

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد بهینه سازی

مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته

نگارنده: هادی دستورانی

استادان راهنما

دکتر مهرداد غزنوی
دکتر مریم قرآنی

مهر ۱۳۹۹



مدیریت تحصیلات تکمیلی

باسمه تعالی

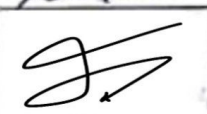
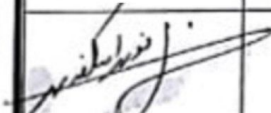
شماره:

تاریخ:

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای هادی دستورانی با شماره دانشجویی ۹۶۳۴۰۰۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش بهینه سازی تحت عنوان مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته که در تاریخ ۱۳۹۹/۰۷/۲۱ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☒ الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸-۱۸/۹۹
☐ ج) درجه خوب: نمره ۱۶-۱۷/۹۹	☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۴-۱۵/۹۹
☐ ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد	
نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی	

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر مهرداد غزنوی	استادیار	
۲- استاد راهنمای دوم	دکتر مریم قرآنی	استادیار	
۳- استاد مشاور	---	---	---
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سببه مفاری	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر جعفر فتحعلی	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر محمدحسین نوری اسکندری	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تقدیم به پدر و مادر عزیزم و همچنین
همسر مهربانم.

سپاسگزاری ها

من از خداوند متعال سپاسگزارم که به من این فرصت و قدرت را برای انجام این پایان نامه داد. همچنین احترام و سپاسگزاری صمیمانه خود را به استادان راهنمای عزیزم، دکتر مهرداد غزنوی و دکتر مریم قرآنی استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود به خاطر راهنمایی های تخصصی، خلق و خوی آرام، پیشنهادات ارزشمند، پشتیبانی و مشاوره مداوم ابراز می کنم. همچنین از تشویق ایشان در طول کار تحقیقاتی ام و اظهارنظرهای انتقادی که ایشان در جریان بحث و گفتگوها ارائه کرده اند، بسیار سپاسگزارم.

من از دکتر مهدی قوتمند، رئیس دانشکده علوم ریاضی، اعضای هیات علمی و دیگر پرسنل محترم دانشگاه نسبت به ارائه خدمات تشویقی و امکانات لازم جهت انجام کارهای تحقیقاتی خود بسیار سپاسگزار هستم. همچنین از اساتید گرامی که به من افتخار شاگردی دادند تشکر می کنم و امیدوارم در تمام مراحل زندگی موفق باشند. واز همه محققان پژوهشی دانشکده علوم ریاضی به خاطر کمک به موقع و حمایت اخلاقی که در طول کار تحقیقاتی به من کردند تشکر می کنم. واز صمیم قلب از پدر، مادر و همسر مهربانم، به خاطر صبر، تحمل و تشویق مداومشان که در تکمیل پایان نامه از اهمیت بالایی برخوردار بود، تشکر می کنم.

هادی دستورانی

مهر ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب هادی دستورانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته بهینه سازی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته، تحت راهنمایی دکتر مهرداد غزنوی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

هادی دستورانی

مهر ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه به محدودیت ها و کاستی های روش های موجود برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی اشاره شده است. برای غلبه بر محدودیت ها و کاستی های این روش ها، برخی از رویکرد های رتبه بندی جدید، برای مقایسه مجموعه های فازی تعمیم یافته و مجموعه های مبهم ارائه شده است. بر اساس رویکردهای رتبه بندی پیشنهادی، روش های جدیدی برای یافتن راه حل مناسب برای مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته و مجموعه های دیگری که در آن ها پارامتر های هزینه (یا سود) توسط مجموعه های فازی یا مجموعه های مبهم تعیین می شود، ارائه شده است.

خلاصه فصل های پایان نامه به شرح زیر است:

در فصل ۱ مختصراً به کارهایی که در زمینه مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی انجام شده، اشاره شده است. در فصل ۲ روش های موجود برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی نشان داده شده اند که تنها برای حل آن دسته از مسائل برنامه ریزی خطی استفاده می شود که در آن ها پارامترها توسط مجموعه های فازی نرمال یا مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاع برابر تعیین شده باشند. اگرچه می توان با جایگزین کردن یک روش رتبه بندی مناسب به جای استفاده از روش رتبه بندی موجود محدودیت های روش موجود را حذف کرد، اما در کلیه رویکردهای رتبه بندی موجود نواقصی وجود دارد، بنابراین هیچ یک از رویکردهای رتبه بندی موجود برای همه مسائل قابل استفاده نیست. برای غلبه بر محدودیت های روش موجود، یک روش رتبه بندی جدید برای مقایسه مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته ارائه شده است و بر اساس رویکرد رتبه بندی پیشنهادی، روش جدیدی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته پیشنهاد شده است.

در فصل ۳ به محدودیت های برخی از نتایج موجود در مقایسه مجموعه های فازی p - نرم تعمیم یافته اشاره شده و با کمک روش رتبه بندی که در فصل ۲ ارائه شده است و با اصلاح نتایج، برخی از نتایج جدید برای غلبه بر محدودیت ها ارائه شده است. نتایج موجود موارد خاصی از نتایج پیشنهادی هستند. همچنین از روش حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته که در فصل ۲ ارائه شده برای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای p - نرم تعمیم یافته استفاده شده است. در فصل ۴ به کاستی های رویکرد رتبه بندی به نام رویکرد رتبه بندی RM برای مقایسه مجموعه های فازی دوزنقه ای پیشنهاد شده است. همچنین با کمک رویکرد رتبه بندی RM روش جدیدی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته ارائه شده است. در فصل ۵ محدودیت های برخی از نتایج موجود مربوط به مقایسه مجموعه های فازی شهودی و کاستی های رویکرد رتبه بندی موجود برای مقایسه مجموعه های فازی مثلثی

شهودی مورد توجه قرار گرفته است. برای غلبه بر محدودیت نتایج موجود، برخی از نتایج جدید با اصلاح نتایج موجود، برای مقایسه مجموعه های مبهم دوزنقه ای ارائه شده و برای رفع نواقص رویکرد رتبه بندی موجود، یک رویکرد رتبه بندی جدید پیشنهاد شده است. همچنین از روش حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته که در فصل ۴ ارائه شده، برای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم دوزنقه ای استفاده شده است. در فصل ۶ نشان می دهیم که نتایج به دست آمده از حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی با استفاده از روش های موجود و پیشنهادی مناسب نیستند. البته تمام کاستی های نتایج به دلیل رویکردهای رتبه بندی استفاده شده رخ می دهد. برای غلبه بر کاستی رویکردهای رتبه بندی موجود و پیشنهادی، رویکرد رتبه بندی جدیدی به نام رویکرد رتبه بندی *RMDS* برای مقایسه مجموعه های مبهم دوزنقه پیشنهاد شده است. بر اساس رویکرد رتبه بندی پیشنهادی *RMDS* روشی جدیدی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم دوزنقه ای ارائه شده است. برای نشان دادن مزیت روش پیشنهادی، با حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی و مبهم، مشخص می شود که نتایج به دست آمده با استفاده از روش های موجود و سایر روش های پیشنهادی مناسب نیستند، حال این مسائل با استفاده از روش پیشنهادی حل شده و نشان داده می شود که نتایج به دست آمده مناسب هستند. سرانجام در فصل ۷ بر اساس مطالعه حاضر، نتیجه گیری شده و کارهای جدیدی در آینده پیشنهاد شده است.

کلمات کلیدی: ارتفاع – دوزنقه – مجموعه فازی – مسئله برنامه ریزی – مجموعه مبهم – رویکرد رتبه بندی – مثلی

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
۱	مقدمه
۱	۱.۱ بررسی ادبیات
۴	۲.۱ سازماندهی پایان نامه
۲	یک رویکرد جدید رتبه بندی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته
۷	۱.۲ تعاریف
۸	۲.۲ عملیات حسابی
۱۰	۱.۲.۲ عملیات حساب بین مجموعه های فازی مثلثی تعمیم یافته
۱۰	۲.۲.۲ عملیات حسابی بین مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته
۱۱	۳.۲ مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی
۱۱	۱.۳.۲ مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی نرمال
۱۲	۲.۳.۲ مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته
۱۲	۳.۳.۲ مقایسه مجموعه های فازی
۱۲	۴.۳.۲ رویکرد رتبه بندی موجود
۱۳	۵.۳.۲ جواب بهینه و جواب شدنی
۴.۲	روش موجود برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای نرمال
۱۴	۱.۴.۲ مثال عددی
۱۷	۵.۲ محدودیت های روش موجود
۱۸	۶.۲ کاستی های رویکرد رتبه بندی موجود
۱۸	۱.۶.۲ رویکرد رتبه بندی چن و چن
۲۰	۲.۶.۲ مثال عددی
۲۰	۳.۶.۲ رویکرد رتبه بندی چن و سانگوانسات

۲۲	مثال عددی	۴.۶.۲
۲۳	محدودیت هایی بر اساس روابط منطقی	۷.۲
۲۴	محدودیت هایی بر اساس ارتفاع مجموعه های فازی	۸.۲
۲۵	رویکرد رتبه بندی پیشنهادی	۹.۲
۲۵	مثال عددی	۱.۹.۲
۲۷	اعتبار رویکرد رتبه بندی پیشنهاد شده	۱۰.۲
۲۸	روش پیشنهادی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی	۱۱.۲
۲۹	مزیت روش پیشنهادی نسبت به روش موجود	۱.۱۱.۲
۳۱	مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای p -نرم تعمیم یافته	۳
۳۱	مقدمات	۱.۳
۳۲	تعاریف اساسی	۱.۱.۳
۳۲	عملیات حسابی	۲.۱.۳
۳۳	محدودیت های نتایج رتبه بندی موجود	۲.۳
۳۶	تعمیم نتایج موجود	۳.۳
۳۹	محدودیت های نتایج پیشنهادی	۴.۳
۴۰	تعمیم نتایج پیشنهادی	۵.۳
۴۲	موارد خاص	۱.۵.۳
۴۳	مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای p -نرم تعمیم یافته	۶.۳
۴۳	یافته	
۴۵	رویکرد رتبه بندی RM برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته	۴
۴۵	کاستی های رویکردهای رتبه بندی موجود و پیشنهادی	۱.۴
۴۷	رویکرد رتبه بندی RM	۲.۴
۴۸	مثال هایی برای توضیح بیشتر	۱.۲.۴
۴۹	روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی RM	۳.۴
۵۰	مثال های عددی	۱.۳.۴
۵۳	یک رویکرد جدید رتبه بندی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم دوزنقه ای	۵
۵۴	مقدمات	۱.۵
۵۴	تعاریف اساسی	۱.۱.۵
۵۷	عملیات حسابی	۲.۱.۵
۵۷	عملیات حسابی بین مجموعه های فازی شهودی مثلثی:	۳.۱.۵

۴.۱.۵	عملیات حسابی بین مجموعه های مبهم مثلثی:	۵۷
۵.۱.۵	عملیات حسابی بین مجموعه های مبهم دوزنقه ای:	۵۷
۲.۵	رویکرد رتبه بندی لی	۵۸
۳.۵	محدودیت نتایج موجود	۵۹
۴.۵	نتایج پیشنهادی	۶۰
۵.۵	محدودیت های روش رتبه بندی موجود	۶۱
۱.۵.۵	محدودیت هایی براساس روابط منطقی فازی	۶۱
۲.۵.۵	محدودیت هایی بر اساس ارتفاع مجموعه های فازی	۶۲
۶.۵	رویکرد رتبه بندی پیشنهادی	۶۳
۱.۶.۵	موارد خاص	۶۴
۲.۶.۵	مثال های عددی	۶۵
۷.۵	مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم دوزنقه ای	۶۶
۱.۷.۵	کاربرد رویکرد رتبه بندی پیشنهادی	۶۶

۶ حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های دوزنقه ای مبهم با رویکرد رتبه

۶۹	بندی <i>RMDS</i>
۱.۶	کاستی های روش های موجود
۲.۶	روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی کافمن و گوپتا
۱.۲.۶	رویکرد رتبه بندی کافمن و گوپتا
۲.۲.۶	روش پیشنهادی
۳.۶	مزیت روش پیشنهادی بر اساس رویکرد رتبه بندی کافمن و گوپتا
۱.۳.۶	حل مسئله انتخاب شده
۴.۶	محدودیت های روش پیشنهادی بر اساس رویکرد رتبه بندی کافمن و گوپتا
۵.۶	برخی از نتایج مهم
۶.۶	رویکرد <i>RMDS</i> (<i>Rank Mode Divergence Spread</i>)
۱.۶.۶	موارد خاص
۲.۶.۶	مثال های عددی
۷.۶	روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی <i>RMDS</i>
۱.۷.۶	مثال عددی
۸.۶	مزایای استفاده از روش پیشنهادی بر اساس رویکرد رتبه بندی <i>RMDS</i>

۷ نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای تحقیق در آینده

۹۷	مراجع
----	-------

فهرست تصاویر

۹		مجموعه فازی مثلثی تعمیم یافته	۱.۲
۹		مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته	۲.۲
۵۵		مجموعه ی مبهم	۱.۵

فصل ۱

مقدمه

برنامه ریزی خطی یکی از متداول ترین روش های تحقیق در عملیات است. ابزار کلاسیک برای حل مسئله برنامه ریزی خطی در عمل، کلاس الگوریتم سیمپلکس است که توسط دانتریگ [۴۷] ساخته شده است. بسیاری از مسائل تصمیم گیری در دنیای واقعی توسط مدل های برنامه ریزی خطی تشریح شده و گاهی لازم است که آن ها را با عناصر عدم دقت یا عدم اطمینان تنظیم کنید. این ماهیت نادقیق، مدت هاست که با کمک نظریه احتمال بررسی شده است. با این حال تئوری احتمال، ممکن است تفسیر صحیحی برای حل برخی از مسائل تصمیم گیری عملی ارائه ندهد. برنامه ریزی تصادفی بر این فرض ساخته شده است که برخی از پارامترهای مورد استفاده برای توصیف مسئله، متغیرهای تصادفی هستند که تعیین دقیق آن ها دشوار است و مدل های برنامه ریزی تصادفی اغلب از نظر ساختار بسیار پیچیده هستند و از این رو در عمل، به ندرت استفاده می شوند. در این مورد، تئوری مجموعه های فازی که در [۱۸] بیان شده ممکن است مفیدتر باشد.

۱.۱ بررسی ادبیات

مفهوم تصمیم گیری در محیط فازی توسط بلمن و زاده [۱۵] بیان شده است. تاناکا و همکارانش [۶۳] این مفهوم را برای حل مسئله برنامه ریزی ریاضی به تصویب رساندند. زیمرمن و رودر [۴۷] اولین نتایج دوگان را با استفاده از پارامترهای فازی مورد مطالعه قرار دادند.

زیمرم [۹۳]، اولین فرمول برنامه ریزی خطی فازی را ارائه داد. چاناس [۲۸] امکان شناسایی یک تصمیم کامل فازی را در برنامه ریزی خطی فازی با استفاده از تکنیک برنامه ریزی پارامتری ارائه داد. وردگای [۶۹] مسئله دوگان فازی را با کمک برنامه ریزی پارامتری تعریف کرد و ثابت کرد که مسئله فازی اولیه و دوگان راه حل فازی یکسانی دارند. تاناکا و اسائی [۶۱] یک مسئله برنامه ریزی خطی فازی را برای تهیه یک راه حل مناسب با در نظر گرفتن ابهام پارامترها تدوین کردند. کارلسون و کورونن [۲۷] روشی را برای مقابله با مسائل تصمیم گیری با عدم اطمینان در مورد پارامترها پیشنهاد کردند. ورنرها [۷۸] یک سیستم تعاملی را ارائه داد تا تصمیم گیرنده از آن در حل مدل های برنامه ریزی با محدودیت های قطعی یا فازی و اهداف قطعی یا فازی استفاده کند. لوهانجولا [۱۰۲] راه هایی را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی که در آن ها ضرایب تابع هدف در معرض عدم دقت احتمالی باشد، پیشنهاد کرد. وردگای و کامپوس [۲۸] مسائل برنامه ریزی خطی که دارای محدودیت های فازی و ضرایب فازی در هر دو ماتریس و دست راست مجموعه محدودیت ها بودند را در نظر گرفتند. دلگادو و همکارانش [۴۹] مسائل مهم تر در برنامه ریزی خطی فازی را توصیف کردند و روشی را برای حل آن ها پیشنهاد دادند. رومل فانگر و همکارانش [۴۵] روش جدیدی را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با پارامترهای فازی در تابع هدف ارائه کردند. اینویگوچی و همکارانش [۷۱] به مسائل برنامه ریزی خطی فازی با تابع عضویت خطی قطعه ای پیوسته پرداختند. ژائو و گووینت [۹۲] محدودیت تساوی فازی را با فواصل فازی نشان دادند و حالتی را ارائه دادند که از آن می توان مجموعه کامل راه حل های فازی را به راحتی مطالعه کرد. لای و هوانگ [۸۹] رویکرد برنامه ریزی خطی فازی تعاملی را برای بهبود انعطاف پذیری و استحکام روش برنامه ریزی خطی مورد بررسی قرار دادند. فولر و زیمرم [۶۱] مسائل برنامه ریزی خطی فازی را با ضرایب فازی و روابط نابرابری فازی را به عنوان چندین استدلال فازی تفسیر کردند. شاوچنگ [۴۶] بر دو نوع برنامه ریزی خطی متمرکز شد: عدد فاصله و برنامه ریزی خطی عدد فازی. هررا و وردی [۷۰] برخی از مدل ها را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی عدد صحیح فازی مورد مطالعه قرار دادند. وردگای و کادناس [۲۸] یک مسئله برنامه ریزی خطی را مورد بررسی قرار دادند که در آن همه عناصر به عنوان مجموعه های فازی تعریف می شدند. وانگ [۷۱] یک روش غیرمستقیم را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی فازی پیشنهاد کرد. فنگ و همکارانش [۵۹] روشی را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با ضرایب فازی در محدودیت ها ارائه دادند. وو و گو [۶۷] یک رویکرد دو مرحله ای برای حل مسائل برنامه ریزی خطی فازی پیشنهاد کردند. باکلی و فیورینگ [۲۲] روشی را برای یافتن راه حل مسائل برنامه ریزی خطی کاملاً مبهم با همه پارامترها و متغیرهای فازی معرفی کردند که مبتنی بر تغییر تابع هدف به یک مسئله برنامه ریزی خطی فازی چندهدفه است. جیپینگ [۷۸] نوعی از مسئله برنامه ریزی خطی فازی را بر اساس فاصله زمانی مجموعه های فازی پیشنهاد داده است که با تبدیل فاصله زمانی برنامه ریزی خطی فازی به برنامه ریزی خطی پارامتری امکان پذیر است. اینویگوچی و رامیک [۷۲] برخی از روش ها و تکنیک های برنامه ریزی خطی فازی را از دیدگاه عملی بررسی کردند.

ملکی و همکارانش [۱۱] مسائل برنامه ریزی خطی را با استفاده از مقایسه اعداد فازی که در آن ها همه پارامترهای تصمیم گیری اعداد فازی هستند حل کردند. لیو [۹۷] روشی را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی فازی بر اساس میزان رضایت از محدودیت ها پیشنهاد کرد. بکتور وچاندرا [۱۳] در مورد برنامه ریزی خطی فازی دوگان بر اساس اصلاح فرمولاسیون دوگان بیان شده توسط رودر و زیمرمن [۴۱] بحث کردند. ملکی [۱۰] با استفاده از تابع رتبه بندی، روش جدیدی را برای حل برنامه ریزی خطی با ابهام در محدودیت ها ارائه داد. ژانگ و همکارانش [۹۱] روشی را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی فازی ارائه دادند که شامل اعداد فازی در ضرایب توابع هدف است. مهدوی امیری و ناصری [۸] روشی را برای به دست آوردن دوگان یک مسئله برنامه ریزی خطی فازی ارائه دادند. گانسان و ورامانی [۶۲] رویکردی را برای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی فازی که شامل اعداد فازی دوزنقه ای متقارن است بدون تبدیل به مسئله برنامه ریزی خطی قطعی پیشنهاد کردند. هاشمی و همکارانش [۶۹] یک رویکرد دو فاز را برای یافتن جواب بهینه کلاس مسائل برنامه ریزی خطی فازی که برنامه ریزی خطی کاملاً فازی نامیده می شود، پیشنهاد دادند که در آن کلیه پارامترها و متغیرهای تصمیم گیری اعداد فازی هستند. رومل فانگر [۴۳] روشی جدید برای حل مسائل برنامه ریزی خطی تصادفی با پارامترهای فازی ارائه داد. لین و لی [۹۵] یک الگوریتم ژنتیک برای حل مسئله برنامه ریزی خطی با محدودیت های فازی ارائه دادند. جیمنز و همکارانش [۷۷] روشی را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی پیشنهاد کردند که در آن همه ضرایب اعداد فازی هستند و از یک روش رتبه بندی فازی برای رتبه بندی مقادیر هدف فازی و مقابله با رابطه نابرابری در مورد محدودیت ها استفاده کردند. مهدوی امیری و ناصری [۸] برخی از نتایج دوگان را برای مسائل برنامه ریزی خطی با متغیرهای فازی دوزنقه ای بیان کردند. صفی و همکارانش [۴۶] روش زیمرمن را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی فازی بهبود بخشیدند. اللهویرانلو و همکارانش [۵] روش جدیدی را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی کاملاً فازی با استفاده از تابع رتبه بندی پیشنهاد کردند. ناصری [۸] با حل مسئله برنامه ریزی کلاسیک خطی، روش حل مسئله برنامه ریزی خطی فازی را پیشنهاد کرد. مهدوی امیری و ناصری [۸] برخی از نتایج دوگان را در مورد مسائل برنامه ریزی خطی با اعداد فازی متقارن ارائه دادند. لطفی و همکارانش [۱۰۱] با ارائه کلیه پارامترها و متغیرها به صورت اعداد فازی مثلثی، مسائل برنامه ریزی خطی کاملاً فازی را مورد بحث قرار دادند. ابراهیم نژاد و ناصری [۵۵] برای حل مسئله برنامه ریزی خطی فازی با پارامترهای فازی و بدون نیاز به جدول سیمپلکس از خاصیت سستی مکمل استفاده کردند. استانوجویک [۵۶] الگوریتمی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی فازی با اعداد فازی دوزنقه ای با استفاده از روش پنالتی پیشنهاد داد. ابراهیم نژاد و همکارانش [۵۷] الگوریتم اولیه را برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با متغیرهای فازی با استفاده از نتایج دوگان پیشنهاد کردند. در این پایان نامه به محدودیت ها و کاستی های روش های موجود برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی اشاره شده است. برای غلبه بر محدودیت ها و کاستی های روش های موجود، برخی از رویکردهای رتبه بندی جدید برای مقایسه مجموعه های فازی

نرمال و مجموعه های مبهم ارائه شده است. بر اساس رویکردهای رتبه بندی پیشنهادی، برخی از روش های جدید برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته و مجموعه های مبهم ارائه شده است که در آن ها پارامتر های هزینه (یا سود) توسط مجموعه های فازی یا مجموعه های مبهم ارائه می شود.

۲.۱ سازماندهی پایان نامه

خلاصه فصل پایان نامه به شرح زیر است:

فصل ۲

چندین محقق [۶، ۵۵، ۵۶، ۵۷] از روش موجود در [۱۱] برای حل انواع مختلف برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی استفاده کرده اند. در این فصل نشان می دهیم که به دلیل محدودیت رویکرد رتبه بندی موجود در [۹۶] که مبتنی بر روش موجود در [۱۱] است، از این روش تنها می توان برای حل مسائل برنامه ریزی خطی استفاده کرد که در آن ها پارامترها توسط مجموعه های فازی نرمال یا مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاعات برابر تعیین شوند، بنابراین از این روش نمی توان برای حل مسائلی که در آن ها برخی یا تمام پارامترها توسط مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاعات مختلف ارائه می شوند، استفاده کرد. از آنجا که محدودیت در روش های موجود به دلیل محدودیت در رویکرد رتبه بندی رخ می دهد، بنابراین می توان با استفاده از یک رویکرد رتبه بندی جایگزین به جای رویکرد رتبه بندی موجود، محدودیت های روش موجود را حذف کرد. به تازگی، چن و چن در [۳۷] و چن و سانگوانسات در [۴۱] به محدودیت ها و کاستی های چندین رویکرد رتبه بندی موجود برای مقایسه مجموعه های فازی تعمیم یافته اشاره کرده اند و روش های رتبه بندی جدیدی را برای مقایسه مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته ارائه کرده اند، اما کاستی هایی نیز در این زمینه وجود دارد.

در این فصل، به نواقص رویکردهای رتبه بندی موجود در [۳۷، ۴۱] اشاره شده و برای غلبه بر این نواقص یک رویکرد رتبه بندی جدید برای مقایسه مجموعه های فازی دوزنقه ای ارائه شده است. همچنین، یک روش جدید بر اساس رویکرد رتبه بندی پیشنهادی و با اصلاح روش موجود برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای ارائه شده است.

فصل ۳

چن و تنگ در [۴۲] تعریف مجموعه های فازی p -نرم تعمیم یافته را ارائه کردند و برخی از نتایج را برای مقایسه مجموعه های فازی p -نرم تعمیم یافته ارائه دادند. در این فصل، نشان داده شده است که نتایج موجود در [۴۲] فقط برای مجموعه های فازی p -نرم تعمیم یافته با ارتفاع برابر قابل استفاده است. برای غلبه بر محدودیت های نتایج موجود، بر اساس رویکرد رتبه بندی ارائه شده در فصل ۲، نتایج جدیدی برای مقایسه مجموعه های فازی p -نرم تعمیم

یافته با ارتفاع متفاوت ارائه شده است و نشان داده شده است که نتایج موجود در [۴۲] موارد خاص نتایج پیشنهادی هستند. همچنین از روش حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته که در فصل ۲ ارائه شده، برای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی p -نرم تعمیم یافته استفاده شده است.

فصل ۴

در فصل ۲ یک روش جدید رتبه بندی برای مقایسه مجموعه های فازی نرمال ارائه شده است که در آن فقط از رتبه بندی برای مقایسه مجموعه های فازی نرمال استفاده می شود. در این فصل نشان داده شده است که تنها رتبه بندی برای مقایسه مجموعه های فازی تعمیم یافته کافی نیست و برای غلبه بر این محدودیت با اصلاح رویکرد رتبه بندی پیشنهاد شده در فصل ۲ یک رویکرد رتبه بندی جدید، به نام رویکرد رتبه بندی RM پیشنهاد شده است. اساس روش پیشنهادی رتبه بندی RM یک روش جدید برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی ذوزنقه ای نرمال است. روش پیشنهادی با حل یک مثال عددی نشان داده شده است.

فصل ۵

در زندگی واقعی، فرد ممکن است فرض کند که یک شیء متعلق به یک مجموعه است، اما این احتمال وجود دارد که او در مورد آن مطمئن نباشد. به عبارت دیگر، ممکن است تردید یا سردرگمی وجود داشته باشد که آیا یک شیء متعلق به یک مجموعه هست یا نه. در نظریه مجموعه فازی، هیچ راهی برای گنجاندن چنین تردید یا سردرگمی وجود ندارد. بوستینس و بوریلو در [۲۳] خاطرنشان کردند که مفهوم مجموعه مبهم همان مفهوم مجموعه فازی شهودی است. لی در [۹۴] به کاستی های همه رویکردهای رتبه بندی موجود برای مقایسه مجموعه های فازی شهودی اشاره کرد و روش جدیدی را برای مقایسه مجموعه های فازی شهودی ارائه داده است. در این فصل به محدودیت های نتایج موجود در [۹۴] و کاستی های رویکرد رتبه بندی موجود در [۹۴] اشاره شده است. برای غلبه بر محدودیت نتایج موجود، برخی از نتایج جدید با اصلاح نتایج موجود ارائه می شود. همچنین برای غلبه بر کاستی های رویکرد رتبه بندی موجود در [۹۴]، یک روش رتبه بندی جدید برای مقایسه مجموعه های مبهم ذوزنقه ای پیشنهاد شده است. برای نشان دادن کاربرد رویکرد رتبه بندی پیشنهادی، یک مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم ذوزنقه ای حل کرده ایم.

فصل ۶

چندین محقق [۶، ۵۵، ۵۷، ۵۶، ۵۸] از روش موجود در [۱۱] برای حل انواع مختلف مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی استفاده کرده اند. در این فصل نشان داده شده است که نتایج بدست آمده توسط محققان با استفاده از روش موجود در [۱۱] نامناسب هستند و نتایج حاصل از مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته و مبهم، با استفاده از روش های پیشنهادی بدست آمده است. همچنین، نشان داده می شود که کاستی در نتایج به دلیل رویکردهای رتبه بندی موجود و پیشنهادی رخ می دهد که در روش های موجود و

پیشنهادی برای مقایسه مجموعه های فازی و مبهم مورد استفاده قرار گرفته است. برای غلبه بر کاستی های روش های موجود و پیشنهادی، یک روش جدید رتبه بندی به نام رویکرد رتبه بندی *RMDS* برای مقایسه مجموعه های مبهم دوزنقه ای که دارای درجه عضویت و عدم عضویت برابر هستند، پیشنهاد شده است. بر اساس رویکرد رتبه بندی پیشنهادی *RMDS* روش جدیدی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی مبهم پیشنهاد شده است. برای نشان دادن مزایای رویکرد رتبه بندی پیشنهادی *RMDS*، مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی و مبهم انتخاب شده و مشخص می شود که نتایج بدست آمده با استفاده از روش های موجود و پیشنهادی مناسب نیستند، بنابراین این مسائل با روش پیشنهادی حل شده و نشان داده می شود که نتایج به دست آمده مناسب است.

فصل ۷

سرانجام در این فصل، بر اساس مطالعه حاضر، نتیجه گیری شده و کارهای مورد نیاز آینده پیشنهاد شده است.

فصل ۲

یک رویکرد جدید رتبه بندی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته

چندین محقق [۶، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸] از روش موجود در مرجع [۱۱] برای حل انواع مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی استفاده کرده اند. در این فصل نشان می دهیم که به دلیل محدودیت رویکرد رتبه بندی موجود در مرجع [۹۶]، که از روش موجود در مرجع [۱۱] برای مقایسه مجموعه های فازی استفاده کرده است، می توان از این روش برای حل مسائل برنامه ریزی خطی استفاده کرد که در آن ها پارامترها توسط مجموعه های فازی نرمال یا مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاع مساوی نمایش داده می شوند. اما از روش موجود نمی توان برای حل مسائل برنامه ریزی خطی استفاده کرد که در آن ها برخی یا تمام پارامترها توسط مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاعات مختلف ارائه می شوند. از آنجا که این نواقص به دلیل محدودیت رویکرد رتبه بندی موجود در [۹۶] رخ می دهد، بنابراین می توان محدودیت های روش موجود را با استفاده از یک رویکرد رتبه بندی جایگزین مناسب به جای رویکرد رتبه بندی موجود برطرف کرد. به تازگی، چن و چن [۳۷] و چن و سانگوانسات [۴۱] به محدودیت ها و کاستی های چندین رویکرد رتبه بندی موجود برای مقایسه مجموعه های فازی تعمیم یافته اشاره کرده اند و روش های رتبه بندی جدیدی را برای مقایسه مجموعه های

۸ یک رویکرد جدید رتبه بندی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته

فازی دوزنقه ای تعمیم یافته ارائه کرده اند. اما کاستی هایی نیز در این رتبه بندی ها وجود دارد. رویکردهای رتبه بندی موجود در مرجع [۳۷، ۴۱] نمی توانند برای مقایسه مجموعه های فازی باروش های موجود استفاده شوند. در این فصل به نواقص رویکردهای رتبه بندی موجود در [۳۷، ۴۱] اشاره شده و برای رفع نواقص آن ها یک رویکرد رتبه بندی جدید برای مقایسه مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته ارائه شده است. همچنین بر اساس رویکرد رتبه بندی پیشنهادی، یک روش جدید برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته با اصلاح روش موجود در [۱۱] ارائه شده است.

۱.۲ تعاریف

در این بخش برخی از تعاریف پایه ای و عملیات حسابی ارائه شده است.

تعریف ۱.۱.۲. تابع مشخصه μ_A برای یک مجموعه قطعی $A \subseteq X$ مقدار صفر یا یک را به هر عضو در X اختصاص می دهد. این تابع را می توان به یک تابع $\mu_{\bar{A}}$ تعمیم داد به طوری که مقدار اختصاص داده شده به هر عنصر مجموعه مرجع X در یک محدوده خاص قرار گیرد، یعنی $\mu_{\bar{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ مقدار اختصاص داده شده نشانگر درجه عضویت عنصر در مجموعه A است. تابع $\mu_{\bar{A}}$ تابع عضویت و مجموعه $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\bar{A}}) : x \in X\}$ مجموعه فازی نامیده می شود.

تعریف ۲.۱.۲. به مجموعه فازی $\tilde{A}$ تعریف شده روی مجموعه مرجع R ، یک مجموعه فازی تعمیم یافته گفته می شود اگر تابع عضویت آن دارای خصوصیات زیر باشد:

(۱). $\mu_{\bar{A}} : R \rightarrow [0, w]$ پیوسته باشد که در آن $0 < w \leq 1$ و w را ارتفاع مجموعه فازی می گویند.

(۲). $\mu_{\bar{A}}(x) = 0$ ، برای هر $x \in (-\infty, a] \cup [d, \infty)$.

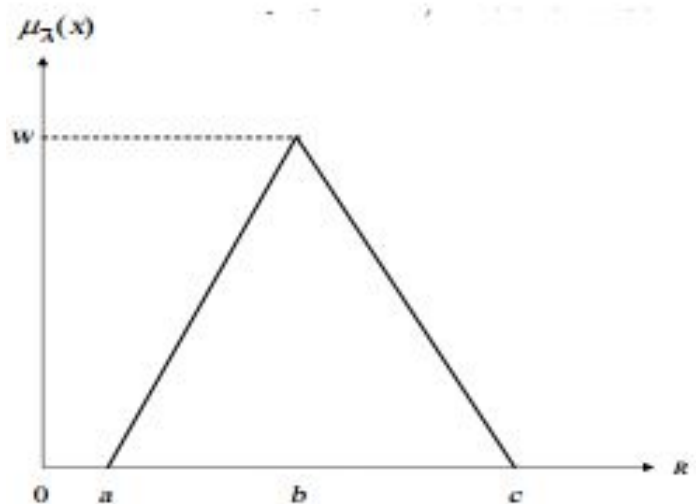
(۳). $\mu_{\bar{A}}(x)$ روی بازه $[a, b]$ اکیدا صعودی باشد و روی بازه $[c, d]$ اکیدا نزولی باشد که در آن $a < b < c < d$.

(۴). $\mu_{\bar{A}}(x) = w$ برای هر $x \in [b, c]$.

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی تعمیم یافته باشد. آن گاه مجموعه A^α که به صورت زیر تعریف می شود را یک α -برش از $\tilde{A}$ می نامند.

$$A^\alpha = \{x : \mu_{\bar{A}}(x) \geq \alpha, 0 \leq \alpha \leq w\}$$

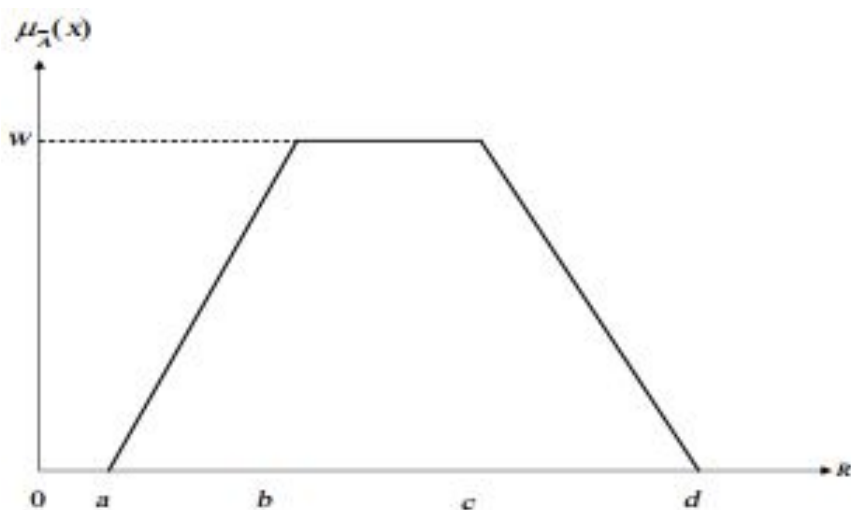
تعریف ۴.۱.۲. مجموعه فازی تعمیم یافته $\tilde{A}$ در مجموعه اعداد حقیقی R که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می شود را یک مجموعه فازی مثلثی تعمیم یافته گویند و به صورت $\tilde{A} = (a, b, c; w)$ نمایش می دهند و نمودار آن به صورت شکل ۱.۲ است.



شکل ۱.۲: مجموعه فازی مثلثی تعمیم یافته

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{w(x-a)}{(b-a)} & a \leq x < b \\ w & x = b \\ \frac{w(x-c)}{(b-c)} & b < x \leq c \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

تعریف ۵.۱.۲. مجموعه فازی تعمیم یافته $\tilde{A}$ در مجموعه اعداد حقیقی R که تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف می شود را یک مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته گویند و به صورت $\tilde{A} = (a, b, c, d; w)$ نمایش می دهند و نمودار آن به صورت شکل ۲.۲ است.



شکل ۲.۲: مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{w(x-a)}{(b-a)} & a \leq x < b \\ w & b \leq x < c \\ \frac{w(x-d)}{c-d} & c \leq x < d \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

تعریف ۶.۱.۲. فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3; w)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4; w)$ به ترتیب دو مجموعه فازی تعمیم یافته مثلثی و دوزنقه ای باشند، آن گاه α -برش های A^α و B^α را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$A^\alpha = [a_1 + (a_2 - a_1)\frac{\alpha}{w}, a_3 - (a_3 - a_2)\frac{\alpha}{w}], 0 \leq \alpha \leq w$$

$$B^\alpha = [b_1 + (b_2 - b_1)\frac{\alpha}{w}, b_4 - (b_4 - b_3)\frac{\alpha}{w}], 0 \leq \alpha \leq w$$

۲.۲ عملیات حسابی

در این بخش، برخی از عملیات حسابی بین دو مجموعه فازی مثلثی تعمیم یافته و دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته تعریف شده روی مجموعه مرجع اعداد حقیقی R ارائه شده است.

۱.۲.۲ عملیات حساب بین مجموعه های فازی مثلثی تعمیم یافته

فرض کنید $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1; w_1)$ و $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2; w_2)$ دو مجموعه فازی مثلثی تعمیم یافته باشند، داریم:

$$(۱) \quad \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2; \min(w_1, w_2))$$

$$(۲) \quad \tilde{A}_1 \ominus \tilde{A}_2 = (a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2; \min(w_1, w_2))$$

$$(۳) \quad \gamma \tilde{A}_1 = \begin{cases} (\gamma a_1, \gamma b_1, \gamma c_1; w_1) & 0 \leq \gamma \\ (\gamma c_1, \gamma b_1, \gamma a_1; w_1) & \gamma \leq 0 \end{cases}$$

۲.۲.۲ عملیات حسابی بین مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته

فرض کنید $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند، داریم:

$$(۱) \quad \tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2; \min(w_1, w_2))$$

$$(۲) \quad \tilde{A}_1 \ominus \tilde{A}_2 = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2; \min(w_1, w_2))$$

$$(۳) \quad \gamma \tilde{A}_1 = \begin{cases} (\gamma a_1, \gamma b_1, \gamma c_1, \gamma d_1, w_1) & 0 \leq \gamma \\ (\gamma d_1, \gamma c_1, \gamma b_1, \gamma a_1, w_1) & \gamma \leq 0 \end{cases}$$

ملاحظه ۱.۲.۲. حالتی که $w = ۱$ است، مجموعه های فازی مثلثی تعمیم یافته و مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته به ترتیب مجموعه فازی مثلثی نرمال و مجموعه فازی دوزنقه ای نرمال نامیده می شوند.

ملاحظه ۲.۲.۲. با فرض اینکه $w_1 = w_2 = ۱$ ، عملیات حسابی بین مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته می تواند برای مجموعه های فازی نرمال نیز استفاده شود.

۳.۲ مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی

برنامه ریزی خطی یکی از متداول ترین روش های تحقیق در عملیات است. ابزار کلاسیک برای حل مسئله برنامه ریزی خطی در عمل، الگوریتم سیمپلکس است که توسط دانتریگ پیشنهاد و ساخته شده است. بسیاری از مسائل تصمیم گیری در دنیای واقعی توسط مدل های برنامه ریزی خطی تشریح شده و گاهی لازم است که آن ها را با عدم قطعیت یا عدم اطمینان فرمول بندی کنید. این ماهیت عدم قطعیت مدت هاست که با کمک نظریه احتمال بررسی شده است. با این حال، تئوری احتمال ممکن است تفسیر صحیحی برای حل برخی از مسائل تصمیم گیری عملی ارائه ندهد. برنامه ریزی تصادفی بر این فرض ساخته شده است که برخی از پارامترهای مورد استفاده برای توصیف مسئله، متغیرهای تصادفی هستند که تعیین دقیق آن ها دشوار است و مدل های برنامه ریزی تصادفی اغلب از نظر ساختار بسیار پیچیده هستند و از این رو در عمل، به ندرت استفاده می شوند. در این موارد، تئوری مجموعه فازی [۱۸] ممکن است مفیدتر باشد.

۱.۳.۲ مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی نرمال

هر مسئله برنامه ریزی خطی که دارای m محدودیت و n متغیر تصمیم گیری باشد و سود یا هزینه آن با مجموعه های فازی نرمال فرمول بندی شود، می تواند به صورت زیر نوشته شود [۱۱، ۵۸، ۵۷]:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_1) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن c_j یک مجموعه فازی نرمال است و $a_{ij}, b_i, x_j \in R$.

۲.۳.۲ مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته

اگر در برنامه ریزی خطی موجود با مجموعه های فازی (P_1) ، پارامترهای $\tilde{c}_j$ به جای مجموعه های فازی نرمال توسط مجموعه های فازی تعمیم یافته معرفی شده باشند، آن گاه مسئله (P_1) به یک مسئله برنامه ریزی خطی فازی تعمیم یافته (P_2) تبدیل می شود.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \right) \\ & \text{s.t} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_2) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن c_j یک مجموعه فازی تعمیم یافته است و $a_{ij}, b_i, x_j \in R$.

۳.۳.۲ مقایسه مجموعه های فازی

مجموعه های فازی باید قبل از اینکه تصمیم گیرنده بخواهد عملی انجام دهد، مرتب شوند. اعداد حقیقی را می توان با ترتیب خطی و با کمک روابط $<$ ، $>$ یا $=$ مقایسه کرد، اما این نوع نابرابری در مجموعه های فازی وجود ندارد. از آنجا که مجموعه های فازی با توزیع احتمال نشان داده شده اند، می توانند با یکدیگر هم پوشانی داشته باشند و تعیین دقیق اینکه آیا یک مجموعه فازی بزرگتر یا کوچکتر از دیگری است، دشوار است. یک روش کارآمد برای رتبه بندی مجموعه های فازی استفاده از یک تابع رتبه بندی است، که هر مجموعه فازی را به یک عدد حقیقی نگاشت می کند. جین [۷۴] مفهوم تابع رتبه بندی را برای مقایسه مجموعه های فازی نرمال ارائه داد. چن [۳۲] خاطرنشان کرد که در بسیاری از موارد نمی توان تابع عضویت را به شکل معمول محدود کرد و مفهوم مجموعه های فازی تعمیم یافته را پیشنهاد کرد. از آن زمان تاکنون تلاش های چشمگیری صرف شده و پیشرفت های شگرفی در زمینه رتبه بندی مجموعه های فازی تعمیم یافته حاصل شده است. [۱، ۳۶، ۳۷، ۴۱، ۴۴، ۴۶، ۸۸، ۹۶]

۴.۳.۲ رویکرد رتبه بندی موجود

اگرچه چندین روش رتبه بندی برای مقایسه مجموعه های فازی وجود دارد، اما چندین نویسنده [۶، ۵۵، ۵۷، ۵۶، ۵۸] از روش رتبه بندی موجود در مرجع [۹۶] برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی نرمال استفاده کرده اند. در این بخش،

رویکرد رتبه بندی موجود در مرجع [۹۶] برای مقایسه مجموعه های فازی تعمیم یافته ارائه شده است.

دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ با استفاده از مراحل زیر و با کمک رویکرد رتبه بندی موجود در [۹۶] قابل مقایسه هستند.

قدم اول: مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$$(۱.۲) \quad I_L(\tilde{A}) = \int_0^{w_1} (V_{\tilde{A}}^L(\alpha)) d\alpha = \int_0^{w_1} (a_1 + \frac{(b_1-a_1)}{w_1} \alpha) d\alpha = \frac{w_1}{2} (a_1 + b_1)$$

$$(۲.۲) \quad I_R(\tilde{A}) = \int_0^{w_1} (V_{\tilde{A}}^R(\alpha)) d\alpha = \int_0^{w_1} (d_1 + \frac{(d_1-c_1)}{w_1} \alpha) d\alpha = \frac{w_1}{2} (c_1 + d_1)$$

$$(۳.۲) \quad I_L(\tilde{B}) = \int_0^{w_2} (V_{\tilde{B}}^L(\alpha)) d\alpha = \int_0^{w_2} (a_2 + \frac{(b_2-a_2)}{w_2} \alpha) d\alpha = \frac{w_2}{2} (a_2 + b_2)$$

$$(۴.۲) \quad I_R(\tilde{B}) = \int_0^{w_2} (V_{\tilde{B}}^R(\alpha)) d\alpha = \int_0^{w_2} (d_2 + \frac{(d_2-c_2)}{w_2} \alpha) d\alpha = \frac{w_2}{2} (c_2 + d_2)$$

که در آن

$$V_{\tilde{A}}^L(\alpha) = \infimum(A^\alpha), V_{\tilde{B}}^L(\alpha) = \infimum(B^\alpha)$$

$$V_{\tilde{A}}^R(\alpha) = \supremum(A^\alpha), V_{\tilde{B}}^R(\alpha) = \supremum(B^\alpha)$$

قدم دوم: مقادیر زیر را محاسبه کنید.

$$(۵.۲) \quad I_T^\lambda(\tilde{A}) = \lambda I_L(\tilde{A}) + (1 - \lambda) I_R(\tilde{A}) = \frac{w_1}{2} \{(\lambda(a_1 + b_1) + (1 - \lambda)(c_1 + d_1))\}$$

و

$$(۶.۲) \quad I_T^\lambda(\tilde{B}) = \lambda I_L(\tilde{B}) + (1 - \lambda) I_R(\tilde{B}) = \frac{w_2}{2} \{(\lambda(a_2 + b_2) + (1 - \lambda)(c_2 + d_2))\}$$

که در آن λ نشان دهنده میزان خوش بینی تصمیم گیرنده است. مقدار بیشتر λ نشان دهنده درجه بالاتری از خوش بینی است. برای $\lambda = 1$ و $\lambda = 0$ مقادیر $I_T^\lambda(\tilde{A})$ و $I_T^\lambda(\tilde{B})$ به ترتیب دیدگاه های تصمیم گیرنده بدبین و خوش بین را نشان می دهد در حالی که برای مقدار $\lambda = 0.5$ ، $I_T^\lambda(\tilde{A})$ و $I_T^\lambda(\tilde{B})$ بیانگر دیدگاه های یک تصمیم گیرنده معتدل است.

قدم سوم:

مقدار خاصی از λ را انتخاب کرده و بررسی کنید که آیا $I_T^\lambda(\tilde{B}) < I_T^\lambda(\tilde{A})$ یا $I_T^\lambda(\tilde{A}) < I_T^\lambda(\tilde{B})$

یا $I_T^\lambda(\tilde{B}) = I_T^\lambda(\tilde{A})$.

(۱) اگر برای مقدار انتخاب شده λ داشته باشیم $I_T^\lambda(\tilde{B}) < I_T^\lambda(\tilde{A})$ آن گاه برای همان مقدار

λ داریم $\tilde{A} \succ \tilde{B}$.

(۲) اگر برای مقدار انتخاب شده λ داشته باشیم $I_T^\lambda(\tilde{B}) > I_T^\lambda(\tilde{A})$ آن گاه برای همان مقدار

λ داریم $\tilde{A} \prec \tilde{B}$.

(۳) اگر برای مقدار انتخاب شده λ داشته باشیم $I_T^\lambda(\tilde{B}) = I_T^\lambda(\tilde{A})$ آن گاه برای همان مقدار

λ داریم $\tilde{A} \sim \tilde{B}$.

۵.۳.۲ جواب بهینه و جواب شدنی

در این بخش، تعاریف جواب بهینه و جواب شدنی یک مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی (P_1) آورده شده است.

تعریف ۱.۳.۲. یک مجموعه از اعداد حقیقی $\{x_j\}$ را یک جواب شدنی برای مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی گویند اگر

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \leq, =, \geq b_i, i = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

تعریف ۲.۳.۲. جواب شدنی $\{x_j\}$ برای مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی را یک جواب بهینه گویند اگر:

$$\forall y_j \in S_F, \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \succcurlyeq \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j y_j \quad (1)$$

$$\forall y_j \in S_F, \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \preccurlyeq \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j y_j \quad (2)$$

که در آن، S_F مجموعه تمام جواب های شدنی مسئله است.

تعریف ۳.۳.۲. فرض کنید $\{x_j\}$ یک جواب بهینه برای مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی در (P_1) باشد و x'_j یک جواب شدنی برای همان مسئله باشد به طوریکه داشته باشیم $\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x_j \sim \sum_{j=1}^n \tilde{c}_j x'_j$ آن گاه x'_j را یک جواب بهینه دگرین گویند.

۴.۲ روش موجود برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای نرمال

چندین محقق [۶، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸] از روش موجود در مرجع [۱۱] برای حل انواع مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی استفاده کرده اند. جواب یک مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی نرمال (P_1) با استفاده از مراحل زیر بدست می آید.

مرحله ۱: با فرض اینکه $\tilde{c}_j = (c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; 1)$ ، مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی نرمال (P_1) می تواند به مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای نرمال (P_3) تبدیل شود.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n (c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; 1)x_j \right) \\ & \text{s.t.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_3) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله ۲: با استفاده از تعریف ۲.۳.۲ جواب بهینه مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای نرمال (P_3) با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_4) بدست می آید.

$$\text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(I_T^\lambda \left(\sum_{j=1}^n ((c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; 1)x_j) \right) \right)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_4)$$

$$x_j \geq 0$$

مرحله ۳: با استفاده از خاصیت خطی زیر

$$I_T^\lambda \sum_{j=1}^n ((c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; 1)x_j) = \sum_{j=1}^n I_T^\lambda ((c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; 1)x_j)$$

مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_4) را می توان به مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_5) تبدیل کرد.

$$\text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n I_T^\lambda ((c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; 1)x_j) \right)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_5)$$

$$x_j \geq 0$$

مرحله ۴: با استفاده از $I_T^{\circ/\Delta}(a, b, c, d; 1) = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$ مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_5) به مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_6) تبدیل می شود.

$$\text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\frac{1}{4} \sum_{j=1}^n (c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4})x_j \right)$$

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_6)$$

$$x_j \geq 0$$

مرحله ۵: با استفاده از یک سیمپلکس M - بزرگ یا روش دو فازی یا روش سیمپلکس دوگان
و غیره می توان مقدار بهینه $\{x_j\}$ را برای مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_6) بدست آورد.

مرحله ۶: مقدار بهینه فازی مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای
 (P_3) را با قرار دادن مقادیر بدست آمده x_j در $\left(\sum_{j=1}^n (c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4})x_j \right)$ بدست آورید.

۱.۴.۲ مثال عددی

در این بخش روش موجود با حل یک مثال عددی نشان داده شده است.

مثال ۱.۴.۲. مسئله زیر را حل کنید.

$$\text{Maximize} \quad ((2, 3, 5, 6; 1)x_1 \oplus (1, 2, 4, 5; 1)x_2)$$

s.t.

$$8x_1 + 6x_2 \leq 25$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 15$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

۱۶ یک رویکرد جدید رتبه بندی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته

راه حل: با استفاده از روش موجود، جواب این مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای، به شرح زیر بدست می آید:

مرحله ۱: با استفاده از مرحله ۲ روش ذکر شده، با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی زیر می توان جواب بهینه مسئله انتخاب شده را بدست آورد:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad (I_T^{\circ/\Delta}((2,3,5,6;1)x_1 \oplus (1,2,4,5;1)x_2)) \\ & \text{s.t.} \\ & 8x_1 + 6x_2 \leq 25 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله ۲: با استفاده از مرحله ۳ روش ذکر شده، مسئله برنامه ریزی خطی قطعی بدست آمده در مرحله ۱ به صورت زیرنوشته می شود.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad (I_T^{\circ/\Delta}((2,3,5,6;1)x_1) + I_T^{\circ/\Delta}((1,2,4,5;1)x_2)) \\ & \text{s.t.} \\ & 8x_1 + 6x_2 \leq 25 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله ۳: با استفاده از $I_T^{\circ/\Delta}(a, b, c, d; w) = \frac{w}{4}(a + b + c + d)$ مسئله برنامه ریزی خطی قطعی، بدست آمده در مرحله ۲ به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad (4x_1 + 3x_2) \\ & \text{s.t.} \\ & 8x_1 + 6x_2 \leq 25 \\ & 3x_1 + 4x_2 \leq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله ۴: در حل مسئله برنامه ریزی خطی بدست آمده در مرحله ۳، جواب بهینه $x_1 = \frac{25}{8}$ و $x_2 = 0$ بدست می آید.

مرحله ۵: حال با قرار دادن $x_1 = \frac{25}{8}$ و $x_2 = 0$ در $((2,3,5,6;1)x_1 \oplus (1,2,4,5;1)x_2)$ مقدار بهینه فازی برای مسئله مورد نظر برابر $(\frac{50}{8}, \frac{75}{8}, \frac{125}{8}, \frac{150}{8}; 1)$ بدست می آید.

۵.۲ محدودیت های روش موجود

در مرحله ۳ روش ذکر شده از خاصیت خطی

$$I_T^\lambda(\tilde{c}_1 x_1 \oplus \tilde{c}_2 x_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{c}_n x_n) = I_T^\lambda(\tilde{c}_1 x_1) + I_T^\lambda(\tilde{c}_2 x_2) + \cdots + I_T^\lambda(\tilde{c}_n x_n)$$

برای تبدیل مسئله برنامه ریزی خطی (P_4) به مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_5) استفاده می شود. اما خاصیت خطی

$$I_T^\lambda(\tilde{c}_1 x_1 \oplus \tilde{c}_2 x_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{c}_n x_n) = I_T^\lambda(\tilde{c}_1 x_1) + I_T^\lambda(\tilde{c}_2 x_2) + \cdots + I_T^\lambda(\tilde{c}_n x_n)$$

فقط در صورتی برقرار است که $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$ یا مجموعه های فازی نرمال باشند یا مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاع برابر باشند. اما اگر مجموعه های $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \dots, \tilde{c}_n$ مجموعه های فازی نرمال یا مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاع های مساوی نباشند، آن گاه خاصیت خطی برقرار نیست یعنی

$$I_T^\lambda(\tilde{c}_1 x_1) + I_T^\lambda(\tilde{c}_2 x_2) + \cdots + I_T^\lambda(\tilde{c}_n x_n) \neq I_T^\lambda(\tilde{c}_1 x_1 \oplus \tilde{c}_2 x_2 \oplus \cdots \oplus \tilde{c}_n x_n)$$

بنابراین از روش موجود در [۱۱] نمی توان برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاعات مختلف استفاده کرد.

مثال ۱.۵.۲. فرض کنید $\tilde{C}_1 = (1, 2, 4, 5; 1)$ و $\tilde{C}_2 = (3, 5, 7, 9; 1)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای نرمال باشند، از رابطه (۵.۲) داریم $I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_1) = 3$ و $I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_2) = 6$ و $I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_1 \oplus \tilde{C}_2) = 9$ که در این صورت داریم

$$I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_1 \oplus \tilde{C}_2) = I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_1) + I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_2)$$

مثال ۲.۵.۲. فرض کنید $\tilde{C}_1 = (1, 2, 4, 5; \circ/3)$ و $\tilde{C}_2 = (3, 5, 7, 9; \circ/3)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند. با استفاده از رابطه (۵.۲) داریم $I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_1) = 1/8$ و $I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_2) = 1/8$ و $I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_1 \oplus \tilde{C}_2) = 2/7$ و $\circ/9$ بنابراین

$$I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_1 \oplus \tilde{C}_2) = I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_1) + I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_2)$$

مثال ۳.۵.۲. فرض کنید $\tilde{C}_1 = (1, 2, 4, 5; \circ/3)$ و $\tilde{C}_2 = (3, 5, 7, 9; \circ/7)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند. با استفاده از رابطه (۵.۲) داریم $I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_1) = 1/8$ و $I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_2) = 4/2$ و $I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_1 \oplus \tilde{C}_2) = 2/7$ و $\circ/9$ بنابراین $I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_1 \oplus \tilde{C}_2) \neq I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_1) + I_T^{\circ/5}(\tilde{C}_2)$

۶.۲ کاستی های رویکرد رتبه بندی موجود

در بخش ۵.۲، اشاره شد که از روش ذکر شده تنها می توان برای حل مسائل برنامه ریزی خطی استفاده کرد که در آن ها پارامترها توسط مجموعه های فازی نرمال یا مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاع برابر تعیین می شوند. اما از روش موجود نمی توان برای حل مسائل برنامه ریزی خطی که در آن ها برخی یا تمام پارامترها توسط مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاع مختلف تعیین می شوند استفاده کرد. اگر در روش ذکر شده به جای رویکرد رتبه بندی موجود، رویکرد رتبه بندی دیگری برای مقایسه مجموعه های فازی تعمیم یافته استفاده شود که در آن ویژگی خطی

$$I_T^\lambda(\tilde{C}_1 x_1) + I_T^\lambda(\tilde{C}_2 x_2) + \dots + I_T^\lambda(\tilde{C}_n x_n) = I_T^\lambda(\tilde{C}_1 x_1 \oplus \tilde{C}_2 x_2 \oplus \dots \oplus \tilde{C}_n x_n)$$

برقرار باشد، آن گاه می توان از روش موجود برای حل مسائل برنامه ریزی با مجموعه های فازی تعمیم یافته و ارتفاعات مختلف استفاده کرد.

اخیرا، چن و چن [۳۷] و چن و سانسناوات [۴۱] به محدودیت ها و کاستی های چندین روش رتبه بندی موجود برای مقایسه مجموعه های فازی تعمیم یافته اشاره کرده اند و یک روش رتبه بندی جدید را برای مقایسه مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته پیشنهاد کرده اند. در این بخش نشان می دهیم که در رویکردهای رتبه بندی پیشنهاد شده در [۳۷]، [۴۱] نیز نواقصی وجود دارد. بنابراین از این رویکردهای رتبه بندی نمی توان برای مقایسه مجموعه های فازی نرمال و مجموعه های فازی تعمیم یافته استفاده کرد.

۱.۶.۲ رویکرد رتبه بندی چن و چن

در این بخش، رویکرد رتبه بندی ارائه شده در [۳۷] برای مقایسه مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته معرفی می شود.

اگر $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_{\tilde{A}})$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_{\tilde{B}})$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند، آن گاه با استفاده از مراحل زیر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را باهم مقایسه می کنیم. مرحله ۱: هر مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را به صورت $\tilde{A}^*$ و $\tilde{B}^*$ استاندارد سازی می کنیم:

$$(۷.۲) \quad \tilde{A}^* = \left(\frac{a_1}{k_1}, \frac{b_1}{k_1}, \frac{c_1}{k_1}, \frac{d_1}{k_1}, w_{\tilde{A}} \right) = (a_1^*, b_1^*, c_1^*, d_1^*, w_{\tilde{A}})$$

که در آن

$$k_1 = \max(\lceil |a_1| \rceil, \lceil |b_1| \rceil, \lceil |c_1| \rceil, \lceil |d_1| \rceil, 1)$$

همچنین $|a_1|, |b_1|, |c_1|, |d_1|$ به ترتیب قدر مطلق a_1, b_1, c_1, d_1 هستند و $\lceil |a_1| \rceil, \lceil |b_1| \rceil, \lceil |c_1| \rceil, \lceil |d_1| \rceil$ به ترتیب جزء صحیح بالایی $|a_1|, |b_1|, |c_1|, |d_1|$ هستند. و

$$(۸.۲) \quad \tilde{B}^* = (\frac{a_2}{k_2}, \frac{b_2}{k_2}, \frac{c_2}{k_2}, \frac{d_2}{k_2}, w_{\tilde{B}}) = (a_2^*, b_2^*, c_2^*, d_2^*, w_{\tilde{B}})$$

که در آن

$$k_2 = \max(\lceil |a_2| \rceil, \lceil |b_2| \rceil, \lceil |c_2| \rceil, \lceil |d_2| \rceil, 1)$$

همچنین $|a_2|, |b_2|, |c_2|, |d_2|$ به ترتیب قدر مطلق a_2, b_2, c_2, d_2 هستند و $\lceil |a_2| \rceil, \lceil |b_2| \rceil, \lceil |c_2| \rceil, \lceil |d_2| \rceil$ به ترتیب جزء صحیح بالایی $|a_2|, |b_2|, |c_2|, |d_2|$ هستند.

مرحله ۲: مقادیر غیر فازی $x_{\tilde{A}^*}$ و $x_{\tilde{B}^*}$ را برای مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته استاندارد شده $\tilde{A}^*$ و $\tilde{B}^*$ به شرح زیر محاسبه کنید:

$$(۹.۲) \quad x_{\tilde{A}^*} = \frac{a_1^* + b_1^* + c_1^* + d_1^*}{4}$$

و

$$(۱۰.۲) \quad x_{\tilde{B}^*} = \frac{a_2^* + b_2^* + c_2^* + d_2^*}{4}$$

مرحله ۳: انحراف استاندارد $STD_{\tilde{A}^*}$ و $STD_{\tilde{B}^*}$ را برای مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته استاندارد شده $\tilde{A}^*$ و $\tilde{B}^*$ به شرح زیر محاسبه کنید:

$$(۱۱.۲) \quad STD_{\tilde{A}^*} = \sqrt{\frac{(a_1^* - x_{\tilde{A}^*})^2 + (b_1^* - x_{\tilde{A}^*})^2 + (c_1^* - x_{\tilde{A}^*})^2 + (d_1^* - x_{\tilde{A}^*})^2}{4-1}}$$

و

$$(۱۲.۲) \quad STD_{\tilde{B}^*} = \sqrt{\frac{(a_2^* - x_{\tilde{B}^*})^2 + (b_2^* - x_{\tilde{B}^*})^2 + (c_2^* - x_{\tilde{B}^*})^2 + (d_2^* - x_{\tilde{B}^*})^2}{4-1}}$$

مرحله ۴: امتیازات رتبه بندی $score(\tilde{A}^*)$ و $score(\tilde{B}^*)$ برای مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته استاندارد شده $\tilde{A}^*$ و $\tilde{B}^*$ را به شرح زیر محاسبه کنید:

$$(۱۳.۲) \quad score(\tilde{A}^*) = \frac{x_{\tilde{A}^*} \times w_{\tilde{A}}}{1 + STD_{\tilde{A}^*}}$$

و

$$(۱۴.۲) \quad score(\tilde{B}^*) = \frac{x_{\tilde{B}^*} \times w_{\tilde{B}}}{1 + STD_{\tilde{B}^*}}$$

که در آن $score(\tilde{A}^*), score(\tilde{B}^*) \in [0, 1]$.

مرحله ۵: موارد زیر را چک کنید.

$score(\tilde{A}^*) < score(\tilde{B}^*)$ یا $score(\tilde{B}^*) < score(\tilde{A}^*)$ یا $score(\tilde{A}^*) = score(\tilde{B}^*)$

مورد (۱): اگر $score(\tilde{B}^*) < score(\tilde{A}^*)$ آن گاه $\tilde{A} \succ \tilde{B}$

مورد (۲): اگر $score(\tilde{B}^*) > score(\tilde{A}^*)$ آن گاه $\tilde{A} \prec \tilde{B}$

مورد (۳): اگر $score(\tilde{B}^*) = score(\tilde{A}^*)$ آن گاه $\tilde{A} \sim \tilde{B}$

۲.۶.۲ مثال عددی

برای نشان دادن رویکرد رتبه بندی موجود در مرجع [۳۷]، دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A} = (\circ/1, \circ/3, \circ/3, \circ/5; \circ/3)$ و $\tilde{B} = (\circ/2, \circ/3, \circ/3, \circ/4; \circ/2)$ را با استفاده از آن مقایسه می کنیم.

مرحله (۱): با استفاده از معادله های (۷.۲) و (۸.۲) می توان نوشت:

$$\tilde{A}^* = (\circ/1, \circ/3, \circ/3, \circ/5; \circ/3) \text{ و } \tilde{B}^* = (\circ/2, \circ/3, \circ/3, \circ/4; \circ/2)$$

مرحله (۲): با استفاده از معادله های (۹.۲) و (۱۰.۲) داریم: $x_{\tilde{A}^*} = \circ/3$ و $x_{\tilde{B}^*} = \circ/3$

مرحله (۳): با استفاده از معادله های (۱۱.۲) و (۱۲.۲) داریم: $STD_{\tilde{A}^*} = \circ/1633$ و

$$STD_{\tilde{B}^*} = \circ/8165$$

مرحله (۴): با استفاده از معادله های (۱۳.۲) و (۱۴.۲) داریم: $score(\tilde{A}^*) = \circ/7737$ و

$$score(\tilde{B}^*) = \circ/5555$$

مرحله (۵): بنابراین $score(\tilde{B}^*) < score(\tilde{A}^*)$ و لذا $\tilde{A} \succ \tilde{B}$

۳.۶.۲ رویکرد رتبه بندی چن و سانگوانسات

در این بخش، رویکرد رتبه بندی موجود در [۴۱] برای مقایسه مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته ارائه شده است. فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_{\tilde{A}})$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_{\tilde{B}})$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند. از مراحل زیر برای مقایسه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ استفاده می کنیم:

مرحله ۱: هر مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را به شکل $\tilde{A}^*$ و $\tilde{B}^*$ استاندارد سازی می کنیم که به شرح زیر است:

$$(15.2) \quad \tilde{A}^* = (\frac{a_1}{k_1}, \frac{b_1}{k_1}, \frac{c_1}{k_1}, \frac{d_1}{k_1}; w_{\tilde{A}}) = (a_1^*, b_1^*, c_1^*, d_1^*; w_{\tilde{A}})$$

که در آن $k_1 = \max(\lceil |a_1| \rceil, \lceil |b_1| \rceil, \lceil |c_1| \rceil, \lceil |d_1| \rceil, 1)$

و $|a_1|, |b_1|, |c_1|, |d_1|$ به ترتیب قدر مطلق a_1, b_1, c_1, d_1 هستند و $\lceil |a_1| \rceil, \lceil |b_1| \rceil, \lceil |c_1| \rceil, \lceil |d_1| \rceil$

به ترتیب کران بالای $|a_1|, |b_1|, |c_1|, |d_1|$ هستند. همچنین

$$(16.2) \quad \tilde{B}^* = (\frac{a_2}{k_2}, \frac{b_2}{k_2}, \frac{c_2}{k_2}, \frac{d_2}{k_2}; w_{\tilde{B}}) = (a_2^*, b_2^*, c_2^*, d_2^*; w_{\tilde{B}})$$

که در آن $k_2 = \max(\lceil |a_2| \rceil, \lceil |b_2| \rceil, \lceil |c_2| \rceil, \lceil |d_2| \rceil, 1)$

و $|a_2|, |b_2|, |c_2|, |d_2|$ به ترتیب قدر مطلق a_2, b_2, c_2, d_2 هستند و $\lceil |a_2| \rceil, \lceil |b_2| \rceil, \lceil |c_2| \rceil, \lceil |d_2| \rceil$

به ترتیب کران بالای $|a_2|, |b_2|, |c_2|, |d_2|$ هستند.

مرحله ۲: به ترتیب قسمت های $AreaA_L^{*-}$ و $AreaA_R^{*-}$ در سمت منفی راحاسبه می کنیم

که ناحیه دوزنقه ای حاصل از توابع عضویت $\mu_{\tilde{A}^*}^L$ و $\mu_{\tilde{A}^*}^R$ و منحنی تابع عضویت مجموعه فازی

دوزنقه ای $(-1, -1, -1, -1; w_{\tilde{A}})$ را نشان می دهد که در آن:

$$(۱۷.۲) \quad \mu_{\tilde{A}^*}^L = w_{\tilde{A}} \frac{(x-a_1^*)}{(b_1^*-a_1^*)}, a_1^* \leq x < b_1^*$$

$$(۱۸.۲) \quad \mu_{\tilde{A}^*}^R = w_{\tilde{A}} \frac{(x-d_1^*)}{(c_1^*-d_1^*)}, c_1^* \leq x < d_1^*$$

۹

$$(۱۹.۲) \quad AreaA_L^{*-} = w_{\tilde{A}} \frac{(a_1^*+1)+(b_1^*+1)}{۳}$$

$$(۲۰.۲) \quad AreaA_R^{*-} = w_{\tilde{A}} \frac{(c_1^*+1)+(d_1^*+1)}{۳}$$

سپس به ترتیب قسمت های $AreaA_L^{*+}$ و $AreaA_L^{*-}$ را در طرف مثبت محاسبه می کنیم که ناحیه دوزنقه ای حاصل از توابع عضویت $\mu_{\tilde{A}^*}^L$ و $\mu_{\tilde{A}^*}^R$ که در معادله (۱۷.۲) و (۱۸.۲) تعریف شده اند و منحنی توابع عضویت مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $(1, 1, 1, 1; w_{\tilde{A}})$ را نشان می دهد، که در آن

$$(۲۱.۲) \quad AreaA_L^{*+} = w_{\tilde{A}} \frac{(1-a_1^*)+(1-b_1^*)}{۳}$$

$$(۲۲.۲) \quad AreaA_R^{*+} = w_{\tilde{A}} \frac{(1-c_1^*)+(1-d_1^*)}{۳}$$

به طور مشابه $AreaB_L^{*-}$ و $AreaB_L^{*+}$ و $AreaB_R^{*-}$ و $AreaB_R^{*+}$ را برای مجموعه فازی دوزنقه ای $\tilde{B}^*$ به شرح زیر محاسبه می کنیم:

$$(۲۳.۲) \quad AreaB_L^{*-} = w_{\tilde{A}} \frac{(a_1^*+1)+(b_1^*+1)}{۳}$$

$$(۲۴.۲) \quad AreaB_R^{*-} = w_{\tilde{A}} \frac{(c_1^*+1)+(d_1^*+1)}{۳}$$

۹

$$(۲۵.۲) \quad AreaB_L^{*+} = w_{\tilde{A}} \frac{(1-a_1^*)+(1-b_1^*)}{۳}$$

$$(۲۶.۲) \quad AreaB_R^{*+} = w_{\tilde{A}} \frac{(1-c_1^*)+(1-d_1^*)}{۳}$$

مرحله ۳: مقادیر $XI_{\tilde{A}^*}$ ، $XD_{\tilde{A}^*}$ ، $XI_{\tilde{B}^*}$ ، $XD_{\tilde{B}^*}$ را به صورت زیر محاسبه کنید.

$$(۲۷.۲) \quad XI_{\tilde{A}^*} = AreaA_L^{*-} + AreaA_R^{*-}$$

$$(۲۸.۲) \quad XD_{\tilde{A}^*} = AreaA_L^{*+} + AreaA_R^{*+}$$

۹

$$(۲۹.۲) \quad XI_{\tilde{B}^*} = AreaB_L^{*-} + AreaB_R^{*-}$$

۲۲ یک رویکرد جدید رتبه بندی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی ذوزنقه ای تعمیم یافته

$$(30.2) \quad XD_{\tilde{B}^*} = AreaB_L^{*+} + AreaB_R^{*+}$$

مرحله ۴: امتیاز رتبه بندی $Score(\tilde{A}^*)$ و $Score(\tilde{B}^*)$ را برای هر مجموعه فازی ذوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A}^*$ و $\tilde{B}^*$ به صورت زیر محاسبه کنید.

$$(31.2) \quad Score(\tilde{A}^*) = \frac{XI_{\tilde{A}^*} - XD_{\tilde{A}^*}}{XI_{\tilde{A}^*} + XD_{\tilde{A}^*} + (1 - w_{\tilde{A}})}$$

$$(32.2) \quad Score(\tilde{B}^*) = \frac{XI_{\tilde{B}^*} - XD_{\tilde{B}^*}}{XI_{\tilde{B}^*} + XD_{\tilde{B}^*} + (1 - w_{\tilde{B}})}$$

مرحله ۵: موارد زیر را چک کنید. $Score(\tilde{B}^*) > Score(\tilde{A}^*)$ یا $Score(\tilde{B}^*) < Score(\tilde{A}^*)$ یا

$$Score(\tilde{B}^*) = Score(\tilde{A}^*)$$

مورد (۱): اگر $Score(\tilde{B}^*) < Score(\tilde{A}^*)$ ، آن گاه $\tilde{A} \succ \tilde{B}$

مورد (۲): اگر $Score(\tilde{B}^*) > Score(\tilde{A}^*)$ ، آن گاه $\tilde{A} \prec \tilde{B}$

مورد (۳): اگر $Score(\tilde{B}^*) = Score(\tilde{A}^*)$ ، آن گاه $\tilde{A} \sim \tilde{B}$

۴.۶.۲ مثال عددی

برای نشان دادن رویکرد رتبه بندی موجود در مرجع [۴۱] دو مجموعه فازی ذوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A} = (0/1, 0/3, 0/3, 0/5; 0/8)$ و $\tilde{B} = (0/1, 0/3, 0/3, 0/5; 1)$ را با استفاده از این رویکرد مقایسه می کنیم.

مرحله (۱): با استفاده از معادلات (۱۵.۲) و (۱۶.۲) داریم:

$$\tilde{B}^* = (0/1, 0/3, 0/3, 0/5; 1) \text{ و } \tilde{A}^* = (0/1, 0/3, 0/3, 0/5; 0/8)$$

مرحله (۲): با استفاده از معادلات (۱۹.۲) و (۲۰.۲) داریم:

$$AreaA_L^{*-} = 0/96, AreaA_R^{*-} = 1/12$$

با استفاده از معادلات (۲۱.۲) و (۲۲.۲) داریم:

$$AreaA_L^{*+} = 0/64, AreaA_R^{*+} = 0/48$$

با استفاده از معادلات (۲۳.۲) و (۲۴.۲) داریم:

$$AreaB_L^{*-} = 1/2, AreaB_R^{*-} = 1/4$$

با استفاده از معادلات (۲۵.۲) و (۲۶.۲) داریم:

$$AreaB_L^{*+} = 0/8, AreaB_R^{*+} = 0/6$$

مرحله (۳): با استفاده از معادلات (۲۷.۲) و (۲۸.۲) داریم:

$$XI_{\tilde{A}^*} = AreaA_L^{*-} + AreaA_R^{*-} = ۲/۰۸$$

$$XD_{\tilde{A}^*} = AreaA_L^{*+} + AreaA_R^{*+} = ۱/۱۲$$

با استفاده از معادلات (۲۹.۲) و (۳۰.۲) داریم:

$$XI_{\tilde{B}^*} = AreaB_L^{*-} + AreaB_R^{*-} = ۲/۶$$

$$XD_{\tilde{B}^*} = AreaB_L^{*+} + AreaB_R^{*+} = ۱/۴$$

مرحله (۴): با استفاده از معادلات (۳۱.۲) و (۳۲.۲) داریم:

$$Score(\tilde{A}^*) = ۰/۲۸۲۴, Score(\tilde{b}^*) = ۰/۳$$

مرحله (۵): بنابراین $Score(\tilde{B}^*) > Score(\tilde{A}^*)$ و لذا $\tilde{A} \prec \tilde{B}$

۷.۲ محدودیت هایی بر اساس روابط منطقی

در این بخش، به کاستی های رویکردهای رتبه بندی موجود در مرجع [۳۷، ۴۱] بر اساس خصوصیات منطقی مقادیر فازی اشاره شده است.

وانگ و کیر [۷۴] خصوصیات منطقی زیر را برای اعتبار سنجی هرتابع رتبه بندی پیشنهاد کردند.

اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه فازی نرمال باشند آن گاه:

$$(1) \quad \text{اگر } \tilde{A} \succ \tilde{B} \text{ آن گاه } (\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \succ (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$$

$$(2) \quad \text{اگر } \tilde{A} \prec \tilde{B} \text{ آن گاه } (\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \prec (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$$

$$(3) \quad \text{اگر } \tilde{A} \sim \tilde{B} \text{ آن گاه } (\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \sim (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$$

که در آن $\tilde{C}$ یک مجموعه فازی نرمال است.

برای مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته این خصوصیات به صورت زیر نوشته می شوند:

اگر $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند، آن گاه:

$$(1) \quad \text{اگر } \tilde{A} \succ \tilde{B} \text{ آن گاه } (\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \succ (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$$

$$(2) \quad \text{اگر } \tilde{A} \prec \tilde{B} \text{ آن گاه } (\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \prec (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$$

$$(3) \quad \text{اگر } \tilde{A} \sim \tilde{B} \text{ آن گاه } (\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \sim (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$$

که در آن $\tilde{C} = (a, b, c, d; w_3)$ یک مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته است به طوریکه:

$$w_3 \leq \min(w_1, w_2)$$

مجموعه های فازی متعددی می توان مثال زد که در آن ها توابع رتبه بندی موجود در مراجع [۳۷، ۴۱] از ویژگی منطقی $(\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \succ (\tilde{B} \oplus \tilde{C}) \Rightarrow \tilde{A} \succ \tilde{B}$ برخوردار نیستند یعنی با

توجه به رویکردهای رتبه بندی موجود خاصیت $(\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \succ (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$ با $\tilde{A} \succ \tilde{B}$ و $\tilde{A} \not\succ \tilde{B}$ با نظر وانگ و کیر [۷۴] در تضاد است.

مثال ۱.۷.۲. فرض کنید $\tilde{A} = (0/1, 0/3, 0/3, 0/5; 1)$ و $\tilde{B} = (0/2, 0/3, 0/3, 0/4; 1)$ و $\tilde{C} = (-0/5, -0/3, -0/3, -0/1; 0/8)$ سه مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند، با توجه به رویکرد رتبه بندی موجود در مراجع [۳۷ و ۴۱] داریم، اما $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ اما $(\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \succ (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$ و این یعنی

$$\tilde{B} \succ \tilde{A} \not\Rightarrow (\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \prec (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$$

۸.۲ محدودیت هایی بر اساس ارتفاع مجموعه های فازی

در این بخش نشان داده شده است که در بعضی موارد نتایج رتبه بندی بدست آمده از رویکردهای رتبه بندی موجود در مراجع [۳۷ ، ۴۱]، به ارتفاع مجموعه های فازی بستگی دارد، در حالی که در چندین مورد، نتایج رتبه بندی به ارتفاع مجموعه های فازی بستگی ندارد.

فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_1)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4; w_2)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند. آن گاه، با توجه به رویکردهای رتبه بندی موجود در مراجع [۳۷ ، ۴۱] دو حالت وجود دارد:

حالت اول: اگر $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \neq 0$ آن گاه:

(۱) اگر $w_1 < w_2$ آن گاه $\tilde{A} \prec \tilde{B}$

(۲) اگر $w_1 > w_2$ آن گاه $\tilde{A} \succ \tilde{B}$

(۳) اگر $w_1 = w_2$ آن گاه $\tilde{A} \sim \tilde{B}$

حالت دوم: اگر $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 0$ آن گاه، $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ برای همه مقادیر w_1, w_2 .

مثال ۱.۸.۲. فرض کنید $\tilde{A} = (1, 1, 1, 1; w_1)$ و $\tilde{B} = (1, 1, 1, 1; w_2)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند. طبق این رویکرد ها $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ اگر $w_1 < w_2$ و $\tilde{A} \succ \tilde{B}$ اگر $w_1 > w_2$ و $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ اگر $w_1 = w_2$.

مثال ۲.۸.۲. فرض کنید $\tilde{A} = (-4, -2, -1, 7; w_1)$ و $\tilde{B} = (-4, -2, -1, 7; w_2)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند. آن گاه برای همه مقادیر w_1 و w_2 داریم $\tilde{A} \sim \tilde{B}$. طبق رویکردهای رتبه بندی موجود در مراجع [۳۷ ، ۴۱] ، در حالت اول مقایسه مجموعه های فازی به ارتفاع مجموعه های فازی بستگی دارد و در حالت دوم مقایسه مجموعه های فازی به ارتفاع مجموعه های فازی بستگی ندارد.

۹.۲ رویکرد رتبه بندی پیشنهادی

در این بخش، برای رفع نقایص رویکردهای موجود در مراجع [۳۷، ۴۱]، یک روش رتبه بندی جدید برای مقایسه مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته ارائه شده [۹۶].

فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند. مراحل زیر را برای مقایسه این دو مجموعه انجام می دهیم:

مرحله (۱): ابتدا $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را به $\tilde{A}^*$ و $\tilde{B}^*$ تبدیل می کنیم.

$$(33.2) \quad \tilde{A}^* = (a_1, b_1, c_1, d_1; w), \tilde{B}^* = (a_2, b_2, c_2, d_2; w)$$

که در آن $w = \min(w_1, w_2)$.

مرحله (۲): مقادیر زیر را محاسبه می کنیم:

$$(34.2) \quad \Re_L \tilde{A}^* = \int_0^w (v_{\tilde{A}^*}^L(\alpha)) d\alpha = \int_0^w (a_1 + \frac{(b_1 - a_1)}{w} \alpha) d\alpha = \frac{w}{2} (a_1 + b_1)$$

$$(35.2) \quad \Re_R \tilde{A}^* = \int_0^w (v_{\tilde{A}^*}^R(\alpha)) d\alpha = \int_0^w (d_1 + \frac{(d_1 - c_1)}{w} \alpha) d\alpha = \frac{w}{2} (c_1 + d_1)$$

و

$$(36.2) \quad \Re_L \tilde{B}^* = \int_0^w (v_{\tilde{B}^*}^L(\alpha)) d\alpha = \int_0^w (a_2 + \frac{(b_2 - a_2)}{w} \alpha) d\alpha = \frac{w}{2} (a_2 + b_2)$$

$$(37.2) \quad \Re_R \tilde{B}^* = \int_0^w (v_{\tilde{B}^*}^R(\alpha)) d\alpha = \int_0^w (d_2 + \frac{(d_2 - c_2)}{w} \alpha) d\alpha = \frac{w}{2} (c_2 + d_2)$$

که در آن $v_{\tilde{B}^*}^R(\alpha) = \sup(B^{*\alpha})$ ، $v_{\tilde{A}^*}^L(\alpha) = \inf(A^{*\alpha})$ ، $v_{\tilde{B}^*}^L(\alpha) = \inf(B^{*\alpha})$ و $v_{\tilde{A}^*}^L(\alpha) = \inf(A^{*\alpha})$

مرحله (۳): مقادیر زیر را محاسبه می کنیم:

$$(38.2) \quad \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \lambda \Re_L(\tilde{A}^*) + (1 - \lambda) \Re_R(\tilde{A}^*) = \frac{w}{2} \{(\lambda(a_1 + b_1) + (1 - \lambda)(c_1 + d_1))\}$$

و

$$(39.2) \quad \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = \lambda \Re_L(\tilde{B}^*) + (1 - \lambda) \Re_R(\tilde{B}^*) = \frac{w}{2} \{(\lambda(a_2 + b_2) + (1 - \lambda)(c_2 + d_2))\}$$

مرحله (۴): یک مقدار خاص برای λ انتخاب کنید و سپس موارد زیر را بررسی کنید.

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) \text{ یا } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) < \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) \text{ یا } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) > \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$$

مورد (۱): اگر برای مقدار انتخاب شده λ داشته باشیم $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) > \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه برای

همان مقدار λ داریم $\tilde{A} \succ \tilde{B}$.

مورد (۲): اگر برای مقدار انتخاب شده λ داشته باشیم $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) < \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه برای

همان مقدار λ داریم $\tilde{A} \prec \tilde{B}$.

مورد (۳): اگر برای مقدار انتخاب شده λ داشته باشیم $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه برای

همان مقدار λ داریم $\tilde{A} \sim \tilde{B}$.

۱.۹.۲ مثال عددی

در این بخش چندین مثال برای رتبه بندی پیشنهادی بیان می کنیم.

مثال ۱.۹.۲. با استفاده از روش رتبه بندی پیشنهادی، دو مجموعه فازی دوزنقه ای نرمال $\tilde{A} = (\circ/1, \circ/3, \circ/3, \circ/5; 1)$ و $\tilde{B} = (\circ/2, \circ/3, \circ/3, \circ/4; 1)$ را با هم مقایسه می کنیم:

مرحله (۱): با استفاده از معادله (۳۳.۲) می توان نوشت: $\tilde{A}^* = (\circ/1, \circ/3, \circ/3, \circ/5; 1)$ و $\tilde{B}^* = (\circ/2, \circ/3, \circ/3, \circ/4; 1)$

مرحله (۲): با استفاده از معادلات (۳۴.۲)، (۳۵.۲)، (۳۶.۲) و (۳۷.۲) می توان نوشت: $\Re_R(\tilde{B}^*) = \circ/35$ و $\Re_L(\tilde{B}^*) = \circ/25$ و $\Re_R(\tilde{A}^*) = \circ/4$ و $\Re_L(\tilde{A}^*) = \circ/2$

مرحله (۳): با استفاده از معادلات (۳۸.۲) و (۳۹.۲) داریم: $\Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = (\circ/4 - \circ/2\lambda)$ و $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = (\circ/35 - \circ/1\lambda)$

مرحله (۴): برای یک تصمیم گیرنده بدبین با $\lambda = \circ$ داریم:

$$\Re_T^\circ(\tilde{B}^*) = (\circ/35) \text{ و } \Re_T^\circ(\tilde{A}^*) = (\circ/4) \text{ و } \tilde{A} \succ \tilde{B} \text{ و } \Re_T^\circ(\tilde{B}^*) < \Re_T^\circ(\tilde{A}^*) \text{ بنابراین}$$

برای یک تصمیم گیرنده خوش بین با $\lambda = 1$ داریم:

$$\Re_T^1(\tilde{B}^*) = (\circ/25) \text{ و } \Re_T^1(\tilde{A}^*) = (\circ/2) \text{ و } \tilde{A} \prec \tilde{B} \text{ و } \Re_T^1(\tilde{B}^*) > \Re_T^1(\tilde{A}^*) \text{ بنابراین}$$

برای یک تصمیم گیرنده معتدل با $\lambda = \circ/5$ داریم:

$$\Re_T^{\circ/5}(\tilde{B}^*) = \Re_T^{\circ/5}(\tilde{A}^*) \text{ بنابراین } \Re_T^{\circ/5}(\tilde{B}^*) = (\circ/3) \text{ و } \Re_T^{\circ/5}(\tilde{A}^*) = (\circ/3) \text{ و } \tilde{A} \sim \tilde{B}$$

مثال ۲.۹.۲. با استفاده از روش رتبه بندی پیشنهادی دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A} = (\circ/1, \circ/3, \circ/3, \circ/5; \circ/8)$ و $\tilde{B} = (\circ/1, \circ/3, \circ/3, \circ/5; \circ/9)$ را با هم مقایسه می کنیم:

مرحله (۱): با استفاده از معادله (۳۳.۲) می توان نوشت: $\tilde{A}^* = (\circ/1, \circ/3, \circ/3, \circ/5; \circ/8)$ و $\tilde{B}^* = (\circ/1, \circ/3, \circ/3, \circ/5; \circ/8)$

مرحله (۲): با استفاده از معادلات (۳۴.۲)، (۳۵.۲)، (۳۶.۲) و (۳۷.۲) می توان نوشت: $\Re_R(\tilde{B}^*) = \circ/32$ و $\Re_L(\tilde{B}^*) = \circ/16$ و $\Re_R(\tilde{A}^*) = \circ/32$ و $\Re_L(\tilde{A}^*) = \circ/16$

مرحله (۳): با استفاده از معادلات (۳۸.۲) و (۳۹.۲) داریم: $\Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = \circ/4(\circ/8 - \circ/4\lambda)$ و $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \circ/4(\circ/8 - \circ/4\lambda)$

مرحله (۴): بنابراین برای هر $\lambda \in [\circ, \circ/8]$ داریم $\Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*)$ پس $\tilde{A} \sim \tilde{B}$

مثال ۳.۹.۲. با استفاده از روش رتبه بندی پیشنهادی، دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A} = (-\circ/8, -\circ/6, -\circ/4, -\circ/2; \circ/35)$ و $\tilde{B} = (-\circ/4, -\circ/3, -\circ/2, -\circ/1; \circ/35)$ را با هم مقایسه می کنیم:

مرحله (۱): با استفاده از معادله (۳۳.۲) داریم:

$$\tilde{A}^* = (-\circ/4, -\circ/3, -\circ/2, -\circ/1; \circ/35) \text{ و } \tilde{B}^* = (-\circ/8, -\circ/6, -\circ/4, -\circ/2; \circ/7)$$

مرحله (۲): با استفاده از معادلات (۳۴.۲)، (۳۵.۲)، (۳۶.۲) و (۳۷.۲) می توان نوشت:

$$\Re_R(\tilde{B}^*) = -\circ/525 \text{ و } \Re_L(\tilde{B}^*) = -\circ/1225 \text{ و } \Re_R(\tilde{A}^*) = -\circ/105 \text{ و } \Re_L(\tilde{A}^*) = -\circ/245$$

مرحله (۳): با استفاده از معادلات (۳۸.۲) و (۳۹.۲) داریم:

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \circ/175(-\circ/3 - \circ/4\lambda) \text{ و } \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = \circ/35(-\circ/3 - \circ/4\lambda)$$

مرحله (۴): برای یک تصمیم گیرنده بدبین با $\lambda = \circ$ داریم:

$\mathcal{R}_T^\circ(\tilde{B}^*) = (-\circ/\circ 525)$ و $\mathcal{R}_T^\circ(\tilde{A}^*) = (-\circ/\circ 105)$ آن گاه $\mathcal{R}_T^\circ(\tilde{B}^*) > \mathcal{R}_T^\circ(\tilde{A}^*)$ و $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ برای یک تصمیم گیرنده خوش بین با $\lambda = 1$ داریم:
 $\mathcal{R}_T^1(\tilde{B}^*) = (\circ/\circ 1225)$ و $\mathcal{R}_T^1(\tilde{A}^*) = (-2/45)$ بنا براین $\mathcal{R}_T^1(\tilde{B}^*) > \mathcal{R}_T^1(\tilde{A}^*)$ و $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ برای یک تصمیم گیرنده معتدل با $\lambda = \circ/5$ داریم:
 $\mathcal{R}_T^{\circ/5}(\tilde{B}^*) = (\circ/\circ 875)$ و $\mathcal{R}_T^{\circ/5}(\tilde{A}^*) = (-\circ/\circ 175)$ آن گاه $\mathcal{R}_T^{\circ/5}(\tilde{B}^*) > \mathcal{R}_T^{\circ/5}(\tilde{A}^*)$ و $\tilde{A} \prec \tilde{B}$

۱۰.۲ اعتبار رویکرد رتبه بندی پیشنهاد شده

در بخش (۷.۲) نشان داده شد که اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ سه مجموعه فازی باشند، با توجه به رویکرد موجود در مراجع [۴۱ و ۳۷]، خاصیت $\tilde{A} \succ \tilde{B} \Rightarrow (\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \succ (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$ همیشه برقرار نیست. در این بخش ثابت می شود که خاصیت $\tilde{A} \succ \tilde{B} \Rightarrow (\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \succ (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$ با استفاده از رویکرد پیشنهاد شده همیشه برقرار است.

فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ دو مجموعه فازی ذوزنقه ای تعمیم یافته باشند و $\tilde{C} = (a_3, b_3, c_3, d_3; w_3)$ یک مجموعه فازی ذوزنقه ای تعمیم یافته باشد به طوریکه $w_3 \leq \min(w_1, w_2)$ در این صورت داریم:

$$(\tilde{A} \oplus \tilde{C})^* = (a_1 + a_3, b_1 + b_3, c_1 + c_3, d_1 + d_3; w_3)$$

و

$$(\tilde{B} \oplus \tilde{C})^* = (a_2 + a_3, b_2 + b_3, c_2 + c_3, d_2 + d_3; w_3)$$

اکنون داریم:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A} \oplus \tilde{C})^* - \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B} \oplus \tilde{C})^* &= \frac{w_3}{\lambda} [\lambda(a_1 + a_3) + (b_1 + b_3) + (1 - \lambda)(c_1 + c_3) + (d_1 + d_3)] - \\ &\frac{w_3}{\lambda} [\lambda(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3) + (1 - \lambda)(c_2 + c_3) + (d_2 + d_3)] = \\ &\frac{w_3}{\lambda} [\lambda(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) + (1 - \lambda)(c_1 - c_2) + (d_1 - d_2)] = \\ &\frac{w_3}{\lambda} [\lambda(a_1 + b_1) + (1 - \lambda)(c_1 + d_1)] - \frac{w_3}{\lambda} [\lambda(a_2 + b_2) + (1 - \lambda)(c_2 + d_2)] = \\ &\frac{w_3}{\min(w_1, w_2)} (\mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*)) \end{aligned}$$

(۴۰.۲)

از (۴۰.۲) به راحتی مشاهده می شود که:

(۱) اگر $\mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*) > 0$ آن گاه $\mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A} \oplus \tilde{C})^* - \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B} \oplus \tilde{C})^* > 0$ یعنی $\tilde{A} \succ \tilde{B}$ بنا براین $(\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \succ (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$.

(۲) اگر $\mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*) < 0$ آن گاه $\mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A} \oplus \tilde{C})^* - \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B} \oplus \tilde{C})^* < 0$ یعنی $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ بنا براین $(\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \prec (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$.

(۳) اگر $\mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*) = 0$ آن گاه $\mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A} \oplus \tilde{C})^* - \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B} \oplus \tilde{C})^* = 0$ یعنی $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ بنا براین $(\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \sim (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$.

۱۱.۲ روش پیشنهادی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی

در این بخش، برای غلبه بر محدودیت های روش موجود، روش جدیدی برای یافتن جواب بهینه مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای ارائه شده است. برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای نرمال نیز می توان از همین روش استفاده کرد.

مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته را می توان به شیوه ی زیر حل نمود:

مرحله (۱): فرض کنید $\tilde{C}_j = (c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; w_j)$ مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته (P_7) را می توان به یک مسئله ی برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته (P_7) تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n (c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; w_j) x_j \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_7) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله (۲): با استفاده از تعریف (۱۰.۲) و بر اساس رویکرد رتبه بندی پیشنهادی، برای پیدا کردن جواب بهینه مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته (P_7) می توان از مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_8) استفاده کرد.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\mathcal{R}_T^\lambda \left(\sum_{j=1}^n (c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; \min(w_1, w_2, \dots, w_n)) x_j \right) \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_8) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله (۳): چون تابع رتبه بندی ارائه شده $\mathcal{R}_T^\lambda$ در خاصیت خطی صدق می کند یعنی :

$$\mathcal{R}_T^\lambda \left(\sum_{j=1}^n ((a_j, b_j, c_j, d_j; w) x_j) \right) = \sum_{j=1}^n \mathcal{R}_T^\lambda ((a_j, b_j, c_j, d_j; w) x_j)$$

بنابراین مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_8) می تواند به مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_9) تبدیل شود.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n \mathcal{R}_T^\lambda ((c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; \min(w_1, w_2, \dots, w_n)) x_j) \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_9) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

با استفاده از $\mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(a, b, c, d, w) = \frac{w}{4}(a + b + c + d)$ مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_9) به مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_{10}) تبدیل می شود.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n \left(\frac{\min(w_1, w_2, \dots, w_n)}{4} (c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}) x_j \right) \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_{10}) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله (۵): از یک روش مناسب مانند روش سیمپلکس، روش M - بزرگ، روش دوفازی یا روش سیمپلکس دوگان و غیره استفاده کنید تا جواب بهینه x_j در مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_{10}) را بیابید.

مرحله (۶): با قرار دادن مقادیر بدست آمده x_j در $\sum_{j=1}^n ((c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; w_j) x_j)$ مقدار بهینه مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای (P_7) را پیدا کنید.

۱.۱۱.۲ مزیت روش پیشنهادی نسبت به روش موجود

از روش موجود در [۱۱] می توان برای حل آن دسته از مسائل برنامه ریزی خطی استفاده کرد که در آن ها پارامترهای $\tilde{C}_j$ توسط مجموعه های فازی نرمال یا مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاع مساوی تعیین می شوند. به هر حال با این روش نمی توان آن دسته از مسائل برنامه ریزی خطی که در آن ها همه یا برخی از پارامترهای $\tilde{C}_j$ توسط مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاع مختلف هستند را حل کرد. در حالی که روش پیشنهادی می تواند برای حل هر دو نوع مسئله ی برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی مورد استفاده قرار گیرد. برای نشان دادن مزیت روش پیشنهادی نسبت به روش موجود در [۱۱] یک مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته در مثال ۱.۱۱.۲ انتخاب شده است.

مثال ۱.۱۱.۲. مسئله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad ((2, 5, 8, 10; \circ/8) x_1 \oplus (5, 10, 15, 30; \circ/6) x_2 \oplus (1, 5, 6, 8; \circ/9) x_3) \\ & \text{s.t.} \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

راه حل: این مسئله برنامه ریزی خطی با استفاده از مراحل زیر از روش پیشنهادی قابل حل است:

مرحله (۱): با استفاده از مرحله ۲ روش پیشنهادی، این مسئله را می توان به صورت زیر نوشت:

۳۰ یک رویکرد جدید رتبه بندی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & (\mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}((2, 5, 8, 1^{\circ}; \circ/8)x_1 \oplus (5, 1^{\circ}, 15, 3^{\circ}; \circ/6)x_2 \oplus (1, 5, 6, 8; \circ/9)x_3)) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله (۲): با استفاده از مرحله ۳ روش پیشنهادی، مسئله برنامه ریزی خطی انتخاب شده را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \text{Minimize} \quad & (\mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}((2, 5, 8, 1^{\circ}; \circ/8)x_1 \oplus \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(5, 1^{\circ}, 15, 3^{\circ}; \circ/6)x_2 \oplus \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(1, 5, 6, 8; \circ/9)x_3)) \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله (۳): با استفاده از تساوی $\mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(a, b, c, d; w) = \frac{w}{4}(a + b + c + d)$ داریم:

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & 5x_1 + 12x_2 + 4x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5 \\ & 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله (۴): با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی بدست آمده در مرحله (۲)، جواب بهینه $x_1 = \frac{9}{5}$ و $x_2 = \frac{1}{5}$ بدست می آید که با قرار دادن مقادیر $x_1 = \frac{9}{5}$ و $x_2 = \frac{1}{5}$ و $x_3 = 0$ در $(2, 5, 8, 1^{\circ}; \circ/8)x_1 \oplus (5, 1^{\circ}, 15, 3^{\circ}; \circ/6)x_2 \oplus (1, 5, 6, 8; \circ/9)x_3$ مقدار بهینه فازی مسئله به صورت $(\frac{58}{5}, 25, \frac{192}{5}, 66; \circ/6)$ بدست می آید.

فصل ۳

مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای p - نرم تعمیم یافته

چن و تنگ [۴۲] مجموعه های فازی p - نرم تعمیم یافته را معرفی کرده اند و نتایجی را برای مقایسه ی این مجموعه ها ارائه داده اند. در این فصل با کمک چندین مثال نقض نشان می دهیم که نتایج موجود فقط برای مجموعه های فازی p - نرم تعمیم یافته با ارتفاع یکسان کاربردی هستند. برای غلبه بر محدودیت های نتایج موجود، بر اساس رویکرد رتبه بندی ارائه شده در فصل ۲، برخی از نتایج جدید برای مقایسه مجموعه های فازی p - نرم تعمیم یافته دارای ارتفاع متفاوت ارائه شده است [۹۶]. نشان می دهیم که نتایج موجود در [۴۲] موارد خاص نتیجه پیشنهادی هستند. همچنین روش حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته که در فصل ۲ ارائه شد، برای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی دوزنقه ای ۲ - نرم تعمیم یافته نیز قابل استفاده است.

۱.۳ مقدمات

در این بخش برخی تعاریف اساسی و عملیات حسابی ارائه شده است.

۱.۱.۳ تعاریف اساسی

تعریف ۱.۱.۳. یک مجموعه فازی تعمیم یافته بر روی مجموعه جامع اعداد حقیقی (R) را یک مجموعه ی فازی مثلثی p -نرم تعمیم یافته گویند و با $\tilde{A} = (a, b, c; w)_p$ نشان می دهند اگر تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} w(1 - (\frac{x-b}{a-b})^p)^{\frac{1}{p}} & a \leq x < b \\ w & x = b \\ w(1 - (\frac{x-b}{c-b})^p)^{\frac{1}{p}} & b < x \leq c \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

که در آن p یک عدد صحیح مثبت است.

تعریف ۲.۱.۳. یک مجموعه فازی تعمیم یافته بر روی مجموعه جامع اعداد حقیقی R را یک مجموعه ی فازی دوزنقه ای p -نرم تعمیم یافته گویند و با $\tilde{A} = (a, b, c, d; w)_p$ نشان می دهند اگر تابع عضویت آن به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} w(1 - (\frac{x-b}{a-b})^p)^{\frac{1}{p}} & a \leq x < b \\ w & b \leq x \leq c \\ w(1 - (\frac{x-c}{d-c})^p)^{\frac{1}{p}} & c < x \leq d \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

که در آن p یک عدد صحیح مثبت است.

تعریف ۳.۱.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3; w)_p$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4; w)_p$ به ترتیب مجموعه های فازی مثلثی p -نرم تعمیم یافته و مجموعه فازی دوزنقه ای p -نرم تعمیم یافته باشند. α -برش های A^α و B^α برای این مجموعه های فازی تعمیم یافته به شرح زیر بدست می آید:

$$A^\alpha = [a_2 + (a_1 - a_2)(1 - (\frac{\alpha}{w})^p)^{\frac{1}{p}}, a_2 + (a_3 - a_2)(1 - (\frac{\alpha}{w})^p)^{\frac{1}{p}}]$$

$$B^\alpha = [b_2 + (b_1 - b_2)(1 - (\frac{\alpha}{w})^p)^{\frac{1}{p}}, b_3 + (b_4 - b_3)(1 - (\frac{\alpha}{w})^p)^{\frac{1}{p}}]$$

۲.۱.۳ عملیات حسابی

در این بخش، برخی از عملیات حسابی بین دو مجموعه فازی مثلثی p -نرم تعمیم یافته و بین دو مجموعه فازی دوزنقه ای p -نرم تعمیم یافته که بر روی مجموعه جامع اعداد حقیقی تعریف شده اند، ارائه شده است.

عملیات حسابی بین مجموعه های فازی p -نرم مثلثی تعمیم یافته: فرض کنید $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1; w_1)_p$ و $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2; w_2)_p$ دو مجموعه ی فازی مثلثی p -نرم تعمیم یافته باشند، در این صورت:

$$\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2; \min(w_1, w_2))_p \quad (1)$$

$$\tilde{A}_1 \ominus \tilde{A}_2 = (a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2; \min(w_1, w_2))_p \quad (2)$$

$$\gamma \tilde{A}_1 = \begin{cases} (\gamma a_1, \gamma b_1, \gamma c_1; w_1)_p, \gamma \geq 0 \\ (\gamma c_1, \gamma b_1, \gamma a_1; w_1)_p, \gamma \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

عملیات حسابی بین مجموعه های فازی p -نرم دوزنقه ای تعمیم یافته: فرض کنید $\tilde{A}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)_p$ و $\tilde{A}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)_p$ دو مجموعه ی فازی دوزنقه ای p -نرم تعمیم یافته باشند، در این صورت:

$$\tilde{A}_1 \oplus \tilde{A}_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2; \min(w_1, w_2))_p \quad (1)$$

$$\tilde{A}_1 \ominus \tilde{A}_2 = (a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2; \min(w_1, w_2))_p \quad (2)$$

$$\gamma \tilde{A}_1 = \begin{cases} (\gamma a_1, \gamma b_1, \gamma c_1, \gamma d_1; w_1)_p, \gamma \geq 0 \\ (\gamma d_1, \gamma c_1, \gamma b_1, \gamma a_1; w_1)_p, \gamma \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

توجه برای $p = 1$ ، مجموعه های فازی دوزنقه ای p -نرم تعمیم یافته و مثلثی p -نرم تعمیم یافته به ترتیب به مجموعه های فازی دوزنقه ای و مثلثی تعمیم یافته تبدیل می شوند. برای $p = 1$ و $w = 1$ مجموعه های فازی دوزنقه ای و مثلثی p -نرم تعمیم یافته به ترتیب به مجموعه های فازی دوزنقه ای و مثلثی نرمال تبدیل می شوند.

توجه برای $p = 1$ ، عملیات حسابی میان مجموعه های فازی p -نرم تعمیم یافته به عملیات حسابی بین مجموعه های فازی تعمیم یافته تبدیل می شوند. برای $p = 1$ و $w = 1$ ، عملیات حسابی میان مجموعه های فازی p -نرم تعمیم یافته به عملیات حسابی بین مجموعه های فازی نرمال تبدیل می شوند.

۲.۳ محدودیت های نتایج رتبه بندی موجود

چن و تنگ [۴۲] نتایج زیر را برای مقایسه مجموعه های فازی p -نرم تعمیم یافته با ارتفاع برابر ارائه دادند.

گزاره ۱.۲.۳. اگر $\tilde{A} = (a, b, c, d; w)$ و $\tilde{B} = (a, e, d; w)$ به ترتیب دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و مثلثی تعمیم یافته باشند و $-\infty < a \leq b \leq e \leq c \leq d < \infty$ آن گاه:

$$I_L(\tilde{B}) \geq I_L(\tilde{A}) \quad (1)$$

$$I_R(\tilde{A}) \geq I_R(\tilde{B}) \quad (۲)$$

$$I_T^\lambda(\tilde{A}) > I_T^\lambda(\tilde{B}) \text{ اگر } e < c\lambda + (1 - \lambda)b \text{ آن گاه} \quad (۳)$$

$$I_T^\lambda(\tilde{A}) = I_T^\lambda(\tilde{B}) \text{ اگر } e = c\lambda + (1 - \lambda)b \text{ آن گاه} \quad (۴)$$

$$I_T^\lambda(\tilde{A}) < I_T^\lambda(\tilde{B}) \text{ اگر } e > c\lambda + (1 - \lambda)b \text{ آن گاه} \quad (۵)$$

که در آن $I_R(\tilde{B}) = \frac{w}{\gamma}(e + d)$ و $I_R(\tilde{A}) = \frac{w}{\gamma}(c + d)$ و $I_L(\tilde{B}) = \frac{w}{\gamma}(a + e)$ و $I_L(\tilde{A}) = \frac{w}{\gamma}(a + b)$ و $I_T^\lambda(\tilde{B}) = \frac{w}{\gamma}(\lambda d + e + (1 - \lambda)a)$ و $I_T^\lambda(\tilde{A}) = \frac{w}{\gamma}(\lambda(c + d) + (1 - \lambda)(a + b))$

نتایج فوق فقط در صورتی معتبر است که $\tilde{B}$ و $\tilde{A}$ هر دو مجموعه های فازی نرمال یا مجموعه های فازی تعمیم یافته با ارتفاع برابر باشند.

اما نتایج گزاره ۱.۲.۳ در صورتی که $\tilde{B}$ و $\tilde{A}$ دارای ارتفاع متفاوت باشند نا معتبر است. اگر $\tilde{B} = (a, e, d; w_1)$ و $\tilde{A} = (a, b, c, d; w_1)$ به ترتیب دو مجموعه فازی دوزنقه ای و مثلثی تعمیم یافته باشند و $-\infty < a \leq b \leq e \leq c \leq d < \infty$ آن گاه بنا به رویکرد موجود در [۴۲]، مقادیر $I_R(\tilde{B})$ ، $I_L(\tilde{A})$ ، $I_L(\tilde{A})$ ، $I_R(\tilde{A})$ و غیره به شرح زیر خواهد بود:

$$I_L(\tilde{A}) = \frac{w_1}{\gamma}(a + b) \quad (۱.۳)$$

$$I_L(\tilde{B}) = \frac{w_1}{\gamma}(a + e) \quad (۲.۳)$$

$$I_R(\tilde{A}) = \frac{w_1}{\gamma}(c + d) \quad (۳.۳)$$

$$I_R(\tilde{B}) = \frac{w_1}{\gamma}(e + d) \quad (۴.۳)$$

$$I_T^\lambda(\tilde{A}) = \frac{w_1}{\gamma}(\lambda(c + d) + (1 - \lambda)(a + b)) \quad (۵.۳)$$

$$I_T^\lambda(\tilde{B}) = \frac{w_1}{\gamma}(\lambda d + e + (1 - \lambda)a) \quad (۶.۳)$$

برای نشان دادن محدودیت های نتایج موجود که در گزاره قبل ارائه شد، مثال های نقض زیر انتخاب شده است.

مثال ۱.۲.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (۵, ۷, ۹, ۱۰; ۰/۴)$ و $\tilde{B} = (۵, ۸, ۱۰; ۰/۲)$ به ترتیب دو مجموعه فازی دوزنقه ای و مثلثی تعمیم یافته باشند. با استفاده از معادلات (۱.۳) و (۲.۳) به آسانی داریم $I_L(\tilde{A}) > I_L(\tilde{B})$ که با نتیجه موجود $I_L(\tilde{A}) < I_L(\tilde{B})$ تناقض دارد.

مثال ۲.۲.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (۵, ۷, ۹, ۱۰; ۰/۲)$ و $\tilde{B} = (۵, ۸, ۱۰; ۰/۸)$ به ترتیب دو مجموعه فازی دوزنقه ای و مثلثی تعمیم یافته باشند. با استفاده از معادلات (۳.۳) و (۴.۳) به آسانی بدست می آید $I_R(\tilde{A}) < I_R(\tilde{B})$ که با نتیجه موجود $I_R(\tilde{A}) > I_R(\tilde{B})$ تناقض دارد.

مثال ۳.۲.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (۰, ۱, ۴, ۵; ۰/۱)$ و $\tilde{B} = (۰, ۳, ۵; ۰/۸)$ به ترتیب دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و مثلثی تعمیم یافته باشند. برای $\lambda = ۰/۹$ داریم $e < c\lambda + (1 - \lambda)b$ اما با استفاده از معادلات (۵.۳) و (۶.۳) داریم $I_T^\lambda(\tilde{A}) < I_T^\lambda(\tilde{B})$ که با نتیجه $I_T^\lambda(\tilde{A}) > I_T^\lambda(\tilde{B})$ تناقض دارد.

مثال ۴.۲.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (۰, ۱, ۴, ۵; ۰/۱)$ و $\tilde{B} = (۰, ۳, ۵; ۰/۲)$ به ترتیب دو مجموعه ی فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و مثلثی تعمیم یافته باشند. برای $\lambda = \frac{2}{3}$ داریم $e = c\lambda + (1 - \lambda)b$

و با استفاده از معادلات (۵.۳) و (۶.۳) داریم $I_T^{\check{v}}(\tilde{A}) \neq I_T^{\check{v}}(\tilde{B})$ که با نتیجه $I_T^{\check{v}}(\tilde{A}) = I_T^{\check{v}}(\tilde{B})$ تناقض دارد.

مثال ۵.۲.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (\circ, ۱, ۴, ۵; \circ/۹)$ و $\tilde{B} = (\circ, ۳, ۵; \circ/۱)$ به ترتیب دو مجموعه ی فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و مثلثی تعمیم یافته باشند. برای $\lambda = \circ/۳$ داریم $e > c\lambda + (1-\lambda)b$ و با استفاده از معادلات (۵.۳) و (۶.۳) داریم $I_T^{\circ\lambda}(\tilde{A}) < I_T^{\circ\lambda}(\tilde{B})$ که با رابطه $I_T^{\circ\lambda}(\tilde{A}) > I_T^{\circ\lambda}(\tilde{B})$ تناقض دارد.

گزاره ۲.۲.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (a, b, c; w)$ و $\tilde{C}_{\check{v}} = (a, b, c; w)_{\check{v}}$ به ترتیب دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و دوزنقه ای ۲-نرم تعمیم یافته با ارتفاع برابر باشند، آن گاه بنابر رویکرد موجود در [۴۲] داریم:

$$I_L(\tilde{A}) \geq I_L(\tilde{C}_{\check{v}}) \quad (۱)$$

$$I_R(\tilde{A}) \leq I_R(\tilde{C}_{\check{v}}) \quad (۲)$$

$$I_T^{\lambda}(\tilde{A}) < I_T^{\lambda}(\tilde{C}_{\check{v}}) \text{ آن گاه } \lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b) > \circ \quad (۳)$$

$$I_T^{\lambda}(\tilde{A}) = I_T^{\lambda}(\tilde{C}_{\check{v}}) \text{ آن گاه } \lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b) = \circ \quad (۴)$$

$$I_T^{\lambda}(\tilde{A}) > I_T^{\lambda}(\tilde{C}_{\check{v}}) \text{ آن گاه } \lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b) < \circ \quad (۵)$$

که در آن

$$I_L^{\lambda}(\tilde{A}) = \frac{w}{\check{v}}(\lambda(c+d) + (1-\lambda)(a+b)) \text{ و } I_R(\tilde{A}) = \frac{w}{\check{v}}(c+d) \text{ و } I_L(\tilde{A}) = \frac{w}{\check{v}}(a+b)$$

$$\text{ و } I_R(\tilde{C}_{\check{v}}) = cw + (\frac{d-c}{\check{v}})\pi w \text{ و } I_L(\tilde{C}_{\check{v}}) = bw + (\frac{a-b}{\check{v}})\pi w$$

$$.I_T^{\lambda}(\tilde{C}_{\check{v}}) = w\{\frac{\pi}{\check{v}}[\lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b)] + \lambda c + (1-\lambda)b\}$$

نتایج فوق تنها در صورتی معتبر هستند که هر دو مجموعه $\tilde{A}$ و $\tilde{C}_{\check{v}}$ دو مجموعه فازی نرمال یا دو مجموعه فازی تعمیم یافته با ارتفاع برابر باشند.

فرض کنید $\tilde{A} = (a, b, c, d; w_۱)$ و $\tilde{C}_{\check{v}} = (a, b, c; w_۲)$ ، به ترتیب دو مجموعه ی فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و دوزنقه ای ۲-نرم تعمیم یافته باشند. بنابر رویکرد موجود در [۴۲]، مقادیر $I_L(\tilde{A})$ و $I_L(\tilde{C}_{\check{v}})$ و $I_R(\tilde{A})$ و $I_R(\tilde{C}_{\check{v}})$ و غیره به صورت زیر خواهد بود:

$$I_L(\tilde{A}) = \frac{w_۱}{\check{v}}(a+b) \quad (۷.۳)$$

$$I_R(\tilde{A}) = \frac{w_۱}{\check{v}}(c+d) \quad (۸.۳)$$

$$I_T^{\lambda}(\tilde{A}) = \frac{w_۱}{\check{v}}(\lambda(c+d) + (1-\lambda)(a+b)) \quad (۹.۳)$$

$$I_L(\tilde{C}_{\check{v}}) = bw_۲ + (\frac{a-b}{\check{v}})\pi w_۲ \quad (۱۰.۳)$$

$$I_R(\tilde{C}_{\check{v}}) = cw_۲ + (\frac{d-c}{\check{v}})\pi w_۲ \quad (۱۱.۳)$$

$$I_T^{\lambda}(\tilde{C}_{\check{v}}) = w_۲\{\frac{\pi}{\check{v}}[\lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b)] + \lambda c + (1-\lambda)b\} \quad (۱۲.۳)$$

برای نشان دادن محدودیت های نتایج پیشنهاد شده در گزاره فوق مثال های نقض زیر انتخاب شده اند:

مثال ۶.۲.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (\circ, ۵, ۷, ۸, ۹; \circ/۴)$ و $\tilde{C}_{\check{v}} = (\circ, ۵, ۷, ۸, ۹; \circ/۶)$ به ترتیب دو مجموعه

فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و دوزنقه ای ۲-نرم تعمیم یافته باشند. با استفاده از معادلات (۷.۳) و (۱۰.۳) داریم $I_L(\tilde{A}) < I_L(\tilde{C}_2)$ که با نتیجه موجود $I_L(\tilde{A}) > I_L(\tilde{C}_2)$ تناقض دارد.

مثال ۷.۲.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (5, 7, 8, 9; \circ/4)$ و $\tilde{C}_2 = (5, 7, 8, 9; \circ/1)$ به ترتیب دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و دوزنقه ای ۲-نرم تعمیم یافته باشند. با استفاده از معادلات (۸.۳) و (۱۱.۳) داریم $I_R(\tilde{A}) > I_R(\tilde{C}_2)$ که با نتیجه موجود $I_R(\tilde{A}) < I_R(\tilde{C}_2)$ تناقض دارد.

مثال ۸.۲.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (5, 7, 8, 9; \circ/4)$ و $\tilde{C}_2 = (5, 7, 8, 9; \circ/1)$ به ترتیب دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و دوزنقه ای ۲-نرم تعمیم یافته باشند. برای $\frac{1}{4} > \lambda$ داریم $\lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b) > \circ$ و با استفاده از معادلات (۹.۳) و (۱۲.۳) داریم $I_T^{\frac{1}{4}}(\tilde{A}) > I_T^{\frac{1}{4}}(\tilde{C}_2)$ که با نتیجه موجود $I_T^{\frac{1}{4}}(\tilde{A}) < I_T^{\frac{1}{4}}(\tilde{C}_2)$ تناقض دارد.

مثال ۹.۲.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (1, 1, 1, 1; \circ/4)$ و $\tilde{C}_2 = (1, 1, 1, 1; \circ/1)$ به ترتیب دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و دوزنقه ای ۲-نرم تعمیم یافته باشند. برای $\frac{1}{4} = \lambda$ داریم $\lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b) = \circ$ و با استفاده از معادلات (۹.۳) و (۱۲.۳) داریم $I_T^{\frac{1}{4}}(\tilde{A}) > I_T^{\frac{1}{4}}(\tilde{C}_2)$ که با نتیجه موجود $I_T^{\frac{1}{4}}(\tilde{A}) < I_T^{\frac{1}{4}}(\tilde{C}_2)$ تناقض دارد.

مثال ۱۰.۲.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (5, 7, 8, 9; \circ/1)$ و $\tilde{C}_2 = (5, 7, 8, 9; \circ/4)$ به ترتیب دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و دوزنقه ای ۲-نرم تعمیم یافته باشند. برای $\frac{1}{4} < \lambda$ داریم $\lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b) < \circ$ و با استفاده از معادلات (۹.۳) و (۱۲.۳) داریم $I_T^{\frac{1}{4}}(\tilde{A}) < I_T^{\frac{1}{4}}(\tilde{C}_2)$ که با نتیجه موجود $I_T^{\frac{1}{4}}(\tilde{A}) > I_T^{\frac{1}{4}}(\tilde{C}_2)$ تناقض دارد.

۳.۳ تعمیم نتایج موجود

در بخش ۲.۳ با استفاده از مثال های نقض به کاستی های نتایج موجود اشاره کردیم. در این بخش، بر اساس رویکرد رتبه بندی پیشنهاد شده در فصل ۲، نتایج جدید در گزاره ۱.۳.۳ و گزاره ۲.۳.۳ ارائه شده است که به ترتیب تعمیم یافته ی نتایج گزاره ۱.۲.۳ و گزاره ۲.۲.۳ که در بخش ۲.۳ آمده اند، می باشد.

در گزاره های پیشنهادی فرض بر این است که ارتفاع مجموعه های فازی متفاوت هستند. نتایج بدست آمده توسط چن و تنگ [۴۲]، موارد خاصی از نتایج پیشنهادی هستند و می توان آن ها را با فرض اینکه ارتفاع کلیه مجموعه های فازی برابر باشد، بدست آورد.

گزاره ۱.۳.۳. اگر $\tilde{A} = (a, b, c, d; w_1)$ و $\tilde{B} = (a, e, d; w_2)$ به ترتیب دو مجموعه ی فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و مثلثی تعمیم یافته باشند و $-\infty < a \leq b \leq e \leq c \leq d < \infty$ ، آن گاه:

$$\Re_L(\tilde{B}^*) \geq \Re_L(\tilde{A}^*) \quad (1)$$

$$\Re_R(\tilde{A}^*) \geq \Re_R(\tilde{B}^*) \quad (2)$$

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) > \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) \text{ اگر } e < c\lambda + (1-\lambda)b \text{ آن گاه} \quad (3)$$

$$(۴) \quad \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*) \text{ اگر } e = c\lambda + (1 - \lambda)b \text{ گاه}$$

$$(۵) \quad \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) < \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*) \text{ اگر } e > c\lambda + (1 - \lambda)b \text{ گاه}$$

که در آن $\tilde{B}^* = (a, e, d; w)$ و $\tilde{A}^* = (a, b, c, d; w)$ و $w = \min(w_1, w_2)$.

اثبات: نتایج پیشنهادی را می توان به شرح زیر اثبات کرد:

(۱). با استفاده از معادله (۳۸.۲) داریم: $\mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) = \frac{w}{\lambda}(a + b)$ و $\mathfrak{R}_L(\tilde{B}^*) = \frac{w}{\lambda}(a + e)$ اکنون داریم:

$$(۱۳.۳) \quad \mathfrak{R}_L(\tilde{B}^*) - \mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) = \frac{w}{\lambda}(e - b)$$

اگر $b \leq e \leq c$ ، از معادله (۱۳.۳) داریم:

اگر $\mathfrak{R}_L(\tilde{B}^*) - \mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) \geq 0$ آن گاه $\mathfrak{R}_L(\tilde{B}^*) \geq \mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*)$.

(۲). با استفاده از معادله (۲۹.۲) داریم: $\mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) = \frac{w}{\lambda}(c + d)$ و $\mathfrak{R}_R(\tilde{B}^*) = \frac{w}{\lambda}(e + d)$ اکنون داریم:

$$(۱۴.۳) \quad \mathfrak{R}_R(\tilde{B}^*) - \mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) = \frac{w}{\lambda}(e - c)$$

اگر $e \leq c \leq d$ ، از معادله (۱۴.۳) داریم:

اگر $\mathfrak{R}_R(\tilde{B}^*) - \mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) \leq 0$ آن گاه $\mathfrak{R}_R(\tilde{B}^*) \leq \mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*)$.

(۳). با استفاده از معادله (۳۲.۲) داریم:

$$\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \lambda \mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) + (1 - \lambda) \mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) = \frac{w}{\lambda}(\lambda(c + d) + (1 - \lambda)(a + b))$$

واز معادله (۳۳.۲) داریم:

$$\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*) = \lambda \mathfrak{R}_L(\tilde{B}^*) + (1 - \lambda) \mathfrak{R}_R(\tilde{B}^*) = \frac{w}{\lambda}(\lambda(d + e) + (1 - \lambda)a)$$

آن گاه داریم:

$$(۱۵.۳) \quad \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*) = \frac{w}{\lambda}(c\lambda - e + (1 - \lambda)b)$$

اگر $e < c\lambda + (1 - \lambda)b$ از معادله (۱۵.۳) داریم:

اگر $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*) > 0$ آن گاه $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) > \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*)$.

(۴). اگر $e > c\lambda + (1 - \lambda)b$ از معادله (۱۵.۳) داریم:

اگر $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*) < 0$ آن گاه $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) < \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*)$.

(۵). اگر $e = c\lambda + (1 - \lambda)b$ از معادله (۱۵.۳) داریم:

اگر $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*) = 0$ آن گاه $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*)$.

گزاره ۲.۳.۳. اگر $\tilde{A} = (a, b, c, d; w_1)$ و $\tilde{C} = (a, e, d; w_2)$ به ترتیب دو مجموعه ی فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و دوزنقه ای ۲- نرم تعمیم یافته باشند آن گاه:

$$(۱) \quad \mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) \geq \mathfrak{R}_L(\tilde{C}^*)$$

$$(۲) \quad \mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) \leq \mathfrak{R}_R(\tilde{C}^*)$$

$$(۳) \quad \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) < \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) \text{ آن گاه } \lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b) > 0$$

$$(۴) \quad \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) \text{ آن گاه } \lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b) = 0$$

$$(۵) \quad \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) > \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) \text{ آن گاه } \lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b) < 0$$

که در آن $\tilde{A}^* = (a, b, c, d; w)$ و $\tilde{C}_p^* = (a, e, d; w)$ و $w = \min(w_1, w_2)$

اثبات: نتایج پیشنهادی را می توان به شرح زیر اثبات کرد:

(۱). با استفاده از معادله (۲۸.۲) داریم:

$$\mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) = \frac{w}{4}(a+b) \text{ و } \mathfrak{R}_L(\tilde{C}_p^*) = \int_0^w (b + (a-b)(1 - (\frac{\alpha}{w})^2)^{\frac{1}{2}}) d\alpha = bw + \frac{(a-b)}{4}w\pi$$

اکنون داریم:

$$\mathfrak{R}_L(\tilde{C}_p^*) - \mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) = \frac{(\pi-2)}{4}(a-b)w \quad (۱۶.۳)$$

چون $a \leq b$ ، با استفاده از معادله (۱۶.۳) داریم:

$$\mathfrak{R}_L(\tilde{C}_p^*) \leq \mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) \text{ آن گاه } \mathfrak{R}_L(\tilde{C}_p^*) - \mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) \leq 0$$

(۲). با استفاده از معادله (۲۹.۲) داریم:

$$\mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) = \frac{w}{4}(c+d) \text{ و } \mathfrak{R}_R(\tilde{C}_p^*) = \int_0^w (c + (d-c)(1 - (\frac{\alpha}{w})^2)^{\frac{1}{2}}) dx = cw + \frac{(a-b)}{4}w\pi$$

اکنون داریم:

$$\mathfrak{R}_R(\tilde{C}_p^*) - \mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) = \frac{(\pi-2)}{4}(d-c)w \quad (۱۷.۳)$$

چون $d \geq c$ ، با استفاده از معادله (۱۷.۳) داریم:

$$\mathfrak{R}_R(\tilde{C}_p^*) \geq \mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) \text{ آن گاه } \mathfrak{R}_R(\tilde{C}_p^*) - \mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) \geq 0$$

(۳). با استفاده از معادله (۳۲.۲) داریم:

$$\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) = (1-\lambda)\mathfrak{R}_L(\tilde{C}_p^*) + \lambda\mathfrak{R}_R(\tilde{C}_p^*) = w\{\frac{\pi}{4}[\lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b)] + \lambda c + (1-\lambda)b\}$$

$$\text{و } \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \frac{w}{4}(\lambda(c+d) + (1-\lambda)(a+b)) \text{ اکنون داریم:}$$

$$\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) - \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \frac{(\pi-2)}{4}w(\lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b)) \quad (۱۸.۳)$$

چون $\lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b) > 0$ با استفاده از معادله (۱۸.۳) داریم:

$$\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) > \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) \text{ آن گاه } \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) - \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) > 0$$

(۴). اگر $\lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b) < 0$ با استفاده از معادله (۱۸.۳) داریم:

$$\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) < \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) \text{ آن گاه } \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) - \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) < 0$$

چون $\lambda(d-c) + (1-\lambda)(a-b) = 0$ با استفاده از معادله (۱۸.۳) داریم:

$$\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) = \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) \text{ آن گاه } \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) - \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) = 0$$

حالت های خاص

نتایج موجود، که در گزاره ۱.۲.۳ و گزاره ۲.۲.۳ ارائه شده است با استفاده از فرضیات زیر به راحتی از نتایجی که در گزاره ۱.۳.۳ و ۲.۳.۳ معرفی شده اند، بدست می آیند.

با فرض $w_1 = w_2 = w$ نتایجی که در گزاره ۱.۳.۳ و گزاره ۲.۳.۳ هستند، به نتایج موجود که به ترتیب در گزاره ۱.۲.۳ و ۲.۲.۳ ارائه شده اند تبدیل می شوند.

۴.۳ محدودیت های نتایج پیشنهادی

در بخش ۲.۳ محدودیت های نتایج موجود در [۴۲] ذکر شده و برای غلبه بر این محدودیت ها نتایج جدید در بخش ۳.۳ ارائه شده است. اما نتایج ارائه شده در بخش ۳.۳، فقط برای نوع خاصی از مجموعه های فازی تعمیم یافته معتبر است. به عنوان مثال نتایجی که در گزاره ۱.۳.۳ ارائه شده، فقط برای مجموعه های فازی تعمیم یافته $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, e_2, d_2; w_2)$ معتبر است که در آن ها روابط $a_1 = a_2$ و $d_1 = d_2$ و

$-\infty < a_1 = a_2 \leq b_1 \leq e_2 \leq c_1 \leq d_1 = d_2 < \infty$ معتبر است. همچنین نتایجی که در گزاره ۲.۳.۳ ارائه شده، فقط برای مجموعه های فازی تعمیم یافته $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{C}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ معتبر است که در آن ها $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$ و $c_1 = c_2$ و $d_1 = d_2$ باشند. اما نتایج پیشنهادی در گزاره ۲.۳.۳، نمی تواند برای مجموعه های فازی تعمیم یافته ای که در آن ها این شرایط صادق نیست قابل استفاده باشد.

برای نشان دادن محدودیت های نتایج پیشنهادی که در گزاره های ۱.۳.۳ و ۲.۳.۳ ارائه شده است، مثال های نقض زیر انتخاب شده اند.

مثال ۱.۴.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (\circ/2, \circ/4, \circ/6, \circ/8; \circ/35)$ و $\tilde{B} = (\circ/1, \circ/2, \circ/3; \circ/7)$ به ترتیب دو مجموعه ی فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و مثلثی تعمیم یافته باشند. با استفاده از معادله های (۱.۳) و (۲.۳) داریم $\Re_L(\tilde{B}^*) < \Re_L(\tilde{A}^*)$ که با $\Re_L(\tilde{B}^*) > \Re_L(\tilde{A}^*)$ تناقض دارد.

مثال ۲.۴.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (\circ/1, \circ/2, \circ/2, \circ/5; 1)$ و $\tilde{B} = (\circ/1, \circ/3, \circ/5; 1)$ به ترتیب دو مجموعه ی فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و مثلثی تعمیم یافته باشند. با استفاده از معادله های (۳.۳) و (۴.۳) داریم $\Re_R(\tilde{B}^*) > \Re_R(\tilde{A}^*)$ که با $\Re_R(\tilde{B}^*) < \Re_R(\tilde{A}^*)$ تناقض دارد.

مثال ۳.۴.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (5, 7, 8, 9; \circ/4)$ و $\tilde{C}_2 = (6, 7, 8, 12; \circ/6)$ به ترتیب دو مجموعه ی فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و دوزنقه ای ۲-نرم تعمیم یافته باشند. با استفاده از معادله های (۷.۳) و (۱۰.۳) داریم $\Re_L(\tilde{A}^*) < \Re_L(\tilde{C}_2^*)$ که با $\Re_L(\tilde{A}^*) > \Re_L(\tilde{C}_2^*)$ تناقض دارد.

مثال ۴.۴.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (6, 7, 10, 12; \circ/4)$ و $\tilde{C}_2 = (5, 7, 8, 9; \circ/1)$ به ترتیب دو مجموعه ی فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و دوزنقه ای ۲-نرم تعمیم یافته باشند. با استفاده از معادله های (۸.۳) و (۱۱.۳) داریم $\Re_R(\tilde{A}^*) > \Re_R(\tilde{C}_2^*)$ که با $\Re_R(\tilde{A}^*) < \Re_R(\tilde{C}_2^*)$ تناقض دارد.

۵.۳ تعمیم نتایج پیشنهادی

در این بخش نتایج جدید در گزاره های ۱.۵.۳ و ۲.۵.۳ ارائه شده است که به ترتیب تعمیم نتایج گزاره های ۱.۳.۳ و ۲.۳.۳ هستند.

گزاره ۱.۵.۳. فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, e_2, d_2; w_2)$ به ترتیب دو مجموعه ی فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و مثلثی تعمیم یافته باشند. آن گاه:

$$(۱) \text{ اگر } (a_2 + e_2) \geq (a_1 + b_1) \text{ آن گاه } \Re_L(\tilde{B}^*) \geq \Re_L(\tilde{A}^*)$$

$$(۲) \text{ اگر } (c_1 + d_1) \geq (e_2 + d_2) \text{ آن گاه } \Re_R(\tilde{A}^*) \geq \Re_R(\tilde{B}^*)$$

$$(۳) \text{ اگر } \lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1) > (1 - \lambda)a_2 + e_2 + \lambda d_2 \text{ آن گاه } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) > \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$$

$$(۴) \text{ اگر } \lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1) < (1 - \lambda)a_2 + e_2 + \lambda d_2 \text{ آن گاه } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) < \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$$

$$(۵) \text{ اگر } \lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1) = (1 - \lambda)a_2 + e_2 + \lambda d_2 \text{ آن گاه } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$$

که در آن $(\tilde{A}^*) = (a_1, b_1, c_1, d_1; w)$ و $(\tilde{B}^*) = (a_2, e_2, d_2; w_2)$ و $w = \min(w_1, w_2)$.

اثبات: نتایج پیشنهادی را می توان به شرح زیر اثبات کرد:

$$(۱). \text{ با استفاده از معادله (۲۸.۲) داریم: } \Re_L(\tilde{A}^*) = \frac{w}{\varphi}(a_1 + b_1) \text{ و } \Re_L(\tilde{B}^*) = \frac{w}{\varphi}(a_2 + e_2) \text{ اکنون داریم:}$$

$$\Re_L(\tilde{B}^*) - \Re_L(\tilde{A}^*) = \frac{w}{\varphi}(a_2 + e_2 - a_1 - b_1) \quad (۱۹.۳)$$

چون $(a_2 + e_2) \geq (a_1 + b_1)$ ، با استفاده از معادله (۱۹.۳) داریم:

$$\Re_L(\tilde{B}^*) - \Re_L(\tilde{A}^*) \geq 0 \text{ آن گاه } \Re_L(\tilde{B}^*) \geq \Re_L(\tilde{A}^*)$$

$$(۲). \text{ با استفاده از معادله (۲۹.۲) داریم: } \Re_L(\tilde{A}^*) = \frac{w}{\varphi}(c_1 + d_1) \text{ و } \Re_L(\tilde{B}^*) = \frac{w}{\varphi}(e_2 + d_2) \text{ اکنون داریم:}$$

$$\Re_R(\tilde{A}^*) - \Re_R(\tilde{B}^*) = \frac{w}{\varphi}(c_1 + d_1 - e_2 - d_2) \quad (۲۰.۳)$$

چون $(c_1 + d_1) \geq (e_2 + d_2)$ با استفاده از معادله (۲۰.۳) داریم:

$$\Re_R(\tilde{A}^*) - \Re_R(\tilde{B}^*) \geq 0 \text{ آن گاه } \Re_R(\tilde{A}^*) \geq \Re_R(\tilde{B}^*)$$

$$(۳). \text{ با استفاده از معادله (۳۲.۲) داریم: } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \frac{w}{\varphi}(\lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1))$$

$$\text{و } \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = \frac{w}{\varphi}(\lambda d_2 + e_2 + (1 - \lambda)a_2) \text{ اکنون داریم:}$$

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = \frac{w}{\varphi}(\lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1) - \lambda d_2 - e_2 - (1 - \lambda)a_2) \quad (۲۱.۳)$$

درحالی که $\lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1) \geq (1 - \lambda)a_2 + e_2 + \lambda d_2$

بنابراین با استفاده از معادله (۲۱.۳) داریم:

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) \geq 0 \text{ آن گاه } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) \geq \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$$

$$(۴). \text{ چون } \lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1) \leq (1 - \lambda)a_2 + e_2 + \lambda d_2$$

بنابراین با استفاده از معادله (۲۱.۳) داریم:

اگر $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) \leq \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*) \leq 0$.

$$(۵) \quad \lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1) = (1 - \lambda)a_2 + e_2 + \lambda d_2$$

بنابراین با استفاده از معادله (۲۱.۳) داریم:

اگر $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{B}^*) = 0$.

گزاره ۲.۵.۳. اگر $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{C}_2^* = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ به ترتیب دو مجموعه ی فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و دوزنقه ای ۲-نرم تعمیم یافته باشند آن گاه:

$$(۱) \quad \text{اگر } (a_1 + b_1) \geq \frac{1}{\pi}(\pi a_2 + (4 - \pi)b_2) \text{ آن گاه } \mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) \geq \mathfrak{R}_L(\tilde{C}_2^*)$$

$$(۲) \quad \text{اگر } (c_1 + d_1) \leq \frac{1}{\pi}(\pi d_2 + (4 - \pi)c_2) \text{ آن گاه } \mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) \leq \mathfrak{R}_L(\tilde{C}_2^*)$$

(۳) اگر

$$\frac{1}{\pi}(\lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1)) < \frac{\pi}{\pi}(\lambda(d_2 - c_2) + (1 - \lambda)(a_2 - b_2)) + \lambda c_2 + (1 - \lambda)b_2$$

آن گاه $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}) < \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_2)$

(۴) اگر

$$\frac{1}{\pi}(\lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1)) > \frac{\pi}{\pi}(\lambda(d_2 - c_2) + (1 - \lambda)(a_2 - b_2)) + \lambda c_2 + (1 - \lambda)b_2$$

آن گاه $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}) > \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_2)$

(۵) اگر

$$\frac{1}{\pi}(\lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1)) = \frac{\pi}{\pi}(\lambda(d_2 - c_2) + (1 - \lambda)(a_2 - b_2)) + \lambda c_2 + (1 - \lambda)b_2$$

آن گاه $\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}) = \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_2)$

که در آن $\tilde{A}^* = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{C}_2^* = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ و $w = \min(w_1, w_2)$.

اثبات: نتایج پیشنهادی را می توان به شرح زیر اثبات کرد:

(۱). با استفاده از معادله (۲۸.۲) داریم:

$$\mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) = \frac{w}{\pi}(a_1 + b_1) \text{ و } \mathfrak{R}_L(\tilde{C}_2^*) = b_2 w + (\frac{a_2 - b_2}{\pi})\pi w$$

$$(۲۲.۳) \quad \mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) - \mathfrak{R}_L(\tilde{C}_2^*) = \frac{w}{\pi}(a_1 + b_1) - (b_2 w + (\frac{a_2 - b_2}{\pi})\pi w)$$

چون $(a_1 + b_1) \geq \frac{1}{\pi}(\pi a_2 + (4 - \pi)b_2)$ با استفاده از معادله (۲۲.۳) داریم:

$$\mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) - \mathfrak{R}_L(\tilde{C}_2^*) \geq 0 \text{ آن گاه } \mathfrak{R}_L(\tilde{A}^*) \geq \mathfrak{R}_L(\tilde{C}_2^*)$$

(۲). با استفاده از معادله (۲۹.۲) داریم:

$$\mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) = \frac{w}{\pi}(c_1 + d_1) \text{ و } \mathfrak{R}_R(\tilde{C}_2^*) = c_2 w + (\frac{d_2 - c_2}{\pi})\pi w$$

$$(۲۳.۳) \quad \mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) - \mathfrak{R}_R(\tilde{C}_2^*) = \frac{w}{\pi}(c_1 + d_1) - (c_2 w + (\frac{d_2 - c_2}{\pi})\pi w)$$

چون $(c_1 + d_1) \leq \frac{1}{\pi}(\pi d_2 + (4 - \pi)c_2)$ با استفاده از معادله (۲۳.۳) داریم:

$$\mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) - \mathfrak{R}_R(\tilde{C}_2^*) \leq 0 \text{ آن گاه } \mathfrak{R}_R(\tilde{A}^*) \leq \mathfrak{R}_R(\tilde{C}_2^*)$$

(۳). با استفاده از معادله (۳۲.۲) داریم:

$$\mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{C}_2^*) = w \frac{\pi}{\pi}[\lambda(d_2 - c_2) + (1 - \lambda)(a_2 - b_2)] + \lambda c_2 + (1 - \lambda)b_2$$

$$\text{و } \mathfrak{R}_T^\lambda(\tilde{A}^*) = w \frac{\pi}{\pi}(\lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1)) \text{ اکنون داریم:}$$

$$\begin{aligned} \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \Re_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) = \\ \left(\frac{w}{\pi}(\lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1)) - (w \frac{\pi}{\pi}[\lambda(d_2 - c_2) + (1 - \lambda)(a_2 - b_2)] + \lambda c_2 + (1 - \lambda)b_2) \right) \end{aligned}$$

(۲۴.۳)

چون

$$\frac{1}{\pi}(\lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1)) < \frac{\pi}{\pi}(\lambda(d_2 + c_2) + (1 - \lambda)(a_2 + b_2)) + \lambda c_2 + (1 - \lambda)b_2$$

با استفاده از معادله (۲۴.۳) داریم:

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) < \Re_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) \quad \text{آن گاه} \quad \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \Re_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) < 0$$

(۴). اگر

$$\frac{1}{\pi}(\lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1)) < \frac{\pi}{\pi}(\lambda(d_2 + c_2) + (1 - \lambda)(a_2 + b_2)) + \lambda c_2 + (1 - \lambda)b_2$$

با استفاده از معادله (۲۴.۳) داریم:

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) > \Re_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) \quad \text{آن گاه} \quad \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \Re_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) > 0$$

(۵). اگر

$$\frac{1}{\pi}(\lambda(c_1 + d_1) + (1 - \lambda)(a_1 + b_1)) = \frac{\pi}{\pi}(\lambda(d_2 + c_2) + (1 - \lambda)(a_2 + b_2)) + \lambda c_2 + (1 - \lambda)b_2$$

با استفاده از معادله (۲۴.۳) داریم:

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \Re_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) \quad \text{آن گاه} \quad \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) - \Re_T^\lambda(\tilde{C}_p^*) = 0$$

۱.۵.۳ موارد خاص

نتایج موجود که در بخش ۳.۳ ارائه شده و نتایجی که در بخش ۴.۳ ارائه شده را می توان با استفاده از نتایجی که در بخش ۶.۳ پیشنهاد شده، با استفاده از فرضیات زیر به راحتی بدست آورد:

(۱). فرض کنید

$$w_1 = w_2 = w \text{ و } e_2 = e \text{ و } d_1 = d_2 = d \text{ و } c_1 = c \text{ و } b_1 = b \text{ و } a_1 = a_2 = a$$

نتایجی که در گزاره های ۱.۵.۳ و ۲.۵.۳ ارائه شده را می توان به نتایج موجود که به ترتیب در گزاره های ۱.۲.۳ و ۲.۲.۳ ارائه شده است، تبدیل کرد.

(۲). فرض کنید

$$e_2 = e \text{ و } d_1 = d_2 = d \text{ و } c_1 = c \text{ و } b_1 = b \text{ و } a_1 = a_2 = a$$

نتایجی که در گزاره های ۱.۵.۳ و ۲.۵.۳ ارائه شده را می توان به نتایج موجود که به ترتیب در گزاره های ۱.۳.۳ و ۲.۳.۳ ارائه شده است، تبدیل کرد.

۶.۳ مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای p -نرم تعمیم یافته

اگر در مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته (P_2) که در بخش ۲.۲ از فصل ۲ تعریف شد، پارامترهای $\tilde{c}_j$ توسط مجموعه های فازی دوزنقه ای p -نرم تعمیم یافته $(c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; w_j)_p$ معرفی شوند آن گاه مسئله برنامه ریزی خطی (P_2) را می توان به یک مسئله برنامه ریزی خطی مجموعه های فازی دوزنقه ای p -نرم تعمیم یافته (P_{11}) تبدیل کرد:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n (c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; w_j)_p x_j \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \geq, =, \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (P_{11}) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

مثال ۱.۶.۳. مسئله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad ((2, 4, 8, 10; 0.8)_2 x_1 \oplus (1, 3, 5, 7; 0.7)_2 x_2) \\ & \text{s.t.} \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

راه حل :

با استفاده از روش ارائه شده در فصل ۲، این مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای 2 -نرم تعمیم یافته را می توان با استفاده از گام های زیر حل کرد:
گام اول: با استفاده از مرحله ۲ روش یاد شده در بخش ۸.۲، مسئله ی برنامه ریزی خطی فوق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & \text{Minimize} \quad (\mathcal{R}_T^{\circ/5}((2, 4, 8, 10; 0.7)_2 x_1) \oplus (1, 3, 5, 7; 0.7)_2 x_2) \\ & \text{s.t.} \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

۴۴ مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای p -نرم تعمیم یافته

گام دوم: با استفاده از مرحله ۳ روش یاد شده، که در بخش ۸.۲ ارائه شد، مسئله ی برنامه ریزی خطی را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\text{Minimize} \quad (\mathbb{R}_T^{\circ/\Delta}((2, 4, 8, 1^{\circ}; \circ/7)_2 x_1 + (\mathbb{R}^{\circ/\Delta}_T(1, 3, 5, 7; \circ/7)_2 x_2))$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

گام سوم: با استفاده از $\mathbb{R}_T^{\circ/\Delta}(a, b, c, d; w)_2 = w((\frac{a-b-c+d}{4})\frac{\pi}{4} + \frac{b+c}{4})$ مسئله ی برنامه ریزی خطی قطعی که در مرحله ۲ بدست آمده، می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\text{Maximize} \quad (\frac{21}{8}x_1 + \frac{14}{8}x_2)$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

گام چهارم:

با حل مسئله ی برنامه ریزی خطی قطعی بدست آمده در مرحله ۳، جواب بهینه به صورت $x_1 = 3$ و $x_2 = 0$ می باشد.

با قرار دادن $x_1 = 3$ و $x_2 = 0$ در $(\mathbb{R}_T^{\circ/\Delta}((2, 4, 8, 1^{\circ}; \circ/7)_2 x_1 \oplus (1, 3, 5, 7; \circ/7)_2 x_2))$ مقدار بهینه این مسئله فازی $(6, 12, 24, 3^{\circ}; \circ/7)_2$ می باشد.

فصل ۴

رویکرد رتبه بندی RM برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته

در فصل ۲، رویکرد جدیدی برای رتبه بندی مجموعه های فازی تعمیم یافته ارائه شد. در این فصل، نشان می دهیم که تنها رتبه بندی برای مقایسه ی مجموعه های فازی تعمیم یافته کافی نیست. بنابراین یک رویکرد جدید برای رتبه بندی به نام رتبه بندی RM با هدف اصلاح رویکرد رتبه بندی ارائه شده در فصل ۲ پیشنهاد شده است. همچنین بر اساس رویکرد رتبه بندی پیشنهادی RM روش جدیدی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته پیشنهاد شده است. روش پیشنهادی با حل یک مثال عددی نشان داده شده است.

۱.۴ کاستی های رویکردهای رتبه بندی موجود و پیشنهادی

در کلیه رویکردهای رتبه بندی موجود و رویکرد رتبه بندی حاضر که در فصل ۲ ارائه شده است، برای مقایسه مجموعه های فازی فقط از رتبه استفاده می شود. در این بخش نشان می دهیم که تنها رتبه برای مقایسه مجموعه های فازی کافی نیست.

فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w)$ یک مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشد آن گاه
 $\tilde{A} \ominus \tilde{A} \neq (\circ, \circ, \circ, \circ; w)$ یعنی $\tilde{A} \ominus \tilde{A} = (a_1 - a_4, a_2 - a_3, a_3 - a_2, a_4 - a_1; w)$

بر اساس این ویژگی از مجموعه های فازی می توان نتیجه گرفت که دو مجموعه فازی
دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3, a_4; w_1)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4; w_2)$ معادل خواهند بود
اگر برای $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1; \min(w_1, w_2))$ دو ویژگی زیر برقرار باشند:

$$a_1 - b_4 = -(a_4 - b_1) \quad (1)$$

$$a_2 - b_3 = -(a_3 - b_2) \quad (2)$$

به عنوان مثال، اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ هر دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند به گونه ای
که $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ آن گاه $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (-4, -2, 2, 4; w)$

به طور مشابه دو مجموعه فازی مثلثی تعمیم یافته $\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3; w_1)$ و $\tilde{B} = (b_1, b_2, b_3; w_2)$
معادل خواهند بود اگر برای $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1; \min(w_1, w_2))$ دو ویژگی زیر
برقرار باشند:

$$a_2 - b_2 = \circ \quad (1)$$

$$a_1 - b_3 = -(a_3 - b_1) \quad (2)$$

با توجه به رویکردهای رتبه بندی موجود و رویکرد رتبه بندی پیشنهادی در فصل ۲، اگر $\tilde{A}$
و $\tilde{B}$ هر دو مجموعه فازی تعمیم یافته باشند به طوری که $\mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ ، اما
مجموعه های فازی تعمیم یافته ای وجود دارند که برای آن ها $\mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B})$ برقرار است
اما برای $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$ دو شرط فوق برقرار نیستند.

به عنوان مثال، اگر $\tilde{A} = (\circ, 2, 4; 1)$ و $\tilde{B} = (\circ, 1, 6; 1)$ دو مجموعه فازی مثلثی تعمیم
یافته باشند، آن گاه طبق رویکرد رتبه بندی پیشنهاد شده در فصل ۲ می توان نوشت:

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} \neq (-a, \circ, a; w) \text{ یعنی } \tilde{A} \ominus \tilde{B} = (-6, 1, 4; 1) \text{ اما } \mathcal{R}_T^{\circ/5}(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^{\circ/5}(\tilde{B}) = 2$$

به طور مشابه اگر $\tilde{A} = (1, 2, 3, 6; 1)$ و $\tilde{B} = (1, 2, 4, 5; 1)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای
تعمیم یافته باشند، آن گاه طبق رویکرد رتبه بندی پیشنهاد شده در فصل ۲ داریم:

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} \neq (-a, -b, b, a; w) \text{ یعنی } \tilde{A} \ominus \tilde{B} = (-4, -2, 1, 5; 1) \text{ اما } \mathcal{R}_T^{\circ/5}(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^{\circ/5}(\tilde{B})$$

براساس بحث فوق می توان نتیجه گرفت که اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه ی فازی مثلثی تعمیم
یافته باشند، آن گاه ممکن است داشته باشیم:

$$\mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B}) \nRightarrow \tilde{A} \ominus \tilde{B} = (-a, \circ, a, w) \quad (1)$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (-a, \circ, a, w) \Rightarrow \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B}) \quad (2)$$

به طور مشابه اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند آن گاه ممکن
است داشته باشیم:

$$\mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B}) \nRightarrow \tilde{A} \ominus \tilde{B} = (-a, -b, b, a, w) \quad (1)$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = (-a, -b, b, a, w) \Rightarrow \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^\lambda(\tilde{B}) \quad (2)$$

یعنی بررسی رابطه برابری فقط بر اساس رتبه، ممکن است برای همه مسائل صحیح نباشد.
از این رو، برای غلبه بر این کاستی ها، در بخش بعدی یک رویکرد جدید رتبه بندی که رویکرد

رتبه بندی RM نام گذاری شده است، با تغییر رویکرد رتبه بندی ارائه شده در فصل ۲، پیشنهاد شده است.

۲.۴ رویکرد رتبه بندی RM

در این بخش، یک رویکرد جدید رتبه بندی با عنوان رویکرد رتبه بندی RM برای مقایسه مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته ارائه شده است.

فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; w_2)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند، آن گاه برای مقایسه این دو از گام های زیر استفاده می کنیم:

گام اول: با روش زیر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را به $\tilde{A}^*$ و $\tilde{B}^*$ تبدیل کنید.

$$\tilde{B}^* = (a_2, b_2, c_2, d_2; w) \text{ و } \tilde{A}^* = (a_1, b_1, c_1, d_1; w) \quad (1.4)$$

که در آن $w = \min(w_1, w_2)$.

گام دوم: موارد زیر را محاسبه کنید.

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \frac{w}{\lambda}(a_1 + b_1) + (1 - \lambda)(c_1 + d_1) \quad (2.4)$$

و

$$\Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = \frac{w}{\lambda}(a_2 + b_2) + (1 - \lambda)(c_2 + d_2) \quad (3.4)$$

گام سوم: مقدار خاصی از λ را انتخاب کرده و موارد زیر را بررسی کنید.

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) \quad (1)$$

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) \neq \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) \quad (2)$$

مورد اول: اگر رابطه $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ برقرار باشد به گام چهارم بروید.

مورد دوم: اگر $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) \neq \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه بررسی کنید که $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) > \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ برقرار است

یا $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) < \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$.

$$\tilde{A} \succ \tilde{B} \text{ اگر } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) > \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) \text{ آن گاه } \quad (1)$$

$$\tilde{A} \prec \tilde{B} \text{ اگر } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) < \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) \text{ آن گاه } \quad (2)$$

گام چهارم: موارد زیر را محاسبه کنید.

$$RM^\lambda(\tilde{A}^*) = Mode^\lambda(\tilde{A}^*) = w(\lambda b_1 + (1 - \lambda)c_1) \quad (4.4)$$

و

$$RM^\lambda(\tilde{B}^*) = Mode^\lambda(\tilde{B}^*) = w(\lambda b_2 + (1 - \lambda)c_2) \quad (5.4)$$

گام پنجم: برای مقدار انتخابی λ موارد زیر را بررسی کنید.

$$RM^\lambda(\tilde{A}^*) > RM^\lambda(\tilde{B}^*) \text{ یا } RM^\lambda(\tilde{A}^*) < RM^\lambda(\tilde{B}^*) \text{ یا } RM^\lambda(\tilde{A}^*) = RM^\lambda(\tilde{B}^*)$$

مورد اول: اگر برای مقدار انتخابی λ داشته باشیم $RM^\lambda(\tilde{A}^*) > RM^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه برای

همان مقدار λ داریم $\tilde{A} \succ \tilde{B}$.

مورد دوم: اگر برای مقدار انتخابی λ داشته باشیم $RM^\lambda(\tilde{A}^*) < RM^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه برای همان مقدار λ داریم $\tilde{A} < \tilde{B}$.

مورد سوم: اگر برای مقدار انتخابی λ داشته باشیم $RM^\lambda(\tilde{A}^*) = RM^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه برای همان مقدار λ داریم $\tilde{A} \sim \tilde{B}$.

۱.۲.۴ مثال هایی برای توضیح بیشتر

در این بخش، برای نشان دادن رویکرد رتبه بندی پیشنهادی RM ، برخی مجموعه های فازی دوزنقه ای نرمال و تعمیم یافته با استفاده از این رویکرد مقایسه می شوند.

مثال ۱.۲.۴. فرض کنید $\tilde{A} = (\circ/۲, \circ/۴, \circ/۶, \circ/۸; \circ/۳۵)$ و $\tilde{B} = (\circ/۱, \circ/۲, \circ/۳, \circ/۴; \circ/۷)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند. برای مقایسه ی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به شیوه ی زیر عمل می کنیم:

گام اول: با استفاده از معادله (۱.۴) داریم:

$$\tilde{B}^* = (\circ/۱, \circ/۲, \circ/۳, \circ/۴; \circ/۳۵) \text{ و } \tilde{A}^* = (\circ/۲, \circ/۴, \circ/۶, \circ/۸; \circ/۳۵)$$

گام دوم: از معادلات (۲.۴) و (۳.۴) داریم

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \circ/۳۵(\circ/۳\lambda + (1 - \lambda)\circ/۷)$$

$$\Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = \circ/۱۷۵(\circ/۳\lambda + (1 - \lambda)\circ/۷)$$

گام سوم: برای $\lambda = \circ$ (یعنی یک تصمیم گیرنده بدبین) داریم $\Re_T^\circ(\tilde{A}^*) = \circ/۲۴۵$ و $\Re_T^\circ(\tilde{B}^*) = \circ/۱۲۲۵$ چون $\Re_T^\circ(\tilde{A}^*) > \Re_T^\circ(\tilde{B}^*)$ بنابراین $\tilde{A} \succ \tilde{B}$.

برای $\lambda = ۱$ داریم: $\Re_T^1(\tilde{A}^*) = \circ/۱۰۵$ و $\Re_T^1(\tilde{B}^*) = \circ/۵۲۵$ چون $\Re_T^1(\tilde{A}^*) > \Re_T^1(\tilde{B}^*)$ بنابراین $\tilde{A} \succ \tilde{B}$.

و برای $\lambda = \circ/۵$ که بیانگر یک تصمیم گیرنده میانه رو است داریم:

$$\Re_T^{\circ/۵}(\tilde{A}^*) = \circ/۱۷۵ \text{ و } \Re_T^{\circ/۵}(\tilde{B}^*) = \circ/۸۷۵ \text{ چون } \Re_T^{\circ/۵}(\tilde{A}^*) > \Re_T^{\circ/۵}(\tilde{B}^*) \text{ بنابراین } \tilde{A} \succ \tilde{B}.$$

مثال ۲.۲.۴. فرض کنید $\tilde{A} = (\circ/۱, \circ/۲, \circ/۴, \circ/۵; ۱)$ و $\tilde{B} = (\circ/۱, \circ/۲, \circ/۳, \circ/۶; ۱)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند. برای مقایسه ی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به شیوه ی زیر عمل می کنیم:

گام اول: با استفاده از معادله (۱.۴) داریم:

$$\tilde{B}^* = (\circ/۱, \circ/۲, \circ/۳, \circ/۵; ۱) \text{ و } \tilde{A}^* = (\circ/۱, \circ/۲, \circ/۴, \circ/۵; ۱)$$

گام دوم: از معادلات (۲.۴) و (۳.۴) داریم:

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = (\circ/۱۵\lambda + (1 - \lambda)\circ/۴۵)$$

$$\Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = (\circ/۱۵\lambda + (1 - \lambda)\circ/۴۵)$$

گام سوم: چون برای هر λ داریم $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ بنابراین به گام چهارم بروید.

گام چهارم: با استفاده از معادلات (۴.۴) و (۵.۴) داریم:

$$RM^\lambda(\tilde{B}^*) = \circ/۲\lambda + (1 - \lambda)\circ/۳ \text{ و } RM^\lambda(\tilde{A}^*) = \circ/۲\lambda + (1 - \lambda)\circ/۴$$

گام پنجم: برای $\lambda = 0$ داریم:

$$RM^0(\tilde{A}^*) = 0/4 \text{ و } RM^0(\tilde{B}^*) = 0/3 \text{ چون } RM^0(\tilde{A}^*) > RM^0(\tilde{B}^*) \text{ لذا } \tilde{A} \succ \tilde{B}$$

برای $\lambda = 1$ داریم:

$$RM^1(\tilde{A}^*) = 0/2 \text{ و } RM^1(\tilde{B}^*) = 0/2 \text{ چون } RM^1(\tilde{A}^*) = RM^1(\tilde{B}^*) \text{ لذا } \tilde{A} \sim \tilde{B}$$

و برای $\lambda = 0/5$ داریم:

$$RM^{0/5}(\tilde{A}^*) = 0/3 \text{ و } RM^{0/5}(\tilde{B}^*) = 0/25 \text{ چون } RM^{0/5}(\tilde{A}^*) > RM^{0/5}(\tilde{B}^*) \text{ لذا } \tilde{A} \succ \tilde{B}$$

مثال ۳.۲.۴. فرض کنید $\tilde{A} = (0/1, 0/2, 0/4, 0/5; 0/1)$ و $\tilde{B} = (1, 1, 1, 1; 0/1)$ دو مجموعه فازی

تعمیم یافته باشند. برای مقایسه ی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به شیوه ی زیر عمل می کنیم:

گام اول: با استفاده از معادله (۱.۴) داریم:

$$\tilde{A}^* = (0/1, 0/2, 0/4, 0/5; 0/1) \text{ و } \tilde{B}^* = (1, 1, 1, 1; 0/1)$$

گام دوم: از معادلات (۲.۴) و (۳.۴) داریم:

$$\Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = (0/2\lambda + (1 - \lambda)0/2) \text{ و } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = (0/3\lambda + (1 - \lambda)0/9)$$

گام سوم: برای $\lambda = 0$ داریم $\Re_T^0(\tilde{A}^*) = 0/9$ و $\Re_T^0(\tilde{B}^*) = 0/2$ چون $\Re_T^0(\tilde{A}^*) > \Re_T^0(\tilde{B}^*)$

لذا $\tilde{A} \succ \tilde{B}$

برای $\lambda = 1$ داریم $\Re_T^1(\tilde{A}^*) = 0/3$ و $\Re_T^1(\tilde{B}^*) = 0/2$ چون $\Re_T^1(\tilde{A}^*) > \Re_T^1(\tilde{B}^*)$ لذا $\tilde{A} \succ \tilde{B}$

و برای $\lambda = 0/5$ داریم $\Re_T^{0/5}(\tilde{A}^*) = 0/6$ و $\Re_T^{0/5}(\tilde{B}^*) = 0/2$ چون $\Re_T^{0/5}(\tilde{A}^*) > \Re_T^{0/5}(\tilde{B}^*)$

لذا $\tilde{A} \succ \tilde{B}$

۳.۴ روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی RM

در این بخش با اصلاح روش ارائه شده در فصل ۲، روش جدیدی بر اساس روش رتبه بندی پیشنهادی RM ، برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته پیشنهاد می دهیم. مراحل روش پیشنهادی به شرح زیر است:

مرحله اول:

از مرحله ۱ تا مرحله ۶ روش پیشنهادی در فصل ۲ برای حل مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته (P_2) و بررسی این که آیا جواب بهینه دگرین وجود دارد یا خیر استفاده کنید.

مورد اول:

اگر هیچ جواب بهینه دگرین وجود نداشته باشد، جواب بدست آمده x_j جواب بهینه است و با قرار دادن مقدار x_j در $\sum_{j=1}^n (\tilde{c}_j x_j)$ مقدار بهینه فازی را بدست آورید.

مورد دوم:

اگر جواب بهینه دگرین وجود داشت، به مرحله ۲ بروید.

مرحله دوم:

۵۰ رویکرد رتبه بندی RM برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته

مسئله برنامه ریزی خطی قطعی $(P_{۱۲})$ را حل کنید.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n \text{mode}^{\circ/\Delta}(\tilde{c}_j x_j) \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (\tilde{c}_j x_j) \geq \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (P_{12}) \\ & \sum_{j=1}^n \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{c}_j x_j) = a \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن a مقدار بهینه مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_{12}) است. جواب بدست آمده جواب بهینه است و می توان مقدار بهینه فازی را با جای گذاری مقدار x_j در $\sum_{j=1}^n (\tilde{c}_j x_j)$ بدست آورد.

۱.۳.۴ مثال های عددی

برای نشان دادن روش پیشنهادی مبتنی بر روش رتبه بندی RM ، یک مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته، که در مثال ۱.۳.۴ انتخاب شده است را با استفاده از روش پیشنهادی حل می کنیم.

مثال ۱.۳.۴. مسئله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize}((2, 4, 5, 6; \circ/9)x_1 \oplus (2, 3, 5, 7; \circ/8)x_2) \\ & \text{s.t.} \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 > 0 \end{aligned}$$

راه حل:

این مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای با استفاده از مراحل زیر قابل حل است:

مرحله اول:

چون با حل این مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته با استفاده از روش پیشنهادی در بخش ۱۱.۲، جواب بهینه دگرین بدست آمده و مقدار بهینه مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_{10}) ، برابر $\frac{17}{5}$ می باشد، لذا طبق مورد دوم مرحله ۱ از روش پیشنهادی، جواب این مسئله را می توان با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی زیر بدست آورد:

$$Maximize \quad (Mode^{\circ/\Delta}((2,4,5,6;\circ/8)x_1 + Mode^{\circ/\Delta}(2,3,5,7;\circ/8)x_2))$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$\frac{17}{5}x_1 + \frac{17}{5}x_2 = \frac{17}{5}$$

$$x_1, x_2 > 0$$

مرحله دوم:

با استفاده از $(a, b, c, d; w)^{\circ/\Delta} = \frac{(b+c)}{3}$ مسئله برنامه ریزی خطی قطعی بدست آمده در مرحله

(۱) به صورت زیر نوشته می شود:

$$maximize \quad (\frac{18}{5}x_1 + \frac{16}{5}x_2)$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$\frac{17}{5}x_1 + \frac{17}{5}x_2 = \frac{17}{5}$$

$$x_1, x_2 > 0$$

مرحله سوم:

با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی بدست آمده در مرحله (۲)، جواب بهینه به صورت

$x_1 = 3$ و $x_2 = 0$ بدست می آید.

با قرار دادن مقادیر $x_1 = 3$ و $x_2 = 0$ در $(2,4,5,6;\circ/9)x_1 \oplus (2,3,5,7;\circ/8)x_2$ مقدار

بهینه فازی مسئله برابر $(6, 12, 15, 18;\circ/8)$ می باشد.

فصل ۵

یک رویکرد جدید رتبه بندی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه‌های مبهم دوزنقه ای

در زندگی واقعی، فرد ممکن است فرض کند که یک شی متعلق به یک مجموعه است. اما این امکان وجود دارد که او در مورد آن مطمئن نباشد. به عبارت دیگر، ممکن است تردید وجود داشته باشد که یک شی متعلق به یک مجموعه باشد یا نه. در نظریه مجموعه‌های فازی هیچ راهی برای گنجاندن این تردید وجود ندارد. یک راه حل ممکن استفاده از مجموعه فازی شهودی [۹] یا مجموعه مبهم [۶۳] است. بوستینز و بوریلو [۲۳] خاطرنشان کردند که مفهوم مجموعه مبهم همان مفهوم مجموعه فازی شهودی است.

لی [۹۴] به محدودیت‌های رویکردهای رتبه بندی موجود در [۹۴] برای مقایسه مجموعه‌های فازی شهودی اشاره کرده و یک رویکرد جدید برای مقایسه مجموعه‌های فازی شهودی ارائه کرده است.

در این فصل، به محدودیت‌های رویکرد رتبه بندی موجود در [۹۴] اشاره شده است. برای غلبه بر محدودیت‌های نتایج موجود، با اصلاح برخی از نتایج موجود در [۹۴] محدودیت‌های رویکرد رتبه بندی ارائه شده در آن را برطرف می‌کنیم. همچنین، یک رویکرد جدید برای مقایسه مجموعه‌های مبهم دوزنقه ای پیشنهاد شده است. و برای نشان دادن کاربرد روش

رتبه بندی پیشنهادی، یک مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه مبهم دوزنقه ای حل شده است.

۱.۵ مقدمات

در این بخش برخی از تعاریف اساسی و عملیات حسابی را ارائه کرده ایم.

۱.۱.۵ تعاریف اساسی

تعریف ۱.۱.۵. یک مجموعه ی فازی شهودی $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x), v_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ روی مجموعه جامع X با یک تابع عضویت حقیقی $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ که $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ تعریف می‌شود، مقادیر $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $v_{\tilde{A}}(x)$ میزان عضویت و میزان عدم عضویت برای هر $x \in X$ را نشان می دهد که در آن شرط $\mu_{\tilde{A}}(x) + v_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ برای هر $x \in X$ همواره برقرار است. مقدار $(1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - v_{\tilde{A}}(x))$ نشان دهنده میزان تردید برای هر $x \in X$ می باشد.

تعریف ۲.۱.۵. اگر $\tilde{A}$ یک مجموعه فازی شهودی باشد آن گاه به مجموعه

$$A^{(\alpha, \beta)} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha, v_{\tilde{A}}(x) \leq \beta, \alpha, \beta \in [0, 1]\}$$

یک (α, β) -برش برای $\tilde{A}$ گفته می شود.

تعریف ۳.۱.۵. به مجموعه فازی شهودی $\tilde{A}$ در مجموعه جامع اعداد حقیقی R یک مجموعه فازی شهودی مثلثی گفته می شود و با $\tilde{A} = \langle [(a, b, c); w, u] \rangle$ نشان داده می‌شود اگر درجه عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و درجه عدم عضویت $v_{\tilde{A}}(x)$ برای آن به ترتیب به صورت زیر باشند:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{w(x-a)}{(b-a)} & a \leq x < b \\ w & x = b \\ \frac{w(c-x)}{(c-b)} & b < x \leq c \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

9

$$v_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{(b-x+u(x-a))}{(b-a)} & a \leq x < b \\ u & x = b \\ \frac{(x-b+u(c-x))}{(c-b)} & b < x \leq c \\ 1 & otherwise \end{cases}$$

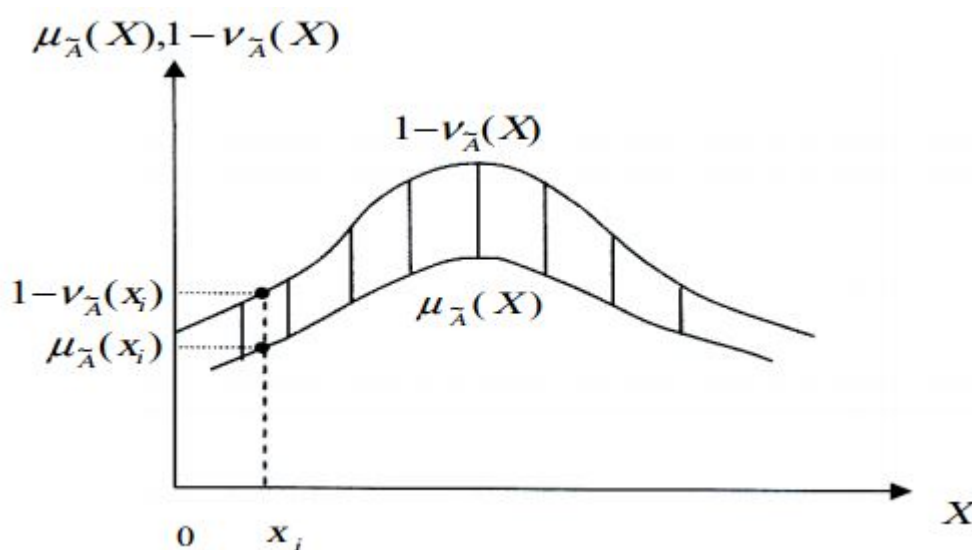
که در آن $u = \infimum\{v_{\tilde{A}}(x) : x \in R\}$ و $w = \supmum\{\mu_{\tilde{A}}(x) : x \in R\}$

تعریف ۴.۱.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, a_2, a_3); w, u] \rangle$ یک مجموعه ی فازی شهودی مثلثی باشد آن گاه (α, β) - برش $A^{(\alpha, \beta)}$ برای مجموعه ی فازی شهودی مثلثی $\tilde{A}$ به شرح زیر تعریف می شود:

$$A^{(\alpha, \beta)} = \{[a_1 + (a_2 - a_1)\frac{\alpha}{w}, a_3 - (a_3 - a_2)\frac{\alpha}{w}], [\frac{(1-\beta)a_2 + (\beta-u)a_1}{1-u}, \frac{(1-\beta)a_2 + (\beta-u)a_3}{1-u}]\}$$

تعریف ۵.۱.۵. یک مجموعه ی مبهم تعریف شده بر روی مجموعه ی جامع X به صورت $\tilde{A} = \langle [x, \mu_{\tilde{A}}(x), (1 - v_{\tilde{A}}(x)) | x \in X] \rangle$ می باشد که در آن $\mu_{\tilde{A}} : X \rightarrow [0, 1]$ تابع عضویت و $(1 - v_{\tilde{A}}) : X \rightarrow [0, 1]$ متمم تابع عدم عضویت می باشد. مقادیر $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $v_{\tilde{A}}(x)$ درجه ی عضویت و عدم عضویت برای $x \in X$ را مشخص می کنند که در آن شرط $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1 - v_{\tilde{A}}(x)$ برای هر $x \in X$ همواره برقرار است (شکل ۱.۵).

مقدار $(1 - \mu_{\tilde{A}}(x) - v_{\tilde{A}}(x))$ نشان دهنده میزان تردید برای هر $x \in X$ می باشد.



شکل ۱.۵: مجموعه ی مبهم

تعریف ۶.۱.۵. فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه مبهم باشد آن گاه به

$$A^{(\alpha, \beta)} = \{x \in X : \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha, 1 - v_{\tilde{A}}(x) \geq \beta, \alpha, \beta \in [0, 1]\}$$

یک (α, β) - برش برای $\tilde{A}$ گفته می شود.

تعریف ۷.۱.۵. فرض کنید $\tilde{A}$ یک مجموعه مبهم تعریف شده در مجموعه جامع اعداد حقیقی R باشد. به $\tilde{A} = \langle [(a, b, c); \delta, \rho] \rangle$ با $a \leq b \leq c$ و $\delta \leq \rho$ یک مجموعه مبهم مثلثی گفته می شود اگر $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $(1 - v_{\tilde{A}}(x))$ به ترتیب به صورت زیر باشند.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{\delta(x-a)}{(b-a)} & a \leq x < b \\ \delta & x = b \\ \frac{\delta(c-x)}{(b-c)} & b < x \leq c \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

9

$$1 - v_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{\rho(x-a)}{(b-a)} & a \leq x < b \\ \rho & x = b \\ \frac{\rho(x-c)}{(b-c)} & b < x \leq c \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

که در آن $\delta = \sup\{\mu_{\tilde{A}}(x) : x \in R\}$ و $\rho = \sup\{1 - v_{\tilde{A}}(x) : x \in R\}$.

تعریف ۸.۱.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, a_2, a_3); \delta, \rho] \rangle$ یک مجموعه ی فازی مبهم مثلثی باشد، آن گاه (α, β) -برش $A^{(\alpha, \beta)}$ برای مجموعه ی مبهم مثلثی $\tilde{A}$ به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$A^{(\alpha, \beta)} = \{[a_1 + (a_2 - a_1)\frac{\alpha}{\delta}, a_3 - (a_3 - a_2)\frac{\alpha}{\delta}], [a_1 + (a_2 - a_1)\frac{\beta}{\rho}, a_3 - (a_3 - a_2)\frac{\beta}{\rho}]\}$$

تعریف ۹.۱.۵. یک مجموعه مبهم $\tilde{A}$ تعریف شده در مجموعه جامع اعداد حقیقی R ، یک مجموعه مبهم دوزنقه ای گفته می شود و با $\tilde{A} = \langle [(a, b, c); \delta, \rho] \rangle$ که در آن $a \leq b \leq c$ و $\delta \leq \rho$ نشان داده می‌شود اگر $\mu_{\tilde{A}}(x)$ و $1 - v_{\tilde{A}}(x)$ به ترتیب به صورت زیر باشند.

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{\delta(x-a)}{(b-a)} & a \leq x < b \\ \delta & b \leq x \leq c \\ \frac{\delta(x-d)}{(c-d)} & c < x \leq d \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

9

$$1 - v_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{\rho(x-a)}{(b-a)} & a \leq x < b \\ \rho & b \leq x \leq c \\ \frac{\rho(x-d)}{(c-d)} & c < x \leq d \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

که در آن $\delta = \sup\{\mu_{\tilde{A}}(x) : x \in R\}$ و $\rho = \sup\{(1 - v_{\tilde{A}}(x)) : x \in R\}$.

تعریف ۱۰.۱.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, a_2, a_3, a_4); \delta, \rho] \rangle$ یک مجموعه ی مبهم دوزنقه ای باشد. آن گاه (α, β) -برش $A^{(\alpha, \beta)}$ برای مجموعه ی مبهم دوزنقه ای $\tilde{A}$ به شرح زیر تعریف می‌شود:

$$A^{(\alpha, \beta)} = \{[a_1 + (a_2 - a_1)\frac{\alpha}{\delta}, a_4 - (a_4 - a_3)\frac{\alpha}{\delta}], [a_1 + (a_2 - a_1)\frac{\beta}{\rho}, a_4 - (a_4 - a_3)\frac{\beta}{\rho}]\}$$

۲.۱.۵ عملیات حسابی

در این بخش، برخی از عملیات ریاضی بین مجموعه های فازی شهودی مثلثی، مجموعه های مبهم مثلثی و مجموعه های مبهم دوزنقه ای، که روی مجموعه جامع اعداد حقیقی R تعریف می شوند ارائه شده است.

۳.۱.۵ عملیات حسابی بین مجموعه های فازی شهودی مثلثی:

فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1); w_1, u_1] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2); w_2, u_2] \rangle$ دو مجموعه فازی شهودی مثلثی باشند. آن گاه داریم:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \langle [(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2); \min(w_1, w_2), \max(u_1, u_2)] \rangle \quad (1)$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \langle [(a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2); \min(w_1, w_2), \max(u_1, u_2)] \rangle \quad (2)$$

$$\gamma \tilde{A} = \begin{cases} \langle [(\gamma a_1, \gamma b_1, \gamma c_1), w_1, u_1] \rangle & \gamma \geq 0 \\ \langle [(\gamma c_1, \gamma b_1, \gamma a_1), w_1, u_1] \rangle & \gamma \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

۴.۱.۵ عملیات حسابی بین مجموعه های مبهم مثلثی:

فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1); \delta_1, \rho_1] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2); \delta_2, \rho_2] \rangle$ دو مجموعه مبهم مثلثی باشند. آن گاه داریم:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \langle [(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2); \min(\delta_1, \delta_2), \max(\rho_1, \rho_2)] \rangle \quad (1)$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \langle [(a_1 - c_2, b_1 - b_2, c_1 - a_2); \min(\delta_1, \delta_2), \max(\rho_1, \rho_2)] \rangle \quad (2)$$

$$\gamma \tilde{A} = \begin{cases} \langle [(\gamma a_1, \gamma b_1, \gamma c_1), \delta_1, \rho_1] \rangle & \gamma \geq 0 \\ \langle [(\gamma c_1, \gamma b_1, \gamma a_1), \delta_1, \rho_1] \rangle & \gamma \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

۵.۱.۵ عملیات حسابی بین مجموعه های مبهم دوزنقه ای:

فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1, d_1); \delta_1, \rho_1] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2, d_2); \delta_2, \rho_2] \rangle$ دو مجموعه مبهم دوزنقه ای باشند. آن گاه داریم:

$$\tilde{A} \oplus \tilde{B} = \langle [(a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2, d_1 + d_2); \min(\delta_1, \delta_2), \max(\rho_1, \rho_2)] \rangle \quad (1)$$

$$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \langle [(a_1 - d_2, b_1 - c_2, c_1 - b_2, d_1 - a_2); \min(\delta_1, \delta_2), \max(\rho_1, \rho_2)] \rangle \quad (2)$$

$$\gamma \tilde{A} = \begin{cases} \langle [(\gamma a_1, \gamma b_1, \gamma c_1, \gamma d_1); \delta_1, \rho_1] \rangle & \gamma \geq 0 \\ \langle [(\gamma d_1, \gamma c_1, \gamma b_1, \gamma a_1); \delta_1, \rho_1] \rangle & \gamma \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

۲.۵ رویکرد رتبه بندی لی

در این بخش، رویکرد رتبه بندی موجود در [۹۴] برای مقایسه مجموعه های فازی شهودی مثلثی ارائه شده است.

فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1); w_1, u_1] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2); w_2, u_2] \rangle$ دو مجموعه فازی شهودی مثلثی باشند. برای مقایسه ی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ از مراحل زیر استفاده کنید:

گام اول: محاسبه کنید.

$$V^\lambda(\tilde{A}) = V_\mu(\tilde{A}) + \lambda(V_v(\tilde{A}) - V_\mu(\tilde{A})) \quad (۱.۵)$$

$$A^\lambda(\tilde{A}) = A_\mu(\tilde{A}) - \lambda(A_v(\tilde{A}) - A_\mu(\tilde{A})) \quad (۲.۵)$$

$$V^\lambda(\tilde{B}) = V_\mu(\tilde{B}) + \lambda(V_v(\tilde{B}) - V_\mu(\tilde{B})) \quad (۳.۵)$$

$$A^\lambda(\tilde{B}) = A_\mu(\tilde{B}) - \lambda(A_v(\tilde{B}) - A_\mu(\tilde{B})) \quad (۴.۵)$$

که در آن

$$V_\mu(\tilde{A}) = \frac{w_1}{\varphi}(a_1 + \varphi b_1 + c_1) \quad (۵.۵)$$

$$V_v(\tilde{A}) = \frac{(1-u_1)}{\varphi}(a_1 + \varphi b_1 + c_1) \quad (۶.۵)$$

$$A_\mu(\tilde{A}) = \frac{w_1}{\varphi}(c_1 - a_1) \quad (۷.۵)$$

$$A_v(\tilde{A}) = \frac{(1-u_1)}{\varphi}(c_1 - a_1) \quad (۸.۵)$$

$$V_\mu(\tilde{B}) = \frac{w_2}{\varphi}(a_2 + \varphi b_2 + c_2) \quad (۹.۵)$$

$$V_v(\tilde{B}) = \frac{(1-u_2)}{\varphi}(a_2 + \varphi b_2 + c_2) \quad (۱۰.۵)$$

$$A_\mu(\tilde{B}) = \frac{w_2}{\varphi}(c_2 - a_2) \quad (۱۱.۵)$$

$$A_v(\tilde{B}) = \frac{(1-u_2)}{\varphi}(c_2 - a_2) \quad (۱۲.۵)$$

و $\lambda \in [0, 1]$.

گام دوم: محاسبه کنید.

$$L_T^\lambda(\tilde{B}) = \frac{V^\lambda(\tilde{B})}{1+A^\lambda(\tilde{B})} \text{ و } L_T^\lambda(\tilde{A}) = \frac{V^\lambda(\tilde{A})}{1+A^\lambda(\tilde{A})}$$

گام سوم: مقدار خاصی از λ را انتخاب کرده و موارد زیر را بررسی کنید.

$$L_T^\lambda(\tilde{A}) > L_T^\lambda(\tilde{B}) \text{ یا } L_T^\lambda(\tilde{A}) < L_T^\lambda(\tilde{B}) \text{ یا } L_T^\lambda(\tilde{A}) = L_T^\lambda(\tilde{B})$$

مورد اول: اگر $L_T^\lambda(\tilde{A}) > L_T^\lambda(\tilde{B})$ برای مقدار انتخابی λ ، آن گاه برای همان مقدار λ داریم

$$\tilde{A} \succ \tilde{B}$$

مورد دوم: اگر $L_T^\lambda(\tilde{A}) < L_T^\lambda(\tilde{B})$ برای مقدار انتخابی λ ، آن گاه برای همان مقدار λ داریم

$$\tilde{A} \prec \tilde{B}$$

مورد سوم: اگر $L_T^\lambda(\tilde{A}) = L_T^\lambda(\tilde{B})$ برای مقدار انتخابی λ ، آن گاه برای همان مقدار λ داریم

$$\tilde{A} \sim \tilde{B}$$

۳.۵ محدودیت نتایج موجود

لی [۹۴] به محدودیت های همه رویکردهای رتبه بندی موجود برای مقایسه مجموعه های فازی شهودی مثلثی اشاره کرد و یک رویکرد جدید رتبه بندی برای مقایسه مجموعه های فازی شهودی مثلثی ارائه کرد. در این قسمت، به محدودیت های نتایج موجود در [۹۴] اشاره شده است.

لی [۹۴] نتایج زیر را برای مجموعه های فازی شهودی مثلثی $\tilde{A} = \langle [(a_1, a_2, a_3); w_a, u_a] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(b_1, b_2, b_3); w_b, u_b] \rangle$ در حالتی که $u_a = u_b$ و $w_a = w_b$ است ارائه داد.

$$V_\mu(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = V_\mu(\tilde{A}) + V_\mu(\tilde{B}) \quad (۱)$$

$$V_v(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = V_v(\tilde{A}) + V_v(\tilde{B}) \quad (۲)$$

$$A_\mu(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = A_\mu(\tilde{A}) + A_\mu(\tilde{B}) \quad (۳)$$

$$A_v(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = A_v(\tilde{A}) + A_v(\tilde{B}) \quad (۴)$$

$$V^\lambda(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = V^\lambda(\tilde{A}) + V^\lambda(\tilde{B}) \quad (۵)$$

$$A^\lambda(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = A^\lambda(\tilde{A}) + A^\lambda(\tilde{B}) \quad (۶)$$

که در آن $\lambda \in [0, 1]$.

مثال ۱.۳.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(1, 3, 5); 0.3, 0.2] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(4, 8, 9); 0.4, 0.1] \rangle$

دو مجموعه فازی شهودی مثلثی باشند. با استفاده از معادله (۵.۵) داریم:

$$V_\mu(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) \neq V_\mu(\tilde{A}) + V_\mu(\tilde{B}) \quad \text{که با نتیجه } V_\mu(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = V_\mu(\tilde{A}) + V_\mu(\tilde{B}) \text{ تناقض دارد.}$$

مثال ۲.۳.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(0, 2, 5); 0.2, 0.1] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(2, 3, 7); 0.3, 0.2] \rangle$

دو مجموعه فازی شهودی مثلثی باشند. با استفاده از معادله (۶.۵) داریم:

$$V_v(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) \neq V_v(\tilde{A}) + V_v(\tilde{B}) \quad \text{که با نتیجه } V_v(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = V_v(\tilde{A}) + V_v(\tilde{B}) \text{ تناقض دارد.}$$

مثال ۳.۳.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(1, 2, 7); 0.4, 0.3] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(0, 3, 7); 0.3, 0.2] \rangle$

دو مجموعه فازی شهودی مثلثی باشند. با استفاده از معادله (۷.۵) داریم:

$$A_\mu(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) \neq A_\mu(\tilde{A}) + A_\mu(\tilde{B}) \quad \text{که با نتیجه } A_\mu(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = A_\mu(\tilde{A}) + A_\mu(\tilde{B}) \text{ تناقض دارد.}$$

مثال ۴.۳.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(-2, 0, 3); 0.3, 0.1] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(0, 3, 8); 0.2, 0.1] \rangle$

دو مجموعه فازی شهودی مثلثی باشند. با استفاده از معادله (۸.۵) داریم:

$$A_v(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) \neq A_v(\tilde{A}) + A_v(\tilde{B}) \quad \text{که با نتیجه } A_v(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = A_v(\tilde{A}) + A_v(\tilde{B}) \text{ تناقض دارد.}$$

مثال ۵.۳.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(1, 3, 9); 0.6, 0.4] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(2, 3, 8); 0.5, 0.3] \rangle$

دو مجموعه فازی شهودی مثلثی باشند. با استفاده از معادله (۱۰.۵) داریم:

$$V^\lambda(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) \neq V^\lambda(\tilde{A}) + V^\lambda(\tilde{B}) \quad \text{که با نتیجه } V^\lambda(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = V^\lambda(\tilde{A}) + V^\lambda(\tilde{B}) \text{ تناقض دارد.}$$

مثال ۶.۳.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(2, 3, 5); \circ/5, \circ/4] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(2, 3, 8); \circ/5, \circ/3] \rangle$ دو مجموعه های فازی شهودی مثلثی باشند. با استفاده از معادله (۲.۵) داریم:
 $A^\lambda(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) = A^\lambda(\tilde{A}) + A^\lambda(\tilde{B})$ که با نتیجه $A^\lambda(\tilde{A} \oplus \tilde{B}) \neq A^\lambda(\tilde{A}) + A^\lambda(\tilde{B})$ تناقض دارد.

۴.۵ نتایج پیشنهادی

در این بخش، برای غلبه بر محدودیت نتایج موجود که در بخش ۳.۵ اشاره شد، نتایج جدید ارائه شده است.

گزاره ۱.۴.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, a_2, a_3); w_a, u_a] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(b_1, b_2, b_3); w_b, u_b] \rangle$ دو مجموعه ی فازی شهودی مثلثی باشند. آن گاه داریم:

$$V_\mu(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) = V_\mu(\tilde{A}^*) + V_\mu(\tilde{B}^*) \quad (۱)$$

$$V_v(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) = V_v(\tilde{A}^*) + V_v(\tilde{B}^*) \quad (۲)$$

$$A_\mu(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) = A_\mu(\tilde{A}^*) + A_\mu(\tilde{B}^*) \quad (۳)$$

$$A_v(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) = A_v(\tilde{A}^*) + A_v(\tilde{B}^*) \quad (۴)$$

$$V^\lambda(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) = V^\lambda(\tilde{A}^*) + V^\lambda(\tilde{B}^*) \quad (۵)$$

$$A^\lambda(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) = A^\lambda(\tilde{A}^*) + A^\lambda(\tilde{B}^*) \quad (۶)$$

که در آن $\tilde{A}^* = \langle [(a_1, a_2, a_3); w, u] \rangle$ و $\tilde{B}^* = \langle [(b_1, b_2, b_3); w, u] \rangle$ و $u = \max(u_a, u_b)$ و $w = \min(w_a, w_b)$ و $\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^* = \langle [(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3); w, u] \rangle$

اثبات: نتایج پیشنهادی بدین صورت اثبات می گردد:

(۱) با استفاده از معادله (۵.۵) داریم:

$$V_\mu(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) = \frac{w}{\epsilon}(a_1 + b_1 + 4(a_2 + b_2) + a_3 + b_3) = \frac{w}{\epsilon}(a_1 + 4a_2 + a_3) + \frac{w}{\epsilon}(b_1 + 4b_2 + b_3) = V_\mu(\tilde{A}^*) + V_\mu(\tilde{B}^*)$$

(۲) با استفاده از معادله (۶.۵) داریم:

$$V_v(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) = \frac{(1-u)}{\epsilon}(a_1 + b_1 + 4(a_2 + b_2) + a_3 + b_3) = \frac{(1-u)}{\epsilon}(a_1 + 4a_2 + a_3) + \frac{(1-u)}{\epsilon}(b_1 + 4b_2 + b_3) = V_v(\tilde{A}^*) + V_v(\tilde{B}^*)$$

(۳) با استفاده از معادله (۷.۵) داریم:

$$A_\mu(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) = \frac{w}{\epsilon}((a_1 + b_3) - (a_1 + b_1)) = \frac{w}{\epsilon}(a_3 - a_1) + \frac{w}{\epsilon}(b_3 + b_1) = A_\mu(\tilde{A}^*) + A_\mu(\tilde{B}^*)$$

(۴) با استفاده از معادله (۸.۵) داریم:

$$A_v(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) = \frac{(1-u)}{\epsilon}((a_1 + b_3) - (a_1 + b_1)) = \frac{(1-u)}{\epsilon}(a_3 - a_1) + \frac{(1-u)}{\epsilon}(b_3 + b_1) = A_v(\tilde{A}^*) + A_v(\tilde{B}^*)$$

(۵) با استفاده از معادله (۱.۵) داریم:

$$V^\lambda(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) = V_\mu(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) + \lambda(V_v(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) - V_\mu(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*))$$

با استفاده از موارد (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{aligned} V^\lambda(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) &= V_\mu(\tilde{A}^*) + V_\mu(\tilde{B}^*) + \lambda(V_v(\tilde{A}^*) + V_v(\tilde{B}^*) - (V_\mu(\tilde{A}^*) + V_\mu(\tilde{B}^*))) = \\ &= V_\mu(\tilde{A}^*) + \lambda(V_v(\tilde{A}^*) - V_\mu(\tilde{A}^*) + V_\mu(\tilde{B}^*) + \lambda(V_v(\tilde{B}^*) - V_\mu(\tilde{B}^*))) = V^\lambda(\tilde{A}^*) + V^\lambda(\tilde{B}^*) \end{aligned}$$

(۶) با استفاده از معادله (۲.۵) داریم:

$$A^\lambda(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) = A_\mu(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) + \lambda(A_v(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) - A_\mu(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*))$$

با استفاده از موارد (۳) و (۴) داریم:

$$\begin{aligned} A^\lambda(\tilde{A}^* \oplus \tilde{B}^*) &= A_\mu(\tilde{A}^*) + A_\mu(\tilde{B}^*) + \lambda(A_v(\tilde{A}^*) + A_v(\tilde{B}^*) - (A_\mu(\tilde{A}^*) + A_\mu(\tilde{B}^*))) = \\ &= A_\mu(\tilde{A}^*) + \lambda(A_v(\tilde{A}^*) - A_\mu(\tilde{A}^*) + A_\mu(\tilde{B}^*) + \lambda(A_v(\tilde{B}^*) - A_\mu(\tilde{B}^*))) = A^\lambda(\tilde{A}^*) + A^\lambda(\tilde{B}^*) \end{aligned}$$

۵.۵ محدودیت های روش رتبه بندی موجود

لی [۹۴] به محدودیت های همه رویکردهای رتبه بندی موجود برای مقایسه مجموعه های فازی شهودی اشاره کرد و یک رویکرد رتبه بندی جدید برای مقایسه مجموعه های فازی شهودی ارائه نمود. در این بخش، به محدودیت های رویکرد رتبه بندی موجود در [۹۴] اشاره شده است.

۱.۵.۵ محدودیت های براساس روابط منطقی فازی

در بخش ۷.۲، بر اساس روابط منطقی فازی، به محدودیت رویکردهای رتبه بندی موجود در [۴۱، ۳۷] اشاره شد. در این قسمت، نشان داده می شود که تابع رتبه بندی مورد استفاده در رویکرد رتبه بندی موجود در [۹۴] برای مقایسه مجموعه های فازی شهودی نمی تواند مورد استفاده قرار گیرد و نتایج رتبه بندی که با استفاده از رویکرد رتبه بندی موجود در [۹۴] بدست آمده معتبر نیست.

مثال ۱.۵.۵. فرض کنید مجموعه های $\tilde{A} = \langle [(-a, \circ, a); w, u] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(-b, \circ, b); w, u] \rangle$ و $\tilde{C} = \langle [(c_1, c_2, c_3); w, u] \rangle$ سه مجموعه ی فازی شهودی مثلثی باشند آن گاه داریم: $\lambda L_T^\lambda(\tilde{A}) = L_T^\lambda(\tilde{B})$ برای هر $\lambda \in [0, 1]$ اما $\lambda L_T^\lambda(\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \neq L_T^\lambda(\tilde{B} \oplus \tilde{C})$ برای هر $\lambda \in [0, 1]$. یعنی $\tilde{A} \sim \tilde{B} \not\Rightarrow (\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \sim (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$ که با $\tilde{A} \sim \tilde{B} \Rightarrow (\tilde{A} \oplus \tilde{C}) \sim (\tilde{B} \oplus \tilde{C})$ تناقض دارد.

مثال ۲.۵.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(1, 3, 5); \circ/3, \circ/2] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(4, 8, 9); \circ/4, \circ/1] \rangle$ و $\tilde{C} = \langle [(-9, -8, -4); \circ/4, \circ/1] \rangle$ سه مجموعه‌ی فازی شهودی مثلثی باشند. مطابق با روش رتبه بندی موجود در [۹۴]، مقادیر $L_T^{\circ/5}(\tilde{A})$ و $L_T^{\circ/5}(\tilde{B})$ به ترتیب برابر با $\circ/6347$ و $\circ/822$ می باشند، بنابراین $\tilde{A} \prec \tilde{B}$ اما مقادیر $L_T^{\circ/5}(\tilde{A} \oplus \tilde{C})$ و $L_T^{\circ/5}(\tilde{B} \oplus \tilde{C})$ به ترتیب برابر با $\circ/2$ و $\circ$ می باشند، بنابراین $L_T^{\circ/5}(\tilde{A} \oplus \tilde{C}) > L_T^{\circ/5}(\tilde{B} \oplus \tilde{C})$ خواهد بود که با $\tilde{A} \prec \tilde{B} \Rightarrow \tilde{A} \oplus \tilde{C} \prec \tilde{B} \oplus \tilde{C}$ تناقض دارد.

۲.۵.۵ محدودیت‌هایی بر اساس ارتفاع مجموعه‌های فازی

در این بخش نشان می‌دهیم که در بعضی موارد نتایج رتبه بندی بدست آمده با استفاده از رویکرد رتبه بندی موجود در [۹۴] بستگی به میزان عضویت و عدم عضویت در مجموعه‌های فازی شهودی دارد، در صورتی که در چندین مورد رتبه بندی نتایج به میزان عضویت و عدم عضویت مجموعه‌های فازی شهودی بستگی ندارد.

فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, a_2, a_3); w_1, u_1] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_1, a_2, a_3); w_2, u_2] \rangle$ دو مجموعه‌ی فازی شهودی مثلثی باشند. مطابق با روش رتبه بندی موجود در [۹۴] دو مورد وجود دارد: مورد اول: اگر $(a_1 + 4a_2 + a_3) \neq \circ$ آن گاه مقایسه $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به مقادیر w_1 و u_1 و w_2 و u_2 بستگی دارد.

مورد دوم: اگر $(a_1 + 4a_2 + a_3) = \circ$ آن گاه $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ برای همه‌ی مقادیر w_1 و u_1 و w_2 و u_2 . یعنی مقایسه‌ی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ به مقادیر w_1 و u_1 و w_2 و u_2 بستگی ندارد.

مثال ۳.۵.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(1, 1, 1); w_1, u_1] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(1, 1, 1); w_2, u_2] \rangle$ دو مجموعه‌ی فازی شهودی مثلثی باشند. مطابق با روش رتبه بندی موجود در [۹۴] داریم:

$$(۱) \text{ اگر } L_T^{\lambda}(\tilde{A}) < L_T^{\lambda}(\tilde{B}) \text{ آن گاه } \tilde{A} \prec \tilde{B}$$

$$(۲) \text{ اگر } L_T^{\lambda}(\tilde{A}) > L_T^{\lambda}(\tilde{B}) \text{ آن گاه } \tilde{A} \succ \tilde{B}$$

$$(۳) \text{ اگر } L_T^{\lambda}(\tilde{A}) = L_T^{\lambda}(\tilde{B}) \text{ آن گاه } \tilde{A} \sim \tilde{B}$$

مثال ۴.۵.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(-2, \circ, 2); w_1, u_1] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(-2, \circ, 2); w_2, u_2] \rangle$ دو مجموعه‌ی فازی شهودی مثلثی باشند. مطابق با روش رتبه بندی موجود در [۹۴] برای تمامی مقادیر w_1 و u_1 و w_2 و u_2 ، $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ خواهد بود.

مثال ۵.۵.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(-8, 1, 4); w_1, u_1] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(-8, 1, 4); w_2, u_2] \rangle$ دو مجموعه‌ی فازی شهودی مثلثی باشند. مطابق با روش رتبه بندی موجود در [۹۴] برای تمامی مقادیر w_1 و u_1 و w_2 و u_2 ، $\tilde{A} \sim \tilde{B}$ خواهد بود.

مطابق رویکرد موجود در [۹۴]، در مورد اول، مقایسه مجموعه‌های فازی شهودی مثلثی بستگی به میزان عضویت و عدم عضویت در مجموعه‌های فازی شهودی دارد درحالی که در مورد دوم مقایسه مجموعه‌های فازی شهودی مثلثی وابسته به میزان عضویت و عدم عضویت در مجموعه‌های فازی شهودی نیست که یک تناقض است.

۶.۵ رویکرد رتبه بندی پیشنهادی

در این بخش، یک رویکرد رتبه بندی جدید برای مقایسه مجموعه های مبهم دوزنقه ای پیشنهاد شده است.

فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1, d_1); \delta_1, \rho_1] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2, d_2); \delta_2, \rho_2] \rangle$ دو مجموعه ی مبهم مثلثی باشند که در آن ها $a_1 \leq b_1 \leq c_1 \leq d_1$ و $\delta_1 \leq \rho_1$ و $a_2 \leq b_2 \leq c_2 \leq d_2$ و $\delta_2 \leq \rho_2$ برای مقایسه ی $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ از گام های زیر استفاده می کنیم.

گام اول: تبدیل $\tilde{A}$ به $\tilde{A}^*$ و $\tilde{B}$ به $\tilde{B}^*$ به شیوه ی زیر:

$$\tilde{B}^* = \langle [(a_2, b_2, c_2, d_2); \delta, \rho] \rangle \text{ و } \tilde{A}^* = \langle [(a_1, b_1, c_1, d_1); \delta, \rho] \rangle \quad (۱۳.۵)$$

که در آن $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ و $\rho = \min(\rho_1, \rho_2)$.

گام دوم: محاسبه کنید:

$$\begin{aligned} \Re_T^\lambda(\tilde{A}_\delta^*) &= \int_0^\delta \lambda(a_1 + \frac{(b_1 - a_1)\alpha}{\delta})d\alpha + \int_0^\delta (1 - \lambda)(d_1 + \frac{(c_1 - d_1)\alpha}{\delta})d\alpha \Rightarrow \Re_T^\lambda(\tilde{A}_\delta^*) = \\ &\lambda\delta(\frac{a_1 + b_1}{2}) + (1 - \lambda)\delta(\frac{c_1 + d_1}{2}) \end{aligned} \quad (۱۴.۵)$$

$$\begin{aligned} \Re_T^\lambda(\tilde{A}_{\rho - \delta}^*) &= \\ &\int_\delta^\rho (\lambda(b_1 - (\frac{\alpha - \delta}{\rho - \delta})(a_1 + (b_1 - a_1)\frac{\delta}{\rho} - b_1)))d\alpha + \int_\delta^\rho ((1 - \lambda)(c_1 - (\frac{\alpha - \delta}{\rho - \delta})(d_1 + (c_1 - d_1)\frac{\delta}{\rho} - c_1)))d\alpha, \\ &\Rightarrow \Re_T^\lambda(\tilde{A}_{\rho - \delta}^*) \Rightarrow (\rho - \delta)\{\lambda(\frac{(b_1 + a_1)}{2} + \frac{\delta}{\rho}\frac{(b_1 - a_1)}{2}) + (1 - \lambda)(\frac{(c_1 + d_1)}{2} + \frac{\delta}{\rho}\frac{(d_1 - c_1)}{2})\} \end{aligned} \quad (۱۵.۵)$$

حالا

$$\begin{aligned} \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) &= \Re_T^\lambda(\tilde{A}_\delta^*) + \Re_T^\lambda(\tilde{A}_{\rho - \delta}^*) = \\ &\lambda\{\delta(\frac{a_1 + b_1}{2}) + \frac{(\rho - \delta)}{2}(b_1 + a_1 + \frac{\delta}{\rho}(b_1 - a_1))\} + (1 - \lambda)\{\delta(\frac{c_1 + d_1}{2}) + \frac{(\rho - \delta)}{2}(c_1 + d_1 + \frac{\delta}{\rho}(d_1 - c_1))\} \end{aligned} \quad (۱۶.۵)$$

که در آن $\lambda \in [0, 1]$.

به همین ترتیب

$$\begin{aligned} \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) &= \Re_T^\lambda(\tilde{B}_\delta^*) + \Re_T^\lambda(\tilde{B}_{\rho - \delta}^*) = \\ &\lambda\{\delta(\frac{a_2 + b_2}{2}) + \frac{(\rho - \delta)}{2}(b_2 + a_2 + \frac{\delta}{\rho}(b_2 - a_2))\} + (1 - \lambda)\{\delta(\frac{c_2 + d_2}{2}) + \frac{(\rho - \delta)}{2}(c_2 + d_2 + \frac{\delta}{\rho}(d_2 - c_2))\} \end{aligned} \quad (۱۷.۵)$$

که در آن $\lambda \in [0, 1]$.

گام سوم: مقدار خاصی از λ را انتخاب کرده و موارد زیر را بررسی کنید.

$$\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) \neq \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) \text{ یا } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$$

مورد اول: اگر $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه به گام چهارم بروید.
مورد دوم: اگر $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) \neq \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه بررسی کنید که آیا $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) > \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ یا $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) < \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$.
اگر $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) > \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه تعریف می‌کنیم $\tilde{A} \succ \tilde{B}$ و اگر $\Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) < \Re_T^\lambda(\tilde{B}^*)$ آن گاه تعریف می‌کنیم $\tilde{A} \prec \tilde{B}$.
گام چهارم: موارد زیر را محاسبه کنید.

$$RM^\lambda(\tilde{A}^*) = Mode^\lambda(\tilde{A}^*) = \lambda b_1 + (1 - \lambda)c_1 \quad (۱۸.۵)$$

و

$$RM^\lambda(\tilde{B}^*) = Mode^\lambda(\tilde{B}^*) = \lambda b_2 + (1 - \lambda)c_2 \quad (۱۹.۵)$$

گام پنجم: مقدار خاصی از λ را انتخاب کرده و موارد زیر را بررسی کنید.
 $RM^\lambda(\tilde{A}^*) > RM^\lambda(\tilde{B}^*)$ یا $RM^\lambda(\tilde{A}^*) < RM^\lambda(\tilde{B}^*)$ یا $RM^\lambda(\tilde{A}^*) = RM^\lambda(\tilde{B}^*)$.
مورد اول: اگر برای مقدار انتخابی λ داشته باشیم $RM^\lambda(\tilde{A}^*) > RM^\lambda(\tilde{B}^*)$ ، آن گاه برای همان مقدار λ داریم $\tilde{A} \succ \tilde{B}$.
مورد دوم: اگر برای مقدار انتخابی λ داشته باشیم $RM^\lambda(\tilde{A}^*) < RM^\lambda(\tilde{B}^*)$ ، آن گاه برای همان مقدار λ داریم $\tilde{A} \prec \tilde{B}$.
مورد سوم: اگر برای مقدار انتخابی λ داشته باشیم $RM^\lambda(\tilde{A}^*) = RM^\lambda(\tilde{B}^*)$ ، آن گاه برای همان مقدار λ داریم $\tilde{A} \sim \tilde{B}$.

۱.۶.۵ موارد خاص

از آنجا که مجموعه‌های مبهم دوزنقه‌ای تعمیم یافته‌ی مجموعه‌های فازی مثلثی نرمال، مجموعه‌های فازی دوزنقه‌ای، مجموعه‌های فازی مثلثی تعمیم یافته، مجموعه‌های فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته و مجموعه‌های مثلثی مبهم هستند، بنابراین می‌توان از رویکرد رتبه بندی اخیر برای مقایسه این مجموعه‌ها با در نظر گرفتن فرضیات زیر استفاده کرد.

(۱). با فرض $b_1 = c_1 = b'_1$ و $b_2 = c_2 = b'_2$ ، از رویکرد رتبه بندی پیشنهادی می‌توان برای مقایسه مجموعه‌های مبهم مثلثی $\tilde{A} = \langle [(a_1, b'_1, d_1); \delta, \rho] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b'_2, d_2); \delta, \rho] \rangle$ استفاده کرد.

(۲). با فرض $\delta = \rho = \delta'_1$ ، از روش رتبه بندی پیشنهادی می‌توان برای مقایسه مجموعه‌های فازی دوزنقه‌ای تعمیم یافته $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; \delta'_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; \delta'_1)$ استفاده کرد.

(۳). با فرض $b_1 = c_1 = b'_1$ و $\delta = \rho = \delta'_1$ و $b_2 = c_2 = b'_2$ ، از روش رتبه بندی پیشنهادی می‌توان برای مقایسه مجموعه‌های فازی مثلثی تعمیم یافته $\tilde{A} = \langle [(a_1, b'_1, d_1; \delta'_1)] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b'_2, d_2; \delta'_1)] \rangle$ استفاده کرد.

(۴). با فرض $\delta = \rho = 1$ از روش رتبه بندی پیشنهادی می‌توان برای مقایسه مجموعه‌های فازی دوزنقه‌ای $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1, d_1)] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2, d_2)] \rangle$ استفاده کرد.

های فازی دوزنقه ای $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1, d_1; 1)] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2, d_2; 1)] \rangle$ استفاده کرد. (۵). با فرض $b_1 = c_1 = b'_1$ و $\delta = \rho = 1$ و $b_2 = c_2 = b'_2$ ، از روش رتبه بندی پیشنهادی می توان برای مقایسه مجموعه های فازی مثلثی $\tilde{A} = \langle [(a_1, b'_1, d_1; 1)] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b'_2, d_2; 1)] \rangle$ استفاده کرد.

۲.۶.۵ مثال های عددی

در این بخش، برای نشان دادن رویکرد رتبه بندی پیشنهادی چند مجموعه مبهم مثلثی و دوزنقه ای مقایسه می شوند.

مثال ۱.۶.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(5, 7, 9); \circ/4, \circ/8] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(2, 4, 8); \circ/2, \circ/9] \rangle$ دو مجموعه مبهم مثلثی باشند. $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را می توان با استفاده از مراحل زیر مقایسه کرد.

گام اول: با استفاده از معادله (۱۳.۵) داریم:

$$\tilde{A}^* = \langle [(5, 7, 9); \min(\circ/2, \circ/4), \min(\circ/8, \circ/9)] \rangle$$

و

$$\tilde{B}^* = \langle [(2, 4, 8); \min(\circ/2, \circ/4), \min(\circ/8, \circ/9)] \rangle$$

گام دوم: با استفاده از معادله (۱۶.۵) داریم:

$$\Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = 2/7\lambda + 2/45(1 - \lambda) \text{ و } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = 4/95\lambda + 3/25(1 - \lambda)$$

گام سوم: برای یک تصمیم گیرنده بدبین، یعنی برای $\lambda = \circ$ داریم:

$$\Re_T^\circ(\tilde{A}^*) = 3/25 \text{ و } \Re_T^\circ(\tilde{B}^*) = 2/45 \text{ بنابراین } \Re_T^\circ(\tilde{A}^*) > \Re_T^\circ(\tilde{B}^*) \text{ یعنی } \tilde{A} \succ \tilde{B}$$

برای یک تصمیم گیرنده خوش بین، یعنی برای $\lambda = 1$ داریم:

$$\Re_T^1(\tilde{A}^*) = 4/95 \text{ و } \Re_T^1(\tilde{B}^*) = 2/7 \text{ بنابراین } \Re_T^1(\tilde{A}^*) > \Re_T^1(\tilde{B}^*) \text{ یعنی } \tilde{A} \succ \tilde{B}$$

برای یک تصمیم گیرنده میانه، یعنی برای $\lambda = \circ/5$ داریم:

$$\Re_T^{\circ/5}(\tilde{A}^*) = 4/15 \text{ و } \Re_T^{\circ/5}(\tilde{B}^*) = 2/6 \text{ بنابراین } \Re_T^{\circ/5}(\tilde{A}^*) > \Re_T^{\circ/5}(\tilde{B}^*) \text{ یعنی } \tilde{A} \succ \tilde{B}$$

مثال ۲.۶.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(3, 7, 14); \circ/2, \circ/7] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(1, 6, 9); \circ/3, \circ/4] \rangle$ دو مجموعه مبهم مثلثی باشند. $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را می توان با استفاده از مراحل زیر مقایسه کرد:

گام اول: با استفاده از معادله (۱۳.۵) داریم:

$$\tilde{A}^* = \langle [(3, 7, 14); \circ/2, \circ/4] \rangle \text{ و } \tilde{B}^* = \langle [(1, 6, 9); \circ/3, \circ/4] \rangle$$

گام دوم: با استفاده از معادله (۱۶.۵) داریم:

$$\Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = 1/65\lambda + 3/15(1 - \lambda) \text{ و } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = 2/25\lambda + 4/35(1 - \lambda)$$

گام سوم: برای یک تصمیم گیرنده بدبین، یعنی برای $\lambda = \circ$ داریم:

$$\Re_T^\circ(\tilde{A}^*) = 4/35 \text{ و } \Re_T^\circ(\tilde{B}^*) = 3/15 \text{ بنابراین } \Re_T^\circ(\tilde{A}^*) > \Re_T^\circ(\tilde{B}^*) \text{ یعنی } \tilde{A} \succ \tilde{B}$$

برای یک تصمیم گیرنده خوش بین، یعنی برای $\lambda = 1$ داریم:

$$\Re_T^1(\tilde{A}^*) = 2/25 \text{ و } \Re_T^1(\tilde{B}^*) = 1/65 \text{ بنابراین } \Re_T^1(\tilde{A}^*) > \Re_T^1(\tilde{B}^*) \text{ یعنی } \tilde{A} \succ \tilde{B}$$

برای یک تصمیم گیرنده میانه، یعنی برای $\lambda = 0.5$ داریم:

$$\tilde{A} \succ \tilde{B} \text{ یعنی } \Re^0/\Delta_T(\tilde{A}^*) > \Re^0/\Delta_T(\tilde{B}^*) \text{ بنابر این } \Re^0/\Delta_T(\tilde{B}^*) = 2/4 \text{ و } \Re^0/\Delta_T(\tilde{A}^*) = 3/3$$

مثال ۳.۶.۵. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(1, 2, 3, 4); 0.5, 0.6] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(2, 4, 5, 6, 1); 0.6, 0.8] \rangle$

دو مجموعه مبهم باشند. $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ را می توان با استفاده از مراحل زیر مقایسه کرد:

گام اول: با استفاده از معادله (۱۳.۵) داریم:

$$\tilde{B}^* = \langle [(2, 4, 5, 6, 1); 0.5, 0.6] \rangle \text{ و } \tilde{A}^* = \langle [(1, 2, 3, 4); 0.5, 0.6] \rangle$$

گام دوم: با استفاده از معادله (۱۶.۵) داریم:

$$\Re_T^\lambda(\tilde{B}^*) = 1/88\lambda + 3/34(1 - \lambda) \text{ و } \Re_T^\lambda(\tilde{A}^*) = 0.942\lambda + 2/14(1 - \lambda)$$

گام سوم: برای یک تصمیم گیرنده بدبین، یعنی برای $\lambda = 0$ داریم:

$$\tilde{A} \prec \tilde{B} \text{ یعنی } \Re_T^0(\tilde{A}^*) < \Re_T^0(\tilde{B}^*) \text{ بنابر این } \Re_T^0(\tilde{B}^*) = 3/34 \text{ و } \Re_T^0(\tilde{A}^*) = 2/24$$

برای یک تصمیم گیرنده خوش بین، یعنی برای $\lambda = 1$ داریم: $\Re_T^1(\tilde{A}^*) = 0.942$ و

$$\Re_T^1(\tilde{B}^*) = 1/88 \text{ بنابر این } \Re_T^1(\tilde{A}^*) < \Re_T^1(\tilde{B}^*) \text{ یعنی } \tilde{A} \prec \tilde{B}$$

برای یک تصمیم گیرنده میانه، یعنی برای $\lambda = 0.5$ داریم:

$$\tilde{A} \prec \tilde{B} \text{ یعنی } \Re_T^{0.5}(\tilde{A}^*) < \Re_T^{0.5}(\tilde{B}^*) \text{ بنابر این } \Re_T^{0.5}(\tilde{B}^*) = 2/6 \text{ و } \Re_T^{0.5}(\tilde{A}^*) = 1/54$$

۷.۵ مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم دوزنقه ای

اگر در مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی (P_1) پارامترهای $\tilde{c}_j$ توسط مجموعه های مبهم دوزنقه ای $\langle [(c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}); \delta_j, \rho_j] \rangle$ معرفی شوند، آن گاه مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه فازی (P_1) را می توان به مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه مبهم دوزنقه ای (P_3) تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n \langle [c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}; \delta_j, \rho_j] \rangle x_j \right) \\ & \text{s.t.} \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ji} x_j \geq, =, \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m. \quad (P_3)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \Re_T^{0.5}(\tilde{c}_j x_j) = a \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

۱.۷.۵ کاربرد رویکرد رتبه بندی پیشنهادی

برای نشان دادن کاربرد رویکرد رتبه بندی پیشنهادی در مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم، مسئله انتخاب شده در مثال ۱.۷.۵، با استفاده از روش پیشنهادی در فصل ۴ با

رویکرد رتبه بندی پیشنهاد شده حل می شود.

مثال ۱.۷.۵. حل کنید

$$\text{Maximize } (< [(1, 2, 3, 4); \circ/5, \circ/6] > x_1 \oplus < [(2, 4, 5, 6); \circ/7, \circ/7] > x_2)$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq -1$$

$$x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq \circ$$

راه حل:

با استفاده از روش ارائه شده در فصل ۴، با گام های زیر می توان این مسئله را حل کرد:

گام اول:

با استفاده از تعریف ۲.۳.۲ و بر اساس رویکرد رتبه بندی پیشنهادی، جواب بهینه مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم دوزنقه ای انتخاب شده را می توان با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی زیر بدست آورد:

$$\text{Maximize } (\mathcal{R}_T^{\circ/5}(< [(1, 2, 3, 4); \circ/5, \circ/6] > x_1 \oplus < [(2, 4, 5, 6); \circ/7, \circ/9] > x_2))$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq -1$$

$$x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq \circ$$

گام دوم:

با استفاده از خاصیت خطی

$$\mathcal{R}_T^{\circ/5} \sum_{j=1}^n (< [(a_j, b_j, c_j, d_j); \delta, \rho] > x_j) = \sum_{j=1}^n \mathcal{R}_T^{\circ/5} (< [(a_j, b_j, c_j, d_j); \delta, \rho] > x_j)$$

مسئله برنامه ریزی خطی قطعی که در مرحله ۱ بدست آمده است را می توان به صورت زیر

نوشت:

$$\text{Maximize } (\mathcal{R}_T^{\circ/5}(< [(1, 2, 3, 4); \circ/5, \circ/6] > x_1) + \mathcal{R}_T^{\circ/5}(< [(2, 4, 5, 6); \circ/5, \circ/6] > x_2))$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq -1$$

$$x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

گام سوم: با استفاده از معادله ی

$$\mathcal{R}_T^{\circ/\delta} < [(a, b, c, d); \delta, \rho] > = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta}{\rho} (a+b+c+d) + \frac{(\rho-\delta)}{\rho} ((a+b+c+d) + \frac{\delta}{\rho} (-a+b+d-c)) \right\}$$

مسئله برنامه ریزی خطی قطعی که در مرحله ۲ بدست آمده است را می توان به صورت زیر

نوشت:

$$\text{Maximize} \quad \left(\frac{771}{50} x_1 + \frac{653}{250} x_2 \right)$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \geq -1$$

$$x_2 \leq 7$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

گام چهارم:

پس از حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی بدست آمده در مرحله ۳، جواب بهینه بدست

آمده به صورت $x_2 = 0$ ، $x_1 = 5$ است. با قرار دادن مقادیر $x_2 = 0$ ، $x_1 = 5$ در معادله ی

$$< [(1, 2, 3, 4); 0/5, 0/6] > x_1 \oplus < [(2, 4, 5, 6); 0/7, 0/7] > x_2$$

انتخاب شده برابر است با $< [(5, 10, 15, 20); 0/5, 0/6] >$.

فصل ۶

حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های دوزنقه ای مبهم با رویکرد رتبه بندی $RMDS$

چندین محقق [۶، ۵۵، ۵۷، ۵۶، ۵۸] از روش موجود در [۱۱] برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی استفاده کرده اند. در این فصل نشان داده می شود که نتایجی که توسط محققان برای حل مسائل برنامه ریزی خطی، با استفاده از روش موجود در [۱۱] بدست آمده و نتایجی که برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های تعمیم یافته و مبهم با استفاده از روش های ارائه شده در فصل های قبلی بدست آمده [۹۹]، برای حل بعضی از مسائل خاص کافی نیستند. همچنین، نشان داده می شود که محدودیت های موجود در نتایج، به علت رویکرد های رتبه بندی موجود و پیشنهادی که برای مقایسه مجموعه های فازی و مبهم استفاده می شود، رخ می دهد. برای غلبه بر محدودیت های روش های موجود و پیشنهادی، روش رتبه بندی جدیدی به نام رویکرد رتبه بندی $RMDS$ برای مقایسه مجموعه های مبهم دوزنقه ای که دارای درجه عضویت و عدم عضویت برابر هستند پیشنهاد می شود [۹۹]. براساس رویکرد رتبه بندی پیشنهادی $RMDS$ ، یک روش جدید برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم دوزنقه ای پیشنهاد شده است [۹۹]. برای نشان دادن مزایای رویکرد پیشنهادی تعدادی از مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی و مبهم که نتایج بدست

آمده با استفاده از روش های موجود و روش های پیشنهادی برای حل آن ها مناسب نیستند را انتخاب کرده و با حل این مسائل با استفاده از روش پیشنهادی *RMDS* نشان می دهیم که نتایج بدست آمده مناسب است.

۱.۶ کاستی های روش های موجود

فرض کنید $\{x_j\}$ و A به ترتیب جواب بهینه و مقدار بهینه یک مسئله برنامه ریزی خطی باشند. اگر یک جواب شدنی مانند $\{y_j\}$ از همان مسئله برنامه ریزی خطی موجود باشد به گونه ای که مقدار تابع هدف مسئله برنامه ریزی خطی مربوط به $\{y_j\}$ همچنان برابر A باشد، آن گاه می گوییم که $\{y_j\}$ یک جواب بهینه دگرین برای همان مسئله برنامه ریزی خطی می باشد، در واقع به ازای تمام جواب های بهینه دگرین، مقادیر تابع هدف باید یکسان باشد.

در این بخش نشان داده می شود که نتایج بدست آمده از روش های موجود و روش های پیشنهادی قبلی با این ویژگی جواب های بهینه دگرین در تضاد است. یعنی با استفاده از روش های موجود مقدار تابع هدف مربوطه برای همه جواب های بهینه دگرین یکسان نیستند. به عنوان مثال، نتایج مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه فازی مثلثی نرمال، که در مثال ۱.۱.۶ انتخاب شده است با استفاده از روش های موجود و پیشنهادی با این ویژگی جواب بهینه دگرین در تضاد است.

مثال ۱.۱.۶. مسئله زیر را حل کنید.

$$\text{Maximize}((4, 8, 12; 1)x_1 \oplus (6, 8, 10; 1)x_2)$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 > 0$$

راه حل: با حل مسئله با استفاده از روش های موجود [۱۱] و پیشنهادی در ۷.۵ جواب های بهینه دگرین زیر بدست می آید:

مورد اول: $x_1 = 10$ و $x_2 = 0$

مورد دوم: $x_1 = 0$ و $x_2 = 10$

با قرار دادن $x_1 = 10$ و $x_2 = 0$ در $(4, 8, 12; 1)x_1 \oplus (6, 8, 10; 1)x_2$ مقدار بهینه فازی بدست آمده برابر است با $(40, 80, 120; 1)$.

متشابه با قرار دادن $x_1 = 0$ و $x_2 = 10$ در $(4, 8, 12; 1)x_1 \oplus (6, 8, 10; 1)x_2$ مقدار بهینه فازی بدست آمده برابر است با $(60, 80, 100; 1)$.

از نتایج این مجموعه های فازی مثلثی نرمال، واضح است که مقادیر بهینه فازی مطابق با دو جواب بهینه، دارای رتبه برابر نیستند که با ویژگی جواب بهینه دگرین در تضاد می باشد.

۲.۶ روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی کافمن و گوپتا

کافمن و گوپتا [۸۰] سه پارامتر رتبه، میانگین و واگرایی را برای یک مجموعه فازی مثلثی نرمال تعریف کردند و رویکردی برای رتبه بندی براساس این پارامترها، برای مقایسه مجموعه های فازی مثلثی نرمال ارائه کردند.

در این بخش، رویکرد رتبه بندی موجود در [۸۰] ارائه می شود. همچنین برای غلبه بر محدودیت های روش موجود در [۱۱] یک روش جدید برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی مثلثی نرمال ارائه شده است.

۱.۲.۶ رویکرد رتبه بندی کافمن و گوپتا

در این بخش، رویکرد رتبه بندی موجود ارائه شده است.

اگر $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1; 1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2; 1)$ دو مجموعه ی فازی مثلثی نرمال باشند. آن گاه از مراحل زیر برای مقایسه استفاده کنید.

مرحله اول: موارد زیر را محاسبه کنید.

$$\Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) = \frac{1}{6}(a_2 + 2b_2 + c_2) \text{ و } \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \frac{1}{6}(a_1 + 2b_1 + c_1)$$

مورد اول: اگر $\Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) > \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \succ \tilde{B}$

مورد دوم: اگر $\Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) < \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \prec \tilde{B}$

مورد سوم: اگر $\Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$ باشد، به گام دوم بروید.

گام دوم: محاسبه کنید: $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = b_1$ و $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) = b_2$.

مورد اول: اگر $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) > Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \succ \tilde{B}$

مورد دوم: اگر $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) < Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \prec \tilde{B}$

مورد سوم: اگر $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$ ، به گام سوم بروید.

گام سوم: محاسبه کنید.

$$Divergence(\tilde{A}) = (c_1 - a_1) \text{ و}$$

$$Divergence(\tilde{B}) = (c_2 - a_2)$$

مورد اول: اگر $Divergence(\tilde{A}) > Divergence(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \succ \tilde{B}$

مورد دوم: اگر $Divergence(\tilde{A}) < Divergence(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \prec \tilde{B}$

مورد سوم: اگر $Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} = \tilde{B}$

توجه: میانگین و واگرایی برای یک مجموعه مبهم مثلثی $\tilde{A} = \langle (a, b, c); \delta, \rho \rangle$ به ترتیب

به صورت $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = b$ و $Divergence(\tilde{A}) = c - a$ تعریف می شوند.

توجه: میانگین و واگرایی برای یک مجموعه مبهم دوزنقه ای $\tilde{A} = \langle [a, b, c, d]; \delta, \rho \rangle$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$Divergence(\tilde{A}) = d - a \text{ و } Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \frac{(b+c)}{2}$$

۲.۲.۶ روش پیشنهادی

در این بخش، برای غلبه بر کاستی های روش موجود در [۱۱]، بر اساس رویکرد رتبه بندی کافمن و گوپتا در [۸۰]، روشی جدید برای یافتن جواب بهینه فازی مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی ارائه شده است.

مراحل روش پیشنهادی به شرح زیر است:

مرحله اول: برای حل مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی نرمال انتخاب شده (P_1) از مرحله ۱ تا مرحله ۶ از روش پیشنهادی در فصل ۲ استفاده کنید و بررسی کنید جواب بهینه دگرین وجود دارد یا خیر.

مورد اول: اگر هیچ جواب بهینه دگرینی وجود نداشته باشد، جواب $\{x_j\}$ جواب بهینه است و با قرار دادن مقدار $\{x_j\}$ در عبارت $\sum_{j=1}^n (\tilde{c}_j x_j)$ مقدار بهینه فازی را بدست آورید.

مورد دوم: اگر جواب بهینه دگرین وجود داشت، به مرحله ۲ بروید.

مرحله دوم: مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_4) را حل کنید و بررسی کنید جواب بهینه دگرین وجود دارد یا نه.

$$Maximize(or Minimize) \left(\sum_{j=1}^n Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{c}_j x_j) \right)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j) \geq \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (P_4)$$

$$\sum_{j=1}^n \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{c}_j x_j) = a$$

$$x_j \geq 0$$

که در آن، a مقدار بهینه مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_5) است.

مورد اول: اگر هیچ جواب بهینه دگرینی وجود نداشته باشد، جواب $\{x_j\}$ جواب بهینه است و با قرار دادن مقدار $\{x_j\}$ در عبارت $\sum_{j=1}^n (\tilde{c}_j x_j)$ مقدار بهینه فازی را بدست آورید.

مورد دوم: اگر جواب بهینه دگرین وجود داشت، به مرحله ۳ بروید.

مرحله سوم: مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_5) را حل کنید و بررسی کنید که جواب بهینه دگرین وجود دارد یا خیر.

$$Maximize(or Minimize) \left(\sum_{j=1}^n Divergence(\tilde{c}_j x_j) \right)$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \geq \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (P_{15})$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{c}_j x_j) &= a \\ \sum_{j=1}^n \text{Mode}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{c}_j x_j) &= b \\ x_j &\geq 0 \end{aligned}$$

که در آن، b مقدار بهینه مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_{14}) است
جواب بدست آمده جواب بهینه است و مقدار بهینه فازی منحصر به فرد با قرار دادن مقدار x_j در $\sum_{j=1}^n (\tilde{c}_j x_j)$ بدست می آید.

۳.۶ مزیت روش پیشنهادی بر اساس رویکرد رتبه بندی کافمن و گوپتا

برای نشان دادن مزیت روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی کافمن و گوپتا، مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی مثلثی نرمال که در مثال ۱.۱.۶ انتخاب شده است را با استفاده از این روش حل می کنیم و نشان می دهیم که تمام کاستی های رخ داده در نتایج قبلی برطرف می شوند.

۱.۳.۶ حل مسئله انتخاب شده

مسئله برنامه ریزی خطی که در مثال ۱.۱.۶ انتخاب شده است را با استفاده از روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد کافمن و گوپتا حل می کنیم:

مرحله اول: در حل مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی مثلثی نرمال با استفاده از روش موجود در [۱۱] و روش های پیشنهادی، یک جواب بهینه دگرین بدست می آید که مقدار بهینه مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_6) برابر 8^0 است. بنابراین با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی زیر، جواب بهینه مسئله انتخاب شده بدست می آید.

$$\text{Maximize} \quad (\text{Mode}^{\circ/\Delta}(4, 8, 12; 1)x_1 + \text{Mode}^{\circ/\Delta}(6, 8, 10; 1)x_2)$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 1^0$$

$$x_1 + x_2 \geq 1^0$$

$$\Re_T^{\circ/\Delta}((4, 8, 12; 1)x_1) + \Re_T^{\circ/\Delta}((6, 8, 10; 1)x_2) = 8^0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مرحله دوم: با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی، که در مرحله ۱ بدست آمده است، جواب بهینه دگرین بدست می آید. از آنجا که مقدار بهینه مسئله برنامه ریزی خطی قطعی ۸ است بنابراین می توان جواب مسئله انتخاب شده را با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی زیر بدست آورد:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad (Divergence^{\circ/\Delta}(\mathcal{F}, \mathcal{L}, 12; 1)x_1 + Divergence^{\circ/\Delta}(\mathcal{F}, \mathcal{L}, 10; 1)x_2) \\ & \text{s.t.} \\ & x_1 + x_2 \leq 10 \\ & x_1 + x_2 \geq 10 \\ & \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}((\mathcal{F}, \mathcal{L}, 12; 1)x_1) + \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}((\mathcal{F}, \mathcal{L}, 10; 1)x_2) = 80 \\ & (Mode^{\circ/\Delta}(\mathcal{F}, \mathcal{L}, 12; 1)x_1 + Mode^{\circ/\Delta}(\mathcal{F}, \mathcal{L}, 10; 1)x_2) = 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله سوم: در حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی بدست آمده در مرحله ۲، جواب بهینه بدست آمده $x_1 = 10$ و $x_2 = 0$ است. با قرار دادن $x_1 = 10$ و $x_2 = 0$ در $((\mathcal{F}, \mathcal{L}, 12; 1)x_1) \oplus ((\mathcal{F}, \mathcal{L}, 10; 1)x_2)$ مقدار بهینه فازی مسئله انتخاب شده برابر $(\mathcal{F}_0, \mathcal{L}_0, 120; 1)$ است.

۴.۶ محدودیت های روش پیشنهادی بر اساس رویکرد رتبه بندی کافمن و گوپتا

در این بخش، نشان می دهیم که می توان از روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی کافمن و گوپتا برای یافتن جواب بهینه مناسب برای آن دسته از مسائل برنامه ریزی خطی که در آن ها پارامترها توسط مجموعه های فازی مثلثی نرمال یا مجموعه های فازی مثلثی تعمیم یافته با ارتفاع یکسان یا مجموعه های مبهم مثلثی نمایش داده می شوند، استفاده کرد، اما ازاین روش نمی توان برای حل آن دسته از مسائل برنامه ریزی خطی که در آن پارامترها توسط مجموعه های فازی دوزنقه ای یا مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و یا مجموعه های مبهم دوزنقه ای نمایش داده می شوند، استفاده کرد. نتایج روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد کافمن و گوپتا با توجه به داشتن ویژگی زیر، مناسب هستند:

اگر $\tilde{A}$ و $\tilde{B}$ دو مجموعه فازی مثلثی نرمال یا دو مجموعه فازی مثلثی تعمیم یافته با ارتفاع مساوی یا مجموعه های مبهم مثلثی باشند به طوری که داشته باشیم: $\mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$ و $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$ و $Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} = \tilde{B}$.

در گزاره ۱.۴.۶ تا گزاره ۶.۴.۶ ثابت شده است که اگر این سه شرط برای مجموعه های فازی دوزنقه ای نرمال یا مجموعه های دوزنقه ای تعمیم یافته یا مجموعه های مبهم دوزنقه ای برقرار باشند آن گاه مجموعه های منتخب ممکن است با هم برابر نباشند. با توجه به همین دلیل، روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد کافمن و گوپتا برای آن دسته از مسائل برنامه ریزی خطی که در آن پارامترها توسط مجموعه های فازی دوزنقه ای نرمال یا مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و یا مجموعه های مبهم دوزنقه ای نمایش داده می شوند، استفاده نمی شود.

گزاره ۱.۴.۶. فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1; 1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2; 1)$ دو مجموعه فازی مثلثی نرمال باشند به گونه ای که

$$\mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \quad (1)$$

$$Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \quad (2)$$

$$Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B}) \quad (3)$$

آن گاه $\tilde{A} = \tilde{B}$

اثبات: با استفاده از معادله (۳۸.۲) داریم:

$$\mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) = \frac{1}{6}(a_2 + 2b_2 + c_2) \text{ و } \mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \frac{1}{6}(a_1 + 2b_1 + c_1)$$

از معادله (۱) داریم:

$$(1.6) \quad \mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \Rightarrow (a_1 + 2b_1 + c_1) = (a_2 + 2b_2 + c_2)$$

با استفاده از معادله (۴.۴) داریم: $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = b_1$ و $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) = b_2$

از معادله (۲) داریم: $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A})$ بنابراین

$$(2.6) \quad b_1 = b_2$$

از معادله (۳) داریم: $Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B})$

بنابراین

$$(3.6) \quad (c_1 - a_1) = (c_2 - a_2)$$

با حل (۱.۶) و (۲.۶) و (۳.۶) داریم $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$ و $c_1 = c_2$ بنابراین $\tilde{A} = \tilde{B}$

گزاره ۲.۴.۶. فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1; w)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2; w)$ دو مجموعه فازی مثلثی تعمیم یافته باشند به گونه ای که

$$\mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \quad (1)$$

$$Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \quad (2)$$

$$Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B}) \quad (3)$$

آن گاه $\tilde{A} = \tilde{B}$

اثبات: با استفاده از معادله (۳۸.۲) داریم:

$$\mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) = \frac{w}{6}(a_2 + 2b_2 + c_2) \text{ و } \mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \frac{w}{6}(a_1 + 2b_1 + c_1)$$

از معادله (۱) داریم:

$$(۴.۶) \quad \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \Rightarrow w(a_1 + 2b_1 + c_1) = w(a_2 + 2b_2 + c_2)$$

با استفاده از معادله (۴.۴) داریم: $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) = b_2$ و $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = b_1$

از معادله (۲) داریم: $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A})$ بنابراین

$$(۵.۶) \quad wb_1 = wb_2$$

از معادله (۳) داریم: $Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B})$

بنابراین

$$(۶.۶) \quad (c_1 - a_1) = (c_2 - a_2)$$

با حل (۴.۶) و (۵.۶) و (۶.۶) داریم $a_1 = a_2$ و $b_1 = b_2$ و $c_1 = c_2$ بنابراین $\tilde{A} = \tilde{B}$.

گزاره ۳.۴.۶. فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; w)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; w)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای تعمیم یافته باشند به طوریکه

$$(۱) \quad \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$$

$$(۲) \quad Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$$

$$(۳) \quad Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B})$$

آن گاه $\tilde{A} \neq \tilde{B}$.

اثبات: با استفاده از معادله (۲.۳۸) داریم:

$$\mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) = \frac{1}{4}(a_2 + b_2 + c_2 + d_2) \text{ و } \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \frac{1}{4}(a_1 + b_1 + c_1 + d_1)$$

با استفاده از (۱) داریم $\mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$ بنابراین

$$(۷.۶) \quad w(a_1 + b_1 + c_1 + d_1) = w(a_2 + b_2 + c_2 + d_2)$$

با استفاده از معادله (۴.۴) داریم:

$$Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) = \frac{1}{2}(b_2 + c_2) \text{ و } Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \frac{1}{2}(b_1 + c_1)$$

از معادله (۲) داریم $Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$ بنابراین

$$(۸.۶) \quad w(b_1 + c_1) = w(b_2 + c_2)$$

از معادله (۳) داریم: $Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B})$ بنابراین

$$(۹.۶) \quad (d_1 - a_1) = (d_2 - a_2)$$

از حل (۷.۶)، (۸.۶) و (۹.۶) داریم $a_1 = a_2$ و $d_1 = d_2$ بنابراین

$$\tilde{A} \neq \tilde{B} \text{ یعنی } (a_1, b_1, c_1, d_1; w) \neq (a_2, b_2, c_2, d_2; w)$$

گزاره ۴.۴.۶. فرض کنید $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; 1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; 1)$ دو مجموعه فازی دوزنقه ای باشند به گونه ای که

$$(۱) \quad \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$$

$$(۲) \quad Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B})$$

$$(۳) \quad Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B})$$

آن گاه $\tilde{A} \neq \tilde{B}$.

اثبات: با قرار دادن $w = 1$ در گزاره ۳.۴.۶ داریم $a_1 = a_2$ و $d_1 = d_2$ بنابراین

$$\tilde{A} \neq \tilde{B} \text{ یعنی } (a_1, b_1, c_1, d_1; 1) \neq (a_2, b_2, c_2, d_2; 1)$$

گزاره ۵.۴.۶. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1); \delta, \rho] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2); \delta, \rho] \rangle$ دو مجموعه ی مبهم مثلثی باشند به گونه ای که

$$\Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \quad (1)$$

$$Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \quad (2)$$

$$Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B}) \quad (3)$$

آن گاه $\tilde{A} = \tilde{B}$.

اثبات: با استفاده از تساوی (۱۶.۵) داریم:

$$\begin{aligned} \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta}{\rho} (a_1 + 2b_1 + c_1) + \frac{(\rho-\delta)}{\rho} ((a_1 + 2b_1 + c_1) + \frac{\delta}{\rho} (-a_1 + c_1)) \right\} \\ \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta}{\rho} (a_2 + 2b_2 + c_2) + \frac{(\rho-\delta)}{\rho} ((a_2 + 2b_2 + c_2) + \frac{\delta}{\rho} (-a_2 + c_2)) \right\} \end{aligned}$$

از (۱) داریم:

$$\begin{aligned} \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) &\Rightarrow \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta}{\rho} (a_1 + 2b_1 + c_1) + \frac{(\rho-\delta)}{\rho} ((a_1 + 2b_1 + c_1) + \frac{\delta}{\rho} (-a_1 + c_1)) \right\} = \\ &\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta}{\rho} (a_2 + 2b_2 + c_2) + \frac{(\rho-\delta)}{\rho} ((a_2 + 2b_2 + c_2) + \frac{\delta}{\rho} (-a_2 + c_2)) \right\} \end{aligned}$$

(۶.۱۰)

با استفاده از تساوی (۱۸.۵) داریم:

$$Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) = b_2 \text{ و } Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = b_1$$

از (۲) داریم:

$$Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \Rightarrow b_1 = b_2 \quad (۶.۱۱)$$

از (۳) داریم:

$$Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B}) \Rightarrow (c_1 - a_1) = (c_2 - a_2) \quad (۶.۱۲)$$

از حل (۶.۱۰)، (۶.۱۱) و (۶.۱۲) داریم $b_1 = b_2$ و $a_1 = a_2$ بنابراین $\tilde{A} = \tilde{B}$.

گزاره ۶.۴.۶. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1, d_1); \delta, \rho] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2, d_2); \delta, \rho] \rangle$ دو مجموعه ی مبهم دوزنقه ای باشند به گونه ای که

$$\Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \quad (1)$$

$$Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \quad (2)$$

$$Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B}) \quad (3)$$

آن گاه $\tilde{A} \neq \tilde{B}$.

اثبات: با استفاده از تساوی (۱۶.۵) داریم:

$$\begin{aligned} \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta}{\rho} (a_1 + 2b_1 + c_1, d_1) + \frac{(\rho-\delta)}{\rho} ((a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + \frac{\delta}{\rho} (-a_1 + d_1)) \right\} \\ \Re_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) &= \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta}{\rho} (a_2 + 2b_2 + c_2, d_2) + \frac{(\rho-\delta)}{\rho} ((a_2 + 2b_2 + c_2, d_2) + \frac{\delta}{\rho} (-a_2 + d_2)) \right\} \end{aligned}$$

از (۱) داریم:

$$\begin{aligned} \Re_T^{\circ/\delta}(\tilde{A}) = \Re_T^{\circ/\delta}(\tilde{B}) &\Rightarrow \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta}{\rho} (a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + \frac{(\rho - \delta)}{\rho} ((a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + \frac{\delta}{\rho} (-a_1 + d_1)) \right\} = \\ \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta}{\rho} (a_2 + b_2 + c_2 + d_2) + \frac{(\rho - \delta)}{\rho} ((a_2 + b_2 + c_2 + d_2) + \frac{\delta}{\rho} (-a_2 + d_2)) \right\} \\ (۱۳.۶) \end{aligned}$$

با استفاده از معادله (۱۸.۵):

$$Mode^{\circ/\delta}(\tilde{B}) = b_2 + c_2 \text{ و } Mode^{\circ/\delta}(\tilde{A}) = b_1 + c_1$$

از (۲) داریم:

$$(۱۴.۶) \quad Mode^{\circ/\delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\delta}(\tilde{B}) \Rightarrow (b_1 + c_1) = (b_2 + c_2)$$

از آنجا که

$$Divergence(\tilde{B}) = (d_2 - a_2) \text{ و } Divergence(\tilde{A}) = (d_1 - a_1)$$

از (۳) داریم:

$$(۱۵.۶) \quad Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B}) \Rightarrow (d_1 - a_1) = (d_2 - a_2)$$

از حل (۱۳.۶)، (۱۴.۶) و (۱۵.۶) داریم $d_1 = d_2$ و $a_1 = a_2$ بنابراین

$$.< [(a_1, b_1, c_1, d_1); \delta, \rho] > \neq < [(a_2, b_2, c_2, d_2); \delta, \rho] > \Rightarrow \tilde{A} \neq \tilde{B}$$

۵.۶ برخی از نتایج مبهم

در بخش ۴.۶ نشان داده شد که رتبه، میانگین و واگرایی برای برابری مجموعه های فازی و مجموعه های مبهم کافی نیستند. بنابراین برای غلبه بر این کاستی، در این بخش یک پارامتر دیگر به نام ”پراکندگی”، را در نظر می گیریم. همچنین برخی از نتایج را اثبات می کنیم. فرض کنید $\tilde{A} = < [(a, b, c, d); \delta, \rho] >$ یک مجموعه ی مبهم دوزنقه ای باشد آن گاه $(b - a)$ و $(d - c)$ را به ترتیب پراکندگی چپ و راست گویند.

گزاره ۱.۵.۶. فرض کنید $\tilde{A} = < [(a_1, b_1, c_1, d_1); \delta, \rho] >$ و $\tilde{B} = < [(a_2, b_2, c_2, d_2); \delta, \rho] >$ دو مجموعه ی دوزنقه ای مبهم باشند به گونه ای که

$$\Re_T^{\circ/\delta}(\tilde{A}) = \Re_T^{\circ/\delta}(\tilde{B}) \quad (۱)$$

$$Mode^{\circ/\delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\delta}(\tilde{B}) \quad (۲)$$

$$Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B}) \quad (۳)$$

آن گاه

$$Leftspread(\tilde{A}) > Leftspread(\tilde{B}) \text{ اگر } b_1 > b_2 \quad (۱)$$

$$Leftspread(\tilde{A}) < Leftspread(\tilde{B}) \text{ اگر } b_1 < b_2 \quad (۲)$$

$$Leftspread(\tilde{A}) = Leftspread(\tilde{B}) \text{ اگر } b_1 = b_2 \quad (۳)$$

اثبات: چون

$$Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B}) \text{ و } Mode^{\circ/\delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\delta}(\tilde{B}) \text{ و } \Re_T^{\circ/\delta}(\tilde{A}) = \Re_T^{\circ/\delta}(\tilde{B})$$

بنابراین، از گزاره ۶.۴.۶ داریم:

$$a_1 = a_2 \quad (۱۶.۶)$$

$$d_1 = d_2 \quad (۱۷.۶)$$

$$(b_1 + c_1) = (b_2 + c_2) \quad (۱۸.۶)$$

$$(b_1 - a_1) > (b_2 - a_2) \text{ اگر و فقط اگر } Leftspread(\tilde{A}) > Leftspread(\tilde{B}) \quad (۱)$$

اگر و فقط اگر $b_1 > b_2$ (چون $a_1 = a_2$).

بنابراین $Leftspread(\tilde{A}) > Leftspread(\tilde{B})$ اگر و فقط اگر $b_1 > b_2$

$$(b_1 - a_1) < (b_2 - a_2) \text{ اگر و فقط اگر } Leftspread(\tilde{A}) < Leftspread(\tilde{B}) \quad (۲)$$

اگر و فقط اگر $b_1 < b_2$ (چون $a_1 = a_2$).

بنابراین $Leftspread(\tilde{A}) < Leftspread(\tilde{B})$ اگر و فقط اگر $b_1 < b_2$.

$$(b_1 - a_1) = (b_2 - a_2) \text{ اگر و فقط اگر } Leftspread(\tilde{A}) = Leftspread(\tilde{B}) \quad (۳)$$

اگر و فقط اگر $b_1 = b_2$ (چون $a_1 = a_2$).

بنابراین $Leftspread(\tilde{A}) = Leftspread(\tilde{B})$ اگر و فقط اگر $b_1 = b_2$.

گزاره ۲.۵.۶. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1, d_1); \delta, \rho] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2, d_2); \delta, \rho] \rangle$ دو مجموعه ی دوزنقه ای مبهم باشند به گونه ای که

$$\Re_T^{\circ/\delta}(\tilde{A}) = \Re_T^{\circ/\delta}(\tilde{B}) \quad (۱)$$

$$Mode^{\circ/\delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\delta}(\tilde{B}) \quad (۲)$$

$$Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B}) \quad (۳)$$

آن گاه

$$Rightspread(\tilde{A}) > Rightspread(\tilde{B}) \text{ اگر و فقط اگر } c_1 < c_2 \quad (۱)$$

$$Rightspread(\tilde{A}) < Rightspread(\tilde{B}) \text{ اگر و فقط اگر } c_1 > c_2 \quad (۲)$$

$$Rightspread(\tilde{A}) = Rightspread(\tilde{B}) \text{ اگر و فقط اگر } c_1 = c_2 \quad (۳)$$

اثبات: چون

$$Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B}) \text{ و } Mode^{\circ/\delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\delta}(\tilde{B}) \text{ و } \Re_T^{\circ/\delta}(\tilde{A}) = \Re_T^{\circ/\delta}(\tilde{B})$$

بنابراین، از گزاره ۶.۴.۶ داریم:

$$a_1 = a_2 \quad (۱۹.۶)$$

$$d_1 = d_2 \quad (۲۰.۶)$$

$$(b_1 + c_1) = (b_2 + c_2) \quad (۲۱.۶)$$

$$(d_1 - c_1) > (d_2 - c_2) \text{ اگر و فقط اگر } Rightspread(\tilde{A}) > Rightspread(\tilde{B}) \quad (۱)$$

اگر و فقط اگر $c_1 < c_2$ (چون $a_1 = a_2$).

بنابر این داریم: $Rightspread(\tilde{A}) > Rightspread(\tilde{B})$ اگر و فقط اگر $c_1 < c_2$.

$$(d_1 - c_1) < (d_2 - c_2) \text{ اگر و فقط اگر } Rightspread(\tilde{A}) < Rightspread(\tilde{B}) \quad (۲)$$

اگر و فقط اگر $c_1 > c_2$ (چون $a_1 = a_2$).

بنابراین $Rightspread(\tilde{A}) < Rightspread(\tilde{B})$ اگر و فقط اگر $c_1 > c_2$.

$$(d_1 - c_1) = (d_2 - c_2) \text{ اگر و فقط اگر } Rightspread(\tilde{A}) = Rightspread(\tilde{B}) \quad (۳)$$

اگر و فقط اگر $c_1 = c_2$ (چون $a_1 = a_2$).

بنابراین $Rightspread(\tilde{A}) = Rightspread(\tilde{B})$ اگر و فقط اگر $c_1 = c_2$.

گزاره ۳.۵.۶. فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1, d_1); \delta, \rho] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2, d_2); \delta, \rho] \rangle$ دو مجموعه ی دوزنقه ای مبهم باشند به گونه ای که

$$\mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \quad (۱)$$

$$Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \quad (۲)$$

$$Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B}) \quad (۳)$$

داریم:

$$Rightspread(\tilde{A}) > Rightspread(\tilde{B}) \text{ اگر و فقط اگر } Leftspread(\tilde{A}) > Leftspread(\tilde{B}) \quad (۱)$$

$$Rightspread(\tilde{A}) < Rightspread(\tilde{B}) \text{ اگر و فقط اگر } Leftspread(\tilde{A}) < Leftspread(\tilde{B}) \quad (۲)$$

$$Rightspread(\tilde{A}) = Rightspread(\tilde{B}) \text{ اگر و فقط اگر } Leftspread(\tilde{A}) = Leftspread(\tilde{B}) \quad (۳)$$

اثبات: چون

$$\mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = \mathcal{R}_T^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \text{ و } Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{A}) = Mode^{\circ/\Delta}(\tilde{B}) \text{ و } Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B})$$

بنابراین از گزاره ۷.۴.۶ داریم:

$$a_1 = a_2 \text{ و } d_1 = d_2 \text{ و } (b_1 + c_1) = (b_2 + c_2)$$

$$Leftspread(\tilde{A}) > Leftspread(\tilde{B}) \text{ اگر و فقط اگر } b_1 > b_2 \quad (۱)$$

$$c_1 < c_2 \text{ اگر و فقط اگر } (b_1 + c_1) = (b_2 + c_2) \text{ (چون)}$$

$$-c_1 > -c_2 \text{ اگر و فقط اگر}$$

$$(d_1 - c_1) > (d_2 - c_2) \text{ (چون } d_1 = d_2)$$

$$Rightspread(\tilde{A}) > Rightspread(\tilde{B}) \text{ بنابراین داریم:}$$

$$Leftspread(\tilde{A}) < Leftspread(\tilde{B}) \text{ اگر و فقط اگر } b_1 < b_2 \quad (۲)$$

$$c_1 > c_2 \text{ اگر و فقط اگر } (b_1 + c_1) = (b_2 + c_2) \text{ (چون)}$$

$$-c_1 < -c_2 \text{ اگر و فقط اگر}$$

$$(d_1 - c_1) < (d_2 - c_2) \text{ (چون } d_1 = d_2)$$

$$Rightspread(\tilde{A}) < Rightspread(\tilde{B}) \text{ بنابراین داریم:}$$

$$Leftspread(\tilde{A}) = Leftspread(\tilde{B}) \text{ اگر و فقط اگر } b_1 = b_2 \quad (۳)$$

$$c_1 = c_2 \text{ اگر و فقط اگر } (b_1 + c_1) = (b_2 + c_2) \text{ (چون)}$$

$$-c_1 = -c_2 \text{ اگر و فقط اگر}$$

$$(d_1 - c_1) = (d_2 - c_2) \text{ (چون } d_1 = d_2)$$

$$Rightspread(\tilde{A}) = Rightspread(\tilde{B}) \text{ بنابراین داریم:}$$

۶.۶ رویکرد $RMDS$ ($RankModeDivergenceSpread$)

در این بخش، برای غلبه بر محدودیت های رویکرد کافمن و گوپتا رویکرد رتبه بندی جدید که به عنوان رویکرد رتبه بندی $RMDS$ نام گذاری شده است، برای مقایسه مجموعه های مبهم دوزنقه ای که دارای درجه عضویت برابر هستند ارائه می شود.

فرض کنید $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1, d_1); \delta, \rho] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2, d_2); \delta, \rho] \rangle$ دو مجموعه ی دوزنقه ای مبهم باشند. برای مقایسه ی این دو مجموعه از مراحل زیراستفاده کنید.

مرحله اول: برای یک مقدار مشخص λ مقادیر $\Re_T^\lambda(\tilde{A})$ و $\Re_T^\lambda(\tilde{B})$ را محاسبه کنید.

مورد اول:

اگر $\Re_T^\lambda(\tilde{A}) > \Re_T^\lambda(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \succ \tilde{B}$

مورد دوم:

اگر $\Re_T^\lambda(\tilde{A}) < \Re_T^\lambda(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \prec \tilde{B}$

مورد سوم:

اگر $\Re_T^\lambda(\tilde{A}) = \Re_T^\lambda(\tilde{B})$ آن گاه به مرحله ۲ بروید.

مرحله ۲: مقادیر $Mode^\lambda(\tilde{A})$ و $Mode^\lambda(\tilde{B})$ را محاسبه کنید.

مورد اول:

اگر $Mode^\lambda(\tilde{A}) > Mode^\lambda(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \succ \tilde{B}$.

مورد دوم:

اگر $Mode^\lambda(\tilde{A}) < Mode^\lambda(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \prec \tilde{B}$.

مورد سوم:

اگر $Mode^\lambda(\tilde{A}) = Mode^\lambda(\tilde{B})$ آن گاه به مرحله ۳ بروید.

مرحله ۳: مقادیر $Divergence^\lambda(\tilde{A})$ و $Divergence^\lambda(\tilde{B})$ را محاسبه کنید.

مورد اول:

اگر $Divergence^\lambda(\tilde{A}) > Divergence^\lambda(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \succ \tilde{B}$.

مورد دوم:

اگر $Divergence^\lambda(\tilde{A}) < Divergence^\lambda(\tilde{B})$ آن گاه $\tilde{A} \prec \tilde{B}$.

مورد سوم:

اگر $Divergence^\lambda(\tilde{A}) = Divergence^\lambda(\tilde{B})$ آن گاه به مرحله ۴ بروید.

مرحله ۴: مقادیر $Leftspread(\tilde{A})$ و $Leftspread(\tilde{B})$ را محاسبه کنید.

مورد اول: اگر $Leftspread(\tilde{A}) > Leftspread(\tilde{B})$ یعنی $b_1 > b_2$ آن گاه $\tilde{A} \succ \tilde{B}$.

مورد دوم: اگر $Leftspread(\tilde{A}) < Leftspread(\tilde{B})$ یعنی $b_1 < b_2$ آن گاه $\tilde{A} \prec \tilde{B}$.

مورد سوم: اگر $Leftspread(\tilde{A}) = Leftspread(\tilde{B})$ یعنی $b_1 = b_2$ آن گاه $\tilde{A} = \tilde{B}$.

۱.۶.۶ موارد خاص

از آنجا که مجموعه های مبهم دوزنقه ای، تعمیم یافته ی مجموعه های فازی مثلثی نرمال، مجموعه های فازی دوزنقه ای، مجموعه های فازی مثلثی تعمیم یافته، مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته و مجموعه های مبهم مثلثی هستند بنابراین رویکرد رتبه بندی *RMDS* برای مقایسه این مجموعه ها با در نظر گرفتن فرضیات زیر استفاده می شود:

(۱) فرض کنید $b_1 = c_1 = b'_1$ و $b_2 = c_2 = b'_2$ از روش رتبه بندی پیشنهادی *RMDS* برای مقایسه مجموعه های مبهم مثلثی $\tilde{A} = \langle [(a_1, b'_1, d_1); \delta, \rho] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b'_2, d_2); \delta, \rho] \rangle$ می توان استفاده کرد.

(۲) فرض کنید $\delta = \rho = \delta'_1$ از روش رتبه بندی پیشنهادی *RMDS* برای مقایسه مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A} = (a_1, b_1, c_1, d_1; \delta'_1)$ و $\tilde{B} = (a_2, b_2, c_2, d_2; \delta'_1)$ می توان استفاده کرد.

(۳) فرض کنید $b_1 = c_1 = b'_1$ و $\delta = \rho = \delta'_1$ و $b_2 = c_2 = b'_2$ از روش رتبه بندی پیشنهادی *RMDS* برای مقایسه مجموعه های فازی مثلثی تعمیم یافته $\tilde{A} = \langle [(a_1, b'_1, d_1; \delta'_1)] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b'_2, d_2; \delta'_1)] \rangle$ می توان استفاده کرد.

(۴) فرض کنید $\delta = \rho = 1$ از روش رتبه بندی پیشنهادی *RMDS* برای مقایسه مجموعه های فازی دوزنقه ای $\tilde{A} = \langle [(a_1, b_1, c_1, d_1; 1)] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b_2, c_2, d_2; 1)] \rangle$ استفاده می کنیم.

(۵) فرض کنید $b_1 = c_1 = b'_1$ و $\delta = \rho = \delta'_1$ و $b_2 = c_2 = b'_2$ از روش رتبه بندی پیشنهادی *RMDS* برای مقایسه مجموعه های فازی مثلثی $\tilde{A} = \langle [(a_1, b'_1, d_1; 1)] \rangle$ و $\tilde{B} = \langle [(a_2, b'_2, d_2; 1)] \rangle$ می توان استفاده کرد.

۲.۶.۶ مثال های عددی

در این بخش، رویکرد رتبه بندی پیشنهادی *RMDS* را با مقایسه برخی از مجموعه های فازی و مجموعه های مبهم نشان می دهیم.

مثال ۱.۶.۶. با استفاده از رویکرد رتبه بندی پیشنهادی *RMDS*، مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته $\tilde{A} = (\circ/1, \circ/2, \circ/4, \circ/5; \circ/8)$ و $\tilde{B} = (\circ/1, \circ/3, \circ/3, \circ/5; \circ/8)$ را می توان به شرح زیر مقایسه کرد:

مرحله اول: چون $\Re_T^{\circ/5}(\tilde{A}) = \circ/24$ و $\Re_T^{\circ/5}(\tilde{B}) = \circ/24$ بنابراین داریم $\Re_T^{\circ/5}(\tilde{A}) = \Re_T^{\circ/5}(\tilde{B})$ بنابراین به مرحله دوم بروید.

مرحله دوم: چون $Mode_T^{\circ/5}(\tilde{A}) = \circ/3$ و $Mode_T^{\circ/5}(\tilde{B}) = \circ/3$ بنابراین داریم:

$Mode_T^{\circ/5}(\tilde{A}) = Mode_T^{\circ/5}(\tilde{B})$ لذا به مرحله سوم بروید.

مرحله سوم: چون $Divergence(\tilde{A}) = \circ/4$ و $Divergence(\tilde{B}) = \circ/4$ بنابراین داریم:

$Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B})$ پس به مرحله چهارم بروید.

مرحله چهارم: چون $Leftspread(\tilde{A}) = ۰/۱$ و $Leftspread(\tilde{B}) = ۰/۲$ بنابراین داریم:
 $Leftspread(\tilde{A}) < Leftspread(\tilde{B})$ بنابراین $\tilde{A} \prec \tilde{B}$.

مثال ۲.۶.۶. با استفاده از رویکرد رتبه بندی پیشنهادی $RMDS$ ، مجموعه های فازی ذوزنقه ای نرمال $\tilde{A} = (۰/۱, ۰/۲, ۰/۴, ۰/۵; ۱)$ و $\tilde{B} = (۰/۱, ۰/۳, ۰/۳, ۰/۵; ۱)$ را می توان به شرح زیر مقایسه کرد:

مرحله اول: چون $\Re_T^{۰/۵}(\tilde{A}) = ۰/۳$ و $\Re_T^{۰/۵}(\tilde{B}) = ۰/۳$ بنابراین داریم $\Re_T^{۰/۵}(\tilde{A}) = \Re_T^{۰/۵}(\tilde{B})$ بنابراین به مرحله دوم بروید.

مرحله دوم: چون $Mode_T^{۰/۵}(\tilde{A}) = ۰/۳$ و $Mode_T^{۰/۵}(\tilde{B}) = ۰/۳$ بنابراین داریم:
 $Mode_T^{۰/۵}(\tilde{A}) = Mode_T^{۰/۵}(\tilde{B})$ ، لذا به مرحله سوم بروید.

مرحله سوم: چون $Divergence(\tilde{A}) = ۰/۴$ و $Divergence(\tilde{B}) = ۰/۴$ بنابراین داریم:
 $Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B})$ ، لذا به مرحله چهارم بروید.

مرحله چهارم: چون $Leftspread(\tilde{A}) = ۰/۱$ و $Leftspread(\tilde{B}) = ۰/۲$ بنابراین داریم:
 $Leftspread(\tilde{A}) < Leftspread(\tilde{B})$ ، بنابراین $\tilde{A} \prec \tilde{B}$.

مثال ۳.۶.۶. با استفاده از رویکرد رتبه بندی پیشنهادی $RMDS$ ، مجموعه های ذوزنقه ای مبهم $\tilde{A} = < [(۴, ۵, ۹, ۱۴); ۰/۳, ۰/۴] >$ و $\tilde{B} = < [(۴, ۶, ۸, ۱۴); ۰/۳, ۰/۴] >$ را به شرح زیر مقایسه می کنیم:

مرحله اول: چون $\Re_T^{۰/۵}(\tilde{A}) = ۳/۳۸۷۵$ و $\Re_T^{۰/۵}(\tilde{B}) = ۳/۳۸۷۵$ بنابراین داریم
 $\Re_T^{۰/۵}(\tilde{A}) = \Re_T^{۰/۵}(\tilde{B})$ ، لذا به مرحله دوم بروید.

مرحله دوم: چون $Mode_T^{۰/۵}(\tilde{A}) = ۷$ و $Mode_T^{۰/۵}(\tilde{B}) = ۷$ بنابراین داریم:
 $Mode_T^{۰/۵}(\tilde{A}) = Mode_T^{۰/۵}(\tilde{B})$ ، پس به مرحله سوم بروید.

مرحله سوم: چون $Divergence(\tilde{A}) = ۱۰$ و $Divergence(\tilde{B}) = ۱۰$ بنابراین داریم:
 $Divergence(\tilde{A}) = Divergence(\tilde{B})$ ، پس به مرحله چهارم بروید.

مرحله چهارم: چون $Leftspread(\tilde{A}) = ۱$ و $Leftspread(\tilde{B}) = ۲$ بنابراین داریم:
 $Leftspread(\tilde{A}) < Leftspread(\tilde{B})$ ، بنابراین $\tilde{A} \prec \tilde{B}$.

مثال ۴.۶.۶. با استفاده از رویکرد رتبه بندی پیشنهادی $RMDS$ ، مجموعه های ذوزنقه ای مبهم $\tilde{A} = < [(۲, ۶, ۸); ۰/۵, ۰/۸] >$ و $\tilde{B} = < [(۳, ۶, ۷); ۰/۵, ۰/۸] >$ را به شرح زیر مقایسه می کنیم:

مرحله اول: چون $\Re_T^{۰/۵}(\tilde{A}) = ۲/۴۲۵$ و $\Re_T^{۰/۵}(\tilde{B}) = ۲/۴۲۵$ بنابراین داریم
 $\Re_T^{۰/۵}(\tilde{A}) = \Re_T^{۰/۵}(\tilde{B})$ ، لذا به مرحله دوم بروید.

مرحله دوم: چون $Mode_T^{۰/۵}(\tilde{A}) = ۶$ و $Mode_T^{۰/۵}(\tilde{B}) = ۶$ بنابراین داریم:
 $Mode_T^{۰/۵}(\tilde{A}) = Mode_T^{۰/۵}(\tilde{B})$ ، پس به مرحله سوم بروید.

مرحله سوم: چون $Divergence(\tilde{A}) = ۶$ و $Divergence(\tilde{B}) = ۴$ بنابراین داریم

$$Divergence(\tilde{A}) > Divergence(\tilde{B}) \text{ بنابراین } \tilde{A} \succ \tilde{B}.$$

۷.۶ روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی *RMDS*

برای غلبه بر کاستی های روش موجود در [۱۱] و روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد کافمن و گوپتا، یک روش جدید بر اساس روش رتبه بندی *RMDS*، برای حل مسائل برنامه ریزی خطی که در آن پارامترها توسط مجموعه های مبهم دوزنقه ارائه می شود، پیشنهاد شده است. همچنین از این روش می توان برای حل مسائل برنامه ریزی خطی که در آن ها پارامترها توسط مجموعه های فازی مثلثی نرمال، مجموعه های فازی مثلثی تعمیم یافته، مجموعه های فازی دوزنقه ای نرمال، مجموعه های فازی دوزنقه ای تعمیم یافته یا مجموعه های مبهم مثلثی نمایش داده می شوند، استفاده کرد.

مراحل روش پیشنهادی به شرح زیر است:

مرحله اول: فرض کنید $\tilde{c}_j = \langle [(c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}); \delta, \rho] \rangle$ یک مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه فازی (P_1) باشد این مسئله را می توان به مسئله (P_6) تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n \langle [(c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}); \delta, \rho] \rangle > x_j \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_6) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله (۲): با توجه به تعریف ۸.۲ و بر اساس رویکرد رتبه بندی *RMDS*، جواب بهینه مسئله برنامه ریزی خطی مجموعه های دوزنقه ای مبهم را می توان با حل یک مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_7) بدست آورد.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad (\mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta} \left(\sum_{j=1}^n \langle [(c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}); \delta, \rho] \rangle > x_j \right)) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij} x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_7) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

با استفاده از خاصیت خطی زیر

$\mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta} \left(\sum_{j=1}^n \langle [(c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}); \delta, \rho] \rangle > x_j \right) = \left(\sum_{j=1}^n \mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta} \langle [(c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}); \delta, \rho] \rangle > x_j \right)$
می توان مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_7) را به مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_8) تبدیل کرد.

$$\text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n \mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta} \langle [(c_{j1}, c_{j2}, c_{j3}, c_{j4}); \delta, \rho] \rangle > x_j \right)$$

$$\begin{aligned} & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_{18}) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله (۴): با استفاده از

$$\Re_T^{\circ/\Delta}(< [(a, b, c, d); \delta, \rho] >) = \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta}{\rho} (a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + \frac{(\rho - \delta)}{\rho} ((a_1 + b_1 + c_1 + d_1) + \frac{\delta}{\rho} (-a_1 + d - 1)) \right\}$$

مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_{18}) را می‌توان به مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_{19}) تبدیل کرد.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\delta}{\rho} (c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}) + \frac{(\rho - \delta)}{\rho} ((c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}) + \frac{\delta}{\rho} (-c_{j1} + c_{j4})) x_j \right\} \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_{19}) \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

مرحله پنجم: مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_{19}) را حل کنید و بررسی کنید که جواب بهینه دگرین وجود دارد یا نه.

مورد اول: اگر هیچ جواب بهینه دگرین وجود نداشته باشد، آن گاه جواب بدست آمده، جواب بهینه است. مقدار بهینه فازی را با قرار دادن مقدار x_j در عبارت $\left(\sum_{j=1}^n < [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}); \delta, \rho] > x_j \right)$ پیدا کنید.

مورد دوم: اگر جواب بهینه دگرین وجود داشت، به مرحله ۶ بروید.

مرحله ششم: مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_{20}) را حل کنید و بررسی کنید جواب بهینه دگرین وجود دارد یا نه.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n (\text{Mode}^{\circ/\Delta}(< [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}); \delta, \rho] > x_j)) \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_{20}) \\ & \sum_{j=1}^n (\Re_T^{\circ/\Delta}(< [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}); \delta, \rho] > x_j) = a \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن، a مقدار بهینه مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_{19}) است.

مورد اول: اگر هیچ جواب بهینه دگرین وجود نداشته باشد، جواب بدست آمده جواب بهینه است. مقدار بهینه فازی را با قرار دادن مقدار x_j در عبارت $\left(\sum_{j=1}^n < [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}); \delta, \rho] > x_j \right)$ پیدا کنید.

مورد دوم: اگر جواب بهینه دگرین وجود داشته باشد، به مرحله ۷ بروید.
مرحله هفتم: مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_1) را حل کنید و بررسی کنید جواب بهینه دگرین وجود دارد یا نه.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n (\text{Divergence}(< [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}), \delta, \rho] > x_j)) \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_1) \\ & \sum_{j=1}^n (\mathfrak{H}_T^{\circ/\Delta} < [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}), \delta, \rho] > x_j) = a \\ & \sum_{j=1}^n (\text{Mode}^{\circ/\Delta} < [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}), \delta, \rho] > x_j) = b \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن، b مقدار بهینه مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_0) است.
مرحله هشتم: مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_2) را حل کنید و بررسی کنید که جواب بهینه وجود دارد یا نه.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize(or Minimize)} \quad \left(\sum_{j=1}^n (\text{LeftSpread}(< [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}), \delta, \rho] > x_j)) \right) \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n (a_{ij}x_j) \leq, =, \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (P_2) \\ & \sum_{j=1}^n (\mathfrak{H}_T^{\circ/\Delta} < [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}), \delta, \rho] > x_j) = a \\ & \sum_{j=1}^n (\text{Mode}^{\circ/\Delta} < [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}), \delta, \rho] > x_j) = b \\ & \sum_{j=1}^n (\text{Divergence} < [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}), \delta, \rho] > x_j) = c \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن، c مقدار بهینه مسئله برنامه ریزی خطی قطعی (P_1) است.
جواب بدست آمده در مرحله ۸ جواب بهینه است، مقدار بهینه فازی را با قرار دادن مقادیر x_j در عبارت $(\sum_{j=1}^n < [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}), \delta, \rho] > x_j)$ پیدا کنید.

۱.۷.۶ مثال عددی

در این بخش روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی *RMDS* را با حل یک مسئله برنامه ریزی خطی مجموعه های دوزنقه ای نرمال و دوزنقه ای تعمیم یافته و مبهم فازی نشان داده ایم.

برای نشان دادن روش پیشنهادی، یک مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم دوزنقه ای در مثال ۱.۷.۶ آورده ایم که با استفاده از روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی *RMDS* حل شده است.

مثال ۱.۷.۶. مسئله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad (< [(1, 4, 5, 8); \circ/6, \circ/8] > x_1 \oplus < [(1, 3, 6, 8); \circ/6, \circ/8] > x_2) \\ & \text{s.t.} \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq \circ \end{aligned}$$

راه حل: با استفاده از مرحله ۱، مسئله ی برنامه ریزی خطی که در مثال ۱.۷.۶ آورده شده را با استفاده از مراحل زیر از روش پیشنهادی حل می کنیم:

مرحله اول: با استفاده از مرحله ۲ روش پیشنهادی مسئله برنامه ریزی خطی را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad (\mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(< [(1, 4, 5, 8); \circ/6, \circ/8] > x_1 \oplus < [(1, 3, 6, 8); \circ/6, \circ/8] > x_2)) \\ & \text{s.t.} \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_2 \geq 3 \\ & x_1, x_2 \geq \circ \end{aligned}$$

مرحله دوم: با استفاده از خاصیت خطی

$$\mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(\sum_{j=1}^n < [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}); \delta, \rho] > x_j) = (\sum_{j=1}^n \mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta} < [(c_{j1} + c_{j2} + c_{j3} + c_{j4}); \delta, \rho] > x_j)$$

مسئله برنامه ریزی خطی قطعی، که در مرحله ۱ بدست آوردیم را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad (\mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(< [(1, 4, 5, 8); \circ/6, \circ/8] > x_1) + \mathfrak{R}_T^{\circ/\Delta}(< [(1, 3, 6, 8); \circ/6, \circ/8] > x_2)) \\ & \text{s.t.} \\ & x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 4 \\x_2 &\geq 3 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

مرحله سوم: با استفاده از

$\Re(< [(a, b, c, d)\delta, \rho] >) = \frac{1}{\rho} \{ \frac{\delta}{\rho} (a + b + c + d) + \frac{(\rho - \delta)}{\rho} ((a + b + c + d) + \frac{\delta}{\rho} (-a + d)) \}$
مسئله برنامه ریزی خطی قطعی که در مرحله ۲ بدست آوردیم را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned}Maximize \quad & (\frac{3 \circ 9}{\lambda \circ} x_1 + \frac{3 \circ 9}{\lambda \circ} x_2) \\s.t. \quad & \\x_1 + x_2 &\leq 2 \\x_1 + x_2 &\geq 1 \\x_1 &\leq 4 \\x_2 &\geq 3 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

مرحله چهارم: از آنجا که در حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی، که در مرحله ۳ بدست آمده، جواب بهینه دگرین بدست آمده و مقدار بهینه برابر با $\frac{3 \circ 9}{\lambda \circ}$ است بنابراین می توان با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی زیر، جواب مسئله انتخاب شده را بدست آورد:

$$\begin{aligned}Maximize \quad & (Mode^{\circ \Delta}(< [(1, 4, 5, 8); \circ / 6, \circ / 8] > x_1) + Mode^{\circ \Delta}(< [(1, 3, 5, 8); \circ / 6, \circ / 8] > x_2)) \\s.t. \quad & \\x_1 + x_2 &\leq 2 \\x_1 + x_2 &\geq 1 \\\frac{3 \circ 9}{\lambda \circ} x_1 + \frac{3 \circ 9}{\lambda \circ} x_2 &= \frac{3 \circ 9}{\lambda \circ} \\x_1 &\leq 4 \\x_2 &\geq 3 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

مرحله پنجم: با استفاده از $Mode(< [(a, b, c, d); \delta, \rho] >) = \frac{(b+c)}{\rho}$

مسئله برنامه ریزی خطی قطعی که در مرحله ۴ بدست آمده، به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned}Maximize \quad & (\frac{9}{\rho} x_1 + \frac{9}{\rho} x_2) \\s.t. \quad & \\x_1 + x_2 &\leq 2 \\x_1 + x_2 &\geq 1\end{aligned}$$

$$\frac{3.9}{8.0}x_1 + \frac{3.9}{8.0}x_2 = \frac{3.9}{4.0}$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مرحله ششم: از آنجا که در حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی، که در مرحله ۵ بدست آمده، جواب بهینه دگرین بدست آمده و مقدار بهینه برابر با ۹ است، بنابراین می توان با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی زیر، جواب مسئله انتخاب شده را بدست آورد:

$$\text{Maximize } (Divergence(< [(1, 4, 5, 8); 0.6, 0.8] > x_1) + Divergence(<$$

$$[(1, 3, 6, 8); 0.6, 0.8] > x_2))$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$\frac{3.9}{8.0}x_1 + \frac{3.9}{8.0}x_2 = \frac{3.9}{4.0}$$

$$\frac{9}{4}x_1 + \frac{9}{4}x_2 = 9$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مرحله هفتم: با استفاده از معادله $Divergence(< [(a, b, c, d); \delta, \rho] >) = d - a$ مسئله برنامه ریزی خطی قطعی، که در مرحله ۶ بدست آمده، به صورت زیر نوشته می شود:

$$\text{Maximize } (7x_1 + 7x_2)$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$\frac{3.9}{8.0}x_1 + \frac{3.9}{8.0}x_2 = \frac{3.9}{4.0}$$

$$\frac{9}{4}x_1 + \frac{9}{4}x_2 = 9$$

$$x_1 \leq 4$$

$$x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مرحله هشتم: از آنجا که در حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی، که در مرحله ۷ بدست آمده، جواب بهینه دگرین بدست آمده و مقدار بهینه برابر با ۱۴ است بنابراین می توان با حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی زیر، جواب مسئله انتخاب شده را بدست آورد:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize} \quad (LeftSpread(< [(1, 4, 5, 8); \circ/6, \circ/8] > x_1) + LeftSpread(< \\
 & \quad [(1, 3, 6, 8); \circ/6, \circ/8] > x_2)) \\
 & \text{s.t.} \\
 & \quad x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & \quad x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & \quad \frac{3 \circ 9}{\lambda \circ} x_1 + \frac{3 \circ 9}{\lambda \circ} x_2 = \frac{3 \circ 9}{4 \circ} \\
 & \quad \frac{9}{7} x_1 + \frac{9}{7} x_2 = 9 \\
 & \quad 7x_1 + 7x_2 = 14 \\
 & \quad x_1 \leq 4 \\
 & \quad x_2 \geq 3 \\
 & \quad x_1, x_2 \geq \circ
 \end{aligned}$$

مرحله نهم: با استفاده از معادله $LeftSpread(< [(a, b, c, d); \delta, \rho] >) = b - a$ مسئله برنامه ریزی خطی قطعی، که در مرحله ۸ بدست آمده، به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize} \quad (3x_1 + 2x_2) \\
 & \text{s.t.} \\
 & \quad x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & \quad x_1 + x_2 \geq 1 \\
 & \quad \frac{3 \circ 9}{\lambda \circ} x_1 + \frac{3 \circ 9}{\lambda \circ} x_2 = \frac{3 \circ 9}{4 \circ} \\
 & \quad \frac{9}{7} x_1 + \frac{9}{7} x_2 = 9 \\
 & \quad 7x_1 + 7x_2 = 14 \\
 & \quad x_1 \leq 4 \\
 & \quad x_2 \geq 3 \\
 & \quad x_1, x_2 \geq \circ
 \end{aligned}$$

مرحله دهم: برای حل مسئله برنامه ریزی خطی قطعی که در مرحله ۹ بدست آمده، با قرار دادن $x_1 = 2$ و $x_2 = \circ$ در

$$\begin{aligned}
 & (< [(1, 4, 5, 8); \circ/6, \circ/8] > x_1 \oplus < [(1, 3, 6, 8); \circ/6, \circ/8] > x_2) \\
 & \text{مقدار بهینه فازی مسئله انتخاب شده برابر است با } < [(2, 8, 10, 16); \circ/6, \circ/8] >.
 \end{aligned}$$

۸.۶ مزایای استفاده از روش پیشنهادی بر اساس رویکرد رتبه بندی *RMDS*

در ادامه برای نشان دادن مزایای روش پیشنهادی بر اساس رویکرد رتبه بندی *RMDS* نسبت به روش های موجود، روش مبتنی بر رویکرد کافمن و گوپتا و روش های ارائه شده در فصل های قبلی، نتایج مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی و مجموعه های مبهم، که در مثال ۱.۸.۶ تا مثال ۵.۸.۶ انتخاب شده است و مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه مبهم دوزنقه ای، که در مثال ۱.۱.۶ انتخاب شده است را با استفاده از تمام روش های قبل و روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد *RMDS* باهم مقایسه می کنیم.

مثال ۱.۸.۶. مسئله زیر را حل کنید.

$$\text{Maximize } (((1, 5, 8; \circ/8)x_1 \oplus (2, 5, 7; \circ/8)x_2)$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$x_1 \leq 5$$

$$x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال ۲.۸.۶. مسئله زیر را حل کنید.

$$\text{Maximize } (((1, 3, 4, 9; 1)x_1 \oplus (1, 2, 5, 9; 1)x_2)$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال ۳.۸.۶. مسئله زیر را حل کنید.

$$\text{Maximize } (((1, 4, 7, 9; \circ/6)x_1 \oplus (1, 3, 8, 9; \circ/6)x_2)$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \geq 1$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مثال ۴.۸.۶. مسئله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad (([(1, 5, 8); \circ/6, \circ/8] > x_1 \oplus < [(2, 5, 7); \circ/6, \circ/8] x_2) \\ & \text{s.t.} \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

مثال ۵.۸.۶. مسئله زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad ((< [(2, 4, 7, 9); \circ/6, \circ/7] > x_1 \oplus < [(2, 3, 8, 9); \circ/6, \circ/7] x_2) \\ & \text{s.t.} \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \geq 2 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

نتایج حاصل از حل مسائل برنامه ریزی خطی انتخاب شده با مجموعه های فازی تعمیم یافته و مجموعه های مبهم که با استفاده از روش های مختلف موجود و روش پیشنهادی بدست آمده را می توان به شرح زیر توضیح داد:

(۱). اگر مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی مثلثی، مانند مسائل انتخاب شده در مثال ۱.۱.۶ و مثال ۱.۸.۶ با روش موجود در [۱۱] یا روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی پیشنهاد شده در فصل ۲، یا روش پیشنهادی بر اساس رویکرد رتبه بندی پیشنهاد شده در فصل ۵ ارائه شده در فصل ۴، یا روش پیشنهادی بر اساس رویکرد رتبه بندی پیشنهاد شده در فصل ۵ حل شوند آن گاه دو مجموعه فازی مثلثی نرمال متفاوت که نمایانگر مقدار بهینه فازی همان مسئله هستند بدست می آید. در حالی که با حل همین مسئله با استفاده از روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی کافمن و گوپتا و روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی *RMDS*، یک مجموعه فازی مثلثی منحصر به فرد که بیانگر مقدار بهینه فازی است بدست می آید که مناسب است.

(۲). اگر مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی دوزنقه ای، مانند مسائل انتخاب شده در مثال ۲.۸.۶ و مثال ۳.۸.۶ با روش موجود در [۱۱] یا روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی پیشنهاد شده در فصل ۲، یا روش مبتنی بر رویکرد رتبه بندی *RM* که در فصل ۴ پیشنهاد شده است، یا روش مبتنی بر رویکرد رتبه بندی پیشنهاد شده در فصل ۵، یا روش

پیشنهادی مبتنی بر روش رتبه بندی کافمن و گوپتا حل شوند دو مجموعه فازی دوزنقه ای نرمال متفاوت که نمایانگر مقدار بهینه فازی همان مسئله هستند بدست می آید که با ویژگی جواب های بهینه دگرین مغایرت دارد.

اگر همین مسئله با استفاده از روش پیشنهادی مبتنی بر رتبه بندی مبتنی *RMDS* حل شود یک مجموعه فازی دوزنقه ای منحصر به فرد که بیانگر مقدار بهینه فازی است بدست می آید.

(۳). روش موجود در [۱۱] و روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی که در فصل ۲ پیشنهاد شده است یا روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی *RM* که در فصل ۴ پیشنهاد شده است؛ فقط می توانند برای حل آن دسته از مسائل برنامه ریزی خطی استفاده شوند که در آن ها پارامترها توسط مجموعه فازی نرمال یا مجموعه فازی تعمیم یافته نشان داده می شوند. اما در مسائل برنامه ریزی خطی، که در مثال های ۵.۸.۶ و مثال ۶.۸.۶ انتخاب شده است، پارامترها توسط مجموعه های مبهم نشان داده می شوند بنابراین هیچکدام از این روش های پیشنهادی برای حل این مسئله انتخاب شده قابل استفاده نیستند.

در حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم مثلثی، که در مثال ۴.۸.۶ وجود دارد، با استفاده از روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی گوپتا و کافمن و همچنین روش پیشنهادی بر اساس رویکرد رتبه بندی *RMDS* یک مجموعه مبهم مثلثی منحصر به فرد که نمایانگر مقدار بهینه فازی مسئله انتخاب شده است بدست می آید. در حل مسئله برنامه ریزی خطی با مجموعه مبهم دوزنقه ای که در مثال ۵.۸.۶ انتخاب شده است، با استفاده از روش پیشنهادی که مبتنی بر رویکرد *RMDS* می باشد، یک مجموعه مبهم دوزنقه ای که نمایانگر مقدار بهینه فازی مسئله انتخاب شده می باشد بدست می آید. از حل کردن همان مسئله با استفاده از روش پیشنهادی مبتنی بر رتبه بندی کافمن گوپتا، دو مجموعه مبهم دوزنقه ای متفاوت بدست می آید که نمایانگر مقدار بهینه فازی همان مسئله است با خواص جواب بهینه دگرین متناقض است. براساس بحث فوق می توان نتیجه گرفت که بهتر است از روش پیشنهادی مبتنی بر رویکرد رتبه بندی *RMDS* در مقایسه با روش های موجود و سایر روش های پیشنهادی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی و مجموعه های مبهم استفاده شود.

فصل ۷

نتیجه گیری و پیشنهاداتی برای تحقیق در آینده

براساس کار انجام شده در فصل ۶، می توان نتیجه گرفت که بهتر است از روش رتبه بندی $RMDS$ (که در فصل ۶ پیشنهاد شده است) برای مقایسه مجموعه های فازی و مجموعه های مبهم استفاده شود. همچنین بهتر است برای حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازی تعمیم یافته و مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم از روش رتبه بندی $RMDS$ (که در فصل ۶ به آن پرداخته شد) استفاده شود.

رویکرد رتبه بندی $RMDS$ ، ارائه شده در فصل ۶، برای مقایسه مجموعه های مبهم دوزنقه ای $\tilde{A}_1 = \langle [(a_1, b_1, c_1, d_1); \delta_1, \rho_1] \rangle$ و $\tilde{A}_2 = \langle [(a_2, b_2, c_2, d_2); \delta_2, \rho_2] \rangle$ استفاده می شود، که برای آن ها خاصیت $\delta_1 = \delta_2$ و $\rho_1 = \rho_2$ برقرار است اما برای مقایسه مجموعه های مبهم دوزنقه ای که برای آن ها این شرایط برقرار نیست، نمی توان از این رویکرد استفاده کرد.

به همین دلیل، روش ارائه شده مبتنی بر $RMDS$ می تواند برای پیدا کردن جواب بهینه مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم دوزنقه ای که در آن ها پارامترهای $\tilde{C}_j$ به وسیله مجموعه های مبهم دوزنقه ای که دارای خاصیت $\delta_i = \delta_j$ و $\rho_i = \rho_j$ هستند استفاده شود. اما برای حل مسئله های برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم دوزنقه ای که در آن ها برای برخی یا تمام پارامترهای $\tilde{C}_j$ این خواص برقرار نباشد دیگر نمی توان از این روش استفاده کرد.

در آینده، سعی می‌شود رویکرد رتبه بندی پیشنهادی $RMDS$ برای مقایسه مجموعه های مبهم دوزنقه ای $\tilde{A}_1 = < [(a_1, b_1, c_1, d_1); \delta_1, \rho_1]$ و $\tilde{A}_2 = < [(a_2, b_2, c_2, d_2); \delta_2, \rho_2]$ که خواص $\delta_i = \delta_j$ و $\rho_i = \rho_j$ در آن ها برقرار نیست اصلاح شود. روش حل مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های مبهم دوزنقه ای، ارائه شده در فصل ۶، برای حل چنین مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازای دوزنقه ای مبهمی که در آن برخی یا تمام پارامترهای $\tilde{C}_j$ توسط چنین مجموعه های مبهم دوزنقه ای تعیین می شوند که خاصیت $\delta_i = \delta_j$ و $\rho_i = \rho_j$ برقرار نیست. همچنین از روش های پیشنهادی فقط می توان برای یافتن جواب بهینه مناسب مسائل برنامه ریزی خطی با مجموعه های فازای تعمیم یافته و مجموعه های مبهمی که فقط پارامترهای هزینه (یا سود) توسط مجموعه های فازای یا مبهم ارائه می شوند استفاده کرد در آینده سعی می‌شود این روش ها برای حل مسائل برنامه ریزی با مجموعه های فازای تعمیم یافته و مجموعه های مبهم که در آن همه پارامترها توسط مجموعه های فازای یا مجموعه های مبهم نشان داده شده اند اصلاح شود.

مراجع

- [1] S. Abbasbandy, B. Asady, Ranking of fuzzy numbers by sign distance, Information Sciences 176 (2006) 2405-2416
- [2] S. Abbasbandy, T. Hajjari, A new approach for ranking of trapezoidal fuzzy numbers, Computers and Mathematics with Applications 57 (2009) 413-419
- [3] I. Ahmad, T.R. Gulati, Mixed type duality for multiobjective variational problems with generalized (F, ρ) -convexity, Journal of Mathematical Analysis and Applications 306 (2005) 669-683
- [4] I. Ahmad, Z. Husain, On multiobjective second order symmetric duality with cone constraints, European Journal of Operational Research 204 (2010) 402- 409.
- [5] T. Allahviranloo, A. Firozja, Ranking of fuzzy numbers by a new metric, Soft Computing 14 (2010) 773-782.
- [6] T. Allahviranloo, F.H. Lotfi, M.K. Kiasary, N. A. Kiani, L. Alizadeh, Solving fully fuzzy linear programming problem by the ranking function, Applied Mathematical Sciences 2 (2008) 19-32.
- [7] B. Asady, The revised method of ranking LR fuzzy number based on deviation degree, Expert Systems with Applications 37 (2010) 5056-5060.
- [8] N. Mahdavi-Amiri, S.H. Nasseri, Duality results and a dual simplex method for linear programming problems with trapezoidal fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1961-1978.
- [9] K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 20 (1986) 87-96.
- [10] H.R. Maleki, Ranking functions and their applications to fuzzy linear programming, Far East Journal of Mathematical Sciences 4 (2002) 283-301.

-
- [11] H. R. Maleki, M. Tata, M. Mashinchi, Linear programming with fuzzy variables, Fuzzy Sets and Systems 109 (2000) 21-33.
 - [12] M.S. Bazaara, J.J. Jarvis, H.D. Sherali, Linear Programming and Network Flows, Second Edition, Wiley, New York, 1990.
 - [13] C.R. Bector, S. Chandra, On duality in linear programming under fuzzy environment, Fuzzy Sets and Systems 125 (2002) 317-325.
 - [14] C.R. Bector, S. Chandra, Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games, Springer-Verlag 2005.
 - [15] R.E. Bellman, L.A. Zadeh, Decision making in a fuzzy environment, Management Science 17 (1970) 141-164.
 - [16] G. Bortolan, R. Degani, Review of some methods for ranking fuzzy subsets, Fuzzy Sets and Systems 15 (1985) 1-19.
 - [17] J.J. Buckley, Ranking alternatives using fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 15 (1985) 21-31.
 - [18] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control 8 (1965) 338-353.
 - [19] J.J. Buckley, Solving possibilistic linear programming problems, Fuzzy Sets and Systems 31 (1989) 329-341.
 - [20] J.J. Buckley, Fuzzy genetics algorithm and applications, Fuzzy Sets and Systems 61 (1994) 129-136.
 - [21] J.J. Buckley, Joint solution to fuzzy programming problems, Fuzzy Sets and Systems 72 (1995) 215-220.
 - [22] J.J. Buckley, T. Feuring, Evolutionary algorithm solution to fuzzy problems: fuzzy linear programming, Fuzzy Sets and Systems 109 (2000) 35-53. 135
 - [23] H. Bustince, P. Burillo, Vague sets are intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 79 (1996) 403-405.
 - [24] J.M. Cadenas, J.L. Verdegay, Using fuzzy numbers in linear programming, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics-Part B: Cybernetics 27 (1997) 1016-1022.

- [25] L.M. Campos, A. Gonzalez, A subjective approach for ranking fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 29 (1989) 145-153.
- [26] L.M. Campos, J.L. Verdegay, Linear programming problems and ranking of fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 32 (1989) 1-11.
- [27] C. Carlsson, P. Korhonen, A parametric approach to fuzzy linear programming, *Fuzzy Sets and Systems* 20 (1986) 17-30.
- [28] S. Chanas, The use of parametric programming in fuzzy linear programming, *Fuzzy Sets and Systems* 11 (1983) 229-241.
- [29] S. Chanas, M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila, Ranking fuzzy interval numbers in the setting of random sets, *Information Sciences* 69 (1993) 201-217.
- [30] J.R. Chang, K.H. Chang, S.H. Liao, C.H. Cheng, The reliability of general vague fault-tree analysis on weapon systems fault diagnosis, *Soft Computing* 10 (2006) 531-542.
- [31] P.T. Chang, E.S. Lee, Ranking of fuzzy sets based on the concept of existence, *Computers and Mathematics with Applications* 27 (1994) 1-21.
- [32] S.H. Chen, Operations on fuzzy numbers with function principal, *Tamkang Journal of Management Sciences* 6 (1985) 13-25.
- [33] S.H. Chen, Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set, *Fuzzy Sets and Systems* 17 (1985) 113-129.
- [34] C.T. Chen, Extensions of the TOPSIS for group decision making under fuzzy environment, *Fuzzy Sets and Systems* 114 (2000) 1-9. 136
- [35] S.J. Chen, S.M. Chen, A new method for handling multicriteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators, *Cybernetics and Systems* 34 (2003) 109-137.
- [36] S.J. Chen, S.M. Chen, Fuzzy risk analysis based on the ranking of generalized trapezoidal fuzzy numbers, *Applied Intelligence* 26 (2007) 1-11.
- [37] S.M. Chen, J.H. Chen, Fuzzy risk analysis based on ranking generalized fuzzy numbers with different heights and different spreads, *Expert Systems with Applications* 36 (2009) 6833-6842.

-
- [38] C.B. Chen, C.M. Klein, A simple approach to ranking a group of aggregated fuzzy utilities, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part-B: Cybernetics 27 (1997) 26-35.
 - [39] S.H. Chen, G.C. Li, Representation, ranking and distance of fuzzy numbers with exponential membership function using grade mean integration representation method, Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences 16 (2000) 123-131
 - [40] L.H. Chen, H.W. Lu, The preference order of fuzzy numbers, Computers and Mathematics with Applications 44 (2002) 1455-1465.
 - [41] W. Rodder, H.J. Zimmerman, Duality in fuzzy linear programming, in: A.V. Fiacco, K. O. Kortanek (Eds.), Extremal Methods and System Analysis, Berlin, NewYork (1980) 415-429.
 - [42] H. Rommelfanger, Interactive decision making in fuzzy linear optimization problems, European Journal of Operational Research 41 (1989) 210-217.
 - [43] S.M. Chen, C.H. Wang, Fuzzy risk analysis based on ranking fuzzy numbers using α -cuts, belief features and signal/noise ratios, Expert Systems with Applications 36 (2009) 5576-5581.
 - [44] C.H. Cheng, A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method, Fuzzy Sets and Systems 95 (1998) 307-317. 137
 - [45] H. Rommelfanger, R. Hanuscheck, J. Wolf, Linear programming with fuzzy objectives, Fuzzy Sets and Systems 29 (1989) 31-48.
 - [46] T. Shao cheng, Interval number and fuzzy number linear programmings, Fuzzy Sets and Systems 66 (1994) 301-306.
 - [47] G.B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, New Jersey, 1963.
 - [48] D. Delgado, J. Kacprzyk, J.L. Verdegay, M.A. Villa, Fuzzy Optimization: Recent Advances, Physica Verlag, Germany, 1994.
 - [49] M. Delgado, J.L. Verdegay, M.A. Vila, A general model for fuzzy linear programming, Fuzzy Sets and Systems 29 (1989) 21-29.

- [50] Y. Deng, Z. Zhenfu, L. Qi, Ranking fuzzy numbers with an area method using radius of gyration, *Computers and Mathematics with Applications* 51 (2006) 1127-1136.
- [51] K. Devi, S.P. Yadav, S. Kumar, Extension of fuzzy TOPSIS method based on vague sets, *International Journal of Computational Cognition* 7 (2009) 58-62.
- [52] U.M. Diwekar, *Introduction to Applied Optimization*, Second Edition, Springer-Verlag, Cambridge, MA, 2008.
- [53] D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems, Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.
- [54] D. Dubois, H. Prade, Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory, *Information Sciences* 30 (1983) 183-224.
- [55] A. Ebrahimnejad, S.H. Nasseri, A dual simplex method for bounded linear programmes with fuzzy numbers, *International Journal of Mathematics in Operational Research* 2 (2010) 762-779.
- [56] A. Ebrahimnejad, S.H. Nasseri, F. Hosseinzadeh Lotfi, Bounded linear programs with trapezoidal fuzzy numbers, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 18 (2010) 269-286. 138
- [57] A. Ebrahimnejad, S.H. Nasseri, F. Hosseinzadeh Lotfi, M. Soltanifar, A primaldual method for linear programming problems with fuzzy variables, *European Journal of Industrial Engineering* 4 (2010) 189-209.
- [58] A. Ebrahimnejad, S.H. Nasseri, S.M. Mansourzadeh, Bounded primal simplex algorithm for bounded linear programming with fuzzy cost coefficients, *International Journal of Operations Research and Information Systems* 2 (2011) 100-124.
- [59] S.C. Fang, C.F. Hu, H.F. Wang, S.Y. Wu, Linear programming with fuzzy coefficients in constraints, *Computers and Mathematics with Applications* 37 (1999) 63-76.
- [60] P. Fortemps, M. Roubens, Ranking and defuzzification methods based on area compensation, *Fuzzy Sets and Systems* 82 (1996) 319-330.
- [61] H. Tanaka, K. Asai, Fuzzy solution and fuzzy linear programming problems, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 14 (1984) 325-328.

-
- [62] K . Ganesan, P. Veeramani, Fuzzy linear programs with trap ezoidal fuzzy numb
ers, *Annals of Op erations Research* 143 (2006) 305-315.
 - [63] H. Tanaka, T. Okuda, K. Asai, On fuzzy mathematical programming, *Journal of
Cyb ernetics and Systems* 3 (1973) 37-46.
 - [64] A . Gonzalez, Study of the ranking function approach through mean values, *Fuzzy
Sets and Systems* 35 (1990) 29-41.
 - [65] T.R. Gulati, S.K. Gupta, I. Ahmad, Second-order symmetric duality with cone
constraints, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 220 (2008) 347-
354.
 - [66] P. Gupta, M.K. Mehlawat, Bector-Chandra typ e duality in fuzzy linear program-
ming with exp onential memb ership functions, *Fuzzy Sets and Systems* 160 (2009)
3290-3308.
 - [67] S.M. Guu, Y.K. Wu, Two phase approach for solving the fuzzy linear programming
problems, *Fuzzy Sets and Systems* 107 (1999) 191-195. 139
 - [68] E.L. Hannan, Linear programming with multiple fuzzy goals, *Fuzzy Sets and Sys-
tems* 6 (1981) 235-248.
 - [69] J.L. Verdegay, A dual approach to solve the fuzzy linear programming problems,
Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 131-141.
 - [70] F. Herrera, J.L. Verdegay, Three mo dels of fuzzy integer linear programming,
Europ ean Journal of Op erational Research 83 (1995) 581-593.
 - [71] D. Wang, An inexact approach for linear programming problems with fuzzy ob
jective and resources, *Fuzzy Sets and Systems* 89 (1997) 61-68.
 - [72] M. Inuiguchi, J. Ramik, Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy
mathematical programming and a comparison with sto chastic programming in p
ortfolio selection problem, *Fuzzy Sets and Systems* 111 (2000) 3-28.
 - [73] H. Ishibuchi, H. Tanaka, Multiob jective programming in optimization of the in-
terval ob jective function, *Europ ean Journal of Op erational Research* 48 (1990)
219-225.

- [74] R. Jain, Decision making in the presence of fuzzy variables, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 6 (1976) 698-703.
- [75] R. Jain, A procedure for multiple aspect decision making using fuzzy sets, International Journal of Systems and Sciences 8 (1977) 1-7.
- [76] R.K. Jana, M.P. Biswal, Genetic based fuzzy goal programming for multiobjective chance constrained programming problems with continuous random variables, International Journal of Computer Mathematics 83 (2006) 171-179.
- [77] M. Jimenez, M. Arenas, A. Bilbao, M.V. Rodriguez, Linear programming with fuzzy parameters: An interactive method resolution, European Journal of Operational Research 177 (2007) 1599-1609. 140
- [78] B. Werners, An interactive fuzzy programming system, Fuzzy Sets and Systems 23 (1987) 131-147.
- [79] C. Kao, S.T. Liu, A mathematical programming approach to fuzzy efficiency ranking, International Journal of Production Economics 86 (2003) 145-154.
- [80] A. Kaufmann, M.M. Gupta, Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, Netherlands, 1988.
- [81] Kavita, S.P. Yadav, S. Kumar, A multi-criteria interval-valued intuitionistic fuzzy group decision making for supplier selection with TOPSIS method, Lecture Notes in Computer Science 5908 (2009) 303-312.
- [82] F.I. Khan, R. Sadiq, Risk-based prioritization of air pollution monitoring using fuzzy synthetic evaluation technique, Environmental Monitoring and Assessment 105 (2005) 261-283.
- [83] W.J.M. Kickert, Fuzzy Theory on Decision Making, Martinus, Nijhoff, Leiden 1978.
- [84] K. Kim, K.S. Park, Ranking fuzzy numbers with index of optimism, Fuzzy Sets and Systems 35 (1990) 143-150.
- [85] A. Kishor, S.P. Yadav, S. Kumar, Interactive fuzzy multiobjective reliability optimization using NSGA-II, Opsearch 46 (2009) 214-224.

-
- [86] G.J. Klir, B. Yuan, Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications, Prentice-Hall, Inc., New Jersey, USA, 1996.
 - [87] E.V. Kumar, S.K. Chaturvedi, A.W. Deshpande, Failure probability estimation using fuzzy fault tree analysis (FFTA) with PDM data in process plants, International Journal of Performability Engineering 4 (2008) 271-284.
 - [88] H .L. Kwang, J.H. Lee, A method for ranking fuzzy numbers and its application to decision-making, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 7 (1999) 677-685. 141
 - [89] Y.J. Lai, C.L. Hwang, Interactive fuzzy linear programming, Fuzzy Sets and Systems 45 (1992) 169-183.
 - [90] Y.J. Lai, C.L. Hwang, Fuzzy Mathematical Programming: Methods and Applications, Springer-Verlag, Heidelberg, 1992.
 - [91] G. Zhang, Y.H. Wu, M. Remias, J. Lu, Formulation of fuzzy linear programming problems as four-objective constrained optimization problems, Applied Mathematics and Computation 139 (2003) 383-399.
 - [92] R. Zhao, R. Govind, Symmetrical fuzzy linear programming and its application to chemical engineering problems, Proceedings IEEE First International Symposium on Uncertainty Modeling and Analysis (1990) 500-505.
 - [93] H.J. Zimmermann, Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 45-55.
 - [94] H.J. Zimmermann, Fuzzy Sets, Decision Making and Expert Systems, Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1987.
 - [95] D.F. Li, A ratio ranking method of triangular intuitionistic fuzzy numbers and its application to MADM problems, Computers and Mathematics with Applications(CAMWA) 60 (2010) 1557-1570.
 - [96] F.T. Lin, M.G. Lee, Fuzzy constraints linear programming: A genetic algorithm approach, International Journal of Innovative Computing, Information and Control 3 (2007) 71-83.
 - [97] T.S. Liou, M.J. Wang, Ranking fuzzy numbers with integral value, Fuzzy Sets and Systems 50 (1992) 247-255.

- [98] X. Liu, Measuring the satisfaction of constraints in fuzzy linear programming, Fuzzy Sets and Systems 122 (2001) 263-275.
- [99] X.W. Liu, S.L. Han, Ranking fuzzy numbers with preference weighting function expectations, Computers and Mathematics with Applications 49 (2005) 1731-1753.
- [100] Pushpinder S.,(2011), PhD thesis, " Linear Programming Problems with Generalized Fuzzy Sets", Math. Dept.Thapar university - 147 004 (Punjab), India.
- [101] Z. Liu, H. Qiao, L. Xu, Investigation on multisets mixture learning based object detection, International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence 21 (2007) 1339-1351.
- [102] F.H. Lotfi, T. Allahviranloo, M.A. Jondabeh, L. Alizadeh, Solving a fully fuzzy linear programming using lexicography method and fuzzy approximate solution, Applied Mathematical Modelling 33 (2009) 3151-3156.
- [103] M.K. Luhandjula, Linear programming with a possibilistic objective function, European Journal of Operational Research 31 (1987) 110-117.

Aabstract

In this thesis, the limitations and shortcomings of existing methods for solving linear programming problems with fuzzy sets are pointed out. To overcome the limitations and shortcomings of existing methods, some new ranking approaches are proposed for comparing generalized fuzzy sets and vague sets. On the basis of proposed ranking approaches, some new methods are proposed to find the appropriate solution of such linear programming problems with generalized fuzzy sets and vague sets in which only the parameters cost (or profit) are represented by fuzzy sets or vague sets. The chapter wise summary of the thesis is as follows: In Chapter 1, a brief review of the work done in the area of linear programming problems with fuzzy sets is presented. In Chapter 2, it is shown that the existing method for solving linear programming problems with fuzzy sets can be used only for solving such linear programming problems in which either the parameters are represented by normal fuzzy sets or generalized fuzzy sets having equal height. Although, the limitations of the existing method can be removed by replacing an appropriate ranking approach instead of already used existing ranking approach for comparing fuzzy sets but there are some shortcomings in all existing ranking approaches so the existing ranking approach can be used to overcome the limitations of existing method. To overcome the limitations of existing method, a new ranking approach is proposed for comparing generalized trapezoidal fuzzy sets and on the basis of proposed ranking approach a new method is proposed for solving linear programming problems with generalized fuzzy sets. In Chapter 3, the limitations of some existing results for comparing generalized p-norm fuzzy sets are pointed out and with the help of the ranking approach, proposed in Chapter 2, some new results are proposed by modifying the existing results to overcome the limitations of existing results. It is shown that the existing results are the particular cases of the proposed results. Also, the method for solving linear programming problems with generalized fuzzy sets, proposed in Chapter 2, is used to solve a linear programming problem with generalized p-norm trapezoidal fuzzy sets. In Chapter 4, the shortcomings of the ranking approach, proposed in Chapter 2, are pointed out and to overcome these shortcomings a new ranking approach, named as RM ranking approach, is proposed for comparing generalized trapezoidal fuzzy sets. Also, with the help of RM ranking approach, a new method is proposed for solving linear programming problems with generalized trapezoidal fuzzy sets. In Chapter 5, the limitations of some existing results related to comparison of

intuitionistic fuzzy sets and shortcomings of an existing ranking approach for comparing triangular intuitionistic fuzzy sets are pointed out. To overcome the limitations of existing results, some new results are proposed by modifying the existing results and to overcome the shortcomings of existing ranking approach, a new ranking approach is proposed for comparing trapezoidal vague sets. Also, the method v for solving linear programming problems with generalized fuzzy sets, proposed in Chapter 4, with proposed ranking approach is used to solve a linear programming problem with trapezoidal vague sets. In Chapter 6, it is shown that the results of the linear programming problems with fuzzy sets obtained by using the existing and proposed methods are not appropriate. It is pointed out that all the shortcomings in the results are occurring due to used ranking approaches. To overcome the shortcomings of existing and proposed ranking approaches, a new ranking approach, named as RMDS ranking approach, is proposed for comparing trapezoidal vague sets. On the basis of proposed RMDS ranking approach, a new method is proposed for solving linear programming problems with a special trapezoidal vague sets. To show the advantage of the proposed method the linear programming problems with fuzzy and vague sets, for which the results obtained by using the existing and other proposed methods are not appropriate, are solved by using the proposed method and it is shown that the obtained results are appropriate. Finally, in Chapter 7, based on the presented study, conclusions are drawn and future work have been suggested.

keywords: Height- Trapezius- Fuzzy set- Programming problem- vague set- Ranking Approach- Triangular.



Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Optimization

Linear Programming Problems with Generalized Fuzzy Sets

By: Hadi Dastoorani

Supervisors:

Dr. Mehrdad Ghaznavi

Dr. Maryam Ghorani

August 2020