کسری پرسید: ”اگر $n = 1/2$ باشد چه می شود؟“ در مورخه ۳۰ سپتامبر ۱۶۹۵ لایب نیتز به او پاسخ داد ”این یک تناقض آشکار است و روزی نتایج مفیدی به همراه خواهد آورد“ که امروزه میدانیم این یک حقیقت است. پس از آن لایب نیتز به کارش درباره مشتقات مرتبه عمومی ادامه داد تا در سال ۱۷۳۰ اوایلر به بررسی نتایج حاصل از مشتقات با مرتبه کسری پرداخت.

اما در سال ۱۸۱۹ به کمک لاکروس^۴ اولین تعریف مشتق کسری بر پایه مشتق n ام تابع توانی ارائه شد. عبارت $y = x^m$ با m صحیح و مثبت را در نظر بگیرید لاکروس مشتق n ام را به شکل

^۱Fractional Calculus

^۲L Hopital

^۳Leibniz

^۴Lacroix

زیر گسترش داد

$$\frac{d^m y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, \quad m \geq n$$

و از تعریف تابع گاما برای تعمیم فاکتوریل استفاده کرد

$$\frac{d^m y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

او همچنین مثال زیر به ازای $n = \frac{1}{2}$ و $m = 1$ را بررسی کرد:

$$\frac{d^{1/2} x}{dx^{1/2}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} x^{1/2} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}. \quad (1.1)$$

از آن پس ریاضی دانان بسیاری مانند، فوریه^۱، آبل، ریمان^۲، لیوویل^۳ و... برای گسترش این موضوع تلاش کردند. یکی از اولین کاربردهای حساب کسری در سال ۱۸۲۳ توسط نیلز آبل^۴، هنگام حل معادله انتگرال به فرم زیر بدست آمد:

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} x(\tau) d\tau = k,$$

که در فرمول مسئله تاتوکرون^۵ بکار رفته بود.

صورت های مختلفی از عملگرهای کسری، مانند مشتقات کسری ریمن-لیوویل، گرانوالد-لینکوف، ویل، کاپوتو، مارکاد و یا هادامارد در طول زمان معرفی شده اند. اولین تقریب مربوط به تعریف ریمن-لیوویل است که بر پایه تکرار n باره‌ی عملگر انتگرال کلاسیک و سپس بررسی فرمول کوشی که $n!$ توسط تابع گاما جایگزین شده و در نهایت انتگرال کسری از مرتبه غیر صحیح است، می باشد. لذا با استفاده از این عملگر، برخی از مشتقات کسری ذکر شده در بالا تعریف می شوند.

حسابان کسری در طول سه قرن، تنها به عنوان موضوعی نظری در ریاضیات شناخته می شد. اما به تازگی، حسابان کسری نقش مهم و کاربردی را نه تنها در حوزه های مختلف ریاضی که در فیزیک، شیمی، مکانیک، مهندسی، بیولوژی، اقتصاد و سایر زمینه های علمی داشته است. در میان این کاربردها، بسیاری از پدیده های جهان واقعی، توسط مشتقات مرتبه غیر صحیح در مقایسه با حساب مرتبه صحیح متداول، به شکل بهتری تشریح می شود. درواقع مشتقات مرتبه کسری، نقش منحصر بفردی در مدل دهی حرکات دینامیکی به شکل موثر دارند. اولاً هر مرتبه حقیقی برای مشتقات را می توان بررسی کرد، پس ما محدود به مشتقات مرتبه صحیح نیستیم؛ ثانیاً آنها برخلاف مشتقات متداول، عملگرهای غیر موضعی اند، به این معنا که دارای حافظه اند. به کمک ویژگی حافظه، می توان به گذشته فرایندها دسترسی یافت. پردازش سیگنال، مدلینگ و کنترل موضوع بسیاری از مقالات در چند دهه اخیر بوده است. در بسیاری از کاربردهای حساب کسری، مرتبه مشتق در طول فرآیند ثابت در نظر گرفته می شود، یعنی، هنگام تعیین مرتبه $\alpha > 0$ برای جواب معادله دیفرانسیل کسری

¹Fourier

²Riemann

³Liouville

⁴Niels Abel

⁵Tautochrone problem

جهت نزدیک تر بودن جواب به داده‌ی تجربی، مرتبه‌ی $\alpha > 0$ را ثابت در نظر می‌گیریم. البته شاید زمانی که مسیرها یک فرایند دینامیکی هستند، این گزینه خوبی نباشد و مرتبه تغییر کند. اتفاق جالب تر هنگامی رخ می‌دهد که مرتبه‌ی $\alpha > 0$ در انتگرال‌ها و مشتقات کسری در طول فرایند ثابت نباشد یعنی $\alpha(t)$ برای تابع بودن، وابسته به زمان باشد. لذا ما در جستجوی بهترین تابع $\alpha(t)$ هستیم تا معادله دیفرانسیل کسری مرتبه متغیر $D^{\alpha(t)}y(t) = f(t, y(t))$ ، فرایند تحت مطالعه را بهتر تشریح کند. این تقریب به تازگی انجام شده است. نمونه‌ای از حساب کسری مرتبه متغیر در سال ۱۹۹۳ توسط سامکو و رز^۱، معرفی شد. پس از آن ریاضی دانان متعددی نتایج مهمی درباره حساب کسری مرتبه متغیر و کاربرد های مختلفی در زمینه‌ی مکانیک، مدل سازی خطی و غیر خطی اسیلاتورهای ویسکو الاستیکی^۲ که در آن مرتبه مشتق بر حسب زمان تغییر می‌کند، بدست آوردند. رایج ترین عملگرهای کسری که در مقالات مورد توجه اند به گذشته‌ی فرایند دسترسی دارند که معمولاً عملگر کسری چپ نام دارند. اما در برخی حالت ها، ممکن است به دنبال آینده‌ی فرایند و محاسبه‌ی $\alpha(t)$ تحت تاثیر آن باشیم. لذا در این حالت، به بررسی مشتق کسری راست می‌پردازیم. جدیداً در اقداماتی، هدف اصلی گسترش نظریه‌ی ای است که هر دو عملگر کسری محاسبه شوند. به همین منظور، تعدادی ترکیب عملگر کسری معرفی شده اند، مانند: ترکیب مشتقات کسری متقارن، مشتق و انتگرال کسری ریسز، مشتق کسری ریسز- کاپوتو و ترکیب مشتق کسری کاپوتو که شامل ترکیب خطی عملگرهای کسری چپ و راست می‌باشد. به منظور افزایش کاربردهای حسابان کسری در علم و مهندسی، تقریب های عددی به عنوان ابزار هایی برای حل این چنین مسائل رشد و گسترش یافته اند که امروزه مطالعه گسترده ای روی فرمول های تقریب عددی در حال انجام است. مثلاً برای مدلسازی عددی معادلات انتشار کسری زمان، خواننده را به [۱۵] ارجاع می‌دهیم.

۲.۱ توابع خاص

پیش از معرفی اصول پایه‌ی مربوط به عملگرهای کسری، چهارنوع از توابع مهم در حساب کسری و برخی ویژگی های آنها را مرور می‌کنیم: تابع گاما، پسی، بتا و تابع میتاگ-لفلر.

تعریف ۱.۱. تابع اویلر گاما^۳ که نتیجه‌ی بسط تابع فاکتوریل برای اعداد حقیقی است، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} \tau^{t-1} e^{-\tau} d\tau, \quad t > 0.$$

برای مثال، $\Gamma(1) = 1$ ، $\Gamma(2) = 1$ و $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ می‌باشد. برای n صحیح و مثبت داریم، $\Gamma(n) = (n-1)!$. توجه داشته باشید که تعاریف دیگری برای تابع گاما وجود دارد و امکان تعریف آن برای اعداد مختلط به جز اعداد صحیح نامثبت نیز می‌باشد. تابع گاما، به عنوان مهمترین تابع اویلری در حسابان کسری شناخته می‌شود، زیرا تقریباً

¹Samko and Ross

²viscoelasticity oscillators

³Euler Gamma function

در تمام تعاریف مشتق و انتگرال کسری وجود دارد. یک خاصیت اساسی Γ ، که بعداً از آن استفاده خواهیم کرد، از انتگرال جزء به جزء بدست آمده است:

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t).$$

تعریف ۲.۱. تابع پسی^۱ که مشتق لگاریتم تابع گاما است به شکل زیر نمایش داده می‌شود

$$\Psi(t) = \frac{d}{dt} \ln(\Gamma(t)) = \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}.$$

تابع مذکور برای راحتی در جایگزینی ترکیب توابع گاما استفاده شده است. این تابع در حسابان کسری اهمیت دارد زیرا ساختاری را ایجاد می‌کند که مشابه مشتق و انتگرال کسری توابع زیادی به ویژه تابع توانی می‌باشد.

تعریف ۳.۱. تابع بتا B بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(t, u) = \int_0^1 s^{t-1} (1-s)^{u-1} ds, \quad t, u > 0.$$

این تابع دارای ویژگی مهم زیر است:

$$B(t, u) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(u)}{\Gamma(t+u)}.$$

واضح است که با این ویژگی، تابع بتا متقارن است، یعنی:

$$B(t, u) = B(u, t)$$

. تابع بعدی، مستقیماً از تعمیم سری نمایی بدست آمده که توسط ریاضی دان میتاگ-لفلر^۲ در سال ۱۹۰۳ تعریف شده است، [۳۳] این تابع به دو نوع تابع تک پارامتری و دو پارامتری تقسیم می‌شود.

تعریف ۴.۱. فرض کنید $\alpha > 0$ باشد. تابع E_α بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad t \in \mathbb{R}$$

که تابع تک پارامتری میتاگ-لفلر نام دارد.

به ازای $\alpha = 1$ ، این تابع با سری نمایی e^t معادل است، یعنی:

$$E_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = e^t.$$

هنگامی که جواب معادلات دیفرانسیل معمولی خطی با ضرایب ثابت، بصورت تابع نمایی ظاهر می‌شود، تابع میتاگ-لفلر بطور طبیعی در حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری بکار می‌رود. به همین علت، اخیراً، تابع میتاگ-لفلر به عنوان تابع مهمی در قضیه حسابان کسری و کاربرد های آن شده است. ضمناً این تابع را می‌توان با دو آرگومان نیز نمایش داد، که این تعمیم تابع میتاگ-لفلر توسط ویمن^۳ در سال ۱۹۰۵ انجام شد [۲۳].

¹Psi

²Mittag-Leffler

³Wiman

تعریف ۵.۱. تابع دو پارامتری از نوع میتاگ-لفلر با دو پارامتر $\alpha, \beta > 0$ بصورت زیر تعریف می شود:

$$E_{\alpha, \beta}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

اگر $\beta = 1$ باشد، این تابع با تابع میتاگ-لفلر کلاسیک، معادل است، یعنی $E_{\alpha, 1}(t) = E_{\alpha}(t)$.

۳.۱ مشتقات و انتگرال های کسری

در این بخش همه ی تعاریفی از عملگرهای مشتق کسری و انتگرال کسری که در این پایان نامه استفاده شده است را ارائه می دهیم. در پایان تعدادی از فرمول های انتگرال جزء به جزء را به دلیل نقش اساسی آنها در معادلات مشتق اویلر-لاگرانژ، معرفی می کنیم.

۱.۳.۱ عملگرهای کلاسیک

همانطور که قبلا گفتیم، بیش از یک راه برای تعمیم عملگرهای مرتبه صحیح به حالت غیرصحیح وجود دارد. اکنون به بیان تعاریف و ویژگی های تعدادی عملگر کسری، با حذف جزئیاتی راجع به قیدها که وجود چنین عملگرهای کسری را تایید می کنند، می پردازیم. در حالت کلی، مشتقات کسری با استفاده از انتگرال های کسری تعریف می شوند. اگرچه صورت های متعددی از انتگرال های کسری وجود دارد، ما به بیان دو عملگر انتگرال کسری بسنده می کنیم.

فرض کنید $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع انتگرال پذیر و $\alpha > 0$ یک عدد حقیقی باشد. با شروع از فرمول کوشی و n بار انتگرال گیری که $n \in \mathbb{N}$ ، داریم:

$$\begin{aligned} {}_a I_t^n x(t) &= \int_a^t d\tau_1 \int_a^{\tau_1} d\tau_2 \cdots \int_a^{\tau_{n-1}} x(\tau_n) d\tau_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} x(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.1)$$

ریمن و لیوویل انتگرال کسری را نتیجه ی تعمیم معادله ی (۲.۱) به مقادیر غیرصحیح n و استفاده از تعریف تابع گاما Γ می دانستند. به کمک این، دو مفهوم مهم انتگرال های کسری چپ و راست ریمن-لیوویل را معرفی می کنیم.

تعریف ۶.۱. انتگرال های کسری چپ و راست ریمن-لیوویل از مرتبه α به ترتیب عبارتند از:

$${}_a I_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau, \quad t > a$$

و

$${}_t I_b^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau, \quad t < b.$$

ثابت های a و b به ترتیب کران های پایین و بالای دامنه انتگرال را مشخص می کنند. علاوه بر این، اگر x یک تابع پیوسته باشد، بطوریکه $\alpha \rightarrow 0$ ، ${}_a I_t^\alpha = {}_t I_b^\alpha = I$ ، عملگر همانی است، یعنی، ${}_a I_t^\alpha x(t) = {}_t I_b^\alpha x(t) = x(t)$. عملگر انتگرال کسری دوم که توسط هادامارد^۱ در سال ۱۸۹۲ معرفی شد را ارائه می کنیم [۱۸].

تعریف ۷.۱. انتگرال های کسری چپ و راست هادامارد از مرتبه α ، به ترتیب عبارتند از:

$${}_a J_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{\tau}\right)^{\alpha-1} \frac{x(\tau)}{\tau} d\tau, \quad t > a$$

و

$${}_t J_b^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \left(\ln \frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} \frac{x(\tau)}{\tau} d\tau, \quad t < b.$$

سه مورد از تعاریف مشتق کسری که مکرراً استفاده می شوند، عبارتند از: مشتقات کسری گرانوالد-لتینکوف^۲، ریمن-لیوویل و کاپوتو^۳ [۳۲]. تعاریف دیگری از سایر ریاضی دانان نیز موجود است مانند: ویل، فوریر، کوشی و آبل. فرض کنید $x \in AC([a, b]; \mathbb{R})$ یک تابع پیوسته مطلق^۴ در بازه $[a, b]$ و α عدد حقیقی مثبت باشد. با استفاده از تعریف ۶.۱ انتگرال های کسری ریمن-لیوویل، مشتق های کسری چپ و راست ریمن-لیوویل و کاپوتو بصورت زیر تعریف می شود.

تعریف ۸.۱. مشتق های کسری چپ و راست ریمن-لیوویل از مرتبه $\alpha > 0$ ، به ترتیب عبارتند از:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^\alpha x(t) &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n {}_a I_t^{n-\alpha} x(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x(\tau) d\tau, \quad t > a \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} {}_t D_b^\alpha x(t) &= \left(-\frac{d}{dt}\right)^n {}_t I_b^{n-\alpha} x(t) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} x(\tau) d\tau, \quad t < b \end{aligned}$$

که $n = [\alpha] + 1$ است.

تعریف زیر توسط کاپوتو در سال ۱۹۶۷ معرفی شده است. [۷]. در حالت کلی، مشتق های کسری کاپوتو بیشتر در زمینه های فیزیک و مهندسی کاربرد دارند.

¹Hadamard

²Grunwald-Letnikov

³Caputo

⁴Absolutely Continuous

تعریف ۹.۱. مشتقات کسری چپ و راست کاپوتو از مرتبه α ، به ترتیب بصورت زیر تعریف می شوند:

$${}_a^C D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau) d\tau, \quad t > a$$

و

$${}_t^C D_b^\alpha x(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau) d\tau, \quad t < b$$

که $n = [\alpha] + 1$ است اگر $\alpha \notin \mathbb{N}$ و $n = \alpha$ است اگر $\alpha \in \mathbb{N}$ باشد.

واضح است که عملگر های تعریف شده ی فوق، خطی اند. از این تعاریف بر می آید که مشتق کسری کاپوتو برای ثابت c برابر صفر است، در حالیکه با بررسی مشتق کسری ریمن-لیوویل در می یابیم این پاسخ نادرست است. اگر $x(t) = C$ که C ثابت باشد، داریم

$${}_a^C D_t^\alpha x(t) = {}_t^C D_b^\alpha x(t) = 0$$

و

$${}_a^C D_t^\alpha x(t) = \frac{C(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad {}_t^C D_b^\alpha x(t) = \frac{C(b-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

به همین علت، به نظر می رسد در برخی از کاربردها، مشتقات کسری کاپوتو، طبیعی تر از مشتقات کسری ریمن-لیوویل است.

تذکر ۱.۱. اگر α به n^- میل کند و $n \in \mathbb{N}$ باشد، خواهیم داشت:

$${}_a D_t^\alpha = {}_a^C D_t^\alpha = \left(\frac{d}{dt} \right)^n$$

و

$${}_t D_b^\alpha = {}_t^C D_b^\alpha = \left(-\frac{d}{dt} \right)^n.$$

همانطور که در پایین مشاهده می کنید، عملگرهای مشتق و انتگرال کسری ریمن-لیوویل با مرتبه α از توابع توانی، مجددا توابع توانی را باز می گردانند.

لم ۱.۱. فرض کنید x تابع توانی بصورت $x(t) = (t-a)^\gamma$ باشد. لذا داریم

$${}_a I_t^\alpha x(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} (t-a)^{\gamma+\alpha}, \quad \gamma > -1$$

و

$${}_a D_t^\alpha x(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (t-a)^{\gamma-\alpha}, \quad \gamma > -1.$$

در حالت خاص، اگر فرض کنیم $a=0$ و $\gamma=1/2$ و $\alpha=1/2$ باشد، مشتق کسری چپ ریمن-لیوویل تابع $x(t) = t$ برابر با $\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$ است، که همان نتیجه ی بدست آمده توسط لاکروس در

سال ۱۸۱۹ می‌باشد. گرانوالد و لتینکوف، به ترتیب در سال‌های ۱۸۶۷ و ۱۸۶۸ با مراجعه به منابع اصلی و فرمول سازی بر اساس تعاریف پایه ای مشتق، به فرمول حد زیر دست یافتند:

$$x^{(1)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$x^{(n)}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x(t - kh), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.1)$$

که $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$ با $n, k \in \mathbb{N}$ ، نماد های متداول برای ضرایب دو جمله ای هستند. تعریف مشتق کسری گرانوالد-لتینکوف شامل تعمیم فرمول (۳.۱) برای مشتقات مرتبه ی دلخواه α است. [۳۳]

تعریف ۱۰.۱. مرتبه α ام از مشتق کسری گرانوالد-لتینکوف تابع x بصورت زیر است

$${}_a^{GL}D_t^\alpha x(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} x(t - kh),$$

که $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{k! \Gamma(\alpha-k+1)}$ و $nh = t - a$ است.

لم ۲.۱. فرض کنید x تابع توانی بصورت $x(t) = (t-a)^\gamma$ که γ یک عدد حقیقی باشد، لذا برای $0 < \alpha < \gamma$ داریم

$${}_a^{GL}D_t^\alpha x(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (t-a)^{\gamma-\alpha}.$$

تعریف ۱۱.۱. مشتقات کسری چپ و راست هادامارد از مرتبه ی α به ترتیب بصورت :

$${}_a D_t^\alpha x(t) = \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\ln \frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1} \frac{x(\tau)}{\tau} d\tau,$$

9

$${}_t D_b^\alpha x(t) = \left(-t \frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left(\ln \frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1} \frac{x(\tau)}{\tau} d\tau,$$

برای هر $t \in (a, b)$ ، که $n = [\alpha] + 1$ می‌باشد.

توجه کنید که برای انواع عملگرهای مشتق، اگر متغیر t ، متغیر زمان باشد، مشتق کسری چپ تابع x به عنوان حالت گذشته‌ی فرایند و مشتق کسری راست تابع x به عنوان آینده فرایند در نظر گرفته می‌شود.

۲.۳.۱ برخی خواص مشتق کاپوتو

با فرض $\alpha > 0$ و $x \in AC([a, b]; \mathbb{R})$ ، مشتقات کاپوتو و ریمن-لیوویل به واسطه فرمول های زیر با یکدیگر مرتبط می‌شوند. [۱۸]

$${}_a^C D_t^\alpha x(t) = {}_a D_t^\alpha \left[x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)(t-a)^k}{k!} \right], \quad (4.1)$$

و

$${}_t^C D_b^\alpha x(t) = {}_t D_b^\alpha \left[x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(b)(b-t)^k}{k!} \right], \quad (5.1)$$

که $n = [\alpha] + 1$ است اگر $\alpha \notin \mathbb{N}$ و $n = \alpha$ است اگر $\alpha \in \mathbb{N}$ باشد. در حالت خاص، زمانی که $\alpha \in (0, 1)$ است، روابط (۴.۱) و (۵.۱) فرم زیر را می گیرند:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^\alpha x(t) &= {}_a D_t^\alpha (x(t) - x(a)) \\ &= {}_a D_t^\alpha x(t) - \frac{x(a)}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

و

$$\begin{aligned} {}_t^C D_b^\alpha x(t) &= {}_t D_b^\alpha (x(t) - x(b)) \\ &= {}_t D_b^\alpha (x(t) - \frac{x(b)}{\Gamma(1-\alpha)} (b-t)^{-\alpha}) \end{aligned} \quad (7.1)$$

از فرمول های (۶.۱) و (۷.۱) نتیجه می گیریم که مشتق چپ ریمن-لیوویل در حالت $x(a) = 0$ با مشتق کسری چپ کاپوتو معادل است و مشابه آن برای مشتقات راست در حالت $x(b) = 0$ اتفاق می افتد. در قضیه ۱.۱، خواهیم دید که مشتق های کسری کاپوتو، یک عملگر معکوس چپ برای انتگرال کسری ریمن-لیوویل فراهم می کند. [۱۸]

قضیه ۱.۱. فرض کنید $\alpha > 0$ و $x \in AC([a, b]; \mathbb{R})$ باشد. برای عملگرهای کسری کاپوتو داریم:

$${}_a^C D_t^\alpha {}_a I_t^\alpha x(t) = x(t),$$

و

$${}_t^C D_b^\alpha {}_t I_b^\alpha x(t) = x(t).$$

قضیه بعد، ترکیب عملگرهای انتگرال کسری ریمن-لیوویل با عملگرهای مشتق کسری کاپوتو را نمایش می دهد. [۱۸]

قضیه ۲.۱. فرض کنید $\alpha > 0$ و $x \in AC^n([a, b]; \mathbb{R})$ باشد، لذا

$${}_a I_t^\alpha {}_a^C D_t^\alpha x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

و

$${}_t I_b^\alpha {}_t^C D_b^\alpha x(t) = x(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k,$$

که $n = [\alpha] + 1$ است اگر $\alpha \notin \mathbb{N}$ و $n = \alpha$ است اگر $\alpha \in \mathbb{N}$ باشد. در حالت خاص، زمانی که $\alpha \in (0, 1)$ داریم

$${}_a I_t^\alpha {}_a^C D_t^\alpha x(t) = x(t) - x(a) \quad \text{و} \quad {}_t I_b^\alpha {}_t^C D_b^\alpha x(t) = x(t) - x(b).$$

مشابه مشتق کسری ریمن-لیوویل، برای مشتق کسری کاپوتو از تابع توانی، مجدداً تابع توانی ایجاد می‌شود.

لم ۳.۱. فرض کنید $\alpha > 0$ باشد. بنابراین روابط زیر را داریم:

$${}_a^C D_t^\alpha (t-a)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (t-a)^{\gamma-\alpha}, \quad \gamma > n-1,$$

و

$${}_t^C D_b^\alpha (b-t)^\gamma = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (b-t)^{\gamma-\alpha}, \quad \gamma > n-1,$$

که $n = [\alpha] + 1$ است اگر $\alpha \notin \mathbb{N}$ و $n = \alpha$ است اگر $\alpha \in \mathbb{N}$ باشد.

۳.۳.۱ ترکیب مشتق کاپوتو

در این بخش، عملگر خاصی به نام ترکیب مشتق کسری کاپوتو را معرفی می‌کنیم. ما در اینجا به تعمیم نظریه مشتق کسری کاپوتو به مشتق کسری ${}_t^C D_b^{\alpha,\beta}$ ، که شامل مشتق کسری چپ و راست است، می‌پردازیم، یعنی، گذشته و آینده فرآیند با هم ترکیب و به یک عملگر مستقل تبدیل می‌شود.

این عملگر توسط مالینوفسکی و تورس^۱ در سال ۲۰۱۰ [۲۶] و به سبب ایده‌ی مشتق کسری متقارن کلیمک^۲، معرفی شد.

تعریف ۱۲.۱. مشتقات چپ و راست ریمن-لیوویل را در نظر بگیرید، مشتق کسری متقارن بصورت زیر تعریف می‌شود

$${}_a D_b^\alpha x(t) = \frac{1}{2} [{}_a D_t^\alpha x(t) + {}_t D_b^\alpha x(t)]. \quad (۸.۱)$$

سایر ترکیب عملگرها از قبل مطالعه شده‌اند. مانند عملگرهای ریسز و عملگر ریسز-کاپوتو [۲۷].

تعریف ۱۳.۱. اگر $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع از کلاس C^1 و $\alpha \in (0, 1)$ باشد، برای $t \in [a, b]$ انتگرال کسری ریسز از مرتبه α بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} {}_a^R I_b^\alpha x(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b |t-\tau|^{\alpha-1} x(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} [{}_a I_t^\alpha x(t) + {}_t I_b^\alpha x(t)], \end{aligned}$$

مشتق کسری ریسز از مرتبه α بصورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} {}_a^R D_b^\alpha x(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^b |t-\tau|^{-\alpha} x(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2} [{}_a D_t^\alpha x(t) - {}_t D_b^\alpha x(t)]. \end{aligned}$$

¹Malinowska and Torres

²Klimek

تعریف ۱۴.۱. مشتقات چپ و راست کاپوتو را در نظر بگیرید. مشتق کسری کاپوتو-ریسز بصورت زیر است

$$\begin{aligned} {}^{RC}D_b^\alpha x(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^b |t-\tau|^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} x(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma} [{}_a^C D_t^\alpha x(t) - {}_t^C D_b^\alpha x(t)]. \end{aligned} \quad (9.1)$$

تذکر ۲.۱. [۲۷] اگر α به سمت ۱ میل کند، بنابراین مشتقات کسری تعریف شده ی بالا، با مشتق استاندارد زیر معادل هستند:

$${}_a^R D_b^\alpha = {}_a^{RC} D_b^\alpha = \frac{d}{dt}.$$

مشابه عملگر (۹.۱)، ترکیب مشتق کاپوتو، همان ترکیب محدب مشتقات کسری چپ و راست کاپوتو است اما در این عملگر، سایر ضرایب به غیر از $1/2$ نیز در ترکیب محدب بررسی می کنیم. علاوه بر این، مرتبه های α و β در سمت چپ و راست مشتقات کسری می تواند متفاوت باشند. بنابراین، ترکیب مشتق کاپوتو همان ترکیب محدب مشتق کسری چپ کاپوتو از مرتبه α و مشتق کسری راست کاپوتو از مرتبه β می باشد.

تعریف ۱۵.۱. فرض کنید $\alpha, \beta \in (0, 1)$ و $\gamma \in [0, 1]$ باشد. عملگر ترکیب مشتق کسری کاپوتوی ${}^C D_\gamma^{\alpha, \beta}$ بصورت زیر تعریف می شود

$${}^C D_\gamma^{\alpha, \beta} = \gamma {}_a^C D_t^\alpha + (1-\gamma) {}_t^C D_b^\beta, \quad (10.1)$$

که به شکل زیر روی $x \in AC([a, b]; \mathbb{R})$ اثر می کند:

$${}^C D_\gamma^{\alpha, \beta} x(t) = \gamma {}_a^C D_t^\alpha x(t) + (1-\gamma) {}_t^C D_b^\beta x(t).$$

واضح است که عملگر (۱۰.۱)، خطی است و داریم

$${}^C D_0^{\alpha, \beta} = {}_t^C D_b^\beta \quad \text{و} \quad {}^C D_1^{\alpha, \beta} = {}_a^C D_t^\alpha.$$

اکنون در دو تعریف زیر به بیان مفاهیم اولیه درباره حسابان مرتبه متغیر می پردازیم [۶].

تعریف ۱۶.۱. فرض کنید $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ باشد. مشتق ریمن-لیوویل از مرتبه متغیر $\alpha(t)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$${}^{RL}D_t^{\alpha(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha(t))} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha(t)-1} x(s) ds, \quad n-1 < \alpha(t) \leq n, \quad t > 0.$$

تعریف ۱۷.۱. فرض کنید $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ و $x \in C^n[a, b]$ باشد. مشتق کاپوتو از مرتبه متغیر $\alpha(t)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$${}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha(t))} \int_a^t (t-s)^{n-\alpha(t)-1} x^{(n)}(s) ds, \quad n-1 < \alpha(t) \leq n, \quad t > 0.$$

لم ۴.۱. عملگرهای انتگرال ریمن-لیوویل و مشتق کاپوتو از مرتبه متغیر دارای ویژگی های زیر هستند:

۱. در ویژگی اول برای ثابت C داریم:

$${}^C D_t^{\alpha(t)} C = 0, \quad C \in \mathbb{R},$$

۲. در ویژگی دوم داریم

$${}^{RL} I_t^{\alpha(t)} C = \frac{1}{\Gamma(\alpha(t) + 1)} t^{\alpha(t)}, \quad C \in \mathbb{R},$$

۳. در ویژگی بعدی خواهیم داشت

$${}^{RL} I_t^{\alpha(t)} t^\beta = \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta + \alpha(t) + 1)} t^{\beta + \alpha(t)}, \quad \beta \geq \lfloor \alpha(t) \rfloor,$$

۴. همچنین داریم

$${}^C D_t^{\alpha(t)} t^\beta = \begin{cases} \frac{\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\beta - \alpha(t) + 1)} t^{\beta - \alpha(t)}, & \beta \in \mathbb{N} \text{ و } \beta \geq \lceil \alpha(t) \rceil \text{ یا } \beta \notin \mathbb{N} \text{ و } \beta > \lfloor \alpha(t) \rfloor \\ 0, & \beta \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ و } \beta < \lceil \alpha(t) \rceil, \end{cases}$$

۵. و در پایان خواهیم داشت

$${}^{RL} I_t^{m - \alpha(t)} (y^{(m)}(t)) = {}^C D_t^{\alpha(t)} y(t) - \sum_{i=\lceil \alpha(t) \rceil}^{m-1} \frac{y^{(i)}(a) t^{i - \alpha(t)}}{\Gamma(i + 1 - \alpha(t))}, \quad m - 1 < \alpha(t) \leq m.$$

۴.۳.۱ عملگرهای مرتبه متغیر

کاربرد های فیزیکی بسیار مفیدی، به حسابان کسری مرتبه متغیر حیات بخشیده اند مثلا مدل دهی رفتار های مکانیکی [۱۵].

اکنون قضایای اساسی مربوط به حساب کسری مرتبه متغیر را ارائه می کنیم [۲۴]. مرتبه کسری مشتق و انتگرال را، تابع پیوسته ی دو متغیره $\alpha(.,.)$ ، با دامنه $[a, b]^2$ ، که شامل مقادیر در بازه $(0, 1)$ است را در نظر می گیریم. فرض کنید $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. ابتدا تعمیم انتگرال های کسری با مرتبه متغیر $\alpha(.,.)$ را یادآوری می کنیم.

تعریف ۱۸.۱. انتگرال های کسری ریمن-لیوویل چپ و راست از مرتبه $\alpha(.,.)$ به ترتیب زیر تعریف می شود

$${}_a I_t^{\alpha(.,.)} x(t) = \int_a^t \frac{1}{\Gamma(\alpha(t, \tau))} (t - \tau)^{\alpha(t, \tau) - 1} x(\tau) d\tau, \quad t > a$$

و

$${}_t I_b^{\alpha(.,.)} x(t) = \int_b^t \frac{1}{\Gamma(\alpha(\tau, t))} (\tau - t)^{\alpha(\tau, t) - 1} x(\tau) d\tau, \quad t < b.$$

توجه کنید که، برخلاف حالت مرتبه کسری ثابت، انتگرال های کسری مرتبه متغیر عملگر معکوس مشتقات کسری مرتبه متغیر نیستند. برای مشتقات کسری، دو نوع مشتقات کسری ریمان-لیوویل و مشتقات کسری کاپوتو را بررسی می کنیم.

تعریف ۱۹.۱. مشتقات کسری ریمان-لیوویل چپ و راست از مرتبه $\alpha(.,.)$ به ترتیب زیر تعریف می شوند،

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{\alpha(.,.)} x(t) &= \frac{d}{dt} {}_a I_t^{\alpha(.,.)} x(t) \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t, \tau))} (t - \tau)^{-\alpha(t, \tau)} x(\tau) d\tau, \quad t > a \end{aligned} \quad (11.1)$$

و

$$\begin{aligned} {}_t D_b^{\alpha(.,.)} x(t) &= -\frac{d}{dt} {}_t I_b^{\alpha(.,.)} x(t) \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{-1}{\Gamma(1 - \alpha(\tau, t))} (\tau - t)^{-\alpha(\tau, t)} x(\tau) d\tau, \quad t < b. \end{aligned} \quad (12.1)$$

اکنون در لم ۵.۱، به بیان مشتق و انتگرال کسری از مرتبه متغیر ریمان-لیوویل برای تابع توانی $x(t) = (t - a)^\gamma$ می پردازیم که در آن، فرض کردیم مرتبه کسری، تنها وابسته به متغیر اول است، $\alpha(t, \tau) := \bar{\alpha}(t)$ و تابع داده شده به صورت $\bar{\alpha} : [a, b] \rightarrow (0, 1)$ می باشد.

لم ۵.۱. اگر x تابع توانی بصورت $x(t) = (t - a)^\gamma$ باشد. لذا برای $\gamma > -1$ داریم

$${}_a I_t^{\bar{\alpha}(t)} x(t) = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma + \bar{\alpha}(t) + 1)} (t - a)^{\gamma + \bar{\alpha}(t)}$$

و

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{\bar{\alpha}(t)} x(t) &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \bar{\alpha}(t) + 1)} (t - a)^{\gamma - \bar{\alpha}(t)} \\ &\quad - \bar{\alpha}^{(1)}(t) \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \bar{\alpha}(t) + 2)} (t - a)^{\gamma - \bar{\alpha}(t) + 1} \\ &\quad \times [\ln(t - a) - \Psi(\gamma - \bar{\alpha}(t) + 2) + \Psi(1 - \bar{\alpha}(t))]. \end{aligned}$$

تعریف ۲۰.۱. مشتقات کسری چپ و راست کاپوتو از مرتبه $\alpha(.,.)$ به ترتیب زیر معرفی می شوند

$${}_a^C D_t^{\alpha(.,.)} x(t) = \int_a^t \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t, \tau))} (t - \tau)^{-\alpha(t, \tau)} x'(\tau) d\tau, \quad t > a \quad (13.1)$$

و

$${}_t^C D_b^{\alpha(.,.)} x(t) = \int_a^t \frac{-1}{\Gamma(1 - \alpha(\tau, t))} (\tau - t)^{-\alpha(\tau, t)} x'(\tau) d\tau, \quad t < b \quad (14.1)$$

که مشتقات کسری تعریف شده فوق، عملگرهایی خطی هستند.

۵.۳.۱ عملگرهای کسری تعمیم یافته

در این بخش، سه تعریف از عملگرهای کسری تعمیم یافته‌ی یک بعدی وابسته به هسته‌ی عمومی را که قبلاً توسط مالینوفسکی و تورس [۲۴] مطالعه شده است را ارائه می‌کنیم. اگرچه قبلاً آگراوال، این عملگرهای کسری تعمیم یافته را معرفی کرده بود [۲]. فرض کنید $\Delta := (t, \tau) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \tau < t \leq b$ باشد.

تعریف ۲۱.۱. فرض کنید k^α یک تابع غالباً همه جا تعریف شده روی Δ باشد که شامل مقادیر $\mathbb{R}$ است. عملگر انتگرال کسری تعمیم یافته‌ی K_P با $P\langle a, t, b, \lambda, \mu \rangle$ ، برای هر $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_P[x](t) = \lambda \int_a^t k^\alpha(t, \tau) x(\tau) d\tau + \mu \int_t^b k^\alpha(\tau, t) x(\tau) d\tau, \quad (15.1)$$

که λ و μ اعداد حقیقی هستند.

به طور ویژه، اگر برای هسته، حالات خاصی را انتخاب کنیم، می‌توانیم عملگرهای کسری استاندارد یا مرتبه‌ی متغیر را بدست آوریم.

تذکر ۳.۱. با انتخاب حالت خاص هسته‌های k^α و پارامترهای P ، می‌توان عملگر K_P را به انتگرال کسری مرتبه متغیر یا کلاسیک ریمن-لیوویل تبدیل کرد:

۱. فرض کنید $k^\alpha(t, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t - \tau)^{\alpha-1}$ و $\alpha > 0$ است. اگر $P = \langle a, t, b, 1, 0 \rangle$ باشد، لذا

$$K_P[x](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau =: {}_a I_t^\alpha[x](t)$$

انتگرال کسری چپ ریمن-لیوویل از مرتبه α است؛ اگر $P = \langle a, t, b, 0, 1 \rangle$ ، لذا

$$K_P[x](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} x(\tau) d\tau =: {}_t I_b^\alpha[x](t)$$

انتگرال کسری راست ریمن-لیوویل از مرتبه α است.

۲. اگر $k^\alpha(t, \tau) = \frac{1}{\Gamma(\alpha(t, \tau))}(t - \tau)^{\alpha(t, \tau)-1}$ و $P = \langle a, t, b, 1, 0 \rangle$ باشد، لذا

$$K_P[x](t) = \int_a^t \frac{1}{\Gamma(\alpha(t, \tau))} (t - \tau)^{\alpha(t, \tau)-1} x(\tau) d\tau =: {}_a I_t^{\alpha(\cdot, \cdot)}[x](t)$$

انتگرال کسری چپ ریمن-لیوویل از مرتبه $\alpha(\cdot, \cdot)$ است؛ اگر $P = \langle a, t, b, 0, 1 \rangle$ ، لذا

$$K_P[x](t) = \int_t^b \frac{1}{\Gamma(\alpha(t, \tau))} (\tau - t)^{\alpha(t, \tau)-1} x(\tau) d\tau =: {}_t I_b^{\alpha(\cdot, \cdot)}[x](t)$$

انتگرال کسری راست ریمن-لیوویل از مرتبه $\alpha(\cdot, \cdot)$ است.

سایر عملگرهای کسری را می‌توان از انتگرال‌های کسری تعمیم یافته بدست آورد، مانند عملگرهای کسری هادامارد، ریسز، کاتاکامپولا [۲۴].

دو عملگر جدید زیر، یعنی مشتقات کسری تعمیم یافته‌ی ریمن-لیوویل و کاپوتو از ترکیب مشتقات کلاسیک و انتگرال‌های کسری تعمیم یافته به وجود می‌آیند.

تعریف ۲۲.۱. مشتق کسری تعمیم یافته‌ی ریمن-ریوویل با نماد A_P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_P = \frac{d}{dt} \circ K_P.$$

تعریف ۲۳.۱. مشتق کسری تعمیم یافته‌ی کاپوتو با نماد B_P به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B_P = K_P \circ \frac{d}{dt}.$$

با در نظر گرفتن $k^\alpha(t, \tau) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-\tau)^{-\alpha}$ با $0 < \alpha < 1$ و مجموعه های مناسب P ، دو عملگر هسته‌ی عمومی A_P و B_P را می‌توان به ترتیب، به مشتقات کسری ریمن-لیوویل و کاپوتوی استاندارد تبدیل کرد [۲۴].

۶.۳.۱ قاعده انتگرال جزء به جزء برای انتگرال کسری

در این بخش، فرمول های انتگرال جزء به جزء را به دلیل نقش مهم شان در یافتن شرایط لازم بهینگی برای مسائل متغیر، بطور خلاصه ارائه می‌کنیم. ابتدا، قاعده‌ی انتگرال جزء به جزء را برای انتگرال کسری ریمن-لیوویل بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۱. فرض کنید $0 < \alpha < 1$ ، $q \geq 1$ ، $p \geq 1$ و $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \alpha$ باشد. اگر $x \in L_q([a, b]; \mathbb{R})$ و $y \in L_p([a, b]; \mathbb{R})$ ، لذا فرمول انتگرال جزء به جزء بصورت زیر است

$$\int_a^b y(t) {}_a I_t^\alpha x(t) dt = \int_a^b x(t) {}_t I_b^\alpha y(t) dt.$$

برای مشتقات کسری کاپوتو، فرمول های انتگرال جزء به جزء بصورت زیر ارائه شده اند [۴].

قضیه ۴.۱. فرض کنید $0 < \alpha < 1$ باشد. روابط زیر را داریم:

$$\int_a^b y(t) {}_a^C D_t^\alpha x(t) dt = \int_a^b x(t) {}_t D_b^\alpha y(t) dt + [x(t) {}_t I_b^{1-\alpha} y(t)]_{t=a}^{t=b} \quad (۱۶.۱)$$

و

$$\int_a^b y(t) {}_t^C D_b^\alpha x(t) dt = \int_a^b x(t) {}_a D_t^\alpha y(t) dt - [x(t) {}_a I_t^{1-\alpha} y(t)]_{t=a}^{t=b}. \quad (۱۷.۱)$$

هنگامیکه $\alpha \rightarrow 1$ ، داریم ${}_t^C D_b^\alpha = {}_t D_b^\alpha = -\frac{d}{dt}$ ، ${}_a^C D_t^\alpha = {}_a D_t^\alpha = \frac{d}{dt}$ ، ${}_a I_t^\alpha = {}_t I_b^\alpha = I$ ، همچنین روابط (۱۶.۱) و (۱۷.۱) فرمول های انتگرال جزء به جزء کلاسیک را به ما می‌دهد. اکنون، فرمول های انتگرال جزء به جزء را برای انتگرال های کسری مرتبه متغیر معرفی می‌کنیم [۳۰].

قضیه ۵.۱. فرض کنید برای هر $t, \tau \in [a, b]$ و $n \in \mathbb{N}$ بزرگتر یا مساوی دو، و همچنین $x, y \in C([a, b]; \mathbb{R})$ داشته باشیم $\frac{1}{n} < \alpha(t, \tau) < 1$. لذا فرمول انتگرال زیر به صورت

$$\int_a^b y(t) {}_a I_t^{\alpha(\cdot)} x(t) dt = \int_a^b x(t) {}_t I_b^{\alpha(\cdot)} y(t) dt.$$

در قضیه زیر، فرمول های شامل مشتق کسری کاپوتو از مرتبه ی متغیر را ارائه می کنیم. اثبات این قضیه در [۳۰] ارائه شده است و در آن تعمیم فرمولهای کسری استاندارد انتگرال جزء به جزء برای ثابت α انجام شده است.

قضیه ۶.۱. فرض کنید برای هر $t, \tau \in [a, b]$ و $n \in \mathbb{N}$ بزرگتر یا مساوی دو، و همچنین $x, y \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ داشته باشیم $0 < \alpha(t, \tau) < 1 - \frac{1}{n}$. لذا فرمول انتگرال زیر به صورت

$$\int_a^b y(t) {}^C D_t^{\alpha(\dots)} x(t) dt = \int_a^b x(t) {}_t D_b^{\alpha(\dots)} y(t) dt + [x(t) {}_t I_b^{1-\alpha(\dots)} y(t)]_{t=a}^{t=b}.$$

و

$$\int_a^b y(t) {}^C D_t^{\alpha(\dots)} x(t) dt = \int_a^b x(t) {}_a D_t^{\alpha(\dots)} y(t) dt - [x(t) {}_a I_t^{1-\alpha(\dots)} y(t)]_{t=a}^{t=b}.$$

می باشد.

قضیه آخر، نقش مهمی در اثبات معادلات اوایلر- لاگرانژ تعمیم یافته دارد. در پایان این فصل، فرمول های انتگرال جزء به جزء را برای عملگر های کسری تعمیم یافته ارائه می کنیم [۲۴]. به همین منظور، به تعریف زیر نیاز داریم:

تعریف ۲۴.۱. فرض کنید $P = \langle a, t, b, \lambda, \mu \rangle$ باشد. پارامتر P^* را برای $P^* = \langle a, t, b, \mu, \lambda \rangle$ در نظر می گیریم. این پارامتر را دوال $^1 P$ می نامیم.

فرض کنید $1 < P < \infty$ و q وابسته به p باشد، یعنی $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. اثبات قضیه ی بعد را می توان در [۲۴] مشاهده کرد.

قضیه ۷.۱. فرض کنید $k \in L_q(\Delta; \mathbb{R})$ باشد. لذا عملگر K_{p^*} یک عملگر کراندار خطی از $L_p([a, b]; \mathbb{R})$ به $L_q(\Delta; \mathbb{R})$ است.

علاوه براین فرمول انتگرال جزء به جزء برای هر $x, y \in L_p([a, b]; \mathbb{R})$ به صورت زیر است:

$$\int_a^b x(t) \cdot K_P[y](t) dt = \int_a^b y(t) \cdot K_{P^*}[x](t) dt.$$

¹Dual of P

فصل ۲

حساب تغییرات

همانطور که قبلاً گفتیم بخشی از این پایان نامه به حساب تغییرات کسری اختصاص یافته است. در این فصل، مفاهیم اساسی در مورد حساب تغییرات کلاسیک و حساب تغییرات کسری را معرفی می‌کنیم. مطالعه‌ی مسائل کسری حساب تغییرات و معادلات اویلر-لاگرانژ مربوطه، موضوع تحقیقات مهم اخیر بوده است. در بخش ۱.۲، تعدادی از مفاهیم و نتایج مهم قضیه کلاسیک را بیان می‌کنیم. سپس در بخش ۲.۲، تاریخچه‌ی مختصری از حساب تغییرات ناصحیح را معرفی و نتایج جدید از حساب تغییرات کسری را ارائه می‌کنیم. برای مطالعه‌ی بیشتر در این باره، می‌توانید به [۲۴] مراجعه کنید.

۱.۲ حساب تغییرات کلاسیک

حساب تغییرات، حوزه‌ای از آنالیز ریاضی است که مرتبط با یافتن اکسترمم (مینیمم یا ماکزیمم) برای تابع‌ها می‌باشد، یعنی مرتبط با مسئله‌ی یافتن یک تابع برای مقدار یک انتگرال معینی که کمترین یا بیشترین حد ممکن است. در این محتوا، تابع یک نگاشت از مجموعه‌ی توابع به اعداد حقیقی است، یعنی، برای هر تابع یک عدد حقیقی می‌دهد. فرض کنید $D \subseteq C^2([a, b]; \mathbb{R})$ یک فضای خطی محدود شده با نرم $\|\cdot\|$ باشد. تابع هزینه‌ی $\mathcal{J} : D \rightarrow \mathbb{R}$ در حالت کلی به فرم

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt \quad (1.2)$$

که $t \in [a, b]$ ، یک متغیر مستقل است و معمولاً زمان نام دارد و $x(t) \in \mathbb{R}$ ، یک تابع است. تابع زیر انتگرال $L : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، که وابسته به تابع x ، مشتق آن x' و متغیر مستقل t است،

یک تابع حقیقی مقدار به نام لاگرانژین می‌باشد.

ریشه‌های حساب تغییرات در کارهای اندیشمندان یونانی، مانند کوئین دیدو^۱ یا آریستوتل^۲، در اواخر قرن یکم پیش از میلاد، پدیدار شد. در طول قرن ۱۷، تعدادی فیزیکدان و ریاضیدان مانند گالیله^۳، فرمت^۴ و نیوتن مسائل متغیر متعددی را بررسی کردند اما در کل، از روش‌های متغیر برای حل آنها استفاده نکردند.

گسترش حساب تغییرات، با مسئله مطرح شده توسط یوهان برنولی در سال ۱۶۹۶، آغاز شد. این مسئله، براکیستوکرون^۵ نام گرفت که فرض می‌کند دو نقطه A و B در یک صفحه عمودی باشند، کدام منحنی توسط جاذبه زمین روی یک نقطه اثر می‌کند تا با شروع از نقطه A در کمترین زمان ممکن به نقطه‌ی B برسد؟ منحنی‌ای که این مسئله را حل می‌کند، براکیستوکرون نام دارد. این مسئله توجه ریاضیدانان متعددی مانند، جیکوب برنولی، لایب‌نیتز، ال هوییتال و نیوتن را برای ارائه راه حل جلب کرد. امروزه حساب متغیر صحیح، زمینه تحقیق مناسبی است و نقش پررنگی در زمینه‌های علمی فیزیک، مهندسی، اقتصاد و ریاضیات کاربردی ایفا می‌کند. مسئله متغیر کلاسیک که توسط لئونارد اویلر مطرح شده، به صورت زیر است.

فرض کنید $a, b \in \mathbb{R}$ باشد. از بین توابع x که، $x \in D$ است، تابعی را بیابید که تابع $\mathcal{J} : D \rightarrow \mathbb{R}$ را مینیمم یا ماکزیمم کند، بطوریکه

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(t, x(t), x'(t)) dt, \quad (2.2)$$

با شرایط مرزی

$$x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b \quad (3.2)$$

که x_a و x_b اعداد حقیقی ثابت اند و لاگرانژین L ، برخی خواص هموار بودن را شامل شود. معمولاً، گوییم یک تابع در یک بازه معین "به اندازه کافی هموار"^۶ است اگر همه‌ی عملگرهای مورد نیاز (انتگرال، مشتق، ...) امکان پذیر باشند.

تعریف ۱.۲. گوییم مسیری مانند $x \in C^2([a, b]; \mathbb{R})$ قابل قبول است اگر تمام قیدهای مسئله در بازه $[a, b]$ را برآورده کند. مجموعه‌ی شامل مسیرهای قابل قبول را D می‌نامیم.

برای بحث راجع به مینیمم یا ماکزیمم تابع‌ها، نیاز به بیان تعاریف زیر داریم:

تعریف ۲.۲. تابع $\mathcal{J} : D \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه‌ی $x^* \in D$ یک اکستریمم موضعی است اگر یک عدد حقیقی مانند $\epsilon > 0$ موجود باشد، بطوریکه

$$\forall x \in D : \|x^* - x\| < \epsilon \Rightarrow (\mathcal{J}(x^*) - \mathcal{J}(x) \leq \epsilon) \vee (\mathcal{J}(x^*) - \mathcal{J}(x) \geq \epsilon).$$

¹Queen Dido

²Aristotle

³Galileo

⁴Fermat

⁵brachistochrone

⁶sufficiently smooth

از آنجا که در این قسمت، با تابع های تعریف شده روی توابع روبرو هستیم، نیاز به شفاف سازی روابط مشتقات جهت دار است که به آن تغییرات گوئیم. مفهوم تغییرات تابع، به معنای یافتن راه حل مسائل متغیر است.

تعریف ۳.۲. فرض کنید $\mathcal{J}$ روی D تعریف شده باشد. اولین تغییرات تابع $\mathcal{J}$ در $x \in D$ در مسیر $h \in D$ بصورت زیر تعریف می شود

$$\delta \mathcal{J}(x, h) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(x + \epsilon h) - \mathcal{J}(x)}{\epsilon} = \left. \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{J}(x + \epsilon h) \right|_{\epsilon=0},$$

مشروط براینکه حد بالا موجود باشد.

تعریف ۴.۲. گوئیم مسیر $h \neq 0$ ، $h \in D$ تغییر قابل قبول برای $\mathcal{J}$ در $y \in D$ است، اگر

$$1. \quad \delta \mathcal{J}(x, h) \text{ موجود باشد؛}$$

$$2. \quad \text{برای هر } \epsilon \text{ به اندازه کافی کوچک، } x + \epsilon h \in D \text{ باشد.}$$

با در نظر گرفتن تعریف تغییرات و این شرط که $\mathcal{J}(x)$ یک اکسترمم موضعی باشد، نتیجه ی زیر که شرط لازم بهینگی برای مسائل حساب تغییرات است را خواهیم داشت [۴۲].

قضیه ۱.۲. فرض کنید $\mathcal{J}$ یک تابع تعریف شده روی D باشد. اگر x^* ، تابع $\mathcal{J}$ را روی تمام توابع $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ مینیمم (یا ماکزیمم) کند و در شرایط مرزی (۳.۲) صدق کند، آنگاه برای تمام تغییرات قابل قبول h در x^* داریم،

$$\delta \mathcal{J}(x^*, h) = 0$$

۱.۱.۲ معادلات اوایلر-لاگرانژ

اگرچه حساب تغییرات توسط مسئله یوهان برنولی به وجود آمد، اما با زحمات اوایلر در سال ۱۷۴۲ و لاگرانژ در سال ۱۷۵۵ این قضیه اصولی گسترش یافت. رایج ترین روش برای بیان مسائل حساب تغییرات شامل حل معادله دیفرانسیل، معادله اوایلر-لاگرانژ نام دارد که باید در هر ماکزیمم یا مینیمم تابع صدق کند. در لم ۱.۲، نتیجه مهم برای تبدیل شرط لازم اکسترمم در معادله دیفرانسیل، بدون انتگرال با تابع دلخواه را مرور می کنیم که در مقالات، به عنوان لم اساسی حساب تغییرات شناخته می شود.

لم ۱.۲. فرض کنید x در بازه $[a, b]$ پیوسته باشد و به ازای هر تابع پیوسته و دلخواه h روی بازه $[a, b]$ که $h(a) = h(b) = 0$ داشته باشیم

$$\int_a^b x(t)h(t)dt = 0$$

آنگاه برای هر $t \in [a, b]$ داریم $x(t) = 0$.

معادله دیفرانسیل زیر به فرمول معادله اویلر-لاگرانژ معروف است :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x}.$$

همچنین فرمول معادله اویلر-لاگرانژ که از فرمول های اساسی حساب تغییرات است بصورت زیر ارائه شده است.

در پایان، مشتق جزئی تابع $z: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ برای آرگومان i ام که $i \in \{1, 2, \dots, M\}$ و $M \in \mathbb{N}$ است را با نماد $\delta_i z$ نمایش می دهیم. حال می توانیم به فرمول سازی شرط لازم بهینگی برای مسئله متغیر کلاسیک بپردازیم [۴۲].

قضیه ۲.۲. اگر x اکستریمم تابع ۲.۲ روی D باشد، بطوریکه منجر به شرط ۳.۲ شود، لذا x برای هر $t \in [a, b]$ در عبارت زیر صدق می کند،

$$\delta_2 L(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} \delta_3 L(t, x(t), x'(t)) = 0 \quad (۴.۲)$$

برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم فوق، دو شرط مرزی (۳.۲)، اطلاعات کافی برای تعیین دو ثابت دلخواه را فراهم می کنند.

تعریف ۵.۲. منحنی x که یک جواب برای معادله دیفرانسیل اویلر-لاگرانژ باشد، اکستریمال $\mathcal{I}$ نام دارد.

۲.۱.۲ مسائل با نقاط پایانی متغیر

در مسئله حساب تغییرات قبل، تابع $\mathcal{I}$ برای مینیمم (یا ماکزیمم) شدن دارای شرایط مرزی

$$x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b,$$

است که $x_a, x_b \in \mathbb{R}$ ثابت هستند. این یعنی x به عنوان جواب مسئله، باید در نقاط تعیین شده بالا صدق کند که مساله حساب تغییرات با نقاط پایانی ثابت نام دارد. معادله اویلر-لاگرانژ (۴.۲) معمولاً یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم شامل دو ثابت دلخواه است، لذا با دو شرط مرزی داده شده، می توان هر دو ثابت را بدست آورد. اگرچه در زمینه های مختلفی، مانند فیزیک و هندسه، مسائل وردشی، مقدار مناسب شرایط مرزی را تعیین نمی کنند. در این حالت، زمانی که یک یا هر دو شرط مرزی موجود نیست یعنی زمانی که مجموعه توابع قابل قبول ممکن است هر مقداری را در یک یا دو کران بگیرند، لذا به جای حل معادله زیر، نیاز به یافتن یک یا دو شرط کمکی است، که به عنوان شرایط مرزی طبیعی یا شرایط تراگردی^۱ شناخته می شوند:

$$\left[\frac{\delta L(t, x(t), x'(t))}{\delta x'} \right]_{t=a} = 0 \quad \text{و/یا} \quad \left[\frac{\delta L(t, x(t), x'(t))}{\delta x'} \right]_{t=b} = 0. \quad (۵.۲)$$

انواع مختلفی از مسائل حساب تغییرات با نقاط پایانی متغیر وجود دارد:

^۱transversality conditions

۱. نقطه انتهایی آزاد – یک شرط مرزی در زمان آغازین موجود است $(x(a) = x_a)$. نقطه انتهایی آزاد است $(x(b) \in \mathbb{R})$ ؛

۲. نقطه اولیه‌ی آزاد – یک شرط مرزی در زمان انتهایی موجود است $(x(a) = x_a)$. نقطه اولیه آزاد است $(x(a) \in \mathbb{R})$ ؛

۳. نقاط پایانی آزاد – هر دو نقطه پایانی آزاد هستند $(x(a) \in \mathbb{R}), (x(b) \in \mathbb{R})$ ؛

۴. نقاط پایانی متغیر – نقطه اولیه $x(a)$ یا $/$ و نقطه پایانی $x(b)$ روی مجموعه معینی مثلاً روی منحنی معلوم، متغیر هستند.

تعمیم دیگر مسئله متغیر شامل یافتن منحنی بهینه‌ی x و زمان پایانی بهینه T از انتگرال متغیر، که $T \in [a, b]$ است. این مسئله در مقالات به عنوان مسئله زمان-آزاد معرفی می‌شود [۱۰]. یک مثال آن، مسئله زمان-آزاد زیر با نقطه پایانی آزاد می‌باشد. فرض کنید زیرمجموعه‌ی $C^2([a, b] \times \mathbb{R})$ که در نرم $\|(\cdot, \cdot)\|$ قرار گرفته را با نماد D مشخص می‌کنیم. مینیمم های موضعی تابع $\mathcal{J} : D \rightarrow \mathbb{R}$ طوری بیابید که

$$\mathcal{J}(x, T) = \int_a^T L(t, x(t), x'(t)) dt, \quad (6.2)$$

برای هر $(x, T) \in \mathbb{R}$ ، در شرط مرزی $x(a) = x_a$ با $x_a \in \mathbb{R}$ ثابت، صدق کند. در اینجا زمان پایانی T و حالت پایانی $x(T)$ هر دو آزاد هستند.

تعریف ۶.۲. گوییم $(x^*, T^*) \in D$ یک اکستریم موضعی برای تابع $\mathcal{J} : D \rightarrow \mathbb{R}$ در عبارت (۶.۲) است اگر $\epsilon > 0$ ای موجود باشد که برای هر $(x, T) \in D$ داشته باشیم،

$$\|(x^*, T^*) - (x, T)\| < \epsilon \Rightarrow J(x^*, T^*) \leq J(x, T) \vee J(x^*, T^*) \geq J(x, T).$$

جهت گسترش شرط لازم بهینگی مسئله (۶.۲) برای اکستریم (x^*, T^*) نیاز به بررسی تغییرات قابل قبول عبارت زیر است:

$$(x^* + \epsilon h, T^* + \epsilon \Delta T)$$

که $h \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ یک منحنی آشفته است و در شرط $h(a) = 0$ صدق می‌کند، ϵ نشان دهنده یک عدد حقیقی کوچک و ΔT ، نشان دهنده تغییر کوچک دلخواه روی T است. تابع $\mathcal{J}(x, T)$ را در این تغییر قابل قبول در نظر بگیرید، تابع ϵ را طوری در نظر می‌گیریم که حد بالای انتگرال بر حسب ϵ تغییر کند:

$$\mathcal{J}(x^* + \epsilon h, T^* + \epsilon \Delta T) = \int_a^{T^* + \epsilon \Delta T} L(t, (x^* + \epsilon h)(t), (x^* + \epsilon h)'(t)) dt. \quad (7.2)$$

برای یافتن شرط لازم بهینگی مرتبه اول، نیاز به تعیین مشتق عبارت (۷.۲) بر حسب ϵ و قرار دادن آن برابر صفر است. با انجام این کار سه رابطه از معادله بدست می‌آید، که از عبارت اول، معادله اوایل لاگرانژ و از دو عبارت دیگر، بسته به زمان انتهایی T ، شرایط متقاطع بدست می‌آید.

۳.۱.۲ مسائل حساب تغییرات محدود شده

مسائل حساب تغییرات اغلب شامل یک یا چند محدودیت هستند (محدودیت های هولونومیک، محدودیت های انتگرالی، محدودیت های دینامیکی و...). مسائل ایزوپریمتریک^۱ کلاس خاصی از مسائل حساب تغییرات محدود شده برای توابع قابل قبولی است که نیاز داریم در محدودیت انتگرالی صدق کنند. در اینجا مسئله‌ی متغیر ایزوپریمتریک کلاسیک را مرور می‌کنیم. مسئله متغیر کلاسیک، بر این اساس که کلاس توابع اکسترمم بالقوه در شرط جدیدی به نام محدودیت ایزوپریمتریک به فرم زیر صدق می‌کند، تعریف شده است:

$$\int_a^b g(t, x(t), x'(t)) dt = C \quad (۸.۲)$$

که g تابع داده شده بر حسب t ، x و x' است و C یک عدد حقیقی می‌باشد. مسئله جدید، مسئله ایزوپریمتریک نام دارد که خانواده مهمی از مسائل حساب تغییرات است. در این حالت، مسائل تغییرات اغلب دارای یک یا چند محدودیت به همراه انتگرال تابع داده شده می‌باشند [۱۴]. تعدادی از مثال های کلاسیک مسائل ایزوپریمتریک، در هندسه وجود دارد. یک مثال مشهور در این مورد، مربوط به یافتن منحنی ای است که محیط آن، بیشترین فضا را احاطه کند و پاسخ دایره است. مسائل ایزوپریمتریک نوع مهمی از مسائل حساب تغییرات، با کاربرد هایی در زمینه های مختلف، مانند هندسه، ستاره شناسی، فیزیک، جبر یا آنالیز می‌باشند. در قضیه بعدی، شرط لازم برای یک تابع، بطوریکه اکسترمم مسئله ایزوپریمتریک کلاسیک باشد را ارائه می‌کنیم، که برگرفته از مفهوم ضریب لاگرانژ است [۴۲].

قضیه ۳.۲. مسئله مینیمم (یا ماکزیمم) تابع $\mathcal{I}$ ، تعریف شده در (۲.۲)، روی مجموعه‌ی D ، توسط $x \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ که در شرایط کراندار (۲.۲) و محدودیت انتگرالی به صورت

$$G = \int_a^b g(t, x(t), x'(t)) dt = C$$

صدق می‌کنند را در نظر بگیرید، که $g : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تابع دوبار پیوسته مشتق پذیر است. فرض کنید x یک مینیمم موضعی (اکسترمم) برای این مسئله باشد و برای هر $h \in D$ ، مقدار $\delta G(x, h)$ صفر نباشد، بنابراین λ ثابتی وجود دارد که x در معادله اویلر لاگرانژ زیر صدق می‌کند:

$$\partial_4 F(t, x(t), x'(t), \lambda) - \frac{d}{dt} \partial_3 F(t, x(t), x'(t), \lambda) = 0, \quad (۹.۲)$$

که $F(t, x, x', \lambda) = L(t, x, x') - \lambda g(t, x, x')$ است.

تذکر ۱.۲. ثابت λ ، ضریب لاگرانژ نام دارد.

توجه کنید اگر x با رعایت محدودیت ایزوپریمتریک، در معادله اویلر-لاگرانژ صدق نکند، $\delta G(x, h)$ برای هر $h \in D$ برابر صفر نیست، یعنی x یک اکسترمم برای G نمی‌باشد.

^۱Isoperimetric problems

۲.۲ حساب تغییرات کسری

اولین رابطه میان حسابان کسری و حساب تغییرات توسط نیلز آبل^۱ پدید آمد [۱]. در سال ۱۸۲۳ آبل، حسابان کسری را در راه حل معادله انتگرال موجود در تعمیم مسئله تاتوکرون بکار برد. پس از چند سال هر دو حوزه در یک زمینه تحقیقاتی منحصربفرد به نام، حساب تغییرات کسری بکار گرفته شدند.

حساب تغییرات کسری، با مسائلی سروکار دارد که در آن تابع، شرایط قید یا هر دو، وابسته به تعدادی عملگر کسری هستند [۴] و هدف اصلی، یافتن تابعی است که چنین تابعی های کسری را اکسترمم کند. با دخالت دادن عملگر های کسری، که در مسائل تغییرات غیر موضعی هستند، می توان برای توسعه ی مدل های پردازشگر اثر حافظه استفاده کرد. این موضوع بسیار رو به گسترش است و با بررسی انواع مختلف لاگرانژ ها، تقریب های مختلفی ارائه شده است.

در سال های اخیر، علاقه مندی زیادی در حوزه حساب متغیر کسری و کاربرد های آن، شامل مکانیک کوانتوم، مکانیک کلاسیک و کنترل بهینه به وجود آمده است. اگرچه منشاء پیدایش حسابان کسری به بیش از سه قرن پیش باز می گردد، اما حساب تغییرات با مشتقات کسری، تنها در سالهای ۱۹۹۶-۱۹۹۷ با تلاش ریو^۲ به وجود آمد. او هنگام تحقیق بر روی لاگرانژین غیرمحافظه کار^۳ و مکانیک همیلتون، موفق به یافتن نسخه ای از معادلات اوایلر-لاگرانژ برای مسائل حساب تغییرات با مشتقات کسری شد. آگراوال [۲] مطالعه روی معادلات اوایلر-لاگرانژ کسری، برای انواع مسائل حساب تغییرات کسری، مانند مسائل با تنها یک متغیر وابسته، برای تابع های با مرتبه های مشتق کسری مختلف، برای چندین تابع شامل هر دو مشتق ریمن-لیوویل و کاپوتو و... را ادامه داد. رایج ترین عملگر های کسری مورد توجه در مقالات، دسترسی به گذشته فرایند است، یعنی از عملگر های کسری چپ استفاده می شود. اما، در برخی حالت ها، ممکن است به آینده ی فرایند و محاسبه ی $\alpha(\cdot)$ ای که تحت تاثیر آن است، علاقه مند باشیم. بنابراین در چنین حالتی، مشتقات کسری راست بررسی می شود.

۱.۲.۲ معادلات اوایلر-لاگرانژ کسری

مشابه حساب متغیر کلاسیک، رایج ترین روش برای بیان مسائل حساب تغییرات کسری شامل حل معادله دیفرانسیل کسری، معادله اوایلر-لاگرانژ است، که باید هر مینیم/ماکزیمم تابع را در بر گیرد. به کمک شرایط کراندار و وضع شده روی مسئله در زمان ابتدایی $t = a$ و زمان انتهایی $t = b$ ، حل می شود. غالباً به کمک برخی روش های عددی، معادله دیفرانسیل کسری را می توان حل کرد و پاسخ تقریبی برای مسئله را به دست آورد [۲]

با بررسی کارهای ریو [۳۴] درمی یابیم که نیروهای اصطکاک توسط لاگرانژین های شامل مشتقات کسری، تشریح شده است. برای اعداد طبیعی r, N و N' فرض $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^r$

¹Niels Abel

²Riewe

³non-conservative Lagrangian

$\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ با $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N'$ تابعک تعریف شده توسط ریو، بصورت زیر است،

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L \left({}_a D_t^{\alpha_1}[x](t), \dots, {}_a D_t^{\alpha_N}[x](t), {}_t D_b^{\beta_1}[x](t), \dots, {}_t D_b^{\beta_{N'}}[x](t), x(t), t \right) dt \quad (10.2)$$

او نشان داد که هر جواب x از مسئله‌ی حساب تغییرات اکسترمم تابعک (۱۰.۲)، در شرط لازم زیر صدق می‌کند:

قضیه ۴.۲. مسئله متغیر مینیمم سازی تابعک (۱۰.۲) را در نظر بگیرید، معادله‌ی اوایلر-لاگرانژ کسری، بصورت زیر است،

$$\sum_{i=1}^N {}_t D_b^{\alpha_i} [\partial_i L] + \sum_{i=1}^{N'} {}_a D_t^{\beta_i} [\partial_{i+N} L] + \partial_{N'+N+1} L = 0.$$

ریو همچنین، نتایج خود را با بررسی مسئله کلاسیک اصطکاک خطی، واضح نموده است. [۲۴]. ما به دنبال مسائل حساب تغییرات کسری ای هستیم که تابعک‌ها وابسته به ترکیب مشتق کاپوتوی کسری با مرتبه‌های ثابت α و β می‌باشند [۲۵]. فرض کنید مجموعه تمام توابع $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ که با نرم $\|\cdot\|$ در $\mathbb{R}^N$ محدود شده است را D بنامیم. مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید: تابع $x \in D$ را برای تابعک

$$\mathcal{J}(x) = \int_a^b L(t, x(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha, \beta} x(t)) dt \quad (11.2)$$

با شرط کرانداری

$$x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b$$

بیابید تا مینیمم باشد، که $t \in [a, b], x_a, x_b \in \mathbb{R}^N, \gamma \in [0, 1]$ است و لاگرانژین L برخی از خواص هموار بودن را دارد.

قضیه ۵.۲. [۲۶] فرض کنید $x = (x_1, \dots, x_N)$ یک مینیمم موضعی برای مسئله با تابعک (۱۱.۲) و شرایط کرانداری قبل باشد. بنابراین x در سیستم N معادله اوایلر-لاگرانژ کسری زیر برای هر $t \in [a, b]$ صدق می‌کند،

$$\partial_i L(t, x(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha, \beta} x(t)) + D_{1-\gamma}^{\beta, \alpha} \partial_{N+i} L(t, x(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha, \beta} x(t)) = 0 \quad (12.2)$$

که $i = 1, \dots, N+1$ است.

در نظر داشته باشید که اگر مرتبه‌های α و β به سمت یک میل کنند، همچنین $\gamma = 0$ یا $\gamma = 1$ باشد، نتیجه‌ی متناظر در مفهوم کلاسیک حسابان تغییرات بدست می‌آید. در واقع با میل کردن α و β به سمت یک، مشتقات کسری ${}_a D_t^{\alpha}$ و ${}_t D_b^{\beta}$ معادل با مشتق کلاسیک $\frac{d}{dt}$ است و بطور مشابه، مشتقات کسری ${}_t D_b^{\beta}$ و ${}_a D_t^{\alpha}$ معادل با مشتق کلاسیک $-\frac{d}{dt}$ می‌باشند. مسائل حساب تغییرات با نقاط پایانی آزاد و شرایط متقاطع، موضوعاتی مرتبط در حساب تغییرات کسری هستند. موضوع نقاط کرانداری آزاد در مسائل تغییرات کسری اولین بار توسط آگراوال بررسی شد [۲]. وی معادله اوایلر لاگرانژ و شرایط متقاطع در حالتی که هر دو

زمان ابتدایی و انتهای داده شده است و توابع قابل قبول در زمان ابتدایی مشخص ولی زمان انتهایی نامشخص می‌باشد را مورد مطالعه قرار داد [۴]. گاهی اوقات یافتن جواب تحلیلی برای معادله اویلر لاگرانژ کسری، بسیار دشوار است، در این حالت از روش های عددی برای حل مسئله‌ی تغییرات استفاده می‌شود [۶].

۲.۲.۲ مسائل تغییرات کسری از مرتبه متغیر

در سال های اخیر با تلاش های رز و سامکو، که به تحقیق درباره‌ی انتگرالها و مشتقات از مرتبه‌ی متغیر (نه ثابت) پرداختند [۳۶]، تعدادی از مسائل حساب تغییرات به همراه مشتقات مرتبه کسری متغیر پدید آمدند [۲۹]. تعریف ۲۱.۱ از تعمیم انتگرال کسری عملگر K_P ، را در نظر بگیرید که مسئله تغییرات جدیدی ارائه نموده و در آن تابع توسط هسته داده شده تعریف شده است [۲۴]. با انتخاب مناسب هسته‌ی k و مجموعه P ، می‌توانیم مسئله تغییرات کسری مرتبه متغیر را بدست آوریم (تذکر ۳.۱ را ببینید). فرض کنید $P = \langle a, t, b, \lambda, \mu \rangle$ باشد. تابع $\mathcal{J}$ در $A(x_a, x_b)$ به صورت زیر تعریف شده است:

$$\mathcal{J}[x] = \int_a^b L(x(t), K_P[x](t), x'(t), B_P[x](t), t) dt, \quad (13.2)$$

که $A(x_a, x_b)$ بصورت مجموعه

$$\{x \in C^1([a, b]; \mathbb{R}) : x(a) = x_a, x(b) = x_b, K_P[x], B_P[x] \in C([a, b]; \mathbb{R})\},$$

و K_P تعمیم عملگر انتگرال کسری با هسته‌ی وابسته به $L_q(\Delta; \mathbb{R})$ و B_P تعمیم مشتق کسری کاپوتو می‌باشد. شرط بهینگی برای مسئله، که شامل تعیین تابعی برای مینیمم (یا ماکزیمم) کردن تابع (۱۳.۲) است، در قضیه زیر ارائه شده است [۲۴].

قضیه ۶.۲. فرض کنید $x \in A(x_a, x_b)$ یک مینیمم برای تابع (۱۳.۲) باشد. بنابراین x در معادله‌ی اویلر-لاگرانژ زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\partial_{\dot{x}} L(\star_x)(t)] + A_{P^*}[\tau \mapsto \partial_{\dot{x}} L(\star_x)(\tau)](t) \\ = \partial_x L(\star_x)(t) + K_{P^*}[\tau \mapsto \partial_{\dot{x}} L(\star_x)(\tau)](t), \end{aligned} \quad (14.2)$$

که برای هر $t \in (a, b)$ داریم

$$(\star_x)(t) = (x(t), K_P[x](t), x'(t), B_P[x](t), t).$$

توجه کنید، اگر تابع (۱۳.۲) به تعمیم عملگر کسری K_P و وابسته نباشد، این مسئله با مسئله‌ی تغییرات کلاسیک معادل است و قضیه‌ی ۶.۲ به قضیه‌ی ۱.۲ تبدیل می‌شود. فرض کنید $\Delta := \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \tau < t \leq b\}$ و همچنین $1 < p < \infty$ که q به همراه p است. یک حالت خاص این مسئله وقتی رخ می‌دهد که $\alpha : \Delta \rightarrow [0, 1 - \delta]$ با $\delta > 1/p$ و هسته‌ی تعریف شده بصورت

$$k^\alpha(t, \tau) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t, \tau))} (t - \tau)^{-\alpha(t, \tau)}$$

در $L_q(\Delta; \mathbb{R})$ باشد. نتایج بعدی، شرایط لازم بهینگی را ارائه می‌دهد [۲۴].

قضیه ۷.۲. مسئله‌ی مینیمم سازی تابعک

$$\mathcal{J}[x] = \int_a^b L\left(x(t), {}_a I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)}[x](t), x'(t), {}_a^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)}[x](t), t\right) dt \quad (15.2)$$

با شرایط کرانداری

$$x(a) = x_a, \quad x(b) = x_b \quad (16.2)$$

را در نظر بگیرید که $x', {}_a I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)}[x], {}_a^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)}[x] \in C([a, b]; \mathbb{R})$ است. بنابراین اگر $x \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ تابعک با شرایط کرانداری فوق را مینیمم (یا ماکزیمم) کند، لذا در معادله‌ی اوایلر-لاگرانژ زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} & \partial_1 L\left(x(t), {}_a I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)}[x](t), x'(t), {}_a^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)}[x](t), t\right) \\ & - \frac{d}{dt} \partial_2 L\left(x(t), {}_a I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)}[x](t), x'(t), {}_a^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)}[x](t), t\right) \\ & + {}_t I_b^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \left[\partial_3 L\left(x(\tau), {}_a I_\tau^{1-\alpha(\cdot, \cdot)}[x](\tau), x'(\tau), {}_a^C D_\tau^{\alpha(\cdot, \cdot)}[x](\tau), \tau\right) \right] dt \\ & + {}_t D_b^{\alpha(\cdot, \cdot)} \left[\partial_4 L\left(x(\tau), {}_a I_\tau^{1-\alpha(\cdot, \cdot)}[x](\tau), x'(\tau), {}_a^C D_\tau^{\alpha(\cdot, \cdot)}[x](\tau), \tau\right) \right] dt = 0. \end{aligned}$$

در حقیقت، هنگامی که مسیرها یک فرایند دینامیکی اند و مرتبه ممکن است تغییر کند، استفاده از مشتقات کسری با مرتبه‌ی ثابت در مسائل حساب تغییرات بهترین انتخاب نیست. بنابراین بررسی اینکه مرتبه‌ی $\alpha(\cdot)$ ، یک تابع وابسته به زمان باشد، اهمیت دارد. ممکن است به دنبال بهترین تابع $\alpha(\cdot)$ ای باشیم که معادله‌ی دیفرانسیل کسری مرتبه‌ی متغیر $D^{\alpha(\cdot)} x(t) = f(t, x(t))$ فرایند تحت مطالعه را، بهتر تشریح کند. این تقریب، به تازگی انجام شده و نیاز به کار بیشتری برای تکمیل مطالعه‌ی موضوع دارد (می‌توانید مطالعه کنید [۳۶]).

فصل ۳

بسط فرمول ها برای مشتقات کسری

در این فصل، ابزار عددی جدیدی برای حل معادلات دیفرانسیل به همراه سه نوع از مشتقات کاپوتوی مرتبه متغیر کسری را ارائه می‌کنیم. برای هر کدام از آنها، یک فرمول تقریب بدست آمده که به فرم مشتقات استاندارد (مرتبه صحیح) نوشته شده است. همچنین خطای تقریب ها نیز تخمین زده شده اند. سپس به مقایسه‌ی تقریب عددی تعدادی تابع آزمون با مشتق کسری دقیق شان می‌پردازیم. همچنین مثالی از اینکه چگونه روش های ارائه شده می‌تواند برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی کسری از مرتبه‌ی متغیر استفاده شود را بیان کرده‌ایم. اکنون مطالب اصلی این فصل را تشریح می‌کنیم. این فصل با فرمول سازی تعاریف مورد نیاز شروع می‌شود یعنی در بخش (۱.۳) سه نوع از مشتقات کاپوتوی مرتبه کسری متغیر را ارائه می‌کنیم. ابتدا، فقط یک متغیر وابسته را بررسی می‌کنیم سپس آن را برای چندین متغیر وابسته تعمیم می‌دهیم. بخش (۲.۳)، محتوای اصلی این فصل می‌باشد که در آن فرمول های تقریبی برای عملگر های کسری داده شده از مرتبه‌ی متغیر و فرمول های کران بالا برای خطا ها به ترتیب اثبات شده اند. برای آزمودن کارایی روش ارائه شده، در بخش ۳.۳، مشتق کسری دقیق تعدادی تابع آزمون با تقریب های عددی بدست آمده از تجزیه‌ی فرمول های بخش ۲.۳ را مقایسه می‌کنیم. در پایان، در بخش ۴.۳، روش مان را برای تقریب زدن دو مسئله‌ی فیزیکی شامل عملگر های کسری کاپوتو از مرتبه‌ی متغیر (معادله‌ی انتشار زمان کسری و معادله‌ی دیفرانسیل جزئی برگرز کسری^۱ در مکانیک سیالات) توسط مسائل کلاسیکی که ممکن است با روش های استاندارد مشهور حل شده باشند، بکار می‌بندیم.

¹ fractional Burgers' partial differential equation

۱.۳ عملگرهای کسری نوع کاپوتو از مرتبه متغیر

در مقالات حساب کسری، چندین تعریف مختلف از مشتقات وجود دارد. یکی از آنها که توسط کاپوتو در سال ۱۹۶۷ معرفی شد [۷] و به طور مستقل توسط نویسندگان دیگری مورد مطالعه قرار گرفت [۱۲]، کاربرد هایی زیادی پیدا کرده است و به نظر برای مدلسازی پدیده های فیزیکی مناسب به نظر می رسد.

۱.۱.۳ مشتقات کاپوتو برای توابع تک متغیره

هدف ما بررسی مشتقات کسری مرتبه متغیر، با α ی وابسته به زمان است. در واقع تعدادی از پدیده ها در فیزیک، هنگامی که مرتبه ی عملگر کسری ثابت نباشد، بهتر توصیف می شوند، برای مثال، فرایند انتشار در یک محیط ناهمگن، یا فرایند هایی که تغییر در محیط، حرکت ذره را بهبود می بخشد [۳۹] به سبب بررسی های فوق، سه نوع از مشتقات کسری کاپوتو را معرفی می کنیم. مرتبه ی مشتق به عنوان تابع $\alpha(t)$ در نظر گرفته شده که مقادیر در بازه ی $(0, 1)$ را می گیرد. برای شروع، دو نوع مختلف از مشتقات کسری ریمن-لیوویل را تعریف می کنیم. همچنین لازم به ذکر است که اثبات تمام قضایای این فصل در [۵] موجود و در دسترس است.

تعریف ۱.۳. برای تابع داده شده ی $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

۱. نوع I مشتق کسری ریمن-لیوویل چپ از مرتبه $\alpha(t)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$${}_a D_t^{\alpha(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \frac{d}{dt} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha(t)} x(\tau) d\tau;$$

۲. نوع I مشتق کسری ریمن-لیوویل راست از مرتبه $\alpha(t)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$${}_t D_b^{\alpha(t)} x(t) = \frac{-1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \frac{d}{dt} \int_t^b (\tau - t)^{-\alpha(t)} x(\tau) d\tau;$$

۳. نوع II مشتق کسری ریمن-لیوویل چپ از مرتبه $\alpha(t)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$${}_a D_t^{\alpha(t)} x(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha(t)} x(\tau) d\tau \right);$$

۴. نوع II مشتق کسری ریمن-لیوویل راست از مرتبه $\alpha(t)$ بصورت زیر تعریف می شود:

$${}_t D_b^{\alpha(t)} x(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_t^b (\tau - t)^{-\alpha(t)} x(\tau) d\tau \right).$$

مشتقات کاپوتوی ارائه شده، از مشتقات کسری ریمن-لیوویل قبلی بدست می آیند.

تعریف ۲.۳. برای تابع داده شده ی $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

۱. نوع I مشتق کاپوتوی چپ از مرتبه $\alpha(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) &= {}_a D_t^{\alpha(t)} (x(t) - x(a)) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \frac{d}{dt} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha(t)} [x(\tau) - x(a)] d\tau; \end{aligned}$$

۲. نوع I مشتق کاپوتوی راست از مرتبه $\alpha(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} {}^C D_b^{\alpha(t)} x(t) &= {}_t D_b^{\alpha(t)} (x(t) - x(b)) \\ &= \frac{-1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \frac{d}{dt} \int_t^b (\tau - t)^{-\alpha(t)} [x(\tau) - x(b)] d\tau; \end{aligned}$$

۳. نوع II مشتق کاپوتوی چپ از مرتبه $\alpha(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} {}^C \mathcal{D}_t^{\alpha(t)} x(t) &= {}_a \mathcal{D}_t^{\alpha(t)} (x(t) - x(a)) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha(t)} [x(\tau) - x(a)] d\tau \right); \end{aligned}$$

۴. نوع II مشتق کاپوتوی راست از مرتبه $\alpha(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} {}^C \mathcal{D}_b^{\alpha(t)} x(t) &= {}_t \mathcal{D}_b^{\alpha(t)} (x(t) - x(b)) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{-1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_t^b (\tau - t)^{-\alpha(t)} [x(\tau) - x(b)] d\tau \right); \end{aligned}$$

۵. نوع III مشتق کاپوتوی چپ از مرتبه $\alpha(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^C \mathbb{D}_t^{\alpha(t)} x(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha(t)} x'(\tau) d\tau;$$

۶. نوع III مشتق کاپوتوی راست از مرتبه $\alpha(t)$ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^C \mathbb{D}_b^{\alpha(t)} x(t) = \frac{-1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_t^b (\tau - t)^{-\alpha(t)} x'(\tau) d\tau.$$

برخلاف حالتی که α ثابت است، در اینجا انواع مختلف تعاریف با یکدیگر معادل نیستند.

قضیه ۱.۳. روابط میان عملگرهای کسری چپ بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) &= {}^C \mathbb{D}_t^{\alpha(t)} x(t) + \frac{\alpha'(t)}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \\ &\quad \times \int_a^t (t - \tau)^{1 - \alpha(t)} x'(t) \left[\frac{1}{1 - \alpha(t)} - \ln(t - \tau) \right] d\tau \quad (1.3) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) &= {}^C \mathbb{D}_t^{\alpha(t)} x(t) - \frac{\alpha'(t) \Psi(1 - \alpha(t))}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \\ &\quad \times \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha(t)} [x(\tau) - x(a)] d\tau. \quad (2.3) \end{aligned}$$

اثبات. با انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha(t)} [x(\tau) - x(t)] d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{1-\alpha(t)} \int_a^t (t-\tau)^{1-\alpha(t)} x'(\tau) d\tau \right]. \end{aligned}$$

با مشتق گیری از انتگرال داریم

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))} \left[\frac{\alpha'(t)}{(1-\alpha(t))^2} \int_a^t (t-\tau)^{1-\alpha(t)} x'(\tau) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1-\alpha(t)} \int_a^t (t-\tau)^{1-\alpha(t)} x'(\tau) \left[-\alpha'(t) \ln(t-\tau) + \frac{1-\alpha(t)}{t-\tau} \right] d\tau \right] \\ &= {}^C \mathbb{D}_t^{\alpha(t)} x(t) + \frac{\alpha'(t)}{\Gamma(1-\alpha(t))} \int_a^t (t-\tau)^{1-\alpha(t)} x'(\tau) \left[\frac{1}{1-\alpha(t)} - \ln(t-\tau) \right] d\tau. \end{aligned}$$

□

رابطه‌ی دوم، مستقیماً از محاسبات بدست می‌آید.

بنابراین، هنگامی که مرتبه‌ی $\alpha(t) \equiv c$ ثابت است، یا برای توابع ثابت $x(t) \equiv k$ ، داریم

$${}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) = {}^C \mathcal{D}_t^{\alpha(t)} x(t) = {}^C \mathbb{D}_t^{\alpha(t)} x(t).$$

به طور مشابه، نتیجه‌ی بعد را بدست می‌آوریم.

قضیه ۲.۳. روابط بین عملگرهای کسری راست به صورت زیر است :

$$\begin{aligned} {}^C D_b^{\alpha(t)} x(t) &= {}^C \mathbb{D}_b^{\alpha(t)} x(t) + \frac{\alpha'(t)}{\Gamma(1-\alpha(t))} \\ &\quad \times \int_t^b (\tau-t)^{1-\alpha(t)} x'(\tau) \left[\frac{1}{1-\alpha(t)} - \ln(\tau-t) \right] d\tau \end{aligned}$$

و

$${}^C D_b^{\alpha(t)} x(t) = {}^C \mathcal{D}_b^{\alpha(t)} x(t) + \frac{\alpha'(t)\Psi(1-\alpha(t))}{\Gamma(1-\alpha(t))} \times \int_t^b (\tau-t)^{-\alpha(t)} [x(\tau) - x(b)] d\tau.$$

قضیه ۳.۳. فرض کنید $x \in C^1([a, b], \mathbb{R})$. لذا در $t = a$

$${}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) = {}^C \mathcal{D}_t^{\alpha(t)} x(t) = {}^C \mathbb{D}_t^{\alpha(t)} x(t) = 0 ;$$

و در $t = b$ داریم

$${}^C D_b^{\alpha(t)} x(t) = {}^C \mathcal{D}_b^{\alpha(t)} x(t) = {}^C \mathbb{D}_b^{\alpha(t)} x(t) = 0.$$

اثبات. از تساوی سوم در زمان آغازین $t = a$ اثبات را شروع می‌کنیم. می‌توان نوشت

$$\left| {}^C \mathbb{D}_t^{\alpha(t)} x(t) \right| \leq \frac{\|x'\|}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha(t)} d\tau = \frac{\|x'\|}{\Gamma(\Upsilon - \alpha(t))} (t - a)^{1 - \alpha(t)},$$

که در $t = a$ برابر صفر است. برای اثبات تساوی اول در $t = a$ ، از رابطه‌ی (۱.۳) و دو رابطه‌ی

$$\left| \int_a^t (t - \tau)^{1 - \alpha(t)} \frac{x'(\tau)}{1 - \alpha(t)} d\tau \right| \leq \frac{\|x'\|}{(1 - \alpha(t))(\Upsilon - \alpha(t))} (t - a)^{\Upsilon - \alpha(t)}$$

۹

$$\left| \int_a^t (t - \tau)^{1 - \alpha(t)} x'(\tau) \ln(t - \tau) d\tau \right| \leq \frac{\|x'\|}{\Upsilon - \alpha(t)} (t - a)^{\Upsilon - \alpha(t)} \left| \ln(t - a) - \frac{1}{\Upsilon - \alpha(t)} \right|,$$

استفاده می‌کنیم. نامساوی فوق از انتگرال جزء به جزء بدست آمده است. نشان می‌دهیم در $t = a$ داریم ${}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) = 0$. در پایان با بررسی رابطه‌ی (۲.۳)، تساوی دوم در $t = a$ را اثبات می‌کنیم:

با انتگرال گیری جزء به جزء داریم

$$\left| \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha(t)} [x(\tau) - x(a)] d\tau \right| \leq \frac{\|x'\|}{(1 - \alpha(t))(\Upsilon - \alpha(t))} (t - a)^{\Upsilon - \alpha(t)} (t - a)^{\Upsilon - \alpha(t)}$$

و همچنین در $t = a$ داریم ${}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) = 0$. اما اثبات اینکه عملگر کسری راست در نقطه‌ی پایانی $t = b$ برابر صفر است، با آرگومان‌های مشابه انجام می‌شود. با مقداری محاسبه، رابطه‌ی میان مشتقات کسری ریمن-لیوویل و کاپوتو به سادگی بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{\alpha(t)} x(t) &= {}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) + \frac{x(a)}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \frac{d}{dt} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha(t)} d\tau \\ &= {}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) + \frac{x(a)}{\Gamma(1 - \alpha(t))} (t - a)^{-\alpha(t)} \\ &\quad + \frac{x(a)\alpha'(t)}{\Gamma(\Upsilon - \alpha(t))} (t - a)^{1 - \alpha(t)} \left[\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} - \ln(t - a) \right] \end{aligned}$$

۹

$$\begin{aligned} {}_a \mathcal{D}_t^{\alpha(t)} x(t) &= {}^C \mathcal{D}_t^{\alpha(t)} x(t) + x(a) \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha(t)} d\tau \right) \\ &= {}^C \mathcal{D}_t^{\alpha(t)} x(t) + \frac{x(a)}{\Gamma(1 - \alpha(t))} (t - a)^{-\alpha(t)} \\ &\quad + \frac{x(a)\alpha'(t)}{\Gamma(\Upsilon - \alpha(t))} (t - a)^{1 - \alpha(t)} [\Psi(\Upsilon - \alpha(t)) - \ln(t - a)]. \end{aligned}$$

برای عملگرهای کسری راست، داریم

$$\begin{aligned} {}_t D_b^{\alpha(t)} x(t) &= {}^C D_b^{\alpha(t)} x(t) + \frac{x(b)}{\Gamma(1 - \alpha(t))} (b - t)^{-\alpha(t)} \\ &\quad - \frac{x(b)\alpha'(t)}{\Gamma(\Upsilon - \alpha(t))} (b - t)^{1 - \alpha(t)} \left[\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} - \ln(b - t) \right] \end{aligned}$$

$${}_t D_b^{\alpha(t)} x(t) = {}_t^C D_b^{\alpha(t)} x(t) + \frac{x(b)}{\Gamma(1 - \alpha(t))} (b - t)^{-\alpha(t)} - \frac{x(b)\alpha'(t)}{\Gamma(2 - \alpha(t))} (b - t)^{1-\alpha(t)} [\Psi(2 - \alpha(t)) - \ln(b - t)].$$

بنابراین به راحتی می توان نتیجه گرفت اگر $x(a) = 0$ ، پس

$${}_a D_t^{\alpha(t)} x(t) = {}_a^C D_t^{\alpha(t)} x(t) \quad \text{و} \quad {}_a D_t^{\alpha(t)} x(t) = {}_a^C D_t^{\alpha(t)} x(t)$$

و اگر $x(b) = 0$ ، داریم

$${}_t D_b^{\alpha(t)} x(t) = {}_t^C D_b^{\alpha(t)} x(t) \quad \text{و} \quad {}_t D_b^{\alpha(t)} x(t) = {}_t^C D_b^{\alpha(t)} x(t).$$

□

اکنون می خواهیم روابط مشتقات کسری کاپوتو برای تابع توانی را بدست بیاوریم.

لم ۱.۳. فرض کنید $x(t) = (t - a)^\gamma$ که $\gamma > 0$. لذا

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha(t) + 1)} (t - a)^{\gamma - \alpha(t)} \\ &\quad - \alpha'(t) \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha(t) + 2)} (t - a)^{\gamma - \alpha(t) + 1} \\ &\quad \times [\ln(t - a) - \Psi(\gamma - \alpha(t) + 2) + \Psi(1 - \alpha(t))], \\ {}_a^C D_t^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha(t) + 1)} (t - a)^{\gamma - \alpha(t)} \\ &\quad - \alpha'(t) \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha(t) + 2)} (t - a)^{\gamma - \alpha(t) + 1} \\ &\quad \times [\ln(t - a) - \Psi(\gamma - \alpha(t) + 2)], \\ {}_a^C D_t^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha(t) + 1)} (t - a)^{\gamma - \alpha(t)}. \end{aligned}$$

اثبات. رابطه‌ی ${}_a^C D_t^{\alpha(t)} x(t)$ مستقیماً از [۳۶] بدست می آید. برای اثبات تساوی دوم، می توان نوشت

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_a^t (t - \tau)^{-\alpha(t)} (\tau - a)^\gamma d\tau \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_a^t (t - a)^{-\alpha(t)} \left(1 - \frac{\tau - a}{t - a} \right)^{-\alpha(t)} (\tau - a)^\gamma d\tau \right). \end{aligned}$$

با تغییر متغیر $\tau - a = s(t - a)$ و به کمک تابع بتا $B(\cdot, \cdot)$ ، ثابت می کنیم

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{(t - a)^{-\alpha(t)}}{\Gamma(1 - \alpha(t))} \int_0^1 (1 - s)^{-\alpha(t)} s^\gamma (t - a)^{\gamma + 1} ds \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{(t - a)^{\gamma - \alpha(t) + 1}}{\Gamma(1 - \alpha(t))} B(\gamma + 1, 1 - \alpha(t)) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\Gamma(\gamma + 1)}{\Gamma(\gamma - \alpha(t) + 2)} (t - a)^{\gamma - \alpha(t) + 1} \right). \end{aligned}$$

کافی است از عبارت بالا دیفرانسیل بگیریم تا به فرمول مورد نظر برسیم. تساوی سوم نیز بصورت مشابه بدست می‌آید. $\square$

روابط مشابه لم ۱.۳، برای مشتقات کسری راست کاپوتو از مرتبه‌ی متغیر، به سادگی بدست می‌آید.

لم ۲.۳. فرض کنید $x(t) = (b-t)^\gamma$ که $\gamma > 0$. لذا،

$$\begin{aligned} {}^C D_b^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha(t)+1)} (b-t)^{\gamma-\alpha(t)} \\ &\quad + \alpha'(t) \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha(t)+2)} (b-t)^{\gamma-\alpha(t)+1} \\ &\quad \times [\ln(b-t) - \Psi(\gamma-\alpha(t)+2) + \Psi(1-\alpha(t))], \\ {}^C \mathcal{D}_b^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha(t)+1)} (b-t)^{\gamma-\alpha(t)} \\ &\quad + \alpha'(t) \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha(t)+2)} (b-t)^{\gamma-\alpha(t)+1} \\ &\quad \times [\ln(b-t) - \Psi(\gamma-\alpha(t)+2)], \\ {}^C \mathbb{D}_b^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha(t)+1)} (b-t)^{\gamma-\alpha(t)}. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن لم ۱.۳، نتیجه می‌گیریم

$${}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) \neq {}^C \mathcal{D}_t^{\alpha(t)} x(t) \neq {}^C \mathbb{D}_t^{\alpha(t)} x(t).$$

همچنین، حداقل برای تابع توانی، پیشنهاد می‌شود زمانی که مرتبه انتگرال کسری متغیر است، ${}^C \mathbb{D}_t^{\alpha(t)} x(t)$ عملگر معکوس مناسب تری برای انتگرال کسری به نظر می‌رسد. برای مثال، توابع $x(t) = t^2$ و $y(t) = (1-t)^2$ و همچنین مرتبه‌ی کسری $\alpha(t) = \frac{5t+1}{10}$ که $t \in [0, 1]$ را در نظر بگیرید. پس برای هر t ، داریم $0/6 \leq \alpha(t) \leq 0/8$. حال مشتقات کسری x و y از مرتبه‌ی $\alpha(t)$ را با مشتقات کسری از مرتبه ثابت $\alpha = 0/8$ و $\alpha = 0/6$ مقایسه می‌کنیم. طبق لم ۱.۳، مشتقات کسری چپ کاپوتو از مرتبه‌ی $\alpha(t)$ برای تابع x بصورت زیر است

$$\begin{aligned} {}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{2}{\Gamma(3-\alpha(t))} t^{2-\alpha(t)} \\ &\quad - \frac{t^{3-\alpha(t)}}{\Gamma(4-\alpha(t))} [\ln(t) - \Psi(4-\alpha(t)) + \Psi(1-\alpha(t))], \\ {}^C \mathcal{D}_t^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{2}{\Gamma(3-\alpha(t))} t^{2-\alpha(t)} - \frac{t^{3-\alpha(t)}}{\Gamma(4-\alpha(t))} [\ln(t) - \Psi(4-\alpha(t))], \\ {}^C \mathbb{D}_t^{\alpha(t)} x(t) &= \frac{2}{\Gamma(3-\alpha(t))} t^{2-\alpha(t)}. \end{aligned}$$

در حالیکه طبق لم ۲.۳، مشتقات کسری راست کاپوتو از مرتبه‌ی $\alpha(t)$ برای تابع y بصورت

$$\begin{aligned} {}^C D_{\lambda}^{\alpha(t)} y(t) &= \frac{\Upsilon(1-t)^{\Upsilon-\alpha(t)}}{\Gamma(\Upsilon-\alpha(t))} \\ &\quad - \frac{(1-t)^{\Upsilon-\alpha(t)}}{\Gamma(\Upsilon-\alpha(t))} [\ln(1-t) - \Psi(\Upsilon-\alpha(t)) + \Psi(1-\alpha(t))], \\ {}^C \mathcal{D}_{\lambda}^{\alpha(t)} y(t) &= \frac{\Upsilon(1-t)^{\Upsilon-\alpha(t)}}{\Gamma(\Upsilon-\alpha(t))} - \frac{(1-t)^{\Upsilon-\alpha(t)}}{\Gamma(\Upsilon-\alpha(t))} [\ln(1-t) - \Psi(\Upsilon-\alpha(t))], \\ {}^C \mathbb{D}_{\lambda}^{\alpha(t)} y(t) &= \frac{\Upsilon(1-t)^{\Upsilon-\alpha(t)}}{\Gamma(\Upsilon-\alpha(t))}. \end{aligned}$$

برای مرتبه‌ی ثابت α ، داریم

$${}^C D_t^{\alpha(t)} x(t) = \frac{\Upsilon}{\Gamma(\Upsilon-\alpha(t))} t^{\Upsilon-\alpha} \quad \text{و} \quad {}^C D_{\lambda}^{\alpha(t)} y(t) = \frac{\Upsilon}{\Gamma(\Upsilon-\alpha(t))} (1-t)^{\Upsilon-\alpha}.$$

نتایج را می‌توان در شکل ۱.۳ مشاهده کرد.

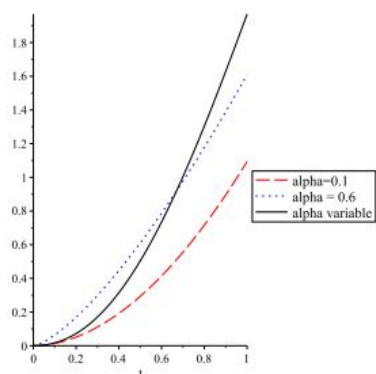
۲.۱.۳ مشتقات کاپوتو برای توابع چند متغیره

مشتقات کسری جزئی یک بسط معمولی اند و به روش مشابه تعریف می‌شوند.

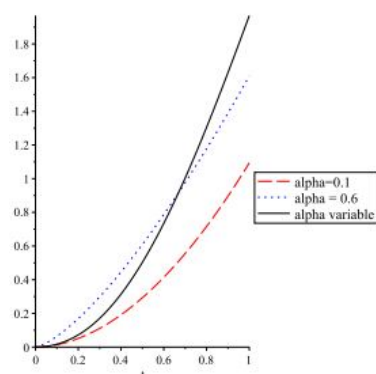
فرض کنید $m \in \mathbb{N}, k \in \{1, \dots, m\}$ ، تابع $x : \prod_{i=1}^m [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}$ با m متغیر باشد. برای سادگی

کار، بردارها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

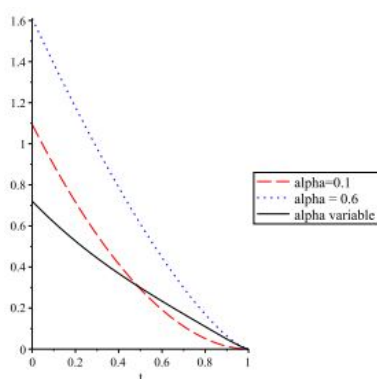
$$[\tau]_k = (t_1, \dots, t_{k-1}, \tau, t_{k+1}, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m \quad \text{و} \quad (\bar{t}) = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m.$$



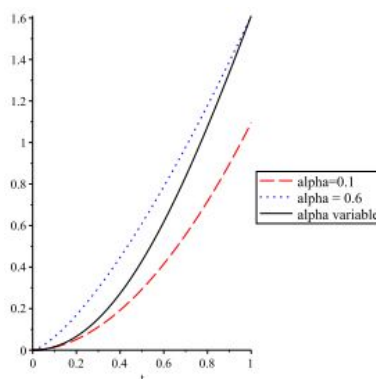
(ب) ${}^C D_t^{\alpha(t)} x(t)$



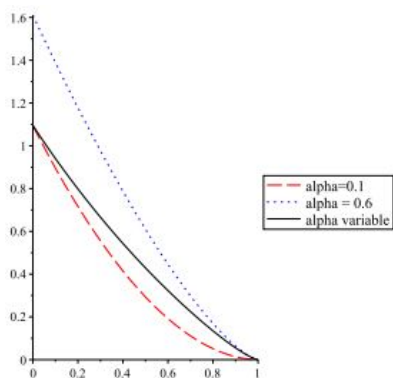
(ب̃) ${}^C D_t^{\alpha(t)} x(t)$



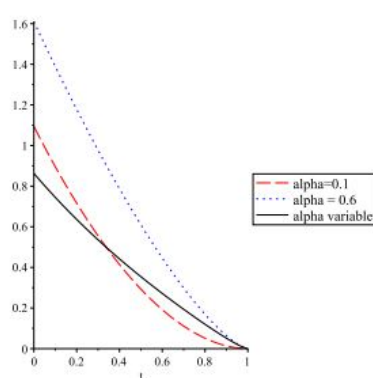
(د) ${}^C D_1^{\alpha(t)} x(t)$



(ج) ${}^C D_t^{\alpha(t)} x(t)$



(و) ${}^C D_1^{\alpha(t)} x(t)$



(ه) ${}^C D_1^{\alpha(t)} x(t)$

شکل ۱.۳: مقایسه میان مشتقات کسری مرتبه ثابت و مرتبه متغیر

تعریف ۳.۳. برای تابع $x : \prod_{i=1}^m [a_i, b_i] \rightarrow \mathbb{R}$ و مرتبه های کسری $(\circ, 1)$ $\alpha_k : [a_k, b_k] \rightarrow$ که $k \in \{1, \dots, m\}$ داریم

۱. نوع I مشتق جزئی چپ کاپوتو از مرتبه $\alpha_k(t_k)$ بصورت زیر تعریف می شود

$${}^C D_{a_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_k(t_k))} \frac{\partial}{\partial t_k} \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{-\alpha_k(t_k)} (x[\tau]_k - x[a_k]_k) d\tau;$$

۲. نوع I مشتق جزئی راست کاپوتو از مرتبه $\alpha_k(t_k)$ بصورت زیر تعریف می شود

$${}^C D_{b_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) = \frac{-1}{\Gamma(1 - \alpha_k(t_k))} \frac{\partial}{\partial t_k} \int_{t_k}^{b_k} (\tau - t_k)^{-\alpha_k(t_k)} (x[\tau]_k - x[b_k]_k) d\tau;$$

۳. نوع II مشتق جزئی چپ کاپوتو از مرتبه $\alpha_k(t_k)$ بصورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} {}^C \mathcal{D}_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) \\ = \frac{\partial}{\partial t_k} \left(\frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_k(t_k))} \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{-\alpha_k(t_k)} (x[\tau]_k - x[a_k]_k) d\tau \right); \end{aligned}$$

۴. نوع II مشتق جزئی راست کاپوتو از مرتبه $\alpha_k(t_k)$ بصورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} {}^C \mathcal{D}_{b_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) \\ = \frac{\partial}{\partial t_k} \left(\frac{-1}{\Gamma(1 - \alpha_k(t_k))} \int_{t_k}^{b_k} (\tau - t_k)^{-\alpha_k(t_k)} (x[\tau]_k - x[b_k]_k) d\tau \right); \end{aligned}$$

۵. نوع III مشتق جزئی چپ کاپوتو از مرتبه $\alpha_k(t_k)$ بصورت زیر تعریف می شود

$${}^C \mathbb{D}_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha_k(t_k))} \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{-\alpha_k(t_k)} \frac{\partial x}{\partial t_k} x[\tau]_k d\tau;$$

۶. نوع III مشتق جزئی راست کاپوتو از مرتبه $\alpha_k(t_k)$ بصورت زیر تعریف می شود

$${}^C \mathbb{D}_{b_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) = \frac{-1}{\Gamma(1 - \alpha_k(t_k))} \int_{t_k}^{b_k} (\tau - t_k)^{-\alpha_k(t_k)} \frac{\partial x}{\partial t_k} x[\tau]_k d\tau.$$

مشابه آنچه قبلا انجام دادیم، روابط موجود در تعاریف بالا را می توان اثبات کرد.

قضیه ۴.۳. با استفاده از مفروضات فوق روابط زیر را می توان نوشت: [۵]

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) &= {}^C \mathbb{D}_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) \\ &+ \frac{\alpha'_k(t_k)}{\Gamma(\Psi - \alpha_k(t_k))} \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{1 - \alpha_k(t_k)} \frac{\partial x}{\partial t_k} [\tau]_k \left[\frac{1}{1 - \alpha_k(t_k)} - \ln(t_k - \tau) \right] d\tau, \end{aligned} \quad (۳.۳)$$

$$\begin{aligned} {}^C D_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) &= {}^C \mathcal{D}_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) \\ &- \frac{\alpha'_k(t_k) \Psi (1 - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(1 - \alpha_k(t_k))} \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{-\alpha_k(t_k)} [x[\tau]_k - x[a_k]_k] d\tau, \end{aligned} \quad (۴.۳)$$

$${}^C D_{b_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) = {}^C \mathbb{D}_{b_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) + \frac{\alpha'_k(t_k)}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k))} \int_{t_k}^{b_k} (\tau - t_k)^{\Upsilon - \alpha_k(t_k)} \frac{\partial x}{\partial t_k} x[\tau]_k \left[\frac{1}{\Upsilon - \alpha_k(t_k)} - \ln(\tau - t_k) \right] d\tau$$

و

$${}^C D_{b_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) = {}^C \mathcal{D}_{b_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) + \frac{\alpha'_k(t_k) \Psi(\Upsilon - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k))} \int_{t_k}^{b_k} (\tau - t_k)^{-\alpha_k(t_k)} [x[\tau]_k - x[b_k]_k] d\tau.$$

۲.۳ تقریب های عددی

فرض کنید $p \in \mathbb{N}$ باشد. تعریف می کنیم

$$A_p = \frac{1}{\Gamma(p + \Upsilon - \alpha_k(t_k))} \left[1 + \sum_{l=n-p+1}^N \frac{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n + l)}{\Gamma(\alpha_k(t_k) - p)(l - n + p)!} \right],$$

$$B_p = \frac{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n + p)}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k)) \Gamma(\alpha_k(t_k))(p - n)!},$$

$$V_p(\bar{t}) = \int_{a_k}^{t_k} (\tau - a_k)^{p-n} \frac{\partial x}{\partial t_k} [\tau]_k d\tau,$$

$$L_p(\bar{t}) = \max_{\tau \in \{a_k, t_k\}} \left| \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [\tau]_k \right|.$$

قضیه ۵.۳. فرض کنید $x \in C^{n+1}(\prod_{i=1}^m [a_i, b_i], \mathbb{R})$ که $n \in \mathbb{N}$ است. لذا برای هر $k \in \{1, \dots, m\}$ و هر $N \in \mathbb{N}$ که $N \geq n$ داریم

$${}^C \mathbb{D}_{a_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) = \sum_{p=1}^n A_p (t_k - a_k)^{p - \alpha_k(t_k)} \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [t_k]_k + \sum_{p=n}^N B_p (t_k - a_k)^{n-p - \alpha_k(t_k)} V_p(\bar{t}) + E(\bar{t}),$$

تقریب خطای $E(\bar{t})$ در کران زیر قرار دارد

$$E(\bar{t}) \leq L_{n+1}(\bar{t}) \frac{e((n - \alpha_k(t_k))^\Upsilon + n - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(n + \Upsilon - \alpha_k(t_k)) N^{n - \alpha_k(t_k)} (n - \alpha_k(t_k))} (t_k - a_k)^{n+1 - \alpha_k(t_k)}.$$

اثبات. طبق تعریف،

$${}^C \mathbb{D}_{a_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) = \frac{1}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k))} \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{-\alpha_k(t_k)} \frac{\partial x}{\partial t_k} [\tau]_k d\tau$$

با انتگرال گیری جزء به جزء با فرض $u'(\tau) = (t_k - \tau)^{-\alpha_k(t_k)}$ و $v(\tau) = \frac{\partial x}{\partial t_k} [\tau]_k$ نتیجه می گیریم

$${}^C \mathbb{D}_{a_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) = \frac{(t_k - a_k)^{1 - \alpha_k(t_k)}}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k))} \frac{\partial x}{\partial t_k} [a_k]_k + \frac{1}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k))} \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{1 - \alpha_k(t_k)} \frac{\partial^\Upsilon x}{\partial t_k^\Upsilon} [\tau]_k d\tau.$$

دوباره با انتگرال گیری جزء به جزء به همراه $u'(\tau) = (t_k - \tau)^{1-\alpha_k(t_k)}$ و $v(\tau) = \frac{\partial^{\gamma} x}{\partial t_k^{\gamma}}[\tau]_k$ داریم

$$\begin{aligned} {}^C_{a_k} \mathbb{D}_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) &= \frac{(t_k - a_k)^{1-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(\gamma - \alpha_k(t_k))} \frac{\partial x}{\partial t_k} [a_k]_k + \frac{(t_k - a_k)^{\gamma-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(\gamma - \alpha_k(t_k))} \frac{\partial^{\gamma} x}{\partial t_k^{\gamma}} [a_k]_k \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\gamma - \alpha_k(t_k))} \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{\gamma-\alpha_k(t_k)} \frac{\partial^{\gamma} x}{\partial t_k^{\gamma}} [\tau]_k d\tau. \end{aligned}$$

این فرایند را $n - 2$ بار دیگر تکرار می کنیم که به فرمول بسط زیر می رسیم

$$\begin{aligned} {}^C_{a_k} \mathbb{D}_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) &= \sum_{p=1}^n \frac{(t_k - a_k)^{p-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(p+1-\alpha_k(t_k))} \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [a_k]_k \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))} \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{n-\alpha_k(t_k)} \frac{\partial^{n+1} x}{\partial t_k^{n+1}} [\tau]_k d\tau. \end{aligned}$$

با استفاده از تساوی های

$$\begin{aligned} (t_k - \tau)^{n-\alpha_k(t_k)} &= (t_k - a_k)^{n-\alpha_k(t_k)} \left(1 - \frac{\tau - a_k}{t_k - a_k} \right)^{n-\alpha_k(t_k)} \\ &= (t_k - a_k)^{n-\alpha_k(t_k)} \left[\sum_{p=0}^N \binom{n-\alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p \frac{(\tau - a_k)^p}{(t_k - a_k)^p} + \bar{E}(\bar{t}) \right] \end{aligned}$$

همراه با

$$\bar{E}(\bar{t}) = \sum_{p=N+1}^{\infty} \binom{n-\alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p \frac{(\tau - a_k)^p}{(t_k - a_k)^p}$$

می رسیم به

$$\begin{aligned} {}^C_{a_k} \mathbb{D}_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) &= \sum_{p=1}^n \frac{(t_k - a_k)^{p-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(p+1-\alpha_k(t_k))} \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [a_k]_k \\ &\quad + \frac{(t_k - a_k)^{n-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))} \int_{a_k}^{t_k} \sum_{p=0}^N \binom{n-\alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p \frac{(\tau - a_k)^p}{(t_k - a_k)^p} \frac{\partial^{n+1} x}{\partial t_k^{n+1}} [\tau]_k d\tau + E(\bar{t}) \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{(t_k - a_k)^{p-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(p+1-\alpha_k(t_k))} \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [a_k]_k + \frac{(t_k - a_k)^{p-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))} \\ &\quad \times \sum_{p=0}^N \binom{n-\alpha_k(t_k)}{p} \frac{(-1)^p}{(t_k - a_k)^p} \int_{a_k}^{t_k} (\tau - a_k)^p \frac{\partial^{n+1} x}{\partial t_k^{n+1}} + [\tau]_k E(\bar{t}) \end{aligned}$$

که

$$E(\bar{t}) = \frac{(t_k - a_k)^{n-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))} \int_{a_k}^{t_k} \bar{E}(\bar{t}) \frac{\partial^{n+1} x}{\partial t_k^{n+1}} [\tau]_k d\tau.$$

اکنون، سیگمای آخر را برای $p = 0$ و سایر $p = 1, \dots, N$ جدا می کنیم و به همراه $u(\tau) = (\tau - a_k)^p$ و $v'(\tau) = \frac{\partial^{n+1} x}{\partial t_k^{n+1}} [\tau]_k$ انتگرال جزء به جزء می گیریم. با مشاهده این که

$$\binom{n-\alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p = \frac{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n + p)}{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n) p!},$$

داریم:

$$\begin{aligned}
 & \frac{(t_k - a_k)^{n-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))} \sum_{p=0}^N \binom{n-\alpha_k(t_k)}{p} \frac{(-1)^p}{(t_k - a_k)^p} \int_{a_k}^{t_k} (\tau - a_k)^p \frac{\partial^{n+1} x}{\partial t_k^{n+1}} + [\tau]_k d\tau \\
 &= \frac{(t_k - a_k)^{n-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))} \left[\frac{\partial^n x}{\partial t_k^n} [t_k]_k - \frac{\partial^n x}{\partial t_k^n} [a_k]_k \right] \\
 & \quad + \frac{(t_k - a_k)^{n-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))} \sum_{p=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n + p)}{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n) p! (t_k - a_k)^p} \\
 & \quad \times \left[(t_k - a_k)^p \frac{\partial^n x}{\partial t_k^n} [t_k]_k - \int_{a_k}^{t_k} p (\tau - a_k)^{p-1} \frac{\partial^n x}{\partial t_k^n} [\tau]_k d\tau \right] \\
 &= - \frac{(t_k - a_k)^{n-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))} \frac{\partial^n x}{\partial t_k^n} [a_k]_k + \frac{(t_k - a_k)^{n-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))} \frac{\partial^n x}{\partial t_k^n} [t_k]_k \\
 & \quad \times \left[1 + \sum_{p=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n + p)}{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n) p!} \right] + \frac{(t_k - a_k)^{n-\alpha_k(t_k)-1}}{\Gamma(n-\alpha_k(t_k))} \\
 & \quad \times \sum_{p=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n + p)}{\Gamma(\alpha_k(t_k) + 1 - n) (p-1)! (t_k - a_k)^{p-1}} \int_{a_k}^{t_k} (\tau - a_k)^{p-1} \frac{\partial^n x}{\partial t_k^n} [\tau]_k d\tau.
 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
 {}^C \mathbb{D}_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) &= \sum_{p=1}^{n-1} \frac{(t_k - a_k)^{p-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(p+1-\alpha_k(t_k))} \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [a_k]_k \\
 & \quad + \frac{(t_k - a_k)^{n-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))} \frac{\partial^n x}{\partial t_k^n} [t_k]_k \left[1 + \sum_{p=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n + p)}{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n) p!} \right] \\
 & \quad + \frac{(t_k - a_k)^{n-\alpha_k(t_k)-1}}{\Gamma(n-\alpha_k(t_k))} \sum_{p=1}^N \frac{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n + p)}{\Gamma(\alpha_k(t_k) + 1 - n) (p-1)! (t_k - a_k)^{p-1}} \\
 & \quad \times \int_{a_k}^{t_k} (\tau - a_k)^{p-1} \frac{\partial^n x}{\partial t_k^n} [\tau]_k d\tau + E(\bar{t}).
 \end{aligned}$$

با تکرار این فرایند تا $n-1$ بار برای سیگمای آخر، که به معنای جدا کردن جمله‌ی اول سیگما و انتگرال جزء به جزء از نتیجه‌ی بدست آمده است، میرسیم به

$$\begin{aligned}
 {}^C \mathbb{D}_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) &= \sum_{p=1}^n \frac{(t_k - a_k)^{p-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(p+1-\alpha_k(t_k))} \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [t_k]_k \\
 & \quad \times \left[1 + \sum_{l=n-p+1}^N \frac{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n + l)}{\Gamma(\alpha_k(t_k) - p) (l - n + p)!} \right] \\
 & \quad + \sum_{p=n}^N \frac{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n + p)}{\Gamma(1-\alpha_k(t_k)) \Gamma(\alpha_k(t_k)) (p-n)!} (t_k - a_k)^{n-p-\alpha_k(t_k)} \\
 & \quad \times \int_{a_k}^{t_k} (\tau - a_k)^{p-n} \frac{\partial x}{\partial t_k} [\tau]_k d\tau + E(\bar{t}).
 \end{aligned}$$

اکنون به دنبال فرمول کران بالا برای $E(\bar{t})$ هستیم. با استفاده از دو رابطه‌ی

$$\left| \frac{\tau - a_k}{t_k - a_k} \right| \leq 1, \quad (\tau \in [a, t])$$

و

$$\left| \binom{n - \alpha_k(t_k)}{p} \right| \leq \frac{e((n - \alpha_k(t_k))^{\mathfrak{Y}} + n - \alpha_k(t_k))}{p^{n+1-\alpha_k(t_k)}},$$

داریم

$$\begin{aligned} \bar{E}(\bar{t}) &\leq \sum_{p=N+1}^{\infty} \frac{e((n - \alpha_k(t_k))^{\mathfrak{Y}} + n - \alpha_k(t_k))}{p^{n+1-\alpha_k(t_k)}} \\ &\leq \int_N^{\infty} \frac{e((n - \alpha_k(t_k))^{\mathfrak{Y}} + n - \alpha_k(t_k))}{p^{n+1-\alpha_k(t_k)}} dp \\ &= \frac{e((n - \alpha_k(t_k))^{\mathfrak{Y}} + n - \alpha_k(t_k))}{N^{n-\alpha_k(t_k)}(n - \alpha_k(t_k))}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$E(\bar{t}) \leq L_{n+1}(\bar{t}) \frac{e((n - \alpha_k(t_k))^{\mathfrak{Y}} + n - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))N^{n-\alpha_k(t_k)}(n - \alpha_k(t_k))} (t_k - a_k)^{n+1-\alpha_k(t_k)}.$$

□

و اثبات تمام می‌شود.

تذکر ۱.۳. در قضیه‌ی ۵.۳ برای هر $\bar{t} \in \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$ و $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(\bar{t}) = 0.$$

قضیه ۶.۳. فرض کنید $x \in C^{n+1}(\prod_{i=1}^m [a_i, b_i], \mathbb{R})$ که $n \in \mathbb{N}$ لذا برای هر $k \in \{1, \dots, m\}$ و برای هر $N \in \mathbb{N}$ که $N \geq n$ است، داریم

$$\begin{aligned} {}^C D_{a_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) &= \sum_{p=1}^n A_p(t_k - a_k)^{p-\alpha_k(t_k)} \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [t_k]_k \\ &+ \sum_{p=n}^N B_p(t_k - a_k)^{n-p-\alpha_k(t_k)} V_p(\bar{t}) \frac{\alpha'_k(t_k)(t_k - a_k)^{1-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(\mathfrak{Y} - \alpha_k(t_k))} \\ &\times \left[\left(\frac{1}{1 - \alpha_k(t_k) - \ln(t_k - a_k)} \right) \sum_{p=0}^N \binom{1 - \alpha_k(t_k)}{p} \frac{(-1)^p}{(t_k - a_k)^p} V_{n+p}(\bar{t}) \right. \\ &\left. + \sum_{p=0}^N \binom{1 - \alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p \sum_{r=1}^N \frac{1}{r(t_k - a_k)^{p+r}} V_{n+p+r}(\bar{t}) \right] + E(\bar{t}). \end{aligned}$$

خطای تقریب $E(\bar{t})$ در کران زیر قرار دارد

$$\begin{aligned} E(\bar{t}) &\leq L_{n+1}(\bar{t}) \frac{e((n - \alpha_k(t_k))^{\mathfrak{Y}} + n - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))N^{n-\alpha_k(t_k)}(n - \alpha_k(t_k))} (t_k - a_k)^{n+1-\alpha_k(t_k)} \\ &+ |\alpha'_k(t_k)| L_1(\bar{t}) \frac{e((1 - \alpha_k(t_k))^{\mathfrak{Y}} + 1 - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(\mathfrak{Y} - \alpha_k(t_k))N^{1-\alpha_k(t_k)}(1 - \alpha_k(t_k))} \\ &\times \left[\left| \frac{1}{1 - \alpha_k(t_k)} - \ln(t_k - a_k) \right| + \frac{1}{N} \right] (t_k - a_k)^{\mathfrak{Y}-\alpha_k(t_k)}. \end{aligned}$$

اثبات. با استفاده از رابطه‌ی (۳.۳) و قضیه‌ی ۵.۳، تنها نیاز به بسط رابطه زیر داریم

$$\frac{\alpha'_k(t_k)}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k))} \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{\Upsilon - \alpha_k(t_k)} \frac{\partial x}{\partial t_k}[\tau]_k \left[\frac{1}{\Upsilon - \alpha_k(t_k)} - \ln(t_k - \tau) \right] d\tau. \quad (۵.۳)$$

با تفکیک انتگرال و استفاده از بسط فرمولها

$$\begin{aligned} (t_k - \tau)^{\Upsilon - \alpha_k(t_k)} &= (t_k - a_k)^{\Upsilon - \alpha_k(t_k)} \left(1 - \frac{\tau - a_k}{t_k - a_k} \right)^{\Upsilon - \alpha_k(t_k)} \\ &= (t_k - a_k)^{\Upsilon - \alpha_k(t_k)} \left[\sum_{p=0}^N \binom{\Upsilon - \alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p \frac{(\tau - a_k)^p}{(t_k - a_k)^p} + \bar{E}_\Upsilon(\bar{t}) \right] \end{aligned}$$

به همراه

$$\bar{E}_\Upsilon(\bar{t}) = \sum_{p=N+1}^{\infty} \binom{\Upsilon - \alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p \frac{(\tau - a_k)^p}{(t_k - a_k)^p}$$

و

$$\begin{aligned} \ln(t_k - \tau) &= \ln(t_k - a_k) + \ln \left(1 - \frac{\tau - a_k}{t_k - a_k} \right) \\ &= \ln(t_k - a_k) - \sum_{r=1}^N \frac{1}{r} \frac{(\tau - a_k)^r}{(t_k - a_k)^r} - \bar{E}_\Upsilon(\bar{t}) \end{aligned}$$

به همراه

$$\bar{E}_\Upsilon(\bar{t}) = \sum_{r=N+1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{(\tau - a_k)^r}{(t_k - a_k)^r},$$

نتیجه می گیریم که عبارت (۵.۳) معادل است با

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha'_k(t_k)}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k))} \left[\left(\frac{1}{1 - \alpha_k(t_k)} - \ln(t_k - a_k) \right) \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{1 - \alpha_k(t_k)} \frac{\partial x}{\partial t_k}[\tau]_k d\tau \right. \\
 & \quad \left. - \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{1 - \alpha_k(t_k)} \ln \left(1 - \frac{\tau - a_k}{t_k - a_k} \right) \frac{\partial x}{\partial t_k}[\tau]_k d\tau \right] \\
 = & \frac{\alpha'_k(t_k)}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k))} \left[\left(\frac{1}{1 - \alpha_k(t_k)} - \ln(t_k - a_k) \right) \right. \\
 & \quad \times \int_{a_k}^{t_k} (t_k - a_k)^{1 - \alpha_k(t_k)} \sum_{p=\circ}^N \binom{1 - \alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p \frac{(\tau - a_k)^p}{(t_k - a_k)^p} \frac{\partial x}{\partial t_k}[\tau]_k d\tau \\
 & \quad + \int_{a_k}^{t_k} (t_k - a_k)^{1 - \alpha_k(t_k)} \sum_{p=\circ}^N \binom{1 - \alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p \frac{(\tau - a_k)^p}{(t_k - a_k)^p} \\
 & \quad \times \sum_{\lambda}^N \frac{1}{r} \frac{(\tau - a_k)^r}{(t_k - a_k)^r} \frac{\partial x}{\partial t_k}[\tau]_k d\tau \left. \right] + \frac{\alpha'_k(t_k)}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k))} \left[\left(\frac{1}{1 - \alpha_k(t_k)} - \ln(t_k - a_k) \right) \right. \\
 & \quad \times \int_{a_k}^{t_k} (t_k - a_k)^{1 - \alpha_k(t_k)} \overline{E}_{\lambda}(\bar{t}) \frac{\partial x}{\partial t_k}[\tau]_k d\tau \\
 & \quad + \int_{a_k}^{t_k} (t_k - a_k)^{1 - \alpha_k(t_k)} \overline{E}_{\lambda}(\bar{t}) \overline{E}_{\Upsilon}(\bar{t}) \frac{\partial x}{\partial t_k}[\tau]_k d\tau \left. \right] \\
 & = \frac{\alpha'_k(t_k)(t_k - a_k)^{1 - \alpha_k(t_k)}}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k))} \left[\left(\frac{1}{1 - \alpha_k(t_k)} - \ln(t_k - a_k) \right) \sum_{p=\circ}^N \binom{1 - \alpha_k(t_k)}{p} \right. \\
 & \quad \times \frac{(-1)^p}{(t_k - a_k)^p} V_{n+p}(\bar{t}) + \sum_{p=\circ}^N \binom{1 - \alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p \sum_{r=\lambda}^N \frac{1}{r(t_k - a_k)^{p+r}} V_{n+p+r}(\bar{t}) \left. \right] \\
 & \quad + \frac{\alpha'_k(t_k)(t_k - a_k)^{1 - \alpha_k(t_k)}}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k))} \left[\left(\frac{1}{1 - \alpha_k(t_k)} - \ln(t_k - a_k) \right) \right. \\
 & \quad \times \int_{a_k}^{t_k} \overline{E}_{\lambda}(\bar{t}) \frac{\partial x}{\partial t_k}[\tau]_k d\tau + \int_{a_k}^{t_k} \overline{E}_{\lambda}(\bar{t}) \overline{E}_{\Upsilon}(\bar{t}) \frac{\partial x}{\partial t_k}[\tau]_k d\tau.
 \end{aligned}$$

برای تحلیل خطا، طبق قضیه ۵.۳ می دانیم که

$$\overline{E}_{\lambda}(\bar{t}) \leq \frac{e((1 - \alpha_k(t_k))^{\Upsilon} + 1 - \alpha_k(t_k))}{N^{1 - \alpha_k(t_k)}(1 - \alpha_k(t_k))}.$$

لذا

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{a_k}^{t_k} (t_k - a_k)^{1 - \alpha_k(t_k)} \overline{E}_{\lambda}(\bar{t}) \frac{\partial x}{\partial t_k}[\tau]_k d\tau \right| \\
 & \leq L_{\lambda}(\bar{t}) \frac{e((1 - \alpha_k(t_k))^{\Upsilon} + 1 - \alpha_k(t_k))}{N^{1 - \alpha_k(t_k)}(1 - \alpha_k(t_k))} (t_k - a_k)^{\Upsilon - \alpha_k(t_k)}.
 \end{aligned} \tag{۶.۳}$$

از طرفی، داریم

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{a_k}^{t_k} (t_k - a_k)^{1-\alpha_k(t_k)} \bar{E}_1(\bar{t}) \bar{E}_\gamma(\bar{t}) \frac{\partial x}{\partial t_k}[\tau]_k d\tau \right| \\
 & \leq L_1(\bar{t}) \frac{e((1-\alpha_k(t_k))^\gamma + 1 - \alpha_k(t_k))}{N^{1-\alpha_k(t_k)}(1-\alpha_k(t_k))} (t_k - a_k)^{1-\alpha_k(t_k)} \\
 & \quad \times \sum_{r=N+1}^{\infty} \frac{1}{r(t_k - a_k)^r} \int_{a_k}^{t_k} (\tau - a_k)^\gamma d\tau \\
 & = L_1(\bar{t}) \frac{e((1-\alpha_k(t_k))^\gamma + 1 - \alpha_k(t_k))}{N^{1-\alpha_k(t_k)}(1-\alpha_k(t_k))} (t_k - a_k)^{1-\alpha_k(t_k)} \sum_{r=N+1}^{\infty} \frac{t_k - a_k}{r(r+1)} \\
 & \leq L_1(\bar{t}) \frac{e((1-\alpha_k(t_k))^\gamma + 1 - \alpha_k(t_k))}{N^\gamma - \alpha_k(t_k)(1-\alpha_k(t_k))} (t_k - a_k)^{\gamma-\alpha_k(t_k)}
 \end{aligned} \tag{۷.۳}$$

با ترکیب نامساوی های (۶.۳) و (۷.۳) به نتیجه مورد نظر می‌رسیم.

□

قضیه ۷.۳. فرض کنید $x \in C^{n+1}(\prod_{i=1}^m [a_i, b_i], \mathbb{R})$ که $n \in \mathbb{N}$ لذا برای هر $k \in \{1, \dots, m\}$ و برای هر $N \in \mathbb{N}$ که $N \geq n$ است، داریم

$$\begin{aligned}
 {}^C_{a_k} \mathcal{D}_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) &= \sum_{p=1}^n A_p (t_k - a_k)^{p-\alpha_k(t_k)} \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [t_k]_k \\
 &+ \sum_{p=n}^N B_p (t_k - a_k)^{n-p-\alpha_k(t_k)} V_p(\bar{t}) \frac{\alpha'_k(t_k) (t_k - a_k)^{1-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(\gamma - \alpha_k(t_k))} \\
 &\times \left[(\Psi(\gamma - \alpha_k(t_k)) - \ln(t_k - a_k)) \sum_{p=0}^N \binom{1-\alpha_k(t_k)}{p} \frac{(-1)^p}{(t_k - a_k)^p} V_{n+p}(\bar{t}) \right. \\
 &\left. + \sum_{p=0}^N \binom{1-\alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p \sum_{r=1}^N \frac{1}{r(t_k - a_k)^{p+r}} V_{n+p+r}(\bar{t}) \right] + E(\bar{t}).
 \end{aligned}$$

خطای تقریب $E(\bar{t})$ در کران زیر قرار دارد

$$\begin{aligned}
 E(\bar{t}) &\leq L_{n+1}(\bar{t}) \frac{e((n - \alpha_k(t_k))^\gamma + n - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(n+1 - \alpha_k(t_k)) N^{n-\alpha_k(t_k)} (n - \alpha_k(t_k))} (t_k - a_k)^{n+1-\alpha_k(t_k)} \\
 &+ |\alpha'_k(t_k)| L_1(\bar{t}) \frac{e((1-\alpha_k(t_k))^\gamma + 1 - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(\gamma - \alpha_k(t_k)) N^{1-\alpha_k(t_k)} (1 - \alpha_k(t_k))} \\
 &\times \left[|\Psi(\gamma - \alpha_k(t_k)) - \ln(t_k - a_k)| + \frac{1}{N} \right] (t_k - a_k)^{\gamma-\alpha_k(t_k)}.
 \end{aligned}$$

اثبات. با شروع از رابطه‌ی (۴.۳) و انتگرال گیری جزء به جزء از انتگرال، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 {}^C_{a_k} \mathcal{D}_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) &= {}^C_{a_k} D_{t_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) \\
 &+ \frac{\alpha'_k(t_k) \Psi(1 - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(\gamma - \alpha_k(t_k))} \int_{a_k}^{t_k} (t_k - \tau)^{1-\alpha_k(t_k)} \frac{\partial x}{\partial t_k}[\tau]_k d\tau.
 \end{aligned}$$

□

بقیه‌ی روند اثبات مشابه آنچه در قضیه ۶.۳ اثبات شده، می‌باشد.

تذکر ۲.۳. به عنوان حالت های خاص قضایای ۵.۳، ۶.۳ و ۷.۳، بسط فرمول های ${}_a^C D_t^{\alpha(t)} x(t)$ و ${}_a^C \mathbb{D}_t^{\alpha(t)} x(t)$ را به دست می آوریم.

به ترتیب برای سه عملگر کسری راست از تعریف ۳.۳، برای $p \in \mathbb{N}$ ، تعیین می کنیم

$$C_p = \frac{(-1)^p}{\Gamma(p+1-\alpha_k(t_k))} \left[1 + \sum_{l=n-p+1}^N \frac{\Gamma(\alpha_k(t_k) - n + l)}{\Gamma(\alpha_k(t_k) - p)(l - n + p)!} \right],$$

$$D_p = \frac{-\Gamma(\alpha_k(t_k) - n + p)}{\Gamma(1 - \alpha_k(t_k))\Gamma(\alpha_k(t_k))(p - n)!}$$

$$W_p(\bar{t}) = \int_{t_k}^{b_k} (b_k - \tau)^{p-n} \frac{\partial x}{\partial t_k} [\tau]_k d\tau,$$

$$M_p(\bar{t}) = \max_{\tau \in \{t_k, b_k\}} \left| \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [\tau]_k \right|.$$

بسط فرمول ها در قضایای ۸.۳، ۹.۳ و ۱۰.۳ بیان شده است. از آنجا که اثبات مشابه سمت چپ آنهاست از ارائه آن صرف نظر می کنیم.

قضیه ۸.۳. فرض کنید $x \in C^{n+1}(\prod_{i=1}^m [a_i, b_i], \mathbb{R})$ که $n \in \mathbb{N}$ لذا برای هر $k \in \{1, \dots, m\}$ و برای هر $N \in \mathbb{N}$ که $N \geq n$ است، داریم

$${}_k^C \mathcal{D}_{b_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) = \sum_{p=1}^n C_p (b_k - t_k)^{p-\alpha_k(t_k)} \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [t_k]_k$$

$$+ \sum_{p=n}^N D_p (b_k - t_k)^{n-p-\alpha_k(t_k)} W_p(\bar{t}) + E(\bar{t}).$$

خطای تقریب $E(\bar{t})$ در کران زیر قرار دارد

$$E(\bar{t}) \leq M_{n+1}(\bar{t}) \frac{e((n - \alpha_k(t_k))^2 + n - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(n+1-\alpha_k(t_k))N^{n-\alpha_k(t_k)}(n - \alpha_k(t_k))} (b_k - t_k)^{n+1-\alpha_k(t_k)}.$$

قضیه ۹.۳. فرض کنید $x \in C^{n+1}(\prod_{i=1}^m [a_i, b_i], \mathbb{R})$ که $n \in \mathbb{N}$ لذا برای هر $k \in \{1, \dots, m\}$ و برای هر $N \in \mathbb{N}$ که $N \geq n$ است، داریم

$${}_k^C D_{b_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) = \sum_{p=1}^n C_p (b_k - t_k)^{p-\alpha_k(t_k)} \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [t_k]_k$$

$$+ \sum_{p=n}^N D_p (b_k - t_k)^{n-p-\alpha_k(t_k)} W_p(\bar{t}) \frac{\alpha'_k(t_k)(b_k - t_k)^{1-\alpha_k(t_k)}}{\Gamma(2 - \alpha_k(t_k))}$$

$$\times \left[\left(\frac{1}{1 - \alpha_k(t_k)} - \ln(b_k - t_k) \right) \sum_{p=0}^N \binom{1 - \alpha_k(t_k)}{p} \frac{(-1)^p}{(b_k - t_k)^p} W_{n+p}(\bar{t}) \right.$$

$$\left. + \sum_{p=0}^N \binom{1 - \alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p \sum_{r=1}^N \frac{1}{r(b_k - t_k)^{p+r}} W_{n+p+r}(\bar{t}) \right] + E(\bar{t}).$$

خطای تقریب $E(\bar{t})$ در کران زیر قرار دارد

$$\begin{aligned} E(\bar{t}) \leq & M_{n+1}(\bar{t}) \frac{e((n - \alpha_k(t_k))^{\Upsilon} + n - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(n + 1 - \alpha_k(t_k)) N^{n - \alpha_k(t_k)} (n - \alpha_k(t_k))} (b_k - t_k)^{n+1 - \alpha_k(t_k)} \\ & + |\alpha'_k(t_k)| M_1(\bar{t}) \frac{e((1 - \alpha_k(t_k))^{\Upsilon} + 1 - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k)) N^{1 - \alpha_k(t_k)} (1 - \alpha_k(t_k))} \\ & \times \left[\left| \frac{1}{1 - \alpha_k(t_k)} - \ln(b_k - t_k) \right| + \frac{1}{N} \right] (b_k - t_k)^{\Upsilon - \alpha_k(t_k)}. \end{aligned}$$

قضیه ۱۰.۳. فرض کنید $x \in C^{n+1}(\prod_{i=1}^m [a_i, b_i], \mathbb{R})$ که $n \in \mathbb{N}$ لذا برای هر $k \in \{1, \dots, m\}$ و برای هر $N \in \mathbb{N}$ که $N \geq n$ است، داریم

$$\begin{aligned} {}^C D_{b_k}^{\alpha_k(t_k)} x(\bar{t}) = & \sum_{p=1}^n C_p (b_k - t_k)^{p - \alpha_k(t_k)} \frac{\partial^p x}{\partial t_k^p} [t_k]_k \\ & + \sum_{p=n}^N D_p (b_k - t_k)^{n - p - \alpha_k(t_k)} W_p(\bar{t}) \frac{\alpha'_k(t_k) (b_k - t_k)^{1 - \alpha_k(t_k)}}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k))} \\ & \times \left[(\Psi(\Upsilon - \alpha_k(t_k)) - \ln(b_k - t_k)) \sum_{p=0}^N \binom{1 - \alpha_k(t_k)}{p} \frac{(-1)^p}{(b_k - t_k)^p} W_{n+p}(\bar{t}) \right. \\ & \left. + \sum_{p=0}^N \binom{1 - \alpha_k(t_k)}{p} (-1)^p \sum_{r=1}^N \frac{1}{r (b_k - t_k)^{p+r}} W_{n+p+r}(\bar{t}) \right] + E(\bar{t}). \end{aligned}$$

خطای تقریب $E(\bar{t})$ در کران زیر قرار دارد

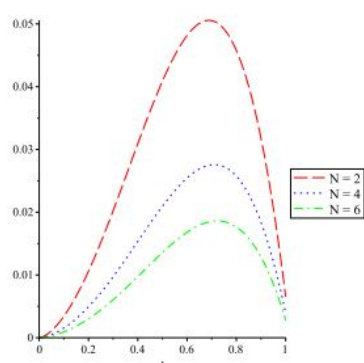
$$\begin{aligned} E(\bar{t}) \leq & M_{n+1}(\bar{t}) \frac{e((n - \alpha_k(t_k))^{\Upsilon} + n - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(n + 1 - \alpha_k(t_k)) N^{n - \alpha_k(t_k)} (n - \alpha_k(t_k))} (b_k - t_k)^{n+1 - \alpha_k(t_k)} \\ & + |\alpha'_k(t_k)| M_1(\bar{t}) \frac{e((1 - \alpha_k(t_k))^{\Upsilon} + 1 - \alpha_k(t_k))}{\Gamma(\Upsilon - \alpha_k(t_k)) N^{1 - \alpha_k(t_k)} (1 - \alpha_k(t_k))} \\ & \times \left[|\Psi(\Upsilon - \alpha_k(t_k)) - \ln(b_k - t_k)| + \frac{1}{N} \right] (b_k - t_k)^{\Upsilon - \alpha_k(t_k)}. \end{aligned}$$

۳.۳ مثال ها

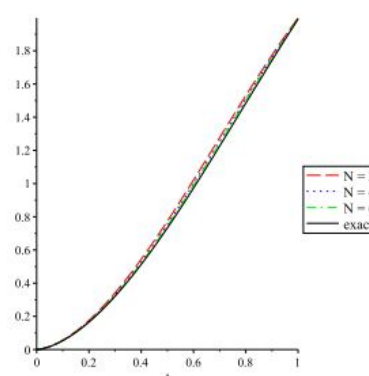
برای آزمودن دقت روش ارائه شده، به مقایسه میان مشتق کسری واقعی تابع با تعدادی از تقریب های عددی آن می پردازیم. برای $t \in [0, 1]$ ، فرض کنید $x(t) = t^2$ تابع آزمایش باشد. برای مرتبه ی مشتقات کسری دو حالت را در نظر می گیریم:

$$\alpha(t) = \frac{5 \circ t + 49}{1 \circ 0} \quad \text{و} \quad \beta(t) = \frac{t + 5}{1 \circ 0}.$$

اکنون به بررسی تقریب های ارائه شده در قضایای ۵.۳، ۶.۳ و ۷.۳ با $n = 1$ ثابت و $N \in \{2, 4, 6\}$ می پردازیم. خطای تقریب $f(t)$ توسط $\tilde{f}(t)$ به صورت $|f(t) - \tilde{f}(t)|$ محاسبه می شود. نمودار های ۲.۳ - ۷.۳ را مشاهده کنید.



(ب) خطا



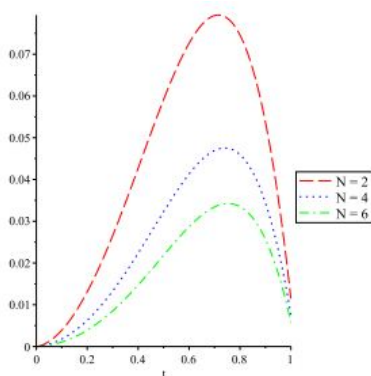
(آ) ${}^C D_t^{\alpha(t)} x(t)$

شکل ۲.۳: نوع III

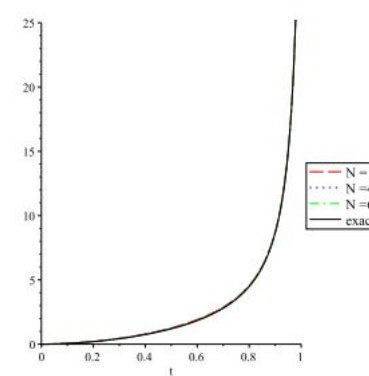
مشتقِ چپ کاپوتو از مرتبه $\alpha(t)$ برای مثالِ بخش ۳.۳ - تحلیلی در مقابل تقریب های عددی بدست آمده از قضیه ۵.۳.

۴.۳ کاربردها

در این بخش، تکنیک پیشنهادی برای تعدادی از معادلات دیفرانسیل کسری واقعی مرتبط با فیزیک را ارائه می کنیم.

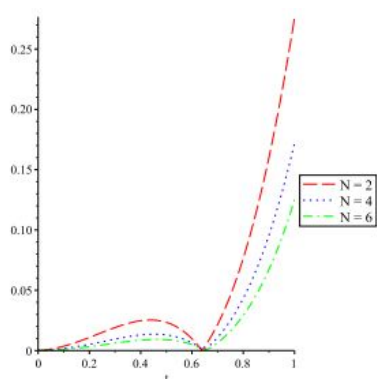


(ب) خطا

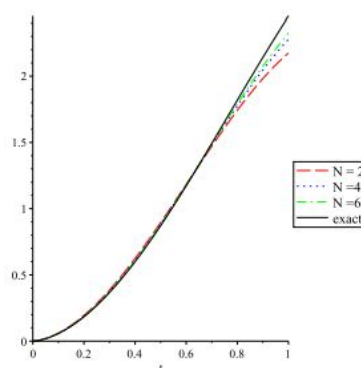


(آ) ${}^C D_t^{\alpha(t)} x(t)$

شکل ۳.۳: نوع I مشتقِ چپ کاپوتو از مرتبه $\alpha(t)$ برای مثالِ بخش ۳.۳ - تحلیلی در مقابل تقریب های عددی بدست آمده از قضیه ۶.۳.



(ب) خطا

(ا) ${}^C \mathcal{D}_t^{\alpha(t)} x(t)$

شکل ۴.۳: نوع II

مشتق چپ کاپوتو از مرتبه $\alpha(t)$ برای مثال بخش ۳.۳ - تحلیلی در مقابل تقریب های عددی بدست آمده از قضیه ۷.۳.

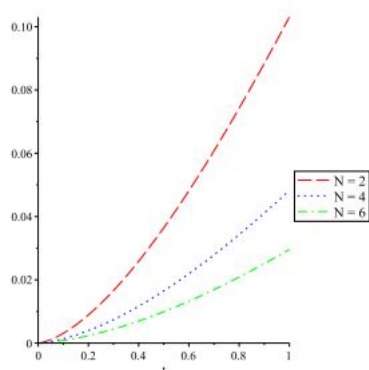
۱.۴.۳ یک معادله انتشار زمان-کسری

اکنون معادله ی انتشار زمان-کسری یک-بعدی [۲۰] را به حالت مرتبه متغیر تعمیم می دهیم. $u = u(x, t)$ را با دامنه ی $[0, 1]^2$ در نظر بگیرید. معادله ی دیفرانسیل کسری جزئی از مرتبه ی $\alpha(t)$ به صورت زیر است:

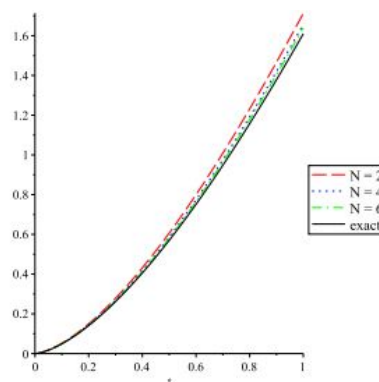
$${}^C \mathbb{D}_t^{\alpha(t)} u(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t) \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1], \quad (۸.۳)$$

با شرط کرانداری

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in (0, 1) \quad (۹.۳)$$

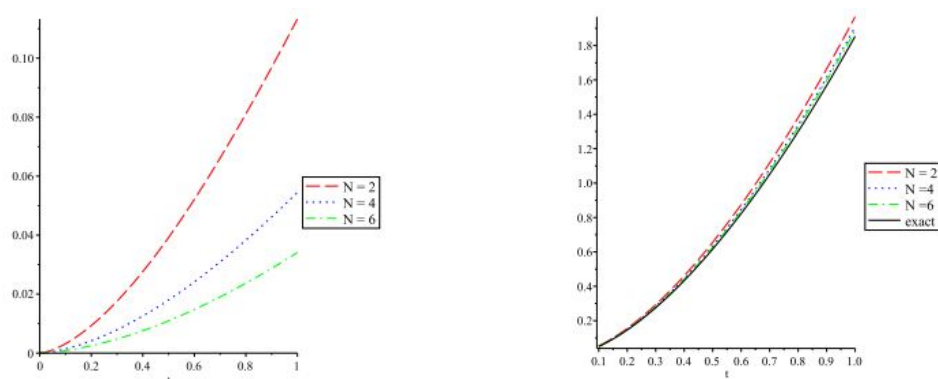


(ب) خطا

(ا) ${}^C \mathbb{D}_t^{\beta(t)} x(t)$

شکل ۵.۳: نوع III

مشتق چپ کاپوتو از مرتبه $\beta(t)$ برای مثال بخش ۳.۳ - تحلیلی در مقابل تقریب های عددی بدست آمده از قضیه ۵.۳.



شکل ۶.۳: نوع I مشتق چپ کاپوتو از مرتبه $\beta(t)$ برای مثال بخش ۳.۳ - تحلیلی در مقابل تقریب های عددی بدست آمده از قضیه ۶.۳.

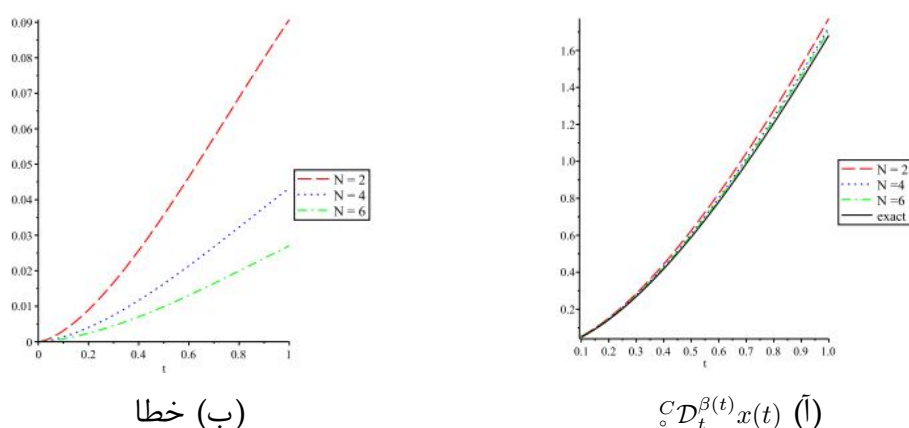
و

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \in [0, 1]. \quad (10.3)$$

توجه داریم زمانی که $\alpha(t) \equiv 1$ ، معادله ی انتشار کلاسیک، و زمانی که $\alpha(t) \equiv 0$ ، معادله ی هلمولتز الیپتیک کلاسیک^۱ بدست می آید. با استفاده از لم ۱.۳، می توان دریافت که

$$u(x, t) = t^2 \sin(\pi x)$$

جواب مسئله ی (۸.۳) - (۱۰.۳) به همراه



شکل ۷.۳: نوع II مشتق چپ کاپوتو از مرتبه $\beta(t)$ برای مثال بخش ۳.۳ - تحلیلی در مقابل تقریب های عددی بدست آمده از قضیه ۷.۳.

$$f(x, t) = \left(\frac{2}{\Gamma(3 - \alpha(t))} t^{2-\alpha(t)} + 4\pi^2 t^2 \right) \sin(2\pi x)$$

¹classical Helmholtz elliptic equation

$$g(x) = \circ.$$

روش عددی آن به صورت زیر است:
 ${}^C\mathbb{D}_t^{\alpha(t)}u$ را با تقریب داده شده در قضیه ۵.۳، به همراه $n = 1$ و مقدار دلخواه $N \geq 1$ ، جایگزین کنید، یعنی

$${}^C\mathbb{D}_t^{\alpha(t)}u(x, t) \approx At^{1-\alpha(t)}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \sum_{p=1}^N B_p t^{1-p-\alpha(t)}V_p(x, t)$$

که

$$A = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha(t))} \left[1 + \sum_{l=1}^N \frac{\Gamma(\alpha(t)-1+l)}{\Gamma(\alpha(t)-1)l!} \right],$$

$$B_p = \frac{\Gamma(\alpha(t)-1+p)}{\Gamma(1-\alpha(t))\Gamma(\alpha(t))(p-1)!},$$

$$V_p(x, t) = \int_{\circ}^t \tau^{p-1} \frac{\partial u}{\partial t}(x, \tau) d\tau.$$

بنابراین، مسئله کسری آغازین (۸.۳)–(۱۰.۳) با سیستم معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم زیر تقریب زده شده است:

$$At^{1-\alpha(t)}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \sum_{p=1}^N B_p t^{1-p-\alpha(t)}V_p(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = f(x, t)$$

و

$$\frac{\partial V_p}{\partial t}(x, t) = t^{p-1} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t), \quad p = 1, \dots, N,$$

شرایط کرانداری برای $x \in [\circ, 1]$ و $t \in [\circ, 1]$ به صورت

$$u(x, \circ) = \circ, \quad x \in (\circ, 1) \text{ برای}$$

$$u(\circ, t) = u(1, t) = \circ \quad x \in (\circ, 1) \text{ برای}$$

$$V_p(x, \circ) = \circ, \quad x \in [\circ, 1] \text{ برای } p = 1, \dots, N.$$

۲.۴.۳ یک معادله دیفرانسیل جزئی کسری در مکانیک سیالات

اکنون، روش ها و تکنیک های مربوط به تقریب را برای معادله ی برگر کسری ناهمگن خطی تک بعدی [۳۱] از مرتبه متغیر بکار می بریم.

$${}^C\mathbb{D}_t^{\alpha(t)}u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{2t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))} + 2x - 2, \quad (11.3)$$

با شرایط کرانداری برای $x \in [\circ, 1]$ و $t \in [\circ, 1]$ به صورت

$$u(x, \circ) = x^2, \quad x \in (\circ, 1) \text{ برای} \quad (12.3)$$

در اینجا

$$F(x, t) = \frac{t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))} + 2x - 2$$

نیروی خارجی است. از معادله‌ی برگر برای مدل سازی حرکات گاز، جریان عبور و مرور، آشفستگی، مکانیک سیالات و... استفاده می‌شود. پاسخ دقیق آن

$$u(x, t) = x^2 + t^2.$$

مسئله‌ی کسری (۱۱.۳) - (۱۲.۳) را می‌توان به صورت زیر تخمین زد

$$At^{1-\alpha(t)} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \sum_{p=1}^N B_p t^{1-p-\alpha(t)} V_p(x, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{t^{2-\alpha(t)}}{\Gamma(3-\alpha(t))} + 2x - 2$$

که A, B_p و $P \in \{1, \dots, N\}, V_p$ در بخش ۱.۴.۳ موجود است. خطای تقریب را می‌توان با افزایش مقدار N به اندازه مطلوب کاهش داد.

فصل ۴

حساب تغییرات کسری

در این فصل، مسائل کسری عمومی حساب تغییرات، که لاگرانژین وابسته به ترکیب مشتق کسری کاپوتو از مرتبه‌ی کسری متغیر ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)}$ به عنوان ترکیب شده‌ی مشتقات کسری چپ و راست کاپوتو از مرتبه‌های متغیر به ترتیب $\alpha(\cdot, \cdot)$ و $\beta(\cdot, \cdot)$ می‌باشد را بررسی می‌کنیم. همچنین در اینجا به مطالعه‌ی تعدادی از مسائل حساب تغییرات با توابع زیر انتگرال وابسته به متغیر مستقل t ، تابع دلخواه x و مشتق کسری ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)}$ تعریف شده به صورت

$${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t) = \gamma_1 {}^C D_a^{\alpha(\cdot)} x(t) + \gamma_2 {}^C D_t^{\beta(\cdot)} x(t),$$

که $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in [0, 1]^2$ با γ_1 و γ_2 که هر دو صفر نیستند می‌پردازیم. با شروع از مسئله‌ی حساب تغییرات بنیادین، انواع مختلف مسائل متغیر را بررسی می‌کنیم: مسائل با تأخیر زمان یا با مشتقات مرتبه بالاتر، مسائل ایزوپریمتریک، مسائل با قید‌های هولونومیک و مسائل هرگلوتز و آنهایی که وابسته به ترکیب مشتقات کسری کاپوتو از مرتبه متغیر است. مسائل متغیر ما به عنوان مسائل زمان-آزاد شناخته می‌شوند، زیرا در حالت کلی شرط مرزی را در زمان آغازین $t = a$ وضع می‌کنیم اما b نقطه‌ی پایانی انتگرال و x_b حالت پایانی را آزاد در نظر می‌گیریم. نتایج اساسی، شرایط لازم بهینگی معادله‌ی اوایلر-لاگرانژ را فراهم می‌کنند که توسط معادلات دیفرانسیل کسری از مرتبه‌ی متغیر و شرایط بهینگی متقاطع مختلف تشریح شده‌اند. هدف اصلی ما بررسی لاگرانژین شامل عملگر کسری است که مرتبه آن ثابت نیست و احتمالاً به زمان وابسته است. علاوه بر این فرض می‌کنیم نقطه‌ی پایانی b نیز مانند x_b آزاد است. در بخش ۱.۴، ترکیب مشتق کسری کاپوتو از مرتبه‌ی متغیر را معرفی می‌کنیم و در پایان مفاهیم ضروری و نتایج مورد نیاز را ارائه می‌کنیم (بخش ۱.۱.۴). در بخش ۲.۱.۴، دو فرمول انتگرال جزء به جزء شامل ترکیب مشتق کسری کاپوتو از مرتبه بالاتر را بدست می‌آوریم.

مسائل کسری متغیر مورد نظر ما، در روابط مشتق کسری ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)}$ فرمول سازی شده اند. ما به بحث راجع به مفاهیم اساسی حساب متغیر مانند معادلات اوایلر لاگرانژ و شرایط متقاطع (بخش ۲.۴)، مسائل متغیر شامل مشتقات مراتب بالاتر (بخش ۳.۴)، مسائل متغیر با تأخیر زمان (بخش ۴.۴)، مسائل ایزوپریمتریک (بخش ۵.۴)، مسائل با قید های هولونومیک (بخش ۶.۴) و در بخش ۷.۴ به بررسی مسائل متغیر کسری هرگلوتر می پردازیم. اثبات تمام قضایای این فصل در [۵] موجود است. همچنین برای همه ی مسائل متغیر بررسی شده، تعدادی مثال ارائه شده است.

۱.۴ معرفی

در این بخش، تعریف پایه ای ترکیب مشتق کسری کاپوتو در زیربخش ۳.۳.۱ (تعریف ۱۵.۱) را مرور و آن را برای مرتبه-متغیر کسری تعمیم می دهیم. در پایان، فرمول انتگرال جزء به جزء به همراه مراتب بالاتر مشتق کسری کاپوتو از مرتبه متغیر را اثبات می کنیم.

۱.۱.۴ ترکیب عملگر های مرتبه متغیر

به سبب ترکیب مشتق کاپوتوی کسری، تعریف زیر درباره ی ترکیب حساب کسری مرتبه-متغیر را ارائه می کنیم.

فرض کنید $\alpha, \beta : [a, b]^2 \rightarrow (0, 1)$ دو تابع باشند و $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in [0, 1]^2$ یک بردار باشد که γ_1 و γ_2 هر دو صفر نباشند.

تعریف ۱.۴. ترکیب مشتق کسری ریمن-لیوویل از مرتبه متغیر، با نماد $D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)}$ ، به صورت زیر تعریف شده است

$$D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} = \gamma_1 {}_a D_t^{\alpha(\cdot)} + \gamma_2 {}_t D_b^{\beta(\cdot)},$$

، که به شکل زیر روی $x \in C([a, b]; \mathbb{R})$ اثر می کند:

$$D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t) = \gamma_1 {}_a D_t^{\alpha(\cdot)} x(t) + \gamma_2 {}_t D_b^{\beta(\cdot)} x(t).$$

تعریف ۲.۴. ترکیب مشتق کسری کاپوتو از مرتبه متغیر، با نماد ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)}$ ، به صورت زیر تعریف شده است

$${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} = \gamma_1 {}_a^C D_t^{\alpha(\cdot)} + \gamma_2 {}_t^C D_b^{\beta(\cdot)},$$

، که به شکل زیر روی $x \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ اثر می کند:

$${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t) = \gamma_1 {}_a^C D_t^{\alpha(\cdot)} x(t) + \gamma_2 {}_t^C D_b^{\beta(\cdot)} x(t).$$

در نتیجه، نیاز به نماد گذاری کمکی مشتق کسری دوگانه داریم که به صورت زیر تعریف می شود

$$D_{\bar{\gamma}}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} = \gamma_2 {}_a D_t^{\beta(\cdot)} + \gamma_1 {}_t D_T^{\alpha(\cdot)} \quad (1.4)$$

که $\bar{\gamma} = (\gamma_2, \gamma_1)$ و $T \in [a, b]$ است.

برای تعمیم مفهوم ترکیب مشتق کسری به مراتب بالاتر، نیاز به یادآوری برخی تعاریف عملگرهای مرتبه-بالا داریم.

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع از کلاس C^n باشد. مرتبه‌ی کسری، یک تابع پیوسته‌ی دو متغیره به صورت $\alpha_n : [a, b]^2 \rightarrow (n-1, n)$ است.

تعریف ۳.۴. انتگرال‌های کسری چپ و راست ریمن-لیوویل از مرتبه‌ی $\alpha_n(\cdot, \cdot)$ به ترتیب بصورت زیر تعریف شده‌اند

$${}_a I_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) = \int_a^t \frac{1}{\Gamma(\alpha_n(t, \tau))} (t - \tau)^{\alpha_n(t, \tau) - 1} x(\tau) d\tau$$

و

$${}_t I_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) = \int_t^b \frac{1}{\Gamma(\alpha_n(\tau, t))} (\tau - t)^{\alpha_n(\tau, t) - 1} x(\tau) d\tau.$$

ما در بخش پیوست (آ) با استفاده از نرم افزار پکیج متن باز **chebfun** و به کمک تعریف انتگرال‌های کسری ریمن-لیوویل مرتبه متغیر، با در نظر گرفتن $n = 1$ ، دو تابع $\text{leftFI}(x, \alpha, a, n)$ و $\text{rightFI}(x, \alpha, b, n)$ را معرفی کرده ایم که به ترتیب انتگرال‌های کسری ریمن-لیوویل ${}_a I_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$ و ${}_t I_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$ را تقریب می‌زند. همچنین در پیوست (آ) مثال واضحی ارائه شده که در آن تقریب‌های محاسباتی برای انتگرال‌های کسری تابع توانی خاص به شکل $x(t) = t^\gamma$ را بدست آورده ایم (مثال ۱.آ را ببینید). برای این محاسبات عددی، از نرم افزار **MATLAB** استفاده کرده ایم [۱۹].

تعریف ۴.۴. مشتقات کسری چپ و راست ریمن-لیوویل از مرتبه‌ی $\alpha_n(\cdot, \cdot)$ به ترتیب بصورت زیر تعریف شده‌اند

$${}_a D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) = \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{1}{\Gamma(n - \alpha_n(t, \tau))} (t - \tau)^{n-1-\alpha_n(t, \tau)} x(\tau) d\tau$$

و

$${}_t D_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b \frac{1}{\Gamma(n - \alpha_n(\tau, t))} (\tau - t)^{n-1-\alpha_n(\tau, t)} x(\tau) d\tau,$$

تعریف ۵.۴. مشتقات کسری چپ و راست کاپوتو از مرتبه‌ی $\alpha_n(\cdot, \cdot)$ به ترتیب بصورت زیر تعریف شده‌اند

$${}_a^C D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) = \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{1}{\Gamma(n - \alpha_n(t, \tau))} (t - \tau)^{n-1-\alpha_n(t, \tau)} x(\tau) d\tau \quad (2.4)$$

و

$${}_t^C D_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b \frac{1}{\Gamma(n - \alpha_n(\tau, t))} (\tau - t)^{n-1-\alpha_n(\tau, t)} x(\tau) d\tau, \quad (3.4)$$

تذکر ۱.۴. تعاریف ۴.۴ و ۵.۴ برای حالت خاصی که مرتبه بین $\circ$ و 1 باشد را می‌توان در [۲۴] یافت که برای حالت مراتب بالاتر، به نظر موضوعی جدید است.

تعریف ۵.۴ را در نظر بگیرید.

در پیوست (آ) به معرفی دو تابع $\text{leftCaputo}(x, \alpha, a, n)$ و $\text{rightCaputo}(x, \alpha, b, n)$ پرداختیم که به ترتیب مشتقات کسری کاپوتو از مرتبه بالاتر ${}_a^C D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$ و ${}_t^C D_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$ را تقریب می‌زند. به کمک این دو تابع در بخش پیوست (آ)، مثال واضحی را بررسی کرده ایم که در آن به مطالعه‌ی تقریب های مشتقات کسری کاپوتو برای تابع توانی خاص به شکل $x(t) = t^\gamma$ می‌پردازیم. (مثال ۲.۴ را در بخش پیوست ببینید).

تذکر ۲.۴. از تعریف ۳.۴، می‌توان نتیجه گرفت

$${}_a D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) = \frac{d^n}{dt^n} {}_a I_t^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t), \quad {}_t D_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} {}_t I_b^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$$

و

$${}_a^C D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) = {}_a I_t^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} \frac{d^n}{dt^n} x(t), \quad {}_t^C D_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) = (-1)^n {}_t I_b^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} \frac{d^n}{dt^n} x(t).$$

در لم ۱.۴، برای تابع توانی، مشتقات کسری کاپوتو از مرتبه بالا را می‌یابیم. به همین منظور، فرض می‌کنیم که مرتبه‌ی کسری تنها وابسته به اولین متغیر باشد: $\alpha_n(t, \tau) := \bar{\alpha}_n(t)$ که $\bar{\alpha}_n : [a, b] \rightarrow (n-1, n)$ داده شده است.

لم ۱.۴. فرض کنید $x(t) = (t-a)^\gamma$ همراه با $\gamma > n-1$ باشد. بنابراین،

$${}_a^C D_t^{\bar{\alpha}_n(t)} x(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\bar{\alpha}_n(t)+1)} (t-a)^{\gamma-\bar{\alpha}_n(t)}.$$

اثبات. تابع $x(t) = (t-a)^\gamma$ را در نظر بگیرید، اگر از آن n بار مشتق بگیریم، داریم

$$x^{(n)}(t) = \frac{\gamma+1}{\gamma-n+1} (t-a)^{\gamma-n}.$$

با استفاده از تعریف ۵.۴ مشتق کسری چپ کاپوتو، داریم

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^{\bar{\alpha}_n} x(t) &= \int_a^t \frac{1}{\Gamma(n-\bar{\alpha}_n(t))} (t-\tau)^{n-1-\bar{\alpha}_n(t)} x^{(n)}(\tau) d\tau \\ &= \int_a^t \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-n+1)\Gamma(n-\bar{\alpha}_n(t))} (t-\tau)^{n-1-\bar{\alpha}_n(t)} (\tau-a)^{\gamma-n} d\tau. \end{aligned}$$

اکنون، با تغییر متغیر $\tau - a = s(t-a)$ ادامه می‌دهیم. با استفاده از تابع بتا $B(\cdot, \cdot)$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^{\bar{\alpha}_n} x(t) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-n+1)\Gamma(n-\bar{\alpha}_n(t))} \\ &\quad \times \int_a^t (1-s)^{n-1-\bar{\alpha}_n(t)} s^{\gamma-n} (t-a)^{\gamma-\bar{\alpha}_n(t)} ds \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)(t-a)^{\gamma-\bar{\alpha}_n(t)}}{\Gamma(\gamma-n+1)\Gamma(n-\bar{\alpha}_n(t))} B(\gamma-n+1, n-\bar{\alpha}_n(t)) \\ &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\bar{\alpha}_n(t)+1)} (t-a)^{\gamma-\bar{\alpha}_n(t)}. \end{aligned}$$

□

اثبات تکمیل شد.

با در نظر گرفتن فرمول های مشتق کسری چپ کاپوتو از مرتبه بالاتر برای تابع توانی به شکل $x(t) = (t-a)^\gamma$ که قبلاً نتیجه گرفته ایم، در بخش پیوست آ، مشتق کسری چپ کاپوتو از تابع معین $x(t) = t^\gamma$ برای مقادیر مختلف t را مشخص کرده و آنها را با مقادیر تقریبی بدست آمده از تابع **Chebfun** بصورت `leftCaputo(x,alpha,a,n)` مقایسه کرده ایم. (مثال آ.۴ در پیوست آ را ببینید).

برای نتیجه ی بعدی، فرض می کنیم مرتبه ی کسری تنها به مرتبه ی دوم وابسته باشد $\alpha_n(\tau, t) := \bar{\alpha}_n(t)$ ، که $\bar{\alpha}_n : [a, b] \rightarrow (n-1, n)$ تابع داده شده است. اثبات مشابه لم ۱.۴ است، بنابراین آن را حذف کردیم.

لم ۲.۴. فرض کنید $x(t) = (b-t)^\gamma$ همراه با $\gamma > n-1$ باشد. بنابراین،

$${}_t^C D_b^{\bar{\alpha}_n} x(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\bar{\alpha}_n(t)+1)} (b-t)^{\gamma-\bar{\alpha}_n(t)}.$$

گام بعدی بررسی ترکیب خطی مشتقات کسری پیشین، برای تعریف کردن ترکیب عملگرهای کسری از مرتبه ی بالا است.

فرض کنید $\alpha_n, \beta_n : [a, b]^2 \rightarrow (n-1, n)$ مرتبه های کسری متغیر باشند، $(\gamma_1^2, \gamma_2^2) \in [0, 1]^n$ یک بردار، با γ_1 و γ_2 که هر دو صفر نیستند و $x \in C^n([a, b]; \mathbb{R})$ یک تابع است.

تعریف ۶.۴. مرتبه ی بالاتر ترکیب مشتق کسری ریمن-لیوویل به صورت تعریف می شود

$$D_{\gamma^n}^{\alpha_n(\cdot, \cdot), \beta_n(\cdot, \cdot)} = \gamma_1^n {}_a D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} + \gamma_2^n {}_t D_b^{\beta_n(\cdot, \cdot)},$$

که به شکل زیر روی $x \in C^n([a, b]; \mathbb{R})$ اثر می کند:

$$D_{\gamma^n}^{\alpha_n(\cdot, \cdot), \beta_n(\cdot, \cdot)} x(t) = \gamma_1^n {}_a D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) + \gamma_2^n {}_t D_b^{\beta_n(\cdot, \cdot)} x(t).$$

در اینجا از هر دو تعریف مشتقات کاپوتو و ریمن-لیوویل استفاده می کنیم، اگر چه تأکید بیشتر روی مشتقات کسری کاپوتو است.

تعریف ۷.۴. مرتبه ی بالاتر ترکیب مشتق کسری کاپوتو از x در t به صورت زیر تعریف می شود

$${}_t^C D_{\gamma^n}^{\alpha_n(\cdot, \cdot), \beta_n(\cdot, \cdot)} x(t) = \gamma_1^n {}_a^C D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) + \gamma_2^n {}_t D_b^{\beta_n(\cdot, \cdot)} x(t).$$

سرانجام به طور مشابه، از نماد گذاری کمکی برای مشتق کسری دو گانه استفاده می کنیم:

$$D_{\gamma^i}^{\alpha_i(\cdot, \cdot), \beta_i(\cdot, \cdot)} x(t) = \gamma_1^i {}_a D_t^{\alpha_i(\cdot, \cdot)} x(t) + \gamma_2^i {}_t D_T^{\beta_i(\cdot, \cdot)} x(t), \quad (4.4)$$

که $\bar{\gamma}^i = (\gamma_1^i, \gamma_2^i)$ و $T \in (a, b]$ است.

همچنین از نظر برخی دیدگاه های محاسباتی با استفاده از پکیج نرم افزار **Chebfun** درباره ترکیب مشتق کسری کاپوتو از مرتبه متغیر، در بخش پیوست آ بحث شده است. به همین منظور، از تابع جدید (مثال آ.۵ را ببینید) `combinedCaputo(x,alpha,beta,gamma1,gamma2,a,b,n)` استفاده کردیم و مقادیر تقریبی را برای تابع معین قدرت بدست آورده ایم.

۲.۱.۴ تعمیم انتگرال جزء به جزء کسری

هنگام مواجهه با مسائل متغیر، یک ویژگی کلیدی، انتگرال جزء به جزء است. روابط انتگرال جزء به جزء نقش مهمی در اثبات شرایط اویلر-لاگرانژ دارند. در قضیه زیر، چنین فرمول هایی برای انتگرال های شامل مرتبه های بالای مشتقات کسری کاپوتو از مرتبه ی متغیر، اثبات شده اند.

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $x, y \in C^n([a, b]; \mathbb{R})$ دو تابع باشند. مرتبه ی کسری یک تابع پیوسته ی دومتغیره به صورت، $\alpha_n : [a, b]^2 \rightarrow (n-1, n)$ است.

قضیه ۱.۴. مرتبه ی بالاتر مشتقات کسری کاپوتو از مرتبه ی متغیر در فرمول های انتگرال جزء به جزء صدق می کند

$$\int_a^b y(t) {}^C_a D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) dt = \int_a^b x(t) {}_t D_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) dt + \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{(n-1-k)}(t) \frac{d^k}{dt^k} {}_t D_b^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) \right]_{t=a}^{t=b}$$

و

$$\int_a^b y(t) {}^C_t D_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) dt = \int_a^b x(t) {}_a D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) dt + \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n+k} x^{(n-1-k)}(t) \frac{d^k}{dt^k} {}_a D_t^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) \right]_{t=a}^{t=b}$$

اثبات. با در نظر گرفتن تعریف ۵.۴ از مشتقات کسری چپ کاپوتو با مرتبه ی $\alpha_n(\cdot, \cdot)$ ، داریم

$$\int_a^b y(t) {}^C_a D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) dt = \int_a^b \int_a^t y(t) \frac{1}{\Gamma(n - \alpha_n(t, \tau))} (t - \tau)^{n-1-\alpha_n(t, \tau)} x^{(n)}(\tau) d\tau dt.$$

با استفاده از فرمول دیریکله، به صورت زیر بازنویسی می کنیم

$$\begin{aligned} & \int_a^b \int_t^b y(\tau) \frac{(\tau - t)^{n-1-\alpha_n(\tau, t)}}{\Gamma(n - \alpha_n(\tau, t))} x^{(n)}(t) d\tau dt \\ &= \int_a^b x^{(n)}(t) \int_t^b \frac{(\tau - t)^{n-1-\alpha_n(\tau, t)}}{\Gamma(n - \alpha_n(\tau, t))} y(\tau) d\tau dt = \int_a^b x^{(n)}(t) {}_t I_b^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) dt. \end{aligned} \quad (5.4)$$

با فرمول انتگرال جزء به جزء معمولی، نتیجه می گیریم که ۵.۴ برابر است با

$$- \int_a^b x^{(n-1)}(t) \frac{d}{dt} {}_t I_b^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) dt + \left[x^{(n-1)}(t) {}_t I_b^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) \right]_{t=a}^{t=b}$$

دوباره با انتگرال گیری جزء به جزء، داریم

$$\begin{aligned} & \int_a^b x^{(n-2)}(t) \frac{d^2}{dt^2} {}_t I_b^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) dt \\ &+ \left[x^{(n-1)}(t) {}_t I_b^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) - x^{(n-2)}(t) \frac{d}{dt} {}_t I_b^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) \right]_{t=a}^{t=b}. \end{aligned}$$

اگر این فرایند را $n - 2$ بار دیگر تکرار کنیم، می‌رسیم به

$$\begin{aligned} & \int_a^b x(t) (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} {}_t I_b^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) dt \\ & + \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{(n-1-k)}(t) \frac{d^k}{dt^k} {}_t I_b^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) \right]_{t=a}^{t=b} \\ & = \int_a^b x(t) {}_t D_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) dt + \left[\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k x^{(n-1-k)}(t) \frac{d^k}{dt^k} {}_t I_b^{n-\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) \right]_{t=a}^{t=b}. \end{aligned}$$

رابطه‌ی دوم از قضیه، درباره‌ی مشتق کسری راست کاپوتو از مرتبه‌ی $n - 2$ ، مستقیماً از ابتدا توسط دوگان کاپوتو-تورس بدست می‌آید [۸]. □

تذکر ۳.۴. در حالت خاص قضیه‌ی ۱.۴، زمانی که $n = 1$ باشد، فرمول‌های انتگرال جزء به جزء کسری، شکل ارائه شده در قضیه‌ی ۶.۱ را می‌گیرند.

تذکر ۴.۴. اگر x بطوریکه $x^{(i)}(a) = x^{(i)}(b) = 0, i = 0, \dots, n - 1$ باشد، بنابراین فرمول‌های انتگرال جزء به جزء از مرتبه‌ی بالاتر در قضیه‌ی ۱.۴ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد

$$\int_a^b y(t) {}_a^C D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) dt = \int_a^b x(t) {}_t D_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) dt$$

و

$$\int_a^b y(t) {}_t^C D_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t) dt = \int_a^b x(t) {}_a D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} y(t) dt.$$

۲.۴ مسئله‌ی حساب تغییرات اساسی

این بخش مختص ایجاد شرایط لازم بهینگی برای مسائل متغیر با لاگرانژین وابسته به ترکیب مشتق کاپوتو از مرتبه‌ی کسری متغیر است. لذا مسئله در بخش ۱.۲.۴، بیان شده است که شامل تابع متغیر

$$\mathcal{J}(x, T) = \int_a^T L(t, x(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(t)) dt + \phi(T, x(T)),$$

که ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(t)$ ناشی از ترکیب مشتق کسری کاپوتو با مرتبه کسری متغیر (تعریف ۲.۴)، با شرط مرزی $x(a) = x_a$ می‌باشد.

در این مسئله، علاوه بر اینکه $x(T)$ آزاد است، نقطه‌ی پایانی T نیز متغیر است. بنابراین ما به دنبال یافتن منحنی بهینه‌ی $x(\cdot)$ و همچنین نقطه‌ی پایانی انتگرال متغیر، که با T نامگذاری شده، هستیم.

اثبات را از شرایط لازم بهینگی بخش ۱.۲.۴، شروع می‌کنیم که هر اکستریمم (x, T) را شامل می‌شود. نتایج عمده‌ی این بخش، شرایط لازم بهینگی نوع اوایلر-لاگرانژ را پدید می‌آورد که توسط معادلات دیفرانسیل کسری با مرتبه متغیر، و شرایط بهینگی متقاطع مختلف (قضایای ۲.۴ و ۳.۴) تشریح شده‌اند. برخی حالات خاص نیز در بخش ۲.۲.۴ بررسی شده‌اند. در آخر با دو مثال واضح (در بخش ۳.۲.۴) به پایان می‌رسانیم.

۱.۲.۴ شرایط لازم بهینگی

فرض کنید $\alpha, \beta : [a, b]^2 \rightarrow (\circ, 1)$ دو تابع باشند. مجموعه‌ی زیر را D می‌نامیم

$$D = \{(x, t) \in C^1([a, b]) \times [a, b] : {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x \in C([a, b])\} \quad (۶.۴)$$

که به نرم $\|(\cdot, \cdot)\|$ روی فضای خطی $C^1([a, b]) \times \mathbb{R}$ به صورت زیر مجهز شده است

$$\|(x, t)\| := \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} \left| {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(t) \right| + |t|.$$

تعریف ۸.۴. گوییم $(x^*, T^*) \in D$ یک اکسترمم موضعی برای تابع $\mathcal{J} : D \rightarrow \mathbb{R}$ است اگر $\epsilon > 0$ ای موجود باشد بطوریکه داشته باشیم،

$$\forall (x, T) \in D : \quad \|(x^*, T^*) - (x, T)\| < \epsilon \Rightarrow \mathcal{J}(x^*, T^*) \leq \mathcal{J}(x, T).$$

در طول محاسبات، مشتق جزئی تابع $z : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ برای آرگومان i ام را با $\partial_i z, i \in \{1, 2, 3\}$ و لاگرانژین مشتق پذیر $L : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را با L نمایش می‌دهیم.

مسئله ۱.۴. مینیمم‌های موضعی برای تابع $\mathcal{J} : D \rightarrow \mathbb{R}$ را طوری بیابید که

$$\mathcal{J}(x, T) = \int_a^T L(t, x(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(t)) dt + \phi(T, x(T)), \quad (۷.۴)$$

برای هر $(x, T) \in D$ که در شرط کرانداری $x(a) = x_a \in \mathbb{R}$ ثابت صدق کند. زمان نهایی T و حالت نهایی $x(T)$ هر دو آزاد هستند. تابع هزینه‌ی نهایی $\phi : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حداقل از کلاس C^1 است.

برای سادگی در نمادها، عملگر $[\cdot]_{\gamma}^{\alpha, \beta}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = (t, x(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(t)) \quad (۸.۴)$$

با نماد گذاری جدید می‌توان عبارت (۷.۴) را به صورت زیر نوشت

$$\mathcal{J}(x, T) = \int_a^T L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt + \phi(T, x(T)).$$

قضیه‌ی بعدی، شرایط لازم بهینگی برای مسئله‌ی ۱.۴ را ارائه می‌دهد.

قضیه ۲.۴. فرض کنید (x, T) مینیمم موضعی برای تابع ۷.۴ روی D باشد. لذا (x, T) در معادلات اوایلر-لاگرانژ کسری

$$\partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = \circ, \quad (۹.۴)$$

روی بازه $[a, T]$ و

$$\gamma_2 \left({}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) = \circ, \quad (۱۰.۴)$$

روی بازه $[T, b]$ صدق می‌کند. علاوه بر این، (x, T) در شرایط متقاطع زیر صدق می‌کند
(۱۱.۴)

$$\begin{cases} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) + \partial_{\lambda} \phi(T, x(T)) + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) x'(T) = 0, \\ \left[\gamma_{\lambda} I_t^{-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\lambda} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_{\gamma} I_t^{-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) = 0 \\ \gamma_{\gamma} \left[I_t^{-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\lambda} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - I_t^{-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} = 0 \end{cases}$$

اثبات. فرض کنید (x, T) جواب مسئله و $(x + \epsilon h, T + \epsilon \Delta T)$ یک تغییر قابل قبول باشد، که $h \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ یک منحنی آشفته است، و $\Delta T \in \mathbb{R}$ نمایانگر تغییر کوچک دلخواه در T و $\epsilon \in \mathbb{R}$ نمایانگر یک عدد کوچک است. قید $x(a) = x_a$ بر این دلالت می‌کند که باید تمام تغییرات قابل قبول، در شرط $h(a) = 0$ صدق کند. $j(\cdot)$ را در همسایگی صفر به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} j(\epsilon) &= \mathcal{J}(x + \epsilon h, T + \epsilon \Delta T) \\ &= \int_a^{T+\epsilon \Delta T} L[x + \epsilon h]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt + \phi(T + \epsilon \Delta T, (x + \epsilon h)(T + \epsilon \Delta T)). \end{aligned}$$

مشتق آن، $j'(\epsilon)$ برابر با

$$\begin{aligned} &\int_a^{T+\epsilon \Delta T} \left(\partial_{\lambda} L[x + \epsilon h]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h(t) + \partial_{\gamma} L[x + \epsilon h]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h(t) \right) dt \\ &+ L[x + \epsilon h]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T + \epsilon \Delta T) \Delta T + \partial_{\lambda} \phi(T + \epsilon \Delta T, (x + \epsilon h)(T + \epsilon \Delta T)) \Delta T \\ &+ \partial_{\gamma} \phi(T + \epsilon \Delta T, (x + \epsilon h)(T + \epsilon \Delta T)) [(x + \epsilon h)(T + \epsilon \Delta T)]'. \end{aligned}$$

خواص مشتق پذیری j را در نظر بگیرید، شرط لازم برای اینکه (x, T) یک اکسترمم موضعی باشد، آن است که $j'(\epsilon)|_{\epsilon=0} = 0$ ، یعنی

$$\begin{aligned} &\int_a^T \left(\partial_{\lambda} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h(t) + \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h(t) \right) dt + L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) \Delta T \\ &+ \partial_{\lambda} \phi(T, x(T)) \Delta T + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) [h(T) + x'(T) \Delta T] = 0. \end{aligned} \quad (12.4)$$

دومین قسمت افزوده‌ی تابع انتگرال ۱۲.۴ که بصورت زیر است

$$\int_a^T \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h(t) dt, \quad (13.4)$$

را می‌توان با استفاده از تعریف ترکیب مشتق کسری کاپوتو به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} &\int_a^T \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h(t) dt \\ &= \int_a^T \partial_{\lambda} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \left[\gamma_{\lambda} {}^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} h(t) + \gamma_{\gamma} {}^C D_b^{\beta(\cdot, \cdot)} h(t) \right] dt \\ &= \gamma_{\lambda} \int_a^T \partial_{\lambda} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} h(t) dt \\ &+ \gamma_{\gamma} \left[\int_a^b \partial_{\lambda} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_b^{\beta(\cdot, \cdot)} h(t) dt - \int_T^b \partial_{\lambda} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_b^{\beta(\cdot, \cdot)} h(t) dt \right]. \end{aligned}$$

با انتگرال جزء به جزء (قضیه ۶.۱ را ببینید)، و زمانی که $h(a) = \circ$ رابطه‌ی (۱۳.۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\begin{aligned} & \gamma_1 \left[\int_a^T h(t)_t D_T^{\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt + \left[h(t)_t I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \right] \\ & + \gamma_2 \left[\int_a^b h(t)_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt - \left[h(t)_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} \right. \\ & \quad \left. - \left(\int_T^b h(t)_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt - \left[h(t)_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left[h(t)_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \right) \right]. \end{aligned}$$

با باز کردن انتگرال‌ها و بررسی عملگر کسری $D_{\bar{\gamma}}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)}$ با $\bar{\gamma} = (\gamma_2, \gamma_1)$ ، لذا (۱۳.۴) معادل است با

$$\begin{aligned} & \int_a^T h(t) D_{\bar{\gamma}}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \\ & + \int_T^b \gamma_2 h(t) \left[{}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ & + \left[h(t) \left(\gamma_1 {}_T I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=T} \\ & + \left[h(t) \gamma_2 \left(\gamma_1 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b} \end{aligned}$$

با جایگزینی این روابط در معادله‌ی (۱۲.۴)، داریم

$$\begin{aligned} \circ & = \int_a^T h(t) \left[\partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\bar{\gamma}}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ & + \int_T^b \gamma_2 h(t) \left[{}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ & + h(T) \left[\gamma_1 {}_T I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ & \quad \left. + \partial_{\Psi} \phi(t, x(t)) \right]_{t=T} \\ & + \Delta T \left[L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\Psi} \phi(t, x(t)) + \partial_{\Psi} \phi(t, x(t)) x'(t) \right]_{t=T} \\ & + h(b) \left[\gamma_2 \left({}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b}. \end{aligned} \quad (۱۴.۴)$$

از آنجا که h و ΔT دلخواه هستند، برای هر $t \in [T, b]$ می‌توانیم $\Delta T = \circ$ و $h(t) = \circ$ انتخاب کنیم، اما h در $t \in [a, T]$ دلخواه است. بنابراین برای هر $t \in [a, T]$ ، اولین شرط لازم (۹.۴) را بدست می‌آوریم:

$$\partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\bar{\gamma}}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = \circ$$

مشابه آن، برای هر $t \in [a, T] \cup \{b\}$ در نظر بگیرید $\Delta T = \circ$ و $h(t) = \circ$ و h دلخواه روی $t \in (T, b)$ ، بنابراین دومین شرط لازم (۱۰.۴) بدست می‌آید:

$$\gamma_2 \left({}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) = \circ$$

از آنجا که (x, T) جواب شرایط لازم (۹.۴) و (۱۰.۴) است، بنابراین تساوی (۱۴.۴)، به فرم زیر است

$$\begin{aligned} \circ = & h(T) \left[\gamma_1 I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\mathcal{P}} \phi(t, x(t)) \right]_{t=T} \\ & + \Delta T \left[L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_1 \phi(t, x(t)) + \partial_{\mathcal{P}} \phi(t, x(t)) x'(t) \right]_{t=T} \\ & + h(b) \left[\gamma_2 \left(I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b}. \end{aligned} \quad (15.4)$$

شرایط متقاطع (۱۱.۴)، برای انتخاب مناسب تغییرات، بدست آمده اند. □

در قضیه‌ی بعد، مشابه مسئله ۱.۴ را در نظر بگیرید، ما به بازنویسی شرایط متقاطع (۱۱.۴) در عباراتی که افزایش ΔT روی زمان و روی نتیجه‌ی افزایش یعنی Δx_T روی x که بصورت زیر انجام می‌شود، می‌پردازیم.

$$\Delta x_T = (x + h)(T + \Delta T) - x(T) \quad (16.4)$$

قضیه ۳.۴. فرض کنید (x, T) یک مینیمم موضعی برای تابع (۷.۴) روی D باشد. بنابراین معادلات اوایلر-لاگرانژ کسری (۹.۴) و (۱۰.۴) هر دو در شرایط متقاطع زیر صدق می‌کنند: (۱۷.۴)

$$\begin{cases} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) + \partial_1 \phi(T, x(T)) \\ \quad + x'(T) \left[\gamma_2 I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_1 I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} = \circ, \\ \left[\gamma_1 I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} + \partial_{\mathcal{P}} \phi(T, x(T)) = \circ, \\ \gamma_2 \left[I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} = \circ. \end{cases}$$

اثبات. معادلات اوایلر-لاگرانژ کسری مشابه آرگومان‌های ارائه شده در قضیه‌ی ۲.۴ بدست آمده اند. اکنون تمرکز ما روی اثبات شرایط متقاطع است. یا استفاده از بسط تیلور تا مرتبه اول برای ΔT کوچک، و محدود کردن مجموعه‌ی تغییراتی که $h'(T) = \circ$ داریم

$$(x + h)(T + \Delta T) = (x + h)(T) + x'(T) \Delta T + O(\Delta T)^2.$$

با مرتب کردن مجدد رابطه‌ی (۱۶.۴) می‌توانیم $h(T)$ را بر حسب ΔT و Δx_T بنویسیم:

$$h(T) = \Delta x_T - x'(T) \Delta T + O(\Delta T)^2$$

با جایگذاری این عبارت در (۱۵.۴) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \circ = & \Delta x_T \left[\gamma_1 I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\mathcal{P}} \phi(T, x(T)) \right]_{t=T} \\ & + \Delta T \left[L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\mathcal{P}} \phi(T, x(T)) \right. \\ & \quad \left. - x'(t) \left(\gamma_1 I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=T} \\ & + h(b) \left[\gamma_2 \left(I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{P}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b} + O(\Delta T)^2. \end{aligned}$$

□

شرایط متقاطع (۱۷.۴) با انتخاب مناسب تغییرات بدست آمده اند.

۲.۲.۴ حالت های خاص

اکنون، نتایج بدست آمده را در قالب سه حالت خاص از نقاط پایانی متغیر بیان می کنیم.

خط پایانی عمودی این حالت شامل کران بالای ثابت T است. بنابراین، $\Delta T = 0$ در نتیجه عبارت دوم در (۱۵.۴)، حذف می شود. زمانی که Δx_T دلخواه است، شرایط متقاطع بدست می آید: اگر $T < b$ باشد، لذا

$$\begin{cases} \left[\gamma_1 I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} + \partial_{\Psi} \phi(T, x(T)) = 0, \\ \gamma_2 \left[T I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} = 0; \end{cases}$$

اگر $T = b$ باشد، بنابراین $\Delta x_T = h(b)$ و شرط متقاطع بصورت زیر می شود

$$\left[\gamma_1 I_b^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} + \partial_{\Psi} \phi(b, x(b)) = 0.$$

خط پایانی افقی در این وضعیت، $\Delta x_T = 0$ اما ΔT دلخواه است. بنابراین شرایط متقاطع بصورت زیر است

$$\begin{cases} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) + \partial_{\Psi} \phi(T, x(T)) \\ + x'(T) \left[\gamma_2 I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_1 I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} = 0, \\ \gamma_2 \left[T I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} = 0. \end{cases}$$

منحنی پایانی اکنون، نقطه‌ی پایانی توسط منحنی داده شده‌ی $\psi : C^1([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ ، در حالیکه $x(T) = \psi(T)$ تشریح شده است. به کمک بسط تیلور، برای ΔT کوچک دلخواه، وجود دارد

$$\Delta x(T) = \psi'(T) \Delta T + O(\Delta T)^2.$$

لذا شرایط متقاطع به فرم زیر است

$$\begin{cases} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) + \partial_{\Psi} \phi(T, x(T)) + \partial_{\Psi} \phi(T, x(T)) \psi'(T) + (x'(T) - \psi'(T)) \\ \times \left[\gamma_2 I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_1 I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} = 0, \\ \gamma_2 \left[T I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} = 0. \end{cases}$$

۳.۲.۴ مثال ها

در این بخش برای شفاف سازی نتایج جدید، دو مثال ارائه می کنیم. فرض کنید $\alpha(t, \tau) = \alpha(t)$ و $\beta(t, \tau) = \beta(\tau)$ به ترتیب دو تابع وابسته به متغیر t و دیگری فقط وابسته به τ باشد. مسئله حساب تغییرات زیر را در نظر بگیرید: برای مینیم کردن تابع

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x, T) = \int_0^T & \left[\Psi \alpha(t) - 1 \right. \\ & \left. + \left({}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t) - \frac{t^{1-\alpha(t)}}{\Gamma(\Psi - \alpha(t))} - \frac{(1 - t)^{1-\beta(t)}}{\Gamma(\Psi - \beta(t))} \right)^2 \right] dt \end{aligned}$$

برای $t \in [0, 1]$ ، بطوریکه شرط آغازین $x(0) = 0$ و $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (1/2, 1/2)$ باشد. با انجام محاسبات ساده، برای $\bar{x}(t) = t$ و $t \in [0, 1]$ خواهیم داشت

$${}^C I_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} \bar{x}(t) = \frac{t^{1-\alpha(t)}}{\Gamma(2-\alpha(t))} + \frac{(1-t)^{1-\beta(t)}}{\Gamma(2-\beta(t))}$$

برای $\bar{x}(t) = t$ تابع به فرم زیر می‌شود

$$\mathcal{J}(\bar{x}, T) = \int_0^T (2\alpha(t) - 1) dt.$$

به جای تعیین زمان بهینه‌ی T ، باید معادله‌ی $2\alpha(t) = 1$ را حل کنیم. برای مثال، فرض کنید $\alpha(t) = t^2/2$ باشد. در این حالت هنگامی که $\mathcal{J}(x, T) \geq -2/3$ برای هر زوج (x, T) و $\mathcal{J}(\bar{x}, 1) = -2/3$ است، نتیجه می‌گیریم برای $\bar{x}$ و $T = 1$ مقدار مینیمم تابع برابر $-2/3$ است. واضح است که دو معادله اوایلر-لاگرانژ (۹.۴) و (۱۰.۴) صدق می‌کنند وقتی که $x = \bar{x}$ و داشته باشیم

$$\partial_2 L[\bar{x}]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \quad t \in [0, 1]$$

با استفاده از رابطه‌ی فوق و رابطه‌ی

$$L[\bar{x}]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(1) = 0$$

شرایط متقاطع (۱۱.۴) بدست می‌آید. اکنون، تابع زیر را در نظر بگیرید

$$\mathcal{J}(x, T) = \int_0^T \left[2\alpha(t) - 1 + \left({}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t) - \frac{t^{1-\alpha(t)}}{\Gamma(2-\alpha(t))} - \frac{(1-t)^{1-\beta(t)}}{\Gamma(2-\beta(t))} \right)^2 \right] dt$$

که تمام مفروضات و شرایط مثال قبلی را دارد. در این حالت، $\bar{x}(t)$ و $T = 1$ هنوز در شرایط لازم بهینگی صدق می‌کند. هرچند، نمی‌توان مطمئن بود که $(\bar{x}, 1)$ یک مینیمم موضعی برای مسئله است.

۳.۴ مسائل متغیر از مرتبه‌ی بالاتر

در این بخش، قصد تعمیم دادن نتایج حاصل از بخش ۲.۴ از طریق بررسی مسائل متغیر از مرتبه بالاتر همراه با لاگرانژین وابسته به ترکیب مشتق کاپوتووی مرتبه کسری متغیر که بصورت زیر تعریف شده است را داریم

$${}^C D_{\gamma^n}^{\alpha_n(\cdot), \beta_n(\cdot)} x(t) = \gamma_1^n {}^C D_a^{\alpha_n(\cdot)} x(t) + \gamma_2^n {}^C D_b^{\beta_n(\cdot)} x(t),$$

که دارای شرط کرانداری در زمان آغازین $t = a$ می‌باشد. در بخش (۱.۳.۴)، معادلات اوایلر-لاگرانژ از مرتبه بالاتر و شرایط متقاطع برای تعمیم مسائل متغیر همراه با لاگرانژین وابسته به ترکیب مشتق کسری کاپوتو از مرتبه‌ی کسری متغیر را بدست می‌آوریم. (قضایای ۴.۴ و ۵.۴). یک مثال واضح در بخش ۲.۳.۴ بررسی شده است.

۱.۳.۴ شرایط لازم بهینگی

فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع از کلاس C^n باشد. مرتبه‌ی کسری، یک تابع پیوسته‌ی دو متغیره بصورت $\alpha_n : [a, b]^2 \rightarrow (n-1, n)$ است. حال، زیر فضای خطی $C^n([a, b]) \times [a, b]$ را D می‌نامیم، بطوریکه مشتق کسری x ، یعنی ${}^C D_{\gamma_i}^{\alpha_i(\cdot, \cdot), \beta_i(\cdot, \cdot)} x(t)$ موجود و برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد. سپس D را در نرم، قرار می‌دهیم

$$\|(x, t)\| := \max_{a \leq t \leq b} |x(t)| + \max_{a \leq t \leq b} \sum_{i=1}^n \left| {}^C D_{\gamma_i}^{\alpha_i(\cdot, \cdot), \beta_i(\cdot, \cdot)} x(t) \right| + |t|.$$

اکنون مسئله حساب تغییرات از مرتبه بالاتر زیر را در نظر بگیرید:

مسئله ۲.۴. مینیمم سازی تابع $\mathcal{J} : D \rightarrow \mathbb{R}$ که،

$$\mathcal{J}(x, T) = \int_a^T L \left(t, x(t), {}^C D_{\gamma_1}^{\alpha_1(\cdot, \cdot), \beta_1(\cdot, \cdot)} x(t), \dots, {}^C D_{\gamma_n}^{\alpha_n(\cdot, \cdot), \beta_n(\cdot, \cdot)} x(t) \right) dt + \phi(T, x(T)), \quad (18.4)$$

بطوریکه شرایط کرانداري برای هر $(x, T) \in D$ بصورت

$$x(a) = x_a, \quad x^{(i)}(a) = x_a^i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n-1\},$$

می‌باشد که $x_a, x_a^1, \dots, x_a^{n-1} \in \mathbb{R}$ ثابت هستند. در اینجا زمان نهایی T و حالت نهایی $x(T)$ هر دو آزاد هستند. برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ ، $\alpha_i, \beta_i : [a, b]^2 \subseteq (i-1, i)$ و $\gamma^i = (\gamma_1^i, \gamma_2^i)$ یک بردار است. تابع هزینه نهایی $\phi : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حداقل از کلاس C^1 است. برای سادگی در نماد گذاری، عملگر $[\cdot]_{\gamma}^{\alpha, \beta}$ بصورت زیر تعریف شده است

$$[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = \left(t, x(t), {}^C D_{\gamma_1}^{\alpha_1(\cdot, \cdot), \beta_1(\cdot, \cdot)} x(t), \dots, {}^C D_{\gamma_n}^{\alpha_n(\cdot, \cdot), \beta_n(\cdot, \cdot)} x(t) \right).$$

فرض می‌کنیم که لاگرانژین $L : [a, b] \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع از کلاس C^1 باشد. در طول محاسبات، مشتق جزئی لاگرانژین L را برای آرگومان i ام بصورت $\partial_i L, i \in \{1, \dots, n+2\}$ در نظر می‌گیریم.

اکنون می‌توانیم تابع (18.4) را بصورت زیر بازنویسی کنیم

$$\mathcal{J}(x, T) = \int_a^T L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt + \phi(T, x(T)). \quad (19.4)$$

در بخش قبل، شرایط لازم بهینگی کسری که هر مینیمم موضعی از تابع $\mathcal{J}$ با $n = 1$ را شامل می‌شود، بدست آوردیم. اکنون، نتایج را برای مقادیر دلخواه $n \in \mathbb{N}$ که تعمیم می‌دهیم. در قسمت بعد، شرایط لازم بهینگی برای مسئله‌ی ۲.۴ ارائه شده است.

قضیه ۴.۴. فرض کنید (x, T) مینیمم تابع (19.4) روی D باشد. لذا (x, T) در معادلات اویلر-لاگرانژ کسری زیر صدق می‌کند:

$$\partial_1 L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \sum_{i=1}^n D_{\gamma^i}^{\beta_i(\cdot, \cdot), \alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+2} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = 0, \quad (20.4)$$

روی بازه‌ی $[a, T]$ و

$$\sum_{i=1}^n \gamma_i^i \left({}_a D_t^{\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) = 0, \quad (21.4)$$

روی بازه‌ی $[T, b]$. علاوه بر این (x, T) در شرایط متقاطع صدق می‌کند:

$$\begin{cases} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) x'(T) = 0, \\ \sum_{i=1}^n \left[\gamma_i^i (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} {}_t I_T^{i-\alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ \left. - \gamma_i^i \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} {}_T I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) = 0, \\ \sum_{i=j+1}^n \left[\gamma_i^i (-1)^{i-1-j} \frac{d^{i-1-j}}{dt^{i-1-j}} {}_t I_T^{i-\alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ \left. - \gamma_i^i (-1)^{j+1} \frac{d^{i-1-j}}{dt^{i-1-j}} {}_T I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n-1, \\ \sum_{i=j+1}^n \left[\gamma_i^i (-1)^{j+1} \frac{d^{i-1-j}}{dt^{i-1-j}} {}_a I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ \left. - \frac{d^{i-1-j}}{dt^{i-1-j}} {}_T I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} = 0, \quad \forall j = 0, \dots, n-1. \end{cases} \quad (22.4)$$

اثبات. ادامه‌ی اثبات استفاده شده در قضیه‌ی ۲.۴ است. فرض کنید $h \in C^n([a, b]; \mathbb{R})$ یک منحنی آشفته و $\Delta T \in \mathbb{R}$ تغییر کوچک دلخواه در T باشد. برای عدد کوچکی مانند $\epsilon \in \mathbb{R}$ ، اگر (x, T) یک جواب مسئله باشد، تغییر قابل قبول (x, T) به فرم $(x + \epsilon h, T + \epsilon \Delta T)$ را بررسی می‌کنیم، سپس طبق شرط مینیمم داریم

$$\mathcal{J}(x, T) \leq \mathcal{J}(x + \epsilon h, T + \epsilon \Delta T).$$

قیدهای $x^{(i)}(a) = x_a^{(i)}$ بیانگر این هستند که تمام تغییرات قابل قبول باید در شرایط $h^{(i)}(a) = 0$ ، برای هر $i = 0, \dots, n-1$ صدق کند. تعریف می‌کنیم تابع $j(\cdot)$ را در همسایگی صفر بصورت

$$\begin{aligned} j(\epsilon) &= \mathcal{J}(x + \epsilon h, T + \epsilon \Delta T) \\ &= \int_a^{T+\epsilon \Delta T} L[x + \epsilon h]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt + \phi(T + \epsilon \Delta T, (x + \epsilon h)(T + \epsilon \Delta T)). \end{aligned}$$

و مشتق آن، $j'(\epsilon)$ به فرم

$$\begin{aligned} & \int_a^{T+\epsilon \Delta T} \left(\partial_{\gamma} L[x + \epsilon h]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h(t) + \sum_{i=1}^n \partial_{i+\gamma} L[x + \epsilon h]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma^i}^{\alpha_i(\cdot, \cdot), \beta_i(\cdot, \cdot)} h(t) \right) dt \\ & + L[x + \epsilon h]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T + \epsilon \Delta T) \Delta T + \partial_{\gamma} \phi(T + \epsilon \Delta T, (x + \epsilon h)(T + \epsilon \Delta T)) \Delta T \\ & + \partial_{\gamma} \phi(T + \epsilon \Delta T, (x + \epsilon h)(T + \epsilon \Delta T)) [(x + \epsilon h)'(T + \epsilon \Delta T)]. \end{aligned}$$

بنابراین طبق قضیه‌ی فرمت، یک شرط لازم برای اینکه (x, T) مینیمم موضعی برای j باشد،

توسط $\circ = j'(\circ)$ داده شده است، یعنی

$$\int_a^T \left(\partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h(t) + \sum_{i=1}^n \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma^i}^{\alpha_i(\cdot, \cdot), \beta_i(\cdot, \cdot)} h(t) \right) dt + L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) \Delta T + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) \Delta T + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) [h(T) + x'(T) \Delta T] = \circ. \quad (23.4)$$

قسمت دوم تابع انتگرال (۲۳.۴) را در نظر بگیرید، برای $i = 1$ داریم

$$\begin{aligned} & \int_a^T \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma^1}^{\alpha_1(\cdot, \cdot), \beta_1(\cdot, \cdot)} h(t) dt \\ &= \int_a^T \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \left[\gamma_1^1 {}^C D_t^{\alpha_1(\cdot, \cdot)} h(t) + \gamma_1^1 {}^C D_b^{\beta_1(\cdot, \cdot)} h(t) \right] dt \\ &= \gamma_1^1 \int_a^T \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_t^{\alpha_1(\cdot, \cdot)} h(t) dt \\ &+ \gamma_1^1 \left[\int_a^b \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_b^{\beta_1(\cdot, \cdot)} h(t) dt - \int_T^b \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_b^{\beta_1(\cdot, \cdot)} h(t) dt \right]. \end{aligned}$$

با انتگرال جزء به جزء (قضیه ۱.۴ را ببینید)، و هنگامی که $h(a) = \circ$ ، داریم

$$\begin{aligned} & \gamma_1^1 \left[\int_a^T h(t) {}_t D_T^{\alpha_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt + \left[h(t) {}_t I_T^{1-\alpha_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \right] \\ &+ \gamma_1^1 \left[\int_a^b h(t) {}_a D_t^{\beta_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt - \left[h(t) {}_a I_t^{1-\beta_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} \right. \\ &- \left(\int_T^b h(t) {}_T D_t^{\beta_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt - \left[h(t) {}_T I_t^{1-\beta_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} \right. \\ &\left. \left. + \left[h(t) {}_T I_t^{1-\beta_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \right) \right]. \end{aligned}$$

با باز کردن انتگرال ها و بررسی عملگر کسری $D_{\gamma^1}^{\beta_1, \alpha_1}$ که $(\gamma_1^1, \gamma_1^1) = \overline{\gamma^1}$ ، رابطه ی قبلی معادل است با

$$\begin{aligned} & \int_a^T h(t) D_{\gamma^1}^{\beta_1(\cdot, \cdot), \alpha_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt \\ &+ \int_T^b \gamma_1^1 h(t) \left[{}_a D_t^{\beta_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ &+ h(T) \left[\gamma_1^1 {}_T I_T^{1-\alpha_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_1^1 {}_T I_t^{1-\beta_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \\ &+ h(b) \gamma_1^1 \left[{}_a I_t^{1-\beta_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T I_t^{1-\beta_1(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} \end{aligned}$$

قسمت سوم تابع انتگرال (۲۳.۴) را در نظر بگیرید، برای $i = ۲$ داریم

$$\begin{aligned} \int_a^T \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma^{\mathbf{f}}}^{\alpha_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot), \beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} h(t) dt &= \gamma_1^{\mathbf{f}} \int_a^T \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_t^{\alpha_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} h(t) dt \\ &+ \gamma_2^{\mathbf{f}} \left[\int_a^b \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_b^{\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} h(t) dt - \int_T^b \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_b^{\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} h(t) dt \right] \\ &= \gamma_1^{\mathbf{f}} \left[\int_a^T h(t) {}_t D_T^{\alpha_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt \right. \\ &+ \left[h^{(1)}(t) {}_t I_T^{\mathbf{f}-\alpha_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - h(t) \frac{d}{dt} {}_t I_T^{\mathbf{f}-\alpha_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \Big] \\ &+ \gamma_2^{\mathbf{f}} \left[\int_a^b h(t) {}_a D_t^{\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt \right. \\ &+ \left[h^{(1)}(t) {}_a I_t^{\mathbf{f}-\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - h(t) \frac{d}{dt} {}_a I_t^{\mathbf{f}-\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} \\ &- \int_T^b h(t) {}_T D_t^{\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt \\ &- \left[h^{(1)}(t) {}_T I_t^{\mathbf{f}-\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - h(t) \frac{d}{dt} {}_T I_t^{\mathbf{f}-\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} \\ &+ \left. \left[h^{(1)}(t) {}_T I_t^{\mathbf{f}-\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - h(t) \frac{d}{dt} {}_T I_t^{\mathbf{f}-\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \right]. \end{aligned}$$

مجدداً، با استفاده از عملگر کمکی $D_{\gamma^{\mathbf{f}}}^{\beta_{\mathbf{f}}, \alpha_{\mathbf{f}}}$ که $\overline{\gamma^{\mathbf{f}}} = (\gamma_1^{\mathbf{f}}, \gamma_2^{\mathbf{f}})$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_a^T h(t) D_{\gamma^{\mathbf{f}}}^{\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot), \alpha_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt \\ + \int_T^b \gamma_2^{\mathbf{f}} h(t) \left[{}_a D_t^{\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ + \left[h^{(1)}(t) \left(\gamma_1^{\mathbf{f}} {}_t I_T^{\mathbf{f}-\alpha_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \gamma_2^{\mathbf{f}} {}_T I_t^{\mathbf{f}-\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=T} \\ - \left[h(t) \left(\gamma_1^{\mathbf{f}} \frac{d}{dt} {}_t I_T^{\mathbf{f}-\alpha_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \gamma_2^{\mathbf{f}} \frac{d}{dt} {}_T I_t^{\mathbf{f}-\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=T} \\ + \left[h^{(1)}(t) \gamma_2^{\mathbf{f}} \left({}_a I_t^{\mathbf{f}-\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T I_t^{\mathbf{f}-\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b} \\ - \left[h(t) \gamma_2^{\mathbf{f}} \left(\frac{d}{dt} {}_a I_t^{\mathbf{f}-\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \frac{d}{dt} {}_T I_t^{\mathbf{f}-\beta_{\mathbf{f}}(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b}. \end{aligned}$$

اکنون، حالت کلی را برای $i = ۳, \dots, n$ در نظر می‌گیریم

$$\int_a^T \partial_{i+\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma^i}^{\alpha_i(\cdot, \cdot), \beta_i(\cdot, \cdot)} h(t) dt,$$

سپس داریم

$$\begin{aligned} & \gamma_{\lambda}^i \left[\int_a^T h(t) {}_t D_T^{\alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt \right. \\ & \quad \left. + \left[\sum_{k=\circ}^{i-\lambda} (-\lambda)^k h^{(i-\lambda-k)}(t) \frac{d^k}{dt^k} {}_t I_T^{i-\alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \right] \\ & + \gamma_{\gamma}^i \left[\int_a^b h(t) {}_a D_t^{\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt \right. \\ & \quad \left. + \left[\sum_{k=\circ}^{i-\lambda} (-\lambda)^{i+k} h^{(i-\lambda-k)}(t) \frac{d^k}{dt^k} {}_a I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} \right] \\ & - \int_T^b h(t) {}_T D_t^{\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt \\ & - \left[\sum_{k=\circ}^{i-\lambda} (-\lambda)^{i+k} h^{(i-\lambda-k)}(t) \frac{d^k}{dt^k} {}_T I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T}^{t=b}. \end{aligned}$$

با باز کردن انتگرال ها داریم

$$\begin{aligned} & \int_a^T h(t) D_{\gamma^i}^{\beta_i(\cdot, \cdot), \alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt \\ & + \int_T^b \gamma_{\gamma}^i h(t) \left[{}_a D_t^{\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ & + h^{(i-\lambda)}(T) \left[\gamma_{\lambda}^i {}_t I_T^{i-\alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \gamma_{\gamma}^i (-\lambda)^i {}_T I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \\ & + h^{(i-\lambda)}(b) \gamma_{\gamma}^i (-\lambda)^i \left[{}_a I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} \\ & + h^{(i-\gamma)}(T) \left[\gamma_{\lambda}^i (-\lambda)^{\lambda} \frac{d}{dt} {}_t I_T^{i-\alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ & \quad \left. + \gamma_{\gamma}^i (-\lambda)^{i+\lambda} \frac{d}{dt} {}_T I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \\ & + h^{(i-\gamma)}(b) \gamma_{\gamma}^i (-\lambda)^{i+\lambda} \left[\frac{d}{dt} {}_a I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ & \quad \left. - \frac{d}{dt} {}_T I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} \\ & + \dots + h(T) \left[\gamma_{\lambda}^i (-\lambda)^{i-\lambda} \frac{d^{i-\lambda}}{dt^{i-\lambda}} {}_t I_T^{i-\alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ & \quad \left. + \gamma_{\gamma}^i (-\lambda)^{\gamma+i+\lambda} \frac{d^{i-\lambda}}{dt^{i-\lambda}} {}_T I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \\ & + h(b) \gamma_{\gamma}^i (-\lambda)^{\gamma+i-\lambda} \left[\frac{d^{i-\lambda}}{dt^{i-\lambda}} {}_a I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ & \quad \left. - \frac{d^{i-\lambda}}{dt^{i-\lambda}} {}_T I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} \end{aligned}$$

اکنون، تمام روابط را در معادله‌ی (۲۳.۴) جایگذاری می‌کنیم، بنابراین داریم

$$\begin{aligned}
 \circ &= \int_a^T h(t) \left(\partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma^i}^{\beta_i(\cdot, \cdot), \alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) dt \\
 &+ \int_T^b h(t) \sum_{i=1}^n \gamma_{\gamma}^i \left[{}_a D_t^{\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\
 &+ \sum_{j=0}^{n-1} h^{(j)}(T) \sum_{i=j+1}^n \left[\gamma_{\gamma}^i (-1)^{i-1-j} \frac{d^{i-1-j}}{dt^{i-1-j}} {}_t I_T^{i-\alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\
 &\quad \left. + \gamma_{\gamma}^i (-1)^{j+1} \frac{d^{i-1-j}}{dt^{i-1-j}} {}_T I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \\
 &+ \sum_{j=0}^{n-1} h^{(j)}(b) \sum_{i=j+1}^n \gamma_{\gamma}^i (-1)^{j+1} \left[-\frac{d^{i-1-j}}{dt^{i-1-j}} {}_a I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{d^{i-1-j}}{dt^{i-1-j}} {}_T I_t^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} + h(T) \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) \\
 &+ \Delta T \left[L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) x'(T) \right]
 \end{aligned} \tag{۲۴.۴}$$

□

ما معادلات اویلر-لاگرانژ کسری (۲۱.۴) - (۲۰.۴) و شرایط متقاطع (۲۲.۴) را برای انتخاب مناسب تغییرات، با به کار بستن لم اساسی حساب تغییرات بدست می‌آوریم (برای انتخاب مناسب تغییرات ببینید [۴۲]).

تذکر ۵.۴. هنگامی که $n = 1$ است، تابع (۱۸.۴) به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\mathcal{J}(x, T) = \int_a^T L\left(t, x(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(t)\right) dt + \phi(T, x(T)),$$

و همچنین معادلات اویلر-لاگرانژ کسری (۲۱.۴) - (۲۰.۴) با معادلات بدست آمده در قضیه‌ی ۲.۴ معادل می‌شود.

افزایش ΔT روی T و نتیجه‌ی افزایش Δx_T روی x که بصورت زیر است را در نظر بگیرید

$$\Delta x_T = (x + h)(T + \Delta T) - x(T), \tag{۲۵.۴}$$

در قضیه‌ی بعد، شرایط متقاطع (۲۲.۴) را با انجام این افزایش ها، بازنویسی می‌کنیم.

قضیه ۵.۴. اگر (x, T) تابع $\mathcal{J}$ تعریف شده در (۱۹.۴) را مینیمم کند، آنگاه (x, T) در معادلات

اولر-لاگرانژ (۲۰.۴) و (۲۱.۴)، و شرایط متقاطع زیر صدق می‌کند:

$$\left\{ \begin{aligned} & \partial_1 \phi(T, x(T)) - x'(T) \sum_{i=1}^n \left[\gamma_1^i (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} I_T^{i-\alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+2} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ & \left. - \gamma_1^i \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} I_T^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+2} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) \right]_{t=T} = 0, \\ & \sum_{i=1}^n \left[\gamma_1^i (-1)^{i-1} \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} I_T^{i-\alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+2} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ & \left. - \gamma_1^i \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} I_T^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+2} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} = 0 + \partial_1 \phi(T, x(T)) = 0, \\ & \sum_{i=j+1}^n \left[\gamma_1^i (-1)^{i-1-j} \frac{d^{i-1-j}}{dt^{i-1-j}} I_T^{i-\alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+2} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ & \left. + \gamma_1^i \frac{d^{i-1-j}}{dt^{i-1-j}} I_T^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+2} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} = 0 +, \quad \forall j = 2, \dots, n-1, \\ & \sum_{i=j+1}^n \left[\gamma_1^i (-1)^{j+1} \left[\frac{d^{i-1-j}}{dt^{i-1-j}} I_T^{i-\beta_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+2} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{d^{i-1-j}}{dt^{i-1-j}} I_T^{i-\alpha_i(\cdot, \cdot)} \partial_{i+2} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] \right]_{t=b} = 0 +, \quad \forall j = 0, \dots, n-1. \end{aligned} \right.$$

اثبات. با استفاده از مرتبه‌ی اول بسط تیلور، و محدود کردن مجموعه‌ی تغییراتی که $h'(T) = 0$ ، خواهیم داشت

$$(x+h)(T+\Delta T) = (x+h)(T) + x'(T)\Delta T + O(\Delta)^2.$$

طبق (۲۵.۴)، با افزایش x خواهیم داشت

$$h(T) = \Delta x_T - x'(T)\Delta T + O(\Delta)^2.$$

اکنون با جایگزینی این عبارت در (۲۴.۴) و انتخاب تغییرات مناسب، شرایط متقاطع مذکور بدست می‌آید. $\square$

۲.۳.۴ مثال

اکنون یک مثال واضح را مطرح می‌کنیم که از قضیه‌ی ۴.۴ گرفته شده است. فرض کنید $p_{n-1}(t)$ یک چندجمله‌ای از درجه‌ی $n-1$ باشد. اگر $\alpha, \beta : [0, b]^2 \rightarrow (n-1, n)$ مرتبه‌های کسری باشند، پس تا زمانی که برای هر t ، $p_{n-1}^{(n)}(t) = 0$ باشد، ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} p_{n-1}(t) = 0$ است. تابع

$$\mathcal{J}(x, T) = \int_0^T \left[\left({}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(t) \right)^2 + (x(t) - p_{n-1}(t))^2 - t - 1 \right] dt + T^2$$

با شرط‌های آغازین زیر

$$x(0) = p_{n-1}(0) \quad \text{و} \quad x^{(k)}(0) = p_{n-1}^{(k)}(0), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

در نظر بگیرید. می‌بینید که برای هر $t \in [0, b]$

$$\partial_i L[p_{n-1}]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = 0, \quad i = 2, 3.$$

بنابراین، تابع $x \equiv p_{n-1}$ و زمان نهایی $T = 1$ در شرایط لازم بهینگی قضیه ۴.۴ صدق می کند. همچنین تذکر می دهیم برای هر منحنی x داریم،

$$\mathcal{J}(x, T) \geq \int_0^T [-t - 1] dt + T^2 = \frac{T^2}{2} - T,$$

که مقدار کمینه $-1/2$ را در $T = 1$ به ما می دهد. هنگامی که $\mathcal{J}(p_{n-1}, 1) = -1/2$ نتیجه می گیریم که $(p_{n-1}, 1)$ مقدار مینیمم $\mathcal{J}$ است.

۴.۴ مسائل متغیر با تأخیر زمانی

در این بخش، مسائل متغیر کسری با تأخیر زمانی را بررسی می کنیم [۲۲]. همانطور که قبلاً گفتیم، ”مشتق کسری به نمونه های بسیاری نیاز دارد، بنابراین، کل تاریخچه سیگنال، در تضاد با آنچه برای مشتقات مرتبه صحیح اتفاق می افتد است. در واقع دلایل ارزیابی استراتژی محاسبات، بر مبنای نمونه های سیگنال تأخیری است.” این موضوع قبلاً برای مرتبه کسری ثابت مورد مطالعه قرار گرفته است [۳]. درباره ی مرتبه متغیر می توان به [۱۱] مراجعه کرد، که در آن معادلات دیفرانسیل کسری با تأخیر زمانی بررسی شده اند. در بخش ۱.۴.۴ شرایط لازم بهینگی را وقتی که لاگرانژین بستگی به تأخیر زمانی دارد (۶.۴)، بدست می آوریم. در بخش ۲.۴.۴ نیز یک مثال واضح را مورد بحث قرار داده ایم.

۱.۴.۴ شرایط لازم بهینگی

برای سادگی در بیان، مرتبه های کسری $\alpha, \beta : [0, b] \rightarrow (0, 1)$ را در نظر می گیریم. با استفاده از آرگومان های مشابه، می توان مسئله را برای مشتقات مرتبه بالاتر تعمیم داد. فرض کنید $\sigma > 0$ و بردار را بصورت زیر تعریف کنیم

$$\sigma[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = \left(t, x(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t), x(t - \sigma) \right).$$

برای دامنه ی تابع، مجموعه ی زیر را در نظر می گیریم

$$D_{\sigma} = \left\{ (x, t) \in C^1([a - \sigma, b]) \times [a, b] : {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x \in C([a, b]) \right\}.$$

فرض کنید $\mathcal{J} : D_{\sigma} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعک تعریف شده بصورت زیر باشد

$$\mathcal{J}(x, T) = \int_a^T L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \phi(T, x(T)), \quad (26.4)$$

که مجدداً فرض می کنیم لاگرانژین L و رابطه ی نهایی ϕ مشتق پذیرند. مسئله بهینه با تأخیر زمانی بصورت زیر است:

مسئله ۳.۴. تابعک (۲۶.۴) را روی D_{σ} مینیمم کنید بطوریکه شرایط کرانداری برای هر $t \in [a - \sigma, a]$ ، بصورت

$$x(t) = \varphi(t)$$

که φ تابع ثابت داده شده است.

اکنون معادلات اوایلر- لاگرانژ مربوط به این مسئله را بیان و اثبات می‌کنیم.

قضیه ۶.۴. فرض کنید (x, T) یک مینیمم موضعی برای تابعک (۲۶.۴) روی D_σ باشد. اگر $\sigma \geq T - a$ ، لذا (x, T) در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) + D_{\bar{\gamma}}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) = 0, \quad (27.4)$$

برای $t \in [a, T]$ و

$$\gamma \left({}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) \right) = 0, \quad (28.4)$$

برای $t \in [T, b]$. علاوه بر این (x, T) در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند

$$\begin{cases} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(T) + \partial_{\mathcal{F}} \phi(T, x(T)) + \partial_{\mathcal{F}} \phi(T, x(T)) x'(T) = 0, \\ \left[\gamma {}_T I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) - \gamma {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} \\ \quad + \partial_{\mathcal{F}} \phi(T, x(T)) x'(T) = 0, \\ \gamma \left[{}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} = 0. \end{cases} \quad (29.4)$$

اگر $\sigma < T - a$ ، آنگاه معادله‌ی (۲۷.۴) توسط یکی از دو رابطه‌ی زیر جایگزین می‌شود

$$\partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) + D_{\bar{\gamma}}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t + \sigma) = 0 \quad (30.4)$$

برای $t \in [a, T - \sigma]$ و

$$\partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) + D_{\bar{\gamma}}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) = 0 \quad (31.4)$$

برای $t \in [T - \sigma, T]$ است.

اثبات. تغییرات جواب یعنی $(x + \epsilon h, T + \epsilon \Delta T)$ را در نظر بگیرید، که $h \in C^1([a - \sigma, b]; \mathbb{R})$ و برای هر $t \in [a - \sigma, a]$ ، $h(t) = 0$ ، بعلاوه $\epsilon, \Delta T$ دو عدد حقیقی هستند. اگر تعریف کنیم $j(\epsilon) = \mathcal{J}(x + \epsilon h, T + \epsilon \Delta T)$ ، بنابراین $j'(\epsilon) = 0$ یعنی

$$\begin{aligned} \int_a^T \left(\partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) h(t) + \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\bar{\gamma}}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h(t) \right. \\ \left. + \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) h(t - \sigma) \right) dt + L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(T) \Delta T \\ \partial_{\mathcal{F}} \phi(T, x(T)) \Delta T + \partial_{\mathcal{F}} \phi(T, x(T)) [h(T) + x'(T) \Delta T] = 0. \end{aligned} \quad (32.4)$$

ابتدا، فرض کنید $\sigma \geq T - a$ باشد. در این حالت، تا زمانی که

$$\int_a^T \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t) h(t - \sigma) dt = \int_{a-\sigma}^{T-\sigma} \partial_{\mathcal{F}} L_\sigma [x]_\gamma^{\alpha, \beta}(t + \sigma) h(t) dt$$

و $h \equiv 0$ روی $[a - \sigma, a]$ تعریف شود، این رابطه از عبارت (۳۲.۴) حذف و معادله‌ی (۱۲.۴) بدست می‌آید. باقی اثبات مشابه آنچه در بخش ۲.۴، قضیه‌ی ۲.۴، و یافته‌های (۲۷.۴) - (۲۹.۴)

است. اکنون فرض کنید $\sigma < T - a$ باشد، در این حالت، داریم

$$\begin{aligned} \int_a^T +\partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h(t - \sigma) dt &= \int_{a-\sigma}^{T-\sigma} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t + \sigma) h(t) dt \\ &= \int_a^{T-\sigma} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t + \sigma) h(t) dt \end{aligned}$$

اکنون انتگرال زیر را بررسی می کنیم

$$\begin{aligned} \int_a^T \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h(t) dt \\ = \int_a^{T-\sigma} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h(t) dt \\ + \int_{T-\sigma}^T \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h(t) dt. \end{aligned}$$

برای انتگرال اول، با انتگرال جزء به جزء داریم

$$\begin{aligned} \int_a^{T-\sigma} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)}(t) h(t) dt &= \gamma_{\gamma} \int_a^{T-\sigma} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} {}^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} h(t) dt \\ + \gamma_{\mathfrak{F}} \left[\int_a^b \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} {}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} h(t) dt - \int_{T-\sigma}^b \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} {}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} h(t) dt \right] \\ = \int_a^{T-\sigma} h(t) \left[\gamma_{\gamma} {}_t D_{T-\sigma}^{\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \gamma_{\mathfrak{F}} {}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ + \int_{T-\sigma}^b \gamma_{\mathfrak{F}} h(t) \left[{}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_{T-\sigma} D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ \left[h(t) \left[\gamma_{\gamma} {}_t I_{T-\sigma}^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_{\mathfrak{F}} {}_{T-\sigma} I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] \right]_{t=T-\sigma} \\ \left[\gamma_{\mathfrak{F}} h(t) \left[-{}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + {}_{T-\sigma} I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathfrak{F}} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] \right]_{t=b}. \end{aligned}$$

به روش مشابه، برای انتگرال دوم نتیجه می گیریم

$$\begin{aligned}
 & \int_{T-\sigma}^T \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)}(t) h(t) dt \\
 &= \gamma_{\lambda} \left[\int_a^T \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} {}^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} h(t) dt - \int_a^{T-\sigma} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} {}^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} h(t) dt \right] \\
 &+ \gamma_{\Upsilon} \left[\int_{T-\sigma}^b \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} {}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} h(t) dt - \int_T^b \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} {}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} h(t) dt \right] \\
 &= \int_a^{T-\sigma} \gamma_{\lambda} h(t) \left[{}_t D_T^{\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_t D_{T-\sigma}^{\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\
 &+ \int_{T-\sigma}^T h(t) \left[\gamma_{\lambda} {}_t D_T^{\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \gamma_{\Upsilon} {}_{T-\sigma} D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\
 &+ \int_T^b \gamma_{\Upsilon} h(t) \left[{}_{T-\sigma} D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\
 &+ \left[h(t) \left[-\gamma_{\lambda} {}_t I_{T-\sigma}^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \gamma_{\Upsilon} {}_{T-\sigma} I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] \right]_{t=T-\sigma} \\
 &+ \left[h(t) \left[\gamma_{\lambda} {}_t I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_{\Upsilon} {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] \right]_{t=T} \\
 &+ \left[\gamma_{\Upsilon} h(t) \left[-{}_{T-\sigma} I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] \right]_{t=b}.
 \end{aligned}$$

با جایگذاری معادلات فوق در (۳۲.۴) ، نشان می دهیم که

$$\begin{aligned}
 \circ &= \int_a^{T-\sigma} h(t) \left[\partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t + \sigma) \right] dt \\
 &+ \int_{T-\sigma}^T h(t) \left[\partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \right] dt \\
 &+ \int_T^b \gamma_{\Upsilon} h(t) \left[{}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\
 &+ h(T) \left[\gamma_{\lambda} {}_T I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_{\Upsilon} {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\Psi} \phi(t, x(t)) \right]_{t=T} \\
 &+ \Delta T \left[L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\lambda} \phi(t, x(t)) + \partial_{\Psi} \phi(t, x(t)) x'(t) \right]_{t=T} \\
 &+ h(b) \left[\gamma_{\Upsilon} \left({}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L_{\sigma} [x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b}
 \end{aligned}$$

با توجه به دلخواه بودن ΔT و همچنین h در بازه $[a, b]$ ، معادلات (۲۸.۴) – (۳۱.۴) را بدست می آوریم. $\square$

۲.۴.۴ مثال

فرض کنید $\alpha, \beta : [0, b]^2 \rightarrow (0, 1)$, $\sigma = 1$ ، f یک تابع از کلاس C^1 ، و $\hat{f}(t) = {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} f(t)$ باشد. مسأله‌ی حساب تغییرات زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathcal{J}(x, T) = \int_0^T \left[\left({}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(t) - \hat{f}(t) \right)^2 + (x(t) - f(t))^2 + (x(t-1) - f(t-1))^2 - t - 2 \right] dt + T^2 \rightarrow \min$$

بطوریکه برای هر $t \in [-1, 0]$ شرط $x(t) = f(t)$ موجود باشد. در این حالت می‌توان نتیجه گرفت که $(x, T) = (f, 2)$ در تمام شرایط قضیه‌ی ۶.۴ صدق می‌کند و در حقیقت مینیمم مسأله است.

۵.۴ مسائل ایزوپریمتریک

مسائل ایزوپریمتریک همان مسائل بهینه هستند که شامل مینیمم یا ماکزیمم تابع هزینه، با قید انتگرالی می‌باشند. قبلاً راجع به مسئله‌ی تغییرات وابسته به ترکیب مشتق کاپوتو از مرتبه‌ی کسری متغیر در بخش ۲.۴ بحث کردیم (تعریف ۲.۴ را ببینید)، اکنون به مطالعه‌ی مسائل دو متغیره با قید انتگرالی اضافی می‌پردازیم. در هریک از مسائل، نقطه‌ی پایانی در انتگرال هزینه مانند حالت پایانی آزاد است، و ما شرایط مرزی معمولی را بدست می‌آوریم. در بخش ۱.۵.۴ و ۱.۵.۴ به مطالعه‌ی شرایط لازم بهینگی به جای تعیین مینیمم برای هر مسئله می‌پردازیم و این بخش را با یک مثال (بخش ۳.۵.۴) پایان می‌دهیم.

برای دو مسئله‌ی ایزوپریمتریک مورد نظر در بخش بعدی، فرض کنید D مجموعه‌ی داده شده در (۶.۴) و $[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}$ بردار (۸.۴) باشد. با در نظر داشتن مسئله‌ی حساب کسری تغییرات با مرتبه‌ی متغیر، که در بخش ۲.۴ بحث شد، بررسی کنید لاگرانژین مشتق پذیر $L : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ و تابع $\mathcal{J} : D \rightarrow \mathbb{R}$ که به فرم زیر است

$$\mathcal{J}(x, T) = \int_a^T L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt + \phi(T, x(T)), \quad (33.4)$$

در اینجا تابع هزینه نهایی $\phi : [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ از کلاس C^1 است. در پایان از نماد کمکی زیر برای مشتق کسری دوگانه استفاده می‌کنیم:

$$D_{\gamma, c}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} = \gamma_2 {}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} + \gamma_1 {}_t D_c^{\alpha(\cdot, \cdot)}, \quad (34.4)$$

به کمک تعریف تابع $\mathcal{J}$ در (۲.۴)، دو مسئله‌ی ایزوپریمتریک مختلف را بررسی می‌کنیم.

۱.۵.۴ شرایط لازم بهینگی

اولین مسئله‌ی ایزوپریمتریک کسری حساب تغییرات، مسئله‌ی ۴.۴ است.

مسئله ۴.۴. مینیمم های موضعی $\mathcal{J}$ برای هر $(x, T) \in D$ که در شرط کرانداری زیر صدق می کند را تعیین کنید.

$$x(a) = x_a \quad (۳۵.۴)$$

که $x_a \in \mathbb{R}$ ثابت و قید انتگرالی به فرم

$$\int_a^T g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt = \psi(T) \quad (۳۶.۴)$$

است که $g : C^1([a, b] \times \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ و $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع مشتق پذیرند. زمان پایانی T و حالت پایانی $x(T)$ هر دو آزاد هستند.

در این مسئله، شرط فرم (۳۶.۴) شرط ایزوپریمتریک نام دارد. قضیه بعدی شرایط لازم بهینگی برای مسئله ۴.۴ را ارائه می کند.

قضیه ۷.۴. فرض کنید (x, T) یک مینیم موضعی برای تابع (۳۳.۴) روی D باشد، بطوری که شرط کرانداری (۳۵.۴) و شرایط ایزوپریمتریک (۳۶.۴) را در بر گیرد. اگر (x, T) در معادلات اولر-لاگرانژ با رعایت شرط ایزوپریمتریک صدق نکند، یعنی اگر یکی از دو شرط زیر برآورده نشود

$$\partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = 0, \quad t \in [a, T], \quad (۳۷.۴)$$

یا

$$\gamma_T \left[{}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] = 0, \quad t \in [T, b], \quad (۳۸.۴)$$

آنگاه λ ثابتی موجود است که اگر تابع $F : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ بصورت $F = L - \lambda g$ تعریف کنیم، (x, T) در معادلات اولر-لاگرانژ کسری زیر صدق می کند

$$\partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = 0 \quad (۳۹.۴)$$

روی بازه $[a, T]$ و

$$\gamma_T \left({}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) = 0 \quad (۴۰.۴)$$

روی بازه $[T, b]$ است. علاوه بر این، (x, T) در شرایط متقاطع زیر صدق می کند

$$\begin{cases} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) + \partial_{\lambda} \phi(T, x(T)) + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) x'(T) + \lambda \psi'(T) = 0 \\ \left[\gamma_T I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_T I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) x'(T) = 0, \\ \left[\gamma_T I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} = 0. \end{cases}$$

اثبات. تغییرات جواب بهینه (x, T) از نوع

$$(x^*, T^*) = (x + \epsilon_1 h_1 + \epsilon_2 h_2, T + \epsilon_1 \Delta T), \quad (۴۲.۴)$$

که برای هر $i \in \{1, 2\}$ یک پارامتر کوچک، $\epsilon_i \in \mathbb{R}$ ، $h_i \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ در $h_i(a) = 0$ صدق می‌کند و $\Delta T \in \mathbb{R}$ است را در نظر بگیرید. عبارت اضافی $\epsilon_2 h_2$ باید جدا شود، لذا تغییرات قابل قبول (x^*, T^*) در شرط ایزوپریمتریک (۳۶.۴) صدق می‌کند. برای h_i ثابت، فرض کنید

$$i(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_a^{T+\epsilon_1 \Delta T} g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt - \psi(T + \epsilon_1 \Delta T).$$

برای $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ داریم

$$i(0, 0) = \int_a^T g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt - \psi(T) = \psi(T) - \psi(T) = 0.$$

مشتق $\frac{\partial i}{\partial \epsilon_2}$ بصورت زیر است

$$\frac{\partial i}{\partial \epsilon_2} = \int_a^{T+\epsilon_1 \Delta T} \left(\partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h_2(t) + \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h_2(t) \right) dt.$$

برای $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ داریم

$$\left. \frac{\partial i}{\partial \epsilon_2} \right|_{(0, 0)} = \int_a^T \left(\partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h_2(t) + \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h_2(t) \right) dt. \quad (43.4)$$

عبارت دوم در (۴۳.۴) را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} & \int_a^T \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h_2(t) dt \\ &= \int_a^T \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \left[\gamma_1 {}^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} h_2(t) + \gamma_2 {}^C D_b^{\beta(\cdot, \cdot)} h_2(t) \right] dt \\ &= \gamma_1 \int_a^t \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} h_2(t) dt \\ &+ \gamma_2 \left[\int_a^b \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_b^{\beta(\cdot, \cdot)} h_2(t) dt - \int_T^b \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_b^{\beta(\cdot, \cdot)} h_2(t) dt \right] \end{aligned} \quad (44.4)$$

با استفاده از فرمول انتگرال جزء به جزء کسری، (۴۴.۴) معادل است با

$$\begin{aligned} & \int_a^T h_2(t) \left[\gamma_1 {}^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \gamma_2 {}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ &+ \int_T^b \gamma_2 h_2(t) \left[{}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ &+ \left[h_2(t) \left(\gamma_1 I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=T} \\ &+ \left[\gamma_2 h_2(t) \left(I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_2 g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b}. \end{aligned}$$

با جایگذاری این روابط در (۴۳.۴) و بررسی عملگر کسری $D_{\gamma, c}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)}$ که در (۳۴.۴) تعریف

شده است، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial \epsilon_2} \Big|_{(\circ, \circ)} &= \int_a^T h_2(t) \left[\partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ &+ \int_T^b \gamma_2 h_2(t) \left[{}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ &+ \left[h_2(t) \left(\gamma_1 {}_t I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=T} \\ &+ \left[\gamma_2 h_2(t) \left({}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b}. \end{aligned}$$

تا وقتی که (۳۷.۴) یا (۳۸.۴) شکست می‌خورد، تابع h_2 ای موجود است که

$$\frac{\partial i}{\partial \epsilon_2} \Big|_{(\circ, \circ)} \neq \circ.$$

در غیر اینصورت، از تابع دلخواه h_2 و لم اساسی حساب تغییرات، عبارت های (۳۷.۴) و (۳۸.۴) محقق خواهد شد. پس می‌توان قضیه‌ی تابع ضمنی را بکار برد که وجود تابع $\epsilon_2(\cdot)$ تعریف شده در همسایگی صفر را تأیید می‌کند و $i(\epsilon_1, \epsilon_2(\epsilon_1)) = \circ$ است. در پایان، زیرگروهی از تغییرات فرم (۴۲.۴) موجود است که قید انتگرالی (۳۶.۴) را محقق کند. اکنون به دنبال اثبات نتیجه‌ی اصلی هستیم. به همین منظور، تابع کمکی $j(\epsilon_1, \epsilon_2) = \mathcal{J}(x^*, T^*)$ را در نظر بگیرید. طبق فرض، تابع j به مینیمم موضعی در نقطه‌ی $(\circ, \circ)$ با قید $i(\cdot, \cdot)$ می‌رسد و قبلاً ثابت کردیم که $\nabla_i(\circ, \circ) \neq (\circ, \circ)$ است. با بکار بستن قانون ضرب لاگرانژ، از وجود عدد λ مطمئن می‌شویم، بطوریکه

$$\nabla j(\circ, \circ) - \lambda i(\circ, \circ) = (\circ, \circ).$$

به طور خاص

$$\frac{\partial(j - \lambda i)}{\partial \epsilon_1}(\circ, \circ) = \circ. \quad (۴۵.۴)$$

فرض کنید $F = L - \lambda g$ باشد. رابطه‌ی (۴۵.۴) را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \circ &= \int_a^T h_1(t) \left[\partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ &+ \int_T^b \gamma_2 h_2(t) \left[{}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ &+ h_1(t) \left[\gamma_1 {}_t I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\gamma} \phi(t, x(t)) \right]_{t=T} \\ &+ \Delta T \left[F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\gamma} \phi(t, x(t)) + \partial_{\gamma} \phi(t, x(t)) x'(t) + \lambda \psi'(t) \right]_{t=T} \\ &+ h_1(b) \gamma_2 \left[{}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b}. \end{aligned} \quad (۴۶.۴)$$

از آنجا که h_1 و $\Delta T = \circ$ دلخواه هستند، برای هر $t \in [T, b]$ انتخاب می‌کنیم $h_1(t) = \circ$ و $\Delta T = \circ$. اما h_1 در $t \in [a, T]$ دلخواه است، بنابراین اولین شرط لازم (۳۹.۴) را بدست می‌آوریم:

$$\partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = \circ \quad \forall t \in [a, T].$$

بطور مشابه، در نظر بگیرید $\Delta T = 0$ و برای هر $t \in [a, T] \cup \{b\}$ داریم $h_1(t) = 0$ و h_1 دلخواه روی (T, b) است، لذا دومین شرط لازم (۴۰.۴) بصورت زیر است:

$$\gamma_2 \left({}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) = 0 \quad \forall t \in [T, b].$$

از آنجا که (x, T) راه حل شرایط لازم (۳۹.۴) و (۴۰.۴) است، لذا معادله‌ی (۴۶.۴) فرم زیر را به خود می‌گیرد

$$\begin{aligned} h_1(T) \left[\gamma_1 {}_T I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\mathcal{F}} \phi(t, x(t)) \right]_{t=T} \\ + \Delta T \left[F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_1 \phi(t, x(t)) + \partial_2 \phi(t, x(t)) x'(t) + \lambda \psi'(t) \right]_{t=T} \\ + h_1(b) \left[\gamma_2 \left({}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b} = 0. \end{aligned} \quad (47.4)$$

شرایط متقاطع (۴۱.۴) برای انتخاب تغییرات مناسب بدست آمده‌اند.

□

در قضیه‌ی بعد، مشابه مسئله‌ی ۴.۴ را در نظر بگیرید، ما با بازنویسی شرایط متقاطع (۴۱.۴) در رابطه‌ی افزایش روی زمان، ΔT و افزایش در فضای Δx_T داریم

$$\Delta x_T = (x + h_1)(T + \Delta T) - x(T). \quad (48.4)$$

قضیه ۸.۴. فرض کنید (x, T) یک مینیم موضعی برای تابعک (۳۳.۴) روی D باشد، بطوری که شرط کرانداری (۳۵.۴) و شرایط ایزوپریمتریک (۳۶.۴) را در برگیرد. لذا (x, T) در شرایط متقاطع زیر صدق می‌کند (۴۹.۴)

$$\begin{cases} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) + \partial_1 \phi(T, x(T)) + \lambda \psi'(T) \\ + x'(T) \left[\gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_1 {}_T I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} = 0, \\ \left[\gamma_1 {}_T I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} + \partial_2 \phi(T, x(T)) = 0, \\ \gamma_2 \left[{}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathcal{F}} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} = 0. \end{cases}$$

اثبات. فرض کنید (x^*, T^*) تغییرات قابل قبول فرم (۳۳.۴) روی D باشد که $\epsilon_1 = 1$ و $\epsilon_2 = 0$ است. با استفاده از مرتبه اول بسط تیلور برای ΔT کوچک و محدود کردن مجموعه تغییرات برای آنهایی که $h'_1(T) = 0$ ، افزایش Δx_T روی x را بدست می‌آوریم

$$(x + h_1)(T + \Delta T) = (x + h_1)(T) + x'(T) \Delta T + O(\Delta T)^2.$$

روابط (۴۸.۴) به ما اجازه می‌دهد که $h_1(T)$ را بر حسب ΔT و Δx_T بیان کنیم:

$$h_1(T) = \Delta x_T - x'(T) \Delta T + O(\Delta T)^2.$$

با جایگذاری روابط در (۴۷.۴) و انتخاب مناسب تغییرات، شرایط متقاطع جدید (۴۹.۴) بصورت زیر بدست می‌آید.

□

قضیه ۹.۴. فرض کنیم (x, T) مینیمم موضعی برای تابعک (۳۳.۴) روی D باشد، بطوریکه شرط کرانداری (۳۵.۴) و شرط ایزوپریمتریک (۳۶.۴) را شامل شود. بنابراین وجود دارد $(\lambda, \lambda_0) \neq (0, 0)$ که اگر تابع $F = \lambda_0 L - \lambda g$ را بصورت $F : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف کنیم، (x, T) در معادلات اویلر لاگرانژ زیر صدق می‌کند:

$$\partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = 0$$

روی بازه $[a, T]$ و

$$\gamma_2 \left({}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) = 0$$

روی بازه $[T, b]$ است.

اثبات. اگر (x, T) در شرط (۳۷.۴) یا (۳۸.۴) محقق نشود، بنابراین مفروضات قضیه ۷.۴ برآورده می‌شود و با در نظر گرفتن $\lambda_0 = 1$ قضیه ۹.۴ را اثبات می‌کنیم. اگر (x, T) در (۳۷.۴) و (۳۸.۴) محقق شود، لذا نتیجه را با در نظر گرفتن $\lambda = 1$ و $\lambda_0 = 0$ اثبات می‌کنیم.

□

۲.۵.۴ شرایط لازم بهینگی

اکنون، یک نوع مسئله‌ی ایزوپریمتریک جدید با شرط ایزوپریمتریک به فرم زیر را در نظر می‌گیریم

$$\int_a^T g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt = C, \quad (50.4)$$

که C یک عدد حقیقی است.

مسئله ۵.۴. تعیین کنید مینیمم‌های موضعی تابعک $\mathcal{J}$ را در (۳۳.۴) برای هر $(x, T) \in D$ که در شرط کرانداری

$$x(a) = x_a \quad (51.4)$$

بطوری که x_a ثابت و قید‌های انتگرالی به فرم (۵۰.۴) می‌باشد.

در قضیه‌ی زیر شرایط لازم بهینگی کسری را برای مسئله ۵.۴ ارائه می‌کنیم.

قضیه ۱۰.۴. فرض کنید (x, T) یک مینیمم موضعی برای تابعک (۳۳.۴) روی D باشد، بطوری که شرط کرانداری (۵۱.۴) و شرایط ایزوپریمتریک (۵۰.۴) را شامل شود. اگر (x, T) در معادله‌ی اویلر-لاگرانژ بر حسب قید‌های ایزوپریمتریک صدق نکند، یعنی شرط زیر برآورده نشود

$$\partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, b}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = 0, \quad t \in [a, b],$$

لذا $\lambda \neq 0$ ای وجود دارد بطوری که اگر تابع $F = L - \lambda g$ را بصورت $F : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف کنیم، (x, T) در معادلات اویلر-لاگرانژ صدق می‌کند

$$\partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \lambda D_{\gamma, b}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Psi} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = 0, \quad (52.4)$$

روی بازه $[a, T]$ و

$$\begin{aligned} & \gamma_2 \left({}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \\ & - \lambda \left(\partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \gamma_1 {}_t D_b^{\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) = 0 \end{aligned} \quad (53.4)$$

روی بازه $[T, b]$ قرار دارد. علاوه بر این (x, T) در شرایط متقاطع زیر صدق می کند

$$\begin{cases} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) + \partial_1 \phi(T, x(T)) + \partial_2 \phi(T, x(T)) x'(T) = 0, \\ \left[\gamma_1 {}_t I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\gamma} \phi(t, x(t)) \right]_{t=T} = 0 \\ \left[-\lambda \gamma_1 {}_t I_b^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ \left. + \gamma_2 \left({}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b} = 0. \end{cases}$$

اثبات. مشابه آنچه برای اثبات قضیه ۷.۴ انجام دادیم، فرض کنید

$$(x^*, T^*) = (x + \epsilon_1 h_1 + \epsilon_2 h_2, T + \epsilon_1 \Delta T)$$

تغییرات جواب باشند، تعریف می کنیم

$$i(\epsilon_1, \epsilon_2) = \int_a^b g[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt - C$$

. زمانی که $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$ است، مشتق $\frac{\partial i}{\partial \epsilon_2}$ بصورت زیر است

$$\left. \frac{\partial i}{\partial \epsilon_2} \right|_{(0,0)} = \int_a^b \left(\partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h_2(t) + \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h_2(t) \right) dt.$$

با انتگرال جزء به جزء و انتخاب تغییراتی که $h_2 b = 0$ باشد، داریم

$$\left. \frac{\partial i}{\partial \epsilon_2} \right|_{(0,0)} = \int_a^b h_2(t) \left[\partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, b}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt.$$

لذا تابع h_2 ای وجود دارد که

$$\left. \frac{\partial i}{\partial \epsilon_2} \right|_{(0,0)} \neq 0.$$

از قضیه تابع ضمنی می توان نتیجه گرفت، زیرگروهی از تغییرات موجود است که در قید انتگرالی صدق می کند. تابع جدید $j(\epsilon_1, \epsilon_2) = \mathcal{J}(x^*, T^*)$ را در نظر بگیرید. تا زمانی که j یک مینیمم موضعی در $(0, 0)$ با قید $i(\cdot, \cdot) = 0$ و $i(\cdot, \cdot) \neq 0$ دارد، لذا عدد λ ای موجود است بطوریکه

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon_1} (j - \lambda i)(0, 0) = 0. \quad (55.4)$$

فرض کنید $F = L - \lambda g$ باشد. رابطه‌ی (۵۵.۴) را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} & \int_a^T h_1(t) \left[\partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \lambda D_{\gamma, b}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\ & + \int_T^b h_1(t) \left[\gamma_2 \left({}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right. \\ & \quad \left. - \lambda \left(\partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \gamma_1 {}_t D_b^{\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right] dt \\ & + h_1(T) \left[\gamma_1 {}_T I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\gamma} \phi(t, x(t)) \right]_{t=T} \\ & + \Delta T \left[L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\gamma} \phi(t, x(t)) + \partial_{\gamma} \phi(t, x(t))' (t) \right]_{t=T} \\ & + h_1(b) \left[-\lambda \gamma_1 {}_t I_b^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ & \quad \left. + \gamma_2 \left({}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b} = 0. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن تغییرات مناسب، اولین (۵۲.۴) و دومین (۵۳.۴) شرایط لازم بهینگی و همچنین شرایط متقاطع (۵۴.۴) را بدست می‌آوریم. $\square$

مشابه قضیه‌ی ۹.۴، نتیجه‌ی زیر بدست می‌آید.

قضیه ۱۱.۴. فرض کنید (x, T) یک مینیم موضعی برای تابع (۳۳.۴) روی D باشد، بطوری که شرط کرانداری (۵۱.۴) و شرایط ایزوپریمتریک (۵۰.۴) را شامل شود. لذا $(\circ, \circ) \neq (\lambda_0, \lambda)$ موجود است بطوریکه اگر تابع $F = \lambda_0 L - \lambda g$ بصورت $F : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ باشد، (x, T) در معادلات اولر-لاگرانژ کسری صدق می‌کند.

$$\partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \lambda D_{\gamma, b}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = 0$$

روی بازه $[a, T]$ و

$$\begin{aligned} & \gamma_2 \left({}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} F[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \\ & - \lambda \left(\partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \gamma_1 {}_t D_b^{\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} g[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) = 0 \end{aligned}$$

روی بازه $[T, b]$ قرار دارد.

۳.۵.۴ مثال

فرض کنید $\alpha(t, \tau) = \alpha(t)$ و $\beta(t, \tau) = \beta(\tau)$ باشد. تعریف می‌کنیم تابع

$$\psi(T) = \int_0^T \left(\frac{t^{1-\alpha(t)}}{\Upsilon \Gamma(\Upsilon - \alpha(t))} + \frac{(b-t)^{1-\beta(t)}}{\Upsilon \Gamma(\Upsilon - \beta(t))} \right)^{\Upsilon} dt$$

که روی بازه $[0, b]$ و $b > 0$ قرار دارد. تابع J تعریف شده بصورت زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} J(x, T) = & \int_0^T \left[\alpha(t) + \left({}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(t) \right)^{\Upsilon} \right. \\ & \left. + \left(\frac{t^{1-\alpha(t)}}{\Upsilon \Gamma(\Upsilon - \alpha(t))} + \frac{(b-t)^{1-\beta(t)}}{\Upsilon \Gamma(\Upsilon - \beta(t))} \right)^{\Upsilon} \right] dt \end{aligned}$$

که $t \in [0, b]$ و $\gamma = (1/2, 1/2)$ با شرط اولیه‌ی

$$x(0) = 0$$

و شرط ایزوپریمتریک زیر است

$$\int_0^T {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t) \left(\frac{t^{1-\alpha(t)}}{\Gamma(2-\alpha(t))} + \frac{(b-t)^{1-\beta(t)}}{\Gamma(2-\beta(t))} \right)^2 dt = \psi(T).$$

تعریف می‌کنیم $F = \lambda_0 L - \lambda g$ با $\lambda = 2$ ، یعنی

$$F = \alpha(t) + \left({}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t) - \frac{t^{1-\alpha(t)}}{\Gamma(2-\alpha(t))} - \frac{(b-t)^{1-\beta(t)}}{\Gamma(2-\beta(t))} \right)^2.$$

تابع $\bar{x}(t) = t$ با $t \in [0, b]$ را در نظر بگیرید. چون

$${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} \bar{x}(t) = \frac{t^{1-\alpha(t)}}{\Gamma(2-\alpha(t))} + \frac{(b-t)^{1-\beta(t)}}{\Gamma(2-\beta(t))},$$

$\bar{x}$ در شرایط (۳۹.۴)، (۴۰.۴) و دو شرط آخر (۴۱.۴) صدق می‌کند. با استفاده از شرط اولیه‌ی (۴۱.۴) یعنی

$$\alpha(t) + 2 \left(\frac{T^{1-\alpha(T)}}{\Gamma(2-\alpha(T))} + \frac{(b-T)^{1-\beta(T)}}{\Gamma(2-\beta(T))} \right)^2 = 0$$

زمان بهینه‌ی T بدست می‌آید.

۶.۴ مسائل حساب تغییرات با قید های هولونومیک

در این بخش، مسئله‌ی حساب تغییرات جدید، با قید های جدید را ارائه می‌کنیم. یک قید هولونومیک، یک شرط به فرم

$$g(t, x) = 0$$

است که $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), n \geq 2$ و g تابع داده شده است [۴۲]. فضای

$$U = \{(x_1, x_2, T) \in C^1([a, b]) \times C^1([a, b]) \times [a, b] : x_1(a) = x_{1a}, x_2(a) = x_{2a}\} \quad (56.4)$$

برای ثابت های حقیقی $x_{1a}, x_{2a} \in \mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. در این بخش، مسئله‌ی تغییرات زیر را در نظر می‌گیریم:

مسئله ۶.۴. توابع x_1 و x_2 را طوری بیابید که تابع $\mathcal{J}$ تعریف شده در U به شکل زیر را مینیمم یا ماکزیمم کنند

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(x_1, x_2, T) = & \int_a^T L(t, x_1(t), x_2(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x_1(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x_2(t)) dt \\ & + \phi(T, x_1(T), x_2(T)), \end{aligned} \quad (57.4)$$

بطوریکه توابع قابل قبول در قید

$$g(t, x_1(t), x_2(t)) = 0, \quad t \in [a, b], \quad (58.4)$$

که قید هولونومیک نام دارد، صدق کنند. و $g : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع بطور پیوسته مشتق پذیر نسبت به آرگومان های دوم و سوم است. زمان پایانی T و حالت های پایانی $x_1(T)$ و $x_2(T)$ آزاد هستند و لاگرانژین $L : [a, b] \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و بطور پیوسته مشتق پذیر برای مرتبه های i ام، که $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ است. تابع هزینه ی نهایی $\phi : [a, b] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ از کلاس C^1 می باشد.

۱.۶.۴ شرایط لازم بهینگی

قضیه بعد، شرایط لازم بهینگی کسری برای مسئله ی متغیر با قید هولونومیک را بیان می کند. برای سادگی در نمادگذاری، به جای (x_1, x_2) از x و به جای بردار دو بعدی ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x$ از $({}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x_1, {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x_2)$ و همچنین از عملگر زیر استفاده می کنیم

$$[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta} := (t, x(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(t)).$$

نتیجه ی بعدی، شرط بهینگی لازم برای مسئله ی ۶ را به ما می دهد.

قضیه ۱۲.۴. فرض کنید (x, T) یک مینیمم موضعی برای تابع $\mathcal{J}$ در (۵۷.۴)، تحت قید (۵۸.۴) و شرایط کراندار تعریف شده در (۵۶.۴) باشد. اگر

$$\partial_2 g(t, x(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b],$$

بنابراین یک تابع پیوسته قطعه وار $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ موجود است که (x, T) در معادلات اوایلر-لاگرانژ کسری زیر صدق می کند:

$$\partial_2 L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_1 L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \lambda(t) \partial_2 g(t, x(t)) = 0 \quad (59.4)$$

و

$$\partial_3 L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_5 L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \lambda(t) \partial_3 g(t, x(t)) = 0 \quad (60.4)$$

روی بازه ی $[a, T]$ ، و

$$\gamma_2 \left({}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_1 L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_1 L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \lambda(t) \partial_2 g(t, x(t)) \right) = 0 \quad (61.4)$$

و

$${}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_1 L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_1 L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \lambda(t) \partial_2 g(t, x(t)) = 0 \quad (62.4)$$

روی بازه‌ی $[T, b]$ قرار دارد. علاوه بر این (x, T) در شرایط متقاطع زیر صدق می‌کند
(۶۳.۴)

$$\begin{cases} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) + \partial_1 \phi(T, x(T)) + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) x'_{\gamma}(T) + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) x'_{\gamma}(T) = 0, \\ \left[\gamma_1 I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) = 0, \\ \left[\gamma_1 I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=T} + \partial_{\delta} \phi(T, x(T)) = 0, \\ \gamma_2 \left[I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} = 0, \\ \gamma_2 \left[I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right]_{t=b} = 0. \end{cases}$$

اثبات. تغییرات قابل قبول جواب بهینه‌ی (x, T) از نوع $(x^*, T^*) = (x + \epsilon h, T + \epsilon \Delta T)$ را در نظر بگیرید، که $\epsilon \in \mathbb{R}$ یک پارامتر کوچک است، $h \in (h_1, h_2) \in C^1([a, b]) \times C^1([a, b])$ ، $\Delta T \in \mathbb{R}$ صدق می‌کند و $h_i(a) = 0, i = 1, 2$ چون

$$\partial_{\gamma} g(t, x(t)) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b],$$

طبق قضیه‌ی تابع ضمنی، وجود دارد زیرگروهی از تغییرات (x, T) که در (۵۸.۴) صدق می‌کند، یعنی تابع منحصر بفرد $h_2(\epsilon, h_1)$ موجود است به طوری که تغییرات قابل قبول (x^*, T^*) در قید هولونومیک (۵۸.۴) صدق می‌کند:

$$g(t, x_1(t) + \epsilon h_1(t), x_2(t) + \epsilon h_2(t)) = 0 \quad \forall t \in [a, b].$$

با مشتق گیری از این شرط بر حسب ϵ و در نظر گرفتن $\epsilon = 0$ ، خواهیم داشت

$$\partial_{\gamma} g(t, x(t)) h_1(t) + \partial_{\gamma} g(t, x(t)) h_2(t) = 0,$$

که معادل است با

$$\frac{\partial_{\gamma} g(t, x(t)) h_1(t)}{\partial_{\gamma} g(t, x(t))} = -h_2(t). \quad (64.4)$$

j را در همسایگی صفر بصورت

$$j(\epsilon) = \int_a^{T+\epsilon \Delta T} L[x^*]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) dt + \phi(T + \epsilon \Delta T, x^*(T + \epsilon \Delta T)).$$

تعریف می‌کنیم، مشتق $\frac{\partial j}{\partial \epsilon}$ برای $\epsilon = 0$ برابر است با

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial j}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \int_a^T \left(\partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h_1(t) + \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h_2(t) \right. \\ &+ \partial_{\gamma} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h_1(t) + \partial_{\delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h_2(t) \left. \right) dt \\ &+ L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) \Delta T + \partial_1 \phi(T, x(T)) \Delta T + \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) [h_1(T) + x'_{\gamma}(T) \Delta T] \\ &+ \partial_{\gamma} \phi(T, x(T)) [h_2(T) + x'_{\gamma}(T) \Delta T]. \end{aligned} \quad (65.4)$$

عبارت سوم در (۶۵.۴) را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}
 & \int_a^T \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h_{\lambda}(t) dt \\
 &= \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \left[\gamma_{\lambda} {}^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} h_{\lambda}(t) + \gamma_{\lambda} {}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} h_{\lambda}(t) \right] dt \\
 &+ \gamma_{\lambda} \int_a^T \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} h_{\lambda}(t) dt \\
 &+ \gamma_{\lambda} \left[\int_a^b \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} h_{\lambda}(t) dt - \int_T^b \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} h_{\lambda}(t) dt \right].
 \end{aligned} \tag{۶۶.۴}$$

با انتگرال گیری جزءبه‌جزء، (۶۶.۴) را می‌توان بصورت زیر نوشت

$$\begin{aligned}
 & \int_a^T h_{\lambda}(t) \left[\gamma_{\lambda} {}^C D_T^{\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \gamma_{\lambda} {}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\
 &+ \int_T^b \gamma_{\lambda} h_{\lambda}(t) \left[{}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}^C D_T^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] dt \\
 &+ \left[h_{\lambda}(t) \left(\gamma_{\lambda} {}^C I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_{\lambda} {}^C I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=T} \\
 &+ \left[\gamma_{\lambda} h_{\lambda}(t) \left({}^C I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}^C I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b}.
 \end{aligned}$$

با پیشروی به‌طور مشابه، برای رابطه‌ی چهارم در (۶۵.۴)، به عبارت معادل می‌رسیم. با جایگذاری این روابط در (۶۵.۴) و بررسی عملگر کسری $D_{\gamma, c}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)}$ که در (۳۴.۴) تعریف کردیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
 \circ &= \int_a^T \left[h_{\lambda}(t) \left[\partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] \right. \\
 &\quad \left. + h_{\lambda}(t) \left[\partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\gamma, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] \right] dt \\
 &+ \gamma_{\lambda} \int_T^b \left[h_{\lambda}(t) \left[{}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}^C D_T^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] \right. \\
 &\quad \left. + h_{\lambda}(t) \left[{}^C D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}^C D_T^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] \right] dt \\
 &+ h_{\lambda}(T) \left[\gamma_{\lambda} {}^C I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\
 &\quad \left. - \gamma_{\lambda} {}^C I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\mathbf{f}} \phi(t, x(t)) \right]_{t=T} \\
 &+ h_{\lambda}(T) \left[\gamma_{\lambda} {}^C I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_{\lambda} {}^C I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\mathbf{f}} \phi(t, x(t)) \right]_{t=T} \\
 &+ \Delta T \left[L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\lambda} \phi(t, x(t)) + \partial_{\mathbf{f}} \phi(t, x(t)) x'_{\lambda}(t) + \partial_{\mathbf{f}} \phi(t, x(t)) x'_{\mathbf{f}}(t) \right]_{t=T}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + h_1(b) \left[\gamma_2 \left({}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b} \\
 & + h_2(b) \left[\gamma_2 \left({}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b}
 \end{aligned} \tag{۶۷.۴}$$

تابع پیوسته‌ی قطعه وار λ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\lambda(t) = \begin{cases} -\frac{\partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\bar{\gamma}, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t)}{\partial_{\mathbf{f}} g(t, x(t))}, & t \in [a, T] \\ -\frac{{}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t)}{\partial_{\mathbf{f}} g(t, x(t))}, & t \in [T, b]. \end{cases} \tag{۶۸.۴}$$

با استفاده از تساوی های (۶۴.۴) و (۶۸.۴) داریم

$$\lambda(t) \partial_{\mathbf{f}} g(t, x(t)) h_1(t) = \begin{cases} (\partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\bar{\gamma}, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t)) h_2(t), & t \in [a, T] \\ ({}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t)) h_2(t), & t \in [T, b] \end{cases}$$

با جایگذاری در (۶۷.۴)

$$\begin{aligned}
 \circ &= \int_a^T h_1(t) \left[\partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + D_{\bar{\gamma}, T}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \lambda(t) \partial_{\mathbf{f}} g(t, x(t)) \right] dt \\
 &+ \gamma_2 \int_T^b h_1(t) \left[{}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \lambda(t) \partial_{\mathbf{f}} g(t, x(t)) \right] dt \\
 &+ h_1(T) \left[\gamma_1 {}_T I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\mathbf{f}} \phi(t, x(t)) \right]_{t=T} \\
 &+ h_2(T) \left[\gamma_1 {}_T I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_{\Delta} \phi(t, x(t)) \right]_{t=T} \\
 &+ \Delta T \left[L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \partial_1 \phi(t, x(t)) + \partial_{\mathbf{f}} \phi(t, x(t)) x'_1(t) + \partial_{\Delta} \phi(t, x(t)) x'_2(t) \right]_{t=T} \\
 &+ h_1(b) \left[\gamma_2 \left({}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\mathbf{f}} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b} \\
 &+ h_2(b) \left[\gamma_2 \left({}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \partial_{\Delta} L[x]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b}
 \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن انتخاب مناسب تغییرات، اولین (۵۹.۴) و سومین (۶۱.۴) شرط لازم، و همچنین شرایط متقاطع (۶۳.۴) می‌آید. شرایط باقی‌مانده‌ی (۶۰.۴) و (۶۲.۴) مستقیماً از (۶۸.۴) بدست می‌آیند.

□

۲.۶.۴ مثال

این بخش را با یک مثال واضح و ساده پایان می‌دهیم. مسئله‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$J(x, t) = \int_0^T \left[\alpha(t) + \left({}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x_1(t) - \frac{t^{1-\alpha(t)}}{\Gamma(2-\alpha(t))} - \frac{(b-t)^{1-\beta(t)}}{\Gamma(2-\beta(t))} \right)^2 + \left({}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x_2(t) \right)^2 \right] dt \rightarrow \min,$$

$$x_1(t) + x_2(t) = t + 1,$$

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1.$$

به سادگی می‌توان دریافت که $x_1(t) \equiv 0$ و $x_2(t) \equiv 1$ در قضیه‌ی ۱۲.۴ صدق می‌کند.

۷.۴ مسئله‌ی متغیر کسری هرگلوتر

در این بخش، مسائل متغیر کسری از نوع هرگلوتر^۱ را بررسی می‌کنیم، که وابسته به ترکیب مشتقات کسری کاپوتو ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)}$ است. دو حالت مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مسئله‌ی متغیر هرگلوتر، تعمیم مسئله‌ی متغیر کلاسیک است. که به ما اجازه می‌دهد فرایند های غیرنگه دارنده را حتی در حالتی که تابع لاگرانژ مستقل است، تشریح کنیم. (یعنی هنگامی که لاگرانژین صریحا به زمان وابسته نیست). برخلاف حساب تغییرات، که تابع هزینه توسط انتگرال وابسته به زمان، فضا و حرکت ارائه می‌شود، در مسئله‌ی متغیر هرگلوتر، مدل توسط معادله‌ی دیفراسیل شامل مشتق تابع مورد نظر z ، و تابع لاگرانژ وابسته به زمان، مسیر های x و z ، و روی مشتق x ارائه می‌گردد. مسئله هرگلوتر توسط هرگلوتر در سال ۱۹۳۰ مطرح شد اما تنها ۶۶ سال بعد، یعنی در سال ۱۹۹۶ با کارهای دانشمندان مختلف ([۱۶] و [۴]) توجه جامعه‌ی ریاضی دانان به این سو جلب شد.

در بخش ۱.۷.۴، شرایط اوایلر-لاگرانژ کسری برای مسئله‌ی متغیر کسری هرگلوتر، با یک متغیر، و در حالت کلی، درمورد چندین متغیر در بخش ۲.۷.۴ بحث شده است. در پایان سه مثال واضح با جزئیات در بخش ۳.۷.۴ ارائه شده است.

۱.۷.۴ مسئله اساسی هرگلوتر

فرض کنید $(\cdot, 1) \rightarrow [a, b]^2 : \alpha, \beta$ دو تابع باشند. مسئله‌ی متغیر هرگلوتر کسری بصورت زیر است.

مسئله ۷.۴. مسیر های $x \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ که در شرط کرانداری $x(a) = x_a$ برای ثابت x_a ، و عدد حقیقی $T \in (a, b]$ صدق می‌کنند را طوری تعیین کنید که مقدار $z(T)$ اکسترمم شود، به طوری که z در معادله‌ی دیفرانسیل

$$\dot{z}(x, T) = L \left(t, x(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t), z(t) \right), \quad t \in [a, b], \quad (۶۹.۴)$$

^۱Herglotz

با وابستگی روی ترکیب عمگر مشتق کسری، با شرط آغازین

$$z(a) = z_a, \quad (۷۰.۴)$$

صدق کند، که z یک ثابت حقیقی است.

در پایان از نماد گذاری کمکی زیر استفاده می‌کنیم

$$[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = \left(t, x(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t), z(t) \right).$$

فرض شده است که لاگرانژین L در مفروضات زیر صدق می‌کند:

$$۱. \quad L : [a, b] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \text{ مشتق پذیر است،}$$

$$۲. \quad D_{\gamma}^{\beta(\cdot), \alpha(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \text{ و } {}_a D_t^{\beta(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \text{ بطوریکه } t \rightarrow \lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \text{ در بازه‌ی } [a, b] \text{ موجود و پیوسته اند که}$$

$$\lambda(t) = e \left(- \int_a^t \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(\tau) d\tau \right).$$

نتیجه‌ی زیر شرایط لازم نوع اولر- لاگرانژ را برای جواب مسئله‌ی ۷.۴ می‌دهد.

قضیه ۱۳.۴. فرض کنید $x \in (C^1[a, b]; \mathbb{R})$ مانند z تعریف شده در تساوی (۶۹.۴)، با شرط آغازین (۷۰.۴)، یک اکستریم در $T \in [a, b]$ داشته باشد. بنابراین (x, z) در معادلات دیفرانسیل کسری زیر صدق می‌کند

$$\partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \lambda(t) + D_{\gamma}^{\beta(\cdot), \alpha(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) = 0, \quad (۷۱.۴)$$

روی بازه $[a, T]$ ، و

$$\gamma_{\gamma} \left({}_a D_t^{\beta(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) - {}_T D_t^{\beta(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right) = 0, \quad (۷۲.۴)$$

روی بازه $[T, b]$ ، است. علاوه بر این، شرایط متقاطع زیر نیز صدق می‌کنند

$$\begin{cases} \left[\gamma_{\gamma} {}_T I_t^{-\beta(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) - \gamma_{\gamma} {}_T I_t^{-\beta(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=T} = 0, \\ \left[\gamma_{\gamma} {}_T I_t^{-\beta(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) - {}_a I_t^{-\beta(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b} = 0 \end{cases}$$

اگر $T < b$ ، بنابراین $L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(T) = 0$ است.

اثبات. فرض کنید x جواب مسئله باشد. تغییرات قابل قبول x ، $\bar{x} = x + \epsilon h$ ، که $h \in (C^1[a, b]; \mathbb{R})$ یک منحنی آشفته دلخواه و $\epsilon \in \mathbb{R}$ نماد یک عدد کوچک ($|\epsilon| \ll 1$) باشد را در نظر بگیرید. قید $x(a) = x_a$ بیانگر این است که تمام تغییرات قابل قبول، باید در شرط $h(a) = 0$ صدق کنند. از طرفی تغییر قابل قبول z ، $\bar{z} = z + \epsilon \theta$ ، را در نظر بگیرید که θ یک منحنی آشفته (نه دلخواه) است به طوری که

$$۱. \quad \theta(a) = 0, \text{ بنابراین } z(a) = z_a$$

۲. $\theta(T) = 0$ زیرا $z(T)$ ماکزیمم (یا مینیمم) است، یعنی $\bar{z}(T) - z(T) \leq 0$ و $\bar{z}(T) - z(T) \geq 0$ ،
(۰، ۰)

۳. $\theta(t) = \frac{d}{d\varepsilon} z(\bar{x}, t)|_{\varepsilon=0}$ ، لذا تغییر صورت گرفته در معادله‌ی دیفرانسیل صدق می‌کند.

با دیفرانسیل گیری از θ بر حسب t ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\theta(t) &= \frac{d}{dt} \frac{d}{d\varepsilon} z(\bar{x}, t) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \frac{d}{dt} z(\bar{x}, t) \Big|_{\varepsilon=0} \\ &= \frac{d}{dt} L\left(t, x(t) + \varepsilon h(t), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t) + \varepsilon {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} h(t), \bar{z}(\bar{x}, t)\right) \Big|_{\varepsilon=0}, \end{aligned}$$

و با بازنویسی این رابطه، معادله‌ی دیفرانسیل زیر برای θ بدست می‌آید:

$$\dot{\theta}(t) - \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \theta(t) = \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h(t) + \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} h(t).$$

با در نظر گرفتن $\lambda(t) = e\left(-\int_a^t \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(\tau) d\tau\right)$ ، جواب برای معادله‌ی دیفرانسیل آخر بدست می‌آید

$$\begin{aligned} \theta(T)\lambda(T) - \theta(a) \\ = \int_a^T \left(\partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h(t) + \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} h(t) \right) \lambda(t) dt. \end{aligned}$$

طبق مفروضات، $\theta(a) = 0$ است. اگر x مانند $z(x, T)$ تعریف شده توسط (۶۹.۴) در نقطه‌ی $t = T$ اکسترمم شود، بنابراین $\theta(T)$ به وضوح برابر صفر است. در نتیجه داریم

$$\int_a^T \left(\partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) h(t) + \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} h(t) \right) \lambda(t) dt = 0. \quad (74.4)$$

تنها با در نظر گرفتن عبارت دوم در معادله‌ی (۷۴.۴) و استفاده از تعریف ترکیب عملگر مشتق کاپوتو، داریم

$$\begin{aligned} & \int_a^T \lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \left(\gamma_1 {}^C D_t^{\alpha(\cdot)} h(t) + \gamma_2 {}^C D_b^{\beta(\cdot)} h(t) \right) dt \\ &= \gamma_1 \int_a^T \lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_t^{\alpha(\cdot)} h(t) dt \\ & \quad + \gamma_2 \left[\int_a^b \lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_b^{\beta(\cdot)} h(t) dt \right. \\ & \quad \left. - \int_T^b \lambda(t) \partial_{\gamma} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) {}^C D_b^{\beta(\cdot)} h(t) dt \right] = *. \end{aligned}$$

با استفاده از فرمول انتگرال جزء به جزء کسری و در نظر گرفتن $(\gamma_2, \gamma_1) = \bar{\gamma}$ ، داریم

$$\begin{aligned} \star &= \int_a^T h(t) D_{\bar{\gamma}}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) dt \\ &+ \int_T^b \gamma_2 h(t) \left[{}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} (\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t)) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} (\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t)) \right] dt \\ &+ h(T) \left[\gamma_1 {}_T I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) - \gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=T} \\ &+ h(b) \gamma_2 \left[{}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b}. \end{aligned}$$

با جایگذاری این روابط در عبارت (۷۴.۴) داریم

$$\begin{aligned} \circ &= \int_a^T h(t) \left[\partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \lambda(t) + D_{\bar{\gamma}}^{\beta(\cdot, \cdot), \alpha(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right] dt \\ &+ \int_T^b \gamma_2 h(t) \left[{}_a D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) - {}_T D_t^{\beta(\cdot, \cdot)} (\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t)) \right] dt \\ &+ h(T) \left[\gamma_1 {}_T I_t^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) - \gamma_2 {}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=T} \\ &+ h(b) \gamma_2 \left[{}_T I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) - {}_a I_t^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right) \right]_{t=b}. \end{aligned}$$

که با انتخاب مناسب برای تغییرات $h(\cdot)$ ، به معادلات اوایلر-لاگرانژ (۷۱.۴) - (۷۲.۴) و شرایط متقاطع (۷۳.۴) میرسیم $\square$

تذکر ۶.۴. اگر $\alpha(\cdot, \cdot)$ و $\beta(\cdot, \cdot)$ به عدد ۱ میل کنند و اگر لاگرانژین L از کلاس C^2 باشد، بنابراین اولین معادله‌ی اوایلر-لاگرانژ (۷۱.۴) بصورت زیر می‌شود

$$\partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \lambda(t) + (\gamma_2 - \gamma_1) \frac{d}{dt} \left[\lambda(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] = \circ.$$

با دیفرانسیل گیری و بررسی مشتق تابع لاند، داریم

$$\begin{aligned} &\lambda(t) \left[\partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right. \\ &\left. + (\gamma_2 - \gamma_1) \left[-\partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + \frac{d}{dt} \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] \right] = \circ. \end{aligned}$$

از آنجا که برای هر t ، مقدار $\lambda(t) > \circ$ است، نتیجه می‌گیریم که

$$\partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) + (\gamma_2 - \gamma_1) \left[\frac{d}{dt} \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) - \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \partial_{\Psi} L[x, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) \right] = \circ.$$

۲.۷.۴ متغیرهای مستقل چندتایی

تعمیم مسئله‌ی هرگلوتر شامل $n+1$ متغیر مستقل در نظر بگیرید. تعریف می‌کنیم $\Omega = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i]$ با $n \in \mathbb{N}$ و $p = [a, b] \times \Omega$ و در نظر بگیرید بردار $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in \Omega$

مسئله‌ی جدید، شامل تعیین مسیرهای $x \in C^1(P)$ است که یک اکستریمم برای $z[x, T]$ می‌دهد بطوری که تابع z در معادله‌ی

$$\dot{z}(t) = \int_{\Omega} L\left(t, s, x(t, s), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t, s), \right. \\ \left. {}^C D_{\gamma_1}^{\alpha_1(\cdot), \beta_1(\cdot)} x(t, s), \dots, {}^C D_{\gamma_n}^{\alpha_n(\cdot), \beta_n(\cdot)} x(t, s), z(t)\right) d^n s \quad (75.4)$$

با قید زیر صدق کند

$$x(t, s) = g(t, s), \quad (t, s) \in \partial p \quad \text{برای هر} \quad (76.4)$$

که ∂P همان کران P و g تابع داده شده‌ی $g: \partial p \rightarrow \mathbb{R}$ است. فرض می‌کنیم که

$$1. \quad \alpha, \alpha_i, \beta, \beta_i: [a, b]^2 \rightarrow (0, 1) \quad \text{که} \quad i = 1, \dots, n,$$

$$2. \quad \gamma, \gamma^1, \dots, \gamma^n \in [0, 1]^2,$$

$$3. \quad d^n s = ds_1 \dots ds_n.$$

۴. توابع ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t, s), {}^C D_{\gamma_1}^{\alpha_1(\cdot), \beta_1(\cdot)} x(t, s), \dots, {}^C D_{\gamma_n}^{\alpha_n(\cdot), \beta_n(\cdot)} x(t, s)$ موجود و پیوسته اند،

۵. لاگرانژین $L: P \times \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}$ از کلاس C^1 است.

تذکر ۷.۴. منظور از ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t, s)$ مشتق کسری کاپوتو بر حسب متغیر مستقل t و منظور از ${}^C D_{\gamma_i}^{\alpha_i(\cdot), \beta_i(\cdot)} x(t, s)$ مشتق کسری کاپوتو بر حسب متغیر مستقل s_i ، برای $i = 1, \dots, n$ است.

در پایان، از نماد کمکی $[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s)$ برای بیان بردار زیر استفاده می‌کنیم

$$\left(t, s, x(t, s), {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t, s), {}^C D_{\gamma_1}^{\alpha_1(\cdot), \beta_1(\cdot)} x(t, s), \right. \\ \left. \dots, {}^C D_{\gamma_n}^{\alpha_n(\cdot), \beta_n(\cdot)} x(t, s), z(t) \right).$$

تابع زیر را در نظر بگیرید

$$\lambda(t) = e \left(- \int_a^t \int_{\Omega} \partial_{n+4} [x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(\tau, s) d^n s d\tau \right).$$

قضیه ۱۴.۴. اگر (x, z, t) یک اکستریمم برای تابع تعریف شده‌ی (۷۵.۴) باشد، لذا (x, z, t) در معادلات دیفرانسیل کسری صدق می‌کند

$$\partial_{n+2} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) \lambda(t) + D_{\bar{\gamma}}^{\beta(\cdot), \alpha(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+3} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) \right) \\ + \sum_{i=1}^n D_{\bar{\gamma}_i}^{\beta_i(\cdot), \alpha_i(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+3+i} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) \right) = 0 \quad (77.4)$$

روی $[a, T] \times \Omega$ ، و

$$\gamma \left({}_a D_t^{\beta(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+3} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) \right) - {}_T D_t^{\beta(\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+3} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) \right) \right) = 0, \quad (78.4)$$

روی $\Omega \times [T, b]$ ، تعریف شده است. علاوه بر این (x, z) در شرط متقاطع زیر صدق می‌کند

$$\left[\gamma_1 I_T^{1-\alpha(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+3} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) \right) - \gamma_2 I_T^{1-\beta(\cdot, \cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+3} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) \right) \right]_{t=T} = 0, \quad s \in \Omega. \quad (79.4)$$

اگر $T < b$ باشد، لذا $\int_{\Omega} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(T, s) d^n s = 0$.

اثبات. فرض کنید x جواب مسئله باشد، تغییر قابل قبول $\bar{x}(t, s) = x(t, s) + \epsilon h(t, s)$ را در نظر بگیرید، که $h \in C^1(P)$ منحنی آشفته‌ی دلخواه و $\epsilon \in \mathbb{R}$ بطوری که $\|\epsilon\| \ll 1$ می‌باشد. در نتیجه طبق شرط کرانداری (۷۶.۴) برای هر $(t, s) \in \partial P$ مقدار $h(t, s) = 0$ است. از طرفی تغییر قابل قبول $\bar{z}, \bar{z} = z + \epsilon \theta$ را در نظر بگیرید، که θ یک منحنی آشفته است بطوری که $\theta(a) = 0$

$$\theta(t) = \frac{d}{d\epsilon} z(\bar{x}, t) \Big|_{\epsilon=0}.$$

با دیفرانسیل از $\theta(t)$ بر حسب t ، داریم

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \theta(t) &= \frac{d}{dt} \frac{d}{d\epsilon} z(\bar{x}, t) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \frac{d}{dt} z(\bar{x}, t) \Big|_{\epsilon=0} \\ &= \frac{d}{d\epsilon} \int_{\Omega} L[\bar{x}, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) d^n s \Big|_{\epsilon=0}, \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(t) &= \int_{\Omega} \left(\partial_{n+2} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) h(t, s) + \partial_{n+3} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h(t, s) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \partial_{n+3+i} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) {}^C D_{\gamma^i}^{\alpha-i(\cdot, \cdot), \beta_i(\cdot, \cdot)} h(t, s) + \partial_{n+4} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) \theta(t) \right) d^n s. \end{aligned}$$

برای سادگی در نماد، تعریف می‌کنیم

$$B(t) = \int_{\Omega} \partial_{n+4} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) d^n s$$

و

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\Omega} \left(\partial_{n+2} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) h(t, s) + \partial_{n+3} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) {}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} h(t, s) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n \partial_{n+3+i} L[x, z]_{n, \gamma}^{\alpha, \beta}(t, s) {}^C D_{\gamma^i}^{\alpha-i(\cdot, \cdot), \beta_i(\cdot, \cdot)} h(t, s) \right) d^n s. \end{aligned}$$

بنابراین معادله‌ی دیفرانسیل خطی زیر را بدست می‌آوریم

$$\dot{\theta}(t) - B(t)\theta(t) = A(t),$$

که جواب آن

$$\theta(T)\lambda(T) - \theta(a) = \int_a^T A(t)\lambda(t)dt.$$

تا زمانی که $\theta(a) = \theta(T) = 0$ داریم

$$\int_a^T A(t)\lambda(t)dt = 0. \quad (۸۰.۴)$$

تنها با در نظر گرفتن عبارت دوم در (۸۰.۴) می توان نوشت

$$\begin{aligned} & \int_a^T \int_{\Omega} \lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{F}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \left(\gamma_1 {}^C D_t^{\alpha(\cdot,\cdot)} h(t, s) + \gamma_2 {}^C D_b^{\beta(\cdot,\cdot)} h(t, s) \right) d^n s dt \\ &= \gamma_1 \int_a^T \int_{\Omega} \lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{F}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) {}^C D_t^{\alpha(\cdot,\cdot)} h(t, s) d^n s dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \gamma_2 \left[\int_a^b \int_{\Omega} \lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{F}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) {}^C D_b^{\beta(\cdot,\cdot)} h(t, s) d^n s dt \right. \\ & \quad \left. - \int_T^b \int_{\Omega} \lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{F}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) {}^C D_b^{\beta(\cdot,\cdot)} h(t, s) d^n s dt \right] \end{aligned}$$

فرض کنید $\bar{\gamma} = (\gamma_2, \gamma_1)$ باشد. با انتگرال جزء به جزء (قضیه ۶.۱) و تا زمانی که برای هر $s \in \Omega$ حاصل $h(a, s) = h(b, s) = 0$ عبارت زیر را داریم

$$\begin{aligned} & \int_a^T \int_{\Omega} h(t, s) D_{\bar{\gamma}}^{\beta(\cdot,\cdot), \alpha(\cdot,\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{F}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \right) d^n s dt \\ & + \gamma_2 \int_a^b \int_{\Omega} h(t, s) \left[{}^C D_t^{\beta(\cdot,\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{F}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \right) \right. \\ & \quad \left. - {}^C D_t^{\beta(\cdot,\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{F}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \right) \right] d^n s dt \\ & + \int_{\Omega} h(t, s) \left[\gamma_1 {}^I_T^{1-\alpha(\cdot,\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{F}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \right) \right. \\ & \quad \left. - \gamma_2 {}^I_T^{1-\beta(\cdot,\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{F}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \right) d^n s \right]_{t=T}. \end{aligned}$$

به طور مشابه، برای $i+2$ امین رابطه در (۸۰.۴) که $i = 1, \dots, n$ است، با فرض $\bar{\gamma}^i = (\gamma_2^i, \gamma_1^i)$ و تا زمانی که برای هر $t \in [a, b]$ حاصل $h(t, a_i) = h(t, b_i) = 0$ است خواهیم داشت

$$\begin{aligned} & \int_a^T \int_{\Omega} \lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{F}+i} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \left(\gamma_1^i {}^C D_{a_i}^{\alpha_i(\cdot,\cdot)} h(t, s) + \gamma_2^i {}^C D_{b_i}^{\beta_i(\cdot,\cdot)} h(t, s) \right) d^n s dt \\ &= \int_a^T \int_{\Omega} h(t, s) D_{\bar{\gamma}^i}^{\beta_i(\cdot,\cdot), \alpha_i(\cdot,\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{F}+i} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \right) d^n s dt. \end{aligned}$$

با جایگذاری این روابط در (۸۰.۴)، نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} & \int_a^T \int_{\Omega} h(t, s) \left[\partial_{n+\mathfrak{z}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \lambda(t) + D_{\bar{\gamma}}^{\beta(\cdot,\cdot),\alpha(\cdot,\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{z}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \right) \right. \\ & + \sum_{i=1}^n D_{\bar{\gamma}^i}^{\beta_i(\cdot,\cdot),\alpha_i(\cdot,\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{z}+i} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \right) d^n s dt \\ & + \gamma_{\mathfrak{z}} \int_a^b \int_{\Omega} h(t, s) \left[{}_a D_t^{\beta(\cdot,\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{z}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \right) \right. \\ & \quad \left. - {}_T D_t^{\beta(\cdot,\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{z}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \right) \right] d^n s dt \\ & + \int_{\Omega} h(t, s) \left[\gamma_{\mathfrak{z}} I_T^{1-\alpha(\cdot,\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{z}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \right) \right. \\ & \quad \left. - \gamma_{\mathfrak{z}} I_T^{1-\beta(\cdot,\cdot)} \left(\lambda(t) \partial_{n+\mathfrak{z}} L[x, z]_{n,\gamma}^{\alpha,\beta}(t, s) \right) d^n s \right]_{t=T}. \end{aligned}$$

با انتخاب مناسب بر حسب h ، به معادلات اوایلر-لاگرانژ (۷۸.۴)–(۷۷.۴) و شرایط متقاطع (۷۹.۴) می‌رسیم. $\square$

۳.۷.۴ مثال‌ها

در اینجا به ارائه سه مثال با وابستگی و بدون وابستگی به z می‌پردازیم.

مثال ۱.۴. فرض کنید

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left({}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot,\cdot),\beta(\cdot,\cdot)} x(t) \right)^2 + z(t) + t^2 - 1, \quad t \in [0, 3] \\ x(0) &= 1, \quad z(0) = 0 \end{aligned} \quad (81.4)$$

در این حالت، $\lambda(t) = e(-t)$ است. شرایط لازم بهینگی (۷۲.۴)–(۷۱.۴) از قضیه‌ی ۵۷.۴ برای $\bar{x}(t) \equiv 1$ بدست می‌آید. اگر در رابطه‌ی (۸۱.۴)، $\bar{x}$ را با x جایگزین کنیم، داریم

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) - z(t) &= t^2 - 1, \quad t \in [0, 3], \\ z(0) &= 0, \end{aligned}$$

که جواب آن

$$z(t) = e(t) - (t+1)^2. \quad (82.4)$$

آخرین شرط متقاطع قضیه‌ی ۱۳.۴ بیان می‌کند که

$$L[\bar{x}, z]_{\gamma}^{\alpha,\beta}(T) = 0 \Leftrightarrow e(T) - 2T - 2 = 0,$$

که جواب آن تقریباً برابر $T \approx 1/67835$ است.

مثال ۲.۴. فرض کنید

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (t-1) \left(x^2(t) + z^2(t) + 1 \right), \quad t \in [0, 3], \\ x(0) &= 0, \quad z(0) = 0. \end{aligned} \quad (83.4)$$

تا زمانی که اولین معادله‌ی اویلر-لاگرانژ (۷۱.۴) بصورت

$$(t-1)x(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

است، مشاهده می‌کنیم $\bar{x}(t) \equiv 0$ یک جواب معادله است. شرط متقاطع دوم از قضیه‌ی ۷۳.۴ نیز ادعا می‌کند که در $t = T$ ، باید داشته باشیم

$$L[\bar{x}, z]_{\gamma}^{\alpha, \beta}(t) = 0,$$

یعنی

$$(t-1)(z^2(t)+1) = 0,$$

و بنابراین $T = 1$ یک جواب برای این معادله است. با جایگزینی x توسط $\bar{x}$ در رابطه‌ی (۸۳.۴)، داریم

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (t-1) \left(z^2(t) + 1 \right), \quad t \in [0, 3], \\ z(0) &= 0. \end{aligned}$$

جواب این مسئله‌ی کوشی، تابع

$$z(t) = \tan \left(\frac{t^2}{3} - t \right),$$

و کمترین مقدار آن برابر

$$z(1) = \tan \left(-\frac{1}{3} \right).$$

مثال ۳.۴. فرض کنید

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \left({}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot), \beta(\cdot)} x(t) - f(t) \right)^2 + t^2 - 1, \quad t \in [0, 3], \\ x(0) &= 0, \quad z(0) = 0, \end{aligned} \quad (84.4)$$

که

$$f(t) := \frac{t^{1-\alpha(t)}}{\Gamma(2-\alpha(t))} - \frac{(3-t)^{1-\beta(t)}}{\Gamma(2-\beta(t))}.$$

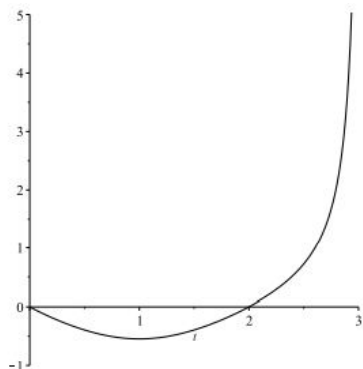
در این حالت، $\lambda(t) \equiv 1$ است. می‌خواهیم زوج مرتبی مانند (x, z) بیابیم که در تمام شرایط (۸۴.۴) صدق کند بطوری که $z(t)$ به کمترین مقدار برسد. به راحتی می‌توان فهمید که $\bar{x}(t) = t$ و $T = 1$ ، طبق قضیه‌ی ۱۳.۴ در شرایط لازم داده شده، صدق می‌کند. با جایگزینی x توسط $\bar{x}$ در رابطه‌ی (۸۴.۴)، به مسئله‌ی کوشی به شکل زیر می‌رسیم

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= t^2 - 1, \quad t \in [0, 3], \\ z(0) &= 0, \end{aligned}$$

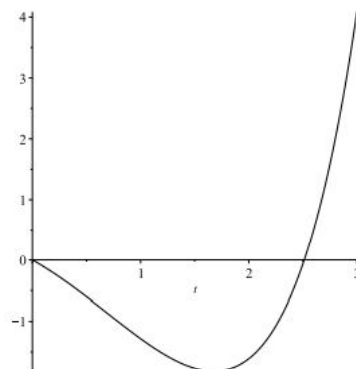
که جواب آن بصورت زیر است

$$z(t) = \frac{t^3}{3} - t.$$

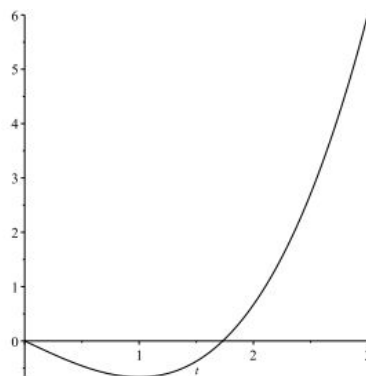
توجه داشته باشید که این تابع در $T = 1$ به مینیمم مقدار می‌رسد، که در آن $z(1) = -2/3$ است. (نمودار ۱.۴ (ج) را مشاهده کنید).



(ب) اکسترمال z از مثال ۲.۴.



(آ) اکسترمال z از مثال ۱.۴.



(ج) اکسترمال z از مثال ۳.۴.
شکل ۱.۴: نمودارهای تابع $z(\bar{x}, t)$.

فصل ۵

سیستم های زمان-گسسته از مرتبه‌ی متغیر کسری

۱.۵ معرفی

بررسی حرکت ها برای حالتی که مرتبه‌ی کسری در طول زمان متغیر است، بسیار پیچیده تر از حالت مرتبه‌ی ثابت است. تعاریف مختلفی از مشتقات مرتبه متغیر با رفتارهای متفاوت وجود دارد. [۴۱] در این فصل، سیستم های فضا-حالت مرتبه متغیر کسری بر مبنای انواع مختلف تفاضلات مرتبه متغیر، بررسی شده اند. برای چنین سیستم هایی شرایط کافی و ضروری برای دسترسی پذیری و مشاهده پذیری، ارائه و اثبات شده اند. همچنین شرایط کافی برای کنترل پذیری ارائه خواهد شد. نتایج بدست آمده، تاثیر مرتبه‌ی زمان-متغیر روی ویژگی های سیستم را نمایان می کند. این فصل به شکل زیر سازماندهی شده است. در بخش ۲.۵، تعاریف مربوط به انواع مختلف مرتبه‌ی کسری ثابت و مرتبه‌ی کسری متغیر ارائه شده اند. در بخش ۳.۵، سیستم های فضا-حالت مرتبه متغیر کسری گسسته‌ی عمومی (GDFVOSS)^۱ برای انواع مختلف تعاریف تفاضل مرتبه متغیر، مرور و فرم کلی راه حل این سیستم ها نیز ارائه شده اند. بخش ۴.۵، تعریف دسترسی پذیری و شرط کافی و ضروری برای GDFVOSS ارائه می شود. بخش ۵.۵، به تعریف و ذکر شرایط کافی برای کنترل پذیری GDFVOSS می پردازد. در بخش ۶.۵، تعاریف و شرایط مشاهده پذیری GDFVOSS معرفی می شود و در پایان، در بخش ۷.۵، مثال های عددی ارائه شده اند. قضایا و تعاریف زیر همگی در [۳۷] موجود و در دسترس اند.

¹General Discrete Fractional Variable Order State-space Systems

۲.۵ تفاضلات مرتبه متغیر کسری

تعریف زیر، نقطه‌ی آغاز تعمیم عملگرهای تفاضل مرتبه کسری ثابت به حالت مرتبه متغیر است. یک نمونه از عملگر تفاضل مرتبه کسری ثابت بصورت زیر تعریف شده است

$${}_0\Delta_k^\alpha x_k \equiv \sum_{j=0}^k \omega(\alpha, j) x_{k-j}, \quad (1.5)$$

که

$$\omega(\alpha, j) = \frac{1}{h^\alpha} (-1)^j \binom{\alpha}{j}, \quad (2.5)$$

و

$$\binom{\alpha}{j} \equiv \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!} & j > 0. \end{cases}$$

تعاریف مربوط به حالت مرتبه متغیر که در زیر نمایش داده می‌شوند، رفتار متفاوتی دارند، همچنین تمام تعاریف مربوط به مرتبه ثابت، با تعریف ۱.۵ معادل هستند. اولین تعریف برگرفته از جایگذاری مرتبه‌ی ثابت α توسط مرتبه‌ی متغیر α_k است.

تعریف ۱.۵. نوع A از تفاضل مرتبه متغیر کسری به صورت زیر است

$${}_0^A\Delta_k^{\alpha_k} x_k \equiv \sum_{j=0}^k {}^A\omega(\alpha(\cdot), k, j) x_{k-j}, \quad (3.5)$$

که

$${}^A\omega(\alpha(\cdot), k, j) = \frac{(-1)^j}{h^{\alpha_k}} \binom{\alpha_k}{j}.$$

تعریف دوم فرض می‌کند که ضرایب در نمونه های قبل، برای مرتبه ای که در آن مثال ها ارائه شده بود، بدست آمده اند. این تعریف معادل با تعریف ارائه شده در [۳۸] است.

تعریف ۲.۵. نوع B از تفاضل مرتبه متغیر کسری به صورت زیر است

$${}_0^B\Delta_k^{\alpha_k} x_k \equiv \sum_{j=0}^k {}^B\omega(\alpha(\cdot), k, j) x_{k-j}, \quad (4.5)$$

که

$${}^B\omega(\alpha(\cdot), k, j) = \frac{(-1)^j}{h^{\alpha_{k-j}}} \binom{\alpha_{k-j}}{j}.$$

تعریف سوم کمتر شهودی است، و فرض می‌کند که ضرایب مدل جدید برحسب مرتبه های قبلی بدست آمده اند.

تعریف ۳.۵. نوع $\mathcal{C}$ از تفاضل مرتبه متغیر کسری به صورت زیر است

$${}_{\circ}^{\mathcal{C}} \Delta_k^{\alpha_k} x_k \equiv \sum_{j=\circ}^k \mathcal{A}_{\omega}(\alpha(\cdot), k, j) x_{k-j}, \quad (5.5)$$

که

$${}^{\mathcal{C}} \omega(\alpha(\cdot), k, j) = \frac{(-1)^j}{h^{\alpha_j}} \binom{\alpha_j}{j}. \quad (6.5)$$

ما در کنار تعاریف تکراری قبل، از تعریف های تفاضل مرتبه متغیر از نوع بازگشتی ذیل استفاده می کنیم.

تعریف ۴.۵. نوع $\mathcal{D}$ از تفاضل مرتبه متغیر کسری به صورت زیر است

$${}_{\circ}^{\mathcal{D}} \Delta_k^{\alpha_k} x_k \equiv \frac{x_k}{h^{\alpha_k}} - \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{-\alpha_k}{j} {}^{\mathcal{D}} \Delta^{\alpha_{k-j}} x_{k-j}. \quad (7.5)$$

با استفاده از نمایش ماتریس (۷.۵)، تفاضل نوع $\mathcal{D}$ در فرم بازگشتی ارائه شده ی (۷.۵) را می توان به فرم تکراری زیر نوشت:

$${}_{\circ}^{\mathcal{D}} \Delta_k^{\alpha_k} x_k \equiv \sum_{j=\circ}^k {}^{\mathcal{D}} \omega(\alpha(\cdot), k, j) x_{k-j}, \quad (8.5)$$

که

$${}^{\mathcal{D}} \omega(\alpha(\cdot), k, j) = \begin{cases} {}^{\mathcal{D}} q_k ({}^{\mathcal{D}} \omega(\alpha(\cdot), \circ, j-k) \\ \dots, {}^{\mathcal{D}} \omega(\alpha(\cdot), k-1, j-1))^T & j > \circ, \\ h^{-\alpha_k} & j = \circ, \\ \circ & j < \circ, \end{cases}$$

و برای $r = 1, \dots, k$

$${}^{\mathcal{D}} q_r = \left(-{}^{\mathcal{D}} v_{-\alpha_r, r}, \dots, -{}^{\mathcal{D}} v_{-\alpha_r, 1} \right) \in \mathbb{R}^{1 \times r},$$

که برای $s = 1, \dots, r$

$${}^{\mathcal{D}} v_{-\alpha_r, s} = (-1)^s \binom{-\alpha_r}{s}. \quad (9.5)$$

تعریف ۵.۵. نوع $\mathcal{E}$ از تفاضل مرتبه متغیر کسری به صورت زیر است

$${}_{\circ}^{\mathcal{E}} \Delta^{\alpha_1} x_k = \frac{x_k}{h^{\alpha_k}} - \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{-\alpha_{k-j}}{j} \frac{h^{\alpha_{k-j}}}{h^{\alpha_k}} {}_{\circ}^{\mathcal{E}} \Delta^{\alpha_{k-j}} x_{k-j}. \quad (10.5)$$

با استفاده از نمایش ماتریس (۱۰.۵)، تفاضل نوع $\mathcal{D}$ در فرم بازگشتی ارائه شده ی (۱۰.۵) را می توان به فرم تکراری زیر نوشت:

$${}^{\varepsilon}_{\circ} \Delta_k^{\alpha_k} x_k = \sum_{j=\circ}^k {}^{\varepsilon} \omega(\alpha(\cdot), k, j) x_{k-j}, \quad (11.5)$$

که

$${}^{\varepsilon} \omega(\alpha(\cdot), k, j) = \begin{cases} {}^{\varepsilon} q_k ({}^{\varepsilon} \omega(\alpha(\cdot), \circ, j-k) \\ \dots, {}^{\varepsilon} \omega(\alpha(\cdot), k-1, j-1)){}^T & j > \circ, \\ h^{-\alpha_k} & j = \circ, \\ \circ & j < \circ, \end{cases}$$

و برای $r = 1, \dots, k$

$${}^{\varepsilon} q_r = \left(-{}^{\varepsilon} v_{-\alpha_{\circ}, r}, \dots, -{}^{\varepsilon} v_{-\alpha_{r-1}, 1} \right) \in \mathbb{R}^{1 \times r},$$

که برای $s = 1, \dots, r$

$${}^{\varepsilon} v_{-\alpha_{r-s}, s} = (-1)^s \binom{-\alpha_{r-s}}{s} \frac{h^{\alpha_{r-s}}}{h^{-\alpha_r}}. \quad (12.5)$$

برای سادگی و کوتاهی در نمادگذاری، پنج تعریف تفاضلات مرتبه متغیر کسری را به فرم واحد با پارامتر $\mathbb{T}$ برای $\mathbb{T} \in (A, B, C, D, E)$ ، داریم

$${}^{\mathbb{T}}_{\circ} \Delta_k^{\alpha_k} x_k = \sum_{j=\circ}^k {}^{\mathbb{T}} \omega(\alpha(\cdot), k, j) x_{k-j}, \quad (13.5)$$

تذکر ۱۰.۵. برای هر $\mathbb{T}$ ، هر $j = \circ$ و i داریم

$$\left({}^{\mathbb{T}} \omega(\alpha(\cdot), i, \circ) \right)^{-1} = {}^{\mathbb{T}} \omega(-\alpha(\cdot), i, \circ).$$

۳.۵ سیستم های فضا-حالت مرتبه متغیر کسری گسسته

در این بخش، به معرفی سیستم زیر در حالت کلی، برای تفاضل مرتبه متغیر کسری یکسان شده توسط (۱۳.۵) می پردازیم.

تعریف ۶.۵. سیستم مرتبه متغیر کسری گسسته ی خطی عمومی در نمایش فضا-حالت (GDFVOSS)، برای انواع مختلف تعاریف تفاضل مرتبه متغیر کسری، بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} {}^{\mathbb{T}}_{\circ} \Delta_{k+1}^{\alpha_{k+1}} x_{k+1} &= A x_k + B u_k \\ x_{k+1} &= \omega(-\alpha(\cdot), k+1, \circ) {}^{\mathbb{T}}_{\circ} \Delta_{k+1}^{\alpha_{k+1}} x_{k+1} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k+1} {}^{\mathbb{T}} \omega(-\alpha(\cdot), k+1, \circ) {}^{\mathbb{T}} \omega(\alpha(\cdot), k+1, j) x_{k-j+1} \end{aligned} \quad (14.5)$$

$$y_k = Cx_k$$

که $\mathbb{T} \in (A, B, C, D, \mathcal{E})$ نوع تعریف استفاده شده است. در بالا، بردار فضا حالت $x_k \in \mathbb{R}^n$ ، بردار ورودی $u_k \in \mathbb{R}^m$ ، بردار خروجی $y_k \in \mathbb{R}^p$ ، و $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ، $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ است. سیستم (۱۴.۵) را می توان به فرم زیر نوشت

$$x_{k+1} = \tilde{A}x_k + \tilde{B}u_k - \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{T} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, j) x_{k-j+1} \quad (15.5)$$

$$y_k = Cx_k$$

که

$$\tilde{A} = \mathbb{T} \omega(-\alpha(\cdot), k+1, \circ) A \quad (16.5)$$

و

$$\tilde{B} = \mathbb{T} \omega(-\alpha(\cdot), k+1, \circ) B \quad (17.5)$$

و

$$\mathbb{T} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, j) = \mathbb{T} \omega(-\alpha(\cdot), k+1, \circ) \mathbb{T} \omega(\alpha(\cdot), k+1, j). \quad (18.5)$$

تذکره ۲.۵. ماتریس های $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ از سیستم (۱۵.۵)، که به ترتیب توسط (۱۶.۵) و (۱۷.۵) ارائه شده اند، ممکن است وابسته به زمان باشند. آنها تنها برای $\mathbb{T} = C$ ثابت هستند، چون طبق (۶.۵)، ضریب $\omega(-\alpha(\cdot), k+1, \circ)$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ ثابت است.

تذکره ۳.۵. برای تفاضلات بازگشتی نوع $\mathbb{T}$ (برای حالتی که $\mathbb{T}$ ، برابر D ، $\mathcal{E}$ ، باشد)، می توان سیستم (۱۴.۵) را به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \Delta_{k+1}^{\alpha_{k+1}} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ x_{k+1} &= h^{\alpha_{k+1}} \mathbb{T} \Delta_{k+1}^{\alpha_{k+1}} x_{k+1} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{T} \tilde{\omega} h^{\alpha_{k+1}} \mathbb{T} \Delta_{k+1-j}^{\alpha_{k+1-j}} x_{k-j+1} \\ y_k &= Cx_k, \end{aligned}$$

که

$$\mathbb{T} \tilde{\omega} = \begin{cases} (-1)^j \binom{-\alpha_{k+1}}{j} & \mathbb{T} = D \text{ برای} \\ (-1)^j \binom{-\alpha_{k+1-j}}{j} \frac{h^{\alpha_{k+1-j}}}{h^{\alpha_{k+1}}} & \mathbb{T} = \mathcal{E} \text{ برای} \end{cases}$$

قضیه ۱.۵. راه حل $GDFVOSS$ ارائه شده توسط (۱۴.۵) بصورت زیر است

$$x_k = \mathbb{T} \Phi(k) x_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \mathbb{T} \Phi(k, k-j-1) \tilde{B} u_j, \quad (19.5)$$

که ماتریس انتقال تک پارامتری بصورت

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\Phi(k+1) &= (\tilde{A} - I^{\mathbb{T}} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, 1)) \mathbb{T}\Phi(k) \\ &\quad - \sum_{j=2}^{k+1} \mathbb{T}\tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, j) \mathbb{T}\Phi(k+1-j), \end{aligned} \quad (20.5)$$

بطوریکه $\mathbb{T}\Phi(\circ) = I$ ، و ماتریس انتقال دو پارامتری

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\Phi(k, l) &= (\tilde{A} - I^{\mathbb{T}} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k, 1)) \mathbb{T}\Phi(k-1, l-1) \\ &\quad - \sum_{j=2}^l \mathbb{T}\tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k, j) \mathbb{T}\Phi(k-j, l-j), \quad \text{برای } l > k \end{aligned} \quad (21.5)$$

که برای هر $l < \circ$ داریم $\mathbb{T}\Phi(k, \circ) = I$ ، و $\mathbb{T}\Phi(k, l) = \circ$.

تذکره ۴.۵. تا زمانی که $\mathbb{T}\Phi(k, l) = \circ$ برای هر $l < \circ$ برقرار باشد، ماتریس انتقال دو-پارامتری (۲۱.۵)، را می توان بصورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \mathbb{T}\Phi(k, l) &= (\tilde{A} - I^{\mathbb{T}} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k, 1)) \mathbb{T}\Phi(k-1, l-1) \\ &\quad - \sum_{j=2}^{k+1} \mathbb{T}\tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k, j) \mathbb{T}\Phi(k-j, l-j). \end{aligned} \quad (22.5)$$

اثبات. می خواهیم نشان دهیم که (۱۹.۵) در (۱۴.۵) صدق می کند بطوری که می توان به صورت (۱۵.۵) بازنویسی کرد، یعنی

$$x_{k+1} = \tilde{A}x_k - \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{T}\tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, j)x_{k-j+1} + \tilde{B}u_k. \quad (23.5)$$

با بررسی رابطه ی (۱۹.۵) در $k+1$ داریم

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathbb{T}\Phi(k+1)x_{\circ} + \sum_{j=\circ}^k \mathbb{T}\Phi(k+1, k-j)\tilde{B}u_j \\ &= \mathbb{T}\Phi(k+1)x_{\circ} + \sum_{j=\circ}^{k-1} \mathbb{T}\Phi(k+1, k-j)\tilde{B}u_j + \tilde{B}u_k \end{aligned} \quad (24.5)$$

با جایگذاری (۲۰.۵) و (۲۲.۵) در رابطه ی (۲۴.۵) داریم

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \left(\tilde{A} - I^{\mathbb{T}} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, 1) \right) \mathbb{T}\Phi(k)x_{\circ} + \tilde{B}u_k \\ &\quad - \sum_{j=2}^{k+1} \mathbb{T}\tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, j) \mathbb{T}\Phi(k+1-j)x_{\circ} \\ &\quad + \sum_{j=\circ}^{k-1} (\tilde{A} - I^{\mathbb{T}} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, 1)) \mathbb{T}\Phi(k, k-j-1)\tilde{B}u_j \\ &\quad - \sum_{j=\circ}^{k-1} \sum_{i=2}^{k+1} \mathbb{T}\tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, i) \mathbb{T}\Phi(k+1-i, k-j-i)\tilde{B}u_j. \end{aligned}$$

پس از مرتب سازی عبارات

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & \left(\tilde{A} - I^{\mathbb{T}} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, 1) \right) \\ & \times \underbrace{\left(\mathbb{T} \Phi(k) x_{\circ} + \sum_{j=\circ}^{k-1} \mathbb{T} \Phi(k, k-j-1) \tilde{B} u_j \right)}_{x_k} \\ & + \tilde{B} u_k - \sum_{j=1}^{k+1} \mathbb{T} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, j) \mathbb{T} \Phi(k+1-j) x_{\circ} \\ & - \sum_{i=1}^{k+1} \mathbb{T} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, i) \sum_{j=\circ}^{k-1} \mathbb{T} \Phi(k+1-i, k-j-i) \tilde{B} u_j \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & \left(\tilde{A} - I^{\mathbb{T}} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, 1) \right) x_k + \tilde{B} u_k \\ & - \sum_{m=1}^{k+1} \mathbb{T} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, m) \mathbb{T} \Phi(k+1-m) x_{\circ} \\ & - \sum_{m=1}^{k+1} \mathbb{T} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, m) \\ & \times \sum_{j=\circ}^{k-1} \mathbb{T} \Phi(k+1-m, k-j-m) \tilde{B} u_j \end{aligned}$$

خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x_{k+1} = & \left(\tilde{A} - I^{\mathbb{T}} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, 1) \right) x_k + \tilde{B} u_k \\ & - \sum_{m=1}^{k+1} \mathbb{T} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, m) \\ & \times \underbrace{\left(\mathbb{T} \Phi(k+1-m) x_{\circ} + \sum_{j=\circ}^{k-1} \mathbb{T} \Phi(k+1-m, k-j-m) \tilde{B} u_j \right)}_{x_{k+1-m}}. \end{aligned}$$

سرانجام،

$$x_{k+1} = \tilde{A} x_k - \sum_{m=1}^{k+1} \mathbb{T} \tilde{\omega}(\alpha(\cdot), k+1, m) x_{k+1-m} + \tilde{B} u_k,$$

□

که با (۲۳.۵) متناسب است و اثبات پایان می یابد.

تذکر ۵.۵. برای مرتبه ی ثابت α ، هر $\mathbb{T} \in \{A, B, C, D, E\}$ ، و ضرایب $\mathbb{T} \tilde{\omega}(\alpha, i, j)$ به i وابسته نیستند، یعنی

$$\mathbb{T} \tilde{\omega}(\alpha, i, j) \equiv \tilde{\omega}(\alpha, j), \quad i = \circ, 1, \dots,$$

که $\tilde{\omega}(\alpha, j) = h^{\alpha} \omega(\alpha, j)$ و $\omega(\alpha, j)$ توسط (۲.۵) داده شده اند.

تذکر ۶.۵. برای مرتبه‌ی ثابت α ، $GDFVOSS$ فرم سنتی سیستم زمان-گسسته‌ی مرتبه ثابت کسری را می‌گیرد

$$\begin{aligned}\Delta_{k+1}^\alpha x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k \\ x_{k+1} &= h^\alpha \circ \Delta_{k+1}^\alpha x_{k+1} - h^\alpha \sum_{j=1}^{k+1} \omega(\alpha, j) x_{k-j+1} \\ y_k &= Cx_k,\end{aligned}$$

یا، فرم معادل آن یعنی

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= \tilde{A}x_k + \tilde{B}u_k - h^\alpha \sum_{j=1}^{k+1} \omega(\alpha, j) x_{k-j+1} \\ y_k &= Cx_k,\end{aligned}$$

که

$$\tilde{A} = h^\alpha A, \quad \tilde{B} = h^\alpha B,$$

زیرا ${}^{\mathbb{T}}\tilde{\omega}(-\alpha, \circ) = h^\alpha$ است.

تذکر ۷.۵. برای مرتبه‌ی ثابت α ، ماتریس انتقال دو-پارامتری (۲۱.۵) به ماتریس انتقال تک پارامتری ساده می‌شود، یعنی

$$\Phi(l) = (\tilde{A} - I\tilde{\omega}(\alpha, 1)) {}^{\mathbb{T}}\Phi(l-1) - \sum_{j=2}^l \tilde{\omega}(\alpha, j)\Phi(l-j),$$

یا

$$\Phi(l+1) = (A - I\tilde{\omega}(\alpha, 1))\Phi(l) - \sum_{j=2}^{l+1} \tilde{\omega}(\alpha, j)\Phi(l-j+1).$$

بنابراین، راه حل سیستم (۱۴.۵) برای ثابت α بصورت

$$x_k = \Phi(k)x_\circ + \sum_{j=\circ}^{k-1} \Phi(k-j-1)\tilde{B}u_j, \quad (25.5)$$

که ماتریس انتقال l -پارامتری به فرم

$$\Phi(k+1) = (\tilde{A} - I\tilde{\omega}(\alpha, 1))\Phi(k) - \sum_{j=2}^{k+1} \tilde{\omega}(\alpha, j)\Phi(k+1-j), \quad (26.5)$$

به طوری که $\Phi(\circ) = I$ است.

۴.۵ دسترس پذیری

تعریف دسترس پذیری برای GDFVOSS معادل با تعریف دسترس پذیری کلاسیک است.

تعریف ۷.۵. گوییم GDFVOSS دسترس پذیر است، اگر برای حالت پایانی دلخواه $x_f \in \mathbb{R}^n$ ، عددی مانند $q \in \mathbb{N}$ و دنباله‌ی ورودی $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$ ، موجود باشد، بطوری که سیستم را از حالت آغازین $x_0 = 0$ به حالت پایانی مطلوب $x_q = x_f$ برساند.

قضیه ۲.۵. شرایط ذیل معادل با شرایط GDFVOSS ارائه شده در (۱۴.۵) است:

۱. GDFVOSS دسترس پذیر باشد؛

۲. ماتریس دسترس پذیر S با مرتبه‌ی کامل n باشد، یعنی

$$\text{rank } S = \text{rank} \left(B, {}^{\mathbb{T}}\Phi(n, 1)B, \dots, {}^{\mathbb{T}}\Phi(n, n-1)B \right) = n$$

. که ${}^{\mathbb{T}}\Phi(n, l), l = 0, \dots, n-1$ ، ماتریس انتقال ارائه شده توسط (۲۱.۵) است؛

۳. ماتریس دسترس پذیر S_I از مرتبه‌ی کامل n باشد، یعنی

$$\text{rank } S_I = \text{rank}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n$$

اثبات. (۲) $\Rightarrow$ (۱) با استفاده از راه حل (۱۹.۵) از سیستم (۱۴.۵) برای شرایط آغازین $x_0 = 0$ و حالت پایانی x_n ، رابطه‌ی زیر میان دنباله‌ی کنترل و حالت پایانی بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} x_n &= \sum_{j=0}^{n-1} {}^{\mathbb{T}}\Phi(n, n-j-1) \tilde{B} u_j \\ &= \left(\tilde{B}, {}^{\mathbb{T}}\Phi(n, 1)\tilde{B}, \dots, {}^{\mathbb{T}}\Phi(n, n-1)\tilde{B} \right) \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (27.5)$$

تا زمانی که سیستم (۱۴.۵)، دسترس پذیر و رابطه‌ی میان دنباله‌ی پایانی و حالت پایانی توسط (۲۷.۵) داده شده باشد، هر عنصر x_n از تمام $\mathbb{R}^n$ را می‌توان با استفاده از دنباله‌ی مقادیر-کنترل $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ بدست آورد، اگر $\text{Im } S = \mathbb{R}^n$ باشد، که نشان می‌دهد $\text{rank } S = n$. (۳) $\Rightarrow$ (۲) ماتریس انتقال ${}^{\mathbb{T}}\Phi(n, l), l = 0, \dots, n-1$ ، را می‌توان بصورت چندجمله‌ای از ماتریس A نوشت

$${}^{\mathbb{T}}\Phi(n, l) = f_{l,l}A^l + f_{l,l-1}A^{l-1} + \dots + f_{l,1}A + f_{l,0}I,$$

که $f_{l,j}, j = 0, \dots, l-1$ ، ضرایب مناسب بدست آمده از (۲۱.۵) می‌باشند. بنابراین،

$$\begin{aligned} S &= \left(B, (f_{1,1}A + f_{1,0}I)B, (f_{2,2}A^2 + f_{2,1}A + f_{2,0}I)B, \dots, \right. \\ &\quad \left. (f_{n-1,n-1}A^{n-1} + f_{n-1,n-2}A^{n-2} + \dots + f_{n-1,1}A + f_{n-1,0}I)B \right). \end{aligned} \quad (28.5)$$

عناصر ماتریس (۲۸.۵) را می توان از ماتریس زیر، با عملیات ماتریس عنصری روی ستون ها، بدست آورد

$$(B, AB, A^2 B, \dots, A^{n-1} B)$$

تا زمانی که عملیات ماتریس عنصری، مرتبه ی ماتریس را تغییر ندهد، داریم $\text{rank } S_I = \text{rank } S$.

(۱) $\Rightarrow$ (۳) از رابطه ی (۲۷.۵) می توان برای $x_n \in \mathbb{R}^n$ دلخواه، دنباله ی $\{u_0, u_1, \dots, u_{n-1}\}$ را محاسبه کرد، اگر فقط $\text{rank } S_I = n$ باشد. تا زمانی که $\text{Im } S_I = \text{Im } S = \mathbb{R}^n$ ، نشان می دهد که $\text{rank } S_I = n$.

□

تذکره ۸.۵. شرط کالمن (۳) در قضیه ی (۲.۵) معادل با شرط معروف هاتس است.

۵.۵ کنترل پذیری

تعریف کنترل پذیری برای GDFVOSS برابر با تعریف کنترل پذیری کلاسیک است.

تعریف ۸.۵. گوئیم GDFVOSS کنترل پذیر است، اگر عددی مانند $q \in \mathbb{N}$ و دنباله ی ورودی $\{u_0, u_1, \dots, u_{q-1}\}$ موجود باشد، به طوری که سیستم را از حالت آغازین دلخواه $x_0 \in \mathbb{R}^n$ به حالت پایانی مطلوب $x_q = 0$ برساند.

قضیه ۳.۵. GDFVOSS ارائه شده در (۱۴.۵) کنترل پذیر است (در n گام) اگر در شرط زیر صدق کند:

$$\text{rank } S = \text{rank } (B, {}^T\Phi(n, 1)B, \dots, {}^T\Phi(n, n-1)B) = n,$$

که ${}^T\Phi(n, l), l = 0, \dots, n-1$ ماتریس انتقال ارائه شده در (۲۱.۵) است، و S ماتریس کنترل پذیر است.

اثبات. پاسخ سیستم ارائه شده توسط (۱۹.۵) برای شرایط پایانی $x_n = 0$ فرم زیر را دارد

$$\begin{aligned} 0 &= {}^T\Phi(n)x_0 + \sum_{j=0}^{n-1} {}^T\Phi(n, n-j-1)\tilde{B}u_j \\ &= {}^T\Phi(n)x_0 + (\tilde{B}, {}^T\Phi(n, 1)\tilde{B}, \dots, {}^T\Phi(n, n-1)\tilde{B}) \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

که می توان بصورت زیر نوشت

$${}^T\Phi(n)x_0 = -(\tilde{B}, {}^T\Phi(n, 1)\tilde{B}, \dots, {}^T\Phi(n, n-1)\tilde{B}) \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ u_{n-2} \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

بطوری که مجموعه‌ی n معادله با n مجهول u_j که $j = 0, \dots, n-1$ تشکیل می‌شود. پاسخ مجموعه‌ی معادلات موجود است اگر شرط ارائه شده در قضیه‌ی (۳.۵) صدق کند. $\square$

در حالت کلی، فقط شرط ارائه شده در قضیه‌ی (۳.۵) کافی است. هر چند، اگر ماتریس $\mathbb{T}\Phi(n) = 0$ باشد، لذا با استفاده از دنباله‌ی ورودی $u_0, u_1, \dots, u_{n-1} = 0$ سیستم را می‌توان به حالت پایانی صفر انتقال داد. مشابه قضیه‌ی (۲.۵)، شرط ارائه شده در قضیه‌ی (۳.۵) را می‌توان بصورت زیر ساده کرد:

قضیه ۴.۵. $GDFVOSS$ کنترل پذیر است اگر در شرط زیر صدق کند:

$$\text{rank } S_I = \text{rank} \begin{pmatrix} B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B \end{pmatrix} = n$$

که S_I ماتریس کنترل پذیر در فرم معادل است.

اثبات. مشابه اثبات قضیه‌ی (۲.۵)، ثابت می‌شود. $\square$

۶.۵ مشاهده پذیری

تعریف مشاهده پذیری ذیل در پایان استفاده خواهد شد.

تعریف ۹.۵. $GDFVOSS$ ارائه شده در (۱۴.۵) روی بازه‌ی $[0, k_f]$ مشاهده پذیر است اگر $x_0 \in \mathbb{R}^n$ را بتوان از معلومات y_k و u_k برای $k \in [0, k_f]$ محاسبه کرد.

شرط ضروری و کافی برای مشاهده پذیری $GDFVOSS$ ، به فرم زیر ارائه شده است.

قضیه ۵.۵. $GDFVOSS$ ارائه شده در (۱۴.۵) مشاهده پذیر است اگر و تنها اگر شرط زیر برآورده شود:

$$\text{rank } \mathcal{O} = \text{rank} \begin{pmatrix} C \\ C^T \Phi(1) \\ C^T \Phi(2) \\ \vdots \\ C^T \Phi(n-1) \end{pmatrix} = n,$$

که n تعداد معادلات حالت، $\mathbb{T}\Phi(j)$ ، $j = 0, \dots, n-1$ ، ماتریس انتقال ارائه شده در (۲۰.۵) است، و $\mathcal{O}$ ماتریس مشاهده پذیری است.

اثبات. راه حل $GDFVOSS$ ارائه شده در (۱۹.۵) را در معادله‌ی خروجی (۱۴.۵) برای $n-1$ گام

اول، جایگذاری می‌کنیم. این کار مجموعه معادلاتی با مجهول x_0 ایجاد می‌کند:

$$\begin{aligned} y_0 &= Cx_0 \\ y_1 &= C^T \Phi(1)x_0 + C^T \Phi(1,0)\tilde{B}u_0 \\ y_2 &= C^T \Phi(2)x_0 + C^T \Phi(2,1)\tilde{B}u_0 + C^T \Phi(2,0)\tilde{B}u_1 \\ &\vdots \\ y_{n-1} &= C^T \Phi(n-1)x_0 + C \sum_{j=0}^{n-2} \Phi(n-1, n-j-2)\tilde{B}u_j. \end{aligned}$$

این مجموعه معادلات را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{pmatrix} C \\ C^T \Phi(1) \\ C^T \Phi(2) \\ \vdots \\ C^T \Phi(n-1) \end{pmatrix} x_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} - O_{\text{obs}} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix},$$

که

$$O_{\text{obs}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ C^T \Phi(1,0)\tilde{B} & 0 & \dots & 0 \\ C^T \Phi(2,1)\tilde{B} & C^T \Phi(2,0)\tilde{B} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C^T \Phi(n-1, n-2)\tilde{B} & C^T \Phi(n-1, n-3)\tilde{B} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

مجموعه معادلات فوق دارای جواب است اگر و تنها اگر شرط ارائه شده در قضیه (۵.۵) را برآورده کند. $\square$

این شرط را می‌توان به فرم ساده تری مشابه شرایط کنترل پذیری (دسترس پذیری) بازنویسی کرد.

قضیه ۶.۵. *GDFVOSS* ارائه شده در (۱۴.۵) مشاهده پذیر است (در n گام) اگر و تنها اگر شرط زیر را برآورده کند:

$$\text{rank } \mathcal{O}_I = \text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n, \quad (29.5)$$

که n تعداد معادلات حالت، و $\mathcal{O}_I$ ماتریس مشاهده پذیر در فرم معادل است.

اثبات. با استفاده از آرگومان های مشابه در قضیه ی (۵.۵)، شرط زیر بدست می آید:

$$\begin{pmatrix} C \\ C(f_{1,1} + If_{1,0}) \\ C(f_{2,2}A^2 + f_{2,1}A + f_{2,0}I) \\ \vdots \\ C(f_{n-1,n-1}A^{n-1} + f_{n-1,n-2}A^{n-2} + \dots + f_{n-1,1}A + f_{n-1,0}I) \end{pmatrix} = n.$$

درایه های این ماتریس را می توان با انجام عملیات ماتریس مقدماتی روی سطر های ماتریس زیر، بدست آورد.

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

عملیات ماتریس مقدماتی، مرتبه ی ماتریس ها را تغییر نمی دهد، لذا شرط ارائه شده در قضیه ی (۶.۵) معادل با شرط قضیه ی (۵.۵) است. $\square$

۷.۵ مثال های عددی

اکنون می خواهیم نتایج ارائه شده را، توسط مثال های سیستم زیر بر پایه ی تفاضلات مرتبه ی کسری متغیر از نوع A با گام زمانی $h = 1$ بدست آوریم. برای سادگی بیان، تغییر پذیری مرتبه را فقط میان سه مقدار متفاوت، محدود می کنیم.

مثال ۱.۵. در این مثال، کنترل پذیری (دسترس پذیری) سیستم داده شده در (۱۴.۵) را بررسی می کنیم:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = 0/6, \alpha_3 = 0/7$$

. هنگامی که $n = 3$ است، با استفاده از قضیه ی (۳.۵)، باید ماتریس های انتقال ${}^A\Phi(3, 1)$ ، ${}^A\Phi(3, 2)$ را محاسبه کرد. بنابراین،

$$\begin{aligned} {}^A\Phi(3, 1) &= A - I {}^A\omega(\alpha(\cdot), 3, 1) = A + I \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0/7 & 0 & 1 \\ 1 & 0/7 & 1 \\ 0 & 1 & 1/7 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 {}^A\Phi(3, 2) &= (A - I {}^A\omega(\alpha(\cdot), 3, 1)) {}^A\Phi(2, 1) - I {}^A\omega(\alpha(\cdot), 3, 2) \\
 &= (A + I \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ 1 \end{pmatrix})(A + I \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix}) - I \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0.525 & 1 & 2/3 \\ 1/3 & 1.525 & 3/3 \\ 1 & 2/3 & 3.825 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

ماتریس کنترل پذیری (مشاهده پذیری) فرم زیر را دارد:

$$S = (B, {}^A\Phi(3, 1)B, {}^A\Phi(3, 2)B) = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 & 0.525 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

و لذا، هنگامی که $\text{rank } S = 3$ ، سیستم کنترل پذیر و دسترس پذیر است. می‌خواهیم ویژگی‌های آن را با استفاده از شرط ارائه شده در قضیه‌ی (۴.۵) بررسی کنیم:

$$\text{rank } S_I = \text{rank} \begin{pmatrix} B, AB, A^2B \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

با استفاده از شرط قضیه‌ی (۴.۵)، مشابه نتیجه‌ی ارائه شده در قضیه (۳.۵) به دست می‌آید. (اگرچه فرم معادل ماتریس کنترل پذیری، با ماتریس کنترل پذیر اصلی یکسان نیست).

مثال ۲.۵. در این مثال بررسی می‌کنیم سیستم (۱۴.۵) کنترل پذیر است یا نه:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1, 0, 0), \quad \alpha_1 = 0.5, \quad \alpha_2 = 0.6$$

با استفاده از شرط قضیه‌ی (۵.۵)، نتیجه می‌گیریم که باید ماتریس‌های انتقال ${}^A\Phi(1)$ و ${}^A\Phi(2)$ را محاسبه کنیم، که

$$\begin{aligned}
 {}^A\Phi(1) &= A - I {}^A\omega(\alpha(\cdot), 1, 1) = A + I \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 1 \\ 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}^A\Phi(2) &= (A - I {}^A\omega(\alpha(\cdot), 2, 1)) {}^A\Phi(1) - I {}^A\omega(\alpha(\cdot), 2, 2) \\
&= (A + I \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 1 \end{pmatrix})(A + I \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 1 \end{pmatrix}) - I \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0/42 & 1 & 2/1 \\ 1/1 & 1/42 & 3/1 \\ 1 & 2/1 & 3/52 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

ماتریس مشاهده پذیر، فرم زیر را دارد

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ C {}^A\Phi(1) \\ C {}^A\Phi(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0/5 & 0 & 1 \\ 0/42 & 1 & 2/1 \end{pmatrix},$$

بنابراین تا وقتی که $\text{rank } \mathcal{O} = 3$ ، سیستم مشاهده پذیر است. مشاهده پذیری با استفاده از شرط ارائه شده در قضیه (۶.۵) بررسی شده است:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

که نتیجه‌ی مشابه ارائه شده در قضیه (۵.۵) را نمایش می‌دهد (اگرچه فرم معادل ماتریس مشاهده پذیر، با ماتریس مشاهده پذیر اصلی یکسان نیست).

۸.۵ پیشنهادات

به عنوان پیشنهاد، می‌توان موارد زیر را برای کارهای آتی مورد بررسی قرار داد:

۱. پایداری سیستم‌های زمان-گسسته کسری از مرتبه متغیر
۲. محاسبه‌ی کنترلگر پایداری سیستم‌های زمان-گسسته کسری از مرتبه متغیر
۳. محاسبه‌ی کنترلگر سیستم‌های زمان-گسسته کسری از مرتبه متغیر با تاخیر زمانی
۴. محاسبه‌ی کنترلگر سیستم‌های زمان-گسسته کسری
۵. محاسبه کنترلگر سیستم‌های توسعه یافته‌ی زمان-گسسته کسری از مرتبه متغیر

مراجع

- [1] Abel NH. (1823) ”**Solution de quelques probl‘emes ‘a l’aide d’int‘egrales d’efinies**”. Mag. Naturv. 1(2):1–127
- [2] Agrawal OP. , (2010) ” **Generalized variational problems and Euler-Lagrange equations** ”. Comput. Math. Appl. 59(5):1852–1864
- [3] Almeida R. (2016) ”**Fractional variational problems depending on indefinite integrals and with delay**”. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 39(4):1515–1528 arXiv:1512.06752
- [4] Almeida R. , Malinowska AB. (2013), ” **Fractional variational principle of Herglotz** ”.,Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 19(8):2367–2381
- [5] Almeida R. Tavares D. and Torres D. F. M. (2019) ”**The variable-order fractional calculus of variations**”. SpringerBriefs in Applied Sciences and Technology, Springer, Cham, arXiv:1805.00720v2 [math.OC] 17 Jun 2018.
- [6] Almeida R. Poosch S. Torres DFM. , (2015) ”Computational Methods in the Fractional Calculus of Variations”. Imperial College Press, London
- [7] Caputo M. (1967) ” **Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent** ” –II. Geophys. J. R. Astr. Soc. 13:529–539
- [8] Caputo MC. Torres DFM. (2015) ”**Duality for the left and right fractional derivatives**”. Signal Process. 107:265–271 arXiv:1409.5319
- [9] Chechkin AV. Gorenflo R. Sokolov IM. (2005) ”**Fractional diffusion in inhomogeneous**” media. J. Phys. A: Math. Theor. 38(42):L679–L684
- [10] Chiang AC. (1992) ”**Elements of Dynamic Optimization**”. McGraw-Hill, Inc., Singapore
- [11] Daftardar–Gejji V. Sukale Y. Bhalekar S (2015) ”**Solving fractional delay differential equations**”: *A new approach*. Fract. Calc. Appl. Anal. 16:400–418
- [12] Diethelm K. (2004) ”**The Analysis of Fractional Differential Equations**”. Lecture Notes in Mathematics 2004, Springer, Berlin

- [13] Driscoll TA. , Hale N. , Trefethen LN. (2014) *Chebfun Guide*. Pafnuty Publications, Oxford
- [14] Fraser C. (1992) "**Isoperimetric problems in variational calculus of Euler and Lagrange**". *Historia Mathematica* 19:4–23
- [15] Fu Z-J. Chen W. Yang H-T. (2013) "**Boundary particle method for Laplace transformed time fractional diffusion equations**". *J. Comput. Phys.* 235:52– 66
- [16] Guenther RB. Gottsch JA. Kramer DB (1996) "**The Herglotz algorithm for constructing canonical transformations**". *SIAM Rev.* 38(2):287–293
- [17] Herglotz G. (1930) "**Ber"uhungstransformationen** ", Lectures at the University of G"ottingen, G"ottingen
- [18] Kilbas AA. Srivastava HM. Trujillo JJ. (2006) "**Theory and Applications of Fractional Differential Equations**". Elsevier, Amsterdam
- [19] Linge S, Langtangen HP (2016) "**Programming for Computations— MATLAB/Octave**". *A Gentle Introduction to Numerical Simulations with MATLAB/Octave*. Springer, Cham
- [20] Lin Y. Xu C. (2007) "**Finite difference/spectral approximations for the timefractional diffusion equation**". *J. Comput. Phys.* 225(2):1533–1552
- [21] Lorenzo C. and Hartley T. (2002), "**Variable order and distributed order fractional operators**", *Nonlinear Dynamics*. 29(1–4), 57–98.
- [22] Machado JAT. (2011) **Time-delay and fractional derivatives**. *Adv. Difference Equ.* Vol 2011:934094, 12 pp
- [23] Mainardi F. (2010) "**Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity**". Imp. Coll. Press, London
- [24] Malinowska AB. Odziejewicz T. Torres DFM. ,(2015), "**Advanced Methods in the Fractional Calculus of Variations**", Springer Briefs in Applied Sciences and Technology, Springer, Cham
- [25] Malinowska AB. Torres DFM. (2011) "**Fractional calculus of variations for a combined Caputo derivative**". *Fract. Calc. Appl. Anal.* 14(4):523–537 arXiv:1109.4664
- [26] Malinowska AB. Torres DFM. (2010) "**Fractional variational calculus in terms of a combined Caputo derivative**". *Proceedings of FDA'10, The 4th IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its Applications*, Badajoz, Spain, October 18–20, 2010 (Eds: I. Podlubny, B. M. Vinagre Jara, YQ. Chen, V. Feliu Batlle, I. Tejado Balsara):Article no. FDA10-084, 6 pp. arXiv:1007.0743

-
- [27] Malinowska AB. Torres DFM. (2012a) **"Introduction to the Fractional Calculus of Variations"**. Imp. Coll. Press, London
- [28] Odziejewicz T. Malinowska AB. Torres DFM. (2012a), **"Fractional calculus of variations in terms of a generalized fractional integral with applications to physics"**. Abstr. Appl. Anal. 2012:Art. ID 871912, 24 pp arXiv:1203.1961
- [29] Odziejewicz T. Malinowska AB. Torres DFM. (2012b), **"Fractional variational calculus with classical and combined Caputo derivatives"**, *Nonlinear Anal.* 75(3):1507–1515 arXiv:1101.2932
- [30] Odziejewicz T. , Malinowska AB. , Torres DFM. (2013b) **Noether's theorem for fractional variational problems of variable order**. Cent. Eur. J. Phys. 11(6):691–701 arXiv:1303.4075
- [31] Odibat Z, Momani S (2009) **"The variational iteration method: an efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics"**. Comput. Math. Appl. 58(11-12):2199–2208
- [32] Oldham KB. Spanier J. (1974), **"The Fractional Calculus"**, Academic Press, NewYork
- [33] Podlubny I. (1999) **"Fractional Differential Equations"**. Academic Press, San Diego, CA
- [34] Riewe F. (1996) **"Nonconservative Lagrangian and Hamiltonian mechanics"**. Phys. Rev. E (3) 53(2):1890–1899
- [35] Ross B. (1977) **"The development of fractional calculus"** 1695-1900, *Historia Mathematica* 4:75–89
- [36] Samko SG. Ross B. (1993), **"Integration and differentiation to a variable fractional order"** *Integral Transform, Spec. Funct.* 1(4):277–300
- [37] Sierociuk D. (2012), **"System properties of fractional variable order discrete state-space system"**. In Ivo Petráš, Igor Podlubny, Karol Kostúr, Ján Kacur, Andrea Mojžišová (Ed.) ~ Proceedings of the 13th International Carpathian Control Conference (ICCC), High Tatras, Slovakia, (pp. 643–648).
- [38] Sierociuk D., Malesza, W., Macias, M. (2015b). **"Derivation, interpretation, and analog modelling of fractional variable order derivative definition"**. *Applied Mathematical Modelling*. 39(13), 3876–3888
- [39] Sun HG. Chen W. Chen YQ (2009) **"Variable order fractional differential operators in anomalous diffusion modeling"**. Physica A. 388(21):4586–4592

-
- [40] Tavares D. Almeida R. Torres DFM. (2015), "**Optimality conditions for fractional variational problems with dependence on a combined Caputo derivative of variable order**". Optimization 64(6):1381–1391 arXiv:1501.02082
 - [41] Valerio, D. , da Costa J. S. (2011). "**Variable-order fractional derivatives and their numerical approximations**". *Signal Processing*. 91(3, SI), 470– 483
 - [42] van Brunt B. (2004) "**The Calculus of Variations**". Universitext, Springer, New York
 - [43] Wang H. Yu Y. Wen G. Zhang S. (2015), "**Stability analysis of fractional order neural networks with time delay** ", Neural Process. Lett. 42(2):479–500
 - [44] Wiktor Malesza J.M. and Dominik Sierociuk (2017), "**Fractional variable order discrete-time systems, their solutions and properties**" *International Journal of Systems Science*. DOI: 10.1080/00207721.2017.1365969

پیوست آ

کدهای MATLAB

در این پیوست، به منظور یافتن تعدادی از تقریب‌های محاسباتی برای عملگرهای کسری اساسی در این پایان‌نامه، از نرم‌افزار مخصوص MATLAB، پکیج **Chebfun** استفاده کرده‌ایم.

Chebfun یک پکیج نرم‌افزاری متن‌باز^۱ است که می‌تواند محاسبات عددی با توابع را در MATLAB ایجاد کند.

Chebfun بار اضافی عملیات گسسته‌ی MATLAB برای ماتریسها را به عملیات پیوسته‌ی قابل مقایسه برای توابع و عملگرها مبدل می‌کند. برای اطمینان ریاضی دانان از **Chebfun** خواننده را به [۱۳] ارجاع می‌دهیم.

پیرو آنچه گفتیم، به مطالعه‌ی تعدادی از تقریب‌های محاسباتی انتگرال‌های کسری ریمن-لیوویل، مشتقات کسری کاپوتو و همچنین ترکیب مشتق کسری کاپوتو که همگی از مرتبه‌ی متغیر هستند، می‌پردازیم. در ضمن کد ضروری **Chebfun** برای حساب کسری مرتبه متغیر نیز ارائه شده است.

برای تکمیل شدن عملگرها، نیاز به دو تابع کمکی داریم: تابع گاما Γ (تعریف ۱.۱) و تابع بتا B (تعریف ۳.۱). هر دو تابع در MATLAB با دستورهای $\gamma(t)$ و $\beta(t, u)$ قابل دسترس هستند.

^۱open source

۱.۲ انتگرال های کسریِ ریمن-لیوویل از مرتبه بالاتر

در این بخش، از دیدگاه محاسباتی راجع به انتگرال های کسریِ ریمن-لیوویل مرتبه متغیر ${}_a I_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$ و ${}_t I_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$ از مراتب بالاتر بحث می کنیم. ما در **Chebfun**، با در نظر گرفتن تعریف ۳.۴ از انتگرال های کسریِ ریمن-لیوویل مرتبه بالاتر، دو تابع `leftFI(x, alpha, a)` و `rightFI(x, alpha, b)` که به ترتیب انتگرال های کسریِ ریمن-لیوویل ${}_a I_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$ و ${}_t I_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$ را تقریب می زنند، با کد **Chebfun/MATLAB** بصورت زیر اجرا می کنیم.

```
function r = leftFI(x, alpha, a)
g = @(t, tau)x(tau)./(gamma(alpha(t, tau)).*(t - tau).^(1 - alpha(t, tau)))
r = @(t)sum(chebfun(@(tau)g(t, tau), [at], splitting, on), [at]);
```

9

```
function r = leftFI(x, alpha, a)
g = @(t, tau)x(tau)./(gamma(alpha(t, tau)).*(t - tau).^(1 - alpha(t, tau)))
r = @(t)sum(chebfun(@(tau)g(t, tau), [at], splitting, on), [at]);
```

کاربرد این دو تابع را در مثال زیر روشن می کنیم که در آن تقریب های محاسباتی برای انتگرال های کسریِ ریمن-لیوویل از تابع قدرت خاص را بدست آورده ایم.

مثال ۱.۲. فرض کنید $\alpha(t, \tau) = \frac{t^2 + \tau^2}{4}$ و $x(t) = t^2$ با $t \in [0, 1]$ باشد. در این حالت که $a = 0, b = 1$ و $n = 1$ است، داریم ${}_0 I_{0/6}^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(0/6) \approx 0/2661$ و ${}_0 I_{0/6}^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(0/6) \approx 0/4619$ که کد آن در **MATLAB** با توابع **Chebfun** بصورت زیر است:

```
a = 0; b = 1; n = 1;
alpha = @(t, tau)(t.^2 + tau.^2)/4;
x = chebfun(@(t)t.^2, [0, 1]);
LFI = leftFI(x, alpha, a);
RFI = rightFI(x, alpha, b);
LFI(0/6)
ans = 0/2661
RFI(0/6)
ans = 0/4619
```

سایر مقادیر برای ${}_a I_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$ و ${}_t I_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$ در نمودار شکل ۱.۲ ارائه شده است.

۲.آ مشتقات کسری کاپوتو از مرتبه بالاتر

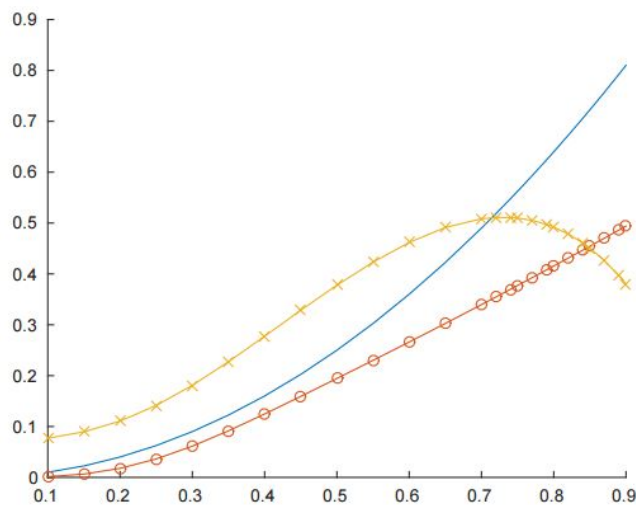
در این بخش، با در نظر گرفتن تعریف ۵.۴ به معرفی دو تابع جدید $\text{leftFI}(x, \alpha, a)$ و $\text{rightFI}(x, \alpha, b)$ که به ترتیب مشتقات کسری کاپوتوی مرتبه متغیر از مراتب بالاتر ${}_a^C D_t^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$ و ${}_t^C D_b^{\alpha_n(\cdot, \cdot)} x(t)$ را تقریب می‌زند، می‌پردازیم. کد عملگر چپ رابطه‌ی ۲.۴ بصورت زیر است:

```
function r = leftCaputo(x, alpha, a, n)
dx = diff(x, n);
g = @(t, tau) dx(tau) ./ (gamma(n - alpha(t, tau)) .
*(t - tau).^(1 + alpha(t, tau) - n));
r = @(t) sum(chebfun(@(tau) g(t, tau), [at], splitting, on), [at]);
end
```

بطور مشابه، عملگر راست ۳.۴ به کمک **Chebfun** در **MATLAB** به صورت زیر است:

```
function r = rightCaputo(x, alpha, b, n)
dx = diff(x, n);
g = @(t, tau) dx(tau) ./ (gamma(n - alpha(tau, t)) .
*(tau - t).^(1 + alpha(tau, t) - n));
r = @(t) (-1).^n * sum(chebfun(@(tau) g(t, tau), [tb],
splitting, on), [tb]);
end
```

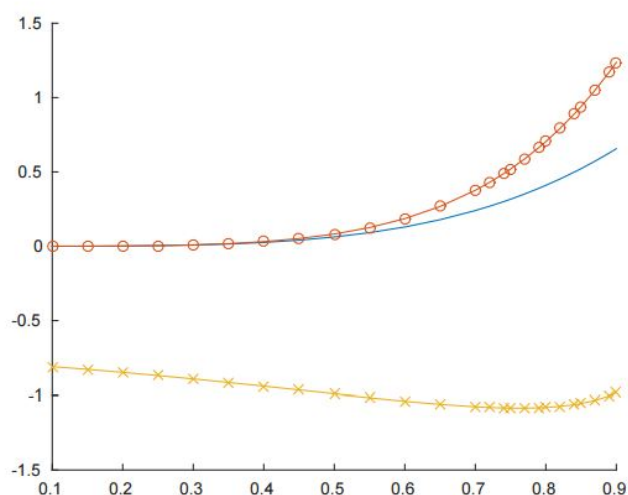
در واقع ما برای محاسبه تقریب مشتقات کسری کاپوتو از تابع قدرت به فرم $x(t) = t^r$ ، از دو تابع leftCaputo و rightCaputo استفاده کردیم.



شکل ۱.۱: انتگرال های کسری ریمن-لیوویل از مثال ۱.۱:
 $x(t) = t^2$ با نمودار پیوسته، انتگرال چپ ${}_a I_t^{\alpha(\cdot,\cdot)} x(t)$ با حالت "o" و انتگرال راست ${}_t I_b^{\alpha(\cdot,\cdot)} x(t)$ با حالت "x" را نشان می‌دهد.

مثال ۲.۱. فرض کنید $\alpha(t, \tau) = \frac{t^\tau}{\tau}$ و $x(t) = t^4$ با $t \in [0, 1]$ باشد. در این حالت $a = 0$ ، $b = 1$ و $n = 1$ است. مقادیر ${}_a^C D_{0.6}^{\alpha(\cdot,\cdot)} x(0.6) \approx 0.1857$ و ${}_b^C D_{0.6}^{\alpha(\cdot,\cdot)} x(0.6) \approx -1.0385$ از MATLAB به کمک توابع داده شده در Chebfun بدست آمده اند و کدنویسی آنها بصورت زیر است:

```
a = 0; b = 1; n = 1;
alpha = @(t, tau) t.^2/2;
x = chebfun(@(t) t.^4, [ab]);
LC = leftCaputo(x, alpha, a, n);
RC = rightCaputo(x, alpha, b, n);
LC(0.6)
ans = 0.1857
RC(0.6)
ans = -1.0385
```

شکل ۲.آ: مشتقات کسری کاپوتو از مثال ۲.آ:

با $x(t) = t^4$ نمودار پیوسته، مشتق چپ ${}_a^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} x(t)$ با حالت "−" و مشتق راست ${}_b^{\alpha(\cdot, \cdot)} D_t x(t)$ با حالت "×−"

مثال ۳.آ. در مثال ۲.آ از چندجمله ای $x(t) = t^4$ استفاده کردیم. نکته قابل اهمیت این است که **Chebfun** برای توابعی که چندجمله ای نیستند، کارایی بهتری دارد. برای مثال، فرض کنید $x(t) = \exp^t$ باشد. در اینصورت تنها کافی است، عبارت

```
x = chebfun(@(t)t.^4, [ab]);
```

در مثال ۲.آ را توسط

```
x = chebfun(@(t)exp(t), [ab]);
```

جایگزین کنیم تا داشته باشیم

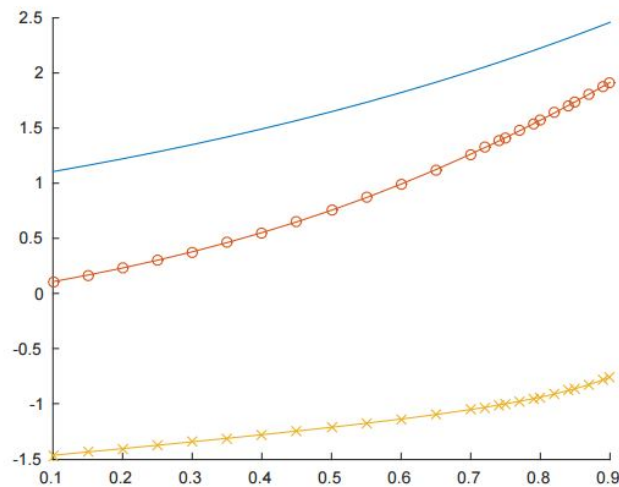
```
LC(0/6)
```

```
ans = 0/9917
```

```
RC(0/6)
```

```
ans = −1/1398
```

سایر مقادیر ${}_a^C D_t^{\alpha(\cdot, \cdot)} x(t)$ و ${}_b^{\alpha(\cdot, \cdot)} D_t x(t)$ در نمودار ۳.آ را نمایش داده شده است.



شکل ۳.آ: مشتقات کسری کاپوتو از مثال ۳.آ:
 $x(t) = e^t$ با نمودار پیوسته، مشتق چپ ${}_a^C D_t^{\alpha(\cdot,\cdot)} x(t)$ با حالت "o" و مشتق راست ${}_t D_b^{\alpha(\cdot,\cdot)} x(t)$ با حالت "x" را نشان می‌دهد.

به کمک لم ۱.۴ در بخش ۱.۴، بصورت تحلیلی می‌توان به مشتق کسری چپ کاپوتو با مرتبه بالا از تابع قدرت به فرم $x(t) = t^\gamma$ دست یافت. این کار به ما این اجازه را می‌دهد تا کارایی تقریب محاسباتی مان را مشاهده کنیم که همان، سودمندی چندجمله‌ای الحاقی در نقاط چبیشف در حساب کسری مرتبه متغیر است. در لم ۱.۴، فرض می‌کنیم که مرتبه کسری وابسته به متغیر اول است: یعنی $\alpha_n(t, \tau) := \bar{\alpha}_n(t)$ که $\bar{\alpha}_n : [a, b] \rightarrow (n-1, n)$ تابع داده شده است.

مثال ۴.آ. در مثال ۲.آ با انتخاب $\alpha(t, \tau) = \frac{t^2}{4}$ و $x(t) = t^4$ که $t \in [0, 1]$ است. جدول ۴.آ شامل مقادیر تقریبی بدست آمده توسط تابع `leftCaputo(x, alpha, a, n)` از **Chebfun**، و همچنین شامل مقادیر دقیق محاسبه شده با فرمول های داده شده در لم ۱.۴ می‌باشد. این جدول با کد **MATLAB** زیر بدست آمده است:

```
formatlong
a = 0; b = 1; n = 1;
alpha = @(t, tau) t.^2/2;
x = chebfun(@(t) t.^4, [ab]);
exact = @(t) (gamma(5)./gamma(5 - alpha(t))). * t.^(4 - alpha(t));
approximation = leftCaputo(x, alpha, a, n);
```

```
for i = 1 : 9

    t = 0/1 * i;

    E = exact(t);

    A = approximation(t);

    error = E - A;

    [tEAerror]

end
```

t	Exact Value	Approximation	Error
0.1	1.019223177296953e-04	1.019223177296974e-04	-2.046431600566390e-18
0.2	0.001702793965464	0.001702793965464	-2.168404344971009e-18
0.3	0.009148530806348	0.009148530806348	3.469446951953614e-18
0.4	0.031052290994593	0.031052290994592	9.089951014118469e-16
0.5	0.082132144921157	0.082132144921157	6.522560269672795e-16
0.6	0.185651036003120	0.185651036003112	7.938094626069869e-15
0.7	0.376408251363662	0.376408251357416	6.246059225389899e-12
0.8	0.704111480975332	0.704111480816562	1.587694420379648e-10
0.9	1.236753486749357	1.236753486514274	2.350835082154390e-10

شکل ۴.آ: مقادیر دقیق بدست آمده از لم ۱.۴ برای توابع مثال ۴.آ و تقریب های محاسباتی بدست آمده از کد **Chebfun**

۳.آ مشتق کاپوتوی کسری مرکب از مرتبه بالا

مشتق کسری مرکب کاپوتو از مرتبه بالاتر توسط ترکیب مشتقات کسری چپ و راست کاپوتو ایجاد می شود، یعنی ما از توابع $\text{leftCaputo}(x, \alpha, a, n)$ و $\text{rightCaputo}(x, \alpha, b, n)$ که قبلا در پیوست آ با کد محاسباتی **Chebfun** برای مشتق کاپوتوی کسری مرکب از مراتب بالاتر تعریف کردیم، استفاده می کنیم:

```
function r = combinedCaputo(x, alpha, beta, gamma1, gamma2, a, b, n)

    lc = leftCaputo(x, alpha, a, n);

    rc = rightCaputo(x, beta, b, n);

    r = @(t) gamma1 .* lc(t) + gamma2 .* rc(t);

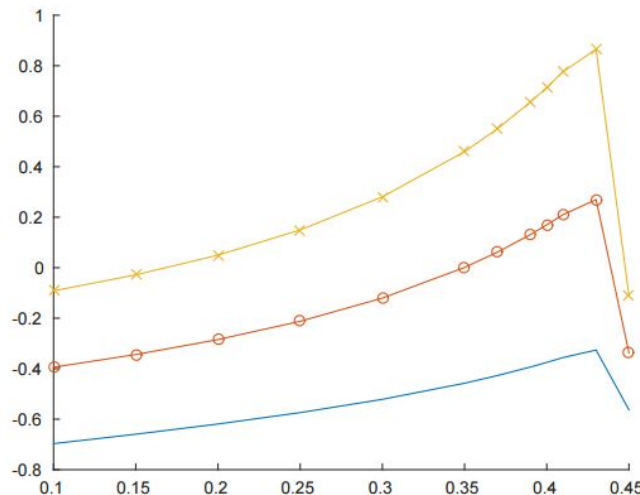
end
```

سپس با استفاده از **MATLAB**، رفتار مشتق کسری کاپوتوی مرکب از مرتبه متغیر را برای مقادیر مختلف در بازه $t \in (0, 1)$ مشخص می کنیم.

مثال ۵.آ. فرض کنید $\alpha(t, \tau) = \frac{t^2 + \tau^2}{4}$ ، $\beta(t, \tau) = \frac{t + \tau}{3}$ و $x(t) = t$ که $t \in [0, 1]$ باشد. آنگاه $a = 0$ ، $b = 1$ و $n = 1$ است. همچنین برای $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (0/8, 0/2)$ داریم ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(0/4) \approx 0/7144$.

```
a = 0; b = 1; n = 1;
alpha = @(t, tau)(t.^2 + tau.^2)/4;
beta = @(t, tau)(t + tau)/3;
x = chebfun(@(t)t, [0 1]);
gamma1 = 0/8;
gamma2 = 0/2;
CC = combinedCaputo(x, alpha, beta, gamma1, gamma2, a, b, n);
CC(0/4)
ans = 0/7144
```

برای بررسی سایر مقادیر ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(t)$ و همچنین مقادیر مختلف در بازه‌ی $t \in (0, 1)$ و $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ شکل ۵.آ و جدول زیر را مشاهده کنید.



شکل ۵.آ: مشتق کسری مرکب کاپوتو ${}^C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot, \cdot), \beta(\cdot, \cdot)} x(t)$ برای $\alpha(\cdot, \cdot)$ ، $\beta(\cdot, \cdot)$ و $x(t)$ از مثال ۵.آ: خط پیوسته برای $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (0/2, 0/8)$ ، حالت "−" برای $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (0/5, 0/5)$ و حالت "×" برای $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (0/8, 0/2)$

t	حالت ۱	حالت ۲	حالت ۳
۰/۴۵۰۰	-۰/۵۶۳۰	-۰/۳۳۷۱	-۰/۱۱۱۲
۰/۵۰۰۰	-۷۹۰/۴۹۷۲	-۱/۹۷۵۲e + ۰۳	-۳/۱۵۹۹e + ۰۳
۰/۵۵۰۰	-۳/۵۷۳۸e + ۰۶	-۸/۹۳۴۵e + ۰۶	-۱/۴۲۹۵e + ۰۷
۰/۶۰۰۰	-۲/۰۰۸۱e + ۱۰	-۵/۰۲۰۱e + ۱۰	-۸/۰۳۲۲e + ۱۰
۰/۶۵۰۰	۲/۸۴۶۴e + ۱۴	۷/۱۱۶۰e + ۱۴	۱/۱۳۸۶e + ۱۵
۰/۷۰۰۰	۴/۸۴۹۴e + ۱۹	۱/۲۱۲۴e + ۲۰	۱/۹۳۹۸e + ۲۰
۰/۷۵۰۰	۳/۸۰۰۶e + ۲۴	۹/۵۰۱۵e + ۲۴	۱/۵۲۰۲e + ۲۵
۰/۸۰۰۰	-۱/۳۶۴۸e + ۳۰	-۳/۴۱۱۹e + ۳۰	-۵/۴۵۹۱e + ۳۰
۰/۸۵۰۰	-۱/۶۹۱۲e + ۳۶	-۴/۲۲۸۰e + ۳۶	-۶/۷۶۴۸e + ۳۶
۰/۹۰۰۰	۵/۵۵۷۸e + ۴۱	۱/۳۸۹۵e + ۴۲	۲/۲۲۳۱e + ۴۲
۰/۹۵۰۰	۱/۵۲۵۸e + ۴۹	۳/۸۱۴۵e + ۴۹	۶/۱۰۳۳e + ۴۹
۰/۹۹۰۰	۱/۸۱۵۸e + ۵۴	۴/۵۳۹۴e + ۵۴	۷/۲۶۳۱e + ۵۴

جدول ۱.آ: مشتق کسری مرکب کاپوتو ${}_C D_{\gamma}^{\alpha(\cdot,\cdot),\beta(\cdot,\cdot)} x(t)$ برای $\alpha(\cdot,\cdot)$ ، $\beta(\cdot,\cdot)$ و $x(t)$ از مثال ۵.آ.
 حالت ۱: $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (۰/۲, ۰/۸)$ ؛ حالت ۲: $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (۰/۵, ۰/۵)$ ؛ و حالت ۳: $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) = (۰/۸, ۰/۲)$.

Aabstract

In this thesis, fractional variable order discrete state-space systems based on different definitions of fractional variable order difference are investigated. The general solution of these systems is derived. Moreover, necessary and sufficient conditions for reachability and observability are given and proven. The sufficient conditions for controllability are proposed too. Before this, in previous chapters, we intends to deepen the study of the fractional calculus, giving special emphasis to variable-order operators. The fractional variational calculus is a recent mathematical field that consists in minimizing or maximizing functionals that depend on fractional operators (integrals or/and derivatives). In Chapter 1, we start with a brief overview about fractional calculus and an introduction to the theory of some special functions in fractional calculus. Chapter 2 presents a short introduction to the classical calculus of variations and review different variational problems, like the isoperimetric problems or problems with variable endpoints. In the end of this chapter, we introduce the theory of the fractional calculus of variations and some fractional variational problems with variable-order. In Chapter 3, considering three types of fractional Caputo derivatives of variable-order, we present new approximation formulas for those fractional derivatives and prove upper bound formulas for the errors. In Chapter 4, we introduce the combined Caputo fractional derivative of variable-order and corresponding higher-order operators. Some properties are also given. Then, we prove fractional Euler–Lagrange equations for several types of fractional problems of the calculus of variations, with or without constraints. In last chapter, we study fractional variable order discrete state-space systems based on different definitions of fractional variable order difference.

Keywords: calculus of variation, Necessary optimality conditions, Fractional variable order, Controllability, Reachability, Observability, Isoperimetric problems.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Numerical Analysis

**Investigation on some of the
continuous-time and discrete-time variable
order fractional problems**

By: Danial arab yarmohamady

Supervisor

Dr. Hojat Ahsani Tehrani

November 2020