

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد آنالیز ریاضی

ε - تقریب‌های همزمان روی مجموعه‌های روبه پایین

نگارنده: مریم رحیمی

استاد راهنما

دکتر مهدی ایرانمنش

مهر ۱۳۹۹

تقديم به پدر و مادرم

سپاس‌گزاری...

پروردگار را شاکرم که بار دیگر به من فرصت آموختن داد.
بر خود لازم می‌دانم از راهنمایی‌های ارزنده و همراهی جناب آقای دکتر مهدی
ایرانمنش در تدوین پایان‌نامه تقدیر و تشکر کنم.

مریم رحیمی

مهر ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب **مریم رحیمی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی محض** علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **ε- تقریب های همزمان روی مجموعه های روبه پایین**، تحت راهنمایی **مهدی ایرانمنش** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مریم رحیمی

مهر ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در این پایان نامه، ابتدا مجموعه‌های روبه پایین را بیان کرده و ویژگی‌های بهترین تقریب همزمان به وسیله مجموعه‌های روبه پایین را بررسی می‌کنیم. سپس تعمیمی از بهترین تقریب همزمان، یعنی ε -تقریب همزمان را معرفی و به اثبات برخی نتایج در مورد ویژگی‌های ε -تقریب‌های همزمان روی مجموعه‌های روبه پایین در شبکه برداری فضاهاى باناخ خواهیم پرداخت.

کلمات کلیدی: شبکه فضای باناخ، مجموعه روبه پایین، غلاف روبه پایین، بهترین تقریب همزمان، ε -تقریب همزمان

فهرست مطالب

پیشگفتار	س
۱. مقدمات و پیش نیازهای آنالیزی	۱
۱.۱. تعاریف اولیه و مقدماتی	۱
۲.۱. شبکه‌ها به عنوان مجموعه‌های مرتب جزئی	۴
۳.۱. یک‌ه قوی	۶
۴.۱. تابع φ و ویژگی‌های آن	۷
۵.۱. بهترین تقریب و بهترین تقریب‌های همزمان	۱۱
۲. بهترین تقریب همزمان به وسیله مجموعه‌های روبه پایین	۱۷
۱.۲. مجموعه‌های روبه پایین و روبه بالا	۱۷
۲.۲. ویژگی‌های بهترین تقریب‌ها با استفاده از مجموعه‌های روبه پایین	۲۴
۳.۲. مجموعه‌های اکیداً رو به پایین	۳۴
۳. بهترین تقریب‌های همزمان روی مجموعه‌های بسته به وسیله پوسته رو به پایین	۳۹
۱.۳. تعاریف	۳۹
۲.۳. بهترین تقریب به وسیله مجموعه‌های نرمال	۴۰
۳.۳. بهترین تقریب‌های همزمان به وسیله غلاف روبه پایین	۴۵
۴. ε-تقریب‌های همزمان روی مجموعه‌های روبه پایین	۴۹
۱.۴. ε-تقریب‌های همزمان	۴۹
۲.۴. غلاف‌های روبه پایین روی مجموعه‌ی نرمال و تقریب‌های همزمان	۵۸
مراجع	۶۱
واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	۶۳
واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۶۵

پیشگفتار

بحث بهترین تقریب در سال‌های اخیر به طور گسترده‌ای در بخش‌های مختلف ریاضی از جمله مسائل بهینه‌سازی و عددی و حتی برنامه‌نویسی به کار برده می‌شود. یک مثال ساده و شهودی آن بحث یافتن نقاطی از یک مجموعه است که نسبت به نقطه‌ای در همان فضا دارای کمترین فاصله باشند. این مساله کاربردهای زیادی در زندگی و به خصوص مسائل اقتصادی به همراه داشته است. نظریه بهترین تقریب همزمان توسط نویسندگان بسیاری از جمله چانگ^۱ و تانیموتو^۲ [۴، ۱۳] مورد مطالعه قرار گرفته است. سینگر^۳ [۱۲] مفهوم ε -تقریب همزمان^۱ را معرفی کرد. بهترین تقریب همزمان تعمیمی از بهترین تقریب است و ε -تقریب همزمان تعمیم‌یافته مفهوم بهترین تقریب همزمان است. هرچند که، محذب بودن مجموعه گاهی اوقات بسیار محدود است اما اغلب مطالعات درباره بهترین تقریب همزمان بر روی مجموعه‌های محذب انجام شده است. در این پایان نامه، به اثبات برخی نتایج در مورد ویژگی‌های ε -تقریب‌های همزمان روی مجموعه‌های روبه پایین در شبکه برداری فضاها با ناخ خواهیم پرداخت.

هدف اصلی این پایان نامه، توسعه بهترین تقریب‌های همزمان به وسیله عناصری از مجموعه‌های بسته و مجموعه‌های روبه پایین و اکیدا روبه پایین و مجموعه‌های نرمال و همچنین پیدا کردن ε -تقریب‌های همزمان روی مجموعه‌های روبه پایین در شبکه برداری فضاها با ناخ می باشد. از مجموعه‌های رو به پایین به عنوان ابزاری در مطالعه ε -تقریب‌های همزمان به وسیله مجموعه‌های بسته استفاده می‌کنیم.

ساختار این پایان نامه به صورت زیر می‌باشد. در فصل اول ابتدا تعاریف مقدماتی را بیان کرده، سپس فضای ناخ شبکه‌ای را تعریف کرده و در ادامه به ترتیب به تعریف یکه قوی و تابع φ و ویژگی‌های آن می‌پردازیم و در نهایت در آخرین بخش مفهوم بهترین تقریب و بهترین تقریب‌های همزمان را تعریف می‌کنیم. در فصل دوم ابتدا مجموعه‌های روبه پایین را بیان کرده و ویژگی‌های بهترین تقریب همزمان به وسیله مجموعه‌های روبه پایین را بررسی می‌کنیم. در نهایت مجموعه‌های اکیداً روبه پایین را تعریف کرده و شرط لازم و کافی برای اینکه یک نقطه بهترین تقریب همزمان برای یک مجموعه کراندار مانند S باشد

¹Chong

²Tanimoto

³Singer

را بررسی می‌کنیم. در فصل سوم با استفاده از نتایج به دست آمده در فصل‌های قبل برای محک زدن بهترین تقریب‌های همزمان به وسیله غلاف رو به پایین پردازیم. برای این منظور ابتدا در بخش اول تعاریف مورد نیاز را بیان می‌کنیم و سپس در بخش‌های بعدی به ترتیب به بهترین تقریب به وسیله مجموعه‌های نرمال و بهترین تقریب‌های همزمان به وسیله غلاف‌های روبه پایین و ارتباط آنها با یکدیگر می‌پردازیم. در فصل چهارم، به برخی نتایج درباره ویژگی‌های ε -تقریب همزمان روی مجموعه‌های پایینی در شبکه‌ی برداری فضاها با ناخ پرداخته می‌شود. سپس یک سری نتایج در مورد تقریب‌های همزمان در مجموعه‌های نرمال بیان می‌شود.

با توجه به این که در مطالعات قبلی کمتر به موضوع تقریب همزمان در مجموعه‌های رو به پایین پرداخته شده است، لذا پرداختن به این موضوع می‌تواند از دیدگاه توسعه مفهوم نظریه تقریب همزمان و حتی مفهوم‌های گسترده‌تر آن ε -تقریب همزمان راه گشا باشد و سرعت رشد این نظریه را افزایش دهد. همچنین این مفهوم را برای مجموعه‌های رو به پایین بسط داده و از نتایج برآمده از این قضیه استفاده کرد.

فصل ۱

مقدمات و پیش نیازهای آنالیزی

این فصل در پنج بخش تنظیم شده است. در هر بخش سعی شده تا به تعاریف و قضایای مورد نیاز در فصل‌ها و بخش‌های بعدی پرداخته شود. ابتدا فضای باناخ شبکه‌ای را تعریف کرده [۳]، و سپس در بخش‌های سه و چهار به ترتیب به تعریف یکه قوی و تابع φ و ویژگی‌های آن می‌پردازیم و در نهایت در بخش پنجم مفهوم بهترین تقریب و بهترین تقریب‌های همزمان را تعریف می‌کنیم.

۱.۱ تعاریف اولیه و مقدماتی

تعریف ۱.۱.۱. یک فضای متریک (X, d) عبارت است از یک مجموعه ناتهی X از عناصر (که آنها را نقطه می‌نامیم) و یک تابع حقیقی d که روی $X \times X$ تعریف شده است به گونه‌ای که برای هر x, y, z متعلق به X داریم:

$$۱. \quad d(x, y) \geq ۰.$$

$$۲. \quad d(x, y) = ۰ \text{ اگر و تنها اگر } x = y.$$

$$۳. \quad d(x, y) = d(y, x).$$

$$۴. \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).$$

تابع d را متر روی X می‌نامند.

تعریف ۲.۱.۱. مجموعه دلخواه $X \neq \emptyset$ به همراه گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های X مانند τ را یک فضای توپولوژیک گویند، هرگاه:

(الف) $\emptyset, X \in \tau$ باشند.

(ب) اجتماع اعضای هر زیرگردایه از τ در τ قرار داشته باشد.

(ج) اشتراک اعضای هر زیرگردایه متناهی از τ ، متعلق به τ باشد.

تعریف ۳.۱.۱. اگر τ یک توپولوژی در X باشد، آنگاه X یک فضای توپولوژیک و اعضای τ را مجموعه‌های باز در X می‌نامند. یک زیرمجموعه از X بسته نامیده می‌شود هرگاه متمم آن باز باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنید X یک فضای برداری حقیقی (یا مختلط) باشد. در این صورت تابع

$$\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

را یک نرم روی X می‌نامیم هرگاه:

۱. به ازای هر x, y متعلق به X :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

۲. اگر $x \in X$ و α یک عدد ثابت باشد، آنگاه

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|.$$

۳. $x = 0$ اگر و تنها اگر $\|x\| = 0$.

اگر روی X یک نرم وجود داشته باشد، آنگاه X را یک فضای نرمدار می‌نامیم.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید X یک فضای نرمدار باشد. گوییم X یک فضای باناخ است هرگاه X نسبت به متر d ، به ازای هر $x, y \in X$ ، $d(x, y) = \|x - y\|$ ، که توسط نرم روی X تولید می‌شود کامل باشد. یعنی هر دنباله‌ی کوشی $\{x_n\}$ نسبت به متر d همگرا به یک $x \in X$ باشد.

تعریف ۶.۱.۱. تابع خطی Λ از فضای نرمدار X در میدان اسکالرهایی K را تابع خطی می‌نامند.

تعریف ۷.۱.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرمدار روی میدان‌های $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ باشد. مجموعه‌ی متشکل از تابع‌های خطی پیوسته روی X را فضای دوگان X می‌نامیم و با نماد X^* نشان می‌دهیم.

تعریف ۸.۱.۱. یک زیرمجموعه غیر تهی مانند A را محدب می‌نامیم هرگاه به ازای هر دو نقطه دلخواه $x, y \in A$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم:

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in A.$$

به عنوان مثال‌هایی از مجموعه‌های محدب می‌توانیم به کل فضا، زیرفضاها، گوی‌ها، مجموعه‌های تک عضوی و مجموعه‌ی تهی اشاره کنیم.

تعریف ۹.۱.۱. مجموعه مرتب جزئی مجموعه‌ای است که در آن یک رابطه دودویی $x \leq y$ تعریف شده است که به ازای هر x, y, z در شرایط زیر صدق می‌کند:

P۱ . به ازای هر $x, x \leq x$ (بازتابی)

P۲ . اگر $x \leq y$ و $y \leq x$ ، آنگاه $x = y$ (پاد تقارنی)

P۳ . اگر $x \leq y$ و $y \leq z$ ، آنگاه $x \leq z$ (ترایی)

یک مجموعه S و رابطه مرتب جزئی روی آن $\leq$ را می‌توان به صورت $(S, \leq)$ نشان داد.

برای مثال رابطه $\leq$ روی اعداد صحیح یک رابطه مرتب جزئی است. چون

• به ازای هر عدد صحیح a داریم $a \leq a$.

• به ازای هر دو عدد صحیح a, b ، اگر $b \leq a$ و $a \leq b$ آنگاه $a = b$.

• به ازای هر سه عدد صحیح a و b و c ، اگر $b \leq a$ و $c \leq b$ ، آنگاه $c \leq a$.

اعداد صحیح و رابطه $\leq$ را می‌توان به صورت $(\mathbb{Z}, \leq)$ نشان داد.

قرارداد: اگر در مجموعه مرتب جزئی داشته باشیم $a \leq b$ می‌خوانیم a کوچکتر مساوی b . این تنها یک نشانه گذاری است و علامت $\leq$ به معنای کوچکتر مساوی بودن دو عضو a و b نیست و برای هر رابطه ترتیب دیگری نیز استفاده می‌شود. به همین ترتیب می‌نویسیم $a < b$ (می‌خوانیم a کوچکتر از b) اگر $a \leq b$ و $a \neq b$.

تعریف ۱.۱.۱. دو عضو a و b از یک مجموعه جزئی مرتب را قابل مقایسه می‌نامند اگر یا $a \leq b$ یا $b \leq a$. اگر a و b اعضای S باشند که نه $a \leq b$ و نه $b \leq a$ ، آنگاه a و b غیرقابل مقایسه هستند.

تعریف ۱.۱.۱. اگر هر دو عضو $(S, \leq)$ قابل مقایسه باشند مجموعه S را مجموعه مرتب (مرتب خطی) می‌نامند.

در ادامه مفهومی به نام شبکه را تعریف می‌کنیم. در ریاضیات، شبکه یکی از مفاهیم اساسی جبری است که در جبر مجرد استفاده می‌شود؛ که شامل یک مجموعه مرتب جزئی است که هر دو عضو آن، یک کوچک‌ترین کران بالا (سوپریمم) و یک بزرگ‌ترین کران پایین (اینفیمم) یکتا دارد.

۲.۱ شبکه‌ها به عنوان مجموعه‌های مرتب جزئی

مفهوم ترتیب در فضای برداری مطالعه فضاها را در محیط‌های انتزاعی آسان می‌کند. ابتدا اجازه دهید مقدماتی درباره شبکه‌های برداری ارائه دهیم ([۲، ۵] را ملاحظه کنید). اگر $(L, \leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد و S یک زیر مجموعه دلخواه یا مساوی با L باشد، آنگاه $u \in L$ یک کران بالا برای S است اگر به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم: $s \leq u$. یک مجموعه ممکن است چند کران بالا داشته باشد یا اصلاً کران بالا نداشته باشد. یک کران بالا u از S را هنگامی کوچک‌ترین کران بالا یا سوپریمم می‌نامیم که به ازای هر کران بالا x داشته باشیم: $u \leq x$ یک مجموعه حتماً کوچک‌ترین کران بالا ندارد ولی نمی‌تواند بیش از یکی داشته باشد.

از طرفی، $l \in L$ یک کران پایین برای S است اگر به ازای هر $s \in S$ داشته باشیم: $l \leq s$. یک کران پایین l از S را هنگامی بزرگ‌ترین کران پایین یا اینفیمم می‌نامیم که به ازای هر کران پایین x داشته باشیم $x \leq l$. یک مجموعه ممکن است چند کران پایین داشته باشد، یا اصلاً کران پایین نداشته باشد ولی می‌تواند حداکثر یک بزرگ‌ترین کران پایین داشته باشد.

تعریف ۱.۲.۱. یک مجموعه مرتب جزئی $(L, \leq)$ را یک شبه شبکه از بالا کراندار یا از پایین کراندار می‌نامند اگر هر زیر مجموعه دو عضوی $\{a, b\}$ از L یک بزرگ‌ترین کران پایین یا یک کوچک‌ترین کران بالا داشته باشد، که با $a \wedge b$ و $a \vee b$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه مرتب جزئی $(L, \leq)$ یک شبکه نامیده می‌شود اگر هم یک شبه شبکه از بالا کراندار و هم یک شبه شبکه از پایین کراندار باشد.

تعریف ۳.۲.۱. یک شبکه کراندار شبکه‌ای است که بزرگترین عضو ۱ و کوچکترین عضو ۰ را داشته باشد به صورتی که به ازای هر $x \in L$ ، $0 \leq x \leq 1$.

بزرگترین عضو و کوچکترین عضو هم ماکسیمم و مینیمم یا عنصر اول و عنصر آخر نامیده می‌شوند؛ و با $\top$ و $\perp$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۲.۱. یک زیرمشبکه از شبکه L یک مجموعه غیر تهی از L است که در واقع شبکه‌ای با اتصال‌ها و تماس‌هایی همانند L است. یعنی اگر L یک شبکه باشد و $M \neq \emptyset$ زیرمجموعه‌ای از L باشد به طوری که به ازای هر جفت از عناصر a, b در M هم $a \wedge b$ و هم $a \vee b$ در M باشند، آنگاه M یک زیرمشبکه از L است.

تعریف ۵.۲.۱. شبکه‌ی $(L, \leq)$ به طور مشروط کامل گفته می‌شود هرگاه در یکی از شرایط معادل زیر صدق کند:

۱. هر مجموعه ناتهی از پایین کراندار دارای یک اینفیموم باشد.

۲. هر مجموعه ناتهی از بالا کراندار دارای یک سوپریمم باشد.

۳. شبکه‌ای کامل مانند $\bar{L} := L \cup \{\perp, \top\}$ ، با عنصر مینیمال $\perp$ و عنصر ماکسیمال $\top$ ، که آن را مکمل مینیمال L می‌نامیم وجود دارد، به طوری که L زیرمشبکه‌ای از $\bar{L}$ است، $\inf L = \perp$ و $\sup L = \top$.

تعریف ۶.۲.۱. یک شبکه‌ی برداری (حقیقی) $(X, \leq, +, \cdot)$ مجموعه‌ی X با ترتیب جزئی $\leq$ ، به همراه عملگر دودویی $+$ و ضرب اسکالر $\cdot$ است، به طوری که $(X, \leq)$ یک شبکه است.

تعریف ۷.۲.۱. شبکه برداری $(X, \leq, +, \cdot)$ به طوری که $(X, \leq)$ شبکه‌ای به طور مشروط کامل باشد، شبکه برداری به طور مشروط کامل نامیده می‌شود.

تعریف ۸.۲.۱. شبکه برداری به طور مشروط کامل فضای باناخ X یک فضای باناخ حقیقی است یعنی یک شبکه برداری به طور مشروط کامل است و $|x| \leq |y|$ ایجاب می‌کند که به ازای هر $x, y \in X$

$$\|x\| \leq \|y\|.$$

تعریف ۹.۲.۱. تابع $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ همگن جمعی نامیده می‌شود هرگاه داشته باشیم

$$f(x + \lambda 1) = f(x) + \lambda \quad \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

تعریف ۱۰.۲.۱. تابع $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ موضعی نامیده می‌شود هرگاه صعودی باشد، یعنی اگر $x \leq y$ باشد، آنگاه

$$f(x) \leq f(y)$$

و همگن جمعی باشد.

تعریف ۱۱.۲.۱. دو فضای متریک (X, d_X) و (Y, d_Y) را که در آن d_X نشان دهنده‌ی متریک روی مجموعه X و d_Y نشان دهنده‌ی متریک روی مجموعه Y است را در نظر بگیرید. تابع $f : X \rightarrow Y$ پیوسته لیپشیتز است، هرگاه ثابت $K \geq 0$ وجود داشته باشد، به طوری که به ازای هر x_1 و x_2 در X

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2).$$

برای هر زیرمجموعه W از فضای نرم‌دار X نقاط درون، بستار و نقاط مرزی را به ترتیب با bdW ، clW ، $intW$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۲.۱. به ازای هر زیرمجموعه W از یک فضای نرم‌دار X ، مجموعه قطبی W را با W° نمایش می‌دهیم و به صورت

$$W^\circ := \{f \in X^* : f(w) \leq 0, \forall w \in W\}$$

تعریف می‌کنیم، که در آن X^* فضای دوگان X است.

۳.۱ یکه قوی

در این بخش یکه قوی را تعریف می‌کنیم که با استفاده از آن نرمی روی فضای X تعریف کرده که لازمه تعاریف بعدی روی فضای مورد نظر می‌باشد. در آخر این بخش نیز به تعریف $d(S, W)$ می‌پردازیم و ویژگی‌های $d(S, W)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید X یک شبکه برداری بطور مشروط کامل باشد، عنصر $1 \in X$ را یکه قوی می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $x \in X$ وجود داشته باشد $\lambda \in R$ ، $0 < \lambda$ به طوری که $|x| \leq \lambda 1$ ، که در آن $|x| := x^+ + x^-$ و $x^\pm := \sup\{\pm x, 0\}$.

در تعریف زیر نرم را روی فضای X تعریف می‌کنیم و تعریف گوی بسته $B(S, r)$ به مرکز S و شعاع r را در ادامه بیان می‌کنیم.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنید فضای برداری X شامل یکه قوی ۱ باشد. با استفاده از ۱ نرمی را روی فضای X به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|x\| = \inf\{\lambda > 0 : |x| \leq \lambda 1\} \forall x \in X.$$

حال با توجه به نرم فوق گوی بسته $B(S, r)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$B(S, r) := \left\{ y \in X : \sup_{s \in S} \|s - y\| \leq r \right\}$$

و با توجه به اینکه

$$-\inf(S) = \sup(-S)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$B(S, r) := \{y \in X : \sup S - r 1 \leq y \leq \inf S + r 1\}, \quad (1.1)$$

که در آن، $r \in \mathbb{R}$ و $0 < r$ و S مجموعه‌ای کراندار در X است. همچنین واضح است که به ازای هر $x \in X$ داریم

$$|x| \leq \|x\| 1. \quad (2.1)$$

بنابراین اگر X دارای چنین نرمی باشد یک شبکه‌ی به طور مشروط کامل فضای باناخ است.

مشبکه همه توابع کراندار روی مجموعه X مثالی از مشبکه باناخ به طور مشروط کامل با یکه قوی ۱ می‌باشد.

۴.۱ تابع φ و ویژگی‌های آن

در این بخش به تعریف تابع φ می‌پردازیم و سپس ویژگی‌های تابع φ را نیز بیان می‌کنیم.

تبصره ۱.۴.۱. اگر X یک مشبکه باشد که کوچکترین عضو آن موجود باشد، آن را با $\min X$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۴.۱. تابع $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ را $\forall x, y \in X$ به صورت

$$\varphi(x, y) := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda 1 \leq x + y\} \quad (3.1)$$

تعریف می‌کنیم. چون 1 یکه قوی است و به ازای هر $x \in X$ وجود دارد $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lambda < 0$ به طوری که $\lambda 1 \leq x$. لذا مجموعه‌ی $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda 1 \leq x + y\}$ ناتهی است و از طرفی داریم

$$-\|x + y\| \leq \varphi(x, y) \leq \|x + y\|$$

بنابراین مجموعه فوق از بالا به وسیله $\|x + y\|$ کراندار است. واضح است که مجموعه فوق بسته نیز است.

گزاره ۱.۴.۱. تابع φ دارای ویژگی‌های زیر می‌باشد:

$$-\infty < \varphi(x, y) \leq \|x + y\|, \quad x, y \in X \quad \text{به ازای هر} \quad (4.1)$$

$$\varphi(x, y) 1 \leq x + y, \quad x, y \in X \quad \text{به ازای هر} \quad (5.1)$$

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x), \quad x, y \in X \quad \text{به ازای هر} \quad (6.1)$$

$$\varphi(x, -x) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda 1 \leq x - x = 0\} = 0, \quad x \in X \quad \text{به ازای هر} \quad (7.1)$$

به ازای هر $y \in X$ ، تابع $\varphi_y : X \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت

$$\varphi_y(x) := \varphi(x, y); \quad x \in X \quad (8.1)$$

تعریف می‌کنیم.

در ادامه ثابت می‌کنیم که تابع φ_y تعریف شده در (۸.۱) موضعی و پیوسته لیپ‌شیتز است. در حقیقت، به ازای هر $x, z \in X$ داریم

$$|\varphi(x, y) - \varphi(y, z)| \leq \|x - z\|. \quad (9.1)$$

لم ۱.۴.۱. تابع φ_y تعریف شده در (۸.۱) موضعی است.

برهان. فرض کنید $x, z \in X$ به طوری که $x \leq z$. در این صورت

$$\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda 1 \leq x + y\} \subseteq \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda 1 \leq z + y\}.$$

بنابراین

$$\varphi_y(x) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \leq x + y\} \leq \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \leq z + y\} = \varphi_y(z).$$

در نتیجه φ_y صعودی است.

فرض کنید $x \in X$ و $\alpha \in \mathbb{R}$ دلخواه باشد، در این صورت

$$\begin{aligned}\varphi_y(x + \alpha) &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \leq x + \alpha + y\} \\ &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : (\lambda - \alpha) \leq x + y\}\end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $\lambda - \alpha = \beta$. لذا داریم

$$\begin{aligned}\varphi_y(x + \alpha) &= \sup\{\alpha + \beta \in \mathbb{R} : \beta \leq x + y\} \\ &= \sup\{\beta \in \mathbb{R} : \beta \leq x + y\} + \alpha = \varphi_y(x) + \alpha\end{aligned}$$

□

پس φ_y همگن جمعی نیز می‌باشد و اثبات کامل است.

لم ۲.۴.۱. تابع φ_y تعریف شده در (۸.۱) پیوسته لیپشیتز می‌باشد.

برهان. فرض کنید که $x, z \in X$ دلخواه باشند. چون

$$|x - z| \leq \|x - z\|$$

پس

$$z - \|x - z\| \leq x \leq z + \|x - z\|.$$

بنابر لم قبل داریم

$$\varphi_y(z) - \|x - z\| \leq \varphi_y(x) \leq \varphi_y(z) + \|x - z\|$$

بنابراین

$$|\varphi_y(x) - \varphi_y(z)| \leq \|x - z\|.$$

□

در نتیجه φ_y پیوسته لیپشیتز نیز می‌باشد.

تبصره ۲.۴.۱. تابع φ ، تعریف شده در (۳.۱)، پیوسته است.

□ برهان. با توجه به لم قبل اثبات واضح می باشد.

گزاره ۲.۴.۱. تابع φ_y اینفیمم را روی یک مجموعه کراندار مانند S از X حفظ می کند یعنی

$$\varphi_y(\inf S) = \inf \varphi_y(S).$$

برهان. به ازای هر زیرمجموعه ناتهی و کراندار S از X داریم

$$\varphi_y(S) := \{\varphi_y(s) : s \in S\}.$$

می دانیم به ازای هر $s \in S$ ، $\inf S \leq s$. چون φ_y تابعی صعودی است، لذا به ازای هر $s \in S$ ،
داریم

$$\varphi_y(\inf S) \leq \varphi_y(s),$$

پس نتیجه می گیریم که

$$\varphi_y(\inf S) \leq \inf_{s \in S} \varphi_y(s)$$

یعنی،

$$\varphi_y(\inf S) \leq \inf \varphi_y(S). \quad (10.1)$$

حال فرض کنیم $x_0 = \inf S$. پس به ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد $s_0 \in S$ به طوری که
 $s_0 \leq x_0 + \varepsilon$. حال چون φ_y موضعی است پس داریم

$$\varphi_y(s_0) \leq \varphi_y(x_0) + \varepsilon.$$

اما می دانیم $\varphi_y(s_0) \geq \inf \varphi_y(S)$. لذا خواهیم داشت

$$\inf \varphi_y(S) \leq \varphi_y(x_0) + \varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

چون $\varepsilon > 0$ و دلخواه است، داریم

$$\inf \varphi_y(S) \leq \varphi_y(x_0) = \varphi_y(\inf S) \quad (11.1)$$

بنابراین (۱۰.۱) و (۱۱.۱) نتیجه می‌دهند که

$$\inf \varphi_y(S) = \varphi_y(\inf S).$$

□

۵.۱ بهترین تقریب و بهترین تقریب‌های همزمان

بحث بهترین تقریب در سال‌های اخیر به طور گسترده‌ای در بخش‌های مختلف ریاضی از جمله مسائل بهینه‌سازی و عددی و حتی برنامه‌نویسی به کار برده می‌شود. یک مثال ساده و شهودی آن بحث یافتن نقاطی از یک مجموعه است که نسبت به نقطه‌ای در همان فضا دارای کمترین فاصله باشند. این مساله کاربردهای زیادی در زندگی و به خصوص مسائل اقتصادی به همراه داشته است.

نظریه بهترین تقریب همزمان توسط نویسندگان بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است (به عنوان مثال، چانگ و تانیموتو [۴، ۱۳] را ملاحظه کنید). بهترین تقریب همزمان تعمیمی از بهترین تقریب است. اغلب مطالعات در باره بهترین تقریب همزمان بر روی مجموعه‌های محدب انجام شده است. در اینجا، به تعریف و سپس اثبات برخی نتایج در مورد ویژگی‌های تقریب‌های همزمان خواهیم پرداخت.

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار باشد. به ازای هر زیر مجموعه غیرتهی W از X و هر $x \in X$ تعریف می‌کنیم

$$d(x, W) = \inf_{w \in W} \|x - w\|.$$

در این صورت، $w_0 \in W$ یک بهترین تقریب برای $x \in X$ نامیده می‌شود هرگاه

$$\|x - w_0\| = d(x, W).$$

اگر به ازای هر $x \in X$ ، حداقل یک بهترین تقریب $w \in W$ موجود باشد، آنگاه W یک زیر مجموعه تقریب‌پذیر از X نامیده می‌شود.

اگر به ازای هر $x \in X$ ، یک بهترین تقریب منحصر به فرد $w \in W$ موجود باشد، آنگاه W یک زیر مجموعه چبیشف از X نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۵.۱. فرض کنید X یک فضای خطی نرم‌دار باشد و W زیر مجموعه‌ای از X باشد.

در این صورت به ازای هر $x \in X$ ، $P_W(x)$ به مجموعه تمامی بهترین تقریب‌های x از W اشاره می‌کند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

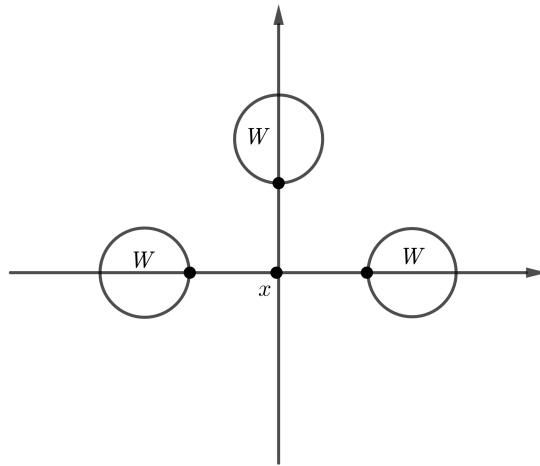
$$P_W(x) := \{w \in W : \|x - w\| = d(x, W)\}.$$

مثال ۱.۵.۱. فرض کنید

$$\begin{aligned} W = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 = 1\} \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + 2)^2 + y^2 = 1\} \\ & \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 2)^2 = 1\}. \end{aligned}$$

زیرمجموعه‌ی $X = \mathbb{R}^2$ با نرم معمولی باشد، در این صورت به ازای $x = (0, 0) \in X$ داریم

$$P_W(x) = \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1)\}.$$



تعریف ۳.۵.۱. فرض کنید X فضای نرمداری باشد. برای زیرمجموعه ناتهی W از X و مجموعه کراندار ناتهی S در X ، تعریف می‌کنیم

$$d(S, W) = \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} \|s - w\|$$

$$S_W(S) := \left\{ w \in W : \sup_{s \in S} \|s - w\| = d(S, W) \right\}.$$

عنصر $w_0 \in W$ بهترین تقریب همزمان برای S از W است، هرگاه

$$d(S, W) = \sup_{s \in S} \|s - w_0\|.$$

مجموعه‌ی همه‌ی بهترین تقریب‌های همزمان S از W با $S_W(S)$ نشان داده خواهد شد.

مثال ۲.۵.۱. فرض کنید

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4\}$$

و

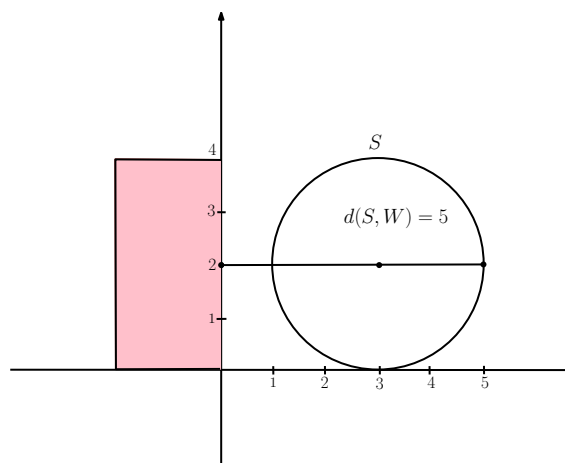
$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 4\}.$$

در این صورت،

$$d(S, W) = 5,$$

و

$$S_W(S) = \{(0, 2)\}.$$



گزاره ۱.۵.۱. فرض کنید X فضای نرمداری باشد. برای هر زیرمجموعه ناتهی W از X و مجموعه ناتهی کراندار S در X ، $d(S, W)$ و $S_W(S)$ دارای ویژگی‌های زیر می‌باشند.

$$1. \quad \forall y \in X \quad d(S + y, W) = d(S, W)$$

$$2. \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad d(\lambda S, \lambda W) = |\lambda| d(S, W)$$

$$3. \quad \forall y \in X \quad S_W(S + y) = S_W(S) + y$$

$$\forall y \in X, \lambda \in \mathbb{R} \quad S_{\lambda W}(\lambda S) = \lambda S_W(S). \quad ۴$$

برهان. (۱) بنابر تعریف $d(S, W)$ داریم

$$\begin{aligned} d(S + y, W + y) &= \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} \|s + y - (w + y)\| \\ &= \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} \|s - w\| = d(S, W). \end{aligned} \quad (۲)$$

$$\begin{aligned} d(\lambda S, \lambda W) &= \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} \|\lambda s - \lambda w\| \\ &= \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} |\lambda| \|s - w\| = |\lambda| d(S, W) \end{aligned}$$

(۳) فرض کنید که $w_0 \in S_W(S + y)$ باشد. بنابراین داریم

$$w_0 \in S_W(S + y) \iff w_0 \in W + y$$

و

$$\begin{aligned} \sup_{s \in S} \|s + y - w_0\| &= d(S + y, W + y) \\ \iff w_0 - y \in W \text{ و } \sup_{s \in S} \|s - (w_0 - y)\| &= d(S, W) \\ \iff w_0 - y \in S_W(S) \iff w_0 &\in S_W(S) + y \end{aligned}$$

(۴) اگر $\lambda = 0$ باشد، آنگاه $0 = 0$ و اثبات کامل است. فرض کنیم $\lambda \neq 0$ و $w_0 \in S_{\lambda W}(\lambda S)$. در این صورت داریم

$$w_0 \in S_{\lambda W}(\lambda S) \iff w_0 \in \lambda W$$

و

$$\sup_{s \in S} \|\lambda s - w_0\| = d(\lambda S, \lambda W) = |\lambda| d(S, W) \iff \frac{w_0}{\lambda} \in W$$

و

$$|\lambda| \sup_{s \in S} \left\| s - \frac{w_0}{\lambda} \right\| = |\lambda| d(S, W) \iff \frac{1}{\lambda} w_0 \in W$$

$$\begin{aligned} \sup_{s \in S} \left\| s - \frac{w_0}{\lambda} \right\| &= d(S, W) \\ \iff \frac{1}{\lambda} w_0 &\in S_W(S) \\ \iff w_0 &\in \lambda S_W(S) \end{aligned}$$

و اثبات کامل است. $\square$

حال مجموعه تقریب‌پذیر همزمان و مجموعه چبیشف همزمان را تعریف می‌کنیم.

تعریف ۴.۵.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. اگر به ازای هر مجموعه‌ی کراندار S در X حداقل یک بهترین تقریب همزمان برای S از W وجود داشته باشد، آنگاه W زیرمجموعه تقریب‌پذیر همزمان X نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۵.۱. فرض کنید X یک فضای نرم‌دار باشد. اگر به ازای هر مجموعه کراندار S در X بهترین تقریب همزمان منحصر به فردی برای S از W وجود داشته باشد، آنگاه W زیرمجموعه چبیشف همزمان X نامیده می‌شود.

فصل ۲

بهترین تقریب همزمان به وسیله مجموعه‌های روبه پایین

در این فصل، بهترین تقریب‌های همزمان در شبکه‌ی به طور مشروط کامل فضاهای باناخ X با یکه قوی ۱ را بررسی می‌کنیم. در این فصل ابتدا مجموعه‌های روبه پایین و رو به بالا را بیان کرده و ویژگی‌های بهترین تقریب همزمان به وسیله مجموعه‌های روبه پایین را بررسی می‌کنیم. در نهایت مجموعه‌های اکیداً روبه پایین را تعریف کرده و شرط لازم و کافی برای اینکه یک نقطه بهترین تقریب همزمان برای یک مجموعه کراندار مانند S باشد را بیان می‌کنیم. لازم به یادآوری است که مطالب این فصل از [۶، ۷] استخراج شده است.

یادآوری می‌کنیم که عنصر $1 \in X$ یکه قوی نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر $x \in X$ وجود داشته باشد $0 < \lambda$ به طوری که $\lambda |x| \leq 1$.

۱.۲ مجموعه‌های روبه پایین و روبه بالا

تعریف ۱.۱.۲. زیر مجموعه W از X رو به پایین نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $w \in W$ و $x \in X$ به طوری که $x \leq w$ ، داشته باشیم $x \in W$.

تعریف ۲.۱.۲. زیر مجموعه W از X روبه بالا نامیده می‌شود، اگر به ازای هر $w \in W$ و

$x \in X$ به طوری که $x \geq w$ ، داشته باشیم $x \in W$.

به عنوان مثال مجموعه

$$W = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$$

یک مجموعه رو به پایین از $\mathbb{R}$ است. چون به ازای هر $t \in \mathbb{R}$ و $x \in W$ نامساوی $t \leq x$ نشان می‌دهد که $t \leq 0$ ، پس $t \in W$.



لم ۱.۱.۲. فرض کنید W یک زیر مجموعه بسته و رو به پایین از X باشد و $x \in X$. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

۱. اگر $x \in W$ باشد، آنگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $x - \varepsilon \in \text{int}W$.

۲. به ازای یک $x \in X$ ، $x + \varepsilon \in W$ ، $\varepsilon > 0$ ، $\text{int}W = \{x \in X : x + \varepsilon \in W, \varepsilon > 0\}$.

برهان. (۱) فرض کنیم که $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، $x \in W$ و فرض کنیم که

$$V = \{y \in X : \|y - (x - \varepsilon)\| < \varepsilon\}$$

یک همسایگی باز از $(x - \varepsilon)$ باشد. در این صورت با توجه به تعریف نرم داریم:

$$V = \{y \in X : x - 2\varepsilon < y < x\}.$$

چون W یک مجموعه رو به پایین می‌باشد و $x \in W$ ، بنابراین $V \subset W$ ، پس

$$x - \varepsilon \in \text{int}W.$$

(۲) فرض کنید که $x \in \text{int}W$ لذا $\varepsilon_0 > 0$ وجود دارد به طوری که گوی بسته $B(x, \varepsilon_0) \subset W$ چون داریم

$$B(x, \varepsilon_0) = \{y \in X : \|y - x\| \leq \varepsilon_0\}$$

پس

$$B(x, \varepsilon_0) = \{y \in X : x - \varepsilon_0 \leq y \leq x + \varepsilon_0\}.$$

بنا براین

$$x + \varepsilon \mathbf{1} \in B(x, \varepsilon) \subset W.$$

برعکس: فرض کنید که $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد که $x + \varepsilon \mathbf{1} \in W$. در این صورت با توجه به (۱) داریم

$$x = (x + \varepsilon \mathbf{1}) - \varepsilon \mathbf{1} \in \text{int}W.$$

به این ترتیب اثبات کامل است. $\square$

لم ۲.۱.۲. فرض کنید W یک زیر مجموعه بسته و رو به پایین از X ، $y_0 \in \text{bd}W$ و فرض کنید که φ تابع معرفی شده در رابطه (۳.۱) باشد. در این صورت

$$\forall w \in W \quad \varphi(w, -y_0) \leq 0.$$

برهان. فرض کنیم که $w_0 \in W$ وجود داشته باشد به طوری که:

$$\varphi(w_0, -y_0) > 0.$$

بنابراین

$$\sup \{ \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \mathbf{1} \leq w_0 - y_0 \} > 0.$$

لذا $\lambda_0 > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$\lambda_0 \mathbf{1} \leq w_0 - y_0$$

پس

$$\lambda_0 \mathbf{1} + y_0 \leq w_0$$

و از آنجایی که W رو به پایین می‌باشد و $w_0 \in W$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$\lambda_0 \mathbf{1} + y_0 \in \text{int}W.$$

و این یک تناقض می‌باشد به این ترتیب اثبات کامل است. $\square$

در ادامه نشان می‌دهیم که مجموعه بهترین تقریب‌های همزمان زیر مجموعه نقاط مرزی مجموعه مورد نظر می‌باشند.

گزاره ۱.۱.۲. فرض کنید که W یک زیر مجموعه بسته از X باشد به طوری که $S \cap W = \emptyset$ ، در این صورت

$$S_W(S) \subset bdW.$$

برهان. فرض کنید که $w_0 \in S_W(S)$ دلخواه باشد. در این صورت

$$\sup_{s \in S} \|s - w_0\| = d(S, W).$$

قرار می‌دهیم

$$r := d(S, W).$$

چون $S \cap W = \emptyset$ ، پس $r > 0$ ، حال فرض کنیم که حکم برقرار نباشد یعنی $w \in S_W(S)$ وجود داشته باشد به طوری که $w \notin bdW$. بنابراین $\varepsilon > 0$ وجود دارد به طوری که

$$V = \{y \in X : \|y - w\| < \varepsilon\} \subset W$$

قرار می‌دهیم

$$\varepsilon_0 = \varepsilon(\tau + \varepsilon)^{-1}.$$

واضح است که $0 \leq \varepsilon \leq 1$ و به ازای هر $s \in S$ ، w_s را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$w_s = w + \varepsilon_0(s - w) \in X.$$

حال چون

$$\|w_s - w\| = |\varepsilon_0| \|s - w\| \leq \varepsilon_0 r = \frac{\varepsilon r}{r + \varepsilon} < \varepsilon$$

بنابراین

$$w_s \in V \subset W \quad \forall s \in S.$$

چون $w_s \in W$ ، پس

$$r = d(S, W) \leq \sup_{t \in S} \|t - w_s\|$$

بنابراین

$$r \leq \inf_{s \in S} \sup_{t \in S} \|t - w_s\|$$

و از طرف دیگر $\forall t, s \in S$ داریم که

$$\|t - w_s\| = \|(t - w) - \varepsilon_o(s - w)\|$$

این نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned} r &\leq \inf_{t \in S} \sup_{s \in S} \|t - w_s\| = \inf_{s \in S} \sup_{t \in S} \|(t - w) - \varepsilon_o(s - w)\| \\ &\leq \sup_{t \in S} \|(t - w) - \varepsilon_o(t - w)\| \\ &= (1 - \varepsilon_o) \sup \|t - w\| \\ &= (1 - \varepsilon_o) r < r \end{aligned}$$

و این یک تناقض است به این ترتیب اثبات کامل است. $\square$

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنید W یک زیر مجموعه بسته و محدب از X باشد و S یک مجموعه کراندار در X باشد که $S \cap W = \emptyset$ و $g_o \in W$. در این صورت عبارتهای زیر معادلند

$$۱. g_o \in S_W(S)$$

$$۲. f \in (W - g_o)^\circ \text{ وجود دارد به طوری که } \|f\| = ۱ \text{ و}$$

$$f(\sup S - g_o) = \sup_{s \in S} \|s - g_o\|.$$

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲) فرض کنید که $g_o \in S_W(S)$. در این صورت

$$\sup_{s \in S} \|s - g_o\| = d(S, W).$$

اکنون قرار می‌دهیم

$$r := d(S, W)$$

چون $S \cap W = \emptyset$ ، بنابراین $r > 0$ و همچنین اگر قرار دهیم:

$$B := \{y \in X : \|y - \sup S\| \leq r\}$$

آنگاه واضح است که $g_\circ \in B$ و چون

$$\text{int } B = \{y \in X : \|y - \sup S\| < r\}$$

پس

$$\text{int } B \cap W = \emptyset.$$

واضح است که B بسته است. حال فرض کنید که $x, y \in B$. در این صورت، با توجه به خواص نرم به ازای هر $1 \geq \lambda \geq 0$ داریم

$$\begin{aligned} & \|\lambda y + (1 - \lambda)x - \sup S\| \\ &= \|\lambda y + (1 - \lambda)x - \lambda \sup S - (1 - \lambda) \sup S\| \\ &= \|\lambda y - \lambda \sup S + (1 - \lambda)(x - \sup S)\| \\ &\leq |\lambda| \|y - \sup S\| + (1 - \lambda) \|x - \sup S\| \\ &\leq \lambda r + (1 - \lambda)r = r \end{aligned}$$

بنابراین B علاوه بر بسته بودن، محدب نیز می‌باشد. لذا با توجه به قضیه هان-باناخ $g \in X^*$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که

$$\forall w \in W, \quad g(\sup S - w) \geq \lambda$$

$$\forall y \in B, \quad g(\sup S - y) \leq \lambda.$$

همچنین داریم

$$\lambda = g(\sup S - g_\circ) \neq 0.$$

حال قرار می‌دهیم

$$f = r\lambda^{-1}g \in X.$$

چون $g \in X^*$ ، پس $f \in X^*$. همچنین داریم

$$\forall w \in W; f(\sup S - w) \geq r$$

$$\forall y \in B, \quad f(\sup S - y) \leq r \quad (۱.۲)$$

همچنین داریم که

$$f(\sup S - g_\circ) = r = \sup_{s \in S} \|s - g_\circ\|.$$

بنابراین

$$r = f(\sup S - g_\circ) \leq \|f\| \|\sup S - g_\circ\| \leq \|f\| r$$

در نتیجه $\|f\| \leq ۱$. ادعا می‌کنیم که $\|f\| = ۱$. اگر چنین نباشد، یعنی وجود داشته باشد $z \in X$ به طوری که $\|z\| = ۱$ و $f(z) > ۱$. قرار می‌دهیم

$$t = \sup S - rz \in X$$

بنابراین

$$\|t - \sup S\| = \|\sup S - rz - \sup S\| = r,$$

پس $t \in B$. از طرفی چون

$$t = \sup S - rz.$$

پس

$$rz = \sup S - t$$

و چون $f(z) > ۱$ ، پس

$$f(\sup S - t) = rf(z) > r$$

و این با (۱.۲) در تناقض است. بنابراین $\|f\| = ۱$. همچنین با توجه به (۱.۲) به ازای هر $w \in W$ داریم

$$f(w - g_\circ) = f(\sup S - g_\circ) - f(\sup S - w) \leq r - r = ۰.$$

پس $f \in (W - g_\circ)^\circ$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید که (۲) برقرار باشد. به ازای هر $w \in W$ داریم

$$\begin{aligned} \sup_{sup} \|s - g_\circ\| &= f(\sup S - g_\circ) \\ &= f(\sup S - w) + f(w - g_\circ) \\ &\leq f(\sup S - w) \leq \|f\| \|\sup S - w\| \\ &= \|\sup S - w\| \leq \sup_{s \in S} \|s - w\| \end{aligned}$$

در نتیجه داریم

$$\begin{aligned} \sup_{s \in S} \|s - g_\circ\| &\leq \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} \|s - w\| \\ &= d(S, W) \leq \sup_{s \in S} \|s - g_\circ\| \end{aligned}$$

□

بنابراین $g_\circ \in S_W(S)$ ، به این ترتیب اثبات کامل است.

۲.۲ ویژگی‌های بهترین تقریب‌ها با استفاده از مجموعه‌های روبه پایین

در این بخش به مفهوم بهترین تقریب به وسیله مجموعه‌های روبه پایین می‌پردازیم و برای این منظور تعدادی لم و قضیه ارائه می‌دهیم. بحث را با لم زیر آغاز می‌کنیم.

لم ۱.۲.۲. فرض کنید که W یک زیرمجموعه بسته و روبه پایین از X باشد. در این صورت، W یک مجموعه تقریب پذیر همزمان است.

برهان. فرض کنید S یک مجموعه کراندار دلخواه در X باشد و فرض کنید که

$$r = d(S, W) > 0.$$

قرار می‌دهیم

$$w_\circ = \sup S - r \in X, \quad 0 < r = d(S, W).$$

پس با توجه به (۱.۱)، $w_\circ \in B(s, r)$. بنابراین داریم

$$\sup_{s \in S} \|s - w_\circ\| \leq r = d(S, W)$$

و چون

$$r = d(S, W) = \inf_{w \in W} \sup_{s \in S} \|s - w\|$$

پس به ازای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارد $w \in W$ به طوری که

$$-(r + \varepsilon) \leq w - s \quad \forall s \in S$$

$$\Rightarrow s - r - \varepsilon \leq w \quad \forall s \in S$$

$$\Rightarrow \sup S - r - \varepsilon \leq w.$$

بنابراین به ازای هر $\varepsilon > 0$ داریم

$$w_0 - \varepsilon \leq w.$$

چون W یک مجموعه رو به پایین است و $w \in W$ ، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $w_0 - \varepsilon \in W$ از آنجایی که W بسته است، پس $w_0 \in W$. از این رو داریم

$$d(S, W) \leq \sup_{s \in S} \|s - w_0\| \leq r = d(S, W)$$

بنابراین $w_0 \in S_W(S)$.

اگر $r = d(S, W) = 0$ ، آنگاه S یک نقطه دارد که آن را x_0 می‌نامیم. از این رو
لذا $w_0 = x_0 = \sup S - r$

$$S_W(S) = \{w_0\}$$

□

در نتیجه W مجموعه‌ی تقریب‌پذیر همزمان می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید که W یک زیر مجموعه بسته و رو به پایین و S یک زیر مجموعه بسته و کراندار از X باشند. آنگاه کوچکترین عضو $w_0 := \min S_W(S)$ از مجموعه $S_W(S)$ وجود دارد که $w_0 = \sup S - r$ و $r = d(S, W)$.

برهان. اگر $d(S, W) = 0$ ، آنگاه با توجه به لم قبل نتیجه برقرار است. فرض کنیم که $d(S, W) > 0$ و $w_0 = \sup S - r$ ، با توجه به لم قبل داریم $w_0 \in S_W(S)$ ، چون

$$w_0 = \sup S - r \in B(S, r),$$

با توجه به (۱.۱) به ازای هر $y \in B(S, r)$ داریم که $y \geq w_0$ ، بنابراین w_0 کوچکترین عضو

$B(S, r)$ می‌باشد.

حال برای $w \in S_W(S)$ داریم:

$$\sup_{s \in S} \|s - w\| = d(S, W) = r$$

که با توجه به (۲.۱) نتیجه می‌گیریم که $w \in B(S, r)$. پس $w \geq w_0$ ، بنا براین w_0 کوچکترین عضو $S_W(S)$ می‌باشد. به این ترتیب اثبات کامل است. $\square$

تبصره ۱.۲.۲. فرض کنید که W یک زیر مجموعه بسته و S یک زیر مجموعه بسته و کراندار از X باشند. فرض کنید که $w_0 = \min S_W(S)$. در این صورت $w_0 \leq \sup S$. $\square$ برهان. با توجه به قضیه ۱.۲.۲ اثبات واضح است.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید که W یک زیر مجموعه بسته و S یک زیر مجموعه بسته کراندار از X باشند به طوری که $S \cap W = \emptyset$. و فرض کنید که $y_0 \in W$ و $r_0 := \sup_{s \in S} \|s - y_0\|$. در این صورت اگر φ تابع معرفی شده در رابطه (۳.۱) باشد، آنگاه عبارت‌های زیر معادلند

$$1. \quad y_0 \in S_W(S)$$

$$2. \quad l \in X \text{ وجود دارد به طوری که}$$

$$\forall w \in W, y \in B(S, r_0) \quad \varphi(w, l) \leq 0 \leq \varphi(y, l)$$

علاوه براین، اگر در فرمول بالا در نظر بگیریم $l = -y_0$ ، آنگاه

$$y_0 = \min S_W(S).$$

برهان. (۱) $\Leftrightarrow$ (۲) فرض کنیم $y_0 \in S_W(S)$ ، در این صورت

$$r_0 = \sup_{s \in S} \|s - y_0\| = d(S, W)$$

چون W یک زیر مجموعه بسته و S یک زیر مجموعه بسته و کراندار از X باشند، نتیجه می‌گیریم که $w_0 = \sup S - r_0$ کوچکترین عضو $S_W(S)$ می‌باشد. قرار می‌دهیم

$$l = -w_0 \in X.$$

اکنون فرض می‌کنیم که $y \in B(S, r_0)$ دلخواه باشد. بنابراین با توجه به (۱.۱) داریم

$$-r_0 \leq y - \sup S$$

و این نشان می‌دهد که

$$-r_0 \in \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \leq y - \sup S\}$$

از طرفی داریم

$$\begin{aligned} \varphi(y, l) &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \leq y + l\} \\ &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \leq y - w_0\} \\ &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \leq y - (\sup S - r_0)\} \\ &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : (\lambda - r_0) \leq y - \sup S\} \\ &= \sup\{\alpha + r_0 \in \mathbb{R} : \alpha \leq y - \sup S\} \\ &= \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \leq y - \sup S\} + r_0 \\ &\geq -r_0 + r_0 \end{aligned}$$

و از طرف دیگر چون $w_0 \in S_W(S)$ و $S \cap W = \emptyset$ ، لذا با توجه به گزاره ۱.۱.۲ داریم $w_0 \in bdW$.
از این رو، با توجه به لم ۲.۱.۲ داریم

$$\varphi(w, -w_0) \leq 0 \quad \forall w \in W$$

بنابراین به ازای هر $w \in W$ ، $\varphi(w, l) \leq 0$.

(۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنیم وجود داشته باشد $l \in X$ به طوری که

$$\varphi(w, l) \leq 0 \leq \varphi(y, l), \forall w \in W, \forall y \in B(S, r_0)$$

با توجه به ۱.۱ داریم

$$B(S, r_0) = \{y \in X : \sup S - r_0 \leq y \leq \inf S + r_0\}.$$

بنابراین

$$\sup S - r_0 \mathbf{1} \in B(S, r_0)$$

از این رو، با توجه به فرض داریم $\varphi(\sup S - r_0 \mathbf{1}, l) \geq 0$. بنابراین از آنجایی $\varphi(\cdot, l)$ موضعی است، داریم

$$0 \leq \varphi(\sup S - r_0 \mathbf{1}, l) = \varphi(\sup S, l) - r_0$$

پس

$$\varphi(\sup S, l) \geq r_0$$

با توجه به ویژگی‌های تابع φ نتیجه می‌گیریم که

$$r_0 \mathbf{1} \leq \varphi(\sup S, l) \mathbf{1} \leq \sup S + l. \quad (2.2)$$

اکنون فرض کنیم $w \in W$ دلخواه باشد، قرار می‌دهیم

$$t_w = \varphi(w, -\sup S) \mathbf{1} + \sup S \in X$$

با توجه به ویژگی‌های تابع φ داریم

$$\varphi(w, -\sup S) \mathbf{1} \leq w - \sup S$$

لذا $t_w \leq w$ و چون W رو به پایین و $w \in W$ ، با توجه به فرض مسئله داریم $\varphi(t_w, l) \leq 0$. از این رو، از آنجایی که $\varphi(t_w, L)$ موضعی است و (2.2) برقرار است، داریم $r_0 \mathbf{1} \leq \sup S + l$ لذا

$$-\sup S \leq l - r_0 \mathbf{1}.$$

بنابراین

$$\varphi(t_w, -\sup S) \leq \varphi(t_w, l - r_0 \mathbf{1}) = \varphi(t_w, l) - r_0 \leq -r_0$$

و چون $\varphi(\cdot, -\sup S)$ موضعی است و

$$t_w = \varphi(w, -\sup S) \mathbf{1} + \sup S$$

با توجه به ویژگی‌های تابع φ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} -r_0 &\geq \varphi(t_w, -\sup S) = \varphi(\varphi(w, -\sup S) \vee \sup S, -\sup S) \\ &= \varphi(w, -\sup S) + \varphi(\sup S, -\sup S) = \varphi(w, -\sup S) \end{aligned}$$

لذا طبق لم ۲.۴.۱ داریم:

$$\begin{aligned} r_0 &\leq -\varphi(w, -\sup S) \leq |\varphi(w, -\sup S)| \\ &= |\varphi(\sup S, -\sup S) - \varphi(w, -\sup S)| \\ &\leq \|\sup S - w\| \end{aligned}$$

بنابراین $\forall w \in W$ داریم

$$\begin{aligned} r_0 &\leq \|\sup S - w\| \leq \sup_{s \in S} \|s - w\| \\ \Rightarrow \sup_{s \in S} \|s - y_0\| &= d(S, W) \end{aligned}$$

بنابراین $y_0 \in S_W(S)$.

در نهایت فرض کنیم (۲) به ازای $l = -y_0$ برقرار باشد. با توجه به اثبات (۲) $\Leftarrow$ (۱) داریم $y_0 \in S_W(S)$. اکنون فرض کنیم $w \in S_W(S)$ دلخواه باشد. بنابراین

$$\sup_{s \in S} \|s - w\| = d(S, W) = \sup_{s \in S} \|s - y_0\| = r_0$$

پس $w \in B(S, r_0)$. با توجه به فرض داریم $\varphi(w, -y_0) \geq 0$ ، بنابراین با توجه به تعریف تابع φ نتیجه می‌گیریم که

$$0 \leq \varphi(w, -y_0) \vee \leq w - y_0$$

این نشان می‌دهد که به ازای هر $w \in S_W(S)$ ، $y_0 \leq w$. بنابراین

$$y_0 = \min S_W(S).$$

□

در نتیجه اثبات کامل می‌شود.

گزاره ۱.۲.۲. فرض کنید که W یک زیر مجموعه بسته و S یک زیر مجموعه

بسته و کراندار از X باشند. به طوری که $S \cap W = \emptyset$ و فرض کنید که

$$D = \{\lambda > 0 : \sup S - \lambda \in W\}$$

در این صورت

$$d(S, W) = \min D.$$

برهان. ادعا می‌کنیم که به ازای هر $\lambda \in D$ داریم

$$\lambda \geq r_0 := d(S, W)$$

(چون $S \cap W = \emptyset$ ، بنابراین $d(S, W) > 0$). اکنون فرض کنیم که چنین نباشد یعنی $\lambda_0 \in D$ وجود داشته باشد به طوری که $\lambda_0 < r_0$. چون $\lambda_0 \in D$ نتیجه می‌شود که به $\sup S - \lambda_0 \in W$ اکنون قرار می‌دهیم

$$V = \{y \in X : \|y - w_0\| < r_0 - \lambda_0\}$$

که در آن $w_0 = \sup S - r_0 \in W$ عضو مینیمم مجموعه $S_W(S)$ می‌باشد، که با توجه به قضیه ۱.۲.۲ وجود دارد. واضح است که V یک همسایگی باز از w_0 می‌باشد و با توجه (۳.۱) داریم

$$V = \{y \in X : \sup S - r_0 + \lambda_0 < y < \sup S - \lambda_0\}$$

چون W یک مجموعه رو به پایین است و $\sup S - \lambda_0 \in W$ ، نتیجه می‌گیریم که $V \subset W$. بنابراین $w_0 \in \text{int} W$ و این یک تناقض است زیرا $S_W(S) \subset \text{bd} W$. بنابراین ادعا اثبات می‌شود. یعنی به ازای هر $\lambda \in D$ ثابت شد که $\lambda > r_0 = d(S, W)$. اما باید ثابت کنیم که $d(S, W) = \min D$ داریم

$$\sup S - r_0 = w_0 \in W$$

بنابراین $r_0 \in D$ ، و چون به ازای هر $\lambda \in D$ داریم $\lambda \geq r_0$ ، لذا $\min D = r_0$. پس

$$d(S, W) = r_n = \min D$$

□

و به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

می‌دانیم که اشتراک خانواده‌ای از مجموعه‌های رو به پایین، رو به پایین می‌باشد. در ادامه اگر W اشتراک خانواده‌ای از مجموعه‌های رو به پایین باشد، با استفاده از $d(S, W_i)$ بهترین تقریب‌های همزمان S را در W بدست می‌آوریم.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید I یک مجموعه اندیس‌گذار باشد و $\{W_i\}_{i \in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های رو به پایین در X باشد. قرار می‌دهیم $W := \cap W_i$. در این صورت،

$$d(S, W) = \sup_{i \in I} d(S, W_i)$$

با این شرط که S یک مجموعه کراندار از X است به طوری که $S \cap W = \emptyset$.

برهان. واضح است که اشتراک خانواده‌ای از مجموعه‌های رو به پایین رو به پایین می‌باشد و همچنین اشتراک مجموعه‌های بسته، بسته است. بنابراین $W = \cap_{i \in I} W_i$ یک مجموعه بسته و رو به پایین می‌باشد. حال فرض کنید که S یک مجموعه کراندار از X باشد به طوری که به ازای هر $i \in I$ ، $S \cap W = \emptyset$ و $r_i = d(S, W_i)$. تعریف می‌کنیم

$$t = \sup_{i \in I} r_i.$$

چون به ازای هر $i \in I$ داریم $W \subset W_i$ ، نتیجه می‌شود که به ازای هر $i \in I$ ، $r_i \leq d(S, W)$. بنابراین $t \leq d(S, W)$.

اگر $t = +\infty$ ، آنگاه $d(S, W) = \infty$. بنابراین نتیجه برقرار می‌باشد. فرض کنیم که $t < +\infty$ ، در این صورت از اینکه به ازای هر $i \in I$ ، $t \geq r_i$ به ازای هر $i \in I$ خواهیم داشت

$$\sup S - t \leq \sup S - r_i$$

و چون W_i زیر مجموعه بسته و رو به پایین از X است با توجه به قضیه ۱.۲.۲ نتیجه می‌گیریم که $\sup S - r_i \in W_i$. حال چون W_i مجموعه‌ای رو به پایین است، نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $i \in I$ ، $\sup S - t \in W_i$. پس $\sup S - t \in \cap_{i \in I} W_i$ و نتیجه می‌شود $\sup S - t \in W$. حال با توجه به گزاره ۱.۲.۲ داریم

$$d(S, W) = \min\{\lambda > 0 : \sup S - \lambda \in W\} \leq t.$$

اکنون فرض کنیم که $\lambda > 0$ دلخواه باشد به طوری که

$$\sup S - \lambda \in W.$$

در این صورت به ازای هر $\sup S - \lambda \in W_i, i \in I$. بنابراین با توجه به گزاره ۱.۲.۲، داریم

$$\lambda \geq d(x, W_i) \quad \forall i \in I$$

بنابراین

$$\lambda \geq \sup r_i = t.$$

مجدداً با استفاده از گزاره ۱.۲.۲ نتیجه می‌گیریم که

$$t \leq \min\{\lambda > 0 : \sup S - \lambda \in W\} = d(S, W)$$

در نتیجه $d(S, W) = t$ و حکم ثابت می‌شود. $\square$

لم ۲.۲.۲. فرض کنید که W یک زیر مجموعه بسته و S یک زیر مجموعه بسته کراندار از X باشند و $\mathbb{R}_+ = \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > 0\}$ در این صورت

$$bdW + \mathbb{R}_+ = \{\sup S : S \subset X \setminus W, S \text{ یک مجموعه کراندار است}\}.$$

برهان. قرار می‌دهیم

$$E = \{\sup S : S \subset X \setminus W, S \text{ یک مجموعه کراندار است}\}.$$

فرض کنیم $t \in E$ ، بنابراین یک مجموعه کراندار مانند $S_0 \subset X \setminus W$ وجود دارد به طوری که $t = \sup S_0$. حال قرار می‌دهیم $r := d(S_0, W)$. چون $S_0 \cap W = \emptyset$ ، پس $r > 0$. اکنون فرض کنیم که $w_0 = \sup S_0 - r$ و عضو مینیمم $S_W(S_0)$ باشد. با توجه به گزاره ۱.۲.۲ داریم که

$$S_W(S) \subseteq bdW$$

بنابراین $w_0 \in bdW$ ، با توجه به اینکه $t = \sup S_0$ و $\sup S_0 = w_0 + r$ نتیجه می‌شود که

$$t = \sup S_0 = w_0 + r \in bdW + \mathbb{R}_+$$

بنابراین

$$E \subset bdW + \mathbb{R}_+ \mathbf{1}$$

برعکس: فرض کنیم

$$t \in bdW + \mathbb{R}_+ \mathbf{1}$$

پس وجود دارد $w \in bdW$ و $\lambda \in \mathbb{R}_+$ به طوری که $t = w + \lambda \mathbf{1}$. اکنون فرض کنیم که

$$S_\circ = \{y \in X : w + \frac{1}{\lambda} \lambda \leq y \leq t\},$$

واضح است که $S_\circ$ یک مجموعه بسته و کراندار از X می‌باشد و $\sup S_\circ = t$ ، نشان می‌دهیم که $S \cap W = \emptyset$. فرض می‌کنیم که چنین نباشد یعنی وجود داشته باشد $y \in S_\circ \cap W$. بنابراین، چون $w + \frac{1}{\lambda} \lambda \leq y$ و $y \in W$ و W رو به پایین است نتیجه می‌گیریم که

$$w + \frac{1}{\lambda} \lambda \in W$$

قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned} V &= \{y \in X : \|y - w\| < \frac{1}{\lambda} \lambda\} \\ &= \{y \in X : w - \frac{1}{\lambda} \lambda < y < w + \frac{1}{\lambda} \lambda\} \end{aligned}$$

واضح است V یک همسایگی باز w می‌باشد و چون

$$w + \frac{1}{\lambda} \lambda \in W$$

و W یک مجموعه رو به پایین است نتیجه می‌شود که $V \subset W$. بنابراین $w \in \text{int}W$ و این یک تناقض است. چون $w \in bdW$ ، پس $S_\circ \cap W = \emptyset$. لذا $s_\circ \subset X \setminus W$ و همچنین $\sup S_\circ = t$. بنابراین $t \in E$ و اثبات تمام است. $\square$

لم ۳.۲.۲. فرض کنید W زیرمجموعه روبه پایین بسته‌ای از X باشد و $w \in W$. در این صورت $w \in bdW$ اگر و تنها اگر به ازای هر $\lambda > 0$ ، $\lambda \mathbf{1} + w \notin W$.

۳.۲ مجموعه‌های اکیداً رو به پایین

در این بخش ابتدا مجموعه‌های اکیداً روبه پایین را تعریف کرده و خواص این مجموعه‌ها را بررسی می‌کنیم و در نهایت نشان می‌دهیم که یک نقطه همزمان چپیشف برای یک مجموعه W است اگر و فقط اگر W در نقطه مورد نظر اکیدا رو به پایین باشد.

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیم W یک زیر مجموعه رو به پایین از X باشد. در این صورت W را اکیدا رو به پایین گوییم هرگاه به ازای هر $w_0 \in bdW$ ، نامساوی $w > w_0$ نتیجه دهد $w \notin W$.

مثال ۱.۳.۲. تابع $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ در نقطه $y \in X$ را اکیداً صعودی می‌گوییم، هرگاه به ازای هر $x, y \in X$ به طوری که $x < y$ داشته باشیم $f(x) < f(y)$. تابعی که در هر نقطه $y \in X$ اکیداً صعودی باشد اکیدا صعودی روی X نامیده می‌شود. حال اگر $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و اکیدا صعودی باشد، آنگاه تمام مجموعه‌های تراز ناتهی آن $S_c(f)$ ($c \in \mathbb{R}$) اکیدا رو به پایین می‌باشند که

$$S_c(f) := \{x \in X : f(x) \leq c\}.$$

برهان. چون f پیوسته و اکیداً صعودی می‌باشد، بنابراین

$$bdS_c(f) = \{x \in X : f(x) = c\}$$

حال فرض کنیم $x \in bdS_c(f)$ به دلخواه باشد و $y \in X$ به طوری که $y > x$ ، چون f اکیداً صعودی است و $f(x) = c$ ، در نتیجه داریم $f(y) > f(x) = c$. بنابراین $y \notin S_c(f)$ پس $S_c(f)$ اکیدا رو به پایین می‌باشد. $\square$

تعریف ۲.۳.۲. فرض کنید که W یک زیر مجموعه بسته و رو به پایین از X باشد. در این صورت گوییم W در نقطه $w' \in bdW$ اکیدا رو به پایین است اگر به ازای هر $w_0 \in bdW$ که $w_0 < w'$ ، آنگاه نامساوی $w > w_0$ نتیجه دهد که $w \notin W$.

لم ۱.۳.۲. فرض کنید که W یک زیر مجموعه بسته و رو به پایین از X باشد، در این صورت W در نقطه $w' \in bdW$ اکیدا رو به پایین است اگر و فقط اگر

$$۱. \quad w > w' \Rightarrow w \notin W$$

$$۲. \quad (w_0 \leq w', \quad w_0 \in bdW) \Rightarrow w_0 = w'$$

برهان. فرض کنید که W یک زیر مجموعه بسته و رو به پایین از X باشد، و $w' \in bdW \subset W$. در این صورت با توجه به تعریف اکیدا رو به پایین بودن W ، (۱) برقرار است پس باید بررسی کنیم که اگر $w_0 \leq w'$ و $w_0 \in bdW$ ، آنگاه $w_0 = w'$. فرض کنیم که چنین نباشد یعنی $w_0 \neq w'$ ، پس $w' > w_0$ که با توجه به تعریف اکیدا رو به پایین بودن W داریم $w' \notin W$ که تناقض می‌باشد.

برعکس فرض کنیم که (۱) و (۲) برقرار باشند. اگر $w_0 \in bdW$ و $w_0 \leq w'$ ، آنگاه با توجه به رابطه (۲) داریم $w_0 = w'$ و با توجه به رابطه (۱) داریم که اگر $w > w_0$ ، آنگاه $w \notin W$ و به این ترتیب اثبات کامل است. $\square$

لم ۲.۳.۲. فرض کنید که W یک زیر مجموعه بسته و رو به پایین از X باشد، در این صورت W اکیدا رو به پایین است اگر و فقط اگر W در هر نقطه مرزی اکیدا رو به پایین باشد.

برهان. با توجه به لم قبل کفایت نشان دهیم که به ازای هر مجموعه‌ی اکیدا روبه پایین W و هر نقطه مرزی w' از W رابطه $w_0 \leq w'$ ، $w_0 \in bdW$ نتیجه می‌دهد که $w = w'$ و این درست می‌باشد چون نامساوی $w_0 < w'$ برای مجموعه‌های اکیدا رو به پایین نتیجه می‌دهد که $w' \notin W$. $\square$

تعریف ۳.۳.۲. فرض کنید که W یک زیر مجموعه بسته و رو به پایین از X باشد. در این صورت نقطه $w' \in bdW$ را نقطه همزمان چپش گوییم اگر به ازای هر $w_0 \in bdW$ که در آن $w' \leq w_0$ و برای هر مجموعه کراندار S از X که $S \cap W = \emptyset$ به طوری که $w_0 \in S_W(S)$ ، نتیجه شود که $S_W(S) = \{w_0\}$.

قضیه ۱.۳.۲. فرض کنید که W یک زیر مجموعه بسته و رو به پایین از X باشد و $w' \in bdW$. در این صورت عبارتهای زیر معادلند

(۱) w' یک نقطه تقریب همزمان چپیش W است.

(۲) W در نقطه w' اکیدا رو به پایین است.

برهان. (۱) $\Leftrightarrow$ (۲) فرض کنید (۱) برقرار باشد و w' در نقطه w' اکیدا رو به پایین نباشد. بنابراین می‌توان نقطه‌ای مانند $w_0 \in bdW$ پیدا کرد به طوری که $w_0 \leq w'$ و همچنین وجود دارد $w \in W$ که $w > w_0$. قرار می‌دهیم $r \geq \|w - w_0\| > 0$. با توجه به (۳.۱) داریم

$$w - w_0 \leq \|w - w_0\| \mathbf{1} \leq r \mathbf{1}$$

$$\Rightarrow w \leq w_0 + r \mathbf{1}$$

فرض کنیم که $S = \{w_\circ + r\}$. در این صورت

$$\sup_{s \in S} \|s - w_\circ\| = \sup_{s \in S} \|w_\circ + r - w_\circ\| = \|r\| = r.$$

ادعا می‌کنیم $d(S, W) = r$. فرض کنیم چنین نباشد، بنابراین وجود دارد $y \in W$ به طوری که $\|w_\circ + r - y\| < r$ که در آن $y \neq w_\circ + r$. چون اگر $y = w_\circ + r$ عضو W باشد بنابر لم ۱.۱.۲ داریم $w_\circ \in \text{int}W$ ، این یک تناقض است چون $w_\circ \in \text{bd}W$. بنابراین وجود دارد $r_\circ \in (0, r)$ به طوری که $\|w_\circ + r - y\| \leq r_\circ$. از این رو، بنابر (۳.۱) داریم $w_\circ + r \leq y + r_\circ$ و این نشان می‌دهد که

$$w_\circ + \lambda_\circ \mathbf{1} \leq y, \quad \lambda_\circ = (r - r_\circ) > 0.$$

چون W یک مجموعه رو به پایین است و $y \in W$ ، نتیجه می‌گیریم که

$$w_\circ + \lambda_\circ \mathbf{1} \in W$$

و همچنین با توجه به لم ۱.۱.۲ داریم $w_\circ \in \text{int}W$ و این یک تناقض است. بنابراین

$$d(S, W) = r = \sup_{s \in S} \|s - w_\circ\|$$

و این یعنی اینکه $w_\circ \in S_W(S)$. از طرف دیگر داریم $w \leq w_\circ + r$ ، چون $w_\circ < w$ نتیجه می‌گیریم که

$$0 \leq (w_\circ + r) - w < w_\circ + r - w_\circ = r$$

$$\Rightarrow \sup_{s \in S} \|s - w\| \leq r$$

$$= d(S, W) \leq \sup_{s \in S} \|s - w\|$$

$$\Rightarrow \sup_{s \in S} \|s - w\| = d(S, W)$$

$$\Rightarrow w \in S_W(S), \quad w \neq w_\circ$$

بنابراین وجود دارد $w_\circ \in \text{bd}W$ و همچنین مجموعه کراندار $S = \{w_\circ + r\}$ که $S \cap W = \emptyset$ به طوری که $Sw(S)$ شامل $w_\circ$ و همچنین حداقل شامل نقطه‌ای غیر از $w_\circ$ می‌باشد. این غیر ممکن است چون w' نقطه همزمان چپیش W است.

(۲) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنیم W در نقطه $w' \in bdW$ اکیداً رو به پایین باشد، در این صورت به ازای هر نقطه $w' \leq w_0$ و $w_0 \in bdW$ ، کافی است ثابت کنیم برای هر مجموعه کراندار S از X که $S \cap W = \emptyset$ و $w' \in S_W(S)$ نتیجه بگیریم که $S_W(S) = \{w'\}$ ، در واقع $S_W(S)$ دارای یک نقطه منحصر به فرد باشد. فرض کنیم S مجموعه‌ای باشد که در شرایط فوق صدق کند. چون W یک مجموعه بسته رو به پایین از X می‌باشد با توجه به قضیه ۱.۲.۲ نتیجه می‌گیریم که عضو مینیمم w_0 از $S_W(S)$ وجود دارد و $w_n = \sup S - r$ که در آن $r = d(S, W)$. چون در گزاره ۱.۱.۲ نشان دادیم که $S_W(S) \subset bdW$ ، لذا $w_0 \in bdW$. اما داریم $w' \leq w_0$ ، با توجه به فرض مسئله نتیجه می‌شود که $w' = w_0$. همچنین چون W در نقطه $w' = w_0$ اکیداً رو به پایین است و به ازای هر $w \in S_W(S) \subset W$ ، $w' \leq w$. نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $w \in S_W(S)$ ، $w = w'$. بنابراین $S_W(S)$ تک نقطه‌ای $\{w'\}$ می‌باشد لذا w' یک نقطه همزمان چپیشف W می‌باشد به این ترتیب اثبات کامل است. $\square$

فصل ۳

بهترین تقریب‌های همزمان روی مجموعه‌های بسته به وسیله پوسته رو به پایین

در این فصل می‌خواهیم با استفاده از نتایج به دست آمده در فصل‌های قبل به محک زدن بهترین تقریب‌های همزمان به وسیله غلاف رو به پایین پردازیم. برای این منظور ابتدا در بخش اول تعاریف مورد نیاز را بیان می‌کنیم و سپس در بخش‌های دوم و سوم به ترتیب به بهترین تقریب به وسیله مجموعه‌های نرمال و بهترین تقریب‌های همزمان به وسیله غلاف‌های روبه پایین و ارتباط آنها با یکدیگر می‌پردازیم. لازم به یادآوری است که X شبکه برداری فضای باناخ است و مطالب این فصل از [۷، ۸] استخراج شده است.

۱.۳ تعاریف

بحث خود را با تعاریف زیر آغاز می‌کنیم.

تعریف ۱.۱.۳. $A \subseteq X$ را یک مخروط می‌نامیم هرگاه به ازای هر $\lambda \geq 0$ داشته باشیم $\lambda A \subseteq A$.

۴۰ بهترین تقریب‌های همزمان روی مجموعه‌های بسته به وسیله پوسته رو به پایین

تعریف ۲.۱.۳. فرض کنیم $A \subseteq X$ ، در این صورت اشتراک همه‌ی مخروط‌های شامل A را غلاف مخروط A می‌گوییم و با $\text{cone}(A)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۳. فرض کنید U یک زیرمجموعه از X باشد. در این صورت اشتراک تمام مجموعه‌های رو به پایین شامل U غلاف رو به پایین U_* از U نامیده می‌شود.

از آنجایی که اشتراک هر خانواده از زیر مجموعه‌های رو به پایین، رو به پایین می‌باشد، پس غلاف رو به پایین U_* نیز رو به پایین است، واضح است که غلاف رو به پایین U_* کوچکترین مجموعه رو به پایین است که شامل U می‌باشد.
به عنوان مثال در نظر می‌گیریم

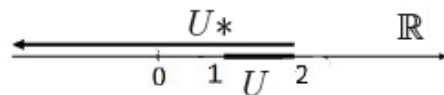
$$U := \{u \in \mathbb{R} : 1 \leq u \leq 2\}$$

داریم

$$U_* = U - X^+ = \{u - v | u \in U, v \geq 0\}$$

لذا

$$U_* = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 2\}.$$



تعریف ۴.۱.۳. زیر مجموعه‌ی G از مخروط مثبت

$$X^+ := \{x \in X : x \geq 0\}$$

نرمال نامیده می‌شود اگر به ازای هر $g \in G$ و $x \in X^+$ به طوری که $x \leq g$ ، آنگاه $x \in G$.

۲.۳ بهترین تقریب به وسیله مجموعه‌های نرمال

در این بخش به نتایج به دست آمده در بهترین تقریب به وسیله مجموعه‌های نرمال و ارتباط آن با مجموعه‌ها و غلاف‌های رو به پایین می‌پردازیم.
قرارداد: به ازای هر زیر مجموعه A از X تعریف می‌کنیم

$$A^+ := \{a^+ : a \in A\}$$

که در آن $a^+ := \sup\{a, \circ\}$ و $a^- := -\inf\{a, \circ\}$.

گزاره ۱.۲.۳. فرض کنید که $U \subset X$ ، در این صورت خواهیم داشت

$$U_* = U - X^+ = \{u - v | u \in U, v \geq \circ\}.$$

برهان. قرار می‌دهیم

$$A = \{u - v | u \in U, v \geq \circ\}.$$

ابتدا نشان می‌دهیم که A رو به پایین است. فرض می‌کنیم $u_1 - v_1 \in A$ و $t \leq u_1 - v_1$. در این صورت $u_1 - t \in X^+$ ، پس $v_1 \geq \circ$ ، بنابراین $u_1 - t \geq \circ$ ، پس $u_1 - t \in X^+$. لذا داریم

$$t = u_1 - (u_1 - t) \in A,$$

که در آن $u_1 \in U$ و $t \in A^+$. بنابراین A رو به پایین می‌باشد. چون به ازای هر $u \in U$ داریم $u = u - \circ \in A$ زیرا $\circ \in X^+$. بنابراین A شامل U نیز می‌باشد. در نهایت باید ثابت کنیم که A کوچکترین مجموعه رو به پایینی می‌باشد که شامل U است. فرض کنیم که چنین نباشد و A' مجموعه‌ای رو به پایین باشد که شامل U است. به ازای هر عضو دلخواه $u_1 - v_1$ از A ، چون $u_1 \in U$ پس $u_1 \in A'$ و از طرفی $u_1 - v_1 \leq u_1$ و A' مجموعه رو به پایین می‌باشد نتیجه می‌گیریم که $u_1 - v_1 \in A'$ ، پس $A \subset A'$. بنابراین A کوچکترین مجموعه رو به پایین است که شامل U می‌باشد و به این ترتیب اثبات کامل است. $\square$

گزاره ۲.۲.۳. فرض کنید G زیرمجموعه‌ای نرمال از X^+ و $G_* \subset X$ غلاف روبه پایینی از G باشد. در این صورت، عبارت‌های زیر برقرارند:

$$1. G_* = \{x \in X : x^+ \in G\}$$

$$2. G = G_* \cap X^+$$

۳. G بسته است اگر و فقط اگر G_* بسته باشد.

$$4. (G_*)^+ = G$$

برهان. فرض کنید که $g \in G_*$. در این صورت $g = u - v$ ، که در آن $v \in X^+$ و $u \in G$. فرض کنید که $g \geq \circ$. بنابراین $g^+ = g$ و از آنجایی که $u - v \leq u$ و $u \in G$ و این که

G نرمال است، پس نتیجه می‌گیریم که

$$g^+ = g = u - v \in G.$$

اگر $g < \circ$ ، آنگاه $g^+ = \circ$ و چون $G \subset X^+$ ، بنابراین به ازای $u \in G$ داریم $u \geq \circ$. از این رو، بنابر نرمال بودن G نتیجه می‌گیریم که $g^+ = \circ \in G$.
برعکس: به ازای هر

$$x \in \{x \in X \mid x^+ \in G\}$$

که $x \geq \circ$ ، آنگاه $x = x^+ \in G$. چون $G \subset G_*$ ، پس $x \in G_*$. اگر $x < \circ$ ، آنگاه $x^+ = \circ$ و $-x \in X^+$ داریم:

$$x = \circ - (-x) \in G_*$$

و به این ترتیب اثبات کامل است.

(۲) داریم که $G \subset G_*$ و $G \subset X^+$. بنابراین $G \subset x + \cap G_*$. حال کافی است نشان دهیم که

$$X^+ \cap G_* \subset G.$$

فرض کنیم که $g \in X^+ \cap G_*$. چون $g \in X^+$ ، پس $g \geq \circ$. همچنین بنابر (۱) داریم $g^+ \in G$ ، پس $g = g^+ \in G$ و به این ترتیب اثبات کامل است.
(۳) بنابر قسمت (۲) داریم که

$$G = X^+ \cap G_*$$

و چون X^+ بسته است، پس نتیجه حاصل می‌شود.

(۴) فرض کنیم $g \in G$. چون $G \subset X^+$ ، پس $g = g^+$. از اینکه $G \subset G_*$ ، بنابراین $g \in G_*$ و چون $g \geq \circ$ ، پس $g \in G_*^+$.

برعکس: فرض کنیم $g \in G_*^+$. بنابر (۱) داریم $g^+ \in G$ و چون $g \in G_*^+$ ، پس $g = g^+ \in G$.
به این ترتیب اثبات کامل است. $\square$

گزاره ۳.۲.۳. فرض کنید $x_\circ \in X^+$ و $y_\circ \in X$ باشند. در این صورت $\|x_\circ - y_\circ\| \geq \|x_\circ - y_\circ^+\|$.

برهان. داریم $x_\circ = x_\circ^+$ و $y_\circ = y_\circ^+ - y_\circ^-$. در نتیجه

$$x_\circ - y_\circ = (x_\circ - y_\circ^-) - y_\circ^+.$$

از این رو

$$\begin{aligned} |x_{\circ} - y_{\circ}| &= (x_{\circ} - y_{\circ})^+ + (x_{\circ} - y_{\circ})^- = (x_{\circ} - y_{\circ}^-) + y_{\circ}^+ \\ &= (x_{\circ} + y_{\circ}^+) + y_{\circ}^- \geq (x_{\circ} - y_{\circ}^+) = |x_{\circ} - y_{\circ}^+|. \end{aligned}$$

بنابراین $\|x_{\circ} - y_{\circ}\| \geq \|x_{\circ} - y_{\circ}^+\|$. □

نتیجه ۱.۲.۳. فرض کنید $G \subset X^+$ مجموعه‌ای نرمال باشد و $G_* \subset X$ غلاف روبه پایین G ، و $x_{\circ} \in X^+$ در این صورت $d(x_{\circ}, G_*) = d(x_{\circ}, G)$.

برهان. چون $G \subset G_*$ ، خواهیم داشت $d(x_{\circ}, G_*) \leq d(x_{\circ}, G)$. از طرفی دیگر، فرض کنید $g \in G_*$ دلخواه باشد. در این صورت بنابر گزاره ۲.۲.۳، $g^+ \in G$. نتیجه می‌شود که

$$\forall g \in G_*, \quad \|x_{\circ} - g\| \geq \|x_{\circ} - g^+\| \geq d(x_{\circ}, G).$$

بنابراین $d(x_{\circ}, G_*) \geq d(x_{\circ}, G)$. در نتیجه $d(x_{\circ}, G_*) = d(x_{\circ}, G)$. □

لم ۱.۲.۳. فرض کنید W زیرمجموعه روبه پایین بسته‌ای از X باشد و $x_{\circ} \in X$. در این صورت کوچکترین عنصر $w_{\circ} := \min P_W(x_{\circ})$ از مجموعه $P_W(x_{\circ})$ ، که آن را $w_{\circ} = x_{\circ} - r$ می‌نامیم، وجود دارد که در آن $r := d(x_{\circ}, W)$.

برهان. به [۹]، گزاره ۳.۳ مراجعه کنید. □

گزاره ۴.۲.۳. فرض کنید G زیرمجموعه نرمال بسته‌ای از X^+ باشد و $x_{\circ} \in X^+$. در این صورت کوچکترین عنصر $g_{\circ} := \min P_G(x_{\circ})$ از مجموعه $P_G(x_{\circ})$ وجود دارد، که آن را $g_{\circ} = w_{\circ}^+$ می‌نامیم، که در آن $w_{\circ}$ کوچکترین عنصر از مجموعه $P_{G_*}(x_{\circ})$ و $G_* \subset X$ غلاف روبه پایین از G است.

برهان. از آنجایی که G در X^+ بسته است، از گزاره ۲.۲.۳ نتیجه می‌شود که G_* در X بسته است. در نتیجه بنابر لم ۱.۲.۳ کوچکترین عنصر $w_{\circ} = x_{\circ} - r$ از مجموعه $P_{G_*}(x_{\circ})$ وجود دارد که در آن $r := d(x_{\circ}, G_*)$. همچنین بنابر نتیجه ۱.۲.۳ داریم $r = d(x_{\circ}, G) = d(x_{\circ}, G_*)$. اکنون فرض کنید $g_{\circ} = w_{\circ}^+ = (x_{\circ} - r)^+$ از آنجایی که $w_{\circ} \in G_*$ ، بنابر گزاره ۲.۲.۳ داریم $g_{\circ} = W_{\circ}^+ \in G$ و لذا

$$\|x_{\circ} - g_{\circ}\| = \|x_{\circ} - w_{\circ}^+\| \geq d(x_{\circ}, G) = r.$$

از طرف دیگر، بنابر گزاره ۱.۲.۳ داریم

$$r = d(x_0, G_*) = \|x_0 - w_0\| \geq \|x_0 - w_0^+\| = \|x_0 - g_0\|.$$

از این رو $\|x_0 - g_0\| = r = d(x_0, G)$ و بنابراین $g_0 \in P_G(x_0)$. فرض کنید $g \in P_G(x_0)$ دلخواه باشد. در این صورت $\|x_0 - g\| = d(x_0, G) = r = d(x_0, G_*)$. از آنجایی که $g \in G \subset G_*$ ، نتیجه می‌شود که $g \in P_{G_*}(x_0)$ و بنابراین $g \geq w_0$. همچنین چون $g \geq 0$ ، داریم $g \geq g_0 = w_0^+ = \sup(w_0, 0)$. بنابراین $g_0 = w_0^+$ کوچکترین عنصر مجموعه $P_G(x_0)$ است، که به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. $\square$

قضیه ۱.۲.۳. فرض کنید G زیرمجموعه نرمال بسته‌ای از X^+ ، $G_* \subset X$ غلاف روبه پایین از G و $x_0 \in X$ باشد. در این صورت $d(x_0, G_*) = d(x_0^+, G)$.

برهان. فرض کنید $w \in G_*$ دلخواه باشد و $w = w^+ - w^-$. در این صورت بنابر گزاره ۲.۲.۳، $w^+ \in G$ از آنجایی که

$$|x_0 - w| = |x_0^+ - w^+| + |x_0^- - w^-| \geq |x_0^+ - w^+|,$$

نتیجه می‌شود که

$$\forall w \in G_*, \quad \|x_0 - w\| \geq \|x_0^+ - w^+\| \geq d(x_0^+, G).$$

در نتیجه $d(x_0, G_*) \geq d(x_0^+, G)$. از طرفی دیگر، چون G زیرمجموعه نرمال بسته‌ای از X^+ است و $x_0^+ \in X^+$ ، از گزاره ۴.۲.۳ نتیجه می‌شود که $g_0 = (x_0^+ - r1)$ کوچکترین عنصر از مجموعه $P_G(x_0^+)$ وجود دارد، که در آن $r := d(x_0^+, G_*)$. اکنون تعریف کنید

$$g_{x_0} = g_0 - x_0^-.$$

از این رو چون $x_0^- \geq 0$ داریم $g_{x_0} \leq g_0$. از آنجایی که G_* مجموعه‌ای روبه پایین است و $g_0 \in G \subset G_*$ ، نتیجه می‌شود که $g_{x_0} \in G_*$. همچنین داریم $x_0 - g_{x_0} = x_0^+ - g_0$. بنابراین

$$d(x_0, G_*) \leq \|x_0 - g_{x_0}\| = \|x_0^+ - g_0\| = d(x_0^+, G).$$

$\square$

در نتیجه، داریم $d(x_0, G_*) = d(x_0^+, G)$.

۳.۳ بهترین تقریب‌های همزمان به وسیله غلاف روبه‌پایین

در این بخش به بیان نتایج به دست آمده در بهترین تقریب‌های همزمان به وسیله غلاف روبه‌پایین و ارتباط آن با مجموعه‌ها روبه‌پایین می‌پردازیم.

گزاره ۱.۳.۳. فرض کنیم که S یک زیر مجموعه کراندار از X^+ و $x \in X$ دلخواه باشد، در این صورت

$$\sup_{s \in S} \|s - x\| \geq \sup_{s \in S} \|s - x^+\|$$

برهان. فرض کنیم $s \in S$ دلخواه باشد و $x = x^+ - x^-$. بنابراین چون $S \subset X^+$ ، پس $s^+ = s$ و داریم

$$s - x = (s + x^-) - x^+$$

بنابراین

$$(s - x)^- = ((s + x^-) - x^+)^- = (s + x^-)^- + (-x^+)^- = 0 + x^+$$

همچنین

$$(s - x)^+ = ((s + x^-) - x^+)^+ = (s + x^-)^+ + (-x^+)^+ = (s + x^-) + 0$$

اما داریم

$$|s - x| = (s - x)^+ + (s - x)^-$$

بنابراین

$$\begin{aligned} |s - x| &= (s + x^-) + x^+ = (s + x^+) + x^- \geq (s + x^+) = \\ &= (s - x^+)^+ + (s - x^+)^- = |s - x^+| \end{aligned}$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\forall s \in S \quad \|s - x\| \geq \|s - x^+\|$$

$$\sup_{s \in S} \|s - x\| \geq \sup_{s \in S} \|s - x^+\|$$

□

و به این ترتیب اثبات کامل است.

گزاره ۲.۳.۳. فرض کنیم که S یک زیر مجموعه کراندار از X^+ ، $G \subset X^+$ یک مجموعه نرمال و $G_* \subset X$ غلاف رو به پایین G باشد. در این صورت

$$d(S, G_*) = d(S, G)$$

برهان. چون $G \subset G_*$ ، پس $d(S, G_*) \leq d(S, G)$. از طرف دیگر به ازای هر عضو دلخواه $g \in G_*$ و با توجه به گزاره ۲.۲.۳ داریم $g^+ \in G$ چون S زیر مجموعه‌ای کراندار از X است، لذا بنابر گزاره ۱.۳.۳ نتیجه می‌گیریم که

$$\sup_{s \in S} \|s - g\| \geq \sup_{s \in S} \|s - g^+\| \geq d(S, G) \quad \forall g \in G.$$

بنابراین

$$d(S, G) \leq d(S, G_*)$$

در نتیجه

$$d(S, G) = d(S, G_*)$$

□

و به این ترتیب اثبات کامل است.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید G زیرمجموعه نرمال بسته‌ای از X^+ و S زیرمجموعه کرانداری از X^+ باشد. در این صورت کوچکترین عنصر $g_\circ := \min S_G(S)$ از مجموعه $S_G(S)$ ، که آن را $g_\circ = w_\circ^+$ می‌نامیم، وجود دارد که در آن $w_\circ$ کوچکترین عنصر از مجموعه $S_{G_*}(S)$ است و $G_* \subset X$ غلاف رو به پایین G است.

برهان. چون G در X^+ بسته است، بنابر گزاره ۲.۲.۳، نتیجه می‌شود که G_* در X بسته است. در نتیجه بنابر قضیه ۱.۲.۲، $w_\circ = \sup S - r$ کوچکترین عنصر از مجموعه $S_{G_*}(S)$ موجود است که در آن $r := d(S, G_*)$. همچنین، بنابر گزاره ۲.۳.۳، داریم $r = d(S, G)$.

اکنون، فرض کنید $g_\circ = w_\circ^+ = (\sup S - r)^+$ از آنجایی که $w_\circ \in G_*$ ، بنابر گزاره ۲.۲.۳، داریم $g_\circ = w_\circ^+ \in G$ و از این رو

$$\sup_{s \in S} \|s - g_\circ\| = \sup_{s \in S} \|s - w_\circ^+\| \geq d(S, G) = r.$$

از طرف دیگر، بنابر گزاره ۱.۳.۳، داریم

$$r = d(S, G_*) = \sup_{s \in S} \|s - w_\circ\| \geq \sup_{s \in S} \|s - w_\circ^+\| = \sup_{s \in S} \|s - g_\circ\|.$$

که نتیجه می‌شود

$$\sup_{s \in S} \|s - g_\circ\| = r = d(S, G),$$

و از این رو $g_\circ \in S_G(S)$. فرض کنید $g \in S_G(S)$ دلخواه باشد. لذا داریم

$$\sup_{s \in S} \|s - g\| = d(S, G) = r = d(S, G_*).$$

چون $g \in G \subset G_*$ ، نتیجه می‌شود $g \in G_\sigma(S)$ و بنابراین $g \geq u_\circ$. داریم $g \geq \circ$. در نتیجه، $g \geq \sup(w_\circ, \circ) = w_\circ^+ = g_\circ$. بنابراین، $g_\circ = w_\circ^+$ کوچکترین عنصر مجموعه $G_G(S)$ است. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود. $\square$

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید G زیرمجموعه نرمال بسته‌ای از X^+ و S زیرمجموعه کرانداری از X باشد. در این صورت $d(S^+, G) = d(S, G_*)$ ، که در آن $G_* \subset X$ غلاف روبه پایین از G است.

برهان. فرض کنید $g \in G_*$ دلخواه باشد و $g = g^+ - g^-$. از گزاره ۲.۲.۳ نتیجه می‌شود که $g^+ \in G$. فرض کنید $s \in S$ دلخواه باشد. در این صورت داریم

$$|s - g| = |s^+ - g^+| + |s^- - g^-| \geq |s^+ - g^+|.$$

این ایجاب می‌کند که

$$\|s - g\| \geq \|s^+ - g^+\| \quad \forall s \in S.$$

لذا

$$\sup_{s \in S} \|s - g\| \geq \sup_{s \in S} \|s^+ - g^+\| = \sup_{s^+ \in S^+} \|s^+ - g^+\| \geq d(S^+, G) \quad \forall g \in G_*.$$

از این رو، $d(S, G_*) \geq d(S^+, G)$.

از طرفی دیگر، داریم که G زیرمجموعه‌ای نرمال بسته از X^+ و S^+ زیرمجموعه کرانداری از X^+ است. از قضیه ۱.۳.۳ نتیجه می‌شود که $g_\circ = (\sup S^+ - r_1)^+$ کوچکترین عنصر از مجموعه $S_G(S^+)$ موجود است، که در آن $r := d(S^+, G_*)$.

اکنون فرض کنید $s \in S$ دلخواه باشد و $s = s^+ - s^-$ تعریف کنید

$$g_s = g_\circ - s^-.$$

چون $s^- \geq \circ$ ، به ازای هر $s \in S$ به دست می‌آوریم $g_s \leq g_\circ$. اما، G_* مجموعه‌ای روبه پایین است و $g_\circ \in G \subset G_*$ ، از این نتیجه می‌شود که به ازای هر $s \in S$ ، $g_s \in G_*$ و $s - g_s = s^+ - g_\circ$. از این رو

$$d(S, G_*) \leq \sup_{s \in S} \|s - g_\circ\| = \sup_{s \in S} \|s^+ - g_\circ\| = \sup_{s^+ \in S^+} \|s^+ - g_\circ\| = d(S^+, G).$$

□

بنابراین، داریم $d(S^+, G) = d(S, G_*)$.

فصل ۴

ϵ -تقریب‌های همزمان روی مجموعه‌های روبه پایین

در این فصل به برخی نتایج درباره ویژگی‌های ϵ -تقریب همزمان روی مجموعه‌های رو به پایین در شبکه‌ی برداری فضاهاى باناخ X پرداخته می‌شود. سپس یک سری نتایج در مورد تقریب‌های همزمان در مجموعه‌های نرمال بیان می‌شود.

۱.۴ ϵ -تقریب‌های همزمان

نظریه بهترین تقریب همزمان توسط نویسندگان بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است (به عنوان مثال، [۴، ۱۳]). سینگر [۱۲] مفهوم " ϵ -تقریب همزمان" را معرفی کرد. بهترین تقریب همزمان تعمیمی از بهترین تقریب است و ϵ -تقریب همزمان تعمیم یافته مفهوم بهترین تقریب همزمان است. هرچند که، محدب بودن مجموعه گاهی اوقات بسیار محدود است اما اغلب مطالعات درباره بهترین تقریب همزمان بر روی مجموعه‌های محدب انجام شده است. در اینجا، به اثبات برخی نتایج در مورد ویژگی‌های ϵ -تقریب‌های همزمان روی مجموعه‌های روبه پایین در شبکه برداری فضاهاى باناخ خواهیم پرداخت. فضاهاى زیادی همراه با ترتیب $\leq$ وجود دارند. فضاهاى L^p و $C(X)$ نمونه‌هایی از این

فضاها هستند.

تعریف ۱.۱.۴. فرض کنید X فضایی نرم‌دار، W زیرمجموعه‌ای از X و S یک مجموعه کراندار در X باشد. در این صورت عنصر $w_0 \in W$ ، ε -تقریب همزمان نامیده می‌شود، هرگاه

$$\sup_{s \in S} \|s - w_0\| \leq d(S, W) + \varepsilon.$$

مجموعه همه‌ی ε -تقریب‌های همزمان S از W با $S_{W, \varepsilon}(S)$ نشان داده خواهد شد.

یک مزیت در نظر گرفتن مجموعه $S_{W, \varepsilon}(S)$ به جای مجموعه $S_W(S)$ ، این است که مجموعه $S_{W, \varepsilon}(S)$ همواره به ازای هر $\varepsilon > 0$ ناتهی است.

به یاد داشته باشید که زیرمجموعه W از مجموعه مرتب X روبه پایین نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $w \in W$ و $x \in X$ با $x \leq w$ ، بتوانیم نتیجه بگیریم که $x \in W$. اگر X یک شبکه باشد و کوچکترین عنصر W موجود باشد، آنگاه آن را با $\min W$ نشان می‌دهیم.

فرض کنید X یک فضای برداری باشد. X مجهز به مخروط محدب و نوک تیز $K \subset X$ باشد. (به این معنی که $K \cap (-K) = \{0\}$). فرض کنید که درون $\text{int} K$ از K ناتهی باشد، یعنی، وجود داشته باشد $1 \in K$ به طوری که به ازای هر $x \in X$ وجود داشته باشد $\varepsilon > 0$ با این ویژگی که به ازای هر α با $|\alpha| < \varepsilon$ ، $1 + \alpha x \in K$. مخروط K رابطه‌ی ترتیبی $\leq$ را روی X تولید می‌کند. بنابر تعریف $x \leq y$ اگر و تنها اگر $y - x \in K$ می‌گوییم که y از x بزرگتر است و می‌نویسیم $x < y$ هرگاه $y - x \in K \setminus \{0\}$.

فرض کنید $1 \in \text{int} K$. با استفاده از ۱ می‌توانیم تابع $p : X \rightarrow \mathbf{R}$ را به صورت

$$p(x) := \inf\{\lambda \in \mathbf{R} : x \leq \lambda 1\}, \quad x \in X$$

تعریف کنیم. چون $1 \in \text{int} K$ ، نتیجه می‌شود که p متناهی است. به آسانی می‌توان بررسی نمود که p دارای ویژگی‌های زیر است:

$$1. \text{ به ازای هر } x, y \in X, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

$$2. \text{ به ازای هر } x \in X \text{ و هر } \lambda > 0, \quad p(\lambda x) = \lambda p(x).$$

$$3. \text{ به ازای هر } x \in X \text{ و هر } \lambda \in \mathbf{R}, \quad p(x + \lambda 1) = p(x) + \lambda.$$

$$4. \text{ } p \text{ صعودی است، یعنی اگر } x \leq y, \text{ آنگاه } p(x) \leq p(y), \text{ و به ازای هر } x \in X$$

$$x \leq p(x)1 \tag{1.4}$$

اکنون، تابع

$$\|x\| := \max(p(x), p(-x)), \quad x \in X \quad (2.4)$$

را در نظر بگیرید. به آسانی مشاهده می‌شود که $\|\cdot\|$ یک نرم روی X است. در این صورت، بنابر (۱.۴) و (۲.۴) داریم

$$B(x, r) := \{y \in X : \|x - y\| \leq r\} = \{y \in X : x - r1 \leq y \leq x + r1\}. \quad (3.4)$$

فرض کنید X شبکه‌ی به طور مشروط کامل فضای باناخ با یکه قوی ۱ باشد. در این بخش برخی نتایج درباره‌ی ε -تقریب همزمان مجموعه‌های روبه پایین را اثبات می‌کنیم. با قضیه زیر به خاطر استناد آسان شروع می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۴. فرض کنید W زیرمجموعه‌ی روبه پایینی از X و S زیرمجموعه کراندار دلخواهی از X باشد. در این صورت اگر $r = d(S, W)$ ، آنگاه $w_0 = \sup S - r1 \in S_W(S)$ و برابر با کوچکترین عنصر از $S_W(S)$ است. از این رو، W زیرمجموعه‌ای تقریب‌پذیر همزمان از X است.

برهان. اگر $d(S, W) = 0$ ، آنگاه نتیجه بنابر لم ۱.۲.۲ برقرار است. فرض کنید که $d(S, W) > 0$ و $w_0 = \sup S - r1$. در این صورت بنابر لم ۱.۲.۲، داریم $w_0 \in S_W(S)$. چون $w_0 = \sup S - r1 \in B(S, r)$ بنابر (۱.۱) نتیجه می‌شود که به ازای هر $y \in B(S, r)$ ، $y \geq w_0$. از این رو، w_0 کوچکترین عنصر از $B(S, r)$ است.

اکنون فرض کنید $w \in S_W(S)$ دلخواه باشد. در این صورت

$$\sup_{s \in S} \|s - w\| = d(S, W) = r.$$

از (۱.۱) نتیجه می‌شود که $w \in B(S, r)$. از این رو، $w \geq w_0$. لذا w_0 کوچکترین عنصر از $S_W(S)$ است، که اثبات را کامل می‌کند. $\square$

گزاره ۱.۱.۴. فرض کنید φ تابع تعریف شده به صورت (۳.۱) باشد. فرض کنید W زیرمجموعه‌ی روبه پایین بسته از X باشد، که در نقطه $w' \in bdW$ اکیداً رو به پایین است. در این صورت وجود دارد $l \in X$ منحصر به فردی به طوری که

$$\forall w \in W, \quad \varphi(w, l) \leq 0 = \varphi(w', l).$$

برهان. فرض کنید $l = -w'$. در این صورت بنابر قضیه ۲.۲.۲، داریم

$$\varphi(w, l) \leq \circ = \varphi(w', l), \quad \forall w \in W.$$

حال فرض کنید وجود داشته باشد $l' \in X$ به طوری که

$$\varphi(w, l') \leq \circ = \varphi(w', l'), \quad \forall w \in W. \quad (4.4)$$

از (۵.۱) نتیجه می‌شود که $\circ = \varphi(w', l') \wedge \circ \leq w' + l'$ و بنابراین $-l' \leq w'$. چون W مجموعه‌ای روبه پایین است و $w' \in W$ ، داریم $-l' \in W$. فرض کنید که $\varepsilon > \circ$ داده شده باشد و $l_\varepsilon = -l' + \varepsilon \wedge \in X$ در این صورت

$$\begin{aligned} \varphi(l_\varepsilon, l') &= \sup \{ \lambda \in \mathbf{R} : \lambda \wedge \leq l_\varepsilon + l' \} \\ &= \sup \{ \lambda \in \mathbf{R} : \lambda \wedge \leq -l' + \varepsilon \wedge + l' = \varepsilon \wedge \} \\ &= \sup \{ \lambda \in \mathbf{R} : (\lambda - \varepsilon) \wedge \leq \circ \} = \sup \{ \alpha + \varepsilon \in \mathbf{R} : \alpha \wedge \leq \circ \} \\ &= \sup \{ \alpha \in \mathbf{R} : \alpha \wedge \leq \circ \} + \varepsilon = \varepsilon > \circ \end{aligned}$$

بنابر (۴.۴) داریم که به ازای هر $\varepsilon > \circ$ ، $l_\varepsilon := -l' + \varepsilon \wedge \notin W$. در نتیجه بنابر لم ۳.۲.۲، $-l' \in bdW$. چون W در هر نقطه کراندارش اکیداً روبه پایین است، $w' \geq -l'$ و $-l' \in bdW$ بنابر لم ۱.۳.۲ نتیجه می‌شود که $w' = -l'$. از این رو، $l' = l = -w'$. بنابراین نتیجه حاصل می‌شود. $\square$

لم ۱.۱.۴. فرض کنید W زیرمجموعه‌ی بسته از X و S زیرمجموعه‌ی کراندار از X باشد به طوری که $S \cap W = \emptyset$. بعلاوه، فرض کنید که $w_\circ \in \text{int}W \cap S_{W, \varepsilon}(S)$. از این رو، وجود دارد $\alpha > \circ$ به طوری که

$$V = \{y \in X : \|y - w_\circ\| < \alpha\} \subset W$$

در این صورت، $\alpha \leq \varepsilon$.

برهان. فرض کنید که $r = d(S, W)$ و $\varepsilon < \alpha$. فرض کنید $\varepsilon_\circ = \frac{\alpha}{r+\alpha}$ و $s \in S$

$$w_s = w_\circ + \varepsilon_\circ (s - w_\circ).$$

توجه داشته باشید که $\alpha \frac{r+\varepsilon}{r+\alpha} < \alpha$ زیرا $\|w_s - w_\circ\| = \varepsilon_\circ \|s - w_\circ\| \leq \varepsilon_\circ (r + \varepsilon) = \alpha \frac{r+\varepsilon}{r+\alpha} < \alpha$

$\sup_{s \in S} \|s - w_\circ\| \leq r + \varepsilon$ در نتیجه به ازای هر $s \in S$ و $w_s \in V$ به ازای هر $s \in S$

$$r = d(S, W) \leq \sup_{t \in S} \|t - w_s\|.$$

از این رو، $r \leq \inf_{s \in S} \sup_{t \in S} \|t - w_s\|$ از طرف دیگر، به ازای هر $t, s \in S$ داریم

$$\|t - w_s\| = \|(t - w_\circ) - \varepsilon_\circ (s - w_\circ)\|.$$

این ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned} r &\leq \inf_{s \in S} \sup_{t \in S} \|t - w_s\| = \inf_{s \in S} \sup_{t \in S} \|(t - w_\circ) - \varepsilon_\circ (s - w_\circ)\| \\ &\leq \sup_{t \in S} \|(t - w_\circ) - \varepsilon_\circ (t - w_\circ)\| = (1 - \varepsilon_\circ) \sup_{t \in S} \|t - w_\circ\| \leq (1 - \varepsilon_\circ) (r + \varepsilon) < r \end{aligned}$$

□

این یک تناقض است و اثبات کامل می‌شود.

گزاره ۲.۱.۴. فرض کنید W زیرمجموعه بسته‌ای از X و S زیرمجموعه‌ی کرانداری از X باشد به طوری که $S \cap W = \emptyset$. در این صورت، وجود دارد $0 \leq \alpha \leq \varepsilon$ به طوری که

$$S_{W, \varepsilon}(S) \subset V = \{w - \alpha \mathbf{1} : w \in bdW\}.$$

برهان. فرض کنید $w_\circ \in S_{W, \varepsilon}(S)$ دلخواه باشد. در این صورت بنابر تعریف ε -تقریب همزمان داریم $w_\circ \in W$ در نتیجه $w_\circ \in intW$ یا $w_\circ \in bdW$. اکنون نشان می‌دهیم که $w_\circ \notin bdW$. در صورت امکان فرض کنید که $w_\circ \in bdW$ به طوری که به ازای هر $w \in W$ ، $w_\circ < w$ فرض کنید $0 < \|w - w_\circ\| \leq d(S, W)$. در این صورت

$$w - w_\circ < |w - w_\circ| \leq \|w - w_\circ\| \mathbf{1} \leq d(S, W) \mathbf{1}$$

و در نتیجه $w \leq w_\circ + d(S, W) \mathbf{1} \in W$ اگر $y = w_\circ + d(S, W) \mathbf{1} \in W$ ، آنگاه بنابر لم ۱.۱.۲ داریم $w_\circ \in intW$ که تناقض است. پس ثابت شد که $w_\circ \notin bdW$. از این رو، $w_\circ \in intW$. اکنون بنابر لم ۱.۱.۴ حکم ثابت می‌شود. □

گزاره ۳.۱.۴. فرض کنید W زیرمجموعه روبه پایین بسته‌ای از X باشد، و S زیرمجموعه‌ی کرانداری از X باشد. در این صورت، کوچک‌ترین عنصری مانند $w_\circ := \min S_{W, \varepsilon}(S)$ وجود دارد.

برهان. قرار دهید $r := d(S, W)$ و $\sup S - r \mathbf{1} \leq \sup S - (r + \varepsilon) \mathbf{1} = w_\circ$. بنابر قضیه ۱.۱.۴، $\sup S - r \mathbf{1} \in W$. از آنجایی که W مجموعه‌ای روبه پایین است، $\sup S - (r + \varepsilon) \mathbf{1} \in W$. از این رو، $w_\circ \in S_{W, \varepsilon}(S)$ و بنابراین $\sup_{s \in S} \|s - w_\circ\| \leq r + \varepsilon$. لذا به ازای هر $w \in S_{W, \varepsilon}(S)$ ، $w \leq w_\circ$. در نتیجه $w_\circ := \min S_{W, \varepsilon}(S)$. $\square$

گزاره ۴.۱.۴. فرض کنید W زیرمجموعه روبه پایین بسته‌ای از X باشد به طوری که $S \cap W = \emptyset$ و $w_\circ \in S_{W, \varepsilon}(S)$ و φ تابع تعریف شده به صورت (۳.۱) باشد. در این صورت، به ازای هر $w \in W$ ، $\varphi(w, -w_\circ) \leq \varepsilon$.

برهان. بنابر گزاره ۲.۱.۴، وجود دارد $y_\circ \in bdW$ و $0 \leq \alpha \leq \varepsilon$ به طوری که $w_\circ = y_\circ - \alpha \mathbf{1}$. بنابر ۲.۱.۲، داریم

$$\begin{aligned} \varphi(w, -w_\circ) &= \varphi(w, \alpha \mathbf{1} - y_\circ) \\ &= \sup \{ \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \mathbf{1} \leq w + \alpha \mathbf{1} - y_\circ \} \\ &= \sup \{ \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda - \alpha) \mathbf{1} \leq w - y_\circ \} \\ &= \sup \{ \beta + \alpha \in \mathbb{R} : \beta \mathbf{1} \leq w - y_\circ \} \\ &= \sup \{ \beta \in \mathbb{R} : \beta \mathbf{1} \leq w - y_\circ \} + \alpha \\ &= \varphi(w, -y_\circ) + \alpha \leq \varepsilon \end{aligned}$$

و این اثبات را کامل می‌کند. $\square$

قضیه ۲.۱.۴. فرض کنید W زیرمجموعه روبه پایین بسته‌ای از X و S زیرمجموعه‌ی کرانداری از X باشد به طوری که $S \cap W = \emptyset$ ، $y_\circ \in W$ ، $r_\circ = \sup_{s \in S} \|s - y_\circ\|$ و φ تابع تعریف شده به صورت (۳.۱) باشد. در این صورت، عبارت‌های زیر معادل هستند:

$$1. \quad y_\circ \in S_{W, \varepsilon}(S)$$

$$2. \quad \text{وجود دارد } l \in X \text{ به طوری که به ازای هر } w \in W, y \in B(S, r_\circ), \quad \varphi(w, l) \leq \varepsilon \leq \varphi(y, l)$$

$$(5.4)$$

بعلاوه، اگر (۵.۴) برای $l = -y_\circ$ برقرار باشد، آنگاه $y_\circ = \min S_{W, \varepsilon}(S)$.

برهان. (۲) $\implies$ (۱). فرض کنید که $y_\circ \in S_{W, \varepsilon}(S)$. در این صورت $r_\circ = \sup_{s \in S} \|s - y_\circ\| \leq r + \varepsilon$ که در آن $r = d(S, W)$. از آنجایی که W زیرمجموعه‌ای روبه پایین بسته از X

است، بنابر قضیه ۱.۱.۴، کوچکترین عنصر $\sup S - r_0$ از $S_W(S)$ موجود است. فرض کنید $w_0 := \sup S - (r_0 + \varepsilon)$. توجه داشته باشید که

$$r \leq r_0 \Rightarrow (-r_0 - \varepsilon) \wedge \leq -r_0 \wedge \leq -r \wedge \Rightarrow \sup S - (r_0 + \varepsilon) \wedge \leq \sup S - r \wedge.$$

بنابر قضیه ۱.۱.۴، به دست می‌آوریم $w_0 \in W$. فرض کنید $l = -w_0$ و $y \in B(S, r_0)$ دلخواه باشد. بنابراین، با استفاده از (۱.۱)، داریم $-r_0 \wedge \leq y - \sup S$. این ایجاب می‌کند که

$$-r_0 \in \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \wedge \leq y - \sup S\}.$$

بنابراین، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \varphi(y, l) &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \wedge \leq y + l\} \\ &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \wedge \leq y - w_0\} \\ &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda \wedge \leq y - (\sup S - (r_0 + \varepsilon) \wedge)\} \\ &= \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : (\lambda - r_0 - \varepsilon) \wedge \leq y - \sup S\} \\ &= \sup\{\alpha + r_0 + \varepsilon \in \mathbb{R} : \alpha \wedge \leq y - \sup S\} \\ &= \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \wedge \leq y - \sup S\} + r_0 + \varepsilon \\ &\geq -r_0 + \varepsilon + r_0 = \varepsilon. \end{aligned}$$

از طرفی دیگر، چون $w_0 \in S_{W, \varepsilon}(S)$ ، با استفاده از گزاره ۴.۱.۴، به ازای هر $w \in W$ به دست می‌آوریم $\varphi(w, -w_0) \leq \varepsilon$. از این رو، $\varphi(w, l) \leq \varepsilon$.

(۱) $\Rightarrow$ (۲). فرض کنید که وجود داشته باشد $l \in X$ به طوری که به ازای هر $w \in W$ و $y \in B(S, r_0)$ ، $\varphi(w, l) \leq \varepsilon \leq \varphi(y, l)$. چون $\sup S - r_0 \wedge \leq y \leq \inf S + r_0 \wedge$ ، $\sup S - r_0 \wedge \in B(S, r_0)$ ، $r_0 \wedge \in \varphi(\sup S - r_0 \wedge, l) \geq \varepsilon \geq 0$. به دست می‌آوریم $\varphi(\sup S, l) \geq r_0$. بنابر تعریف φ ، داریم $\varphi(\sup S, l) \geq r_0$. بنابرین با استفاده از (۵.۱)، داریم

$$r_0 \wedge \leq \varphi(\sup S, l) \wedge \leq \sup S + l \quad (۶.۴)$$

لذا، $-\sup S \leq l - r_0 \wedge$. حال فرض کنید $w \in W$ و $t_w = \varphi(w, -\sup S) \wedge + \sup S \in X$. بنابر (۵.۱)، $\varphi(w, -\sup S) \wedge \leq w - \sup S$. چون W مجموعه‌ای روبه پایین است و $w \in W$

$t_w \in W$ و بنابراین $\varphi(t_w, l) \leq \varepsilon$. از آنجایی که $\varphi(t_w, \cdot)$ موضعی است، بنابر (۲.۱)، داریم

$$\varphi(t_w, -\sup S) \leq \varphi(t_w, l - r_0) = \varphi(t_w, l) - r_0 \leq \varepsilon - r_0.$$

چون $\varphi(\cdot, -\sup S)$ موضعی است و $t_w = \varphi(w, -\sup S) \vee \sup S$ ، از (۷.۱) به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \varepsilon - r_0 &\geq \varphi(t_w, -\sup S) = \varphi(\varphi(w, -\sup S) \vee \sup S, -\sup S) \\ &= \varphi(w, -\sup S) + \varphi(\sup S, -\sup S) = \varphi(w, -\sup S) \end{aligned}$$

اکنون، با استفاده از (۷.۱) و پیوستگی لیپ شیتز $\varphi - \sup S := \varphi(\cdot, -\sup S)$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \varepsilon + r_0 &\leq |\varphi(w, -\sup S)| \\ &= |\varphi(\sup S, -\sup S) - \varphi(w, -\sup S)| \\ &\leq \|\sup S - w\|. \end{aligned}$$

از این رو به ازای هر $w \in W$ ، $-\varepsilon + r_0 \leq \|\sup S - w\| \leq \sup_{s \in S} \|s - w\|$ ، و بنابراین به دست می‌آوریم $-\varepsilon + r_0 \leq r = d(S, W)$. در نتیجه، $r_0 \leq r + \varepsilon$ و $y_0 \in S_{W, \varepsilon}(S)$. سرانجام فرض کنید که (۵.۴) با $l = -y_0$ برقرار باشد. در این صورت، بنابر نتیجه‌ی (۲) $\Rightarrow$ (۱)، داریم $y_0 \in S_{W, \varepsilon}(S)$.

فرض کنید $w_1 \in Sw_\xi(S)$ دلخواه باشد. اگر $r_1 = \sup_{s \in S} \|s - w_1\|$ ، آنگاه بنابر نتیجه‌ی (۲) $\Rightarrow$ (۱) به ازای هر $w \in W$ و $y \in B(S, r_1)$ داریم $\varphi(w, l) \leq \varepsilon \leq \varphi(y, l)$ ، که در آن $l = -\sup S + (r_1 + \varepsilon) \wedge 1$. از آنجایی که $y_0 \in W$ ، $\varphi(y_0, l) = \varphi(y_0, -\sup S + (r_1 + \varepsilon) \wedge 1) \leq \varepsilon$ ، $y_0 \in W$ ، از این رو، از تعریف φ به دست می‌آوریم $\varepsilon \wedge 1 \leq y_0 - \sup S + (r_1 + \varepsilon) \wedge 1$ ، لذا، $y_0 \leq \sup S - r_1 \wedge 1$. از این رو، $w_1 \leq \sup S - r_1 \wedge 1$ و بنابراین $y_0 \leq w_1$ در نتیجه $y_0 = \min S_{W, \varepsilon}(S)$. $\square$

یادآوری می‌کنیم که مجموعه‌ی روبه پایین W اکیداً رو به پایین نامیده می‌شود، هرگاه به ازای هر نقطه مرزی u_0 از W ، نامساوی $w_0 < w$ ایجاب کند که $w \notin W$. برای مثال، مجموعه‌های رو به پایین صعودی اکیداً پیوسته منجر به مجموعه‌های اکیداً روبه پایین می‌شوند [۸، ۱۰، ۱۱].

قضیه ۳.۱.۴. فرض کنید W زیرمجموعه روبه پایین بسته‌ای از X و S زیرمجموعه‌ای کراندار از X باشد به طوری که $S \cap W = \emptyset$. در این صورت، عبارت‌های زیر معادل هستند:

۱. W زیرمجموعه‌ای روبه پایین اکید از X است.

۲. W زیرمجموعه‌ای چبیشف همزمان از X است.

برهان. (۲) $\Rightarrow$ (۱). چون W مجموعه‌ای رو به پایین است، بنابر قضیه ۱.۱.۴، W تقریب‌پذیر همزمان است. ادعا می‌کنیم $S_W(S) = \{\sup S - r'\}$ که در آن $r' = d(S, W)$. فرض کنید وجود داشته باشد $w_\circ \in S_W(S)$ به طوری که $w_\circ \neq \sup S - r'$. در این حالت، بنابر گزاره ۱.۱.۲، $\sup S - r' \in bdW$. همچنین بنابر قضیه ۱.۱.۴، $\sup S - r' < w_\circ$. چون W مجموعه‌ای روبه پایین اکید است، این ایجاب می‌کند که $w_\circ \notin W$ ، که یک تناقض است. از این رو، W مجموعه‌ای چبیشف همزمان از X است.

(۱) $\Rightarrow$ (۲). فرض کنید W زیرمجموعه‌ای چبیشف همزمان از X باشد. در این صورت، اگر W روبه پایین اکید نباشد، آنگاه وجود دارد $w_\circ \in bdW$ ، به طوری که به ازای هر $w \in W$ ، $w_\circ < w$. فرض کنید $0 < \|w - w_\circ\| \leq r$. از (۲.۱) نتیجه می‌شود که

$$w - w_\circ \leq |w - w_\circ| \leq \|w - w_\circ\| \wedge \leq r',$$

و بنابراین $w \leq w_\circ + r'$. فرض کنید $S = \{w_\circ + r'\}$. در این صورت، $\sup_{s \in S} \|s - w_\circ\| = \|r'\| = r$. ادعا می‌کنیم که $d(S, W) = r$. فرض کنید که این برقرار نباشد. در این صورت وجود دارد $y \in W$ به طوری که $\|w_\circ + r' - y\| < r$ (توجه داشته باشید که $w_\circ + r' \neq y$ زیرا اگر $w_\circ + r' = y \in W$ ، آنگاه بنابر لم ۲.۱.۲، $u_\circ \in intW$ ، که یک تناقض است). از این رو، وجود دارد $r_\circ \in (0, r)$ به طوری که $\|w_\circ + r' - y\| \leq r_\circ$. لذا، با استفاده از (۲.۱)، داریم $w_\circ + r' \leq y + r_\circ$ و بنابراین

$$w_\circ + \lambda_\circ r' \leq y, \implies \lambda_\circ = (r - r_\circ) > 0.$$

چون W مجموعه‌ای روبه پایین است و $y \in W$ ، $u_\circ + \lambda_\circ r' \in W$. لذا بنابر لم ۱.۱.۲، $w_\circ \in intW$. این یک تناقض است. از این رو، $d(S, W) = r = \sup_{s \in S} \|s - w_\circ\|$ ، یعنی، $w_\circ \in S_W(S)$. از طرفی دیگر، داریم $w < u_\circ + r'$ ، چون $w_\circ < w$ ، داریم $0 \leq (w_\circ + r') - w < r'$ ، لذا، $w_\circ + r' - w_\circ = r'$

$$\sup_{s \in S} \|s - w\| = \|w_\circ + r' - w\| \leq \|r'\| = r = d(S, W) \leq \sup_{s \in S} \|s - w\|.$$

از این رو، $\sup_{s \in S} \|s - w\| = d(S, W)$ و بنابراین $w \in S_W(S)$ ، که در آن $w \neq w_\circ$. این

غیرممکن است، زیرا W زیرمجموعه‌ای چبیشف همزمان از X است. $\square$

۲.۴ غلاف‌های روبه پایین روی مجموعه‌ی نرمال و تقریب‌های همزمان

همانطور که می‌دانید، غلاف روبه پایین G_* از مجموعه $G \subseteq X$ برابر با اشتراک همه مجموعه‌های روبه پایین شامل G است. به یاد داشته باشید که زیرمجموعه‌ی G از مخروط مثبت

$$X^+ = \{x \in X : x \geq 0\}$$

نرمال نامیده می‌شود هرگاه $x \in G$ و $x \in X^+$ و $x \leq g$ نتیجه دهد که $x \in G$. برای زیرمجموعه‌ی A ، از نماد $A^+ = \{a^+ : a \in A\}$ استفاده خواهیم کرد، که در آن $a^+ = \sup(a, 0)$. همچنین از نماد $a^- = -\inf(a, 0)$ استفاده می‌شود.

تبصره ۱.۲.۴. فرض کنید W مجموعه‌ای روبه پایین، S زیرمجموعه‌ای کراندار باشد به طوری که $S \cap W = \emptyset$ و $w \in W$ و $s \in S$. اگر $0 \leq w - s$ ، آنگاه $s < w$ و بنابراین $s \in W$ ، که یک تناقض است. بنابراین، فرض می‌کنیم که به ازای هر $w \in W$ و $s \in S$ ، $0 \leq s - w$.

در نتایج زیر، G زیرمجموعه‌ای نرمال از X^+ و S زیرمجموعه‌ای کراندار از X است به طوری که $S \cap G_* = \emptyset$ ، که در آن G_* یک غلاف رو به پایین از G است. با نتیجه زیر شروع می‌کنیم.

گزاره ۱.۲.۴. فرض کنید S مجموعه‌ای کراندار از X ، G زیرمجموعه‌ای نرمال از X^+ و G_* غلافی روبه پایین از مجموعه‌ی G باشد. اگر $S \cap G_* = \emptyset$ ، آنگاه به ازای هر $g \in G_*$ داریم

$$\sup_{s \in S} \|s - g^+\| \leq \sup_{s \in S} \|s - g\|.$$

برهان. فرض کنید $s \in S$ و $g = g^+ - g^-$. در این صورت، $s - g^+ \leq s - g$ و بنابر تبصره ۱.۲.۴، $s - g^+ \geq 0$. از این رو، $s - g^+ = |s - g^+| \leq |s - g|$. آن نتیجه می‌دهد که به ازای هر $s \in S$ ، $\|s - g^+\| \leq \|s - g\|$. لذا به ازای هر $g \in G_*$ به دست می‌آوریم $\sup_{s \in S} \|s - g^+\| \leq \sup_{s \in S} \|s - g\|$. $\square$

گزاره ۲.۲.۴. فرض کنید G زیرمجموعه‌ای نرمال از X^+ باشد. در این صورت، G زیرمجموعه‌ای تقریب‌پذیر همزمان از X است.

برهان. بنابر قضیه ۱.۱.۴، G_* تقریب‌پذیر همزمان است. از این رو، به ازای هر زیرمجموعه‌ی کراندار S با $S \cap G_* = \emptyset$ ، $S_G(S) \neq \emptyset$. اگر $g_0 \in S_{G_*}(S)$ ، آنگاه $g_0 \in G_*$ و بنابر گزاره ۲.۲.۳، $g_0^+ \in G$. با استفاده از گزاره ۱.۲.۴، به ازای هر $g \in G_*$ داریم

$$\sup_{s \in S} \|s - g_0^+\| \leq \sup_{s \in S} \|s - g_0\| \leq \sup_{s \in S} \|s - g\|.$$

چون $g_0 \in S_{G_*}(S)$ و به ازای هر $g \in G$ ، $G \subset G_*$ و $\sup_{s \in S} \|s - g\| \leq \sup_{s \in S} \|s - g_0^+\|$. بنابراین $g_0^+ \in S_G(S)$. $\square$

نتیجه ۱.۲.۴. $S_{G_*}(S) = S_G(S)$.

برهان. فرض کنید $g \in S_{G_*}(S)$. بنابر گزاره ۱.۲.۴، به ازای هر $g \in G_*$ ، $\sup_{s \in S} \|s - g^+\| \leq \sup_{s \in S} \|s - g\|$. از آنجایی که $G \subseteq G_*$ ، با استفاده از گزاره ۲.۲.۳، داریم $g^+ \in G_*$. از این رو، با استفاده مجدد از گزاره ۲.۲.۳، $g^+ = g$ و بنابراین $S_{G_*}(S) \subseteq S_G(S)$. اکنون، فرض کنید $g_0 \in G_*$ و $g_0 \notin S_{G_*}(S)$. در این صورت، وجود دارد $g \in G_*$ به طوری که $\sup_{s \in S} \|s - g\| < \sup_{s \in S} \|s - g_0\|$. با استفاده از گزاره ۱.۲.۴، به دست می‌آوریم $\sup_{s \in S} \|s - g^+\| \leq \sup_{s \in S} \|s - g\|$. در نتیجه به دست می‌آوریم $\sup_{s \in S} \|s - g^+\| \leq \sup_{s \in S} \|s - g_0\|$. از آنجایی که $g^+ \in G$ ، نتیجه می‌شود $g_0 \in S_{G_*}(S)$. $\square$

نتیجه ۲.۲.۴. $d(S, G_*) = d(S, G)$.

برهان. از آنجایی که $G \subseteq G_*$ ، نتیجه می‌شود $d(S, G_*) \leq d(S, G)$. از طرفی فرض کنید $g \in G_*$. در این صورت بنابر گزاره ۲.۲.۳ وجود دارد $g^+ \in G$ به طوری که بنابر گزاره ۱.۲.۴ داریم $\sup_{s \in S} \|s - g^+\| \leq \sup_{s \in S} \|s - g\|$. در نتیجه $d(S, G) \leq d(S, G_*)$ و بنابراین تساوی برقرار است، یعنی $d(S, G_*) = d(S, G)$. $\square$

نتیجه ۳.۲.۴. $\min S_{G_*}(S) = \min S_G(S)$.

برهان. بنابر قضیه ۱.۱.۴، $w_0 = \min S_{G_*}(S)$ وجود دارد. اکنون، بنابر نتیجه ۱.۲.۴ داریم $S_{G_*}(S) = S_G(S)$. در نتیجه تساوی $\min S_{G_*}(S) = \min S_G(S)$ حاصل می‌شود. $\square$

نتیجه ۴.۲.۴. G تقریب‌پذیر همزمان است.

برهان. G_* روبه پایین است و در نتیجه بنابر قضیه ۱.۱.۴، G_* تقریب‌پذیر همزمان است. از طرفی بنابر نتیجه ۱.۲.۴ داریم $S_{G_*}(S) = S_G(S)$ ، یعنی مجموعه همه بهترین تقریب‌های همزمان S از G_* با مجموعه همه بهترین تقریب‌های همزمان S از G برابر است، و این یعنی G تقریب‌پذیر همزمان است. $\square$

مراجع

- [۱] حیدری غ، (۱۳۹۱)، پایان نامه ارشد: ” بهترین تقریب های همزمان در فضا های نرم دار خطی مرتب“، دانشکده ریاضی و رایانه، دانشگاه شهید باهنر کرمان،
- [۲] رحیمی زاده م، (۱۳۹۱)، پایان نامه ارشد: ” نقاط ثابت مشترک حاصل از بهترین تقریب های همزمان“، دانشکده علوم، دانشگاه یاسوج،
- [3] G. Birkhof, “ Lattice Theory”, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1979).
- [4] L. Chong and G. A. Watson, “On best simultaneous approximation”, *J. Approx. Theory* 91, no. 3, 332-348, (1997).
- [5] G. Gierz, K. H. Hofmann, K. Keimel, J. D. Lawson, Mislove M. and Scott D. S. (2003), “ Continuous Lattices and Domains, Encyclopedia of Mathematics and its Applications”, 93, *Cambridge University Press, Cambridge*.
- [6] Mohebi H. (2000), “downward sets with applications”, *Shahid Bahonar University of Kerman*, Kerman, Iran.
- [7] Mohebi H. (2004), “Downward sets and their best simultaneous approximation properties with applications”, *Numer. Funct. Anal. Optim.* 25 , no. 7-8, 685-705.
- [8] Mohebi H. and Rubinov A. M. (2006), “Best approximation by downward sets with applications”, *Anal. Theory Appl.* 22, no. 1, 20-40.
- [9] Mohebi H. and Rubinov A. (2006), “Metric Projection Onto a Closed set: Necessary and Sufficient Conditions for the Global Minimum”, *Journal of Mathematics of Operations Research*, 31, No.1, 124-132.
- [10] Rubinov A. M. and Singer I. (2000), “Best approximation by normal and conormal sets”, *J. Approx. Theory* 107, no. 2, 212-243.

-
- [11] Rubinov A. M. and Zaslavski A. J. (2002), "Two porosity results in monotonic analysis", *Numer. Funct. Anal. Optim.* 23, no. 5-6, 651-668.
- [12] Singer I. (1970), " Best Approximation in Normed Linear Spaces by Elements of Linear Subspaces, Publishing House of the Academy of the Socialist Republic of Romania, Bucharest", *Springer-Verlag, New York-Berlin*.
- [13] Tanimoto S. (1989), "A characterization of best simultaneous approximations", *J. Approx. Theory* 59 , no. 3, 359-361.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Intersection	اشتراک
Closure	بستار
Best approximation	بهترین تقریب
Best simultaneous approximation	بهترین تقریب همزمان
Simultaneously proximal	به طور همزمان تقریب پذیر
Lipschitz continuity	پیوستگی لیپشیتز
Sublinear function	تابع زیرخطی
Continuous function	تابع پیوسته
Functional	تابعک
Complete	تام
Proximal	تقریب پذیر
Contradiction	تناقض
Topology	توپولوژی
Empty	تهی
ε -simultaneous approximation	ε -تقریب همزمان
Chebyshev	چبیشف
Interior	درون
Upward	روبه بالا
Downward	روبه پایین
Order relation	رابطه ترتیبی
Pair	جفت
Inclusion	شمول
Increasing	صعودی
Hull	غلاف
Downward hull	غلاف رو به پایین

Compact	فشرده
Banach space	فضای باناخ
Dual space	فضای دوگان
Normed linear space	فضای خطی نرم دار
Metric space	فضای متریک
Unit ball	گوی واحد
Lipschitz	لیپ‌شیتز
Finite	متناهی
Lattice Banach Space	مشبکه فضای باناخ
Strictly downward set	مجموعه اکیداً روبه پایین
Polar set	مجموعه قطبی
Equipped	مجهز شده
Convex	محدب
Cone	مخروط
Equivalent	معادل
Introduced	معرفی شده
Hypotheses	مفروضات
Topical	موضوعی
Norm	نرم
Boundary point	نقاط مرزی
Homogeneous	همگن
Plus-homogeneous	همگن جمعی
Unit	واحد
Existence	وجود
Unique	یکتا
Isomorphic	یکریخت
Strong unit	یکه قوی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Banach space	فضای باناخ
Best approximation	بهترین تقریب
Best simultaneous approximation	بهترین تقریب همزمان
Boundary point	نقاط مرزی
Chebyshev	چبیشف
Closure	بستار
Compact	فشرده
Complete	تام
Cone	مخروط
Continuous function	تابع پیوسته
Contradiction	تناقض
Convex	محدب
Downard	رو به پایین
Downward hull	غلاف رو به پایین
Dual space	فضای دوگان
Empty	تهی
Equipped	مجهز شده
Equivalent	معادل
Existence	وجود
ε -simultaneous approximation	ε -تقریب همزمان
Finite	متناهی
Functional	تابعک
Homogeneous	همگن
Hull	غلاف
Hypotheses	مفروضات

Inclusion	شمول
Increasing	صعودی
Interior	درون
Introduced	معرفی شده
Intersection	اشتراک
Isomorphic	یکریخت
Lattice banach space	مشبکه فضای باناخ
Lipschitz	لیپ‌شیتز
Lipschitz continuity	پیوستگی لیپ‌شیتز
Metric space	فضای متریک
Norm	نرم
Normed linear space	فضای خطی نرم دار
Order relation	رابطه ترتیبی
Pair	جفت
Polar set	مجموعه قطبی
Plus-homogeneous	همگن جمعی
Proximinal	تقریب‌پذیر
Simultaneously proximinal	به طور همزمان تقریب‌پذیر
Strictly downward set	مجموعه اکیداً روبه پایین
Strong unit	یکه قوی
Sublinear function	تابع زیرخطی
Topical	موضعی
Topology	توپولوژی
Upward	روبه بالا
Unique	یکتا
Unit	واحد
Unit ball	گوی واحد

Aabstract

In this thesis, we first study some properties of best simultaneous approximation by these sets. Then we introduce a generalization concept of the best simultaneous approximation, namely ε -simultaneous approximation and prove some results about the properties of ε -simultaneous approximation with respect to downward sets in vector lattice Banach spaces.

Keywords: Banach space, downward set, downward sheath, best simultaneous approximation, ε -simultaneous approximation.



Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Analysis

ε -SIMULTANEOUS APPROXIMATIONS OF DOWNWARD SETS

By: Maryam Rahimi

Supervisor:
Mehdi iranmanesh

October 2020