

الله الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش ریاضی مالی

پایان نامه کارشناسی ارشد

قیمت گذاری اختیار معامله تحت چند مدل وابسته به زمان هستون

نگارنده: انسیه نبی زاده

استادان راهنما

دکتر الهام دسترنج
دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطا آبادی

مهر ۱۳۹۹

شماره: ۳۴۳-۲۱۲-۶
تاریخ: ۹۹/۸/۲۶

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خاتم النبیه نبی زاده با شماره دانشجویی ۹۷۱۶۴۱۴ رشته ریاضی کاربردی گرایش ریاضی مالی تحت عنوان قیمت گذاری اختیار معامله تحت چند مدل وابسته به زمان هستون که در تاریخ ۱۳۹۹/۰۷/۲۳ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☒ الف) درجه عالی: نمره ۲۰-۱۹	☒ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸-۱۷
☐ ج) درجه خوب: نمره ۱۶-۱۵	☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۴-۱۳
☐ ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد	
نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی	

عنوان هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاذ اهنمای اول	دکتر الهام دسترنج	استادیار	
۲- استاذ اهنمای دوم	دکتر عبدالمجید عبدالباقی عطابادی	استادیار	
۳- استاذ مشاور	---	---	---
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سمیه مفاری	استادیار	
۵- استاذ ممتحن اول	دکتر حجت احسنی طهرانی	دانشیار	
۶- استاذ ممتحن دوم	دکتر مجتبی غیانی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده



تقدیم به همسر
و با ارزش‌ترین سرمایه‌های زندگی‌ام
مسیحا و مهدیار

سپاس‌گزاری

سپاس خدای بزرگ را که مرا یاری رساند تا بتوانم این مقطع تحصیلی را به پایان برسانم.

بر خود لازم میدانم از استاد راهنمای گرانقدرم سرکار خانم دکتر **الهام دسترنج** که وجودشان همیشه قوتی برای انجام کارهایم بوده است و بدون شک انجام این پایان‌نامه بدون کمک و راهنمایی‌های ارزنده ایشان امکان‌پذیر نبوده است، تقدیر و تشکر نمایم. همچنین از استاد راهنمای گرامیم جناب آقای دکتر **عبدالمجید عبدالباقی عطا آبادی** که در تمام مراحل، با صبر و حوصله، پاسخگوی سوالات و یاری رسانم بودند، کمال تشکر را دارم. همچنین از همه عزیزانی که مرا در نوشتن این پایان‌نامه یاری رساندند بویژه آقای حسین صاحبی فرد کمال تشکر و قدرانی را دارم.

انسیه نبی‌زاده
مهر ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب انسیه نبی زاده دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **قیمت گذاری اختیار معامله تحت چند مدل وابسته به زمان هستون**، تحت راهنمایی الهام دسترنج و عبدالمجید عبدالباقی عطا آبادی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

انسیه نبی زاده

مهر ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در این پایان نامه به قیمت گذاری اختیار معامله اروپایی تحت مدل هستون و برخی از مدل‌های وابسته به زمان مانند میخایلو ف نوگل، الیس، و بنهامو گوبت میری پرداخته شده است. سپس به بررسی عددی این مدل‌ها روی شاخص کل بازار بورس تهران طی سه دوره یکساله پرداخته شده و در نهایت قیمت گذاری اختیار معامله در سه دوره مختلف یکساله ۱۳۹۶ و ۱۳۹۷ و ۱۳۹۸ تحت مدل BGM صورت گرفته که با تخمین پارامترها و مقایسه مدل‌های وابسته به زمان میخایلو ف نوگل و بنهامو گوبت میری با مدل بلک شولز این نتیجه حاصل شده است که مدل‌های وابسته به زمان برای اختیارهای با سررسید کوتاه مدت به بازار واقعی نزدیکتر می باشند که این برازش مناسب و سازگار شدن مدل با بازار بخاطر وابسته کردن پارامترها به زمان در این مدل ها می باشد.

کلمات کلیدی: مدل‌های تلاطم تصادفی، مدل هستون، مدل‌های وابسته به زمان، تبدیل فوریه سریع.

فهرست مطالب

ک	فهرست تصاویر
م	فهرست جداول
۱	۱ مقدمه
۲	۱.۱ سابقه موضوع
۳	۲.۱ ضرورت تحقیق
۵	۲ پیش‌نیازها
۵	۱.۲ مفاهیم فرایندهای تصادفی
۱۱	۲.۲ چند فرآیند تصادفی مهم
۱۱	۱.۲.۲ حرکت براونی
۱۴	۳.۲ حسابان ایتو
۱۵	۱.۳.۲ انتگرال ایتو
۱۷	۲.۳.۲ فرمول ایتو
۱۸	۳.۳.۲ فرآیند ریشه مربعی
۲۰	۴.۲ قضیه گیرسانوف
۲۱	۵.۲ مفاهیم ریاضی مالی
۲۱	۱.۵.۲ سبد سهام
۲۲	۲.۵.۲ قراردادهای اختیار معامله
۲۵	۳.۵.۲ انواع معامله‌گران
۲۸	۶.۲ مدل بلک شولز
۲۹	۱.۶.۲ قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت مدل بلک شولز
۳۰	۷.۲ تبدیل فوریه در قیمت‌گذاری
۳۰	۱.۷.۲ تبدیل فوریه
۳۱	۲.۷.۲ تبدیل فوریه سریع برای اختیار معامله

۳۳	۳	مدل‌های تلاطم تصادفی
۳۳	۱.۳	مقدمه
۳۳	۲.۳	مبانی نظری و مروری بر پیشینه موضوع
۳۵	۳.۳	مدل هستون
۳۷	۱.۳.۳	تابع مشخصه
۳۸	۲.۳.۳	حقه کوچک هستون
۴۱	۴	مدل‌های وابسته به زمان
۴۲	۱.۴	مدل میخایلوو و نوگل
۴۴	۲.۴	مدل الیس
۴۷	۳.۴	مدل بنهامو-گوبت-میری
۴۸	۱.۳.۴	پارامترهای ثابت
۴۹	۲.۳.۴	پارامترهای ثابت تکه‌ای
۵۳	۵	مقایسه عددی روی شاخص کل بازار بورس تهران
۵۹	۶	نتایج و پیشنهادات
۵۹	۱.۶	نتیجه‌گیری
۶۰	۲.۶	پیشنهادهای
۶۱		مراجع

فهرست تصاویر

۱۳	شبيه‌سازی حرکت براونی و انواع آن	۱.۲
۱۹	شبيه‌سازی فرایند ریشه مربعی با $\kappa = 2$ و $\theta = 8^\circ$	۲.۲
۲۴	بازدهی حاصل از خرید یا فروش اختیار معامله اروپایی	۳.۲
۲۹	شبيه‌سازی مدل بلک-شولز با چند مسیر متفاوت	۴.۲
۳۹	مقایسه خطای دو تابع مشخصه‌ی مدل هستون	۱.۳
۵۴	تغییرات بازده شاخص کل بورس تهران طی یک سال	۱.۵
۵۵	قیمت‌گذاری اختیار خرید با قیمت توافقی و سررسیدهای مختلف	۲.۵
۵۶	قیمت‌گذاری اختیار فروش با قیمت توافقی و سررسیدهای مختلف	۳.۵

فهرست جداول

۵۴		۱.۵	نتایج تخمین پارامترها
۵۷		۲.۵	نتایج قیمت‌گذاری اختیار خرید

فصل ۱

مقدمه

رشد بسیار زیاد بازارهای مالی در سال های اخیر سبب جذب سرمایه گذاران بیشتری در این بازارها شده است. این سرمایه گذاران همواره در تلاش بوده اند که علیرغم افزایش بهره از دارایی خود ریسک موجود در بازار را مدیریت کنند. یکی از راهکارهای مدیریت ریسک استفاده از مشتقات مالی از جمله اختیار معاملات می باشد.

در سال ۱۹۷۳ فیشر بلک^۱ و مایرون شولز^۲ برای حل مساله ی قیمت گذاری اختیار معامله اروپایی راهبرد نوینی را پیشنهاد کردند که مبتنی بر تشکیل سبدی خود تامین در یک فضای بدون آربیتراژ بود. بی شک مدل بلک - شولز^۳ انقلابی در شیوه ی قیمت گذاری اختیار معامله به وجود آورد ولی در مدل بلک شولز نرخ تلاطم ثابت انگاشته شده و این در حالی است که الگوهای تلاطم مشاهده شده در قیمت های اختیار مبادله شده در بازار گواه از تصادفی بودن تلاطم دارند از طرف دیگر فرض اساسی در مدل بلک - شولز این است که توزیع احتمال قیمت آتی دارایی های پایه (سهام)، لگ نرمال است. اما در بازارهای مالی واقعی فرایند قیمت دارایی در مقایسه با توزیع لگ نرمال، دارای دُم سنگین تري است. در اکتبر ۱۹۷۸ با سقوط بازارهای سهام و رکود اقتصادی مدل بلک - شولز که تا قبل از آن بهترین و کارآمدترین مدل برای قیمت گذاری حرکت سهام به شمار می آمد کارایی خود را از دست داد و تنها به عنوان پایه ای برای سایر مدل ها مورد استفاده قرار گرفت. بدین ترتیب، افراد زیادی برای نزدیک شدن مدل با

¹Fischer Black

²Myron Scholes

³Black-Scholes model

بازار واقعی دست به اصلاح و ایجاد تغییرات در این معادله زدند که در این بین مدل هستون^۱ بیشتر مورد توجه قرار گرفت.

مدل هستون یکی از مدل‌های نوسان تصادفی است که هدف اصلی هستون غلبه بر برخی کاستی‌های موجود در مدل مشهور قیمت‌گذاری اختیار بلک-شولز بود. از مزیت‌های مدل هستون فرآیند بازگشت به میانگین تعریف شده در این مدل است که رفتار بازگشت به میانگین تلاطم‌ها را در بازارهای مالی توجیه می‌کند. از دلایل دیگر محبوبیت این مدل می‌توان به امکان به دست آوردن فرمول‌های قیمت قرارداد اختیار برای قراردادهای اختیار اروپایی با استفاده از تبدیل فوریه در سال ۱۹۹۹ اشاره کرد. [۴] همچنین در سال ۲۰۰۴ و ۲۰۰۷ از روش‌های تقسیم عملگر برای قیمت‌گذاری قراردادهای آمریکایی در مدل هستون استفاده شد. از سوی دیگر به منظور قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار از روش‌های شبیه‌سازی مونت کارلو^۲ در مدل هستون استفاده شده است. همچنین این مدل توانایی ترکیب با یک مدل با نرخ بهره تصادفی را دارد.

۱.۱ سابقه موضوع

یکی از راهکارهای از بین بردن نقص مدل بلک-شولز آن است که تلاطم یک فرآیند تصادفی در نظر گرفته شود و هستون یکی از مشهورترین مدل‌های تلاطم تصادفی است که تاحد قابل قبولی کمبودهای بلک-شولز را برطرف کرده است. در مدل هستون تلاطم قیمت سهام ثابت نبوده و خود از یک فرآیند تصادفی پیروی می‌کند.

در مدل هستون تلاطم و مدل دارایی پایه هر کدام شامل یک فرآیند انتشار هستند که با یکدیگر همبسته انداز دیگر مزایای این مدل فرآیند بازگشت به میانگین تعریف شده در این مدل است که رفتار بازگشت به میانگین تلاطم را در بازارهای مالی توجیه می‌کند اما با این حال مدل هستون گاهی قادر به فراهم کردن برازش مناسب برای تلاطم‌های ضمنی بازار با سررسید کوتاه نمی‌باشد.

یک راه حل معمول برای این مساله غنی‌سازی مدل با پارامترهای اضافی از طریق مشخص کردن یک فرآیند تلاطم واقع‌گرایانه است که همان روش هستون مضاعف می‌باشد. تلاطم تصادفی تحت مدل هستون مضاعف در مقایسه با مدل هستون استاندارد انعطاف بیشتری نسبت به قیمت‌های پرت دارد و در حدود ۲۴ درصد بیشتر از هستون استاندارد آنها را پوشش داده و نیز نسبت به تلاطم جزئی قیمت‌ها حساسیت بیشتری از خود نشان می‌دهد. [۴] روش دیگر این است که اجازه دهیم پارامترها وابسته به زمان باشند. روش دوم روشی است

¹Heston Model

²Monte Carlo method

که از سوی میخایلو ف ونوگل^۱، الیس^۲، بنهامو گوبت و میری^۳ اتخاذ گردید. آنها با وابسته کردن پارامترهای مدل به زمان، مدل هستون را ارتقا بخشیدند تا اختیاراتهای کوتاه مدت به بازار واقعی نزدیکتر باشد. [۳۲] برای حل مدل های مالی دارایی های پایه روشهای گوناگونی وجود دارد یکی از روشهای مشهور در این زمینه استفاده از تبدیل فوریه سریع است که در سال ۱۹۹۹ توسط کار و مادان^۴ معرفی شد. در این روش از تابع مشخصه فرآیند دارایی پایه استفاده می شود.

۲.۱ ضرورت تحقیق

یکی از ارکان اصلی موثر بر تصمیم های سرمایه گذاری، ارزش گذاری دارایی ها است. ارزش گذاری اصولی و صحیح دارایی ها، تخصیص بهینه منابع سرمایه ای را به همراه دارد. اتخاذ تصمیم های اصولی سرمایه گذاری و تخصیص بهینه منابع سرمایه ای، مستلزم ارزش گذاری اوراق با استفاده از روش های معتبر علمی است.

پیش بینی روند بازار سهام به دلیل نوسان های محیطی و تلاطم ذاتی روندهای روزانه بازار بسیار پیچیده است. پیچیدگی حرکات روزانه بازار و قیمت سهام از عواملی نظیر حوادث سیاسی، اخبار بازار، گزارش های دوره های درآمد و رفتارهای متعارض معامله تاثیر می گیرد. این تلاطم و عدم اطمینان موجود از وضعیت آینده در بازارهای مالی زیان شدیدی به بازیگران اقتصادی وارد کرده است و حتی باعث شده که آنها از بازار خارج شوند و در این عرصه توانایی رقابت با دیگران را نداشته باشند. به منظور پاسخ گویی به این مسئله بازار، انواع مشتقات مالی طراحی شده است. در واقع این اوراق به فعال تر شدن بورس و تعمیق بازار کمک کرده اند.

اختیار معامله یکی از انواع اوراق مشتقه در حوزه مالی است. باید توجه داشت که مسئله مهم در خصوص هر ابزار مالی از جمله اختیار معامله بحث قیمت گذاری آن است. تغییرات ناگهانی ناشی از عوامل مختلف سیاسی، اقتصادی، اجتماعی و... باعث تغییر در قیمت دارایی های پایه می شود که روند استاندارد قیمت گذاری ها این نوسانات را پوشش نمی دهد. برای از بین بردن این مشکل مدل های تلاطم تصادفی وابسته به زمان توسط محققان مالی ارائه شده است. علاوه بر مدلسازی بازارهای مالی یافتن روشی کارا و مناسب برای حل مدل های پیشنهادی و پیش بینی قیمت ها در زمان آتی بسیار مهم است.

انتخاب مدل مناسب جهت قیمت گذاری بهینه و کارا که با بازار مالی مطابقت داشته باشد اهمیت به سزایی دارد، مدلی مناسب است که فرصت آربیتراژ را در بازار کاهش دهد و به قیمت واقعی نزدیکتر باشد.

¹Mikhailov and Nögel

²Elises

³Benhamou, Gobet and Miri

⁴Carr and Madan

در این پژوهش، پس از معرفی چند مدل وابسته به زمان، به قیمت گذاری اختیار اروپایی پرداخته شده است. برای این منظور از انتگرال های تصادفی از جمله ایتو و پاره ای از قضایای اساسی ریاضی مالی از جمله قضیه گیرسانوف^۱، فاینمن^۲، فاینمن-کاک^۳ و... استفاده می کنیم. همچنین برای تخمین پارامترها از روش حداکثر درستنمایی استفاده شده است. در ادامه ابتدا به مرور برخی پیش نیازهای فرایندهای تصادفی و ریاضی مالی پرداخته و سپس در فصل بعدی مدل هستون و تابع مشخصه آن معرفی شده است. در فصل ۴ مدل های وابسته به زمان و طریقه به دست آوردن توابع قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی برای آنها مورد بررسی قرار گرفته است و در فصل پایانی این پژوهش مقایسه عددی روی شاخص کل بازار بورس تهران با مدل های وابسته به زمان و مدل بلک-شولز انجام شده است.

¹Girsanov's Theorem

²Feynman

³Feynman-Kac

فصل ۲

پیش نیازها

۱.۲ مفاهیم فرآیندهای تصادفی

تعریف ۱.۱.۲. اگر فرض کنیم Ω (فضای نمونه) مجموعه‌ی ناتهی باشد و $\mathcal{F}$ دسته‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω در نظر گرفته شود، در این صورت $\mathcal{F}$ یک **نیم حلقه** گفته می‌شود هرگاه

$$\emptyset \in \mathcal{F}.$$

۲. تحت اشتراک‌های متناهی بسته باشد، به عبارتی اگر دنباله‌ای متناهی از مجموعه‌ها مانند $A_1, A_2, \dots, A_n$ متعلق به $\mathcal{F}$ باشند، آن گاه داشته باشیم

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

۳. اگر A_1, A_2 دو مجموعه دلخواه متعلق به $\mathcal{F}$ باشد آن گاه بتوانیم تفاضل این دو را به صورت اجتماع متناهی از اعضای دو به دو جدا از هم بنویسیم

$$A_1 - A_2 = \bigcup_{i=1}^n B_i, \quad B_i \in \mathcal{F},$$

که $B_i \cap B_j = \emptyset$ و برای $i \neq j$ و $i = 1, 2, \dots, n$.

تعریف ۲.۱.۲. اگر Ω یک مجموعه‌ی ناتهی فرض شود و $\mathcal{F}$ دسته‌ای ناتهی از زیرمجموعه‌های Ω در نظر گرفته شود، $\mathcal{F}$ یک σ -میدان خواهد بود هرگاه

$$\emptyset \in \mathcal{F}.1$$

۲. تحت مکمل بسته باشد یعنی اگر $A \in \mathcal{F}$ آن‌گاه $A^c \in \mathcal{F}$.

۳. همچنین اگر دنباله‌ای نامتناهی از مجموعه‌ها مانند $A_1, A_2, \dots$ که همگی متعلق به $\mathcal{F}$ هستند موجود باشند، آنگاه

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

به عبارت دیگر $\mathcal{F}$ تحت اجتماع‌های شمارش‌پذیر نامتناهی بسته باشد.

تعریف ۳.۱.۲. فرض شود $\Omega = \mathbb{R}$ (یا $\mathbb{R}^n$) و $\mathcal{F}$ دسته‌ی همه‌ی بازه‌ها باشد، σ - میدان تولید شده توسط σ ، - **میدان بورل** گفته می‌شود و به صورت $\mathcal{B}$ نمایش داده می‌شود. همه‌ی بازه‌هایی که به صورت $[a, b]$ یا $[a, b)$ یا (a, b) که در آن a و b اعداد گویا می‌باشند و یا مجموعه‌ی شعاع‌هایی که ابتدا و انتهای آن‌ها اعداد گویا هستند همه می‌توانند مولد بورل باشند.

تعریف ۴.۱.۲. به هر دسته‌ی صعودی از σ - میدان‌ها یک **فیلتر** گفته می‌شود و به صورت $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۵.۱.۲. اگر فرض شود $\mathcal{F}$ یک نیم‌حلقه از زیرمجموعه‌های مجموعه ناتهی Ω باشد، تابع $(\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty])$ را یک **اندازه** می‌نامیم اگر شرایط زیر برقرار باشد

۱. برای هر مجموعه $A \in \mathcal{F}$ مقدار تابع نامنفی باشد یعنی $0 \leq \mu(A) \leq \infty$.

۲. اگر $\{A_n\}_{n \geq 1}$ دنباله‌ای از اعضای دو به دو جدا از هم $\mathcal{F}$ باشند که $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{F}$ باشد آن‌گاه

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n).$$

خاصیت دوم را، خاصیت σ - جمع‌پذیری برای μ نیز می‌گوییم. [۱۰]

تعریف ۶.۱.۲. اندازه $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, +\infty]$ - **متناهی** گفته می‌شود هرگاه دنباله‌ی $\{A_n\}_{n \geq 1}$ از اعضای دو به دو جدا از هم $\mathcal{F}$ موجود باشد که

$$X = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

و برای هر $n \geq 1$ ، $\mu(A_n) < \infty$.

تعریف ۷.۱.۲. اگر Ω یک مجموعه‌ی ناتهی فرض شود و $\mathcal{F}$ یک σ - میدان از زیرمجموعه‌های آن باشد، زوج مرتب $(\Omega, \mathcal{F})$ یک **فضای اندازه‌پذیر** است

اگر P اندازه‌ای روی $\mathcal{F}$ باشد آن‌گاه سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را **فضای اندازه می‌نامیم**. [۱۰]

تعریف ۸.۱.۲. تابع حقیقی مقدار $f : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ را **اندازه‌پذیر** می‌نامیم اگر برای هر B از $\mathcal{B}$ (بورل) رابطه زیر برقرار باشد

$$f^{-1}(B) = \{w \in \Omega : f(w) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

تعریف ۹.۱.۲. فرض شود $(X, \mathcal{A})$ یک فضای اندازه‌پذیر باشد μ_1 و μ_2 را دو اندازه مطلقاً پیوسته روی این فضا می‌نامیم (با نماد $\mu_1 \ll \mu_2$ نمایش داده می‌شود) اگر برای هر مجموعه اندازه‌پذیر روی A با صفر بودن اندازه μ_2 روی A نتیجه بگیریم که اندازه μ_1 روی A نیز صفر است یعنی:

$$\mu_2(A) = 0 \implies \mu_1(A) = 0.$$

به عنوان مثال از آنجایی که اندازه شمارشی μ فقط برای مجموعه تهی دارای اندازه صفر است واضح است که هر اندازه دیگری مثل ν نسبت به آن مطلقاً پیوسته است.

تعریف ۱۰.۱.۲. اگر $\mathcal{F}$ یک σ -میدان از زیرمجموعه‌های مجموعه‌ی ناتهی Ω باشد، تابع P یک اندازه احتمال خواهد بود اگر

$$P(\Omega) = 1.$$

۲. اگر $\{A_n\}_{n \geq 1}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های مجزا در $\mathcal{F}$ باشند آن‌گاه

$$P\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} P(A_n).$$

سه‌تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را فضای احتمال می‌نامیم. [۱۰]

قضیه ۱.۱.۲. (قضیه رادون-نیکودیم)^۱ فضای اندازه‌پذیر $(X, \mathcal{A})$ را در نظر بگیرید و μ و ν دو اندازه σ -متناهی روی $\mathcal{A}$ باشند. اگر $\mu \ll \nu$ آن‌گاه یک تابع اندازه‌پذیر نامنفی مانند f وجود دارد که برای هر A از $\mathcal{A}$ داریم:

$$\mu(A) = \int_A f d\nu.$$

این قضیه توسط «جردن رادون» اولین بار در فضای R^n در سال ۱۹۱۳ اثبات شد و همچنین «اتو نیکودیم» در سال ۱۹۳۰ حالت عمومی آن را به اثبات رساند. این قضیه در نظریه اندازه هم‌ارز با مشتق در حساب دیفرانسیل و انتگرال است به این معنی که نرخ تغییرات یک اندازه را بر حسب اندازه دیگر بیان می‌کند. جالب است بیشتر خواصی که برای رابطه بین انتگرال و مشتق در حسابان مطرح است توسط قضیه رادون-نیکودیم نیز برای اندازه‌ها قابل تعمیم است. قضیه مشتق رادون-نیکودیم بیان می‌کند که تحت چه شرایطی می‌توان از یک اندازه احتمال به اندازه احتمال دیگری رسید. حتی قدمی جلوتر برداشته و نحوه تغییر و روش شناسایی آن را نیز مشخص می‌کند. [۵]

تعریف ۱۱.۱.۲. به هر تابع اندازه‌پذیر از فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ به فضای اندازه‌پذیر $(R, \mathcal{B})$ یک متغیر تصادفی می‌گوییم اگر رابطه زیر برای هر زیرمجموعه b از $\mathcal{B}$ برقرار باشد.

$$X^{-1}(b) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in b\} \in \mathcal{F}.$$

^۱Rodou-Nikodym theorem

طبق قرارداد برای نمایش متغیرهای تصادفی معمولاً از حروف بزرگ لاتین مثل $X, Y, Z, \dots$ استفاده می‌شود. [۱۰]

تعریف ۱۲.۱.۲. فرض شود X یک متغیر تصادفی باشد، σ —میدان تولید شده توسط X را با نماد $\sigma(X)$ یا $\mathcal{F}_X$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mathcal{F}_X = \sigma(X) = \{X^{-1}(A) : A \in \mathcal{B}\}.$$

تعریف ۱۳.۱.۲. اگر X متغیری تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. تابع توزیع X را با $\mathcal{F}_X$ نشان داده و برای هر عدد حقیقی x به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathcal{F}_X(x) = P_X(-\infty, x] = P\{X \leq x\}$$

که در آن P_X اندازه‌ی القا شده توسط X روی $\mathcal{B}$ است که **توزیع متغیر تصادفی** گفته می‌شود.

تعریف ۱۴.۱.۲. اگر A مجموعه‌ای دلخواه از σ —میدان $\mathcal{A}$ باشد، تابع مشخصه‌ی مجموعه‌ی A را با χ_A نشان می‌دهیم که صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

تعریف ۱۵.۱.۲. تابعی با دامنه دلخواه و مقادیر حقیقی، که تعداد مقادیرش متناهی باشد را تابع ساده می‌نامیم. فرض شود ϑ تابعی ساده روی فضای اندازه $(X, \mathcal{A}, \mu)$ با مقادیر متمایز $a_1, a_2, \dots, a_n$ باشد. پس داریم $\vartheta = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ که در آن $A_i = \{x \in X : \vartheta(x) = a_i\}$ واضح است که A_i ها مجزا هستند. شرط اندازه‌پذیری ϑ اندازه‌پذیری A_i ها می‌باشد. انتگرال ϑ نسبت به اندازه μ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_A \vartheta d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i).$$

قرارداد می‌کنیم $0 \times \infty = 0$.

تعریف ۱۶.۱.۲. اگر $(X, \mathcal{A}, \mu)$ یک فضای اندازه و f تابعی اندازه‌پذیر و نامنفی باشد، **انتگرال** f روی هر $A \in \mathcal{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\int_A f d\mu = \sup \left\{ \int_A \vartheta d\mu : \vartheta \leq f \right\},$$

که در آن ϑ تابعی ساده و نامنفی است. [۱۰]

تعریف ۱۷.۱.۲. اگر X یک متغیر تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد، **امید ریاضی** (ارزش مورد انتظار) X به صورت زیر تعریف می‌شود

$$E(X) = \int_{\Omega} X(w) dP(w),$$

به طوری که $E | X | < \infty$.

ملاحظه ۱.۱.۲. اگر $E | X | = \infty$ ، آنگاه امید ریاضی X وجود ندارد.

تعریف ۱۸.۱.۲. برای متغیر تصادفی X واریانس را به صورت زیر محاسبه می شود؛

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

تعریف ۱۹.۱.۲. تابع مولد گشتاور^۱ برای متغیر تصادفی X به صورت زیر تعریف می شود

$$M_X(t) = E[e^{tX}], \quad t \in R.$$

ملاحظه ۲.۱.۲. می دانیم انتگرال همیشه مطلقاً همگرا نیست پس تابع مولد گشتاور همواره وجود ندارد.

تعریف ۲۰.۱.۲. تابع مشخصه^۲ برای متغیر تصادفی X به صورت زیر به دست می آید

$$\varphi_X(iw) = E[e^{iwX}].$$

تعریف ۲۱.۱.۲. برای دو متغیر تصادفی X و Y کواریانس بارابطه زیر تعریف به دست می آید

$$Cov(X, Y) = E(X)E(Y).$$

تعریف ۲۲.۱.۲. دو متغیر تصادفی X و Y را مستقل از هم می نامیم هر گاه

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

تعریف ۲۳.۱.۲. دنباله $X_1, X_2, \dots, X_n$ مستقل خواهند بود اگر

$$\mathcal{F}_{X_1, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{F}_{X_1}(x_1) \dots \mathcal{F}_{X_n}(x_n)$$

ملاحظه ۳.۱.۲. کوواریانس دو متغیر تصادفی مستقل، برابر صفر می باشد.

تعریف ۲۴.۱.۲. ضریب همبستگی متغیرهای تصادفی X و Y به صورت زیر تعریف می شود.

$$\rho = \rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(y)}}$$

تعریف ۲۵.۱.۲. متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ است اگر و تنها اگر تابع چگالی احتمال آن به صورت زیر باشد

$$\varphi(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right), \quad -\infty < X < \infty.$$

توزیع نرمال با $\mu = 0$ و $\sigma = 1$ توزیع نرمال استاندارد گفته می شود. [۱۰]

^۱Moment generating function

^۲Characteristic function

تعریف ۲۶.۱.۲. (امید شرطی) فرض کنید $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ فضای احتمال و $\mathcal{D}$ یک زیر σ -میدان از $\mathcal{F}$ و Z متغیری تصادفی، نامنفی و انتگرال‌پذیر باشد. امید Z به شرط $\mathcal{D}$ یک متغیر تصادفی $\mathcal{D}$ -اندازه‌پذیر روی $(\Omega, \mathcal{F})$ است که آن را با $E(Z | \mathcal{D})$ نشان داده می‌شود به صورت زیر است.

$$\forall D \in \mathcal{D}, \int_D E(Z | \mathcal{D}) dP = \int_D Z dP.$$

ملاحظه ۴.۱.۲. ویژگی‌های امید شرطی

۱. اگر $X \geq 0$ آن‌گاه $E(X | \mathcal{D}) \geq 0$ a.s.^۱.

۲. $E(X + Y | \mathcal{D}) = E(X | \mathcal{D}) + E(Y | \mathcal{D})$ a.s.

۳. برای هر $a \in \mathbb{R}$

$$E(aX | \mathcal{D}) = aE(X | \mathcal{D}) \quad a.s.$$

۴. اگر $\mathcal{D} = \{\Omega, \emptyset\}$ آن‌گاه

$$E(X | \mathcal{D}) = E(X) \quad a.s.$$

۵. اگر $\mathcal{D}_1$ یک زیر σ -میدان از $\mathcal{D}_2$ باشد، آن‌گاه

$$E(E(X | \mathcal{D}_2) | \mathcal{D}_1) = E(X | \mathcal{D}_1) \quad a.s.$$

۶. $E(E(X | \mathcal{D})) = E(X)$ a.s.

تعریف ۲۷.۱.۲. هر خانواده از متغیرهای تصادفی (شمارا یا ناشمارا)، را یک **فرآیند تصادفی** می‌نامیم.

ملاحظه ۵.۱.۲. فرض شود $\{X_t\}_{t \geq 0}$ یک فرآیند تصادفی باشد و

$$\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$$

آن‌گاه $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ یک فیلتر می‌باشد که به آن فیلتر طبیعی می‌گوییم.

تعریف ۲۸.۱.۲. اگر $\mathbb{F}$ یک فیلتر باشد. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار خواهد بود اگر برای هر $X_t \in \mathcal{F}_t, t \geq 0$ به عبارت دیگر متغیر تصادفی $X_t, \mathcal{F}_t$ -اندازه‌پذیر باشد. [۱۰]

تعریف ۲۹.۱.۲. فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{Z}^+}$ را **مارتینگل**^۲ می‌نامیم اگر

^۱Almost surely

^۲Martingale

۱. $\{X_n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ سازگار باشد،

۲. برای هر n ، $E(|X_n|) < \infty$ به عبارت دیگر برای هر n ، X_n انتگرال پذیر باشد،

۳. برای هر $n \geq 1$

$$E(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = X_n \quad a.s.$$

تعریف ۳۰.۱.۲. اندازه احتمال های Q و P را روی فضای $(\Omega, \mathcal{F})$ **معادل** می نامیم اگر برای هر $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = 1 \iff Q(A) = 1$$

۲.۲ چند فرآیند تصادفی مهم

در این بخش دو فرآیند تصادفی مهم را معرفی می کنیم

۱.۲.۲ حرکت براونی

تاریخ انتگرال گیری تصادفی و یافتن الگویی برای قیمت گذاری قراردادهای بازار بورس، هر دو به حرکت براونی باز می گردد. بنابراین از مهم ترین فرآیندهای تصادفی که اساس و بنیان نظریه ای احتمال مدرن، آنالیز تصادفی و معادلات دیفرانسیل است حرکت براونی می باشد. حرکت براونی و فرآیند وینر ریشه در آمار، امور مالی و فیزیک دارد این فرآیند به صورت یک فرآیند زمان پیوسته در نظر گرفته میشود. حرکت نامنظم گرده گیاهان که در آب معلق هستند را به افتخار گیاه شناس اسکاتلندی روبرت براون^۱، که برای نخستین بار در تابستان ۱۸۲۷ میلادی این حرکت را مشاهده کرد، حرکت براونی^۲ نامیدند.

در سال ۱۹۰۵ میلادی آلبرت انیشتن^۳ علت این حرکت را اینگونه توضیح داد که دانه های گرده دایماز سوی مولکولهای آب بمباران می شوند. به عبارت دیگر، ذرات و مولکولهای موجود در گازها و یا مایعات در هر راستایی می توانند حرکت کنند و در اثر برخورد با یکدیگر مرتب تغییر جهت دهند و در نتیجه حرکت نامنظمی داشته باشند که به این حرکت، حرکت براونی می گویند. چندی نگذشت که دامنه کاربرد حرکت براونی بسیار گسترده تر شد و حتی وارد مباحث ریاضیات مالی مانند مدل سازی قیمت سهام نیز شد.

در سال ۱۹۱۸ میلادی نوربرت وینر^۴ (۱۸۹۴ – ۱۹۶۴ میلادی) ریاضی دان برجسته آمریکایی، الگوی حرکت براونی را به طور کامل بررسی کرد. وی در سال ۱۹۲۳ میلادی فرآیند مطلوب حرکت براونی را که امروز فرآیند وینر نیز گفته می شود را به فرم ریاضی ساخت.

^۱Robert Brown

^۲Brownian motion

^۳Albert Einstein

^۴Norbert Wiener

از مولفه‌های مشخص برای چنین فرآیندی می‌توان به مستقل بودن مقدار گام‌ها یا فاصله نقطه‌های مربوط به فرآیند نام برد. همچنین در این فرآیند تصادفی میزان افزایش یا طول گام‌ها بر اساس توزیع نرمال تعیین می‌شود. میانگین این توزیع برابر با صفر و واریانس آن نیز در همه گام‌ها ثابت است. در ادامه صورت ریاضی حرکت براونی استاندارد را مطرح می‌کنیم. [۳]

تعریف ۱.۲.۲. فرآیند تصادفی $\{B_t\}_{t \geq 0}$ را یک **حرکت براونی استاندارد**^۱ گفته می‌شود هرگاه

$$B_0(w) = 0.$$

۲. برای $0 \leq t \leq s$ ، دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس $s - t$ باشد،

۳. برای $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ ، متغیرهای تصادفی $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \dots, B_{t_1} - B_{t_0}$ مستقل و هم‌توزیع باشند.

حرکت براونی استاندارد فرآیند وینر^۲ نیز گفته می‌شود.

ملاحظه ۱.۲.۲. فیلتر استاندارد فرآیند براونی به صورت زیر می‌باشد

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, s \leq t\}.$$

.

قضیه ۱.۲.۲. تقریباً تمام مسیرهای حرکت براونی هیچ‌جا مشتق‌پذیر است، یعنی

$$P(\limsup \left| \frac{B(t+h) - B(t)}{h} \right| = +\infty) = 1.$$

□

برهان. به [۳۵] رجوع کنید.

تعریف ۲.۲.۲. اگر $\{W_t\}_{t \geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد باشد. در این صورت فرآیند تصادفی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ که در معادله دیفرانسیل معمولی زیر صدق می‌کند

$$dX_t = \alpha X_t dt + \sigma X_t dW_t \quad (1.2)$$

که در آن α و σ مقادیر ثابت‌اند، را **حرکت براونی هندسی**^۱ می‌گوییم.

قضیه ۲.۲.۲. برای حرکت براونی هندسی $\{X_t\}_{t \geq 0}$ با فرض $X_0 = x_0$ روابط زیر برقرار هستند:

$$E(X_t) = x_0 e^{\alpha t} \quad (1)$$

$$X_t = x_0 \exp\left\{\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\} \quad (2)$$

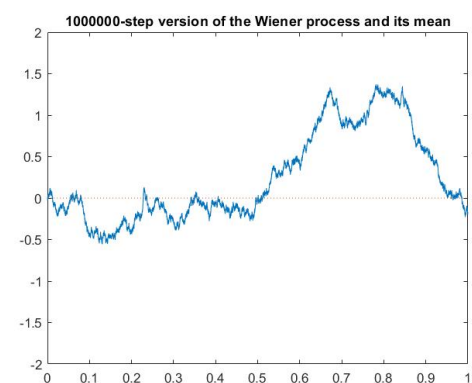
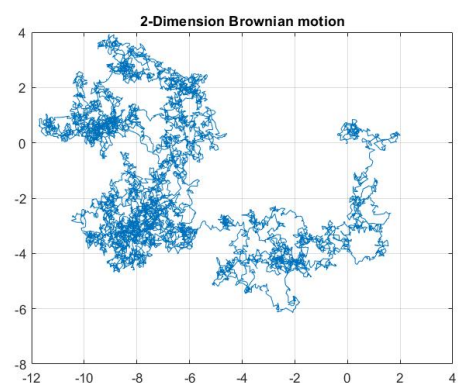
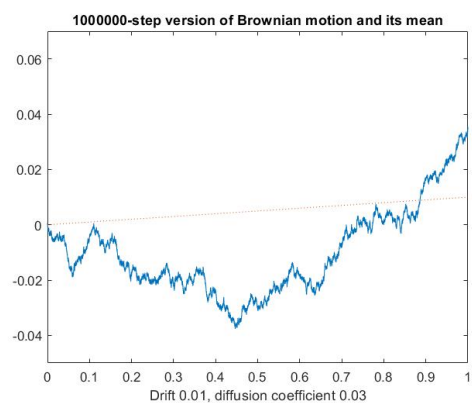
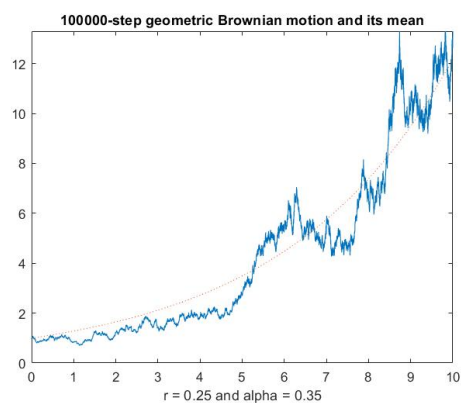
□

برهان. به [۳۳] رجوع کنید.

¹Standard Brownian motion

²Wiener process

¹Geometric Brownian motion



شکل ۱.۲: شبیه‌سازی حرکت براونی و انواع آن

تعریف ۳.۲.۲. بازگشت به میانگین^۱: وقتی که یک فرآیند به بی‌نهایت میل نمی‌کند و حول یک میانگین بلندمدت خوش‌تعریف نوسان می‌کند دارای ویژگی بازگشت به میانگین می‌باشد و به شکل زیر است:

$$dy_t = \lambda(\gamma - y_t)dt + \sigma_y f_y(y_t)dW_t,$$

که σ_y تلاطم، f یک تابع خوش‌تعریف، W_t فرآیند براونی نظیر y_t و γ میانگین بلندمدت y_t را نشان می‌دهند و λ نرخ بازگشت به میانگین نامیده می‌شود.

ویژگی بالا بیان‌کننده آن است که قیمت یک دارایی همواره حول میانگین قیمت‌های قبلی یا همان میانگین بلندمدت خود در نوسان است. یعنی اگر رفتارشان را در درازمدت تماشا کنیم تمایل دارند که دوباره به سمت میانگین بازگردند پس وقتی قیمت دارایی‌ها در بازار خیلی زیاد یا خیلی کم می‌شود احتمال آنکه به میانگین قبلی برگردد بالاتر می‌رود و سرعت بازگشت به میانگین بیشتر می‌شود، انگار فنری به متغیر وصل است که هر چه بیشتر از میانگین دور می‌شود بیشتر آن را می‌کشد.

این رویکرد به صورت کلان برای مقایسه و پیش‌بینی و به‌خصوص مقایسه ریسک و بازده بازارها قابل استفاده است و در حوزه سرمایه‌گذاری از اهمیت بالایی برخوردار می‌باشد.

۳.۲ حسابان ایتو

کیوشی ایتو^۲ را پدر انتگرال تصادفی می‌خوانند. شکی نیست که یکی از نخستین انگیزه‌های ایتو برای مطالعه انتگرال‌های تصادفی، پایه‌گذاری تعبیر درستی از دیفرانسیل تصادفی بوده است که بتوان آن را در بررسی فرآیندهای مارکف نیز به کار گرفت.

در انتگرال وینر نمی‌توان فرآیندهای تصادفی را به عنوان انتگرالده به کار برد چون تقریباً هر مسیر حرکت براونی روی هیچ بازه زمانی متناهی با تغییرات کراندار نیست، در حالی که اگر بخواهیم برای مثال یک فرآیند نفوذ را به صورت جوابی از یک معادله دیفرانسیل تصادفی نمایش دهیم گریزی از چنین انتگرالده‌هایی نخواهد بود. ایتو می‌دانست که نمی‌شود از همه‌ی فرآیندهای تصادفی پیوسته انتگرال گرفت. یکی از بصیرت‌های عالی ایتو این بود که فضای انتگرالده‌های خود را به فرآیندهای به اصطلاح پیش‌بینی ناپذیر محدود کرد. در واقع خود ایتو این انگیزه را به این صورت بیان می‌کند:

«در این مقالات به روش‌های آنالیزی نیرومندی برای مطالعه احتمال‌های گذر فرآیندها برخورد کردم منظورم معادله سهموی کلموگرف و توسیعی از آن است که فلر ارائه کرده است اما می‌خواهم مسیرهای فرآیندهای مارکف را همان طوری مطالعه کنم که لوی به فرآیندهای دیفرانسیلی می‌نگریست. دیدگاه شهودی را که کلموگرف در به دست آوردن معادلاتش برگزیده

¹Mean reversion

²Kioshi Ito

بود پیش چشم قرار دادم و متوجه شدم که یک ذره مارکفی در هر لحظه به ازای آینده ای بسیار کوچک یک فرآیند دیفرانسیلی همگن زمانی را می پیماید و به این ترتیب به مفهوم معادله دیفرانسیل تصادفی حاکم بر مسیرهای یک فرآیند مارکف رسیدم که می شد آن را بر حسب دیفرانسیل های یک فرآیند دیفرانسیلی تنها بیان کرد.»
اولین مقاله ایتو در سال ۱۹۴۴ منتشر شد. حاصل تلاش های ایتو و چیزی که او بیان و ثابت کرد را امروزه با نام فرمول ایتو می شناسیم که در ادامه به آن می پردازیم. [۶]

۱.۳.۲ انتگرال ایتو

فرض شود ذره ای در سطح آب حرکت می کند. مساله پیش رو مدل سازی حرکت این ذره نسبت به زمان است. از آن جا که مکان ذره در لحظه t ، $t \in [0, T]$ و $(T > 0)$ به دلیل ضرباتی که وزش باد و مولکول های آب به آن وارد می کند مشخص نیست (تصادفی است)، معادله آن به صورت زیر است.

$$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t) \text{ (نوفه)} \quad (2.2)$$

که در آن σ و b توابع حقیقی داده شده روی $\Omega \times (0, \infty)$ هستند و نوفه فرآیند تصادفی مانند Z_t است که در سه شرط زیر صدق می کند.

- برای هر $t_1, t_2 \in [0, T]$ که $t_1 \neq t_2$ ، Z_{t_1} و Z_{t_2} مستقل از هم باشند.
- توزیع توام متغیرهای تصادفی $Z_{t_1+t}, \dots, Z_{t_n+t}$ ، $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq T$ به t بستگی نداشته باشد.
- برای هر $t \in (0, T]$ ، $E(Z_t) = 0$.

فرض کنید $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ افرازی از فاصله $[0, T]$ است. با گسسته سازی رابطه ۲.۲ به دست خواهد آمد

$$X_{t_{k+1}} - X_{t_k} = b(t_k, X_{t_k})\Delta t_k + \sigma(t_k, X_{t_k})\Delta t_k Z_k.$$

تنها فرآیندی با این ویژگی ها که دارای مسیرهای پیوسته است فرآیند براونی است. لذا می توان نوشت

$$X_t = X_0 + \sum_{j=0}^{k-1} b(t_j, X_j)\Delta t_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sigma(t_j, X_j)\Delta B_j$$

اگر حد طرف راست عبارت بالا وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ وجود داشته باشد رابطه ی زیر حاصل می شود

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, w)ds + \int_0^t \sigma(s, w)dB_s$$

بنابراین به روشنی برای پیدا کردن فرآیند $\{X_t\}$ لازم است انتگرال‌هایی به فرم زیر محاسبه شوند

$$\int_s^T f(t, w) dB_t(w)$$

که $B_t(w)$ فرآیند براونی یک بعدی استاندارد و f تابعی حقیقی روی $\Omega \times [0, \infty)$ است. برای رسیدن به این هدف لازم است مرحله‌های زیر طی شوند. فرض شود $\phi : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی ابتدایی^۱ باشد یعنی

$$\phi(t, w) = X(w) \mathbb{I}_{(a, b]}(t), \quad a, b \in [0, \infty)$$

در این صورت رابطه زیر را داریم

$$\int_a^t \phi(s, w) dB_s = \int_a^t X(w) \chi_{[a, b]} dB_s(w) = X(w) [B_{b \wedge t}(w) - B_{a \wedge t}(w)]$$

که در آن برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ ، $x \wedge y = \min\{x, y\}$.

اگر f تابعی ساده^۲ روی $\Omega \times [0, \infty)$ باشد. یعنی

$$f = \sum_{j=0}^n \phi_j,$$

که ϕ_i ها توابع ابتدایی هستند. در این صورت رابطه زیر تعریف می‌شود

$$\int_a^t f dB_s = \sum_{j=0}^n \int_a^t \phi_j dB_s. \quad (3.2)$$

رده‌ی $\mathcal{P}_2$ از توابع را به صورت زیر تعریف می‌شود.

تعریف ۱.۳.۲. رده‌ی $\mathcal{P}_2$ از توابع $f(t, w)$ روی مجموعه‌ی $\Omega \times [0, \infty)$ ، رده‌ای از توابع با ویژگی‌های زیر است

• تابع $f(t, w) : \mathcal{B} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر است،

• به ازای هر t ، تابع $f(t, \cdot) : \mathcal{F}_t \rightarrow \mathbb{R}$ اندازه‌پذیر باشد،

• برای هر $T \geq 0$ ، $E \left[\int_0^T f^2(s, w) ds \right] < \infty$.

لم ۱.۳.۲. (لم ایزومتري ایتو) اگر تابع $\phi(t, w)$ کران‌دار و ابتدایی باشد، آن‌گاه

$$E \left[\left(\int_s^T \phi(t, w) dB_t(w) \right)^2 \right] = E \left[\int_s^T \phi^2(t, w) dt \right].$$

¹Elementary function

²Simple function

□ برهان. به [۲۹] رجوع کنید.

لم ۲.۳.۲. اگر $f \in \mathcal{P}_2$ ، آن گاه دنباله‌ی $\{\phi_n\}$ از توابع ساده موجود هستند به طوری که

$$E \left[\int_0^T |\phi(s) - f_n(s)|^2 ds \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□ برهان. به [۲۹] رجوع کنید.

حال می‌توان $\int_s^T f(t, w) dB_t$ را برای هر $f \in \mathcal{P}_2$ تعریف کرد زیرا برای $f \in \mathcal{P}_2$ ، با توجه به لم قبل دنباله‌ای از توابع ابتدایی مانند $\{\phi_n\}$ موجود است که به f میل می‌کند. پس می‌توان تعریف کرد

$$\int_0^T f dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \phi_n dB_t.$$

که انتگرال اخیر را **انتگرال ایتو**^۱ نامند.

۲.۳.۲ فرمول ایتو

تعریف ۲.۳.۲. اگر $\{B_t\}_{t \geq 0}$ یک حرکت براونی استاندارد روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. یک انتگرال تصادفی یک بعدی، یک فرآیند تصادفی X_t روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است و به صورت

$$X_t(w) = X_0(w) + \int_0^t u(s, w) ds + \int_0^t v(s, w) dB_s,$$

که در آن $u, v : [0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ یا با مشتق‌گیری

$$dX_t = u dt + v dB_t.$$

بیان می‌شود.

قضیه ۱.۳.۲. (فرمول ۱- بعدی ایتو) اگر

$$dX_t = u dt + v dB_t, \quad Y_t = g(t, X_t)$$

آن گاه

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2,$$

که در این جا $dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0$ و $(dB)^2 = dt$.

مثال ۱.۳.۲. فرض شود $Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2} B_t^2$ ، در این صورت $g(t, x) = \frac{1}{2} x^2$. لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 1,$$

پس با استفاده از فرمول ایتو رابطه زیر به دست می‌آید

$$dY_t = B_t dB_t + \frac{1}{2} dt.$$

¹Ito integral

قضیه ۲.۳.۲. (فرم کلی ایتو) اگر $dX_t = u dt + v dB_t$ یک انتگرال n -بعدی و $g : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت C^2 باشد. آن‌گاه $Y(t, w) = g(t, X_t)$ یک انتگرال تصادفی است و می‌توان نوشت

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}(t, X_t)dX_i + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(t, X_t)dX_i dX_j,$$

که در اینجا $dt \cdot dt = dt \cdot dB_i = dB_i \cdot dt = 0$ و $dB_i dB_j = \delta_{ij} dt$.

مثال ۲.۳.۲. اگر $X_t = B_1(t) + B_2(t)$ ، آن‌گاه $g(t, x) = x_1^2 + x_2^2$. لذا

$$\frac{\partial g}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = 2x_i, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} = 2\delta_{ij},$$

بنابراین

$$dX_t = \sum_{i=1}^2 B_i dB_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} 2\delta_{ij} dB_i dB_j = 2(B_1 dB_1 + B_2 dB_2 + dt).$$

۳.۳.۲ فرایند ریشه مربعی

به فرایند تصادفی یک بعدی $X(t)$ که حرکت آن به صورت زیر است، فرایند ریشه مربعی^۱ می‌گوییم

$$dX(t) = \kappa(\theta - X(t))dt + \sigma\sqrt{X(t)}dB(t) \quad (۴.۲)$$

که در آن $\sigma > 0$ و $\theta, \kappa < 0$ مقادیر ثابت هستند. مقدار واریانس شرطی در این فرایند $\sigma^2 X(t)$ است. فرایند ریشه مربعی فقط مقادیر نامنفی را می‌پذیرد. همچنین می‌توان نشان داد اگر $\sigma^2 \kappa \theta > 0$ و $x(0) > 0$ ، $X(t)$ مثبت خواهد بود و فرایند ۴.۲ خوش تعریف است. [۳۴]

برای یافتن جواب این فرایند، از لم ایتو با تابع $f(x, t) = \exp(\kappa t)x$ و تعریف فرایند $Y(t) = f(X(t), t) = \exp(\kappa t)X(t)$ استفاده می‌شود. پس

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \kappa \exp(\kappa t)x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \exp(\kappa t), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

با استفاده از لم ایتو و قرار دادن $\mu(t) = \kappa(\theta - X(t))$ و $\sigma(t) = \sigma\sqrt{X(t)}$ رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$dY(t) = (\kappa \exp(\kappa t)X(t) + \exp(\kappa t)\kappa(\theta - X(t)) + 0)dt + \sigma \exp(\kappa t)\sqrt{X(t)}dB(t) = \kappa\theta \exp(\kappa t)dt + \sigma \exp(\kappa t)\sqrt{X(t)}dB(t). \quad (۵.۲)$$

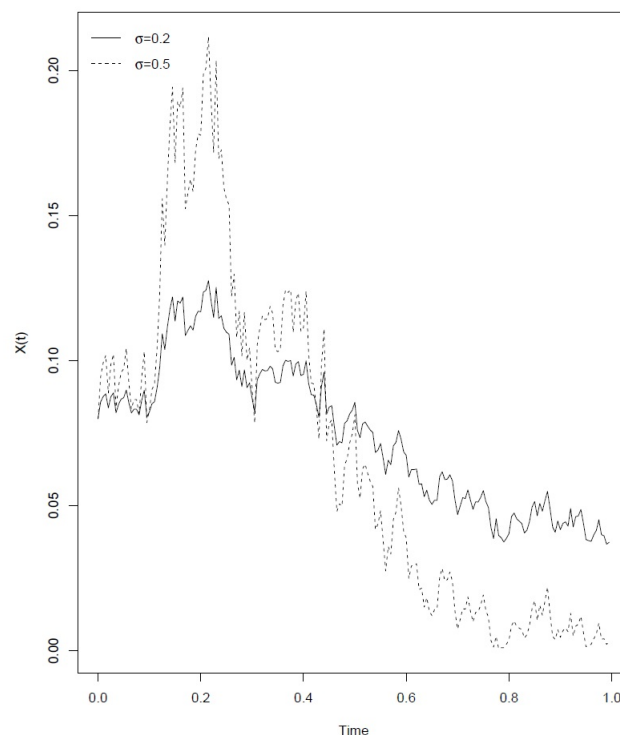
^۱Square Root

پس می‌توان نوشت

$$Y(t) = y(\circ) + \int_{\circ}^t \kappa \theta \exp(\kappa u) du + \int_{\circ}^t \sigma \exp(\kappa u) \sqrt{X(u)} dB(u) \quad (۶.۲)$$

با محاسبه‌ی انتگرال عادی و جایگزین کردن تعریف $Y(T)$ داریم

$$X(t) = \exp(-\kappa t)x(\circ) + \theta(1 - \exp(-\kappa t)) + \int_{\circ}^t \sigma \exp(-\kappa(t-u)) \sqrt{X(u)} dB(u) \quad (۷.۲)$$



شکل ۲.۲: شبیه‌سازی فرایند ریشه مربعی با $\kappa = ۲$ و $\theta = ۰/۰۸$

می‌توان نشان داد که $X(t)$ با فرض $X(\circ) = x(\circ)$ یک فرایند غیرمرکزی $\chi^۲$ است. به عنوان ویژگی‌های یک فرایند تصادفی می‌توان میانگین شرطی و واریانس $X(t)$ را به صورت زیر محاسبه کرد.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X(t)|X(\circ) = x(\circ)] &= \exp(-\kappa t)x(\circ) + \theta(1 - \exp(-\kappa t)) \\ \text{Var}[X(t)|X(\circ) = x(\circ)] &= \frac{\sigma^۲}{\kappa}(\exp(-\kappa t) - \exp(-۲\kappa t)x(\circ)) \\ &\quad + \frac{\sigma^۲}{۲\kappa}(1 - \exp(-۲\kappa t))\theta. \end{aligned}$$

برای $t \rightarrow \infty$ میانگین غیرشرطی و واریانس به صورت زیر هستند

$$\mathbb{E}[X(t)] = 0$$

$$\text{Var}[X(t)] = \frac{\sigma^2 \theta}{2\kappa}$$

همچنین مسیرهای نمونه‌ی $X(t)$ به صورت زیر قابل شبیه‌سازی هستند.

$$X(t_i) = X(t_{i-1}) + \kappa(\theta - X(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1}) + \sigma \sqrt{X(t_{i-1})} Z(t_i) \sqrt{(t_i - t_{i-1})(t_i - t_{i-1})}$$

که $Z(t_i) \sim N(0, 1)$ و هم‌توزیع هستند و

۴.۲ قضیه گیرسانوف

قضیه ۱.۴.۲. (قضیه گیرسانوف^۱) اگر فرض کنیم برای هر $0 \leq t \leq T$ ، روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ یک حرکت براونی و $\{\mathcal{F}_t\}$ یک فیلتر برای حرکت براونی باشد. همچنین فرض کنیم $\theta(t)$ یک فرآیند سازگار باشد. تعریف می‌شود

$$W_t = \int_0^t \theta(u) du + B(t),$$

$$Z(t) = \exp\left\{-\int_0^t \theta(u) dB(u) - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(u) du\right\},$$

و یک اندازه احتمال جدید به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Q(A) = \int_A Z(T) dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

در این صورت W_t تحت اندازه احتمال Q یک حرکت براونی می‌باشد.

ملاحظه ۱.۴.۲. قضیه فوق با شرط زیر برقرار است

$$E \exp\left\{\frac{1}{2} \int_0^T \theta^2(u) du\right\} < \infty.$$

ملاحظه ۲.۴.۲. در قضیه فوق

– $Z(t)$ مارتینگل است.

– Q اندازه احتمال است.

– اگر X یک متغیر تصادفی باشد آن‌گاه

$$E^Q[X] = E[Z(T)X]$$

که در آن E^Q امید ریاضی نسبت به اندازه احتمال Q و E امید ریاضی نسبت به اندازه احتمال P است.

□

برهان. به [۳۱] رجوع کنید.

¹Girsanov theorem

۵.۲ مفاهیم ریاضی مالی

ریاضیات مالی شاخه‌ای از ریاضیات کاربردی و مرتبط با بازارهای مالی است. ریاضیات مالی شیرین و جذاب است چون تکنیک‌ها و شاخه‌های محض ریاضیات را با کاربردهای تجربی که روی زندگی روزانه مردم تاثیر دارد ترکیب می‌کند. به عبارت دیگر با بکار بردن ریاضیات پیشرفته نظریه‌های اساسی و بنیادی اقتصاد و مالی را ترقی می‌دهد و برای جریان‌های پول و سرمایه در بازار مالی، مدل‌های ریاضی طراحی و مطالعه می‌کند. در بازارهای مالی کارهای بسیاری صورت می‌پذیرد از جمله قیمت گذاری دارایی‌ها، تسهیم دارایی‌ها، بیمه، وام و اعتبارات، سرمایه گذاری، عرضه اوراق بهادار و اوراق قرضه، اختیارات معامله و غیره. هم چنین علاوه بر خرید و فروش دارایی‌های پایه قراردادهایی تحت عنوان مشتقات مالی نیز مورد توجه قرار می‌گیرند.

۱.۵.۲ سبد سهام

تعریف ۱.۵.۲. سبد سهام یا پرتفوی^۱ به ترکیب مناسبی از دارایی گفته می‌شود که توسط یک سرمایه گذار برای سرمایه گذاری تشکیل می‌شود. تشکیل سبد سهام به طور کلی به کاهش ریسک و افزایش بازدهی سرمایه گذاری شما کمک می‌کند بنابراین تنوع بخشی در سرمایه گذاری کار هوشمندانه‌ای محسوب می‌شود چون سود یک سهم می‌تواند ضرر سهام دیگر را جبران کند.

تعریف ۲.۵.۲. اگر پرتفوی $h = (x, y)$ در نظر گرفته شود. ارزش پرتفوی h را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$V_t^h = xB_t + yS_t, \quad t = 0, 1,$$

که S_t فرآیند قیمت هر سهم (فرآیند تصادفی) در زمان t ، B_t فرآیند قیمت یک ورق قرضه (فرآیند قطعی^۲) در زمان t است.

تعریف ۳.۵.۲. به یک پرتفوی، پرتفوی خودتأمین^۳ گفته می‌شود، اگر برای هر $t = 0, 1, \dots, T-1$ داشته باشیم

$$x_t(1+R) + y_t S_t = x_{t+1}(1+R) + y_{t+1} S_t.$$

به بیان دیگر، با استفاده از ارزش پرتفوی قدیم $(x_t(1+R) + y_t S_t)$ که در زمان $t-1$ تشکیل شده است، می‌توان پرتفوی جدید به ارزش $(x_{t+1}(1+R) + y_{t+1} S_t)$ در لحظه t تشکیل داد.

¹Portfolio

²Deterministic

³Self financing

در واقع به پرتفوی خود تامین پولی تزریق نمی‌شود و همچنین پولی از آن برداشت نمی‌شود و تنها تغییر در ارزش پرتفوی است.

تعریف ۴.۵.۲. متغیر تصادفی X را یک ادعای مشروط^۱ با زمان سررسید T می‌نامیم هر گاه $X \in \mathcal{F}_T$. دارنده این ادعا در $t = T$ مقدار تصادفی X را دریافت می‌کند. فرض کنید S_t فرآیند قیمت دارایی پایه باشد، ادعای مشروط X را یک ادعای مشروط ساده^۲ گویند هر گاه به صورت $X = \phi(S_T)$ باشد که ϕ تابع قرارداد^۳ نامیده می‌شود.

۲.۵.۲ قراردادهای اختیار معامله

اختیار معامله یک ابزار مشتقه در مالیه است که فعالان بازار اقتصادی و سرمایه‌گذاری برای پوشش ریسک‌های مختلف ناشی از شرایط حاکم بر بازارها و عدم اطمینان از وضعیت آتی بازار از این راهکار استفاده می‌کنند.

اختیار معامله یک قرارداد قانونی است که توسط یک فروشنده به یک خریدار در ازای مبلغ معینی فروخته می‌شود. خریدار این قرارداد آنگاه این اختیار را به دست می‌آورد که یک دارایی (اعم از سهام یا کالا) را تا مدت مشخصی به مبلغ تعیین شده‌ای بخرد یا بفروشد. قرارداد اختیار معامله از قرن‌ها پیش شناخته شده است.

اولین باری که در تاریخ از ایشن نام برده شده در یونان باستان می‌باشد در آن زمان حق اختیار برداشت از باغات زیتون مورد معامله قرار می‌گرفت. اولین معاملات اختیار خرید و فروش، در اروپا و آمریکا در اوایل قرن ۱۸ صورت گرفت. بورس اختیار معامله شیکاگو در سال ۱۹۷۳ تأسیس شد و با راه‌اندازی نظامی که از فرم استاندارد استفاده می‌کرد فعالیت‌های تجاری و علاقه‌مندی آکادمیک به این موضوع از این تاریخ شروع شد.

مبادله اختیار معامله بر روی سهام در سال ۱۹۷۵ در بورس آمریکا و بورس سهام فیلادلفیا راه‌اندازی شد و به سرعت در اوایل دهه ۱۹۸۰ حجم معاملات اوراق اختیار معامله با رشد نجومی از حجم معاملات روزانه خود سهام در بورس سهام نیویورک پیشی گرفت. در این دهه در آمریکا بازارهایی برای مبادله اختیار معامله روی ارز، شاخص سهام و قراردادهای آتی ایجاد شد. بورس سهام فیلادلفیا یکی از اولین بورس‌هایی بود که مبادله اختیار معامله روی ارز را آغاز کرد. امروزه بسیاری از اختیار معامله‌های بسیاری روی شاخص‌های مختلف در فرم‌های استاندارد ایجاد شده است و در بورس‌های اختیار نظام یافته معامله انجام می‌شود.

اختیار معامله استاندارد

یک اختیار معامله استاندارد، قراردادی است که به خریدار آن این اختیار و نه اجبار را می‌دهد تا یک دارایی پایه را در زمان مشخص در آینده با قیمت توافق شده بخرد یا بفروشد.

¹Contingent claim

²Simple contingent claim

³Contract function

اساس اختیارها حق بدون الزام است. در واقع سود بدون ضرر را برای دارنده اختیار به همراه دارد. در چنین قراردادهای بدون تعهد، دارنده اختیار باید مقداری پول را پیشاپیش پرداخت کند که به آن قیمت اختیار گفته می‌شود. اوراق اختیار معامله از نظر نوع قرارداد بر دو نوع کلی تعریف شده‌اند؛ اختیار خرید^۱ و اختیار فروش^۲. یک اختیار خرید در واقع این حق (و نه الزام) را به دارنده آن می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخص یا قبل از آن، بخرد.

به همین ترتیب، یک اختیار فروش به دارنده آن این حق را می‌دهد، که دارایی موضوع قرارداد را با قیمت معین و در تاریخ مشخصی و یا قبل از آن بفروشد. قیمتی را که در قرارداد ذکر می‌شود، قیمت توافقی یا قیمت اعمال^۳ و تاریخ ذکر شده در قرارداد را، اصطلاحاً تاریخ انقضا یا سررسید اختیار معامله^۴ می‌گویند. این اوراق از نظر نحوه اعمال نیز بر دو نوع کلی آمریکایی و اروپایی هستند؛ اختیار معامله اروپایی^۵ فقط در تاریخ سررسید قابلیت اجرا دارد. در حالی که اختیار معامله آمریکایی^۶، در هر زمانی قبل از تاریخ سررسید یا در تاریخ سررسید قابل اجراست.

در قراردادهای اختیار معامله، دو طرف معامله‌گر وجود دارد. یک طرف معامله کننده، سرمایه‌گذاری است که موقعیت خرید دارد و اختیار معامله را خریده است. در مقابل او سرمایه‌گذاری که موقعیت فروش اتخاذ کرده است؛ یعنی اختیار معامله را فروخته است. همانطور که گفته شد این اختیار برای خریدار یا دارنده اختیار معامله، هیچ گونه تعهدی به دنبال ندارد، این در حالی است که فروش اختیار معامله برای فروشنده تعهداتی به همراه دارد. یعنی فروشنده، مبلغ قیمت اختیار را دریافت می‌کند و در مقابل متعهد می‌شود که در صورت اعمال اختیار معامله توسط خریدار، به مفاد قرارداد عمل کند. سود یا زیان صادر کننده اختیار، درست عکس خریدار می‌باشد.

به طور کلی چهار موقعیت برای یک اختیار معامله وجود دارد:

۱. موقعیت خرید در قرارداد اختیار خرید
۲. موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش
۳. موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید
۴. موقعیت فروش در قرارداد اختیار فروش

برای نشان دادن ارزش نهایی یا بازده سرمایه گذار در اختیار معامله‌های اروپایی، با توجه به تصادفی بودن قیمت دارایی پایه در تاریخ سررسید، مشخص است که هزینه اولیه سرمایه گذاری دخیل نمی‌باشد. اگر K را قیمت اعمال و S_T را قیمت دارایی پایه در زمان سررسید در نظر

¹Call option

²Put option

³Strike price or Exercise price

⁴Expiration date or Exercise date

⁵European option

⁶American option

بگیریم، بازده حاصل از موقعیت خرید در یک اختیار خرید اروپایی به صورت زیر است :

$$\max\{S_T - K, 0\}.$$

رابطه بالا، نشانگر این واقعیت است که اگر $K < S_T$ باشد، اختیار معامله اعمال می‌شود و در غیر این صورت یعنی اگر $S_T \leq K$ باشد، اختیار معامله اعمال نخواهد شد. سرمایه‌گذاری که موقعیت فروش در قرارداد اختیار خرید اروپایی را انتخاب کرده است بازدهی به صورت زیر خواهد داشت:

$$-\max\{S_T - K, 0\} = \min\{K - S_T, 0\}.$$

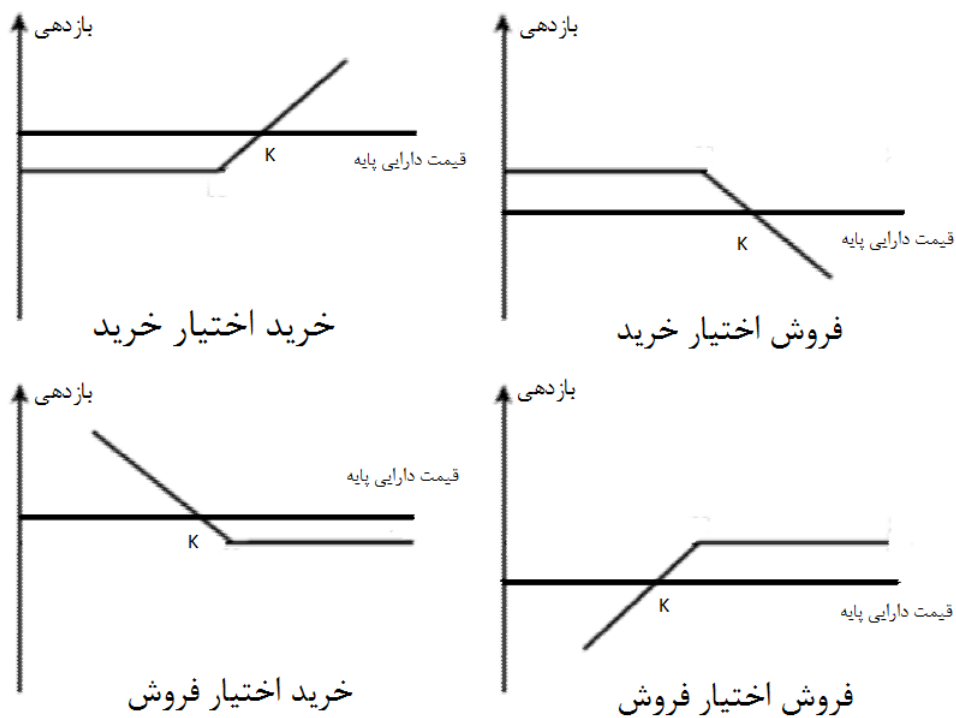
و به همین ترتیب بازده حاصل از موقعیت خرید در قرارداد اختیار فروش اروپایی به صورت زیر است.

$$\max\{K - S_T, 0\}.$$

و در نهایت دارنده موقعیت فروش اختیار فروش اروپایی بازدهی به صورت زیر خواهد داشت؛

$$-\max\{K - S_T, 0\} = \min\{S_T - K, 0\}.$$

نمودارهای شکل ۳.۲ این حالات را نشان می‌دهند.



شکل ۳.۲: بازدهی حاصل از خرید یا فروش اختیار معامله اروپایی

تعریف ۵.۵.۲. (رابطه برابری اختیار فروش و اختیار خرید)^۱

$$C + Ke^{-rT} = P + S_0$$

رابطه بالا را ”رابطه برابری اختیار فروش و اختیار خرید” برای اختیار معامله استاندارد می‌گوییم. رابطه فوق بیانگر آن است که می‌توان قیمت یک اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی و سررسید معین را از قیمت یک اختیار فروش اروپایی با همان قیمت توافقی و همان سررسید به‌دست آورد و برعکس.

اختیار معامله غیر استاندارد

قراردادهای اختیار معامله غیر استاندارد یا نامتعارف، به اختیاراتی گفته می‌شود که با استفاده از برخی قواعد، بازده‌هایی را نتیجه می‌دهند که محاسبه این بازده‌ها مثل حق اختیار معامله استاندارد ساده و آسان نیست. بعضی اختیارات غیر معمول مجموعه‌ای از اختیار خرید و اختیار فروش اروپایی و آمریکایی هستند، بقیه مقداری پیچیده‌تر هستند. از جمله اختیارات غیر استاندارد می‌توان اختیار آسیایی^۲، اختیار متکی به گذشته^۳ و ... نام برد.

۳.۵.۲ انواع معامله گران

سه گروه عمده معامله‌گران را می‌توان پوشش‌دهندگان ریسک، سفته‌بازان و آربیتراژگران در نظر گرفت. گروه اول پوشش‌دهندگان ریسک کسانی هستند که می‌کوشند با استفاده از قراردادهای آتی، پیمان‌های آتی و اختیار معاملات ریسک حاصل از نوسانات نامطلوب قیمت در بازار را به حداقل برسانند.

گروه دوم سفته‌بازان که با انجام معاملات اقتصادی ریسک دار برای حصول سود بیشتر از نوسانات کوتاه یا میان مدت تلاش می‌کنند، آنها توجه کمتری به ارزش اصلی سهام دارند و در عوض صرفاً بر تغییرات قیمت یا تحلیل تکنیکی تمرکز می‌کنند. نقش سفته‌بازها جذب ریسک مازاد (که دیگران نمی‌خواهند) و ایجاد نقدینگی در بازار با خرید یا فروش (در زمانی که گروه‌های دیگر در دسترس نیستند) است و در نهایت گروه سوم آربیتراژگران با اتخاذ موقعیت‌های متناسب در دو یا چند بازار مختلف، به دنبال کسب سود بدون ریسک هستند [۲۱]. در این قسمت فعالیت‌ها و اقدامات هر یک از این گروه‌ها را بررسی شده‌است.

^۱ Put-Call parity

^۲ Asian option

^۳ Lookback option

پوشش ریسک با استفاده از اختیار معاملات

هدف اصلی پوشش دهندگان ریسک و مهم‌ترین مزیت اوراق اختیار معامله این است که پوشش دهندگان ریسک با ورود به قراردادهای آتی، ریسک (ناخواسته) ناشی از تغییرات نامطلوب نوسانات و تغییرات قیمت در بازار را پوشش دهند و به بیان دیگر، از قراردادهای فوق برای کاهش یا حذف این ریسک استفاده می‌کنند.

به عنوان مثال سرمایه‌گذاری، هزار سهم شرکتی را در اختیار دارد. قیمت فعلی هر سهم ۳۰۰ ریال است و انتظار می‌رود که قیمت سهام افت شدیدی در دو ماه آینده داشته باشد. این سرمایه‌گذار می‌تواند، اختیار فروش با سررسید دوماهه را با قیمت توافقی ۲۵۰ ریال برای هر سهم بخرد. فرض کنید قیمت هر حق اختیار فروش ۲۰ ریال باشد. در این صورت هزینه کل انتخاب این استراتژی، معادل $20000 = 1000 \times 20$ ریال خواهد بود. با این‌که انتخاب این استراتژی ۲۰۰۰۰ ریال هزینه در بردارد، ولی در عوض تضمین می‌کند، که حداقل قیمت فروش سهام برای هر سهم تا زمان سررسید اختیار، ۲۵۰ ریال باشد. اگر قیمت بازار سهام کاهش یابد، شخص می‌تواند اختیار فروش را اعمال کند و ۲۵۰۰۰۰ ریال بابت فروش سهام دریافت کند، که با کسر هزینه ۲۰۰۰۰ ریال برای خرید اختیار معامله درآمد خالص وی، مبلغ ۲۳۰۰۰۰ ریال می‌شود. اگر قیمت بازار بیش از ۲۵۰ ریال شود، اختیار فروش اعمال نمی‌شود و منقضی می‌گردد. اما در این حالت، ارزش کل دارایی بیش از ۲۵۰۰۰۰ ریال می‌شود (یا با در نظر گرفتن هزینه اوراق اختیار فروش ۲۳۰۰۰۰ ریال می‌شود).

سفته‌بازان

وارد شدن به تعاملات مالی پرریسک به منظور سود بردن از نوسانات ارزش یک کالا یا خدمت سفته‌بازی نامیده می‌شود. معمولاً سفته‌بازان سرمایه‌گذارانی ریسک‌پذیر و پیچیده هستند. آنها سرمایه‌گذاری‌های اهرمی مانند قراردادهای آتی و اختیار معامله را انجام می‌دهند. مثلاً یک سفته‌باز پیش‌بینی می‌کند، که ارزش سهام شرکتی در دو ماه آینده افزایش خواهد یافت. قیمت سهام مورد نظر در حال حاضر، ۱۰۰۰ ریال است و یک اختیار خرید دو ماهه با قیمت اعمال ۲۰۰ ریال، به قیمت ۱۰ ریال فروخته می‌شود. دو راهکار را برای یک سفته‌باز با سرمایه ۱۰۰۰۰۰ ریال وجود دارد. راه اول این‌که ۱۰۰ سهم بخرد. راه دوم شامل خرید ۱۰۰۰ اختیار خرید است.

فرض کنید پیش‌بینی سفته‌باز درست باشد و قیمت سهم موردنظر در دو ماه آینده به ۵۰۰ ریال برسد. گزینه اول که خرید سهام بود، سود زیر را ایجاد می‌کند:

$$100 \times (500 - 100) = 40000$$

اما گزینه دوم بسیار سودآورتر است. چرا که ورقه اختیار خرید، او را قادر می‌سازد، که سهام ۵۰۰۰ ریالی را با قیمت ۲۰۰ ریال بخرد. کل سودی که در روش دوم نصیب سفته‌باز می‌شود،

عبارت است از:

$$300 \times 1000 = 300000$$

که با کم کردن هزینه (قیمت) اختیار خرید، سود خالص عبارت است از:

$$300000 - 10000 = 290000$$

بنابراین سود حاصل از انتخاب استراتژی اختیار خرید، بیش از ۷ برابر سود حاصل از انتخاب استراتژی خرید سهام است. در ضمن، توجه کنید که اوراق اختیار خرید، میزان زیان بالقوه را نیز افزایش می‌دهد.

فرض کنید قیمت سهام در دو ماه آینده به ۸۰۰ ریال کاهش یابد. در این صورت روش اول (یعنی خرید سهام) زبانی معادل $2000 = 100 \times (100 - 80)$ ریال، بر سفته‌باز وارد می‌کند. ولی در روش دوم زبانی معادل ۱۰۰۰۰ ریال - مبلغی که در ابتدا بابت اوراق اختیار خرید پرداخته می‌شود - بر سفته‌باز تحمیل می‌شود چون باتوجه به کاهش قیمت، اوراق اختیار اعمال نشده و منقضی می‌شوند و در نتیجه مبلغی که بابت خرید این اوراق پرداخت شده بود همان زیان سفته‌باز خواهد بود. لذا مشاهده می‌شود که چگونه اوراق اختیار معامله، نوعی اهرم ایجاد می‌کنند؛ یعنی میزان پیامدهای مالی حاصل از سرمایه‌گذاری را افزایش می‌دهد؛ به عبارت دیگر، اگر پیش‌بینی‌ها درست باشند، سودهای بیشتر و در غیر این صورت، زیان‌های بیشتری را نصیب سرمایه‌گذار می‌کند.

آربیتراژگران (سوداگران سهام)

خرید و فروش هم‌زمان یک دارایی در دو یا چند بازار برای کسب سود از تفاوت قیمت‌ها آربیتراژ گفته می‌شود. به عبارتی سود آربیتراژی زمانی ایجاد می‌شود که یک کالای مشابه در دو بازار مختلف یا در مواردی خاص در دو قالب متفاوت عرضه می‌شود اما قیمت‌های یکسانی ندارد. وجود آربیتراژ نتیجه ناکارآمد بودن بازار است.

شرکت‌های بین‌المللی که سهامشان در بورس کشور‌های مختلف عرضه می‌شود می‌توانند سود آربیتراژی داشته باشند. به عنوان مثال فرض کنید سهامی هم‌زمان در بورس سهام نیویورک و در بورس سهام لندن معامله می‌شود با این شرایط که قیمت این سهام در بورس نیویورک ۱۷۲ دلار و در بورس لندن ۱۰۰ پوند است. اگر نرخ مبادله پوند و دلار، برابر ۱/۷۵ دلار برای هر پوند باشد، آنگاه آربیتراژگر می‌تواند با خرید مثلاً ۱۰۰ سهام از بورس نیویورک و فروش آن سهام در بازار لندن به سود بدون ریسک زیر دست پیدا کند:

$$100 \times [(1/75 \times 100) - 172] = 300$$

یعنی سودی معادل ۳۰۰ دلار بدون در نظر گرفتن هزینه معاملات برای آربیتراژگر تضمین می‌شود.

باید در نظر داشت که هزینه‌های مربوط به معاملات در بازار سهام و بازار تبدیلات ارز، برای معاملات بزرگ رقم چندانی نیست و همچنین باید توجه کرد که فرصت‌های آربیتراژی که به یک نمونه از آن پرداختیم نمی‌تواند برای مدت طولانی استمرار داشته باشد. با خرید سهام در بازار نیویورک، نیروهای عرضه و تقاضا باعث افزایش قیمت سهام می‌شوند و همچنین فروش آن در بازار لندن، زمینه کاهش قیمت را فراهم می‌آورد و به زودی دو قیمت فوق با نرخ مبادله فعلی در دو بازار یکسان خواهند شد.

قضیه ۱.۵.۲. (قضیه اساسی اول قیمت‌گذاری) بازاری را در نظر بگیرید که با فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و فرآیند قیمت $\{S_t\}_{t \geq 0}$ تعریف شده باشد، این بازار بدون آربیتراژ است اگر و تنها اگر اندازه مارتینگلی Q وجود داشته باشد که S تحت Q مارتینگل باشد.

برهان. به [۳۳] رجوع کنید. □

قضیه بالا بین یک مساله اقتصادی (وجود بازار بدون آربیتراژ) و یک مفهوم ریاضی (وجود اندازه مارتینگلی) ارتباط ایجاد می‌کند.

قضیه ۲.۵.۲. (قضیه اساسی دوم قیمت‌گذاری) به بازار، بازار کامل گفته می‌شود اگر و تنها اگر اندازه مارتینگلی یکتا باشد.

برهان. به [۳۳] رجوع کنید. □

در واقع نکته قابل اهمیت قیمت‌گذاری هر قراردادی در استفاده از قضیه اساسی قیمت‌گذاری است که همان اصل عدم آربیتراژ یا وجود یک اندازه احتمال ریسک خنثی است.

۶.۲ مدل بلک شولز

در اوایل دهه‌ی ۱۹۷۰ آقایان «فیشر بلک»، «میرن شولز» و «رابرت مرتون» انقلاب بزرگی در قیمت‌گذاری اوراق اختیار معامله بوجود آوردند. نتیجه‌ی تلاش آن‌ها مدلی بود که تحت عنوان «مدل بلک - شولز^۱» معروف شد. این مدل تأثیر شگفتی در نحوه قیمت‌گذاری و پوشش خطر یا ریسک اختیار معامله داشته است. مدل بلک - شولز نقش اساسی و مهم در موفقیت مهندسی مالی در دهه‌های ۱۹۸۰ و ۱۹۹۰ داشته است.

بر کسی پوشیده نیست که ارزش‌گذاری اختیار معامله یکی از مهم‌ترین موضوعات در اقتصادهای مالی است. و بی‌شک مدل بلک - شولز سهم به‌سزایی در این زمینه دارد و زیربنا و پایه سایر مدل‌ها در قیمت‌گذاری اختیار معامله‌ها می‌باشد به همین دلیل در این بخش نخست مدل بلک - شولز را معرفی و سپس به ارزش‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت این مدل پرداخته

^۱Black - Sholes model

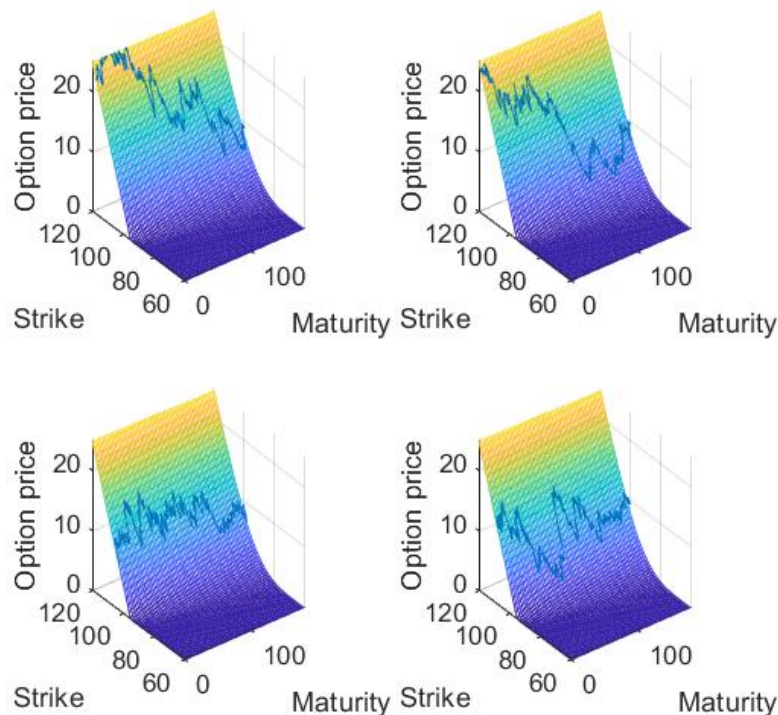
شده است.

مدل بلک شولز مدلی شامل دو دارایی است الف- دارایی بدون ریسک ب- دارایی ریسکی که به ترتیب دارای دینامیک‌های زیرهستند.

$$dB_t = rB_t dt, \quad B(0) = 1,$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

که در آن r ، σ و μ به ترتیب نرخ بهره، تلاطم قیمت دارایی و نرخ بازده مورد انتظار دارایی (مقادیر ثابت) می‌باشند و W_t یک فرآیند براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است.



شکل ۴.۲: شبیه‌سازی مدل بلک-شولز با چند مسیر متفاوت

۱.۶.۲ قیمت‌گذاری اختیار معامله اروپایی تحت مدل بلک شولز

در این مدل می‌توان تابع قیمت را برای بسیاری از اختیار معامله‌ها به طور تحلیلی محاسبه کرد. هرچند طبق شواهد در بازارهای مالی این مدل همخوانی زیادی با واقعیت‌های بازار ندارد و عملاً چندان موفق نبوده است.

در ادامه تابع قیمت اختیار اروپایی مشخص می‌شود.

$$C(t, K) = S_t N(g_1(S_t, \tau)) - K e^{-r\tau} N(g_2(S_t, \tau)), \quad (۸.۲)$$

که $\tau = T - t$ و

$$g_1(x, \tau) = \frac{\ln(x/K) + (r + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}},$$

$$g_2(x, \tau) = g_1(x, \tau) - \sigma\sqrt{\tau}.$$

ملاحظه ۱.۶.۲. تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی نرمال استاندارد $N(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du, \quad x \in \mathbb{R}.$$

۷.۲ تبدیل فوریه در قیمت‌گذاری

تبدیل فوریه^۱ نامیده شده به اسم ریاضیدان فرانسوی ژوزف فوریه^۲ یک تبدیل انتگرالی است که هر تابع $f(t)$ را به یک تابع دیگر $F(W)$ منعکس می‌کند در این صورت به $F(W)$ تبدیل فوریه $f(t)$ می‌گویند. تابع اصلی f را می‌توان از معکوس تبدیل فوریه برگرداند. گیل پلاز در سال ۱۹۵۱ حالتی دیگری از معکوس تبدیل فوریه^۳ را مطرح کرد [۱۶] چند سال بعد کار و مادان در سال ۱۹۹۹ با روش جدیدی قیمت‌گذاری اختیار معاملات اروپایی تخت مدل هستون را انجام دادند. این روش را تبدیل فوریه سریع نامیدند که با استفاده از معکوس تبدیل فوریه به دست آمده بود. [۱۱] روش کار و مادان سرعت ودقت بسیار خوبی داشت و چندی نگذشت که به یکی از راهکارهای محبوب و کارآمد برای قیمت‌گذاری مشتقات تبدیل شد. برای استفاده از روش تبدیل فوریه سریع نیازمند مشخص کردن تابع مشخصه^۴ مدل‌های قیمت‌گذاری هستیم که توابع اکثر مدل‌ها در دسترس می‌باشند.

۱.۷.۲ تبدیل فوریه

اگر فرض کنیم W یک متغیر تصادفی در فضای احتمال (Ω, F, P) باشد. تبدیل فوریه یک تابع پیوسته به صورت زیر تعریف خواهد شد.

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} f(t) dt < \infty \quad (۹.۲)$$

^۱Fourier Transformation

^۲Joseph Fourier

^۳Fourier Transformation

^۴Characteristic function

که $\omega \in \mathbb{R}$. تابع f اصلی را می توان از معکوس تبدیل فوریه برگرداند.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \hat{f}(\omega) d\omega < \infty \quad (10.2)$$

شرایط کافی (ولی نه لازم) برای وجود تبدیل فوریه و معکوس آن این است که اگر $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ در فضای انتگرال پذیر L^1 باشد آنگاه

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

تابع مشخصه $\phi(\omega)$ با $\omega \in \mathbb{R}$ با استفاده از تبدیل فوریه ی تابع چگالی احتمال $\mathbb{P}(x)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\phi(\omega) \equiv F[\mathbb{P}(x)] \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} \mathbb{P}(x) dx = E[e^{i\omega x}]. \quad (11.2)$$

۲.۷.۲ تبدیل فوریه سریع برای اختیار معامله

برای اختیار خرید اروپایی با قیمت توافقی K و سررسید T تابع قیمت گذاری به صورت زیر می باشد

$$c(t, S_T) = e^{-r(T-t)} E^Q[(S_T - K)^+ | F_t], \quad (12.2)$$

که r نرخ بهره بدون ریسک و $(S_T - K)^+ = \max(S_T - K, 0)$ است. حال اگر فرض کنیم $k = \ln K$ و $X_t = \ln S_t$ و $t = 0$. پس می توان نوشت.

$$c(T, k) = e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{X_T} - e^k) q_T(X_T) dX_T, \quad (13.2)$$

$$(14.2)$$

که $q_T(X_T)$ تابع چگالی فرایند تصادفی X_T است. تابعی که کار و مادان اصلاح کردند به صورت زیر می باشد

$$C(T, k) = e^{\alpha k} c(T, k), \quad \alpha > 0. \quad (15.2)$$

تبدیل فوریه روی $C(T, k)$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\psi_T(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} C(T, k) dk. \quad (16.2)$$

با قرار دادن (۱۳.۲) در (۱۵.۲) و (۱۵.۲) در (۱۶.۲) معادله ی زیر برای اختیار اروپایی به دست می آید

$$\begin{aligned} \psi_T(u) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iuk} e^{\alpha k} e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{X_T} - e^k) q_T(X_T) dX_T dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rT} q_T(X_T) \int_{-\infty}^{X_T} (e^{X_T + \alpha k} - e^{(\alpha+1)k}) e^{iuk} dk dX_T \\ &= \frac{e^{-rT} f(u - (\alpha+1)i)}{(\alpha+iu)(\alpha+iu)}. \end{aligned} \quad (17.2)$$

در معادله فوق، $f(u)$ تابع مشخصه X_t تحت اندازه ریسک خنثی می‌باشد. با استفاده از معکوس تبدیل فوریه می‌توان نوشت.

$$C(T, k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iuk} \psi_T(u) du. \quad (18.2)$$

در نهایت تابع قیمت‌گذاری اصلاح شده و نهایی اختیار معامله خرید اروپایی با استفاده از تبدیل فوریه سریع به صورت زیر می‌باشد

$$c(T, k) = \frac{e^{-\alpha k \nu}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i \frac{\gamma \pi}{N} (j-1)(\nu-1)} e^{ibu_j} \psi_T(u_j) \frac{\Delta}{2} (3 + (-1)^j - \delta_{j-1}) \quad (19.2)$$

پارامتر Δ به N وابسته است و N از توان ۲ است. همچنین فرض کنید

$$u_j = \Delta(j-1), \quad b = \frac{N\Delta}{2}, \quad \nu = 1, 2, \dots, N, \quad \delta_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & o.w. \end{cases}$$

برای توضیحات بیشتر به [۱۱] رجوع شود.

فصل ۳

مدل‌های تلاطم تصادفی

۱.۳ مقدمه

برآورد ارزش اختیار در مدل‌های تلاطم تصادفی یکی از مهم‌ترین جسارتها در علوم مالی می‌باشد که در چند دهه اخیر پیرامون آن پژوهش‌های فراوانی انجام گرفته است. اما در بسیاری از این پژوهش‌ها پارامترهای مدل بدون واسنجی و یا بدون هیچ اشاره‌ای به نحوه انجام آن در محاسبه قیمت اختیار معامله‌ها بکار رفته‌اند. ما در این فصل ضمن معرفی و بررسی نارسایی‌های مدل هستون کلاسیک چرایی‌های تکوین مدل‌های هستون مضاعف و مدل‌های وابسته به زمان میخایلوو و نوگل و... را بررسی می‌کنیم.

۲.۳ مبانی نظری و مروری بر پیشینه موضوع

برای قیمت‌گذاری مشتقات مالی مانند اختیار معامله اروپایی معمولاً از راهبرد تشکیل سبدی خودتامین بهره می‌گیرند. منظور از سبد خودتامین سبد مالی است که در آن سرمایه‌گذاری‌ها تنها منحصر به خرید و فروش دارایی پایه و مشتقه مربوط به آن می‌باشد. به عبارتی نه چندان جامع و مانع یک سبد خودتامین سبدی است که تزریق خارجی و برداشت پول ندارد. در مدل‌های تک‌عاملی مانند بلک-شولز برای بدست آوردن فرمول قیمت‌گذاری از استراتژی دلتا پوشش بهره می‌گیرند. یعنی یک واحد اختیار به قیمت U را می‌فروشند و به جای آن

Δ واحد از سهام به قیمت s_t می‌خرند سپس با بکارگیری لم ایتو دینامیک ارزش سبدي را که تشکیل داده اند به دست می‌آورند در گام بعد برای حذف عامل های نوسان پذیر Δ را به گونه ای انتخاب می‌کنند تا ضریب جمله تصادفی یا ضریب dW_t در آن برابر صفر شود و در انتها این راهبرد با بحث تشکیل سبدي بدون آربیتراژ به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌انجامد.

در مدل های دو عاملی مانند هستون برای به دست آوردن فرمول قیمت گذاری اختیار اروپایی روندی مشابه را پیش می‌گیرند با این تفاوت که به دلیل وجود دو عامل تصادفی در دینامیک دارایی پایه این مدل ها با تشکیل سبدي شامل سهام و تنها یک اختیار با سررسید T نمی‌توان سبد را پوشش داد به همین منظور در ابتدا سبدي شامل سهام و دو اختیار اروپایی با سررسیدهای متفاوت T_1 و T_2 را تشکیل می‌دهند سپس در راستای پوشش سبد اختیار اروپایی با ارزش V و سررسید T_1 را می‌فروشند و به جای آن Δ_1 واحد سهام و Δ_2 واحد از اختیار U با سررسید T_2 را می‌خرند و در انتها با کمک تابع مشخصه فرآیند فرم نیمه بسته قیمت اختیار اروپایی را از روی معادله دیفرانسیل ایجاد شده استخراج می‌کنند. استفاده از استراتژی پوشش دلتا تنها راه استخراج فرمول قیمت گذاری اختیار اروپایی نیست. از راهبردهایی همچون سبد بازسازی‌شونده، الگوی قیمت گذاری دارایی سرمایه‌ای، و حد مدل درخت دوجمله‌ای نیز می‌توان برای این منظور استفاده کرد. اما بکارگیری این راهبردها در مدل های چند عاملی با پیچیدگی‌های فراوانی همراه است که کاربرد آنها را محدود می‌کند. در مدل های چند عاملی معمولاً با استفاده از قضیه فایمن-کاک معادله دیفرانسیل تصادفی قیمت دارایی پایه این مدل ها را به یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی تبدیل می‌کنند و با کمک قضیه تبدیل فوریه فرم نیمه بسته قیمت اختیار اروپایی را بدست می‌آورند.

در تمامی مدل های تک عاملی یا چند عاملی مهم ترین گام بعد از استخراج فرمول قیمت گذاری، تخمین پارامترهای مدل است. بدون تخمین پارامترها هر گونه بحثی در باب کارایی مدل بی‌معناست. برای تخمین پارامترهای مدل های مالی می‌توان از روش های همچون الگوریتم بهینه سازی نلدر-مید، روش حداکثر درستنمایی، روش تابع زیان، روش تخمین استوار و راهبرد تکامل تفضیلی استفاده کرد که ما در این پژوهش از روش حداکثر درستنمایی برای تخمین پارامترها استفاده میکنیم.

برای تبیین بیشتر موضوع ابتدا خاطر نشان می‌کنیم که قیمت دارایی پایه در مدل بلک-شولز دارای دینامیک زیر می‌باشد. سپس به مدل هستون و تابع مشخصه ی آن و در انتها کاستی های این مدل می‌پردازیم.

مدل بلک شولز مدلی شامل دو دارایی است الف- دارایی بدون ریسک ب- دارایی ریسکی

که به ترتیب دارای دینامیک‌های زیرهستند.

$$dB_t = rB_t dt, \quad B(0) = 1,$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

که در آن r ، σ و μ به ترتیب نرخ بهره، تلاطم قیمت دارایی و نرخ بازده مورد انتظار دارایی (مقادیر ثابت) می‌باشند و W_t یک فرآیند براونی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ است. بی شک مدل بلک - شولز انقلابی در شیوه ی قیمت گذاری اختیار معامله به وجود آوردولی در مدل بلک شولز نرخ تلاطم ثابت انگاشته شده و این در حالی است که الگوهای تلاطم مشاهده شده در قیمت های اختیار مبادله شده در بازار گواه از تصادفی بودن تلاطم دارند از طرف دیگر فرض اساسی در مدل بلک - شولز این است که توزیع احتمال قیمت آتی دارایی‌های پایه (سهام)، لگ نرمال است. اما در بازارهای مالی واقعی فرایند قیمت دارایی در مقایسه با توزیع لگ نرمال، دارای دُم سنگین‌تری است.

در اکتبر ۱۹۷۸ با سقوط بازارهای سهام و رکود اقتصادی مدل بلک - شولز که تا قبل از آن بهترین و کارآمدترین مدل برای قیمت گذاری حرکت سهام به شمار می آمد کارایی خود را از دست داد و تنها به عنوان پایه ای برای سایر مدل ها مورد استفاده قرار گرفت. بدین ترتیب، افراد زیادی برای نزدیک شدن مدل با بازار واقعی دست به اصلاح و ایجاد تغییرات در این معادله زدند که در این بین مدل هستون بیشتر مورد توجه قرار گرفت .

در ادامه به معرفی مدل تلاطم تلادفی هستون و تابع مشخصه ی آن جهت استفاده در تبدیل فوریه سریع، می پردازیم.

۳.۳ مدل هستون

مدل هستون یک نوع مدل نوسان تصادفی است که هستون در سال ۱۹۹۳ به منظور تجزیه تحلیل قراردادهای اختیار ارزی بدان پرداخت. هدف اصلی هستون غلبه بر برخی کاستی‌های موجود در مدل مشهور قیمت‌گذاری اختیار بلک - شولز بود. به طور مثال مدل بلک - شولز دارای این پیش فرض قوی است که حرکت قیمت سهام به صورت یک توزیع نرمال با میانگین و واریانس مشخص، توزیع شده اند. علاوه بر این، در مدل بلک - شولز نوسانات ثابت فرض شده‌اند. در مقابل مدل بلک - شولز، مدل هستون این اجازه را می‌دهد تا نوسانات بطور تصادفی تغییر کنند که این موضوع باعث می‌شود تا مدل هستون بطور بالقوه برای شرایط گسترده‌تری قابل استفاده باشد [۳۰].

از جمله دلایل محبوبیت این مدل می‌توان به امکان بدست آوردن فرمول‌های قیمت قرارداد اختیار برای قراردادهای اختیار اروپایی با استفاده از تبدیل فوریه در سال ۱۹۹۹ اشاره کرد.

همچنین در سال ۲۰۰۴ و ۲۰۰۷ از روش‌های تقسیم عملگر برای قیمت‌گذاری قراردادهای آمریکایی در مدل هستون استفاده شد. از سوی دیگر به منظور قیمت‌گذاری قراردادهای اختیار از روش‌های شبیه‌سازی مونت کارلو در مدل هستون استفاده شده است. کایا و برادی یک طرح شبیه‌سازی بدون پیش فرض را طراحی کردند که نشانگر این واقعیت است که توزیع (شرطی) فرایند نوسانات تصادفی، شناخته شده است. اگرچه لرد و همکارانش در سال ۲۰۰۹ طی مقاله‌ای زمانبر بودن روش آنها را نشان دادند و به ارائه روشی ساده‌تر پرداختند (ولکوپ و نیوونهوویس، ۲۰۰۹). از سوی دیگر شایان ذکر است که این مدل توانایی این که با یک مدل با نرخ بهره تصادفی ترکیب شود را دارد. لذا یک مدل هستون با نرخ بهره تصادفی نیز در سال ۲۰۱۱ مورد بررسی واقع شده است (گرزلک، ۲۰۱۱). همچنین یک روش کاهش واریانس نیز برای قراردادهای اختیار آسیایی در سال ۲۰۱۴ ارائه شده است (دینگک و اوسترلی، ۲۰۱۴). در سال ۲۰۰۹ کریستفرسن با اضافه کردن یک فرایند تصادفی دیگر به مدل هستون، این مدل را بهبود داد. مدل هستون با دو فرایند نوسان تصادفی تحت عنوان مدل هستون مضاعف، در مقایسه با مدل هستون استاندارد انعطاف بیشتری نسبت به قیمت‌های پرت دارد و در حدود ۲۴٪ بیشتر از هستون استاندارد آنها را پوشش داده و نیز نسبت به نوسان جزئی قیمت‌ها حساسیت بیشتری از خود نشان می‌دهد. با این وجود، قیمت دارایی‌های پایه در بازارهای مالی اغلب دستخوش تغییرات ناگهانی ناشی از عوامل گوناگون محیطی، اجتماعی، سیاسی و اقتصادی روز دنیا است که روند استاندارد قیمت‌گذاری‌ها، هرچند انعطاف پذیر، این تغییرات و نوسانات ناگهانی را پوشش نمی‌دهد. برای رفع این مشکل مدل‌های نوسان تصادفی پرشی، توسط محققان عرصه مالی پیشنهاد شده است.

مدلسازی بازارهای مالی، تنها چالش پیش روی محققان و مهندسان مالی نیست و قدم بعدی یافتن روشی کارا و مناسب برای حل مدل‌های پیشنهادی و پیش بینی قیمت دارایی‌ها در زمان آتی است (مهردوست و صابر، ۱۳۹۳).

برای حل مدل‌های مالی دارایی‌های پایه روش‌های گوناگونی وجود دارد. یکی از روش‌های مشهور در این زمینه، استفاده از تبدیل فوریه سریع است که در سال ۱۹۹۹ توسط کار و مادان معرفی شد.

در این روش از تابع مشخصه فرایند دارایی پایه استفاده می‌شود. آن‌ها روش تبدیل فوریه سریع را برای قیمت‌گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون به کار بردند. این روش به دلیل سرعت بالا و استفاده از تابع مشخصه فرایند قیمت دارایی پایه، که همواره موجود هستند، روشی مناسب برای قیمت‌گذاری اختیار معامله است (کار و مادان، ۱۹۹۹).

فرض کنید (Ω, F, P) فضای احتمال، F_{tt} فیلتر تولید شده توسط فرایندهای براونی و فرایند پرش در زمان $0 \leq t \leq T$ و Q اندازه‌ی احتمال ریسک خنثی باشد. در مدل هستون فرایند قیمت دارایی پایه S_t در لحظه‌ی t از مدل زیر تبعیت می‌کند

$$dS_t = \mu(S_t)dt + \sqrt{V(t)}(S_t)dZ_{t_1} \quad t \in [0, T], \quad (1.3)$$

که در آن Z_{t_1} فرآیند وینر است.
در مدل هستون برای نوسان نیز یک فرآیند وینر دیگر در نظر گرفته می‌شود. فرآیند نوسان به شکل زیر است

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V(t)}dZ_{t_2} \quad t \in [0, T], \quad (2.3)$$

با این فرض که :

$$Z_{t_1}Z_{t_2} = \rho dt,$$

که در آن S_t فرآیند قیمت، V_t فرآیند نوسان، Z_{t_1} و Z_{t_2} فرآیند براونی با ضریب همبستگی ρ هستند. θ میانگین بلند مدت، κ سرعت بازگشت به میانگین و σ واریانس فرآیند نوسان هستند.

۱.۳.۳ تابع مشخصه

با قرار دادن $x_T = \ln S_T$ تابع مشخصه‌ی مدل هستون به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} \phi_j(\varphi; x_t, v_t) &= \mathbb{E}[\phi_j(\varphi; x_T, v_T) | F_t] \\ &= \mathbb{E}[e^{i\varphi \ln S_T} | (x_t, v_t)] \\ &= \exp[C_j(\tau, \varphi) + D_j(\tau, \varphi)v_t + i\varphi x_t] \end{aligned}$$

که در آن

$$C_j = ri\varphi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right] \quad (3.3)$$

$$D_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j}{g_i\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{-d_j\tau}}{1 - e^{-d_j\tau}/g_i} \right) \quad (4.3)$$

و

$$\begin{aligned} g_j &= \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\varphi - d_j} \\ d_j &= \sqrt{(\rho\sigma i\varphi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\varphi - \varphi^2)} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$u_j = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{اگر } j = 1; \\ -\frac{1}{2}, & \text{اگر } j = 2; \end{cases}$$

$$b_j = \begin{cases} \kappa + \lambda - \rho\sigma, & \text{اگر } j = 1; \\ \kappa + \lambda, & \text{اگر } j = 2; \end{cases}$$

$$a = \kappa\theta.$$

۲.۳.۳ حقه کوچک هستون

سال ۲۰۰۷ البرچر، توانست ثابت کند که مدل هستون دارای دو تابع مشخصه متفاوت می باشد. تابع اول که همان تابع مشخصه اصلی مدل است. درحالی که حالت دوم کمی متفاوت تر خواهد بود. همچنین او نشان داد با اینکه این دو تابع هم‌ارز هستند اما تابع مشخصه دوم رفتار بهتری دارد و می تواند برای انتگرال‌های عددی مناسب‌تر باشد. [۷].

با ضرب صورت و مخرج D_j در $\exp(-d_j\tau)$ در معادله (۴.۳) می‌توان D_j را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$D_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j}{g_i\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{-d_j\tau}}{1 - e^{-d_j\tau}/g_i} \right) = \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi - d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{-d_j\tau}}{1 - c_j e^{d_j\tau}} \right) \quad (۶.۳)$$

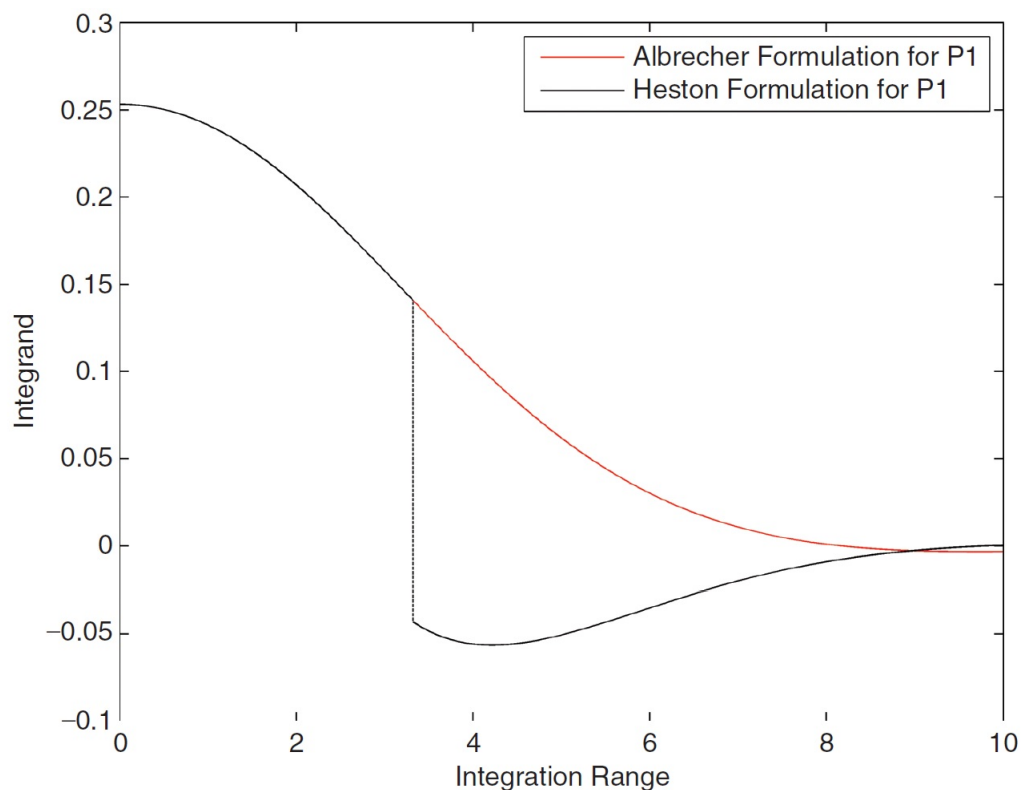
که

$$c_i = \frac{1}{g_i} = \frac{b_j - \rho\sigma i\varphi - d_j}{b_j - \rho\sigma i\varphi + d_j},$$

همچنین برای تابع C_j در معادله (۳.۳) می‌توان نوشت

$$C_j = ri\varphi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma i\varphi - d_j)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - c_j e^{-d_j\tau}}{1 - c_j} \right) \right]. \quad (۷.۳)$$

به سادگی با قرار دادن این دو تابع جدید در تابع مشخصه هستون، تابع مشخصه دیگری برای این مدل ایجاد می‌شود. البرچر نشان داد که با وجود یکسان بودن دو حالت، این تابع جدید مشکلات عددی کمتری در اجرا دارد.



شکل ۱.۳: مقایسه خطای دو تابع مشخصه‌ی مدل هستون

اگرچه مدل هستون از مؤثرترین مدل‌های پس از مدل بلک-شولز، بود اما نیز به دلیل در نظر نگرفتن اتفاقات نادر در بازار یعنی اتفاقاتی از قبیل بحران‌های مالی یا رسیدن اطلاعات جدید تأثیرگذار به بازار، نیاز به بازنگری جدی داشت. از آن پس مطالعات گسترده‌ای انجام و مدل‌های زیاد دیگری ارائه شد که از آن بین، مدل بیتس (۱۹۹۶) به مدل واقعی بازار نزدیک‌تر و به تبع آن کارآمدتر به نظر می‌رسید. بیتس (۱۹۹۶) برای به دست آوردن مدل‌های واقعی‌تر، اضافه کردن پرش به مدل را پیشنهاد کرد پس از آن مرتون (۱۹۷۶) برای توزیع اندازه‌ی پرش، فرآیند پرش-انتشار را پیشنهاد کرد که در آن لگاریتم اندازه پرش به صورت نرمال توزیع شده بود. هر چند مدل مرتون برای ارزش-گذاری قیمت به واقعیت بازار نزدیک‌تر بود، ولی باز هم تمام واقعیت توزیع نرخ بازدهی را نشان نمی‌داد. برای رفع این مشکل کو (۲۰۰۲) فرآیند پرش-انتشار دیگری را معرفی کرد که در آن اندازه‌ی پرش از توزیع نمایی مضاعف تبعیت می‌کرد که دیگر مشکل روش مرتون را نداشت. زیرا توزیع نمایی مضاعف دم سنگین‌تری دارد و داده‌های پرت بیشتری را می‌پذیرد.

فصل ۴

مدل‌های وابسته به زمان

استفاده از مدل هستون هنوز هم چالش انگیز است، چراکه تنها زمانی یک فرمول به مقدار واقعی نزدیک است که پارامترها ثابت یا ثابت تکه ای باشند. وابسته کردن پارامترها به زمان، یکی از راهبردهای مدلسازی تلاطم ضمنی بازار در سررسیدهای کوتاه مدت و سازگار شدن مدل با بازار واقعی است، که به اینگونه مدل‌ها، مدل‌های وابسته به زمان می‌گویند. این مدل‌های دارای پارامترهای وابسته به زمان برآزش بهتری برای تلاطم‌های ضمنی فراهم می‌کنند. مدل هستون گاهی قادر به فراهم کردن برآزش مناسب برای تلاطم‌های ضمنی بازارهای با سررسید کوتاه نمی‌باشد. یک راه حل معمول برای این مسئله، غنی سازی مدل با پارامترهای اضافی از طریق مشخص کردن یک فرآیند تلاطم واقع گرایانه تر است که همان روش ”مدل هستون مضاعف” می‌باشد. روش دیگر این است که اجازه دهیم پارامترها وابسته به زمان باشند. این روش دوم روشی است که از سوی میخائیلوف و نوگل^۱، الیس^۲، بنهامو، گوبت و میری^۳ و دیگران اتخاذ گردید. [۳۲] در این فصل این مدل‌های وابسته به زمان را ارائه می‌کنیم.

ملاحظه ۱۰۰۴. میخائیلوف و نوگل [۲۸] و الیس [۱۵] تعمیم عامل‌های تابع مشخصه هستون را به صورت زیر عنوان کرده‌اند

^۱Mikhailov and Nögel

^۲Elices

^۳Benhamou, Gobet and Miri

$$\tilde{C}_j(\phi, \tau) = (r - q)i\phi\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - \tilde{g}_j e^{d_j \tau}}{1 - \tilde{g}_j} \right) \right] + C_j^\circ \quad (۱.۴)$$

$$\tilde{D}_j(\phi, \tau) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j \tau}}{1 - \tilde{g}_j e^{d_j \tau}} \right), \quad (۲.۴)$$

۱.۴ مدل میخایلو ف و نوگل

مدل میخایلو ف و نوگل [۲۸] درواقع همان مدل هستون است که وابسته به زمان شده و به صورت زیر هستند.

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t} \quad (۳.۴)$$

$$dv_t = \kappa_t(\theta_t - v_t)dt + \sigma_t \sqrt{v_t} dW_{2,t} \quad (۴.۴)$$

که S_t فرایند تغییر قیمت دارایی پایه و v_t فرایند تلاطم هستند و r نرخ بهره بدون ریسک، $\kappa_t > 0$ سرعت بازگشت به میانگین، $\theta_t > 0$ میانگین بلندمدت، $\sigma_t > 0$ واریانس فرایند تلاطم هستند. همچنین $W_{1,t}$ و $W_{2,t}$ دو حرکت براونی با ضریب همبستگی ρ_t هستند، یعنی رابطه‌ی زیر برقرار است

$$\mathbb{E}^\mathbb{P}[dW_{1,t}dW_{2,t}] = \rho_t dt$$

این مدل به پارامترهای موجود در مدل هستون اجازه می دهد ثابت تکه ای باشند و به این ترتیب وابستگی به زمان در مدل هستون را معرفی می کند. این مدل از معادله ریکاتی کلی استفاده می کند. ما ضرایب تابع مشخصه را بوسیله $\tilde{C}_j(\phi, \tau_1; \Theta)$ و $\tilde{D}_j(\phi, \tau_1; \Theta)$ نشان می دهیم تا بر وابستگی آنها به پارامترهای $\Theta = (\kappa, \theta, \sigma, v_0, \rho)$ تاکید کنیم. فرض کنید N سررسید $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N < \infty$ محور زمانی $[0, T_N]$ را به نموهای سررسید $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ تقسیم می کنیم، جاییکه $\tau_k = T_k - T_{k-1}$ به ازای $k = 2, \dots, N$ و $\tau_1 = T_1$ ایده این است که عبارات به ترتیب برای $\tilde{C}_j$ و $\tilde{D}_j$ بدست آید. در نخستین گام برآورد، $\tilde{C}_j(\phi, \tau_1; \Theta)$ و $\tilde{D}_j(\phi, \tau_1; \Theta)$ را برای اولین سررسید τ_1 با استفاده از شرایط اولیه ایستا $C_j^\circ = 0$ و $D_j^\circ = 0$ به دست می آوریم (دقیقا به همان صورتی که در مدل هستون معمولی آمده). سپس توابع مشخصه و قیمت های اختیار مدل هستون را ساخته و Θ را برآورد می کنیم. این کار موجب تولید نخستین مجموعه از برآوردهای $(\kappa^{(1)}, \theta^{(1)}, \sigma^{(1)}, v_0^{(1)}, \rho^{(1)})$ $\Theta_1 =$ متناظر با نخستین سررسید τ_1 می شود. در گام های بعدی، برآورد اصلاح می شود زیرا ما از $C_j^k \neq 0$ و $D_j^k \neq 0$ کلی استفاده می کنیم. بنابراین در دومین گام برآورد Θ_1 را در داخل عبارات برای $\tilde{C}_j$ و $\tilde{D}_j$ جایگزین کنید تا دومین مجموعه از شرایط اولیه C_j^1 و D_j^1 تولید شود. سپس $\tilde{C}_j(\phi, \tau_2; \Theta)$ و $\tilde{D}_j(\phi, \tau_2; \Theta)$ را برای دومین سررسید τ_2 بسازید، توابع مشخصه و قیمت های اختیار مدل هستون را بسازید و تخمین پارامتر $\Theta_2 = (\kappa^{(2)}, \theta^{(2)}, \sigma^{(2)}, v_0^{(2)}, \rho^{(2)})$ را تولید

کنید. ما تا آخرین سررسید τ_N به این شیوه بازگشتی ادامه می دهیم. گامهای زیر، این روش بازگشتی را خلاصه می کند.

گام ۱

از $C_j^\circ = D_j^\circ = 0$ استفاده کنید تا $\tilde{C}_j(\phi, \tau_1; \Theta)$ و $\tilde{D}_j(\phi, \tau_1; \Theta)$ را به صورت زیر شکل دهید:

$$\tilde{C}_j(\phi, \tau_1; \Theta) = (r - q)i\phi\tau_1 + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau_1 - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j \tau_1}}{1 - g_j} \right) \right]$$

$$\tilde{D}_j(\phi, \tau_1; \Theta) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j \tau_1}}{1 - g_j e^{d_j \tau_1}} \right)$$

در روابط فوق، d_j و g_j در (۵.۳) تعریف شده‌اند. توابع مشخصه f_j که $(j = 1, 2)$ در زمان τ_1 محاسبه می‌شوند

$$f_j(\phi; x, v, \Theta) = \exp[\tilde{C}_j(\phi, \tau_1; \Theta) + \tilde{D}_j(\phi, \tau_1; \Theta)v_0 + i\phi x]$$

در رابطه فوق، $x = \ln S_0$ (لگاریتم قیمت نقد یا همان قیمت روز). قیمت های اختیار هستون را شکل داده و از آنها یا تلاطم های ضمنی هستون استفاده کنید تا $\Theta_1 = (\kappa^{(1)}, \theta^{(1)}, \sigma^{(1)}, v_0^{(1)}, \rho^{(1)})$ را بدست آورید (که مجموعه برآوردهای پارامتر برای سررسید τ_1 است). در گام نخست، با استفاده از سررسید τ_1 ، برآورد Θ دقیقاً مشابه با برآورد برای مدل هستون معمولی است.

گام ۲ $k \geq 2$

برآوردهای پارامتر $\Theta_2 = (\kappa^{(2)}, \theta^{(2)}, \sigma^{(2)}, v_0^{(2)}, \rho^{(2)})$ گام قبلی را در داخل عبارات برای $\tilde{C}_j$ و $\tilde{D}_j$ جایگزین می کنیم تا شرایط اولیه بعدی $C_j^{k-1} = \tilde{C}_j(\phi, \tau_{k-1}; \Theta_{k-1})$ و $D_j^{k-1} = \tilde{D}_j(\phi, \tau_{k-1}; \Theta_{k-1})$ به ترتیب با استفاده از معادلات ۲.۴ و ۱.۴ به دست آید. $C_j^k = \tilde{C}_j(\phi, \tau_k; \Theta)$ و $D_j^k = \tilde{D}_j(\phi, \tau_k; \Theta)$ را برای سررسید τ_k مجدداً با استفاده از معادلات ۲.۴ و ۱.۴ بسازید:

$$\tilde{C}_j(\phi, \tau_k; \Theta) = (r - q)i\phi\tau_k + \frac{a}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau_k - 2 \ln \left(\frac{1 - \tilde{g}_j e^{d_j \tau_k}}{1 - \tilde{g}_j} \right) \right] + C_j^{k-1} \quad (5.4)$$

$$\tilde{D}_j(\phi, \tau_k; \Theta) = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j \tau_k}}{1 - \tilde{g}_j e^{d_j \tau_k}} \right), \quad (6.4)$$

که

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j - D_j^{k-1}\sigma^2}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j - D_j^{k-1}\sigma^2}, \quad (7.4)$$

با استفاده از تابع مشخصه

$$f_j(\phi; x, v, \Theta) = \exp[\tilde{C}_j(\phi, \tau_k; \Theta) + \tilde{D}_j(\phi, \tau_k; \Theta)v_0 + i\phi x]$$

، انتگراند را برای احتمالات P_1 و P_2 شکل دهید، قیمت های هستون با سررسید τ_k را بدست آورید و برآوردهای پارامتر $\Theta_k = (\kappa^{(k)}, \theta^{(k)}, \sigma^{(k)}, v_0^{(k)}, \rho^{(k)})$ را بدست بیاورید.

گام نهایی

در زمان نهایی τ_N برآوردهای پارامتر $\Theta_N = (\kappa^{(N)}, \theta^{(N)}, \sigma^{(N)}, v_o^{(N)}, \rho^{(N)})$ را داریم که از آنها برای تشکیل تابع مشخصه زیر استفاده می‌کنیم:

$$f_j(\phi; x, v, \Theta_N) = \exp[\tilde{C}_j(\phi, \tau_N; \Theta_N) + \tilde{D}_j(\phi, \tau_N; \Theta_N)v_o^{(N)} + i\phi x], \quad (۸.۴)$$

ما از این تابع مشخصه برای تشکیل انتگرال برای احتمالات P_1 و P_2 استفاده می‌کنیم و قیمت های هستون با سررسید τ_N را به دست می‌آوریم. توجه داشته باشید که برآورد در گام $k \geq 2$ تنها برای مجموعه پارامتر فعلی Θ است. مجموعه پارامترهای مربوط به تکرار قبلی Θ_{k-1} ، ثابت است و در شرایط اولیه C_j^{k-1} و D_j^{k-1} مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین شرایط اولیه تاثیر مستقیمی بر برآورد Θ ندارند. البته باید توجه داشت که هرچند شرایط اولیه، توابع مجموعه پارامتر فعلی Θ نیستند اما آنها توابع متغیر انتگرال گیری ϕ هستند. برای اهداف انتگرال گیری، شرایط اولیه را نمی‌توان مقادیری ثابت در نظر گرفت. توجه داشته باشید که $\tilde{D}_j(\phi, \tau_k; \Theta)$ در معادله ۶.۴ به D_j^{k-1} در معادله ۷.۴ بستگی دارد. از سویی $\tilde{C}_j(\phi, \tau_k; \Theta)$ در معادله ۶.۴ نیز به D_j^{k-1} و همچنین C_j^{k-1} بستگی دارد.

۲.۴ مدل الیس

هر دو مدل وابسته به زمان الیس و میخائیلوف و نوگل از یک محاسبه بازگشتی در تابع مشخصه دو متغیره که در پژوهش افشانی و کاهل و لرد ارائه شده، استفاده می‌کنند. البته در مدل الیس، این محاسبه با وضوح بیشتری نشان داده می‌شود. به یاد بیاورید که، تابع مشخصه دو متغیره برای (x_T, v_T) به صورت زیر است [۳۲]:

$$\begin{aligned} f(\phi_1, \phi_2, \tau, x_1, v_1) &= E[\exp(i\phi_1 x_T, i\phi_2 v_T) | F_1] \\ &= \exp(C(\tau, \phi_1, \phi_2) + i\phi_1 x_t + D(\tau, \phi_1, \phi_2)v_t), \end{aligned} \quad (۹.۴)$$

در معادله فوق، $\tau = Tt$ زمان برای سررسید است. مثل قبل فرض کنید N سررسید $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N < \infty$ به ما داده شده و محور زمان $[0, T_N]$ به نموهای سررسید $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ تقسیم می‌شود، جاییکه $\tau_k = T_k T_{k-1}$ به ازای $k = 2, \dots, N$ و $\tau_1 = T_1$. حال x_k ، v_k و F_k را تعریف کنید تا x_t ، v_t و F_t را نمایش دهند، اما هریک در T_k ارزیابی می‌شود. لرد و کاهل (۲۰۱۰) قانون انتظارات تکراری را از طریق آماده سازی در مجموعه اطلاعات در T_{N1} ،

اعمال کردند تا تابع مشخصه برای x_N به صورت زیر به دست آید:

$$\begin{aligned}
 E[\exp(i\phi_1 x_N)] &= E[E[\exp(i\phi_1 x_N) | F_{N-1}]] \\
 &= E[f(\phi_1, \circ, \tau_N, x_{N-1}, v_{N-1})] \\
 &= E[\exp(C(\tau_N, \phi_1, \circ) + i\phi_1 x_{N-1} + D(\tau_N, \phi_1, \circ)v_{N-1})] \\
 &= \exp(C(\tau_N, \phi_1, \circ))E[\exp(i\phi_1 x_{N-1} + i[-iD(\tau_N, \phi_1, \circ)]v_{N-1})] \\
 &= \exp(C(\tau_N, \phi_1, \circ))E[\exp(i\phi_1 x_{N-1} + i\phi_1^{N-1} v_{N-1})],
 \end{aligned}$$

در معادله فوق $\phi_1^{N-1} = -iD(\tau_N, \phi_1, \circ)$

تشخیص اینکه آرگومان دوم با ویژگی دو متغیره را می توان به این شکل نوشت ترفندی است که محاسبه بازگشتی را ممکن می سازد. اکنون قانون انتظارات تکراری را مجددا در آخرین جمله معادله آخر در ۱۰.۴ به کار ببرید و این بار آماده سازی را در F_{N-2} انجام دهید. رابطه زیر به دست می آید

$$\begin{aligned}
 E[\exp(i\phi_1 x_N)] &= \exp(C(\tau_N, \phi_1, \circ))E[E[\exp(i\phi_1 x_{N-1} + i\phi_1^{N-1} v_{N-1}) | F_{N-2}]] \\
 &= \exp(C(\tau_N, \phi_1, \circ))E[f(\phi_1, \phi_1^{N-1}, \tau_{N-1}, x_{N-2}, v_{N-2})] \\
 &= \exp(C(\tau_N, \phi_1, \circ) + C(\tau_{N-1}, \phi_1, \phi_1^{N-1})) \\
 &\quad \times E[\exp(i\phi_1 x_{N-2} + D(\tau_{N-1}, \phi_1, \phi_1^{N-1})v_{N-2})] \\
 &= \exp(C(\tau_N, \phi_1, \circ) + C(\tau_{N-1}, \phi_1, \phi_1^{N-1}))E[\exp(i\phi_1 x_{N-2} + i\phi_1^{N-2} v_{N-2})]
 \end{aligned}$$

در معادله فوق $\phi_1^{N-2} = -iD(\tau_{N-1}, \phi_1, \phi_1^{N-1})$

با ادامه به این شیوه از طریق اعمال تکراری قانون انتظارات تکراری و ترفند، می توان تابع مشخصه برای $x_N = x_{T_N}$ را به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
 f(\phi_1, x_\circ, v_\circ) &= E[\exp(i\phi_1 x_N)], \\
 &\exp\left(\sum_{k=0}^{N-1} C(\tau_{N_k}, \phi_1, \phi_1^{N-k})\right) \exp(i\phi_1 x_\circ + D(\tau_1, \phi_1, \phi_1^\circ)v_\circ)
 \end{aligned} \tag{۱۰.۴}$$

در معادله فوق $\phi_1^{N-k} = -iD(\tau_{N-k}, \phi_1, \phi_1^{N-k+1})$ و $\phi_1^N = \circ$ ما از $f(\phi, x_\circ, v_\circ)$ در معادله ۱۰.۴ مستقیما برای دومین تابع مشخصه استفاده می کنیم، اما برای نخستین تابع مشخصه باید از (فرمول) بهره می بریم. الیس ، $v_\circ$ را در نخستین سررسید برآورد می کند و این پارامتر را محدود می سازد تا در کل سررسیدهای باقیمانده، ثابت باقی بماند. پارامترهای دیگر، ثابت تکه ای بوده و مقدار خود را در سررسیدها تغییر می دهند. مجموعه پارامتر برآورد شده در نمو زمانی (T_k, T_k) را بوسیله $(\kappa^{(k)}, \theta^{(k)}, \sigma^{(k)}, \rho^{(k)})$ نشان دهید. مدل الیس از نخستین سررسید تا آخرین سررسید با استفاده از گامهای زیر پیاده سازی می شود.

گام ۱

تابع مشخصه را در نخستین سررسید بسازید، که به مجموعه پارامتر Θ_1 بستگی دارد:

$$\exp(C(\tau_1, \phi_1, \circ; \Theta_1)) \times \exp(i\phi_1 x_\circ + D(\tau_N, \phi_1, \circ; \Theta_1)v_\circ)$$

برآوردهای پارامتر $v_\circ$ و Θ_1 را از طریق حداقل سازی تابع زیان با استفاده از قیمت های بازار یا تلاطم های ضمنی در نخستین سررسید، به دست آورید.

گام ۲

تابع مشخصه را در دومین سررسید بسازید، که به مجموعه های پارامتر Θ_1 و Θ_2 بستگی دارد:

$$\exp(C(\tau_2, \phi_1, \circ; \Theta_2) + C(\tau_1, \phi_1, \phi_1^1; \Theta_1)) \times \exp(i\phi_1 x_\circ + D(\tau_1, \phi_1, \phi_1^1; \Theta_1)v_\circ)$$

در فرمول فوق، $\phi_1^1 = -iD(\tau_2, \phi_1, \circ; \Theta_2)$ و $\phi_1^2 = -iD(\tau_1, \phi_1, \phi_1^1; \Theta_1)$. برآوردهای پارامتر Θ_2 را از طریق حداقل کردن تابع زیان با استفاده از قیمت ها یا تلاطم های در دومین سررسید، به دست آورید (Θ_1 و $v_\circ$ را ثابت نگه دارید).

گام k

– تابع مشخصه را در سررسید k بسازید، که به مجموعه پارامتر $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_k$ بستگی دارد:

$$\exp(C(\tau_k, \phi_1, \circ; \Theta_k) + C(\tau_{k-1}, \phi_1, \phi_1^{k-1}; \Theta_{k-1}) + \dots + C(\tau_1, \phi_1, \phi_1^1; \Theta_1)) \\ \times \exp(i\phi_1 x_\circ + D(\tau_1, \phi_1, \phi_1^1; \Theta_1)v_\circ)$$

که

$$\begin{aligned} \phi_1^k &= \circ \\ \phi_1^1 &= -iD(\tau_k, \phi_1, \phi_1^k; \Theta_k) \\ &\vdots \\ \phi_1^1 &= -iD(\tau_2, \phi_1, \phi_1^2; \Theta_2) \\ \phi_1^2 &= -iD(\tau_1, \phi_1, \phi_1^1; \Theta_1) \end{aligned}$$

برآوردهای Θ_k را از طریق حداقل سازی تابع زیان با استفاده از قیمت ها یا تلاطم ها در k امین سررسید، به دست آورید ($\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{k-1}$ و $v_\circ$ را ثابت نگه دارید).

در گام نهایی، تابع مشخصه ی معادله ۱۰.۴ در آخرین سررسید را در اینجا نوشته ایم تا بر وابستگی اش به مجموعه های پارامتر $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_N$ تاکید کنیم

$$f(\phi_1, x_\circ, v_\circ) = \exp\left(\sum_{k=0}^{N-1} C(\tau_{N_k}, \phi_1, \phi_1^{N-k}; \Theta_{N-k})\right), \quad (11.4) \\ \times \exp(i\phi_1 x_\circ + D(\tau_1, \phi_1, \phi_1^1; \Theta_1)v_\circ)$$

۳.۴ مدل بنهامو-گوبت-میری

اما مشکل اینجاست که ارزیابی فرمول به صورت فزاینده ای زمان بر می شود. البته برای پارامترهای کلی وابسته به زمان هیچ نوع فرمول تحلیلی وجود ندارد و معمولاً باید شبیه سازیهای مونت کارلو را اجرا کرد.

بنهامو، گوبت و میری از یک تلاطم "بسط واریانس" مشابه با آنچه توسط لوئیس به کار گرفته شد استفاده کردند تا عبارتی برای قیمت فروش اروپایی به دست آورند که نه تنها بسیار سریع است بلکه این امکان را به پارامترهای θ ، σ و ρ بدهد تا ثابت تکه‌ای باشند. دو پارامتر باقیمانده v_0 و κ ثابت مفروض هستند. قیمت سلف را با $X_t = \ln(Se^{(r-q)\tau})$ نشان دهید، که $\tau = Tt$ زمان تا سررسید است. با اعمال لم ایتو، فرایند دو متغیره برای مدل هستون وابسته به زمان بنهامو و همکاران به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} dX_t &= \frac{v_t}{\gamma} dt + \sqrt{v_t} dW_{1,t} \\ dv_t &= \kappa(\theta_t - v_t)dt + \sigma_t \sqrt{v_t} dW_{2,t}, \\ E^Q[dW_{1,t}, dW_{2,t}] &= \rho_t dt \end{aligned} \quad (12.4)$$

که v_0 واریانس اولیه است. آنها با استفاده از یک نسخه آشفته از مدل و حساب تغییرات ملیاوین نشان دادند که می توان قیمت فروش در مدل هستون را به عنوان حاصلجمع قیمت فروش بلک- شولز و مجموعه ای از جمله های اصلاحی شامل مشتقات قیمت فروش بلک- شولز، بیان نمود. با فرض نرخ ثابت بهره و بازده سود سهام، قیمت ثفروش بلک- شولز را می توان برحسب واریانس کل $y = \sigma^2 \tau$ و لگاریتم قیمت نقد (قیمت روز) $x = \ln S$ بیان نمود:

$$P_{BS}(x, y) = Ke^{-r\tau} \Phi(f(x, y)) - Se^{-q\tau} \Phi(g(x, y)), \quad (13.4)$$

در معادله فوق

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{y}}[-x + \ln K - (r - q)T] + \frac{\sqrt{y}}{\gamma}, \\ g(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{y}}[-x + \ln K - (r - q)T] - \frac{\sqrt{y}}{\gamma}, \end{aligned}$$

باید توجه داشت که $f = g + \sqrt{y}$ و $g = f - \sqrt{y}$ قیمت فروش در مدل بنهامو و همکاران به صورت زیر ظاهر می شود:

$$\begin{aligned} e^{-r\tau} E^Q[(K - e^{r\tau+X_T})^+] &= P_{BS}(x, \hat{w}_T) + a_{1,T} \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial x \partial y}(x, \hat{w}_T) + a_{2,T} \frac{\partial^3 P_{BS}}{\partial x^2 \partial y}(x, \hat{w}_T) \\ &\quad + b_{0,T} \frac{\partial^2 P_{BS}}{\partial y^2}(x, \hat{w}_T) + b_{3,T} \frac{\partial^4 P_{BS}}{\partial x^2 \partial y^2}(x, \hat{w}_T), \end{aligned} \quad (14.4)$$

در معادله فوق

$$\hat{w}_T = \int_0^T v_{\circ,t} dt, \quad (15.4)$$

و

$$v_{\circ,t} = e^{-\kappa t} \left(v_{\circ} + \int_0^t \theta_s \kappa e^{\kappa s} ds \right), \quad (16.4)$$

ضرایب در معادله ۱۴.۴ با استفاده از عملگرهای انتگرالی تعریف شده توسط بنهامو و همکاران (۲۰۱۰) به دست می‌آیند. این ضرایب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a_{1,T} = \int_0^T e^{\kappa t} \rho_t \sigma_t v_{\circ,t} \left(\int_t^T e^{-\kappa u} du \right) dt, \quad (17.4)$$

$$a_{2,T} = \int_0^T e^{\kappa t} \rho_t \sigma_t v_{\circ,t} \left(\int_t^T \rho_s \sigma_s \left(\int_s^T e^{-\kappa u} du \right) ds \right) dt, \quad (18.4)$$

$$b_{\circ,T} = \int_0^T e^{\kappa t} \sigma_t^2 v_{\circ,t} \left(\int_t^T e^{-\kappa s} \left(\int_s^T e^{-\kappa u} du \right) ds \right) dt, \quad (19.4)$$

$$b_{2,T} = \frac{a_{1,T}^2}{2} \quad (20.4)$$

توجه داشته باشید که تنها پارامترهای θ ، σ و ρ مجازند تفاوت داشته باشند؛ κ ثابت فرض می‌شود و $v_{\circ}$ یک متغیر وضعیت نادیده است.

۱.۳.۴ پارامترهای ثابت

اگر پارامترها ثابت فرض شوند، آنگاه $\theta_t = \theta$ ، $\sigma_t = \sigma$ و $\rho_t = \rho$ جابجا کردن این پارامترها به بیرون از انتگرال‌ها و ارزیابی انتگرال‌ها در معادلات ۱۷.۴ تا ۱۹.۴ موجب تولید عبارات زیر می‌شود که در گزاره ۴.۲ بنهامو و همکاران (۲۰۱۰) آمده است

$$a_{1,T} = \frac{\rho \sigma e^{-\kappa T}}{\kappa^2} [v_{\circ} (-\kappa T + e^{\kappa T} - 1) + \theta (\kappa T + e^{\kappa T} (\kappa T - 2) + 2)], \quad (21.4)$$

$$a_{2,T} = \frac{\rho^2 \sigma^2 e^{-\kappa T}}{2 \kappa^3} [v_{\circ} (-\kappa T (\kappa T + 2) + 2 e^{\kappa T} - 2) + \theta (2 e^{\kappa T} (\kappa T - 3) + \kappa T (\kappa T + 4)) + 6],$$

$$b_{\circ,T} = \frac{\sigma^2 e^{-\kappa T}}{2 \kappa^3} [v_{\circ} (-4 e^{\kappa T} \kappa T + 2 e^{2\kappa T} - 2) + \theta (4 e^{\kappa T} (\kappa T + 1) + e^{2\kappa T} (2 \kappa T - 5)) + 1],$$

$$b_{2,T} = \frac{a_{1,T}^2}{2}$$

توجه داشته باشید که تحت پارامترهای ثابت، خواهیم داشت:

$$v_{\circ,t} = \theta + (v_{\circ} - \theta) e^{-\kappa t}, \quad \hat{w}_T = (v_{\circ} - \theta) \left(\frac{1 - e^{-\kappa T}}{\kappa} \right) + \theta T, \quad (22.4)$$

به طوری که $\hat{W}_T$ به فرمی که در فصل ۲ با آن مواجه شدیم، تقلیل پیدا می‌کند. به منظور حصول قیمت فروش، با استفاده از مشتقات بلک-شولز ارائه شده در پایان این فصل، ضرایب

بدست آمده از معادله (۵۵.۹) را در معادله (۴۸.۹) جایگزین کنید. قیمت خرید از طریق برابری اختیار فروش-خرید به دست می آید. چنانکه بنهامو و همکارانش ذکر کرده اند، بسط قیمت فروش در معادله (۴۸.۹) تحت پارامترهای ثابت با تلاطم بسط واریانس لویس (۲۰۰۰) ، یکسان است. فی الواقع سر راست ترین کار این است که تایید شود $a_{1,T} = \sigma J_1(v, T)$ ، $a_{2,T} = \sigma^2 J_2(v, T)$ و $b_{0,T} = \sigma^2 J_3(v, T)$ و اینکه تایید شود قیمت های فروش یکسان تولید شود.

۲.۳.۴ پارامترهای ثابت تکه‌ای

فرض کنید N سررسید $0 < T_1 < T_2 < \dots < T_N < \infty$ وجود داشته باشد. بنهامو و همکاران فرض می کنند که κ و v_0 در $[0, T_N]$ ثابت هستند، اما θ ، σ و ρ در بازه $[T_i, T_{i+1}]$ به ترتیب دارای مقادیر ثابت تکه ای θ_{i+1} ، σ_{i+1} و ρ_{i+1} هستند. آنها با تفکیک دامنه انتگرال گیری در معادلات (۵۱.۹) تا (۵۳.۹)، عبارات بازگشتی را برای ضرایب قیمت $a_{1,T_{i+1}}$ ، $a_{2,T_{i+1}}$ و $b_{0,T_{i+1}}$ فراهم می کنند. بنابراین با توجه به معادله (۵۱.۹) و اثبات گزاره ۵.۲ بنها و همکاران (۲۰۱۰)، برای $a_{1,T_{i+1}}$ داریم:

$$\begin{aligned} a_{1,T_{i+1}} &= \int_0^{T_{i+1}} e^{\kappa t} \rho_t \sigma_t v_{0,t} \left(\int_t^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt \\ &= \int_0^{T_i} e^{\kappa t} \rho_t \sigma_t v_{0,t} \left(\int_t^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt + \int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{\kappa t} \rho_t \sigma_t v_{0,t} \left(\int_t^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt, \end{aligned} \quad (23.4)$$

جمله نخست در خط دوم معادله ۲۳.۴ را می توان با شکستن دامنه (t, T_{i+1}) انتگرال داخلی به (t, T_i) و (T_i, T_{i+1}) به دو بخش تفکیک نمود :

$$\int_0^{T_i} e^{\kappa t} \rho_t \sigma_t v_{0,t} \left(\int_t^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt + \int_0^{T_i} e^{\kappa t} \rho_t \sigma_t v_{0,t} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt \quad (24.4)$$

جمله نخست در معادله (۵۸.۹)، a_{1,T_i} است. این دلالت بر آن دارد که می توانیم $a_{1,T_{i+1}}$ را به صورت رابطه زیر بنویسیم:

$$\begin{aligned} a_{1,T_{i+1}} &= a_{1,T_i} + \int_0^{T_i} e^{\kappa t} \rho_t \sigma_t v_{0,t} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt \\ &\quad + \int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{\kappa t} \rho_t \sigma_t v_{0,t} \left(\int_t^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt, \end{aligned} \quad (25.4)$$

$$(26.4)$$

از آنجاییکه پارامترها در بازه های (T_i, T_{i+1}) ، ثابت تکه ای هستند لذا ضروریست انتگرال در دامنه $(0, T_i)$ به انتگرال هایی در دامنه های (T_i, T_{i+1}) شکسته شود. بنابراین معادله ۲۵.۴ به

صورت زیر می شود:

$$a_{\setminus, T_{i+1}} = a_{\setminus, T_i} + \rho_{\setminus} \sigma_{\setminus} \int_0^{T_1} e^{\kappa t} v_{\circ, t} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt + \rho_{\setminus} \sigma_{\setminus} \int_{T_1}^{T_2} e^{\kappa t} v_{\circ, t} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt + \dots \quad (27.4)$$

$$+ \rho_i \sigma_i \int_{T_{i-1}}^{T_i} e^{\kappa t} v_{\circ, t} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt + \rho_{i+1} \sigma_{i+1} \int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{\kappa t} v_{\circ, t} \left(\int_t^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt, \quad (28.4)$$

که می توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$a_{\setminus, T_{i+1}} = a_{\setminus, T_i} + \sum_{j=\setminus}^i \rho_j \sigma_j \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{\kappa t} v_{\circ, t} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt + \rho_{i+1} \sigma_{i+1} \int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{\kappa t} v_{\circ, t} \left(\int_t^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt, \quad (29.4)$$

در معادله فوق، $T_{\circ} = \circ$. ضرایب بازگشتی دیگر به طریق مشابهی بدست می آید. از معادله ۱۸.۴ داریم:

$$a_{\setminus, T_{i+1}} = a_{\setminus, T_i} + \int_0^{T_i} \int_t^{T_i} \int_{T_i}^{T_{i+1}} + \int_0^{T_i} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \int_s^{T_{i+1}} + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \int_t^{T_{i+1}} \int_s^{T_{i+1}} \\ = a_{\setminus, T_i} + \sum_{j=\setminus}^i (\rho_j \sigma_j)^{\setminus} \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{\kappa t} v_{\circ, t} \int_t^{T_i} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) ds dt, \quad (30.4) \\ + \sum_{j=\setminus}^i (\rho_j \sigma_j)^{\setminus} \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{\kappa t} v_{\circ, t} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \left(\int_s^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) ds dt \\ + (\rho_{i+1} \sigma_{i+1})^{\setminus} \int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{\kappa t} v_{\circ, t} \int_t^{T_{i+1}} \left(\int_s^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt$$

در خط نخست معادله (۶۲.۹)، انتگرانها حذف می شوند تا معادله ساده شود. از معادلات (۵۳.۹) و (۵۴.۹) داریم:

$$b_{\circ, T_{i+1}} = b_{\circ, T_i} + \int_0^{T_i} \int_t^{T_i} \int_{T_i}^{T_{i+1}} + \int_0^{T_i} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \int_s^{T_{i+1}} + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \int_t^{T_{i+1}} \int_s^{T_{i+1}} \\ = b_{\circ, T_i} + \sum_{j=\setminus}^i \sigma_j^{\setminus} \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{\setminus \kappa t} v_{\circ, t} \int_t^{T_i} e^{-\kappa s} \left(\int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) ds dt \\ + \sum_{j=\setminus}^i \sigma_j^{\setminus} \int_{T_{j-1}}^{T_j} e^{\setminus \kappa t} v_{\circ, t} \int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{-\kappa s} \left(\int_s^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) ds dt \quad (31.4) \\ + \sigma_{i+1}^{\setminus} \int_{T_i}^{T_{i+1}} e^{\setminus \kappa t} v_{\circ, t} \int_t^{T_{i+1}} e^{-\kappa s} \left(\int_s^{T_{i+1}} e^{-\kappa u} du \right) dt,$$

$$b_{\setminus, T_{i+1}} = \frac{a_{\setminus, T_{i+1}}^{\setminus}}{\setminus}. \quad (32.4)$$

در این عبارات از فرم زیر برای $v_{\circ,t}$ استفاده می کنیم که نسخه ثابت تکه ای معادله ۱۶.۴ است:

$$v_{\circ,t} = e^{-\kappa t}(v_{\circ} + \theta_{i+1} \int_0^t \kappa e^{\kappa s} ds) = e^{-\kappa t}(v_{\circ} - \theta_{i+1}) + \theta_{i+1}. \quad (۳۳.۴)$$

فصل ۵

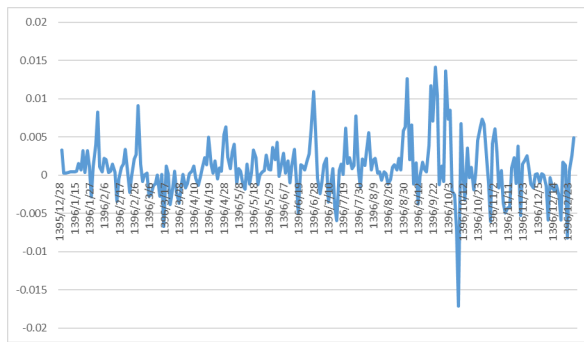
مقایسه عددی روی شاخص کل بازار بورس تهران

در بعضی کشورها، می‌توان قراردادهای اختیار معامله را روی شاخص کل بازار بورس اجرا کرد. درواقع شاخص کل بازار، نقش دارایی پایه و مقدار شاخص، به عنوان قیمت دارایی پایه مدنظر گرفته می‌شود. دارنده‌ی این اختیار، به طور غیر مستقیم، اختیاری از تمام بازار را در سبد خود دارد [۲].

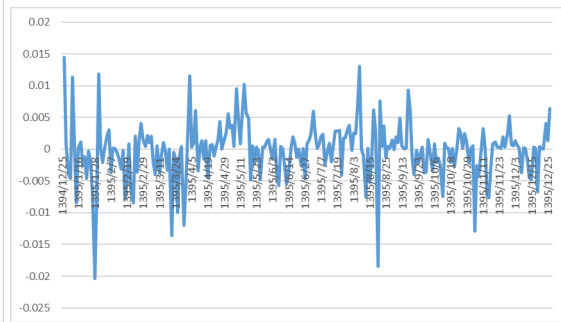
در این تحقیق از بازده روزانه شاخص به عنوان دارایی پایه در نظر گرفته شده و با استفاده از مدل BGM اختیار معامله‌ی اروپایی در سه دوره مختلف قیمت‌گذاری شده‌اند. بازده روزانه شاخص کل با استفاده از لگاریتم نسبت شاخص روز نسبت به روز قبل محاسبه شده است. سه دوره زمانی مورد نظر به صورت زیر است؛

- قرارداد اختیار خرید در ابتدای سال ۱۳۹۶ با سررسید یک ساله
- قرارداد اختیار خرید در ابتدای سال ۱۳۹۷ با سررسید یک ساله
- قرارداد اختیار خرید در ابتدای سال ۱۳۹۸ با سررسید یک ساله

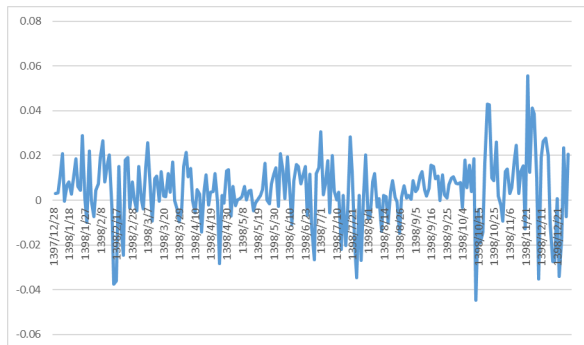
در شکل ۱.۵ تغییرات بازده شاخص کل بورس تهران طی سال‌های ۱۳۹۵ تا ۱۳۹۸ نشان داده شده‌است.



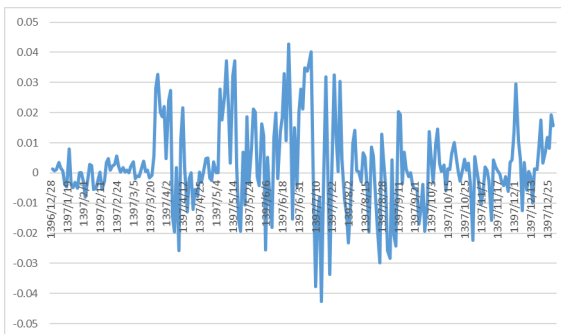
(ب) سال ۱۳۹۶



(آ) سال ۱۳۹۵



(د) سال ۱۳۹۸



(ج) سال ۱۳۹۷

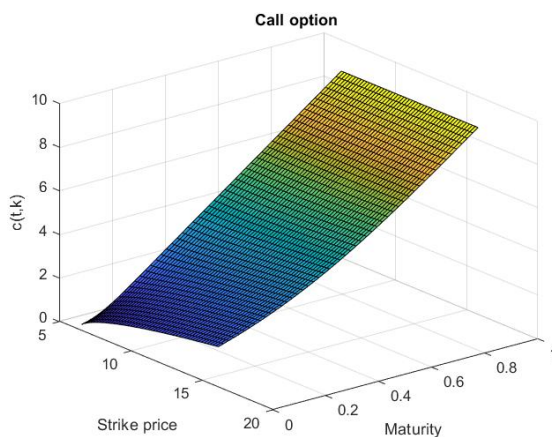
شکل ۱.۵: تغییرات بازده شاخص کل بورس تهران طی یک سال

پارامترهای مدل با استفاده از روش حداکثر درستنمایی برآورد شده‌اند. بدین منظور در هر دوره، از اطلاعات سال قبل برای تخمین پارامترها استفاده شده‌است. همچنین قیمت توافقی در هر دوره میانگین قیمت دارایی پایه (بازده شاخص کل) در سال قبل، بازده بدون ریسک، نرخ تورم سال قبل، قیمت اولیه دارایی پایه قیمت اولین روز سال و قیمت واقعی (S_T) قیمت آخرین روز سال در نظر گرفته شده‌است. انحراف معیار آخرین ماه سال قبل هر دوره نیز به عنوان تلاطم اولیه در نظر گرفته شده‌است. جدول ۱.۵ نتیجه تخمین پارامترها را در بازه‌های مورد بررسی نمایش می‌دهد. در این جدول هر اختیار با سال شروع آن مشخص شده‌است.

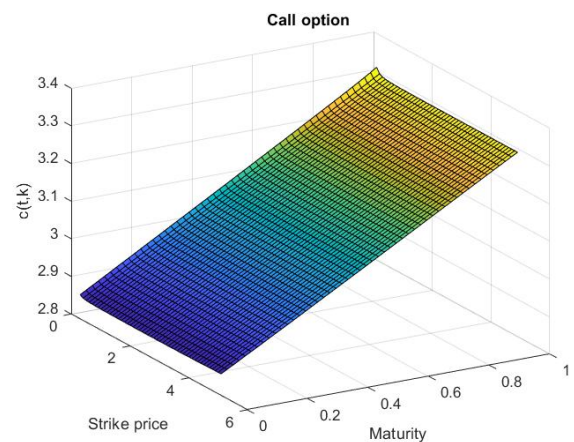
جدول ۱.۵: نتایج تخمین پارامترها

پارامتر اختیار	S_T	S_0	K	σ	κ	θ	ρ	r	V_0
سال ۱۳۹۶	۰/۰۰۴۸	۰/۰۰۰۳	۰/۰۰۰۱	۰/۸۵۳	۵/۴۴۷	۰/۰۰۲۶	-۰/۳۵	۰/۰۹	۰/۰۰۴
سال ۱۳۹۷	۰/۰۱۵	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۰۹	۰/۰۹۴	۱۷/۸۷۱	۰/۰۰۲	-۰/۵۲	۰/۰۹۶	۰/۰۰۳
سال ۱۳۹۸	۰/۰۲۰	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۰۲۵	۰/۴۲۱	۳۳/۳۴	۰/۰۱۳	-۰/۱۱	۰/۳۱	۰/۰۱

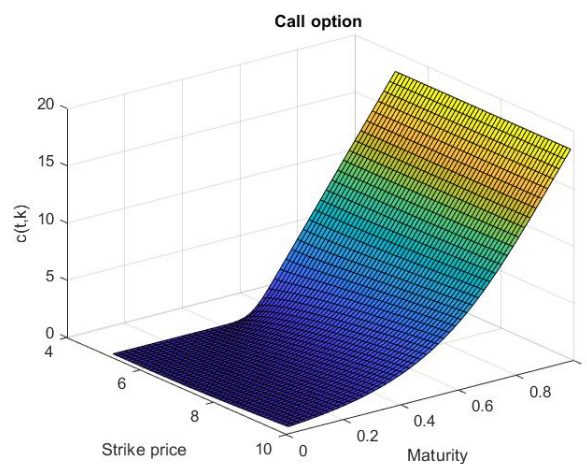
ابتدا هر کدام از اختیارها با متغیر بودن قیمت توافقی و تاریخ سررسید قیمت گذاری شده‌اند. در شکل ۲.۵ نتیجه قیمت گذاری سه اختیار شرایط ذکر شده نمایش داده شده است.



(ب) سال ۱۳۹۷



(آ) سال ۱۳۹۶



(ج) سال ۱۳۹۸

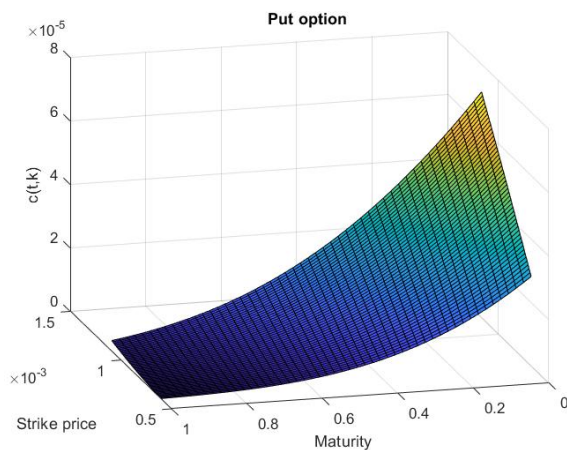
شکل ۲.۵: قیمت گذاری اختیار خرید با قیمت توافقی و سررسیدهای مختلف

همانطور که در شکل دیده می‌شود، قیمت اختیار سال ۱۳۹۶ به دلیل میزان تورم و پارامترهای کمتر، از سایر اختیارها کمتر شده است که این قیمت در بازار از وجود فضای فرصت طلبی و آربیتراژی جلوگیری می‌کند.

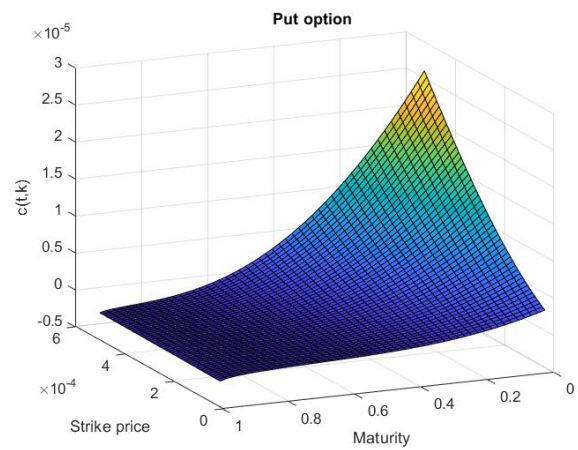
در سال ۱۳۹۷ قیمت اختیار افزایش شدیدی داشته است. با توجه به پارامترهای استخراج شده، دلیل این افزایش را می‌توان بالا بودن سرعت بازگشت به میانگین دانست.

در سال ۱۳۹۸ قیمت اختیار بسیار افزایش یافته است. با توجه به نرخ بهره بدون ریسک، این افزایش قابل پیش بینی بود.

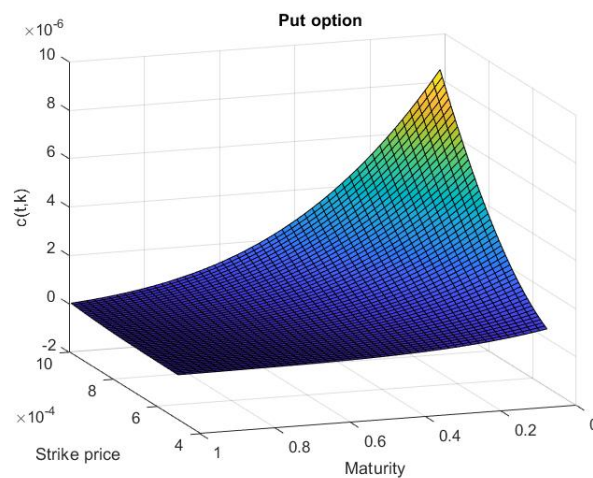
در ادامه اختیار فروش با شرایطی مشابه اختیار خرید در نظر گرفته شده است. ابتدا هر کدام از اختیارها با متغیر بودن قیمت توافقی و تاریخ سررسید قیمت گذاری شده اند. در شکل ۳.۵ نتیجه قیمت گذاری سه اختیار تحت شرایط ذکر شده نمایش داده شده است.



(ب) سال ۱۳۹۷



(آ) سال ۱۳۹۶



(ج) سال ۱۳۹۸

شکل ۳.۵: قیمت گذاری اختیار فروش با قیمت توافقی و سررسیدهای مختلف

در شکل ۲.۵ نیز مشاهده می شود که در سال ۱۳۹۸ مقدار اختیار در قیمت توافقی و سررسیدهای مختلف از اختیارهای مشابه در سال های گذشته کمتر است و این مقدار از نوسانات بالای دوره سرچشمه می گیرد.

در ادامه قیمت گذاری اختیار خرید اروپایی با استفاده از قیمت توافقی و سررسید مشخص تحت مدل های میخایلو و نوگل و BGM انجام شده و نتیجه قیمت گذاری با مدل بلک-شولز مقایسه شده است. در جدول ۲.۵ نتایج این قیمت گذاری مشاهده می شود. در ستون خطا،

اختلاف قیمت گذاری هر مدل با مدل بلک-شولز مشخص شده است.

جدول ۲.۵: نتایج قیمت گذاری اختیار خرید

اختیار	بلک شولز	میخایلو ف و نوگل	خطا	BGM	خطا
سال ۱۳۹۶	۰/۰۰۰۳۲۰۸۶	۰/۰۰۰۲۸۷۹۷۹	$3/2881E - 04$	۰/۰۰۰۳۲۰۸۰	$5/9059E - 07$
سال ۱۳۹۷	۰/۰۰۰۰۵۸۲۳	۰/۰۰۰۰۵۰۱۵۴۳۷	$8/08E - 05$	۰/۰۰۰۰۵۸۲۳	$1/66E - 08$
سال ۱۳۹۸	۰/۰۰۰۰۴۰۹۴	۰/۰۰۰۰۰۰۰۹۱	$4/09E - 04$	۰/۰۰۰۰۵۵۰۰	$1/41E - 04$

همانطور که در جدول دیده می شود در سال های ۱۳۹۶ و ۱۳۹۷ قیمت اختیارها تحت هر سه مدل بسیار به هم نزدیک و خطا ناچیز است. اما همانطور که پیشتر گفته شد در سال ۱۳۹۸ نوسانات دارایی پایه بالا و وجود اختلاف قابل پیش بینی بود، اختیار با مدل میخایلو ف و نوگل مقداری غیر قابل قبول قیمت گذاری شده است. علاوه بر نوسانات دلیل دیگری نیز در خطای مدل میخایلو ف و نوگل وجود دارد و آن این است که این مدل در سررسیدهای کوتاه مدت بازدهی بهتری دارد.

اما مدل BGM در هر سه اختیار، حتی سال ۱۳۹۸، نتیجه خوبی نشان داده و به قیمت گذاری با مدل بلک-شولز نزدیک بوده است. در واقع با وجود اینکه در این مدل چند پارامتر ثابت در فرض شده اند، در شرایط ذکر شده بازدهی بهتری نسبت به مدل میخایلو ف و نوگل که تمام پارامترهای آن وابسته به زمان هستند، نشان داده است.

فصل ۶

نتایج و پیشنهادات

۱.۶ نتیجه گیری

با توجه به مساله قیمت گذاری بهینه و درست اختیار معاملات و تاثیر مستقیم آن بر تصمیم گیری های سرمایه گذاری در بازار، انتخاب مدل مناسب جهت قیمت گذاری بهینه و کارا که با بازار مالی مطابقت داشته باشد و فرصت آربیتراژ را در بازار کاهش دهد بسار حائز اهمیت است. از این رو پرداختن به موضوع قیمت گذاری اختیاریها تحت مدل های مختلف و پیدا کردن مدل مناسب تر برای قیمت گذاری، لازم و ضروری می باشد. زیرا موفقیت در این امر باعث تصمیم گیری های اصولی سرمایه گذاری و تخصیص بهینه منابع سرمایه ای است.

با توجه به بررسی های انجام شده و تحقیقات صورت گرفته در این پژوهش، برای پیدا کردن مدلی مناسب جهت قیمت گذاری اختیار معاملات اروپایی از بین مدل های ارائه شده، مشاهده شد که مدل های وابسته به زمان در مورد اختیارهای با سر رسید کوتاه مدت، برازش مناسب تری با بازار و واقعیت دارند. این مدل ها به دلیل شکستن بازه های زمانی کوچک تر و حتی در مواردی مثل مدل میخائیلوف و نوگل، تبدیل بازه ها به لحظه می توانند قیمت اختیار خرید و فروش را بسیار نزدیک به واقعیت و با خطای ناچیزی محاسبه کنند. همانطور که در فصل پنجم و مقایسه عددی روی شاخص کل بازار بورس تهران مشاهده شد این مدل ها تا حد زیادی ایرادات مدل هستون و مدل های قبلی را برطرف کرده و توانستند با وابسته کردن پارامترها به زمان، تاثیر اتفاقات نادر روی بازار نظیر بحران های مالی یا رسیدن اطلاعات جدید

را کمتر کنند و با پیش بینی درست باعث کم شدن فرصت های آربیتراژ در بازار شوند. هرچند برآورد پارامترها در این مدل ها در مواردی زمانبر بوده و نیاز به روش هایی با دقت محاسبه حداکثری دارد.

۲.۶ پیشنهادات

- سرمایه گذاری و اختصاص طرح های پژوهشی و پایان نامه ها و رساله های مقاطع تحصیلات تکمیلی برای پیدا کردن مدل های بهینه و کارا جهت قیمت گذاری اختیار معاملات و در نتیجه تخصیص بهینه منابع سرمایه ای در زمینه های مختلف توسط سرمایه گذاران.
- بررسی سایر مدل های وابسته به زمان و محاسبه قیمت اختیارها در آن مدل ها برای مقایسه و مشخص کردن مناسب ترین مدل که با واقعیت های بازار مالی سازگار باشد.
- قیمت گذاری سایر مشتقات مالی (اختیار معاملات آمریکایی و ...) به کمک مدل های وابسته به زمان.
- مقایسه عددی مدل های وابسته به زمان روی شاخص های مختلف بازار بورس تهران و استفاده از نتایج آنها در تصمیم های سرمایه گذاری.
- استفاده از نتایج پایان نامه ها و رساله های دانشگاهی در رشته های مرتبط مالی توسط متولیان بازار سرمایه، کارگزاری های مالی، تحلیل گران و کاربران بازار سرمایه و امکان سنجی استفاده از مدل های مطالعه شده در اختیار معاملات بازارهای سرمایه داخلی و تصمیم گیری های مالی.

مراجع

- [۱] زرگری، ب. و زمانی، ش. و ظهوری زنگنه، ب. و کنت، ر. (۱۳۸۹)، ”استخراج فرمول قیمت گذاری اختیار معامله در مدل هستون“، **فرهنگ و اندیشه ریاضی**، شماره ۴۴، ۲۸-۱۱.
- [۲] صاحبی فرد، ح.، (۱۳۹۸)، پایان نامه کارشناسی ارشد: ”مقایسه قیمت گذاری اختیار معامله توان تحت چند مدل تلاطم تصادفی در بازار بورس تهران“، دانشکده ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود (۰۱/۰۷/۰۰۸/۰۱۷).
- [۳] ظهوری زنگنه ب. و جهانی پور ر. ا. (۱۳۸۳)، ”حرکت براونی یا فرآیند وینر: ریاضی مدل ساز پدیده های طبیعی“، **فرهنگ و اندیشه ریاضی**، ۲۰-۱.
- [۴] مهردوست، ف. و صابر. ن. (۱۳۹۲)، ”قیمت گذاری اختیار معامله تحت مدل هستون مضاعف با پرش“، **مجله مدل سازی پیشرفته ریاضی**، دوره ۳، شماره ۲، ۴۵-۶۰.
- [۵] نیسی، ع. و ملکی، ب. و رضائیان، ر. (۱۳۹۵)، ”تخمین پارامترهای مدل قیمت گذاری اختیار معامله اروپایی تحت دارایی پایه با تلاطم تصادفی با کمک رهیافت تابع زیان“، **مجله مهندسی مالی و مدیریت اوراق بهادار**، شماره بیست و هشتم، ۹۱-۱۱۵.
- [۶] ژارو، ر. و پروتر، ف. (۱۳۸۵)، ”تاریخچه انتگرال تصادفی و ریاضیات مالی از ۱۸۸۰ تا ۱۹۷۰“، **فرهنگ و اندیشه ریاضی**، شماره ۳۶، ۳۸-۱۷.
- [7] Albrecher, H., Mayer, P., Schoutens, W., and Tistaert, J. (2007), ”The Little Heston Trap.” **Wilmott Magazine**, January 2007, 83-92.
- [8] Bates, David S. (1996), ”Jumps and stochastic volatility: Exchange rate processes implicit in deutsche mark options”, **Review of financial studies**, 9(1): 69-107.
- [9] Benhamou, E., Gobet, E., and Miri. M. (2010). ”Time Dependent Heston Model.” **SIAM Journal on Financial Mathematics**, 1, 289-325.
- [10] Bjork T. (2004), ”**Arbitrage Theory in Continuous Time**”, 2nd edn. Oxford University Press.

-
- [11] Carr, P. and Madan D.(1999), "option valuation using the fast Fourier transform, **Journal of Computational Finance**, 2(4), : 61-73
- [12] Christoffersen, P., Heston, S. and Jacobs, K. (2009), "The shape and term structure of the index option smirk: Why multifactor stochastic volatility models work so well", **Management Science**, 55, 1914-1932.
- [13] Comte, F., L. Coutin, and E. Renault (2003), "Affine Fractional Stochastic Volatility Models", Working Paper.
- [14] Duffie, D., Pan, J., Singleton, K. (2000), "Transform analysis and asset pricing for affine jumps diffusions" **Econometrical**, 68(6), 1343- 1376.
- [15] Elices, A. (2009) "Affine Concatenation." **Wilmott Journal**, 1(3):155–62.
- [16] Gil-Pelaez J. (1951),"Note on the inversion theorem", **Biometrika**, 38(3-4), 481-482.
- [17] González Sáez, G.K. (2014), Master thesis in quantitative finance and banking, "Fourier Transform Methodes For Option Pricing: An Aplication To Extended Heston-Type Models", Universidad del País Vasco, Spain.
- [18] Greene,M., Fielitz,B.(1997), "Long term dependence in Common Stock returns", **Journal of Financial Economics**.
- [19] Guasoni,P.,(2006) "No arbitrage under transaction costs with fractional Brownian motion and byond"«, **Math Finance**, 16, 3,569-582.
- [20] Hoggard,T.,et al (1994), "Hedeging option portfolio in the presence of transaction costs" **Adv. Futures Opt. Res** 7,21-35.
- [21] Hull, J.C. (2002), **Fundamentals of futures and options Markets**, Edit, University of Toronto.
- [22] Iqmal Ibrahim Siti nur,G.O'Hara John, Mohd Zaki Muhammad syazwan(2016), "Pricing Formula for Power Options with Jump-Diffusion", **Applied Mathematics & Information Sciences**,10, 4, 1313-1317
- [23] Kolmogorov A.N. (1940), "Wiensche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbertschen Raum", **Comptes Rendus (Doklady) de l'Academie des Sciences de l'URSS** 26, 115-118.

- [24] Lamberton, D. and B. Lapeyre (1996), "Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance", Chapman & Hall.
- [25] Lépinette E. and Mehrdoust F. (2017), "A fractional version of the Heston model with Hurst parameter $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ ", **Journal of Dynamic Systems and Application(ISI)**. 535-54
- [26] Mandelbrot.B B. and Hudson, R. L. (2005), **The (Mis) Behavior of markets: a fractal view of risk, ruin, and reward**, Basic Books.
- [27] Mandelbrot B.B. and Van Ness J. (1968), "Fractional Brownian motion, fractional noises and applications", **SIAM Review**, 10 (4), 422-437.
- [28] Mikhailov, S. and Nogel, U. (2004), "**Heston's stochastic volatility model: Implementation, calibration and some extensions**", Wilmott magazine.
- [29] Øksendal, B. (2003), "**Stochastic differential equations**", In Stochastic differential equations, Springer Berlin Heidelberg:65-84.
- [30] P. Ren (2014) , In Partial Fullfillment of the Requirements for the Degree Doctor of Philosophy, "Parametric estimation of the Heston model under the indirect observability framework", University of Houston.
- [31] Chalasani, P., and Jha, S. (1997), "Steven Shreve: Stochastic Calculus and Finance" Lecture notes, October.
- [32] Rouah, F. D.,(2013), "**The Heston Model and Its Extensions in Matlab and c#**",John Wiley and Sons Inc., New Jersey.
- [33] Sturm, A., and Björk, T. (2001), "**Arbitrage Theory in Continuous Time**".
- [34] Tong Z., (2012), MSc thesis, "Option Pricing with Long Memory Stochastic Volatility Models", University of Ottawa
- [35] Wilde, I. F. (2009), "Stochastic Analysis-Notes", Lecture Notes, King's College, London.
- [36] Wu, Y. Y. (2011). The Pricing of Power Options under the Generalized Black-Scholes Model (Doctoral dissertation, NSYSU).

Abstract In this thesis some stochastic volatility models have been investigated. Then Power option pricing under these models has been driven on Tehran stock exchange index as underlying asset. In the sequel, with comparison between considered models, the arbitrary opportunity existence has been investigated. So in this study, Tehran stock exchange information for ten years has been restored and divided to periods of three months.

Keywords: Stochastic volatility models, Long memory models, Power option,



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Financial Mathematics

Option pricing under some time-dependent Heston models

By: Ensiyeh Nabizade

Supervisors

**Dr. Elham Dastranj
Dr. Abdolmajid Abdolbaghi**

October 2020