

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد آنالیز عددی

روش های موجک - گالرکین برای معادلات سهموی نیمه خطی با نویز

نگارنده: ایمان وحدتی

استاد راهنما

دکتر علی مس فروش

مهر ۱۳۹۹

سپاس‌گزاری...

سپاس بی‌کران، پروردگار یکتا را که هستی‌مان بخشید و به طریق علم و دانش، رهنمونمان شد و به هم‌نشینی رهروان علم و دانش، مفتخرمان نمود و خوشه‌چینی از علم و معرفت را روزیمان ساخت.

از پدر و مادر عزیز و مهربانم که در تمام مراحل زندگی، یار و پشتیبانم بوده‌اند، بی‌نهایت سپاس‌گزارم و نتیجه اولین تلاش زندگیم را تقدیم مهربانیشان می‌کنم. برخود لازم می‌دانم که تشکر قلبی و لسانی خود را از استاد عالی‌قدر، جناب آقای دکتر علی مس‌فروش که زحمت راهنمایی این پایان‌نامه را عهده‌دار گردیدند و در تمامی مراحل انجام پایان‌نامه از راهنمایی‌های مدبرانه ایشان استفاده نمودم، ابراز دارم و توفیقات روزافزون ایشان را توأم با صحت و سعادت، خواستارم.

ایمان وحدتی
مهر ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب ایمان وحدتی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **روش های موجک- گالرکین برای معادلات سهموی نیمه خطی با نویز**، تحت راهنمایی **علی مس فروش** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

ایمان وحدتی

مهر ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه، معادله انتقال گرمای تصادفی را که با نویز، دچار اختلال شده است را در نظر می گیریم. بعد از گسسته سازی زمانی با روش اویلر، معادله به یک معادله ی تصادفی خطی و یک معادله ی تکاملی تصادفی غیرخطی تقسیم می شود. معادله ی تصادفی خطی با یک روش موجک- گالرکین غیرقابل تطبیق، گسسته شده است. در ابتدا، این معادله حل شده و جواب حاصل، در معادله ی تکاملی تصادفی غیرخطی جایگذاری شده، که با یک روش موجک تطبیقی حل شده است. سپس میانگین مربعات را برای خطای کلی ارایه می دهیم.

کلمات کلیدی: روش موجک- گالرکین، مساله سهموی نیمه خطی، حرکت براونی، فرآیند وینر، نیم گروه تحلیلی، فضای سوبولوف، عملگر کوواریانس، نرم هیلبرت- اشمیت، عملگر رده اثر، روش روته، فضای چند تفکیکی، توابع مقیاس.

فهرست مطالب

ک	فهرست تصاویر	
۱	مقدمه	۱
۱	۱.۱ تاریخچه	۱
۱	۲.۱ اهداف	۱
۲	۳.۱ تعاریف اولیه	۲
۴	۴.۱ مسائل نیمه خطی	۴
۵	۵.۱ معادلات سهموی	۵
۵	۱.۵.۱ معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی	۵
۶	۶.۱ معادلات سهموی نیمه خطی	۶
۶	۷.۱ حرکت براونی	۶
۶	۱.۷.۱ خواص حرکت براونی	۶
۹	۲.۷.۱ خواص مسیرهای حرکت براونی	۹
۹	۳.۷.۱ نمودارهایی از بعضی توابع حرکت براونی	۹
۱۲	۸.۱ نیم گروه تحلیلی	۱۲
۱۳	۹.۱ عملگرهای کوواریانس	۱۳
۱۴	۱۰.۱ نرم های هیلبرت-اشمیت	۱۴
۱۴	۱۱.۱ عملگرهای رده اثر	۱۴
۱۵	۱۲.۱ روش روته	۱۵
۱۶	۱۳.۱ معادلات سهموی نیمه خطی همراه با اختلال	۱۶
۲۳	۲ تقریب موجک	۲۳
۲۳	۱.۲ توابع مقیاس	۲۳
۲۴	۲.۲ ساختار موجک ها	۲۴
۲۷	۳ روش های موجک تطبیقی، برای مسایل متغیر غیر خطی	۲۷

۳۵	۴	آنالیز خطا برای پیچش تصادفی
۴۱	۵	گسسته‌سازی زمانی محض
۴۷	۱.۵	بررسی خطا برای مسایل تصادفی غیرخطی
۴۹	۶	نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۵۱		مراجع

فهرست تصاویر

۸		۱.۱	چهار مسیر از حرکت براونی $B(t)$.
۱۰		۲.۱	نویز و توابعی از حرکت بروانی.
۱۱		۳.۱	نویز و توابعی از حرکت بروانی.

فصل ۱

مقدمه

۱.۱ تاریخچه

در سال ۲۰۰۴، آقای آلبرت کوهن و همکاران، روش‌های عددی را برای مسائل معرفی و بررسی کردند که اساس آن، گسسته‌سازی تطبیقی موجک- گالرکین می‌باشد [۲۸]. در سال ۲۰۱۲، آقای استیگ لارسون و همکاران، یک بدنه (چهارچوب) را برای بررسی خطای طرح‌های تقریبی کاملاً گسسته، برای معادلات خطی تکاملی با نویز ارایه دادند [۲۹]. در سال ۲۰۱۵، آقای راب استیونسون و همکاران، یک برنامه موجک تطبیقی برای حل کردن فرمول‌های کوچکترین مربعات سیستم‌های مرتبه اول ارایه دادند [۳۰].

۲.۱ اهداف

اساس کار روشی عددی برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل جزئی، حذف کامل معادلات دیفرانسیل یا ساده‌سازی آنها به معادلات دیفرانسیل معمولی، که با روش‌های عددی مانند اویلر حل می‌شوند، می‌باشد.

در حل معادلات دیفرانسیل جزئی، مساله مهم این است که معادله دیفرانسیل به معادله‌ای ساده که از نظر عددی پایدار است، ختم شود. به این معنا که خطا در داده‌های اولیه و در هنگام حل، به اندازه‌ای نباشد که به نتایج نامفهوم تبدیل شود.

روش‌هایی با مزایا و معایب مختلف برای این کار وجود دارد که روش‌های عناصر متناهی، یکی از بهترین آنهاست. این روش در حل معادلات دیفرانسیل جزئی روی دامنه‌های پیچیده یا هنگامی که دامنه متغیر است یا وقتی که دقت بالا در همه جای دامنه الزامی نیست بسیار مفید می‌باشد.

روش گالرکین، یکی از روش‌های عناصر متناهی است که در آن به دنبال یافتن تقریبی برای جواب می‌باشد، به‌طوری‌که دارای شرایط زیر باشد،

• به‌سادگی بتوان از آن مشتق‌گیری کرد یا انتگرال گرفت.

• توسط مجموعه‌ای از توابع پایه‌ای تقریباً متعامد با بعد متناهی تولید شود.

لذا در این پایان‌نامه، معادله انتقال گرمای تصادفی را که با نویز، دچار اختلال شده است را در نظر می‌گیریم. بعد از گسسته‌سازی زمانی با روش اویلر، معادله را به یک معادله‌ی تصادفی خطی و یک معادله‌ی تکاملی تصادفی غیرخطی تقسیم می‌کنیم. معادله‌ی تصادفی خطی با یک روش موجک-گالرکین غیرقابل تطبیق، گسسته شده است. در ابتدا، این معادله حل شده و جواب حاصل، در معادله‌ی تکاملی تصادفی غیرخطی جایگذاری شده، که با یک روش موجک تطبیقی حل شده است. سپس میانگین مربعات را برای خطای کلی ارایه می‌دهیم.

۳.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۳.۱ (فضای نرم‌دار). فرض کنید X یک فضای برداری باشد. آنگاه $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ را یک نرم روی فضای X گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند،

• به‌ازای هر $x \in X$ ، $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.

• به‌ازای هر $x, y \in X$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

• به‌ازای هر $x \in X$ و $\alpha \in F$ ، $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

اکنون فضای برداری X را به‌همراه $\|\cdot\|$ ، یک فضای نرم‌دار گوییم و آن را با $(X, \|\cdot\|)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۲.۳.۱ (فضای باناخ). فضای نرم‌دار $(X, \|\cdot\|)$ را فضای باناخ گوییم، هرگاه متر القا شده توسط نرم $\|\cdot\|$ ، تام باشد.

ملاحظه ۱.۳.۱. متر d را روی فضای متریک (X, d) ، تام گوییم هرگاه هر دنباله کوشی در آن، همگرا باشد.

تعریف ۳.۳.۱ (ضرب داخلی). فرض کنید v و w دو بردار به صورت $v = \langle v_1, v_2 \rangle$ و $w = \langle w_1, w_2 \rangle$ باشند. در این صورت حاصل ضرب داخلی دو بردار v و w به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$v \cdot w = \langle v_1, v_2 \rangle \cdot \langle w_1, w_2 \rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

تعریف ۴.۳.۱ (فضای حاصل ضرب داخلی). فرض کنید X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{F}$ باشد. آنگاه تابع $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{F}$ را یک ضرب داخلی گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند،

$$\bullet \text{ به ازای هر } x, y, z \in X \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\bullet \text{ به ازای هر } x, y \in X \text{ و } \alpha \in F \quad \langle \alpha x, z \rangle = \langle x, z \rangle \alpha$$

$$\bullet \quad \langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle} \quad , x, y \in X$$

$$\bullet \text{ به ازای هر } x \in X \quad \langle x, x \rangle = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = 0$$

$$\bullet \text{ به ازای هر } x \in X \quad \langle x, x \rangle \geq 0$$

اکنون فضای X را همراه با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ، فضای حاصل ضرب داخلی نامیم.

تعریف ۵.۳.۱ (معین مثبت). ماتریس A که متقارن و مربعی $n \times n$ است را معین مثبت می‌نامیم هرگاه برای هر بردار ستونی غیر صفر z با n سطر، حاصل $z^T A z$ یک مقدار عددی مثبت باشد.

تعریف ۶.۳.۱ (نیمه معین مثبت). ماتریس A که متقارن و مربعی $n \times n$ است را نیمه معین مثبت می‌نامیم هرگاه برای هر بردار ستونی غیر صفر z با n سطر، رابطه $z^T A z \geq 0$ برقرار باشد.

تعریف ۷.۳.۱ (فضای هیلبرت). اگر فضای نرم‌دار القا شده توسط یک فضای حاصل ضرب داخلی، فضای باناخ باشد، آنگاه آن فضای حاصل ضرب داخلی را یک فضای هیلبرت نامیم.

تعریف ۸.۳.۱ (فضای H_0^1). فرض کنید توان دوم توابع $v(x)$ و $v'(x)$ روی بازه $[0, 1]$ انتگرال پذیر باشد. آنگاه فضای H_0^1 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$H_0^1 = \left\{ v(x) : \int_0^1 (v(x))^2 + v'(x)^2 dx < \infty, \quad v(0) = v(1) = 0 \right\}.$$

تعریف ۹.۳.۱ (فضای $H^m(\mathcal{D})$). فضای $H^m(\mathcal{D})$ ، $m \geq 0$ با استفاده از ضرب داخلی زیر، فضای هیلبرت می‌باشد،

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathcal{D}} \partial^\alpha u(x) \overline{\partial^\alpha v(x)} dx.$$

تعریف ۱۰.۳.۱ (فضاهای L_P). فرض کنید P یک عدد حقیقی ثابت باشد بطوریکه $1 \leq P < \infty$. آنگاه مجموعه همه دنباله‌های $\{a_n\}$ که در شرط $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^P < \infty$ صدق می‌کنند، تشکیل یک فضای برداری می‌دهند. که این فضا را، فضای L_P نامیم.

ملاحظه ۲.۳.۱. توجه داشته باشید که فضاها L_P به ازای $P = ۲$ یعنی $(L_۲)$ فضای هیلبرت می باشند.

تعریف ۱۱.۳.۱ (فضای سوبولوف). فرض کنید Ω یک زیرمجموعه باز از $\mathbb{R}$ باشد. فضای سوبولوف ^۱ $H(\Omega)$ از توابع $u \in L_P(\Omega)$ تشکیل شده است، بطوریکه برای هر α ، مشتق $D^\alpha u$ وجود دارد و $D^\alpha u \in L_P(\Omega)$ می باشد. بدین ترتیب عبارت زیر را داریم [۲۲]،

$$H(\Omega) = \{u \in L_P(\Omega) : D^\alpha u \in L_P(\Omega), |\alpha| \leq k\}.$$

تعریف ۱۲.۳.۱ (فضای سوبولوف استاندارد از مرتبه یک). فضای سوبولوف استاندارد از مرتبه یک، روی زیرمجموعه های باز Ω به صورت زیر تعریف می شود،

$$H^1(\Omega) = \{v \in L_۲(\Omega), \partial x_i v \in L_۲(\Omega), 1 \leq i \leq d\}.$$

تعریف ۱۳.۳.۱. فضای $(\Omega, \dot{H}^\beta)$ $L_۲$ از توابع انتگرال پذیر، برای ضرب داخلی به صورت زیر می باشد،

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) dH^\beta.$$

تعریف ۱۴.۳.۱. فضای چند تفکیکی از مرتبه m می باشد هرگاه داشته باشیم،

$$\inf_{w_J \in S_J} \|v - w_J\|_{L_۲(\Omega, H)} \lesssim ۲^{-mJ} \|v\|_{m; \mathcal{D}}, \quad v \in H^m(\mathcal{D}) \cap V.$$

توضیح ۱.۳.۱ (چندضلعی محدب). چند ضلعی یک شکل مسطح با اضلاع مستقیم است. چند ضلعی ها اشکال دوبعدی هستند که از خطوط مستقیم تشکیل یافته اند و یک شکل بسته محسوب می شوند (همه خطوط به هم متصل هستند) و در چندضلعی محدب هیچ زاویه رو به داخلی وجود ندارد. به بیان دقیق تر هیچ یک از زوایای درونی بیش از ۱۸۰° درجه نیست.

۴.۱ مسائل نیمه خطی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید L یک عملگر دیفرانسیل خطی باشد که در معادله زیر صدق می کند،

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha Lu + \beta Lv.$$

توجه داشته باشید که α و β را ثابت در نظر می گیریم.

معادله $Lu = f$ برای بعضی از توابع داده شده f ، خطی است. یک معادله نیمه خطی ^۲ بصورت زیر خواهد بود،

$$Lu = f(x, u, Du, D^2u, \dots, D^{k-1}u).$$

¹Sobolev Space

²Semi Linear

در معادله بالا، سمت راست یک معادله غیرخطی عمومی است که شامل هر ترکیب احتمالی از مشتقات تا یک مرتبه کمتر از مرتبه اصلی عملگر خطی می‌باشد. ویژگی اصلی معادلات نیمه‌خطی به این صورت است که در بالاترین مرتبه، خطی هستند و در پایین‌ترین مرتبه، احتمالاً غیرخطی هستند. به طور کلی مسائل خطی، ساده‌ترین هستند و مسائل نیمه‌خطی در مرحله بعدی قرار می‌گیرند. یک معادله نیمه‌خطی را به‌عنوان یک انحراف (اختلال) غیرخطی کوچک از یک معادله خطی مشاهده می‌کنند [۱۹].

۵.۱ معادلات سهموی

تعریف ۱.۵.۱. معادلات سهموی^۱ یکی از زمینه‌های پرکاربرد در ریاضیات هستند. معادلات سهموی، بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، شیمیایی و بیولوژیکی را توصیف می‌کنند. چنین معادلاتی، شامل سیستم‌های انتشار و انتقال گرما و انتشار واکنش^۲، آلودگی هوا و مدل‌های هواشناسی، ابررسانایی و معادله گرمای غیرخطی می‌باشند. چون این نوع از سیستم‌ها می‌توانند خیلی بزرگ باشند لذا روش‌های عددی، در این زمینه، بسیار مهم هستند.

۱.۵.۱ معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی

تعریف ۲.۵.۱. معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی، برای طیف گسترده‌ای از پدیده‌های وابسته به زمان از جمله انتقال گرما، انتشار ذرات^۳ و قیمت‌گذاری ابزار سرمایه‌گذاری مشتق شده استفاده می‌شوند.

برای تعریف ساده‌ترین نوع معادلات دیفرانسیل جزئی سهموی، یک تابع $u(x, y)$ از دو متغیر مستقل (x, y) را در نظر بگیرید. یک معادله دیفرانسیل جزئی با ضرایب ثابت، خطی و مرتبه دوم برای u ، به شکل کلی زیر است.

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0.$$

و اگر ضرایب، شرط $B^2 - 4AC = 0$ را برآورده کنند، آنگاه این معادله دیفرانسیل جزئی، به‌عنوان سهموی طبقه‌بندی خواهد شد.

معمولاً x ، موقعیت یک بعدی را نشان می‌دهد و y نشان‌دهنده زمان است و معادله دیفرانسیل جزئی، تحت شرایط اولیه و مرزی حل خواهد شد.

مثال پایه برای یک معادله دیفرانسیل جزئی سهموی، معادله گرمای یک بعدی $u_t = \alpha u_{xx}$ است. بطوریکه $u(x, t)$ دما در زمان t و در موقعیت x در امتداد یک میله نازک است و α یک ثابت مثبت است (نفوذپذیری حرارتی). نماد u_t نشان‌دهنده مشتق جزئی u است (با توجه به

¹Parabolic

²Reaction-Diffusion

³Particle Diffusion

متغیر زمان t). و به همین ترتیب، مشتقات جزئی دوم با توجه به x است. توجه کنید که برای این مثال، t نقش y را در معادله دیفرانسیل جزئی خطی مرتبه دوم کلی ایفا می‌کند، $A = \alpha$ و $E = -1$ و ضرایب دیگر صفر هستند.

۶.۱ معادلات سهموی نیمه‌خطی

توضیح ۱.۶.۱. معادلات سهموی نیمه‌خطی را می‌توان به‌عنوان معادلات دیفرانسیل معمولی در نظر گرفت. از این رو، از نظریه نیم‌گروه استفاده می‌شود، که در ادامه به بررسی آن‌ها خواهیم پرداخت.

یکی از بیشترین نمونه‌های رایج این گونه مسائل را می‌توان در معادلات انتقال گرما مشاهده کرد و بعضی از نمونه‌های غیربدهی را نیز می‌توان در معادلات گرمای غیرخطی، معادله شرودینگر^۱ وابسته به زمان و معادله ناویراستوکس^۲ مشاهده کرد [۱۹].

۷.۱ حرکت براونی

توضیح ۱.۷.۱. رابرت براون، متخصص گیاه‌شناسی، در سال ۱۸۲۸ حرکت ذرات گرده را به حالت معلق شده، در مایع شرح داد. مشاهده کرد که یک ذره در حالت غیرعادی و غیرمستقیم، به روش تصادفی حرکت می‌کند.

در سال ۱۹۰۵ انیشتین، استدلال کرد که این حرکت ناشی از بمباران ذرات، توسط مولکول‌های مایع است و بدین‌صورت او معادلات حرکت براونی^۳ را به‌دست آورد.

در سال ۱۹۰۰ بیچلیر^۴، از حرکت براونی به‌عنوان یک مدل، برای حرکت قیمت سهام در نظریه ریاضی خود استفاده کرد.

و سرانجام، در سال ۱۹۳۱ وینر، پایه ریاضی برای حرکت براونی را به‌عنوان یک فرآیند تصادفی انجام داد که این فرآیند نیز فرآیند وینر^۵ نامیده می‌شود.

فرآیند حرکت براونی را به‌صورت $B(t)$ نشان می‌دهیم. اگر $B(t)$ نشان‌دهنده موقعیت یک ذره در زمان t باشد، آن‌گاه اختلاف $B(t) - B(0)$ ، اثر بمباران کاملاً تصادفی توسط مولکول‌های مایع (سیال) یا اثر نویز در طول زمان t می‌باشد [۲۰].

۱.۷.۱ خواص حرکت براونی

تعریف ۱.۷.۱. حرکت براونی $B(t)$ یک فرآیند تصادفی با خواص زیر است [۲۰]،

^۱Schrodinger equation

^۲Navier-Stokes equation

^۳Brownian Motion

^۴Bachelier

^۵Wiener Process

۱. نموهای مستقل^۱:

$B(t) - B(s)$ برای هر $t > s$ ، مستقل از گذشته است.

۲. نمو طبیعی^۲:

$B(t) - B(s)$ برای هر $t > s > 0$ ، دارای توزیع طبیعی با میانگین صفر و واریانس $t - s$ می‌باشد. به این معنا که $B(t) - B(0)$ ($s = 0$ در نظر گرفته شده است.) دارای توزیع $N(0, t)$ است.

۳. پیوستگی مسیرها:

برای هر $t \geq 0$ ، $B(t)$ ها توابعی پیوسته از t هستند.

می‌توانیم پیوستگی مسیرها را با استفاده از نموهای طبیعی بیابیم. موقعیت اولیه حرکت براونی در تعریف مشخص نشده است، لذا هنگامی که $B(0) = x$ باشد آنگاه فرآیند حرکت براونی از x شروع می‌شود. فاصله زمانی که برای حرکت براونی در $[0, T]$ تعریف شده است، برای برخی $T > 0$ مجاز به بی‌نهایت است. اکنون فرض کنید،

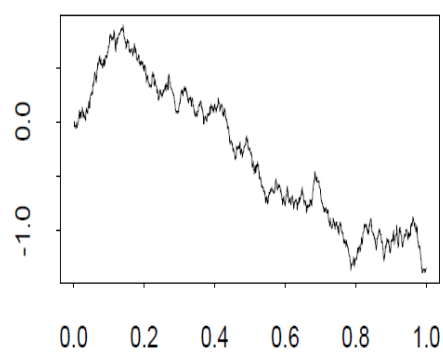
$$W(t) = B(t + s) - B(s).$$

آنگاه برای یک s ثابت و معین به‌عنوان یک فرآیند در t ، $W(t)$ یک حرکت براونی شروع شده از صفر خواهد بود. چهار واقعیت^۳ از حرکت براونی $B = B(t)$ شروع شده از صفر، در شکل ۱.۱ نمایش داده می‌شوند.

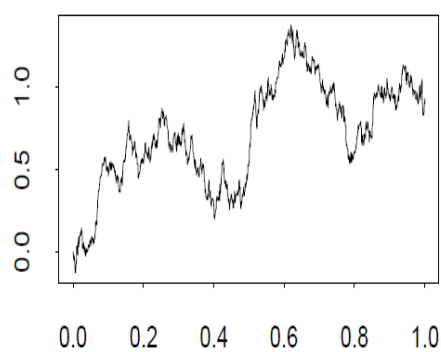
¹Independence of increments

²Normal increments

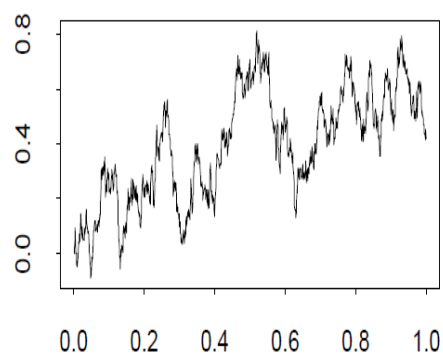
³Realizations

شکل ۱.۱: چهار مسیر از حرکت براونی $B(t)$.

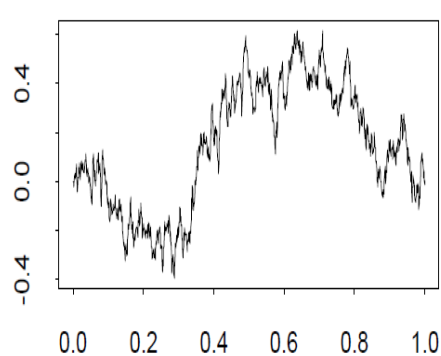
time



time



time



time

۲.۷.۱ خواص مسیرهای حرکت براونی

تعریف ۲.۷.۱. $B(t)$ به عنوان تابعی از t دارای خواص زیر می باشد $[0, \infty)$ ،

۱. یک تابع پیوسته از t است.
 ۲. در هر فاصله‌ای، یکنواخت نیست. مهم نیست که این فاصله، چقدر باشد.
 ۳. در هر نقطه‌ای، قابل تشخیص نیست.
 ۴. دارای تغییرات بی‌نهایت در هر فاصله است و مهم نیست که این فاصله، چقدر کوچک باشد.
 ۵. برای هر t ، دارای تغییرات درجه دوم روی بازه $[0, t]$ هم‌رتبه با t است.
- ویژگی‌های ۱ و ۳ از مسیرهای حرکت براونی، بیانگر این هستند که هرچند $B(t)$ یک تابع پیوسته از t است، اما می‌توان آن را به صورت $\Delta B(t)$ ، برای بیش از یک فاصله به طول Δt تعمیم داد.
- تعریف ۳.۷.۱** (ماکزیمم و مینیمم حرکت براونی). توزیع ماکزیمم و مینیمم حرکت براونی را بر روی بازه $[0, t]$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم $[0, \infty)$ ،

$$m(t) = \min_{0 \leq s \leq t} B(s) \quad M(t) = \max_{0 \leq s \leq t} B(s).$$

تعریف ۴.۷.۱. زمان τ را صفر حرکت براونی نامیم هرگاه $B(\tau) = 0$.

۳.۷.۱ نمودارهایی از بعضی توابع حرکت براونی

نمودارهایی از بعضی توابع حرکت براونی، به منظور به تصویر کشیدن این فرآیندها ارائه شده‌اند که برای به دست آوردن ۱۰۰۰ متغیر تصادفی عادی مستقل با میانگین صفر و واریانس ۰.۰۰۱ تولید شده‌اند. زمان گسسته، در حال تغییر از ۰ به ۱، با گام‌هایی به طول ۰.۰۰۱ در نظر گرفته شده است.

دو عکس اول در شکل ۲.۱، فهم نویز سفید هستند.

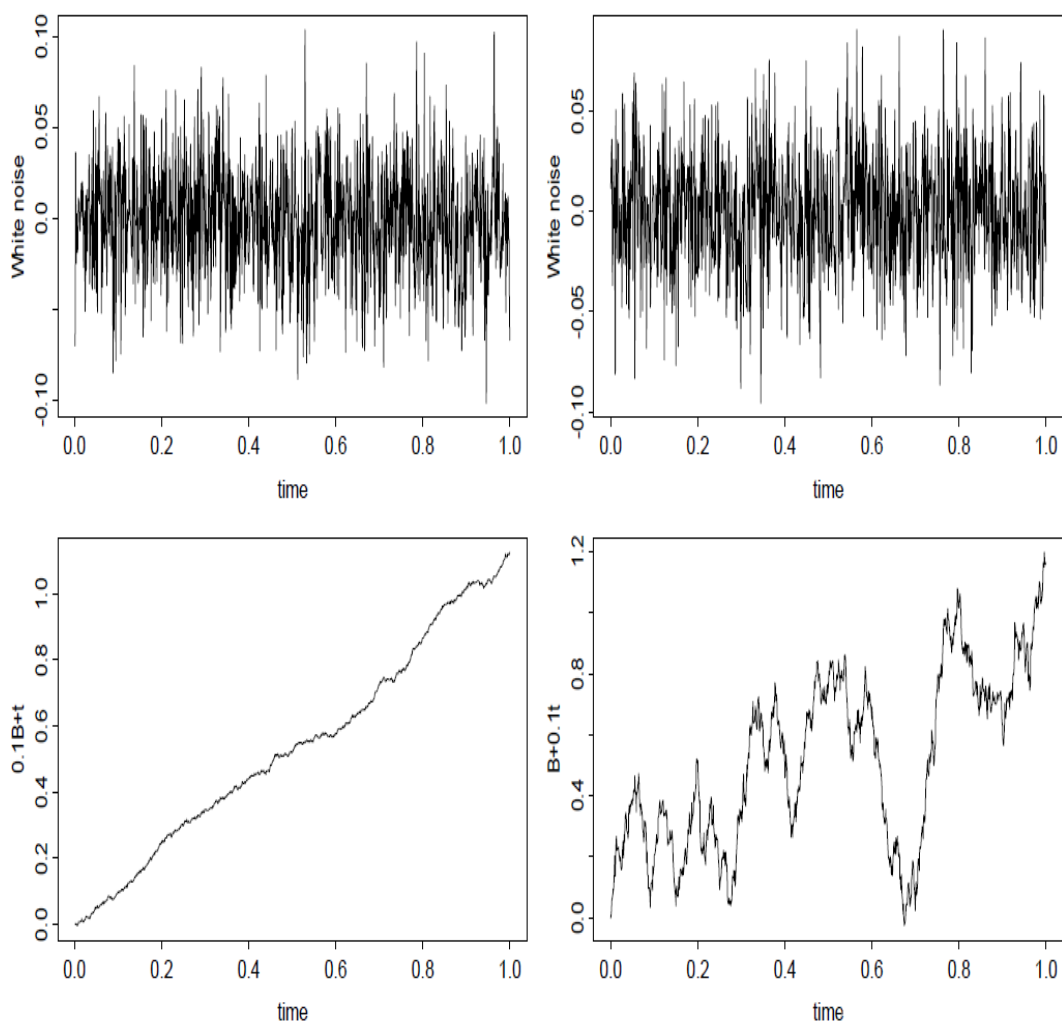
سپس عکس‌های $B(t) + t$ و $B(t) - t$ (سطر دوم از شکل ۲.۱) نشان می‌دهند که وقتی نویز در مقایسه با انحراف مسیر، کوچک است انحراف مسیر، غالب است و اگر انحراف مسیر، کوچک باشد آنگاه نویز در حرکت فرآیند، غالب خواهد بود.

دو عکس بعدی، در شکل ۳.۱، فهم مارتینگال^۱ $B^2(t) - t$ هستند که دارای میانگین صفر می‌باشند.

طبق ویژگی بازگشتی حرکت براونی، $B(t)$ همیشه به صفر باز خواهد گشت. بدین ترتیب $B^2(t) - t$ ، در بلند مدت همیشه به $-t$ ، باز خواهد گشت.

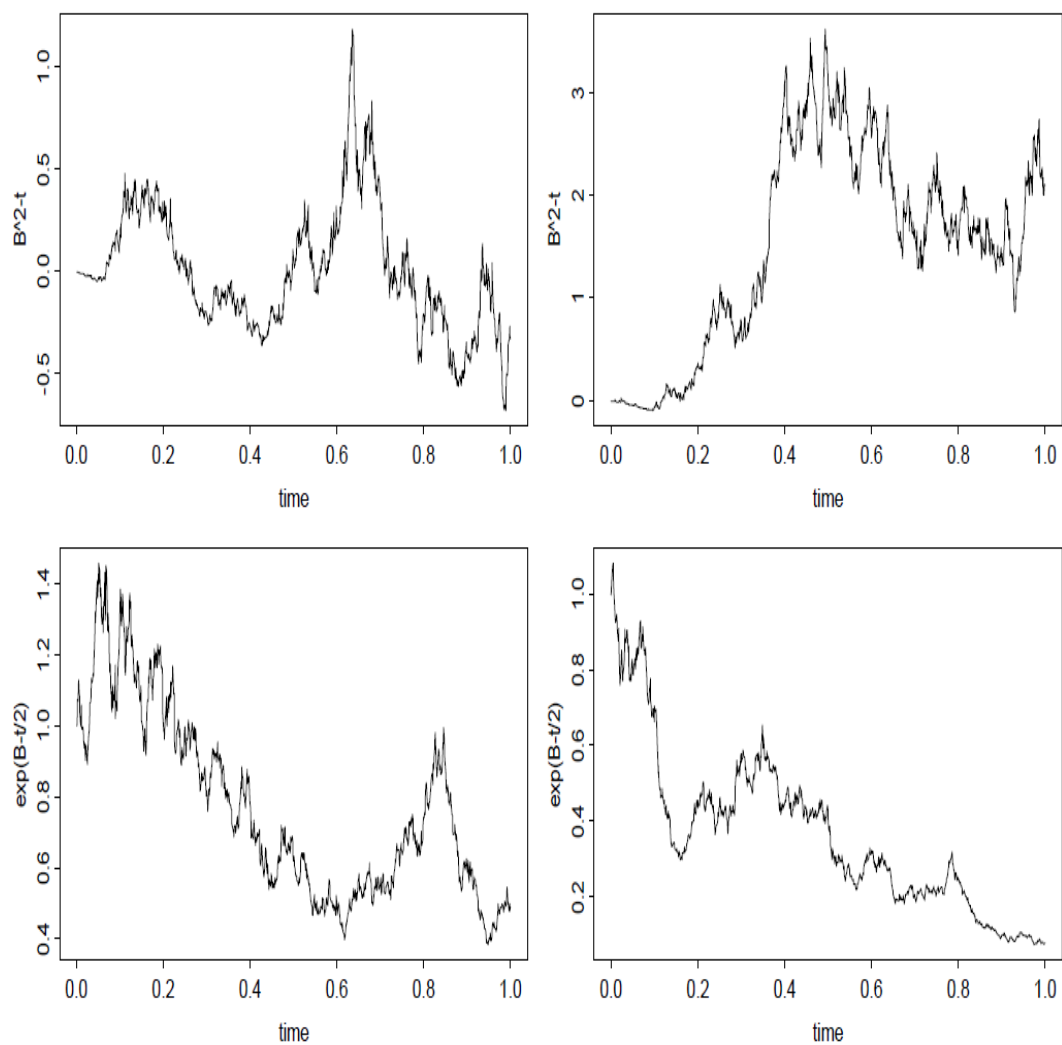
^۱Martingale

شکل ۲.۱: نویز و توابعی از حرکت بروانی.



دو عکس آخر در شکل ۳.۱، فهم مارتینگیل نمایی $e^{B(t)-\frac{t}{2}}$ هستند. با این که این مارتینگیل دارای میانگین یک است اما $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{B(t)-\frac{t}{2}} = 0$ می باشد، که توسط قانون اعداد بزرگ می تواند دیده شود. بنابراین یک فهم از این مارتینگیل، در بلند مدت به صفر نزدیک خواهد شد [۲۰].

شکل ۳.۱: نویز و توابعی از حرکت براونی.



۸.۱ نیم گروه تحلیلی

فضای باناخ X را در نظر بگیرید. فرض کنید $f : B \rightarrow X$ و $g : D \rightarrow X$ بطوریکه B و D بازه‌های حقیقی باشند و A را یک عملگر خطی کراندار یا بی کران در نظر بگیرید. اکنون عبارت زیر را که به عنوان یک معادله تکاملی می باشد در نظر می گیریم،

$$\frac{du}{dt} + A(t)u = f(t).$$

شرایط اولیه $u(\circ) = x$ را بر مساله تحمیل می کنیم. عملگر $T(t)$ را در نظر بگیرید. از $T(t)$ می توان به عنوان یک عملگر تکاملی یاد کرد و هنگامی که بروی $u(t_0)$ اعمال شود دارای نتیجه زیر خواهد بود،

$$T(t)u(t_0) = u(t_0 + t).$$

اکنون اگر شرایط اولیه در نظر گرفته شوند، آنگاه عبارت بالا به صورت $u(t) = T(t)x$ به دست خواهد آمد و همچنین اگر معادله تکاملی را پی در پی به کار ببریم، آنگاه عبارت زیر را خواهیم داشت،

$$T(s)T(t)x = u(t+s) = T(t+s)x.$$

اکنون باتوجه به مطالب بالا وارد مبحث نیم گروه ها می شویم. یک نیم گروه، یک گروه بدون خواص معکوس یا مشخصات می باشد. اکنون آنچه را که ارائه کردیم به صورت زیر می نویسیم،

$$T(s)[T(t)x] = [T(s)T(t)]x,$$

$$T(s)T(t) = T(s+t).$$

تعریف ۱.۸.۱. مجموعه $\{T(t); t \in [\circ, \infty)\}$ از کران عملگرهای خطی در X ، یک C_0 - نیم گروه (نیم گروه کاملاً پیوسته) نامیده می شود هرگاه عبارات زیر برقرار باشند [۲۱]،

$$\bullet \quad \forall s, t > \circ; \quad T(s+t) = T(s)T(t)$$

$$\bullet \quad (عملگر همانی) \quad T(\circ) = I$$

تعریف ۲.۸.۱. فرض کنید $h > \circ$ باشد. آنگاه A یک مولد بی نهایت کوچک از نیم گروه $\{T(t)\}$ نامیده می شود هرگاه داشته باشیم [۲۱]،

$$Ax = \lim_{h \rightarrow \circ} \frac{T(h)x - x}{h}.$$

لم ۱.۸.۱. فرض کنید $\{T(t)\}$ یک نیم گروه کاملاً پیوسته همراه با مولد بی نهایت کوچک A باشد. آنگاه برای هر $x \in D_A$ داریم [۲۱]،

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

تعریف ۳.۸.۱. نیم گروه های تحلیلی^۱، یک تحدید بروی مجموعه C_0 - نیم گروه ها هستند و این کلاس از نیم گروه ها در حقیقت جواب های منظم تری از PDE ها ارائه می دهند [۲۱].

تعریف ۴.۸.۱. فرض کنید $\{T(t)\}$ یک C_0 - نیم گروه روی فضای باناخ X همراه با مولد بی نهایت کوچک A باشد. آنگاه $\{T(t)\}$ یک نیم گروه تحلیلی گفته می شود هرگاه برای برخی $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ ، $T(t)$ به Δ_ϕ بسط داده شود بطوریکه [۲۱]،

$$\Delta_\phi = \{0\} \cup \{t \in \mathbb{C} : |\arg(t)| < \phi\}.$$

ملاحظه ۱.۸.۱. در عبارت بالا، منظور از $\arg(t)$ ، پارامتر t می باشد.

۹.۱ عملگرهای کوواریانس

تعریف ۱.۹.۱. عملگرهای کوواریانس، در تجزیه و تحلیل داده های تابعی، اساسی می باشند. این عملگرها ممکن است خودشان نیز در معرض تغییر قرار بگیرند. به عنوان مثال، در زمینه هایی که چندین تابع مختلف، قرار است بایکدیگر مقایسه شوند [۲۳].

تعریف ۲.۹.۱. واریانس یک متغیر تصادفی X ، با مقدار مورد انتظار $E_X = \mu_X$ ، به صورت زیر تعریف می شود [۲۳]،

$$Var(X) = E((X - \mu_X)^2).$$

تعریف ۳.۹.۱. کوواریانس بین متغیرهای تصادفی Y و Z با مقدارهای مورد انتظار μ_Y و μ_Z ، به صورت زیر تعریف می شود [۲۳]،

$$Cov(Y, Z) = E((Y - \mu_Y)(Z - \mu_Z)).$$

روابط زیر همواره برقرار می باشند،

$$Cov(Y, Z) = E(YZ) - E(Y)E(Z),$$

$$Var(X) = E((X)^2) - E(X)^2,$$

$$Cov(Y, Z) = E(YZ - \mu_Y Z - \mu_Z Y + \mu_Y \mu_Z) =$$

$$E(YZ) - \mu_Y E(Z) - \mu_Z E(Y) + \mu_Y \mu_Z = E(YZ) - \mu_Y \mu_Z.$$

همچنین برای ثوابت a, b, c, d و متغیرهای تصادفی U, V, Y, Z داریم،

$$Cov(aU + bV, cY + dZ) = acCov(U, Y) + bcCov(V, Y) + adCov(U, Z) + bdCov(V, Z).$$

¹Analytic Semigroup

۱۰.۱ نرم‌های هیلبرت-اشمیت

فرض کنید F و G فضاهای هیلبرت جداشدنی باشند و دنباله‌های $(e_i)_{i \in I}$ برای F و $(f_j)_{j \in J}$ برای G ، پایه‌های متعامد باشند. (مجموعه‌های I و J متناهی فرض شده‌اند). اکنون دو عملگر خطی فشرده $L : G \rightarrow F$ و $M : G \rightarrow F$ را تعریف می‌کنیم. لذا نرم هیلبرت-اشمیت^۱ از عملگرهای L و M را به صورت زیر داریم،

$$\|L\|_{HS}^2 = \sum_{j \in J} \|Lf_j\|_F^2 = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |\langle Lf_j, e_i \rangle_F|^2,$$

در معادله بالا، از نامساوی پارسوال، روی هریک از نرم‌ها در جمع اول استفاده می‌کنیم. عملگر L ، هیلبرت-اشمیت خواهد بود هرگاه این نرم، متناهی باشد و نگاشت عملگرهای هیلبرت-اشمیت از G به F ، فضای هیلبرت را تشکیل دهند، که به صورت $HS(G, F)$ نوشته می‌شود و ضرب داخلی آن نیز به صورت زیر خواهد بود،

$$\langle L, M \rangle_{HS} = \sum_{j \in J} \langle Lf_j, Mf_j \rangle_F.$$

شکل دیگری از این ضرب داخلی، به صورت زیر می‌باشد [۲۴]،

$$\langle L, M \rangle_{HS} = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \langle Lf_j, e_i \rangle_F \langle Mf_j, e_i \rangle_F.$$

۱۱.۱ عملگرهای رده اثر

اگر X و Y فضاهای نرم‌دار باشند، آنگاه فرض کنید $\beta(X, Y)$ مجموعه تمام نگاشت‌های خطی کراندار $X \rightarrow Y$ باشد، لذا همواره می‌دانیم که $\beta(X, Y)$ توسط عملگر نرم، یک فضای نرم‌دار خواهد بود.

اکنون اگر Y فضای باناخ باشد، آنگاه $\beta(X, Y)$ نیز یک فضای باناخ می‌باشد و همچنین اگر X فضای باناخ باشد، آنگاه $\beta(X) = \beta(X, X)$ یک جبر باناخ می‌باشد. و درنهایت، اگر H یک فضای هیلبرت باشد، آنگاه $\beta(H)$ ، یک جبر- C^* خواهد بود.

اکنون عملگر رده اثر^۲ را تعریف می‌کنیم. بدین منظور، در ابتدا قضیه زیر را بیان می‌کنیم،

قضیه ۱.۱۱.۱. فرض کنید H یک فضای هیلبرت باشد. اگر $\{e_\alpha : \alpha \in I\}$ و $\{f_\alpha : \alpha \in J\}$ پایه‌های متعامد برای H باشند و $A \in \beta(H)$ باشد، آنگاه داریم [۲۵]،

$$\sum_{\alpha \in I} \|Ae_\alpha\|_H^2 = \sum_{\alpha \in J} \|A^* f_\alpha\|_H^2 = \sum_{\alpha \in I} \|Af_\alpha\|_H^2.$$

^۱Hilbert-Schmidt norm

^۲Trace Class Operator

اگر $\{e_\alpha : \alpha \in I\}$ و $\{f_\alpha : \alpha \in J\}$ پایه‌های متعامد برای H باشند و $A \in \beta(H)$ باشد، آنگاه باتوجه به قضیه ۱.۱۱.۱ داریم،

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in I} \langle |A|e_\alpha, e_\alpha \rangle &= \sum_{\alpha \in I} \langle |A|^{\frac{1}{2}}e_\alpha, |A|^{\frac{1}{2}}e_\alpha \rangle = \sum_{\alpha \in I} \| |A|^{\frac{1}{2}}e_\alpha \|_H^2 = \\ \sum_{\alpha \in J} \| |A|^{\frac{1}{2}}f_\alpha \|_H^2 &= \sum_{\alpha \in J} \langle |A|^{\frac{1}{2}}f_\alpha, |A|^{\frac{1}{2}}f_\alpha \rangle = \sum_{\alpha \in J} \langle |A|f_\alpha, f_\alpha \rangle. \end{aligned}$$

اکنون اگر $\{e_i : i \in I\}$ یک پایه‌ی متعامد برای H باشد، آنگاه $A \in \beta(H)$ ، در صورتی که عبارت زیر برقرار باشد، یک رده‌اثر خواهد بود.

$$\sum_{i \in I} \langle |A|e_i, e_i \rangle < \infty.$$

بنابراین، مجموعه عملگرهای رده‌اثر در $\beta(H)$ را با $\beta_1(H)$ نشان می‌دهیم. برای $A \in \beta(H)$ تعریف می‌کنیم،

$$\|A\|_1 = \sum_{i \in I} \langle |A|e_i, e_i \rangle.$$

$A \in \beta_1(H)$ به این معناست که $A \in \beta(H)$ و $\|A\|_1 < \infty$ می‌باشد. کاملاً واضح است که $\|A\|_1 = \| |A|^{\frac{1}{2}} \|_2^2$ است.

۱۲.۱ روش روته

تعریف ۱.۱۲.۱. روش روته^۱، در سال ۱۹۳۰ توسط روته معرفی شد و توسط دانشمندان متعددی مورد استفاده قرار گرفته است و به‌عنوان یک روش اوایلر پسرو شناخته شده است. همچنین در هر دو معادلات هایپربولیک و پارابولیک (سهموی)، مورد استفاده قرار می‌گیرد. روش روته، که همچنین یک روش خطی یا یک روش نیمه‌گسسته نیز نامیده می‌شود، به‌عنوان یک ابزار نظری کارآمد برای حل مقیاس گسترده‌ای از مسائل تکاملی بیان می‌شود. با استفاده از گسسته‌سازی زمان، مسائل تکاملی با مسایل بیضوی متناسب، تقریب داده می‌شوند که با استفاده از آنها، یک جواب تقریبی برای مساله تکاملی اصلی، ساخته می‌شود، که توسط یک روش ساده همگرایی، این روش تقریبی برای حل مساله تکاملی اصلی، ثابت شده است. بنابراین، روش روته دارای یک جنبه عددی قوی می‌باشد [۲۶].

¹Rothe's Method

۱۳.۱ معادلات سهموی نیمه خطی همراه با اختلال

اکنون باتوجه به مفاهیمی که در بخش های بالا گفته شد، معادله ی سهموی نیمه خطی زیر را به همراه اختلال در نظر می گیریم،

$$\begin{aligned} du - \nabla \cdot (k \nabla u) dt &= f(u) dt + dW, & x \in \mathcal{D}, t \in (0, T), \\ u &= 0, & x \in \partial \mathcal{D}, t \in (0, T), \\ u(\cdot, 0) &= u_0, & x \in \mathcal{D}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

در (۱.۱)، $T > 0$ و $d = 1, 2, 3$ یک دامنه ی چندضلعی محدب^۱ یا یک دامنه با مرز صاف $\partial \mathcal{D}$ می باشد و $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ یک فرآیند وینر $L_2(\mathcal{D})$ مقدار، روی یک فضای احتمالی فیلتر شده ی $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ با توجه به فیلتراسیون نرمال می باشد.

از نماد $H = L_2(\mathcal{D})$ ، $V = H_0^1(\mathcal{D})$ با $\|\cdot\| = \|\cdot\|_H$ و $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_H$ استفاده می کنیم. علاوه براین، عملگر بیضوی خطی $Au = -\nabla \cdot (k \nabla u)$ را برای هر $u \in V$ نشان می دهد، بطوریکه $k(x) > k_0 > 0$ هموار می باشد.

طبق معمول، فرم دوسویه $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ را که برای هر $u, v \in V$ بوسیله $a(u, v) = \langle Au, v \rangle$ تعریف شده است را در نظر می گیریم.

با e^{-tA} ، نیم گروه تحلیلی در H را که با تحقق^۲ $-A$ در H با $D(A) = H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D})$ تولید شده است، را نشان می دهیم.

سرانجام $f : H \rightarrow H$ یک تابع غیرخطی است که بطور کلی، لیپشیتز پیوسته فرض شده است، به این معنا که یک L_f ثابت وجود دارد. بطوریکه،

$$\|f(u) - f(v)\| \leq L_f \|u - v\|, \quad u, v \in H. \quad (2.1)$$

مفروضات درمورد A و دامنه $\mathcal{D}$ دلالت بر وجود دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت غیرکاهشی $\{\lambda_k\}_{k \geq 1}$ و یک پایه متعامد $\{e_k\}_{k \geq 1}$ از H دارد. بطوریکه،

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_k = +\infty.$$

با استفاده از حساب دیفرانسیل، تابع طیفی برای A ، توان های کسری A^s ، $s \in \mathbb{R}$ را از A به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$A^s v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s(v, e_k) e_k, \quad D(A^s) = \left\{ v \in H : \|A^s v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2s}(v, e_k)^2 < \infty \right\}.$$

¹Convex Polygonal

²Realization

اکنون فضاهای $\dot{H}^\beta = D\left(A^{\frac{\beta}{2}}\right)$ را با استفاده از نرم‌های $\|v\|_\beta = \|A^{\frac{\beta}{2}}v\|_\beta$ تعریف می‌کنیم و داریم،

$$\begin{aligned} D\left(A^{\frac{\beta}{2}}\right) &= \left\{ v \in H : \left\| A^{\frac{\beta}{2}}v \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{\beta}{2}}(v, e_k)^2 < \infty \right\} \\ &= \left\{ v \in H : \left\| A^{\frac{\beta}{2}}v \right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta(v, e_k)^2 < \infty \right\} = \dot{H}^\beta. \end{aligned}$$

اگر $\frac{1}{2} < \beta < \infty$ باشد، آنگاه $\dot{H}^\beta = H^\beta$ می‌باشد به‌طور مثال، برای $\beta = 0$ داریم،

$$\left\{ v \in H : \|v\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (v, e_k)^2 < \infty \right\} = H^0.$$

و اگر $2 \leq \beta < \infty$ باشد، آنگاه $\dot{H}^\beta = \{u \in H^\beta : u|_{\partial D} = 0\}$ می‌باشد، که به‌طور مثال، برای $\beta = 2$ داریم،

$$\left\{ v \in H : \|Av\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2(v, e_k)^2 < \infty \right\} = \{u \in H^2 : u|_{\partial D} = 0\}.$$

در اینجا H^β ، نشان دهنده‌ی فضای سوبولف استاندارد از مرتبه‌ی β است.

لذا از فضاهای $L_2(\Omega, \dot{H}^\beta)$ با نرم‌های مربعات میانگین $\left(\mathbb{E}[\|v\|_\beta^2]\right)^{\frac{1}{2}}$ استفاده می‌کنیم.

برای بعضی $\beta \geq 0$ فرض می‌کنیم که،

$$\left\| A^{\frac{\beta-1}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \right\|_{HS} < \infty, \quad u_0 \in L_2(\Omega, \dot{H}^\beta). \quad (3.1)$$

در (۳.۱)، Q عملگر کوواریانس W^1 و $\|\cdot\|_{HS}$ نشان دهنده‌ی نرم هیلبرت-اشمیت می‌باشد. شرایط هیلبرت-اشمیت در (۳.۱) می‌تواند به‌عنوان یک فرض هموار در عملگر کوواریانس Q مشاهده شود. به‌خصوص اینکه اگر Q ، یک عملگر رده‌اثر باشد، آنگاه توسط $\beta = 1$ برقرار می‌شود و اگر $Q = I$ و $d = 1$ باشد، آنگاه توسط $\beta < \frac{1}{2}$ برقرار خواهد شد.

بطور کلی، آن برقرار می‌شود، هرگاه $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-\alpha} < \infty$ باشد. (بنابراین $\alpha > \frac{d}{2}$) و $A^{\beta+\alpha-1}Q$ یک عملگر خطی کراندار در H می‌باشد، که به‌منظور درک این مطلب، قضیه زیر را بیان می‌کنیم. داریم،

قضیه ۱.۱۳.۱. فرض کنید $Q \in \beta(H)$ ، نیمه‌معین مثبت باشد و همچنین A یک عملگر خطی، معین مثبت، بی‌کران و متراکم روی H ، توسط یک پایه متعامد از بردارهای ویژه، تعریف شده باشد. آنگاه روابط زیر برای $s \in \mathbb{R}$ و $\alpha > 0$ برقرار می‌باشند $[10]$ ،

$$\begin{aligned} \left\| A^{\frac{s}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \right\|_{HS}^2 &\geq \|A^s Q\|_{Tr} \geq \|A^{s+\alpha} Q\|_{\beta(H)} \|A^{-\alpha}\|_{Tr}, \\ \left\| A^{\frac{s}{2}} Q^{\frac{1}{2}} \right\|_{HS}^2 &\geq \|A^{s+\frac{1}{2}} Q A^{-\frac{1}{2}}\|_{Tr}. \end{aligned}$$

¹Covariance Operator

مشروط بر اینکه نرم‌های مربوطه، متناهی باشند. علاوه بر این، اگر A و Q دارای یک پایه‌ی مشترک از بردارهای ویژه باشند، مخصوصاً اگر $Q = I$ باشد، آنگاه داریم،

$$\left\| A^{\frac{s}{\gamma}} Q^{\frac{1}{\gamma}} \right\|_{HS}^2 = \|A^s Q\|_{Tr} = \left\| A^{s+\frac{1}{\gamma}} Q A^{-\frac{1}{\gamma}} \right\|_{Tr}.$$

اگر (۲.۱) و (۳.۱) برقرار باشند، آنگاه (۱.۱) یک جواب میانه^۱ منحصر به فرد دارد که به عنوان جواب معادله‌ی نقطه ثابت تعریف می‌شود.

$$u(t) = e^{-tA} u_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s)) ds + \int_0^t e^{-(t-s)A} dW(s). \quad (4.1)$$

بدین منظور، لم زیر را بیان می‌کنیم. داریم،

لم ۱.۱۳.۱. اگر برای هر $\beta \geq 0$ ، روابط زیر برقرار باشند،

$$\left\| A^{\frac{\beta-1}{\gamma}} Q^{\frac{1}{\gamma}} \right\|_{HS} < \infty; \quad X_0 \in L_{\gamma}(\Omega, H),$$

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L_f \|x - y\|; \quad x, y \in H.$$

آنگاه یک جواب منحصر به فرد به صورت $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ ، به ویژه برای $0 \leq t \leq T$ وجود دارد، بطوریکه [۱۱]

$$\|X(t)\|_{L_{\gamma}(\Omega, H)} \leq K; \quad K = K(T, L_f).$$

جواب به صورت $u = v + w$ تقسیم می‌شود، به طوریکه w یک پیچش^۲ تصادفی به صورت زیر می‌باشد،

$$w(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} dW(s), \quad (5.1)$$

که جواب معادله‌ی زیر است:

$$dw + Aw dt = dW, \quad 0 < t \leq T; \quad w(0) = 0, \quad (6.1)$$

و v جواب معادله‌ی تکاملی تصادفی زیر است:

$$\dot{v} + Av = f(v + w), \quad 0 < t \leq T; \quad v(0) = u_0. \quad (7.1)$$

ابتدا، w را محاسبه می‌کنیم و سپس آن را در (۷.۱) قرار می‌دهیم و مساله را بر حسب v حل کنیم. و u را به شکل $u = v + w$ تشکیل می‌دهیم.

برای حل عددی، از روش روته استفاده می‌کنیم، جایی که در ابتدا باتوجه به زمان، گسسته‌سازی می‌کنیم و سپس مسایل بیضوی حاصل را با روش‌های مویک که در فصل ۲ به تعریف آن‌ها خواهیم پرداخت، گسسته‌سازی می‌کنیم.

¹Mild Solution

²Convolution

بنابراین، یک گام زمانی $\tau > 0$ را تعیین می‌کنیم، لذا $t_n := n\tau$ را با $t_N = T$ قرار می‌دهیم و یک گسسته‌سازی پسرو اویلر از (۱.۱) را در نظر می‌گیریم. با توجه به $u^n \approx u(t_n)$ و $\Delta W^n = W(t_n) - W(t_{n-1})$ عبارت زیر را خواهیم داشت،

$$u^n + \tau Au^n = u^{n-1} + \tau f(u^n) + \Delta W^n, \quad 1 \leq n \leq N; \quad u^0 = u_0. \quad (۸.۱)$$

سپس $u^n = v^n + w^n$ را به‌منظور دریافت روش‌های زمان گسسته از (۶.۱) و (۷.۱) تجزیه می‌کنیم. داریم،

$$\begin{aligned} (v^n + w^n) + \tau A(v^n + w^n) &= (v^{n-1} + w^{n-1}) + \tau f(v^n + w^n) + \Delta W^n, \\ (v^n + w^n) + \tau Av^n + \tau Aw^n &= (v^{n-1} + w^{n-1}) + \tau f v^n + \tau f w^n + \Delta W^n. \end{aligned}$$

اکنون با توجه به روابط بالا، به‌راحتی می‌توان نوشت،

$$w^n + \tau Aw^n = w^{n-1} + \Delta W^n, \quad 1 \leq n \leq N; \quad w^0 = 0, \quad (۹.۱)$$

$$v^n + \tau Av^n = v^{n-1} + \tau f(v^n + w^n), \quad 1 \leq n \leq N; \quad v^0 = u_0. \quad (۱۰.۱)$$

ابتدا مساله‌ی خطی (۹.۱) را حل کرده و از نتیجه به‌عنوان یک ورودی، برای مساله‌ی غیرخطی (۱۰.۱) استفاده کنیم.

اکنون، گسسته‌سازی از (۹.۱) را در نظر می‌گیریم. برای این منظور، فرض کنید S_J یک فضای چند تفکیکی^۱ از مرتبه m باشد و فرض کنید $\{w_J^n\}_{n=0}^N \subset S_J$ تقریب گالرکین متناظر از $\{w^n\}_{n=0}^N$ باشد. یعنی،

$$w_J^n + \tau A_J w_J^n = w_J^{n-1} + P_J \Delta W^n, \quad 1 \leq n \leq N; \quad w_J^0 = 0. \quad (۱۱.۱)$$

برای جزئیات بیشتر، به فصل (۳) اشاره می‌کنیم. این تقریب را در (۱۰.۱) به‌جای w^n وارد می‌کنیم. برای این منظور، در ابتدا باید w_J^n را با استفاده از (۱۱.۱) به‌دست آوریم. لذا داریم،

$$w_J^n = w_J^{n-1} - \tau A_J w_J^n + P_J \Delta W^n, \quad 1 \leq n \leq N; \quad w_J^0 = 0.$$

اکنون به‌راحتی می‌توانیم w_J^n را در (۱۰.۱) به‌جای w^n به‌صورت زیر جایگزین کنیم،

$$v^n + \tau Av^n = v^{n-1} + \tau f(v^n + w_J^{n-1} - \tau A_J w_J^n + P_J \Delta W^n), \quad 1 \leq n \leq N; \quad v^0 = u_0.$$

لذا معادله‌ی متناظر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\bar{v}^n + \tau A \bar{v}^n = \bar{v}^{n-1} + \tau f(\bar{v}^n + w_J^n), \quad 1 \leq n \leq N; \quad \bar{v}^0 = u_0. \quad (۱۲.۱)$$

^۱Multiresolution Space

برای هر $\omega \in \Omega$ و $n \geq 1$ ، معادله‌ی غیرخطی در (۱۲.۱) با یک الگوریتم موجک تطبیقی، به‌منظور رسیدن به یک جواب تقریبی v_ε^n با خطای قابل تحمل ε_n حل شده است. توجه داشته باشید که از همان خطای قابل تحمل برای هر ω استفاده می‌کنیم. به طور دقیق‌تر، نشان می‌دهیم که $\bar{v}^n = E_n(\bar{v}^{n-1})$ است. در اینجا E_n به‌صورت زیر می‌باشد،

$$E_n = (I + \tau A - \tau f(\cdot + W_J^n))^{-1},$$

E_n عملگر یک‌مرحله‌ای غیرخطی از (۱۲.۱) است. همچنین، فرض می‌کنیم که $v_\varepsilon^n = \tilde{E}_n(v_\varepsilon^{n-1})$ است. در اینجا $\tilde{E}_n$ یک تقریبی از E_n می‌باشد، بطوریکه،

$$\|E_n(v) - \tilde{E}_n(v)\| \leq \varepsilon_n, \quad 1 \leq n \leq N, \quad v \in H. \quad (۱۳.۱)$$

سپس خروجی محاسبات به‌صورت دنباله‌ی زیر خواهد بود،

$$u_\varepsilon^n = v_\varepsilon^n + w_J^n, \quad 0 \leq n \leq N. \quad (۱۴.۱)$$

حال عبارات زیر را در نظر بگیرید،

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t_n \leq T} \|u^n - u(t_n)\|_{L_\Upsilon(\Omega, H)} &\leq C \tau^{\frac{\beta}{\Upsilon}}, \quad 0 \leq \beta < 1, \\ \max_{0 \leq t_n \leq T} \|v_\varepsilon^n - \bar{v}^n\|_{L_\Upsilon(\Omega, H)} &\leq C \sum_{n=1}^N \varepsilon_n, \\ \max_{0 \leq t_n \leq T} \|w_J^n - w^n\|_{L_\Upsilon(\Omega, H)} &\leq C \Upsilon^{-J \min(\beta, m)}, \\ \max_{0 \leq t_n \leq T} \|\bar{v}^n - v^n\|_{L_\Upsilon(\Omega, H)} &\leq C \max_{0 \leq t_n \leq T} \|w_J^n - w^n\|_{L_\Upsilon(\Omega, H)}. \end{aligned}$$

از طرفی، طبق قضیه ۲.۱۳.۱ درستی رابطه زیر را همواره می‌دانیم. داریم،

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} \|u_\varepsilon^n - u(t_n)\|_{L_\Upsilon(\Omega, H)} \leq C \tau^{\frac{\beta}{\Upsilon}} + C \Upsilon^{-J \min(\beta, m)} + C \sum_{n=1}^N \varepsilon_n.$$

اکنون با توجه به عباراتی که در ابتدا به آن‌ها اشاره شد، می‌توان سمت راست معادله بالا را به‌صورت زیر جایگذاری کرد،

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq t_n \leq T} \|u_\varepsilon^n - u(t_n)\|_{L_\Upsilon(\Omega, H)} &\leq \max_{0 \leq t_n \leq T} \|u^n - u(t_n)\|_{L_\Upsilon(\Omega, H)} \\ &+ \max_{0 \leq t_n \leq T} \|w_J^n - w^n\|_{L_\Upsilon(\Omega, H)} + \max_{0 \leq t_n \leq T} \|v_\varepsilon^n - \bar{v}^n\|_{L_\Upsilon(\Omega, H)}. \end{aligned}$$

لذا به راحتی می‌توان نوشت،

$$(u_\varepsilon^n - u(t_n)) = (u^n - u(t_n)) + (w_J^n - w^n) + (v_\varepsilon^n - \bar{v}^n) + (\bar{v}^n - v^n).$$

و با ساده کردن عبارت فوق داریم،

$$u_\varepsilon^n = u^n + w_J^n - w^n + v_\varepsilon^n - v^n. \quad (*)$$

می دانیم $u^n = v^n + w^n$ می باشد، پس $u^n - v^n - w^n = 0$ برقرار است. بنابراین، معادله (*) به صورت زیر نوشته خواهد شد،

$$u_\varepsilon^n = v_\varepsilon^n + w_J^n, \quad 0 \leq n \leq N.$$

و خطای کلی برابر است با،

$$u_\varepsilon^n - u(t_n) = (v_\varepsilon^n - \bar{v}^n) + (\bar{v}^n - v^n) + (w_J^n - w^n) + (u^n - u(t_n)).$$

بنابراین، نتیجه اصلی بصورت زیر می باشد،

قضیه ۲.۱۳.۱. فرض کنید (۳.۱) برای بعضی $\beta \geq 0$ برقرار باشد و فرض کنید $\{w_J^n\}_{n=0}^N \subset S_J$ با یک روش گالرکین چند تفکیکی از مرتبه m و $\{v_\varepsilon^n\}_{n=0}^N$ با یک روش موجک تطبیقی با خطای قابل تحمل ε_n محاسبه شود. آنگاه برای $1 < \beta \leq 0$ خطای کلی در (۱۴.۱) برای $\frac{1}{4} < \tau L_f < \tau$ کراندار است با،

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} \|u_\varepsilon^n - u(t_n)\|_{L^\gamma(\Omega, H)} \leq C \tau^{\frac{\beta}{4}} + C 2^{-J \min(\beta, m)} + C \sum_{n=1}^N \varepsilon_n,$$

در عبارت بالا، $C = C \left(\|u_0\|_{L^\gamma(\Omega, \dot{H}^\beta)}, \left\| A^{\frac{\beta-1}{4}} Q^{\frac{1}{4}} \right\|_{HS}, T \right)$ می باشد. اگر $\beta \geq 1$ باشد، آنگاه در ابتدا عبارت با $C_\delta \tau^{\frac{1}{4}-\delta}$ برای هر $\delta > 0$ جایگزین می شود.

فصل ۲

تقریب موجک

در این فصل، نمادگذاری و ویژگی‌های اصلی موجک‌ها را که در ادامه مورد نیاز خواهند بود، بیان می‌کنیم.

۱.۲ توابع مقیاس

تعریف ۱.۱.۲. دنباله $\{S_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ از فضای $L_2(\mathbb{R})$ ، آنالیز چند تفکیکی^۱ نامیده می‌شود هرگاه در دو اصل زیر صدق کند [۱۷]،

- فضاهای تودرتو باشند. یعنی، $S_j \subset S_{j+1}$.
- تابع φ وجود داشته باشد، بطوریکه هر $\{\varphi_{[j,k]} : j, k \in \mathbb{Z}\}$ ، یک پایه پایدار یکنواخت برای $\{S_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ باشد.

تعریف ۲.۱.۲. به عنوان یک نتیجه از تعریف ۱.۱.۲، فرمول بازگشتی زیر را برای φ و برخی ضرایب $\{a_k \in \mathbb{R}; k \in \mathbb{Z}\}$ به دست می‌آوریم [۱۷].

$$\varphi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \varphi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}.$$

لذا به تابع $\varphi(x) \in L_2(\mathbb{R})$ که در فرمول بازگشتی بالا صدق کند، تابع مقیاس^۲ گوییم.

^۱Multiresolution Analysis

^۲Scaling Functions

توابع مقیاس، مبنی بر تقریبات $(f_j)_{j \geq 0}$ در سطوح مختلف دقت ^۱ j برای تابع F هستند. همچنین، مقیاس‌های متناظر از دقت h_j معمولاً از مرتبه‌ی 2^{-j} انتخاب می‌شوند. بنابراین، تقریب f_j باید به‌عنوان یک تصویر ناقص (عاری از جزئیات) از F که نمی‌تواند در یک تناوب بالاتر از 2^j نوسان کند، مشاهده شود. به‌عنوان مثال، اگر F یک تابع پیوسته یک متغیره باشد، آنگاه می‌توان برای f_j یک تابع منحصر به فرد انتخاب کرد به‌طوری‌که در عبارت زیر صدق کند،

$$f_j(2^{-j} \cdot k) = F(2^{-j} \cdot k).$$

به طور رسمی، با توسعه و گسترش f به بزرگترین تقریب، یک تجزیه چندمقیاسی به‌دست می‌آید. به‌طوری‌که،

$$F = f_0 + \sum_{j \geq 0} g_j.$$

در عبارت بالا، $g_j = f_{j+1} - f_j$ است و بیان‌گر نوسانات تابع F بین دو سطح متوالی از دقت j و $j+1$ می‌باشد.

۲.۲ ساختار موجک‌ها

تاکنون برای گسسته‌سازی و جواب عددی مسایل مقدار مرزی، از آنالیز چند تفکیکی که در بخش قبل به آن اشاره شد، استفاده می‌کردیم. البته آنالیز چند تفکیکی همچنین به‌عنوان ابزار اصلی برای ساختار موجک‌ها نیز عمل می‌کند.

اکنون ساختار موجک‌ها را برای جواب عددی مسایل مقدار مرزی، شرح می‌دهیم. با استفاده از تخمین جکسون ^۲ که به‌تفصیل به آن اشاره شده است، تقریب‌های بهتری را با استفاده از سطوح بالاتر به‌دست می‌آوریم [۱۷]. بطوریکه $2^j \sim |I_j|$ یعنی، تعداد مرتبه‌ها بطور نمایی توسط سطح j ، رشد می‌کنند.

بدیهی است که اگر یک تقریب محاسبه شده، به‌اندازه کافی دقیق نباشد آنگاه محاسبه کامل یک تقریب، در سطوح بالاتر بعدی بسیار سخت و دشوار خواهد بود. لذا از تقریب محاسبه شده‌ی قبلی، دوباره استفاده می‌کنیم و فقط برای به‌دست آوردن تقریب بهتر، مجبور به به‌روزرسانی این مورد می‌شویم.

بنابراین، برای انجام این کار، سوال زیر مطرح می‌شود.

باتوجه به توابع $f_j = P_j f_{j+1}$ و $f_{j+1} \in S_{j+1}$ ، $f_{j+1} = f_j + g_j$ ، بطوریکه $P_j : L^p(\Omega) \rightarrow S_j$ ، پایه‌ای برای W_j از S_j در S_{j+1} به چه صورت است؟

¹Resolution

²Jackson Estimate

بنابراین، هدفمان ساختن W_j از S_j در S_{j+1} و به‌ویژه ساختن یک پایه متعامد برای W_j به‌صورت زیر می‌باشد،

$$\Psi_j := \{\psi_{[j,k]}; j, k \in \mathbb{Z}\}.$$

بدیهی است که این دلالت دارد بر آن که فضاهای مکمل W_j و در نتیجه توابع پایه‌ای $\psi_{[j,k]}$ ، باتوجه به سطوح مختلف j ، متقابلاً متعامد هستند. درحقیقت، برای هر $l < j$ داریم،

$$W_l \subset S_{l+1} \subseteq S_j \perp W_j.$$

ازاین‌رو، برای هر $l \neq j$ عبارت زیر را داریم،

$$\langle \psi_{[j,k]}, \psi_{[l,m]} \rangle_{\circ; \mathbb{R}} = 0.$$

بنابراین، هر $g_l \in W_l$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$g_l = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (f_j, \psi_{[l,k]})_{\circ; \mathbb{R}} \psi_{[l,k]}.$$

و سرانجام داریم،

$$f_j = f_{\circ} + \sum_{l=\circ}^{j-1} g_l.$$

اکنون باتوجه به عبارات بالا، به شرح ساختار موجک‌ها می‌پردازیم. چون $\psi \in W_{\circ} \subset S_1$ می‌باشد، لذا ضرایب مناسب $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۷]،

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \cdot \varphi(2x - k).$$

ملاحظه ۱.۲.۲. $W_{\circ}$ ، نشان‌دهنده‌ی موجک مادر می‌باشد.

تمام کارهایی که باید برای ساختن موجک‌ها انجام شود، در ساخت یک تابع مقیاس، نهفته است.

درحقیقت، باتوجه به یک تابع مقیاس، موجک متناظر همانطور که در قضیه زیر نشان داده می‌شود، منحصر به فرد تعیین می‌گردد.

قضیه ۱.۲.۲. باتوجه به تابع مقیاس φ ، موجک ψ وجود دارد که توسط عبارت زیر، داده شده است [۱۷]،

$$b_k = (-1)^k \cdot a_{1-k}.$$

اکنون کافیهست که ضرایب مناسب $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ را در معادله $\psi(x)$ جایگذاری کنیم. بنابراین داریم،

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k \cdot \varphi(2x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \cdot a_{1-k} \varphi(2x - k).$$

برای گسسته‌سازی فضا فرض می‌کنیم،

$$\Psi = \{\psi_\lambda : \lambda \in \mathcal{F}^\Psi\} \quad \tilde{\Psi} = \{\tilde{\psi}_\lambda : \lambda \in \mathcal{F}^\Psi\}$$

پایه‌هایی از H باشند و $\langle \psi_\lambda, \tilde{\psi}_\mu \rangle_H = \delta_{\lambda,\mu}$ باشد، در اینجا λ معمولاً یک بردار اندیس به صورت $\lambda = (j, k)$ است که شامل اطلاعات روی سطح $|\lambda| = j$ و موقعیت در فضای k می‌باشد. توجه داشته باشید که Ψ همچنین شامل توابع مقیاس به روی درشت‌ترین سطح که موجک نیستند، می‌باشد. همچنین از $|\lambda| = 0$ به عنوان سطح توابع مقیاس نیز اشاره می‌کنیم. علاوه بر این، فرضیات زیر را در پایه‌های موجک مطرح می‌کنیم،

• همواری^۱:

$$\psi_\lambda \in H^t(\mathcal{D}); \quad \lambda \in \mathcal{F}^\Psi, \quad 0 \leq t < s_\Psi.$$

• ناپدید (صفر شدن) گشتاورها^۲:

$$((\cdot)^r, \psi_\lambda)_{0;\mathcal{D}} = 0, \quad 0 \leq r < m_\Psi, \quad |\lambda| > 0.$$

• موقعیت:

$$\text{diam}(\text{supp } \psi_\lambda) \sim 2^{-|\lambda|}.$$

تعریف ۱.۲.۲. پایه موجک دوگان را به صورت $\tilde{\psi}_\lambda$ نشان می‌دهیم و خواص آن را دقیقاً مشابه خواص پایه‌های موجک تعریف می‌کنیم، بطوریکه فقط کافیست در خواص پایه‌های موجک، به جای s_Ψ و m_Ψ ، عبارت‌های $\tilde{s}_\Psi$ و $\tilde{m}_\Psi$ را جایگذاری کنیم.

ملاحظه ۲.۲.۲. توجه کنید که موجک دوگان $\tilde{\psi}_\lambda$ لازم نیست در V باشد، بلکه معمولاً انتظار می‌رود که $\tilde{\psi}_\lambda \in V'$ باشد.

زیرفضاهای تولید شده توسط مجموعه‌هایی از اندیس‌های زیر را در نظر خواهیم گرفت،

$$\Lambda \subset \mathcal{F}^\Psi, \quad \Psi_\Lambda := \{\psi_\lambda : \lambda \in \Lambda\}, \quad S_\Lambda := \text{clos span}(\Psi_\Lambda).$$

در اینجا اگر Λ یک مجموعه‌ی متناهی باشد، آنگاه نیازی به بسته بودن نخواهد بود. از طرفی، اگر عبارت زیر برقرار باشد،

$$\Lambda = \Lambda_J := \{\lambda \in \mathcal{F}^\Psi : |\lambda| \leq J-1\},$$

آنگاه $S_J := S_{\Lambda_J}$ شامل همه موجک‌ها تا سطح $(J-1)$ است، بطوریکه S_J با فضای چند تفکیکی تولید شده با همه توابع مقیاس در سطح J منطبق باشد. یعنی،

$$S_J = \text{span } \Phi_J, \quad \Phi_J = \{\varphi_{J,k} : k \in \mathcal{F}_J\}, \quad (1.2)$$

در اینجا $\mathcal{F}_J$ یک مجموعه اندیس مناسب می‌باشد.

¹Regularity

²Vanishing Moments

فصل ۳

روش‌های موجک تطبیقی، برای مسائل متغیر غیرخطی

توضیح ۱.۰.۳. روش‌های تطبیقی^۱، مانند روش‌های عناصر متناهی تطبیقی، اغلب برای حل عددی معادلات بیضوی مورد استفاده قرار می‌گیرند، که این جواب دارای یکتایی است. یک الگوریتم معمولی از اطلاعات به‌دست آمده در طی یک مرحله معین از محاسبه، برای تولید مش جدید برای تکرار بعدی استفاده می‌کند. بنابراین، روش تطبیقی به جواب عددی فعلی u بستگی دارد. بر این اساس، این روش‌ها نوعی تقریب غیرخطی از جواب را ایجاد می‌کنند.

در این فصل، از [۷] برخی مطالب را درمورد روش‌های موجک تطبیقی برای حل مسائل متغیر غیرخطی ثابت، بیان می‌کنیم. فرض کنید $F : V \rightarrow V'$ یک نگاشت غیرخطی باشد. مساله‌ی پیدا کردن $u \in V$ را در نظر می‌گیریم. بطوریکه،

$$\langle v, R(u) \rangle := \langle v, F(u) - g \rangle = 0, \quad v \in V, \quad (1.3)$$

در (۱.۳)، $g \in V'$ داده شده است. به‌عنوان مثال، فرض کنید F به‌عنوان رابطه‌ی زیر داده شده باشد که در (۱۲.۱) صدق کند.

$$\langle v, F(u) \rangle := a(v, u) + \langle v, f(u) \rangle.$$

¹Adaptive

اکنون ایده‌ی اصلی این است که یک فرمول معادل با (۱.۳) را در عبارات ضرایب موجک $\mathbf{u}$ از جواب ناشناخته‌ی $u = \mathbf{u}^T \Psi$ در نظر بگیریم. قرار می‌دهیم،

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}) := (\langle \psi_\lambda, R(v) \rangle)_{\lambda \in \mathcal{F}^\Psi}, \quad v = \mathbf{v}^T \Psi.$$

لذا مقادیر فرمول معادل با (۱.۳)، به‌منظور یافتن $\mathbf{u} \in \ell_2(\mathcal{F}^\Psi)$ به‌صورت زیر خواهد بود،

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}. \quad (۲.۳)$$

ملاحظه ۱.۰.۳. معادله (۲.۳) به این معناست که حاصل ضرب داخلی $(\langle \psi_\lambda, R(v) \rangle)_{\lambda \in \mathcal{F}^\Psi}$ ، برابر با صفر می‌باشد.

مورد دیگری که به آن نیاز داریم، یک تکرار در فضای نامتناهی $L_2(\mathcal{F}^\Psi)$ می‌باشد و جایگزین کردن عملگر نامتناهی با تقریب‌های متناهی در یک روش تطبیقی، به‌منظور به‌دست آوردن یک نسخه قابل محاسبه است.

با $\mathbf{u}^{(0)}$ متناهی شروع می‌کنیم، لذا تکرار بصورت زیر است،

$$\mathbf{u}^{(n+1)} = \mathbf{u}^{(n)} - \Delta \mathbf{u}^{(n)}, \quad \Delta \mathbf{u}^{(n)} := \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{R}(\mathbf{u}^{(n)}) \quad (۳.۳)$$

در (۳.۳)، عملگر $\mathbf{B}^{(n)}$ انتخاب شده است و روش جواب غیرخطی را تعیین می‌کند. (مانند روش‌های نیوتن و ریچاردسون)

دنباله $\Delta \mathbf{u}^{(n)} = \mathbf{B}^{(n)} \mathbf{R}(\mathbf{u}^{(n)})$ که احتمالاً نامتناهی حتی برای ورودی متناهی $\mathbf{u}^{(n)}$ می‌باشد، با بعضی دنباله‌های متناهی $\mathbf{w}_\eta^{(n)} := \text{RES}[\eta_n, \mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{R}, \mathbf{u}^{(n)}]$ جایگزین شده است. بطوریکه داریم،

$$\|\Delta \mathbf{u}^{(n)} - \mathbf{w}_\eta^{(n)}\| \leq \eta_n.$$

جایگزین کردن $\Delta \mathbf{u}^{(n)}$ با $\mathbf{w}_\eta^{(n)}$ در (۳.۳) و انتخاب دنباله‌ی خطای قابل تحمل $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ به‌طور مناسب، منجر به یک الگوریتم همگرا می‌شود، بطوریکه هر خطای قابل تحمل ε بعد از چندین گام متناهی، حاصل می‌شود.

اکنون عبارت زیر را درحالی که $\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)\| \leq \varepsilon$ می‌باشد، قرار می‌دهیم،

$$\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon) := \text{SOLVE}[\varepsilon, \mathbf{R}, \mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{u}^{(0)}].$$

ملاحظه ۲.۰.۳. در رابطه بالا، عبارت $\text{SOLVE}[\varepsilon, \mathbf{R}, \mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{u}^{(0)}]$ به این معناست که جواب عددی $\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)$ در صورتی به‌دست خواهد آمد که مقادیر $[\varepsilon, \mathbf{R}, \mathbf{B}^{(n)}, \mathbf{u}^{(0)}]$ معلوم باشند.

از لحاظ بهینه‌سازی، مسایل گوناگونی مورد توجه قرار گرفته است، برخی از آن‌ها عبارتند از:

- چند تکرار $n(\varepsilon)$ ، برای رسیدن به دقت ε ضروری است ؟

• چند ضریب معلوم^۱، برای نشان دادن تقریب عددی، لازم است و چگونه آن را با یک تقریب بهتر مقایسه کنیم؟

• چند عملیات (محاسباتی، ذخیره‌سازی) و چقدر ذخیره‌سازی مورد نیاز است؟

به منظور کمی کردن آن، یک کلاس تقریبی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$\mathcal{A}^s := \{ \mathbf{v} \in \ell_p(\mathcal{F}^\Psi) : \sigma_N(\mathbf{v}) \lesssim N^{-s} \}.$$

تمام دنباله‌هایی که خطای تقریب N بار به صورت زیر دارند،

$$\sigma_N(\mathbf{v}) := \min \{ \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_{\ell_p} : |\text{supp } \mathbf{w}| \leq N \}.$$

به شکل زیر تجزیه می‌شوند،

$$\text{supp } \mathbf{v} := \{ \lambda \in \mathcal{F}^\Psi : v_\lambda \neq 0 \}, \quad \mathbf{v} = (v_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{F}^\Psi}.$$

در ابتدا نمونه‌ای را در نظر می‌گیریم که $F = A$ یک عملگر دیفرانسیل بیضوی خطی باشد. یعنی،

$$Au = g \in V'.$$

در عبارت بالا، $A : V \rightarrow V'$ و $g \in V'$ داده شده و $u \in V$ مشخص شده است. همچنین برای گسسته‌سازی، از یک پایه‌ی موجک Ψ در H استفاده می‌کنیم، به طوریکه مدل‌های تغییر یافته، پایه‌های ریس را به ترتیب در V و V' به دست می‌آورند. لذا معادله عملگر می‌تواند به طور معادل زیر نوشته شود،

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{g} \in \ell_p(\mathcal{F}^\Psi).$$

در عبارت بالا، $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{u}$ و $\mathbf{g}$ به صورت زیر نوشته می‌شوند،

$$\mathbf{A} := \mathbf{D}^{-1} a(\Psi, \Psi) \mathbf{D}^{-1} \quad \mathbf{u} := \mathbf{D} (u_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{F}^\Psi} \quad \mathbf{g} := \mathbf{D}^{-1} (g, \Psi).$$

ماتریس نامتناهی $\mathbf{A} (A \in \mathcal{C}_{s^*})$ ، $s^* -$ تراکم پذیر^۲ گفته می‌شود هرگاه برای هر $s^* > s > 0$ و هر $j \in \mathbb{N}$ ، یک ماتریس $\mathbf{A}_j$ وجود داشته باشد، بطوریکه برای بعضی دنباله‌های قابل جمع $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ، ماتریس $\mathbf{A}_j$ در عبارت زیر صدق کند،

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_j\| \leq C \alpha_j 2^{-js}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

معمولاً s^* ، به همواری و ترتیب صفر شدن گشتاورهای موجک‌ها که در فصل ۲ به آنها اشاره شد، بستگی دارد.

¹Active Coefficients

²Compressible

لذا می‌توان یک همتای^۱ خطی RES_{lin} از RES ساخت، بطوریکه $\mathbf{w}_\eta := \text{RES}_{\text{lin}}[\eta, \mathbf{A}, \mathbf{g}, \mathbf{v}]$ برای ورودی متناهی $\mathbf{v}$ در عبارات زیر صدق کند.

$$\|\mathbf{w}_\eta - (\mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{g})\|_{\ell_p} \leq \eta, \quad (۴.۳)$$

$$\|\mathbf{w}_\eta\|_{\mathcal{A}^s} \lesssim (\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{A}^s} + \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{A}^s}), \quad (۵.۳)$$

$$|\text{supp } \mathbf{w}_\eta| \lesssim \eta^{-\frac{1}{s}} \left(\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{A}^s}^{\frac{1}{s}} + \|\mathbf{u}\|_{\mathcal{A}^s}^{\frac{1}{s}} \right). \quad (۶.۳)$$

در عبارات بالا، ثوابت در (۵.۳) و (۶.۳)، فقط به s بستگی دارند. اکنون از شبه‌نرم زیر استفاده می‌کنیم،

$$\|\mathbf{v}\|_{\mathcal{A}^s} := \sup_{N \in \mathbb{N}} N^s \sigma_N(\mathbf{v}).$$

که عامل اصلی برای اثبات بهینگی روش می‌باشد که آن را به صورت زیر بیان می‌کنیم،

قضیه ۱۰.۳. اگر $\mathbf{A} \in \mathcal{C}_{s^*}$ و جواب دقیق $\mathbf{u}$ از $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{g}$ ، به ازای هر $s < s^*$ در عبارت $\mathbf{u} \in \mathcal{A}^s$ صدق کند، آنگاه $\bar{\mathbf{u}}(\varepsilon) = \text{SOLVE}_{\text{lin}}[\varepsilon]$ در عبارات زیر صدق خواهد کرد،

$$\|\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)\| \leq \varepsilon, \quad (۷.۳)$$

$$|\text{supp } \bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)| \lesssim \varepsilon^{-\frac{1}{s}}, \quad (۸.۳)$$

$$|\text{supp } \bar{\mathbf{u}}(\varepsilon)| \sim \text{computational complexity}. \quad (۹.۳)$$

تعریف ۱۰.۳ (ساختار درختی). از نمادگذاری $\mu \in \mathcal{F}^\Psi$ و $\mu \prec \lambda$ برای بیان اینکه μ یک دنباله^۲ از λ است، استفاده می‌کنیم. لذا این را در حالت یک متغیری به صورت عبارت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\psi_\lambda = \psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot -k).$$

بنابراین دنباله^۳ $\lambda = (j, k)$ ، به صورت $\mu = (j+1, 2k)$ و $\nu = (j+1, 2k+1)$ می‌باشد. سپس مجموعه‌ی $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}^\Psi$ یک درخت نامیده می‌شود، هرگاه $\lambda \in \mathcal{T}$ برای تمام $\mu \in \mathcal{F}^\Psi$ و $\mu \prec \lambda$ بر $\mathcal{T}$ دلالت کند.

¹Counterpart

²Descendant

³Children

به نظر می‌رسد که بیشتر موارد گفته شده برای مورد غیرخطی نیز وجود دارد با این تفاوت که تجزیه و تحلیل ارزیابی تقریبی عبارات غیرخطی $R(v)$ ، محدودیتی در ساختار ضرایب معلوم دارد، یعنی اینکه دارای ساختار درختی می‌باشد.

با توجه به مطلب بالا، خطای تقریب درختی N بار به صورت زیر خواهد بود،

$$\sigma_N^{tree}(v) := \min \{ \|v - w\|_{\ell_p} : \mathcal{J} := |\text{supp } w| \text{ باشد یک درخت می باشد } |\mathcal{J}| \leq N \},$$

و فضای تقریب درختی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$\mathcal{A}_{tree}^s := \{v \in \ell_p(\mathcal{F}^\Psi) : \sigma_N^{tree}(v) \lesssim N^{-s}\},$$

که یک فضای شبه نرم، تحت شبه نرم زیر است،

$$\|v\|_{\mathcal{A}_{tree}^s} := \sup_{N \in \mathbb{N}} N^s \sigma_N^{tree}(v).$$

ملاحظه ۳.۰.۳. برای حالت $V = H^t$ بدیهی است که جواب در برخی فضاهای بیسوف^۱ مانند $u \in B_q^{t+ds}(L_q)$ ، $q = (s + \frac{1}{p})^{-1}$ برای هر $r < s$ بر $\mathcal{A}_{tree}^r$ دلالت دارد.

بسط s^* - تراکم پذیری $\mathcal{C}_{s^*}$ ، s^* - پراکندگی^۲ از روش^۳ RES می‌باشد و با ویژگی زیر تعریف می‌شود،

اگر جواب دقیق u از (۲.۳) برای برخی $s < s^*$ در $\mathcal{A}_{tree}^s$ موجود باشد، آنگاه $w_\eta := \text{RES}[\eta, B, R, v]$ برای v متناهی به صورت زیر صدق می‌کند،

$$\begin{aligned} \|w_\eta\|_{\mathcal{A}_{tree}^s} &\leq C (\|v\|_{\mathcal{A}_{tree}^s} + \|u\|_{\mathcal{A}_{tree}^s} + 1), \\ |\text{supp } w_\eta| &\leq C \eta^{\frac{-1}{s}} \left(\|v\|_{\mathcal{A}_{tree}^s}^{\frac{1}{s}} + \|u\|_{\mathcal{A}_{tree}^s}^{\frac{1}{s}} + 1 \right), \\ \text{comp.complexity} &\sim C \left(\eta^{\frac{-1}{s}} \left(\|v\|_{\mathcal{A}_{tree}^s}^{\frac{1}{s}} + \|u\|_{\mathcal{A}_{tree}^s}^{\frac{1}{s}} + 1 \right) + |\mathcal{J}(\text{supp } v)| \right), \end{aligned}$$

در عبارات بالا، C فقط به s وابسته است و $\mathcal{J}(\text{supp } v)$ نشان دهنده‌ی کوچکترین درخت شامل $\text{supp } v$ می‌باشد.

اکنون با توجه به مطالبی که گفته شد آماده هستیم که نتیجه‌ی اصلی را بیان کنیم، بنابراین قضیه زیر را بیان می‌کنیم.

قضیه ۲.۰.۳. اگر RES، به ازای هر $s^* > s$ ، s^* - پراکنده باشد و برای برخی $s < s^*$ ، $u \in \mathcal{A}_{tree}^s$ باشد، آنگاه تقریب‌های $\bar{u}(\varepsilon)$ در عبارات زیر صدق خواهند کرد،

$$\|u - \bar{u}(\varepsilon)\| \leq \varepsilon, \quad |\text{supp } \bar{u}(\varepsilon)| \leq C \varepsilon^{\frac{-1}{s}} \|u\|_{\mathcal{A}_{tree}^s}^{\frac{1}{s}}, \quad \|\bar{u}(\varepsilon)\|_{\mathcal{A}_{tree}^s} \leq C \|u\|_{\mathcal{A}_{tree}^s},$$

در عبارات بالا، C فقط به s وابسته است و تعداد عملیات‌ها توسط $C \varepsilon^{\frac{-1}{s}} \|u\|_{\mathcal{A}_{tree}^s}^{\frac{1}{s}}$ کراندار می‌باشند.

¹Besov Spaces

²Sparsity

³Scheme

چون تبدیل موجک، از پیچیدگی^۱ خطی برخوردار است، لذا تعداد کل عملیات‌های مورد نیاز، همان موردی است که در قضیه ۲.۰.۳ ذکر شده است.

بعدا نشان خواهیم داد که ضرایب موجک $\bar{v}^n$ از جواب (۱۲.۱)، متعلق به یک کلاس تقریبی خاص $\mathcal{A}_{tree}^s$ می‌باشد و از این رو، با توجه به قضیه ۲.۰.۳ یک تخمین روی پایه‌ی $\bar{v}_\varepsilon^n$ و همچنین تعداد عملیات مورد نیاز برای محاسبه آن را به دست می‌آوریم.

قضیه ۳.۰.۳. ضرایب موجک $\bar{v}^n$ از جواب (۱۲.۱) به ازای هر $s < \frac{1}{d-2}$ متعلق به $\mathcal{A}_{tree}^s$ است، در اینجا $d \geq 2$ ، بعد $\mathcal{D}$ می‌باشد.

برهان. به ازای هر $r = \frac{3d-2+4\varepsilon}{2d-2+4\varepsilon}$ ، $r(\tau A) \in \phi(L_r(\mathcal{D}), B_q^r(L_q))$ ، $r = \frac{3d-2+4\varepsilon}{2d-2+4\varepsilon}$ و $\frac{1}{q} = \frac{(r-1)}{d} + \frac{1}{p}$ می‌باشد، و $\varepsilon > 0$ است.

بدین ترتیب، عبارت از ملاحظه ۳.۰.۳ استنباط می‌شود. توجه کنید که $t = 1$ و از این رو، $r = 1 + ds$ می‌باشد. $\square$

این فصل را با ارائه اینکه خطای کلی بعد از n مرحله، تقریباً در هر مرحله (۱۲.۱) تا خطای قابل تحمل ε_n حل می‌شود، که با استفاده از الگوریتم موجک تطبیقی در بالا توضیح داده شد، به پایان می‌رسانیم. بنابراین تعریف می‌کنیم،

$$E_j^n = E_n \cdots E_{j+1}, \quad E_n^n = I; \quad 0 \leq j < n \leq N,$$

و بطور مشابه $\tilde{E}_j^n$. لذا داریم،

$$\begin{aligned} v_\varepsilon^n - \bar{v}^n &= \tilde{E}_\circ^n(u_\circ) - E_\circ^n(u_\circ) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(E_{j+1}^n \left(\tilde{E}_\circ^{j+1}(u_\circ) \right) - E_j^n \left(\tilde{E}_\circ^j(u_\circ) \right) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(E_{j+1}^n \left(\tilde{E}_j^{j+1} \left(\tilde{E}_\circ^j(u_\circ) \right) \right) - E_{j+1}^n \left(E_j^{j+1} \left(\tilde{E}_\circ^j(u_\circ) \right) \right) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(E_{j+1}^n \left(\tilde{E}_{j+1}^j(v_\varepsilon^j) \right) - E_{j+1}^n \left(E_{j+1}^j(v_\varepsilon^j) \right) \right). \end{aligned}$$

یک استدلال ساده نشان می‌دهد که اگر $\tau L_f \leq \frac{1}{p}$ باشد، آنگاه ثابت لیپشیتز از E_n برای بعضی $c > 0$ توسط $(1 - \tau L_f)^{-1} \leq e^{c\tau L_f}$ کراندار می‌باشد.

برای اثبات، از لم ۱.۱.۵ استفاده می‌کنیم، از این رو E_{j+1}^n دارای یک ثابت لیپشیتز کراندار توسط $e^{c(t_n - t_{j+1})} \leq e^{ct_N}$ می‌باشد.

¹Complexity

بدین ترتیب، با استفاده از (۱۳.۱) و مطالبی که در بالا گفته شد، عبارت زیر را به دست می آوریم،

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon^n - \bar{v}^n\|_{L_{\mathbb{P}}(\Omega, H)} &= \sum_{j=0}^{n-1} \left\| E_{j+1}^n \left(\tilde{E}_{j+1} (v_\varepsilon^j) \right) - E_{j+1}^n (E_{j+1} (v_\varepsilon^j)) \right\|_{L_{\mathbb{P}}(\Omega, H)} \\ &\leq \sum_{j=0}^{n-1} e^{c(t_n - t_{j+1})} \left\| \tilde{E}_{j+1} (v_\varepsilon^j) - E_{j+1} (v_\varepsilon^j) \right\|_{L_{\mathbb{P}}(\Omega, H)} \\ &\leq \sum_{j=1}^n e^{c(t_n - t_j)} \varepsilon_j \leq e^{ct_N} \sum_{j=1}^n \varepsilon_j. \end{aligned}$$

ملاحظه ۴.۰.۳. منظور کلی از عبارت بالا، یافتن کرانی برای رابطه $\|v_\varepsilon^n - \bar{v}^n\|_{L_{\mathbb{P}}(\Omega, H)}$ می باشد.

و درنهایت پس از جذر گرفتن، عبارت را به دست می آوریم.

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} \|v_\varepsilon^n - \bar{v}^n\|_{L_{\mathbb{P}}(\Omega, H)} \leq C \sum_{n=1}^N \varepsilon_n. \quad (۱۰.۳)$$

فصل ۴

آنالیز خطا برای پیچش تصادفی

تعریف ۱.۰.۴ (پیچش تصادفی). w را یک پیچش تصادفی نامیم هرگاه در عبارت زیر صدق کند،

$$w(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A} dW(s),$$

فرض کنید $S_J = S_{\Lambda_J}$ ، یک فضای چند تفکیکی (۱.۲) باشد. تقریب گالرکین چند تفکیکی برای معادله $Au = f$ در V' ، $u_J \in S_J$ می باشد. بطوریکه،

$$a(u_J, v_J) = (f, v_J) \quad \forall v \in S_J. \quad (1.4)$$

تصویر متعامد $P_J : H \rightarrow S_J$ را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$(P_J v, w_J) = (v, w_J), \quad v \in H, w_J \in S_J. \quad (2.4)$$

توجه کنید که P_J می تواند با (۲.۴) و با توجه به $S_J \subset V$ به V' تعمیم یابد. عملگر $A_J : S_J \rightarrow S_J$ را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$a(A_J v_J, w_J) = a(v_J, w_J), \quad u_J, v_J \in S_J.$$

آنگاه (۱.۴)، در S_J به صورت $A_J u_J = P_J f$ می باشد.

از طرفی می توان نوشت، $u_J = R_J u$ ، که در آن $R_J : V \rightarrow S_J$ عملگر ریتس^۱ است که به صورت زیر تعریف می شود،

$$a(R_J v, w_J) = a(v, w_J), \quad v \in V, w_J \in S_J.$$

¹Ritz Projector

فضای چند تفکیکی از مرتبه m می باشد، هرگاه رابطه زیر برقرار باشد،

$$\inf_{w_J \in S_J} \|v - w_J\|_{L_V(\Omega, H)} \lesssim 2^{-mJ} \|v\|_{m; \mathcal{D}}, \quad v \in H^m(\mathcal{D}) \cap V. \quad (3.4)$$

با استفاده از همواری بیضوی و با توجه به مفروضات روی $\mathcal{D}$ رابطه‌ی زیر برقرار است،

$$\|v - R_J v\|_{m; \mathcal{D}} \lesssim \inf_{w_J \in S_J} \|v - w_J\|_{L_V(\Omega, H)} \lesssim 2^{-mJ} \|v\|_{m; \mathcal{D}}, \quad v \in H^m(\mathcal{D}) \cap V. \quad (4.4)$$

به عبارت دیگر،

$$\|u_J - u\|_{m; \mathcal{D}} \lesssim 2^{-mJ} \|u\|_{m; \mathcal{D}}.$$

تعریف ۲.۰.۴. حساب دیفرانسیل و انتگرال هیل-فیلیپس^۱، نماد $f(A)$ را برای عملگر A از نیم گروه کاملاً پیوسته $0 \leq t \rightarrow T(t)$ در برخی فضاها X مشخص می کند. حساب دیفرانسیل و انتگرال به عنوان نگاشت $\Phi_A : f \rightarrow f(A)$ در نظر گرفته می شود. بطوریکه [۲۷]،

$$f(A)x = \int_0^\infty T(t)x \, d\sigma(t); \quad x \in X, \sigma \in [0, \infty).$$

توضیح ۱.۰.۴ (نامساوی هولدر^۲). در ریاضیات، یکی از نامساوی های پایه و کاربردی در فضای L_P ، نامساوی هولدر است. این نامساوی به افتخار اوتو هولدر^۳ ریاضی دان آلمانی، که این نامساوی را در سال ۱۸۸۹ میلادی مورد بررسی قرار داده است، نامساوی هولدر نامیده شده است.

به صورت رسمی، نامساوی هولدر که گاهی به آن قضیه هولدر نیز می گویند، به صورت زیر بیان می شود.

قضیه ۱.۰.۴ (قضیه هولدر). فرض کنید که (S, Σ, μ) یک فضای اندازه پذیر^۴ باشد. همچنین دو مقدار p و q را مقادیری حقیقی در بازه $[1, \infty)$ در نظر بگیرید که رابطه $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ بینشان برقرار باشد. آنگاه برای هر تابع با مقادیر حقیقی (مختلط) مثل f و g روی S داریم،

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

توضیح ۲.۰.۴ (نامساوی جنسن^۵). یکی از نامساوی های اصلی در ریاضیات، بخصوص در بررسی نامساوی ها برای توابع مقعر و محدب، نامساوی جنسن است. این نامساوی به افتخار ریاضی دان دانمارکی، جان جنسن^۶ نام گذاری شده است که در سال ۱۹۰۶ آن را برای توابع محدب معرفی کرد.

¹Hille-Phillips

²Holder Inequality

³Otto Holder

⁴Measurable Space

⁵Jensen Inequality

⁶John Jensen

هدف او از ابداع این نامساوی، مشخص کردن رابطه بین انتگرال یک تابع محدب با تابعی محدب از یک انتگرال بود. البته امروزه این نامساوی در بسیاری از زمینه‌های دیگر به غیر از انتگرال نیز به کار می‌رود.

در ریاضیات به کمک نامساوی جنسن، می‌توان نشان داد که یک تبدیل محدب روی میانگین، همیشه از میانگین آن تبدیل محدب، کوچکتر است. البته این امر برای توابع مقعر نیز برعکس است. به این معنی که یک تبدیل مقعر روی میانگین، همیشه از میانگین آن تبدیل مقعر، بزرگتر است.

فرض کنید ϕ تابعی محدب و اعداد $x_1, x_2, \dots, x_n$ نیز در دامنه آن قرار داشته باشند. با انتخاب مقادیر وزن a_i نامساوی جنسن، به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$\phi\left(\frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}\right) \leq \left(\frac{\sum a_i \phi(x_i)}{\sum a_i}\right).$$

همچنین اگر تابع ϕ مقعر باشد، آنگاه این نامساوی به صورت زیر در خواهد آمد.

$$\phi\left(\frac{\sum a_i x_i}{\sum a_i}\right) \geq \left(\frac{\sum a_i \phi(x_i)}{\sum a_i}\right).$$

تعریف ۳.۰.۴ (همگرایی یکنواخت). اگر $\{f_n : X \rightarrow [0, \infty)\}$ یک دنباله‌ای از توابع قابل اندازه‌گیری روی مجموعه قابل اندازه‌گیری X باشد بطوریکه $f_n \rightarrow f$ و $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ برقرار باشند، آنگاه رابطه زیر برقرار خواهد بود،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n = \int_X f.$$

اکنون با توجه به تعاریف بالا، لم بعدی را که مستقل می‌باشد به شکل کلی زیر، بیان می‌کنیم.

لم ۱.۰.۴. فرض کنید $-A$ و $-B$ نیم‌گروه‌هایی به‌طور قوی، پیوسته e^{-tA} و e^{-tB} را روی فضای باناخ X تعریف کنند و فرض کنید $r(s) = (1+s)^{-1}$ باشد، آنگاه برای تمام $\tau > 0$ و $N \in \mathbb{N}$ و $x, y \in X$ عبارات زیر برقرار هستند،

$$\tau \sum_{n=1}^N \|r^n(\tau B)y - r^n(\tau A)x\|^p \leq \int_0^\infty \|e^{-tB}y - e^{-tA}x\|^p dt, \quad 1 \leq p < \infty, \quad (5.4)$$

$$\|r^n(\tau B)y - r^n(\tau A)x\| \leq \sup_{t \geq 0} \|e^{-tB}y - e^{-tA}x\|. \quad (6.4)$$

برهان. با استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال هیل-فیلیپس داریم،

$$r^n(\tau B)y - r^n(\tau A)x = \int_0^\infty (e^{-t\tau B}y - e^{-t\tau A}x) f_n(t) dt, \quad (7.4)$$

در (۷.۴)، f_n نشان‌دهنده n امین توان پیچش $f(t) = e^{-t}$ می‌باشد، از این رو $\|f_n\|_{L_1(\mathbb{R}_+)} = 1$. از طرفی نامساوی (۶.۴) بلافاصله توسط نامساوی هولدر استنباط می‌شود.

برای فهمیدن (۵.۴)، توجه داریم که f_n یک تراکم (چگالی)^۱ احتمالی است و از این رو، توسط نامساوی جنسن و (۷.۴) عبارات زیر را داریم،

$$\begin{aligned} \tau \sum_{n=1}^N \|r^n(\tau B)y - r^n(\tau A)x\|^p &= \tau \sum_{n=1}^N \left\| \int_0^\infty (e^{-t\tau B}y - e^{-t\tau A}x) f_n(t) dt \right\|^p \\ &\leq \tau \sum_{n=1}^N \int_0^\infty \|e^{-t\tau B}y - e^{-t\tau A}x\|^p f_n(t) dt = \int_0^\infty \|e^{-tB}y - e^{-tA}x\|^p dt \sup_{t>0} \sum_{n=1}^\infty f_n(t). \end{aligned}$$

ملاحظه ۱.۰.۴. تابع نمایی e^{-tA} ، با تحقق $-A$ در H با استفاده از رابطه زیر تولید شده است،

$$D(A) = H^2(\mathcal{D}) \cap H_0^1(\mathcal{D}).$$

سرانجام توسط همگرایی یکنواخت که به آن اشاره کردیم، تبدیل لاپلاس $\sum_{n=1}^\infty f_n$ را به صورت زیر خواهیم داشت،

$$\left(\sum_{n=1}^\infty f_n \right)^\wedge(\lambda) = \sum_{n=1}^\infty \hat{f}_n(\lambda) = \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{1+\lambda} \right)^n = \frac{1}{\lambda}, \quad \lambda > 0.$$

بدین ترتیب، $\sum_{n=1}^\infty f_n \equiv 1$ و اثبات کامل می شود. $\square$

در ادامه، یک تخمین خطا برای تقریب چند تفکیکی از نیم گروه e^{-tA} را نتیجه می گیریم و آن، تقریب اوایلر $r^n(\tau A)$ می باشد.

لم ۲.۰.۴. فرض کنید S_J یک فضای چند تفکیکی از مرتبه m باشد و همچنین فرض کنید A_J, A و P_J مانند بالا باشند، آنگاه برای $\tau, N \geq 1, T \geq 0$ داریم،

$$\left(\int_0^T \|e^{-tA_J}P_Jv - e^{-tA}v\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 2^{-J\beta} \|v\|_{\beta-1}, \quad 0 \leq \beta \leq m, \quad (۸.۴)$$

$$\left(\tau \sum_{n=1}^N \|r^n(\tau A_J)P_Jv - r^n(\tau A)v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 2^{-J\beta} \|v\|_{\beta-1}, \quad 0 \leq \beta \leq m. \quad (۹.۴)$$

برهان. تخمین (۸.۴) در زمینه عناصر متناهی، بدیهی است. برای اثبات، از [۱۶، قضیه ۵.۲] استفاده می کنیم. بنابراین فرض کنید T_J در روابط زیر صدق کند،

- T_J عملگر نیمه متناهی مثبت روی فضای L_2 و متناهی مثبت روی فضای S_J می باشد.
- یک عدد صحیح مثبت $r \geq 2$ وجود دارد. بطوریکه،

$$\|(T_J - T)f\| \leq C j^s \|f\|_{s-2}, \quad 2 \leq s \leq r, \quad f \in H^{s-2}.$$

¹Density

و فرض کنید u_j و u به ترتیب، با استفاده از $v_j = P_j v$ جواب معادلات زیر باشند،

$$\begin{aligned} T_j u_{j,t} + u_j &= T_j f, \quad t > 0, \quad u_j(0) = v_j, \\ u_t - \Delta u &= f, \quad t > 0. \end{aligned}$$

دراین صورت داریم،

$$\left(\int_0^t \|u_j - u\|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq C j^r \left(\int_0^t \|u\|_r^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t \geq 0.$$

اکنون، ضرب داخلی L_2 را از معادله خطای زیر با استفاده از e در نظر می گیریم،

$$T_j e_t + e = p, \quad p = -(T_j - T)\Delta u = (R_j - I)u.$$

و چون T_j ، نیمه متناهی مثبت است، لذا عبارت زیر مشاهده می شود،

$$\mathfrak{V}(T_j e_t, e) = \frac{d}{dt}(T_j e, e).$$

از این رو داریم،

$$\frac{d}{dt}(T_j e, e) + \mathfrak{V}\|e\|^2 = (p, e) \leq \|e\|^2 \|p\|^2.$$

و پس از انتگرال گیری رابطه زیر را به دست می آوریم،

$$(T_j e(t), e(t)) + \int_0^t \|e\|^2 ds \leq (T_j e(0), e(0)) + \int_0^t \|p\|^2 ds.$$

توجه داریم که برای $v_j = P_j v$ ، عبارت $T_j e(0) = 0$ برقرار می باشد. بنابراین رابطه زیر را داریم،

$$(T_j e(0), w) = (P_j v - v, T_j w) = 0, \quad \forall w \in L_2.$$

و چون $T_j w \in S_j$ می باشد، لذا داریم،

$$\int_0^t \|e\|^2 ds \leq \int_0^t \|p\|^2 ds.$$

اکنون نتیجه بدست آمده، با استفاده از رابطه زیر اثبات می شود،

$$\|v - R_j v\| \leq C j^s \|v\|_s, \quad 2 \leq s \leq r.$$

و همچنین ممکن است در یک روش کاملاً یکسان، به منظور استفاده کردن از ویژگی تقریب (۴.۴) از روش ریتس R_J ، هموار کردن سهموی (۳.۵) و درونیایی، اثبات شده باشد.

سرانجام، با استفاده از لم ۱.۰.۴، توسط $x = v$ و $y = P_J v$ ، $B = A_J$ ، (۹.۴) از (۸.۴) استنباط می شود. یعنی،

$$\left(\tau \sum_{n=1}^N \|r^n(\tau A_J) P_J v - r^n(\tau A) v\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^\infty \|e^{-tA_J} P_J v - e^{-tA} v\|^2 dt \leq C 2^{-J\beta} \|v\|_{\beta-1}.$$

□

(توجه کنید که C مستقل از T است.)

اکنون آماده هستیم که تقریب چند تفکیکی از w^n در (۹.۱) را در نظر بگیریم.

توضیح ۳.۰.۴ (ایزومتري $It\hat{o}$). ایزومتري $It\hat{o}$ ، یک قضیه مفید در حساب دیفرانسیل و انتگرال تصادفی است که ابزاری اساسی را در محاسبه انتگرال تصادفی با توجه به حرکت براونی فراهم می کند.

قضیه ۲.۰.۴. فرض کنید S_J یک فضای چند تفکیکی از مرتبه m باشد و w و w_J^n جواب های (۹.۱) و (۱۱.۱) باشند. اگر $\|A^{\frac{\beta-1}{\gamma}} Q^{\frac{1}{\gamma}}\|_{HS} < \infty$ برای برخی $0 \leq \beta \leq m$ برقرار باشد. آنگاه داریم،

$$\left(\mathbb{E} \left[\|w_J^n - w^n\|^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} \leq C 2^{-J\beta} \left\| A^{\frac{\beta-1}{\gamma}} Q^{\frac{1}{\gamma}} \right\|_{HS}.$$

برهان. فرض کنید $t_k = k\tau$ و $k = 0, \dots, n$ باشد. توسط (۹.۱)، (۱۱.۱) و استقرا داریم،

$$\begin{aligned} w_J^n - w^n &= \left[w_J^{n-1} + P_J \Delta W^n - \tau A_J w_J^n \right] - \left[w^{n-1} + \Delta W^n - \tau A w^n \right] \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[r^{n-k+1}(\tau A_J) P_J - r^{n-k+1}(\tau A) \right] dW(s), \end{aligned} \quad (۱۰.۴)$$

از این رو توسط ایزومتري $It\hat{o}$ ، عبارت زیر را به دست می آوریم،

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|w_J^n - w^n\|^2 \right] &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| \left[r^{n-k+1}(\tau A_J) P_J - r^{n-k+1}(\tau A) \right] Q^{\frac{1}{\gamma}} \right\|_{HS}^2 ds \\ &= \sum_{k=1}^n \tau \left\| \left[r^k(\tau A_J) P_J - r^k(\tau A) \right] Q^{\frac{1}{\gamma}} \right\|_{HS}^2. \end{aligned}$$

فرض کنید $\{e_l\}_{l=1}^\infty$ یک پایه متعامد از H باشد، آنگاه با استفاده از لم ۲.۰.۴ عبارت زیر را به دست می آوریم،

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\|w_J^n - w^n\|^2 \right] &= \sum_{l=1}^\infty \sum_{k=1}^n \tau \left\| \left[r^k(\tau A_J) P_J - r^k(\tau A) \right] Q^{\frac{1}{\gamma}} e_l \right\|^2 \\ &\leq C \sum_{l=1}^\infty 2^{-2J\beta} \left\| Q^{\frac{1}{\gamma}} e_l \right\|_{\beta-1}^2 = C 2^{-2J\beta} \left\| A^{\frac{\beta-1}{\gamma}} Q^{\frac{1}{\gamma}} \right\|_{HS}^2. \end{aligned}$$

□

لذا، این اثبات را کامل می کند.

فصل ۵

گسسته‌سازی زمانی محض

در اثبات‌های زیر، اغلب از روابط شناخته شده، در مورد نیم‌گروه تحلیلی e^{-tA} برای بعضی $C = C(\alpha)$ استفاده خواهیم کرد. یعنی،

$$\|A^\alpha e^{-tA}\| \leq C t^{-\alpha}, \quad \alpha \geq 0, \quad t > 0, \quad (1.5)$$

$$\|(e^{-tA} - I) A^{-\alpha}\| \leq C t^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

برای مثال، [۱۴، فصل دوم، قضیه ۴.۶] را ببینید.

همچنین می‌توانیم عبارت زیر را ثابت کنیم،

$$\int_0^t \|A^{\frac{1}{p}} e^{-sA} v\|^2 ds \leq \frac{1}{p} \|v\|^2, \quad v \in H, \quad t \geq 0. \quad (3.5)$$

برای اثبات (۳.۵) از فرضیات روی A استفاده می‌کنیم. بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} \int_0^t \|T(s)v\|^2 ds &\leq \frac{1}{p} \|A^{-\frac{1}{p}} v\|^2, \quad v \in H, \quad t \geq 0, \\ \int_0^t \|T_h(s)P_h v\|^2 ds &\leq \frac{1}{p} \|A_h^{-\frac{1}{p}} P_h v\|^2, \quad v \in H, \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

ملاحظه ۱.۰.۵. در عبارت بالا، منظور از $T(s)$ ، عبارت e^{-sA} می‌باشد.

در ادامه، وجود، منحصربه‌فردی و نتیجه پایدار را از [۱۱، لم ۱.۳] نقل قول می‌کنیم.

لم ۱.۰.۵. اگر برای برخی $\beta \geq 0$ و $u_0 \in L_p(\Omega, H)$ و (۲.۱)، رابطه‌ی $\|A^{\frac{\beta-1}{p}} Q^{\frac{1}{p}}\|_{HS} < \infty$ برقرار باشد، آنگاه یک جواب میانه یکتا به صورت $\{u(t)\}_{t \geq 0}$ از (۱.۱) وجود دارد که $\sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \|u(t)\|^2 \leq K$ به‌طوریکه $K = K(u_0, T, L_f)$ می‌باشد.

برهان. با استفاده از فرضیات داریم،

$$\left\| A^{-\frac{1}{p}} Q^{\frac{1}{p}} \right\|_{HS} < \infty,$$

که با توجه به (۴.۵) عبارت بالا، بر رابطه زیر دلالت دارد،

$$\int_0^t \left\| T(s) Q^{\frac{1}{p}} \right\|_{HS}^2 ds < \infty.$$

اکنون فرض کنید $K > 0$ وجود داشته باشد بطوریکه،

$$|F(x) - f(y)| \leq K |x - y|, \quad x, y \in H.$$

و همچنین معادله دیفرانسیل تصادفی زیر را در نظر بگیرید،

$$du(t) = Au(t) + F(u(t))dt + BdW(t), \quad (5.5)$$

$$u(0) = x \in H.$$

حال، منظور از یک جواب میانه از (۵.۵) روی بازه $[0, T]$ ، یک فرآیند تصادفی $u \in C_W([0, T]; H)$ می‌باشد. بطوریکه،

$$u(t) = e^{tA}x + \int_0^t e^{(t-s)A}F(u(s))ds + W_A(t). \quad (6.5)$$

سپس برای هر $x \in H$ ، (۵.۵) دارای یک جواب میانه یکتا بصورت $u \in C_W([0, T]; H)$ می‌باشد. برای این منظور قرار می‌دهیم،

$$Z_T = C_W([0, T]; H),$$

رابطه (۶.۵) معادل با معادله زیر در Z_T می‌باشد.

$$u(t) = e^{tA}x + \gamma(u)(t) + W_A(t), \quad t \in [0, T],$$

در عبارت بالا، $\gamma(u)(t)$ بصورت زیر می‌باشد،

$$\gamma(u)(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}F(u(s))ds, \quad u \in Z_T, \quad t \in [0, T],$$

γ نگاشت Z_T را بصورت زیر ترسیم می‌کند،

$$\|\gamma(u) - \gamma(u_1)\|_{Z_T} \leq TM_T \|u - u_1\|_{Z_T}, \quad u, u_1 \in Z_T,$$

ملاحظه ۲.۰.۵. توجه کنید که در عبارت بالا، M_T بصورت $M_T = \sup_{t \in [0, T]} \|e^{tA}\|$ می‌باشد.

اکنون فرض کنید $T_1 \in (0, T]$ باشد بطوریکه $T_1 M_T < 1$ ، آنگاه γ یک همگرایی (فشرده‌گی)

^۱ روی Z_{T_1} می‌باشد. بنابراین، (۵.۵) دارای یک جواب میانه یکتا روی $[0, T]$ است. $\square$

^۱Contraction

قضیه ۱.۰.۵. فرض کنید برای بعضی $\eta \in [\frac{1}{p}, \frac{1}{q}]$ ، رابطه‌ی $\|A^{-\eta} Q^{\frac{1}{p}}\|_{HS} < \infty$ برقرار باشد. آنگاه پیش‌تصادفی $w(t) := \int_0^t e^{-(t-\sigma)A} dW(\sigma)$ ، میانگین مجذور هولدر پیوسته روی بازه $[0, \infty)$ با ثابت هولدر $C = C(\eta)$ و توان هولدر $\frac{1}{p} - \eta$ می‌باشد. یعنی،

$$\left(\mathbb{E} \|w(t) - w(s)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C |t - s|^{\frac{1}{p} - \eta}, \quad t, s \geq 0.$$

برهان. برای $\frac{1}{p} = \eta$ نتیجه از لم ۱.۰.۵ استنباط می‌شود. فرض کنید $\eta \in [\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ و بدون کم شدن از کلیت، فرض کنید $s < t$ باشد. اکنون با استقلال نمو W داریم،

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|w(t) - w(s)\|^2 &= \mathbb{E} \left\| \int_s^t e^{-(t-\sigma)A} dW(\sigma) \right\|^2 + \\ &\mathbb{E} \left\| \int_0^s e^{-(t-\sigma)A} - e^{-(s-\sigma)A} dW(\sigma) \right\|^2 = I_1 + I_2. \end{aligned}$$

با استفاده از ایزومتري $It\hat{o}$ و (۱.۵)، عبارات زیر استنباط می‌شود،

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbb{E} \left\| \int_s^t A^\eta e^{-(t-\sigma)A} A^{-\eta} dW(\sigma) \right\|^2 = \int_s^t \|A^\eta e^{-(t-\sigma)A} A^{-\eta} Q^{\frac{1}{p}}\|_{HS}^2 d\sigma \\ &\leq C \int_s^t (t-\sigma)^{1-\frac{2}{p}\eta} \|A^{-\eta} Q^{\frac{1}{p}}\|_{HS}^2 d\sigma \leq \frac{C}{1-\frac{2}{p}\eta} (t-s)^{1-\frac{2}{p}\eta} \|A^{-\eta} Q^{\frac{1}{p}}\|_{HS}^2. \end{aligned}$$

سرانجام، فرض کنید $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ ، یک پایه متعامد از H باشد، آنگاه توسط (۲.۵) و (۳.۵) داریم،

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^s \|(e^{-(t-\sigma)A} - e^{-(s-\sigma)A}) Q^{\frac{1}{p}}\|_{HS}^2 d\sigma \\ &= \sum_{k=1}^\infty \int_0^s \|(e^{-(t-s)A} - I) A^{-(\frac{1}{p}-\eta)} A^{\frac{1}{p}-\eta} e^{-(s-\sigma)A} Q^{\frac{1}{p}} e_k\|^2 d\sigma \\ &\leq C(t-s)^{1-\frac{2}{p}\eta} \sum_{k=1}^\infty \int_0^s \|A^{\frac{1}{p}} e^{-(s-\sigma)A} A^{-\eta} Q^{\frac{1}{p}} e_k\|^2 d\sigma \\ &\leq C(t-s)^{1-\frac{2}{p}\eta} \sum_{k=1}^\infty \|A^{-\eta} Q^{\frac{1}{p}} e_k\|^2 = C(t-s)^{1-\frac{2}{p}\eta} \|A^{-\eta} Q^{\frac{1}{p}}\|_{HS}^2. \end{aligned} \tag{۷.۵}$$

□

قضیه‌ی بعدی، نشان می‌دهد که همواری w ، به جواب مساله نیمه‌خطی، انتقال می‌یابد.

قضیه ۲.۰.۵. اگر برای برخی $0 \leq \beta < 1$ و $u_0 \in L_p(\Omega, \dot{H}^\beta)$ و $\|A^{\frac{\beta-1}{p}} Q^{\frac{1}{p}}\|_{HS} < \infty$ باشد، آنگاه $C = C(T, u_0, \beta)$ وجود دارد به‌طوری‌که جواب u از (۱.۱)، در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند،

$$\left(\mathbb{E} \|u(t) - u(s)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C |t - s|^{\frac{\beta}{p}}, \quad t, s \in [0, T].$$

برهان. فرض کنید $0 \leq s < t \leq T$ و $T > 0$ باشند، آنگاه از (۴.۱) داریم،

$$\begin{aligned} u(t) - u(s) &= (e^{-tA} - e^{-sA}) u_0 + \int_s^t e^{-(t-r)A} f(u(r)) dr \\ &\quad + \int_0^s (e^{-(t-r)A} - e^{-(s-r)A}) f(u(r)) dr + w(t) - w(s). \end{aligned}$$

برای $0 \leq \beta \leq 2$ داریم،

$$\mathbb{E} \left\| (e^{-tA} - e^{-sA}) u_0 \right\|_\beta^2 \leq C |t - s|^\beta \mathbb{E} \|u_0\|_\beta^2.$$

چون f ، لیپشیتز است، پس $\|f(u)\| \leq C(1 + \|u\|)$ می‌باشد.

بنا به کرانداری نرم نیم‌گروه e^{-tA} و لم ۱.۰.۵ داریم،

$$\mathbb{E} \left\| \int_s^t e^{-(t-r)A} f(u(r)) dr \right\|_\beta^2 \leq C |t - s|^\beta \left(1 + \sup_{r \in [0, t]} \mathbb{E} \|u(r)\|_\beta^2 \right) \leq C |t - s|^\beta.$$

همچنین، برای هر $0 \leq \beta < 1$ عبارت زیر را به دست می‌آوریم،

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left\| \int_0^s (e^{-(t-r)A} - e^{-(s-r)A}) f(u(r)) dr \right\|_\beta^2 &\leq s \mathbb{E} \int_0^s \left\| (e^{-(t-r)A} - e^{-(s-r)A}) f(u(r)) \right\|_\beta^2 dr \\ &\leq Cs \left(1 + \sup_{r \in [0, T]} \mathbb{E} \|u(r)\|_\beta^2 \right) \int_0^s \left\| e^{-(t-r)A} - e^{-(s-r)A} \right\|_\beta^2 dr \\ &\leq Cs \int_0^s \left\| A^{\frac{\beta}{2}} e^{-(s-r)A} (e^{-(t-s)A} - I) A^{-\frac{\beta}{2}} \right\|_\beta^2 dr \\ &\leq C |t - s|^{\beta} \leq C |t - s|^\beta. \end{aligned}$$

سرانجام، باتوجه به قضیه ۱.۰.۵ و توسط $\eta = -\frac{\beta-1}{\beta}$ ، عبارت زیر را به دست می‌آوریم،

$$\mathbb{E} \|w(t) - w(s)\|_\beta^2 \leq C |t - s|^\beta.$$

□

برای بررسی مرتبه‌ی گام زمانی اویلر پسرو (۸.۱)، تخمین‌های خطای قطعی زیر را بیان می‌کنیم، که در آنها $r(\tau A) = (I + \tau A)^{-1}$ می‌باشد.

لم ۲.۰.۵. تخمین‌های خطای زیر برای $t_n = n\tau > 0$ ، برقرار می‌باشند. داریم،

$$\| [e^{-n\tau A} - r^n(\tau A)] v \| \leq C \tau^{\frac{\beta}{2}} \|v\|_\beta; \quad 0 \leq \beta \leq 2, \quad (۸.۵)$$

$$\| [e^{-n\tau A} - r^n(\tau A)] v \| \leq C \tau t_n^{-1} \|v\|; \quad (۹.۵)$$

$$\sum_{k=1}^n \tau \left\| [r^k(\tau A) - e^{-k\tau A}] v \right\|_\beta^2 \leq C \tau^\beta \|v\|_{\beta-1}^2; \quad 0 \leq \beta \leq 2. \quad (۱۰.۵)$$

برهان. تخمین‌های (۸.۵) و (۹.۵)، برای مثال در [۱۶، فصل ۷] نشان داده شده‌اند.

همچنین تخمین (۱۰.۵)، می‌تواند در یک روش مشابه مانند (۱۷.۲) در [۱۸، لم ۸.۲]

□

اثبات شود.

قضیه ۳.۰.۵. اگر برای بعضی $0 \leq \beta < 1$ ، $u_0 \in L_{\frac{1}{\beta}}(\Omega, \dot{H}^{\beta})$ و $\|A^{\frac{\beta-1}{\beta}} Q^{\frac{1}{\beta}}\|_{HS} < \infty$ برقرار باشند، آنگاه $C = C(T, u_0, \beta)$ وجود دارد، به طوریکه برای هر $0 < \tau < \frac{1}{\beta L_f}$ ، جواب‌های u از (۴.۱) و u^n از (۸.۱)، در عبارت زیر صدق می‌کنند،

$$\left(\mathbb{E} \|u(t_n) - u^n\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \tau^{\frac{\beta}{\beta-1}}, \quad t_n = n\tau \in [0, T].$$

برهان. با استفاده از $e^n := u(t_n) - u^n$ داریم،

$$\begin{aligned} e^n &= [e^{-t_n A} - r^n(\tau A)] u_0 + \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [e^{-(t_n-s)A} - r^{n-k+1}(\tau A)] dW(s) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-(t_n-s)A} f(u(s)) - r^{n-k+1}(\tau A) f(u_k) ds = e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

خطای e_1 به آسانی، با استفاده از (۸.۵) به صورت زیر، کراندار می‌باشد.

$$\mathbb{E} \|e_1\|^2 = \mathbb{E} \|[e^{-t_n A} - r^n(\tau A)] u_0\|^2 = \mathbb{E} \|[e^{-n\tau A} - r^n(\tau A)] u_0\|^2 \leq C \tau^{\beta} \mathbb{E} \|u_0\|_{\beta}^2.$$

سهم e_2 ، خطای تصادفی خطی می‌باشد، لذا در ابتدا e_2 را به صورت زیر تجزیه می‌کنیم،

$$\begin{aligned} e_2 &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [e^{-t_{n-k+1}A} - r^{n-k+1}(\tau A)] dW(s) \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [e^{-(t_n-s)A} - e^{-t_{n-k+1}A}] dW(s) = e_{21} + e_{22}. \end{aligned}$$

اکنون با استفاده از ایزومتری $It\hat{o}$ ، استقلال نمو W و همچنین (۱۰.۵) داریم،

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|e_{21}\|^2 &= \sum_{k=1}^n \tau \left\| [r^k(\tau A) - e^{-k\tau A}] Q^{\frac{1}{\beta}} \right\|_{HS}^2 \leq \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \tau \left\| [r^k(\tau A) - e^{-k\tau A}] Q^{\frac{1}{\beta}} f_l \right\|^2 \\ &\leq C \sum_{l=1}^{\infty} \tau^{\beta} \left\| Q^{\frac{1}{\beta}} f_l \right\|_{\beta-1}^2 = C \tau^{\beta} \left\| A^{\frac{\beta-1}{\beta}} Q^{\frac{1}{\beta}} \right\|_{HS}^2, \quad 0 \leq \beta \leq 2. \end{aligned}$$

عبارت e_{22} ، می‌تواند با استفاده از یک استدلال مشابه، همانطور که در (۷.۵)، به صورت عبارت زیر می‌باشد، کراندار باشد.

$$\mathbb{E} \|e_{22}\|^2 \leq C \tau^{\beta} \left\| A^{\frac{\beta-1}{\beta}} Q^{\frac{1}{\beta}} \right\|_{HS}^2, \quad 0 \leq \beta \leq 2.$$

در ادامه، می‌توانیم e_3 را بیشتر تجزیه کنیم، لذا داریم،

$$\begin{aligned} e_3 &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} r^{n-k+1}(\tau A) [f(u(t_k)) - f(u_k)] ds \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[e^{-t_{n-k+1}A} - r^{n-k+1}(\tau A) \right] f(u(t_k)) ds \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} e^{-t_{n-k+1}A} [f(u(s)) - f(u(t_k))] ds \\ &+ \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[e^{-(t_n-s)A} - e^{-t_{n-k+1}A} \right] f(u(s)) ds \\ &= e_{31} + e_{32} + e_{33} + e_{34}. \end{aligned}$$

با توجه به پایداری $r^n(\tau A)$ و شرایط لیپشیتز روی f ، داریم،

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|e_{31}\|^2 &\leq 2L_f^2 \tau^2 \mathbb{E} \|e^n\|^2 + 2L_f^2 \tau^2 n \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} \|e^k\|^2 \\ &\leq 2L_f^2 \tau^2 \mathbb{E} \|e^n\|^2 + C\tau \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} \|e^k\|^2. \end{aligned}$$

با استفاده از (۹.۵) و لم ۱.۰.۵ و همچنین از عبارت $\tau t_{n-k+1}^{-1} = (n-k+1)^{-1} = l^{-1}$ داریم،

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|e_{32}\|^2 &\leq C\mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \tau \tau t_{n-k+1}^{-1} \|f(u(t_k))\| \right)^2 \leq C\tau^2 \sum_{l=1}^n \frac{1}{l^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \|f(u(t_k))\|^2 \\ &\leq C\tau^2 \sum_{k=1}^n (1 + \mathbb{E} \|u(t_k)\|^2) \leq C\tau t_n \leq C\tau. \end{aligned}$$

علاوه‌براین، بنا به قضیه ۲.۰.۵ داریم،

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|e_{33}\|^2 &\leq t_n \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbb{E} \|f(u(s)) - f(u(t_k))\|^2 ds \\ &\leq C t_n^2 \tau^\beta \leq C\tau^\beta, \quad 0 \leq \beta \leq 1. \end{aligned}$$

به‌منظور تخمین e_{34} ، با استفاده دوباره از لم ۱.۰.۵ و با توجه به این‌که $t_{n-k+1} = t_n - t_{k-1}$ می‌باشد، عبارت زیر را داریم،

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \|e_{34}\|^2 &= \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\| \left[A^{\frac{\beta}{\tau}} e^{-(t_n-s)A} \left(I - e^{-(s-t_{k-1})A} \right) \right] A^{-\frac{\beta}{\tau}} f(u(s)) \right\|^2 ds \right) \\ &\leq C t_n \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (t_n - s)^{-\beta} \tau^\beta \mathbb{E} \|f(u(s))\|^2 ds \leq C\tau^\beta, \quad 0 \leq \beta < 1. \end{aligned}$$

اکنون، عبارات را در کنار هم دیگر قرار می‌دهیم. بنابراین داریم،

$$\mathbb{E} \|e^n\|^2 \leq c\tau^\beta + 2L_f\tau^2 \mathbb{E} \|e^n\|^2 + C\tau \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E} \|e^k\|^2, \quad 0 \leq \beta < 1.$$

سرانجام، اگر $\tau < \frac{1}{4L_f}$ باشد، آنگاه با استفاده از لم گرونوال^۱ گسسته داریم،

$$\mathbb{E} \|e^n\|^2 \leq C\tau^\beta e^{Ct_n} \leq C\tau^\beta, \quad 0 \leq \beta < 1.$$

□

۱.۵ بررسی خطا برای مسایل تصادفی غیرخطی

در این بخش، کرانی برای عبارت $\mathbb{E} [\|\bar{v}^n - v^n\|^2]$ به دست می‌آوریم. بنابراین، از شرایط لیپشیتز کلی (۲.۱)، استفاده می‌کنیم. بدین منظور، لم ۱.۱.۵ را به صورت زیر بیان می‌کنیم،
لم ۱.۱.۵. فرض کنید $\tau L_f \leq \frac{1}{2}$ باشد، با استفاده از این که $C = 2L_f T e^{2L_f T}$ ، می‌باشد. داریم،

$$\max_{1 \leq n \leq N} \left(\mathbb{E} [\|\bar{v}^n - v^n\|^2] \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \max_{1 \leq n \leq N} \left(\mathbb{E} [\|w_J^n - w^n\|^2] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

برهان. فرض کنید $e^n := \bar{v}^n - v^n$ باشد، آنگاه با استفاده از (۹.۱) و (۱۲.۱) داریم،

$$e^n + \tau A e^n = \tau (f(\bar{v}^n + w_J^n) - f(v^n + w^n)) + e^{n-1}.$$

چون عبارت زیر همواره برقرار می‌باشد،

$$e^\circ := \bar{v}^\circ - v^\circ = 1 - 1 = 0$$

لذا با استفاده از استقرا عبارت زیر را به دست می‌آوریم،

$$e^n = \tau \sum_{j=1}^n (I + \tau A)^{-(n+1-j)} \left(f(\bar{v}^j + w_J^j) - f(v^j + w^j) \right).$$

از نظر شرایط لیپشیتز کلی (۲.۱)، این نتایج به صورت زیر، تخمین زده می‌شوند،

$$\begin{aligned} \|e^n\| &\leq L_f \tau \sum_{j=1}^n \left\| (I + \tau A)^{-(n+1-j)} \right\| \left\| \bar{v}^j + w_J^j - v^j + w^j \right\| \\ &\leq L_f \tau \sum_{j=1}^n \left(\|w_J^j - w^j\| + \|e^j\| \right). \end{aligned}$$

از این رو، $\|(I + \tau A)^{-1}\| \leq 1$ می‌باشد. به این ترتیب، عبارت زیر را به دست می‌آوریم،

$$\|e^n\| \leq (1 - L_f \tau)^{-1} L_f \tau \left(\sum_{j=1}^n \|w_J^j - w^j\| + \sum_{j=1}^{n-1} \|e^j\| \right).$$

توسط $\frac{1}{2} \leq L_f \tau$ و همچنین، با استفاده از لم گرونوال گسسته استاندارد، اثبات کامل شد. □

¹Gronwall

فصل ۶

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

هر فصل ^۱ به شرح زیر کراندار می‌باشد، به‌طوری‌که ثابت C با توجه به (۳.۱) به $\|u_\circ\|_{L_T(\Omega, \dot{H}^\beta)}$ بستگی دارد و همچنین فرض کنید $\frac{1}{p} < \tau L_f$ باشد. ابتدا در فصل ۳، یک الگوریتم موجک تطبیقی شرح داده شد که (۱۳.۱) را تصدیق کرد. همچنین در قضیه (۳.۵.۳)، الگوریتم اعمال شده برای (۱۲.۱) را تجزیه و تحلیل کردیم. سرانجام، از فصل با نشان دادن عبارت زیر نتیجه گرفتیم،

$$\max_{\circ \leq t_n \leq T} \|v_\varepsilon^n - \bar{v}^n\|_{L_T(\Omega, H)} \leq C \sum_{n=1}^N \varepsilon_n. \quad (۱.۶)$$

در فصل ۴، تقریب چند تفکیکی از پیش تصادفی را مورد مطالعه قرار دادیم و از قضیه (۲.۵.۴) نتیجه گرفتیم که،

$$\max_{\circ \leq t_n \leq T} \|w_J^n - w^n\|_{L_T(\Omega, H)} \leq C 2^{-J \min(\beta, m)}. \quad (۲.۶)$$

در فصل ۵، قضیه (۳.۵.۵)، خطای زمان گسسته را مورد مطالعه قرار دادیم و ثابت کردیم که،

$$\max_{\circ \leq t_n \leq T} \|u^n - u(t_n)\|_{L_T(\Omega, H)} \leq C \tau^{\frac{\beta}{4}}, \quad \circ \leq \beta < 1. \quad (۳.۶)$$

سرانجام در فصل ۵، بخش ۱.۵ اختلال عبارت غیرخطی را تجزیه و تحلیل کردیم و عبارت زیر را به‌دست آوردیم،

$$\max_{\circ \leq t_n \leq T} \|\bar{v}^n - v^n\|_{L_T(\Omega, H)} \leq C \max_{\circ \leq t_n \leq T} \|w_J^n - w^n\|_{L_T(\Omega, H)}. \quad (۴.۶)$$

¹Contributions

نوشتجات عددی، برای معادلات سهموی تصادفی غیرخطی در حال حاضر نسبتاً بزرگ هستند. برای مثال، [۱۵] را در مورد گسسته‌سازی زمانی محض و [۱۳، ۱۸] را در درباره گسسته‌سازی کامل بر اساس روش خطی ذکر می‌کنیم. که در آن، گسسته‌سازی در ابتدا توسط عناصر متناهی انجام می‌شود و سپس مساله تکاملی ابعاد متناهی حاصل، گسسته می‌شود. موجک‌ها در [۱۲] بکار برده شده‌اند که در آن، تقریب (بدون تطابق) از پیچش تصادفی در نظر گرفته شده است.

این پایان‌نامه، اولین تلاش و کوشش در جهت تطابق فضایی با استفاده از روش روته همراه با روش‌های شناخته شده تطبیقی، به‌منظور حل کردن مسائل بیضوی غیرخطی حاصل، می‌باشد.

همواری بیسوف فضایی، از جواب‌های PDEهای تصادفی در [۳ و ۲] مورد بررسی قرار گرفت. مقایسه‌ی سوبولوف و همواری بیسوف، به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی این است که آیا تطبیقی، سودمند است یا خیر؟

برای مسائل روی دامنه‌هایی با کران صاف یا چند ضلعی محدب (که در (۳.۱) برای β به اندازه کافی بالا در دسترس است)، جواب می‌تواند به‌صورت $u = v + w$ تقسیم شود. انتظار داریم که تطبیقی، برای پیچش تصادفی w مورد نیاز نباشد، لذا همواری سوبولوف، کافی است. بنابراین، آن را فقط برای مساله تکاملی تصادفی (۷.۱) اعمال می‌کنیم. هنگامی که دامنه، محدب نیست یا کران، هموار نیست یا نویز، منطبق کران نیست، تطبیقی ممکن است همچنین برای جواب مساله خطی (۹.۱) مورد استفاده قرار بگیرد.

مقاله [۱]، اولین تلاش برای بررسی خطای کامل روش روته برای هر دو مساله تکاملی تصادفی و جبری می‌باشد. لذا اشتراک آن با این پایان‌نامه، خیلی زیاد نیست، بنابراین از ویژگی‌های خاص معادلات با نویز، بهره می‌گیریم.

با انجام این روش و با استفاده از موجک‌ها به‌عنوان پایه برای روش گالرکین، می‌توان مقایسه‌ای میان تقریب حاصل از روش گالرکین با این پایه و تقریب‌های مبتنی بر پایه‌های دیگر انجام داد و همچنین، سرعت و دقت تقریب را مقایسه کرد.

- [1] Cioca, P.A., Dahlke, S., Dhring, N., Friedrich, U., Kinzel, S., Lindner, F., Raasch, T., Ritter, K., Schilling, R. (2012), " On the convergence analysis of Rothe's method. " **Preprint Nr. 124, DFG-Schwerpunktprogramm 1324 "Extraktion Quantifizierbarer Information aus Komplexen Systemen."**
- [2] Cioca, P.A., Dahlke, S., Döhring, N., Kinzel, S., Lindner, F., Raasch, T., Ritter, K., Schilling, R. (2012), " Adaptive wavelet methods for the stochastic poisson equation." **BIT 52**, 589-614.
- [3] Cioca, P.A., Dahlke, S., Kinzel, S., Lindner, F., Raasch, T., Ritter, K., Schilling, R. (2011), "Spatial Besov regularity for stochastic partial differential equations on Lipschitz domains." **Mathematica 207**, 197-234.
- [4] Cohen, A. (2000), "Wavelet methods in numerical analysis." **Handb. Numer. Anal. 7**, 417-711.
- [5] Cohen, A., Dahmen, W., DeVore, R.A. (2001), "Adaptive wavelet schemes for elliptic operator equations—convergence rates." **Math. Comp. 70**, 27-75.
- [6] Cohen, A., Dahmen, W., DeVore, R.A. (2003), "Sparse evaluation of compositions of functions using multiscale expansions." **SIAM J. Math. Anal. 35**, 279-303.
- [7] Cohen, A., Dahmen, W., DeVore, R.A. (2003), "Adaptive wavelet schemes for non-linear variational problems." **SIAM J. Numer. Anal. 41**, 1785-1823.
- [8] Dahmen, W. (1997), "Wavelet and multiscale methods for operator equations." **Acta Numerica 6**, 55-228.
- [9] Da Prato, G., Zabczyk, J. (1992), " Stochastic Equations in Infinite Dimensions." **Cambridge University Press, Cambridge.**

-
- [10] Kovacs, M., Larsson, S., Lindgren, F. (2012), "Weak convergence of finite element approximations of stochastic evolution equations with additive noise." **BIT** **52**, 85–108.
 - [11] Kovács, M., Lindgren, F., Larsson, S. (2010), "Strong convergence of the finite element method with truncated noise for semilinear parabolic stochastic equations with additive noise." **Numer. Algorithms** **53**, 309–320.
 - [12] Kovács, M., Lindgren, F., Larsson, S. (2011), "Spatial approximation of stochastic convolutions." **J. Comput. Appl. Math.** **235**, 3554–3570.
 - [13] Kruse, R. (2013), "Optimal error estimates of Galerkin finite element methods for stochastic partial differential equations with multiplicative noise." **IMA J. Numer. Anal.**
 - [14] Pazy, A. (1983), "Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations." **Springer, New York.**
 - [15] Printems, J. (2001), "On the discretization in time of parabolic stochastic partial differential equations." **Math. Model. Numer. Anal.** **35**, 1055–1078.
 - [16] Thomée, V. (2006), "Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems, 2nd edn." **Springer, Berlin.**
 - [17] Urban, K. (2009), "Wavelet Methods for Elliptic Partial Differential Equations." **Oxford University Press, Oxford .**
 - [18] Yan, Y. (2005), "Galerkin finite element methods for stochastic parabolic partial differential equations." **SIAM J. Numer. Anal.** **43**, 1363–1384.
 - [19] Kovacs, B. (2011), "Semilinear parabolic problems." **Department of Applied Analysis and Computational Mathematics, Institute of Mathematics, Eotvos Lorand University, Faculty of Science, Budapest.**
 - [20] Fima C Klebaner. (2005), "INTRODUCTION TO STOCHASTIC CALCULUS WITH APPLICATIONS.", Imperial College Press.
 - [21] Vandeboert. K, (2017), "Analytic Semigroups And Applications."
 - [22] Kinnunen. J, (2017), "Sobolev spaces.", Department of Mathematics and Systems Analysis, Aalto University.

- [23] Masarotto, V., Zemel, Y., (2018), "Procrustes Metrics on Covariance Operators and Optimal Transportation of Gaussian Processes." **Indian Statistical Institute.**
- [24] Gretton. A, (2015), "Notes on mean embeddings and covariance operators."
- [25] Bell. J, (2016), "Trace class operators and Hilbert-Schmidt operators." **Department of Mathematics, University of Toronto.**
- [26] Kacur. J, (1986), "Method of Rothe in evolution equations." **Department of Mathematics, Brno**, 23-34.
- [27] Lopushansky, O. V., Sharyn, S. V. (2014), "GENERALIZED HILLE–PHILLIPS TYPE FUNCTIONAL CALCULUS FOR MULTIPARAMETER SEMIGROUPS." **Siberian Mathematical Journal**, 105–117.
- [28] Cohen, A., Hoffmann, M., Reiss, M., (2004), "Adaptive wavelet Galerkin methods for linear inverse problems." **SIAM Journal on Numerical Analysis**, **42**(4), 1479-1501.
- [29] Kovacs, M., Larsson, S., Lindgren, F., (2013), "Weak convergence of finite element approximations of linear stochastic evolution equations with additive noise. **BIT Numerical Mathematics**, **53**(2), 497-525.
- [30] Chegini, N., Stevenson, R., (2015), "An Adaptive Wavelet Method for Semi-Linear First-Order System Least Squares." **Computational methods in applied mathematics**, **15**(4), 439-463.

Aabstract

We consider the semilinear stochastic heat equation perturbed by noise. After time-discretization by Euler's method the equation is split into a linear stochastic equation and a non-linear random evolution equation. The linear stochastic equation is discretized in space by a non-adaptive wavelet-Galerkin method. This equation is solved first and its solution is substituted into the nonlinear random evolution equation, which is solved by an adaptive wavelet method. We provide mean square estimates for the overall error.

Keywords: Wavelet-Galerkin Method, Semilinear Parabolic Problem, Brownian Motion, Wiener Process, Analytic Semigroup, Sobolev Space, Covariance Operator, Hilbert-Schmidt Norm, Trace Class Operator, Rothe's Method, Multiresolution Space, Scaling Functions.



Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Numerical Analysis

On Wavelet-Galerkin Methods For Semilinear Parabolic Equation With Noise

By: Iman Vahdati

Supervisor:

Ali Mesforush

October 2020