
بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم ریاضی

رشته آمار، گرایش احتمال

رساله دکتری

برآورد پارامتر تنش-مقاومت براساس نمونه مجموعه‌ی رتبه دار رکوردی

نگارنده: امینه صادق‌پور

استاد راهنما

دکتر احمد نزاکتی

استاد مشاور

دکتر سیدمهدی صالحی

شهریور ۱۳۹۹

تقدیم به:

پدرم و مادرم، که از نگاهشان صلابت، از رفتارشان محبت و از صبرشان ایستادگی را آموختم.

همسرم، اسطوره زندگیم، پناه خستگیم و امید بودنم.

فرزند دلبندم، امید بخش جانم که خستگی های این راه را به امید و روشنی تبدیل کرده.

خانواده عزیزم، مهربان فرشتگانی که لحظات زیبا و ناب زندگانیم مدیون حضور سبز آن هاست.

سپاس‌گزاری

پیش از همه و بیش از همه شکر و سپاس خدایی را که توفیق را رفیق راهم ساخت تا انجام این تحقیق را به پایان رسانم. بر خود لازم می‌دانم از تمام عزیزانی که پیمودن این مسیر را برایم آسان‌تر کردند تشکر و قدردانی کنم. از اساتید بزرگوارم، جناب آقای دکتر احمد نزاکتی و آقای دکتر سید مهدی صالحی که در این مسیر با نهایت بردباری و مهربانی مرا از راهنمایی‌های ارزنده خویش بهره‌مند فرمودند بی‌نهایت سپاس‌گزارم.
از اساتید محترم گروه آمار، که در طی این دوره از تحصیلم از علم و راهنمایی‌هایشان بهره بردم، متواضعانه سپاس‌گزام.
از اساتید محترم، آقای دکتر مهدی مهدی زاده (دانشگاه حکیم سبزوار)، جناب آقای دکتر محمدرضا ربیعی و جناب آقای دکتر حسین باغیشنی (دانشگاه صنعتی شاهرود)، که زحمت تصحیح و داوری این رساله را متقبل شدند، سپاس‌گزارم.
از ریاست محترم دانشکده ریاضی جناب آقای دکتر مهدی قوتمند و مدیر محترم گروه آمار دانشگاه صنعتی شاهرود، جناب آقای دکتر مهرداد غزنوی به دلیل خدمات، راهنمایی‌ها و زحمات‌شان سپاس‌گزارم. از دوستان و همکلاسی‌های خوبم که مرا در رسیدن به اهدافم کمک کرده‌اند، تشکر کرده و برایشان آرزوی موفقیت و سربلندی می‌کنم.
در نهایت، از همه عزیزانی که تا بدین‌جا مرا یاری کرده‌اند، به‌ویژه خانواده مهربانم که همواره پشتیبان من بوده‌اند، سپاس‌گزارم. امیدوارم بتوانم از عهده ادای حق این عزیزان برآیم.
یقیناً این مجموعه بدون عیب و نقص نیست. لذا از خوانندگان عزیز تقاضا دارم عیب‌ها و کاستی‌های این رساله را از طریق پست الکترونیکی[1] به اطلاع اینجانب برسانند.

امینه صادق‌پور
شهریور ۱۳۹۹

[1] sadeghpour.amineh@yahoo.com

تعهد نامه

اینجانب **امینه صادق‌پور** دانشجوی دکتری رشته **آمار علوم ریاضی** دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان **برآورد پارامتر تنش-مقاومت براساس نمونه مجموعه‌ی رتبه دار رکوردی** ، تحت راهنمایی **دکتر احمد نزاکتی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام " دانشگاه صنعتی شاهرود " یا " Shahrood University of Technology " به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

امینه صادق‌پور
شهریور ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان‌نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در برخی از آزمایش‌ها به دنبال ارزیابی میزان مقاومت مؤلفه‌های مورد آزمایش در برابر فشار سایر متغیرها می‌باشیم. چنین حالتی را در مباحث قابلیت اعتماد، یک مدل تنش- مقاومت می‌گویند. با توجه به کاربردهای قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در صنعت، علوم مهندسی و پزشکی، در این رساله برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامتر تنش-مقاومت در توزیع نمایی تعمیم یافته براساس طرح نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی مورد مطالعه قرار گرفته است. همچنین میزان کارایی برآوردگرهای حاصل از طرح نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی با رکوردهای معمولی حاصل از روش نمونه‌گیری معکوس تحت الگوی نرخ خطر معکوس متناسب محاسبه و مقایسه شده‌اند.

کلمات کلیدی: پارامتر تنش-مقاومت، مدل نرخ خطر معکوس متناسب، نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی، داده‌های رکوردی، توزیع نمایی تعمیم یافته.

فهرست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

1. Sadeghpour, A., Salehi, M. and Nezakati, A. (2020). *Estimation of stress-strength reliability using record ranked set sampling scheme under the generalized exponential distribution*, Journal of Statistical Computation and Simulation, 90, 51–74.

2. Sadeghpour, A., Nezakati, A. and Salehi, M. (2020). *Comparison of two sampling schemes in estimating the stress-strength reliability under the proportional reversed hazard rate model*, Statistic,Optimization Information Computing. DOI: 10.19139/soic-2310-5070-781.

3. Sadeghpour, A., Nezakati, A. (1398). *Estimation of stress-strength reliability using record ranked set sampling scheme from the inverse Rayleigh distribution.*14th Iranian Statistics Conference, p 853, Shahrood, Iran.

۴. صادق‌پور، ا.، نزاکتی، ا.، صالحی، م. (۱۳۹۶)، "برآورد نقطه‌ای پارامتر تنش-مقاومت در توزیع نمایی دو پارامتری براساس نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی"، کنفرانس روش‌های مدرن در قیمت گذاری بیمه‌ای و آمارهای صنعتی، ص ۲۵، همدان.

۵. صادق‌پور، ا.، نزاکتی، ا.، صالحی، م. (۱۳۹۶)، "برآورد نقطه‌ای پارامتر تنش-مقاومت در توزیع نمایی تعمیم یافته براساس نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی"، یازدهمین سمینار احتمال و فرآیندهای تصادفی، ص ۳۵۹، قزوین.

پیشگفتار

قابلیت اعتماد تنش-مقاومت، احتمال سالم ماندن مؤلفه یا به عبارت دیگر احتمال عدم شکست می‌باشد و به‌صورت $\mathcal{R} = Pr(X < Y)$ تعریف می‌شود. در حقیقت اگر متغیر تصادفی X بیان‌گر تنش (فشار) وارد شده بر یک مؤلفه و متغیر تصادفی Y نشان‌دهنده‌ی مقاومت آن در برابر فشار X باشد، در این‌صورت اگر $X > Y$ باشد، آن‌گاه مؤلفه از کار افتاده و در نتیجه شکست رخ می‌دهد. برعکس اگر $X < Y$ باشد، آن مؤلفه به عملکرد خود ادامه می‌دهد.
در مبحث قابلیت اعتماد یکی از موضوعات مورد علاقه استنباط در مورد مدل تنش-مقاومت در حالتی است که متغیرهای تصادفی X و Y توزیع‌های مستقل از یکدیگر دارند. از آن‌جا که در بسیاری از آزمایش‌های دنباله‌ای فقط مقادیر رکوردها گزارش می‌شوند و معمولاً تعداد رکوردهای مشاهده شده در یک آزمایش دنباله‌ای کوچک است، محقق ناچار است برای استنباط در مورد توزیع جامعه‌ی آماری از تعداد محدودی آماره‌ی رکوردی استفاده کند.
با توجه به این‌که طرح نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی در بعضی موارد می‌تواند جایگزین مناسبی برای طرح رکوردهای معمولی باشد، در این رساله برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامتر تنش-مقاومت با استفاده از طرح نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی مورد مطالعه قرار گرفته‌است. در این رساله مشاهده خواهیم کرد چنانچه توزیع جامعه‌ی آماری از الگوی نرخ خطر معکوس متناسب پیروی کند، برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای به‌دست آمده از طرح نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی، با تعداد آزمایش‌های بسیار کم‌تر نسبت به طرح رکوردهای معمولی، کاراتر می‌باشند. این مجموعه شامل پنج فصل می‌باشد که خلاصه‌ای از آن در زیر آمده‌است.

- در فصل اول، به معرفی اجمالی برخی مفاهیم و تعاریف اولیه مورد استفاده در رساله می‌پردازیم. نظریه قابلیت اعتماد و یکی از مباحث مطرح در این نظریه، یعنی مدل تنش-مقاومت که در سرتاسر این رساله نقش کلیدی ایفا می‌کند معرفی می‌کنیم. همچنین به بیان کاربردهایی از قابلیت اعتماد تنش-مقاومت و تاریخچه‌ی آن می‌پردازیم. با توجه به‌این‌که طرح استفاده شده در این رساله نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی می‌باشد که تلفیقی از مجموعه‌ی رتبه‌دار و آماره‌های رکوردی است، در ادامه مطالبی در مورد رکوردها و ویژگی‌های آن و نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار و در نهایت طرح نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی بیان شده‌است. با توجه به این‌که در فصل‌های بعدی از برخی فواصل اطمینان

بوت‌استرپ برای برآورد پارامتر تنش-مقاومت استفاده کرده‌ایم، به معرفی این پارامتر، تعاریف و الگوریتم‌های مربوط پرداخته‌ایم. تعریفی از خانواده‌های نرخ خطر ارائه شده است و در پایان برخی روش‌های شبیه‌سازی استفاده شده در رساله معرفی شده‌است.

- در فصل دوم، با در نظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم‌یافته به عنوان توزیع پایه جوامع X و Y و با استفاده از طرح نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی، برآوردگر درستنمایی ماکسیمم و برآوردگر نااریب با کمترین واریانس پارامتر تنش-مقاومت را محاسبه نمودیم. فاصله اطمینان دقیق براساس کمیت محور و برخی فواصل اطمینان بوت‌استرپ را به‌دست آوردیم و به مقایسه فواصل فوق پرداختیم. سپس موارد مطرح شده در این فصل را در یک مثال واقعی بررسی کردیم.

- در فصل سوم با در نظر گرفتن مفروضات فصل دوم به استنباط‌های بیزی پارامتر تنش-مقاومت پرداخته‌ایم. برآوردگر بیزی پارامتر تنش-مقاومت را به دست آوردیم و برای توزیع‌های پیشین سره و ناسره، برآوردگرهای فاصله‌ای بیزی و چگال‌ترین پسین (HPD) را به‌دست آوردیم و با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی و مثال واقعی به بررسی موارد فوق پرداخته‌ایم.

- در فصل چهارم، با فرض مدل نرخ خطر معکوس متناسب به عنوان توزیع جوامع X و Y، پارامتر تنش-مقاومت را برآورد نمودیم. با توجه به نتایج به دست آمده، مشاهده شد، در مدل نرخ خطر معکوس متناسب، تمام محاسبات به توزیع پایه بستگی ندارد. لذا با در نظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم‌یافته به عنوان توزیعی از خانواده نرخ خطر معکوس متناسب، کارایی نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی مورد بررسی واقع شد و براوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای حاصل از دو طرح نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی و رکوردهای معمولی مقایسه شدند و در نهایت این فصل را با ذکر یک مثال واقعی به پایان رساندیم.

- در فصل پنجم نیز با درنظر گرفتن توزیع نمایی دو پارمتری برآوردگر درستنمایی ماکسیمم و برآوردگر نااریب با کمترین واریانس را برای پارامتر تنش-مقاومت در حالت‌های مختلف محاسبه کردیم.

به علت حجم زیاد برنامه‌های استفاده شده و جلوگیری از افزایش کاذب صفحات رساله، گزیده‌ای کوچک از کدهای برنامه‌نویسی R در ضمیمه (الف) آورده شده است.

فهرست مطالب

لیست تصاویر

لیست جداول

فهرست نمادها

متغیر تنش ..... $\mathbf{X}$
متغیر مقاومت ..... $\mathbf{Y}$
پارامتر تنش مقاومت ..... $\mathcal{R}$
تابع نشانگر مجموعه A ..... $I(A)$
ترانهاده ماتریس $\mathbf{A}$ ..... $\mathbf{A}^\top$
احتمال پیشامد A ..... $Pr(A)$
امید ریاضی ..... $E(.)$
واریانس ..... $\mathrm{Var}(.)$
اریبی ..... $\mathrm{Bias}(.)$
میانگین مربعات خطا ..... $\mathrm{MSE}(.)$
متغیر تصادفی iام ..... $\mathbf{X}_i$
نمونه‌ی تصادفی به اندازه m ..... $X = (X_1, \cdots, X_m)$
iامین رکورد بالا ..... $\mathbf{U}_i$
iامین رکورد پایین ..... $\mathbf{L}_i$
iامین واحد یک$RRSS$ بالا ..... $U_{i,i}$
iامین واحد یک $RRSS$ پایین ..... $L_{i,i}$
یک $RRSS$ بالا به اندازه m ..... $U^{RRSS}_{(m)} = (U_{1,1}, \cdots, U_{m,m})$
یک$RRSS$ پایین به اندازه m ..... $L^{RRSS}_{(m)} = (L_{1,1}, \cdots, L_{m,m})$
تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X ..... $f(x)$
تابع بقای متغیر تصادفی X ..... $\bar{F}(x)$
تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی $U_{i.i}$ ..... $f_{i,i}(.)$
تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی $U_{i.i}$ ..... $F_{i,i}(.)$
توزیع گاما با پارامتر $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ ..... $Gamma(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$
توزیع بتا با پارامتر $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ ..... $Beta(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$
توزیع فیشر با درجات آزادی $\boldsymbol{m}$ و $\boldsymbol{n}$ ..... $\mathcal{F}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$
همگرایی در توزیع ..... $\xrightarrow{d}$

فهرست کلمات اختصاری

CDF (Cumulative Distribution Function)

CP (Covering Probability)

EL (Expected Length)

HPD(Highest Posterior Density)

i.i.d (independent identically distribution)

MLE (Maximum likelihood Estimator)

MSE (Mean Square Error)

RSS (Ranked Set Sampling)

RRSS (Record Ranked Set Sampling)

RE (Relational Efficiency)

SEL(Square Error Loss Function)

PHR(Proportional Hazard Rate)

PRHR(Proportional Reversed Hazard Rate)

UMVUE (Uniformly Minimum Unbiased Estimator)

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

در این فصل به معرفی اجمالی برخی مفاهیم و تعاریف اولیه مورد استفاده در رساله می‌پردازیم. از آن‌جا که قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در این رساله مورد توجه قرار گرفته‌است، ابتدا نظریه قابلیت اعتماد و در ادامه پارامتر تنش- مقاومت و کاربردهای آن مطرح خواهد شد. طرحی که در این رساله استفاده شده‌است تلفیقی از نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار و آماره‌های رکوردی می‌باشد، بنابراین ابتدا تعریفی از مفاهیم فوق و در نهایت نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی ارائه خواهد شد. با توجه به این‌که برخی فواصل اطمینان بوت‌استرپی را برای برآورد پارامتر تنش- مقاومت استفاده کرده‌ایم، تعاریف و الگوریتم‌های مربوط به فواصل فوق را بیان خواهیم کرد. در نهایت تعریفی از الگوریتم‌های تکراری که در این رساله استفاده شده‌است را ارائه خواهیم کرد.

۱.۱ نظریه قابلیت اعتماد

یکی از کاربردهای آمار به منظور نمایش رفتار پدیده‌های تصادفی، در نظریه قابلیت اعتماد نهفته است. از آنجایی که این نظریه بیشتر در مواردی مانند مهندسی و تعیین طول عمر دستگاه‌ها به کار گرفته می‌شود گاهی به آن مهندسی قابلیت اعتماد نیز می‌گویند. فرض کنید یک سیستم یا یک قطعه الکتریکی دارای طول عمر T باشد، در حقیقت T یک متغیر تصادفی است که می‌تواند در فاصله $(۰,\infty)$ مقدار بگیرد. متغیر T می تواند پیوسته یا گسسته باشد. برای مثال اگر سیستم را لامپ فلورسنت در نظر بگیریم طول عمر آن یک متغیر تصادفی T است که هر مقدار را در

فاصله $(۰,\infty)$ می‌گیرد. حال اگر سیستم را یک دستگاه فتوکپی در نظر بگیریم طول عمر آن، تعداد کپی‌هایی است که قبل از خرابی گرفته می‌شود. تابع محوری در مبحث قابلیت اعتماد جهت تعیین خواص متغیر طول عمر T، تابع قابلیت اعتماد است. تابع قابلیت اعتماد یا تابع بقای T در لحظه $t > ۰$ را با $S(t)$ نمایش می‌دهند که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S(t) = Pr(T > t) = \int_t^{\infty} f(x)dx = ۱ - F(t)$$

که در آن f تابع چگالی و F تابع توزیع احتمال است. واضح است که $S(۰) = ۱$، یعنی در زمان $t = ۰$ قابلیت اعتماد سیستم یک است و $S(\infty) = ۰$ یعنی در دراز مدت سیستم از کار می‌افتد. همچنین $S(t)$ یک تابع غیرصعودی است، به این معنی که اگر $۰ < t_۱ < t_۲$ آنگاه $S(t_۱) \geq S(t_۲)$، یعنی در زمان $t_۱$ قابلیت اعتماد سیستم کمتر از زمان $t_۲$ نیست. لازم به ذکر است مفهوم طول عمر را برای افراد بخصوص بیماران نیز می توان بکار برد که این موضوع اهمیت مبحث قابلیت اعتماد در پزشکی و داروسازی را نشان می‌دهد.
تابع نرخ خطر، که در مباحث قابلیت اعتماد و طول عمر به تابع نرخ شکست نیز معروف است، نقش اساسی در اغلب تحلیل‌های بقا ایفا می‌کند. تابع نرخ خطر متغیر طول عمر T را با $h(t)$ نمایش می‌دهند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)}, \quad t > ۰.$$

باید توجه داشت تابع نرخ خطر، احتمال از کار افتادن سیستم نیست، در حقیقت این کمیت نرخ از کارافتادگی سیستم را در زمان t نشان می‌دهد و معیاری برای اندازه‌گیری سالخوردگی است.

۲.۱ پارامتر تنش-مقاومت

اگر متغیر تصادفی X بیان‌گر فشار (تنش) وارد شده بر یک مؤلفه و متغیر تصادفی Y نشان دهنده‌ی مقاومت آن در برابر فشار X باشد، در این‌صورت اگر $X > Y$، آن‌گاه مؤلفه از کار افتاده و در نتیجه شکست رخ می‌دهد. برعکس، اگر $X < Y$، آن مؤلفه به عملکرد خود ادامه می‌دهد. در نتیجه، قابلیت اعتماد تنش-مقاومت همان احتمال سالم ماندن مؤلفه یا به عبارت دیگر احتمال عدم شکست است و به صورت $\mathcal{R} = Pr(X < Y)$ تعریف می‌شود.
به لحاظ تاریخی مدل تنش-مقاومت بیشتر ریشه در وضعیت ناپارامتری دارد. نقطه‌ی شروع آن را می‌توان در کارهای ویلکاکسون[۱] (۱۹۴۵) و من و ویتنی [۲] (۱۹۴۷) ملاحظه کرد. هدف اصلی تحقیق آن‌ها مقایسه متغیرهای تصادفی X و Y و شرح نتایج مربوط به رفتار آن‌ها بود. پس از آن تا سال ۱۹۸۰ مطالعات بسیاری در این زمینه انجام شد که فعالیت های انجام شده در این دهه‌ها

[۱] Wilcoxon

[۲] Whitney

بیشتر تحت پذیره استقلال متغیرهای تصادفی تنش-مقاومت بوده‌است. از بین آن‌ها می‌توان به باوم[۳](۱۹۵۶)، بیرن باوم و مک کارتی[۴] (۱۹۵۸)، اون[۵] (۱۹۶۴) و تانگ[۶] (۱۹۷۴)اشاره کرد. باتاچاریا و جانسون [۷](۱۹۷۴) نیز مطالعاتی در خصوص سیستم‌های قابلیت اعتماد انجام داده‌اند. پس از آن، تعاریف مختلفی از توزیع نمایی دو متغیره ارائه گردید و مطالعاتی روی متغیرهای تصادفی نمایی وابسته با انواع مختلف وابستگی مطرح شدند. از جمله می‌توان به کارهای اواد و همکاران [۸] (۱۹۸۱) و کلین و باسو [۹] (۱۹۸۵) اشاره کرد. به طور کلی تا کنون پژوهش‌های بسیاری در خصوص برآورد پارامتر $\mathcal{R}$ تحت پذیره‌های توزیعی مختلف روی X و Y برای انواع گوناگونی از داده‌ها از جمله داده‌های کامل و داده‌های سانسور شده، مورد مطالعه قرار گرفته‌اند که کتاب کاتز [۱۰]و همکاران (۲۰۰۳) مرجع مفیدی در این زمینه است. اریلماز [۱۱] (۲۰۰۸) قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را در سیستمی شامل n مؤلفه‌ی مستقل که هر مؤلفه شامل m زیر مؤلفه بود را به‌دست آورد. وی همچنین در سال ۲۰۱۰ به مطالعه‌ی قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در سیستم‌های منسجم پرداخت. از جمله پژوهش‌های اخیر در ارتباط با پارامتر تنش-مقاومت می‌توان به ساراکوگلو [۱۲] و کایا [۱۳] (۲۰۰۷)، رضائی و همکاران (۲۰۱۰)، بکلیزی [۱۴] (۲۰۱۴)، ندار و کیزیل آسلان [۱۵] (۲۰۱۴)، اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۳)، بصیرت و همکاران (۲۰۱۶) اشاره کرد. پاکدامن و احمدی (۲۰۱۸) برای افزایش قابلیت اعتماد تنش-مقاومت به طراحی سیستم مقاومتی پرداخته‌اند. تحقیقاتی نیز در این راستا انجام شده‌است که می‌توان رساله دکتری بصیرت (۱۳۹۳) و صالحی (۱۳۹۴) را نام برد.

---

[۳] Birnbaom

[۴] McCarty

[۵] Own

[۶] Tong

[۷] Batacharya and Johnson

[۸] Awad

[۹] Klein and Basu

[۱۰] Kotz

[۱۱] Eryilmaz

[۱۲] Saracoglu

[۱۳] Kaya

[۱۴] Baklizi

[۱۵] Nadar and Kizilaslan

۱.۲.۱ کاربردهای قابلیت اعتماد تنش-مقاومت

کاربردهای عمده قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در صنعت، علوم مهندسی و پزشکی است. مثال‌هایی از کاربردهای تنش-مقاومت در جانسون [۱۶] (۱۹۸۸) ارائه شده‌اند که به برخی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.

- فرض کنید X متغیر تصادفی بیشترین فشار وارده بر پیستون موتور یک موشک و Y متغیر تصادفی مقاومت آن پیستون در برابر فشار وارد شده باشد، در این صورت $\mathcal{R}$ احتمال روشن شدن موفقیت آمیز موتور است.

- فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی طول عمر قطعه‌های الکترونیکی به ترتیب A و B باشند، در این صورت $\mathcal{R}$ احتمال این است که A زودتر از B خراب شود.

- فرض کنید X و Y نشان‌دهنده‌ی تعداد دفعات بهبود بیماران سرطانی باشد که از دو روش شیمی درمانی متفاوت استفاده می کنند. در این صورت $\mathcal{R}$ مقایسه‌ای بین دو روش فوق برای یافتن روش مؤثر درمان است.

- اگر X و Y نشان‌دهنده‌ی استحکام دو ماده در یک طراحی مهندسی باشند، $\mathcal{R}$ می‌تواند بیانگر این باشد که استحکام X کمتر از استحکام Y است.

- یکی از مشخصات ساختمان ایده‌آل، داشتن مقاومت کافی در برابر زلزله است. اگر فرض کنید متغیر تصادفی Y نشان‌دهنده مقاومت یک ساختمان در هنگام زمین لرزه و متغیر تصادفی X فشار ناشی از زمین لرزه باشد، آن‌گاه $\mathcal{R}$ می‌تواند احتمال طراحی یک ساختمان ایمن باشد.

- در طراحی پل‌ها نیز اگر متغیر تصادفی Y نشان‌دهنده‌ی مقاومت پایه‌های پل و متغیر تصادفی X نشان‌دهنده‌ی فشار ناشی از وزن پل باشد که بر پایه‌ها وارد می‌شود، آن‌گاه $\mathcal{R}$ احتمال طراحی موفقیت آمیز پل می‌باشد.

۳.۱ آماره‌های مرتب و کاربرد آن‌ها

فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$، n متغیر تصادفی باشند. اگر آن‌ها را به ترتیب صعودی مرتب کنیم و مقادیر مرتب شده را به صورت $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(n)}$ نشان دهیم، در این صورت $X_{(j)}$، $j = 1, \cdots, n$، را jامین آماره مرتب در نمونه‌ای به حجم n گویند. کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آماره مرتب، یعنی $X_{(1)}$ و $X_{(n)}$ به مقادیر فرین معروفند و در مطالعات آماری بیشتر مورد توجه هستند.

[۱۶] Johnson

آماره‌های مرتب در قسمت‌های مختلف توصیفی و استنباطی علم آمار، دارای کاربرد می‌باشند که می‌توان چند مورد را به‌شرح ذیل ذکر کرد.

- در محاسبه تابع توزیع تجربی نیازمند استفاده از آماره‌های مرتب هستیم و از آن‌جا که در آزمون‌های نیکویی برازش، اغلب تمرکز روی تغییرات بین تابع توزیع تجربی و تابع توزیع فرضی است، آماره‌های مرتب در این آزمون‌ها نقش اساسی دارند.
- در موضوعات کنترل کیفیت برای بررسی در کنترل بودن تولید، اغلب از نمودار میانگین و دامنه تغییرات یا از نمودار میانه و دامنه تغییرات استفاده می‌شود که برای محاسبه میانه و دامنه تغییرات ناچار به استفاده از آماره‌های مرتب می‌باشیم.
- آماره‌های مرتب، در بسیاری از موارد به عنوان آماره‌های بسنده معرفی می‌شوند و برآوردگرهای نااریب با کمترین واریانس، فواصل اطمینان و پرتوان‌ترین آزمون برای پارامترهای مجهول را فراهم می‌کنند.
- در آزمایشات طول عمر، اغلب به دلیل عواملی از قبیل زمان یا اعتبار مالی، امکان شرکت دادن تمام واحدها در آزمایش وجود ندارد. بنابراین مشاهده طول عمر تمام واحدها امکان‌پذیر نیست، به همین دلیل از روش‌های سانسور استفاده می‌شوند و آماره‌های مرتب نقش مهمی در سانسورها دارند.

برای جزئیات بیشتر در مورد خواص آماره‌های مرتب و کاربرد آن‌ها، می‌توان به کتاب‌های دیوید و ناگاراجا[۱۷] (۲۰۰۳) و آرنولد[۱۸] و همکاران (۲۰۰۸) مراجعه کرد.

۴.۱ رکوردها و ویژگی‌های آن

وقتی کلمه رکورد را می‌شنویم به یاد مسابقات رشته‌های ورزشی می‌افتیم و تصور عموم براین است که این واژه مختص رشته‌های ورزشی می‌باشد. اما حقیقت این است که هرگاه با مشاهدات متوالی سروکار داریم، مشاهداتی که از مقادیر قبلی خود کمتر یا بیشتر می‌باشند مورد توجه قرار می‌گیرند و در نتیجه موضوع رکورد می‌تواند مطرح شود. این مشاهدات دنباله‌ای می توانند مثلاً متوسط دما در ماه‌های متوالی و متوسط میزان بارش در ماه‌های متوالی، تعداد تصادفات در هفته‌های متوالی، بازدیدکنندگان از مراکز در هفته‌های متوالی باشند. کاربرد اصلی رکوردها بیشتر به این خاطر است که در بسیاری از موارد داده‌های اولیه در دسترس نیستند و فقط مقادیر رکوردی ثبت می‌شوند. لذا محقق ناچار است برای استنباط در مورد توزیع مشاهدات از مقادیر رکوردی

[۱۷] David and Nagaraja

[۱۸] Arnold

استفاده کند. مانند داده‌های هواشناسی، ژئوفیزیک، زلزله‌نگاری و سیلاب‌ها. کشور ما نیز عاری از این حوادث نیست. از جمله در سال‌های اخیر شاهد سیل‌های فراوانی در مناطق مختلف کشور، زلزله سال ۱۳۹۷ سرپل ذهاب و زلزله سال ۱۳۸۲ در بم بوده ایم که جان هزاران انسان به خطر افتاد و خسارت مالی زیادی در پی داشت. لذا بررسی، مطالعه و استفاده از رکوردها و پیش‌بینی و کنترل آن‌ها از طریق روش‌های آماری حائز اهمیت می‌باشد.
مطالعات آماری در خصوص داده‌های رکوردی ابتدا توسط چاندلر[۱۹] (۱۹۵۲) انجام شد. گلیک [۲۰] (۱۹۷۸) به طور جامع رکوردها را مورد بررسی قرار داد. محققین بسیاری به موضوع برآورد پارامتری و ناپارامتری به کمک مشاهدات رکوردی پرداخته‌اند، از جمله احسن اله و بوج [۲۱] (۱۹۹۶) و کارلین و گلفند [۲۲] (۱۹۹۳). تعدادی از پژوهشگران مانند کوچار [۲۳] (۱۹۹۰،۱۹۹۶) و گوپتا و کرمانی [۲۴] (۱۹۸۸) نیز به مطالعه خواص یکتائی مقادیر رکوردی پرداخته‌اند. از دیگر پژوهش‌های استنباطی بر مبنای رکوردها می‌توان به احمدی و ارقامی (۲۰۰۱) و رزمخواه و همکاران (۱۳۸۶ ش) اشاره کرد. کتاب رکوردها اثر آرنولد و همکاران[۲۵] (۱۹۹۸) و کتاب استنباط پارامتری و ناپارامتری براساس داده‌های شکست رکورد از گولاتی و پاجت [۲۶] (۲۰۰۳) در حال حاضر به‌عنوان دو منبع اصلی در زمینه نظریه‌ی رکوردها هستند. احمدی و همکاران (۲۰۰۹) K-رکوردها را در رده کلی از توابع تحت تابع نرخ خطر متناسب درنظر گرفتند و در سال (۲۰۱۰) معیار نزدیکی پیتمن را براساس رکوردها در خانواده توزیع‌های مکان-مقیاس بررسی کردند.

مثال کاربردی

موارد متعددی وجود دارند که آزمایش‌ها به صورت دنباله‌ای انجام می‌شوند و تنها آماره‌های رکوردی ثبت می‌شوند و از تمامی داده‌ها اطلاعی نداریم. بنابراین محقق ناچار است در استنباط‌های خود از تنها اطلاعات موجود، یعنی مشاهدات رکوردی استفاده کند. به دو مثال کاربردی زیر که در آن‌ها آماره‌های رکوردی تنها مشاهدات ثبت شده هستند توجه کنید (برگرفته از صالحی، ۱۳۹۴).

مثال ۱.۴.۱. روند اندازه‌گیری ضخامت یک کالای تولید شده (X) با استفاده از یک میکرومتر

[۱۹] Chandler
[۲۰] Glick
[۲۱] Ahsanullah and Bhoj
[۲۲] Carlin and Gelfand
[۲۳] Kochar
[۲۴] Gupta and Kirmani
[۲۵] Arnold
[۲۶] Gulati and Padget

را در نظر بگیرید. برای اندازه‌گیری نازک‌ترین کالا در میان اولین n کالای تولید شده، یک کالا را به طور تصادفی انتخاب کرده و ضخامت آن را با استفاده از میکرومتر اندازه‌گیری می‌کنند. ضخامت آن برابر است با $L_۱ = X_۱$. ضخامت این کالا $(L_۱)$ یا به عبارت دیگر، فاصله‌ی ایجاد شده بین دو دهنه‌ی میکرومتر را به عنوان شاخص برای اندازه‌ی ضخامت کالاهای بعدی در نظر می‌گیرند. اندازه‌گیری دقیق بعدی زمانی صورت می‌گیرد که ضخامت کالایی از شاخص مذکور کم‌تر باشد (قطر کالا بین دو دهنه‌ی میکرومتر قرار گیرد). به عنوان مثال فرض کنید اندازه‌گیری دقیق دوم برای دهمین کالا صورت پذیرد، یعنی داریم $L_۲ = X_{۱۰}$. از این به بعد، شاخص اندازه‌گیری دقیق بعدی $L_۲$ خواهد بود. اگر این روند را تا کالای nام انجام دهیم، تعداد اندازه‌گیری دقیق با احتمال بسیار زیاد کم‌تر از n خواهد بود. به طور مثال فرض کنید $L_۷ = X_{n-۵}$ آخرین اندازه‌گیری دقیق انجام شده باشد. بنابراین، تنها اطلاعات در دسترس از ضخامت کالاها، یافته‌های L_i، $i = ۱, \cdots, ۷$، است که همان رکوردهای پایین از جامعه‌ی X می‌باشند. حال اگر هدف اندازه‌گیری نازک‌ترین کالا با روش فوق باشد، فقط تعداد محدودی از رکوردهای پایین را در اختیار خواهیم داشت.

مثال ۱.۴.۱. آزمون شکستن الوارهای چوبی را در نظر بگیرید و فرض کنید Y متغیر تصادفی میزان مقاومت الوارها باشد. آزمایش یاد شده بدین ترتیب است که اولین الوار آنقدر تحت فشار قرار می‌گیرد تا بشکند. فرض کنید $L_۱$ میزان مقاومت اولین الوار تا زمان شکستن آن باشد، در این صورت داریم $L_۱ = Y_۱$. بعد از آن بقیه الوارها یکی پس از دیگری در معرض فشار قرار می‌گیرند، تا زمانی که بشکنند. یا تحت فشاری به میزان $L_۱$ قرار بگیرند. چنانچه الواری در برابر فشار وارده‌ی $L_۱$ نشکند، از آزمایش خارج شده و به عنوان یک نمونه ی سالم یا دست دوم مورد استفاده قرار می‌گیرد، اما اگر قبل از این‌که تحت فشار معادل $L_۱$ قرار بگیرد بشکند، یعنی یک رکورد پایین رخ داده‌است و به طور مثال داریم $L_۲ = Y_{۱۰}$. این عمل تا زمانی انجام می‌پذیرد که $(L_۱, \ldots, L_m)$ ثبت شوند. در واقع در این آزمایش، مقاومت الوارها که همان m رکورد پایین از جامعه‌ی Y می‌باشند، تنها اطلاعاتی از جامعه‌ی آماری هستند که جمع آوری می‌شوند.

تعریف ۱.۴.۱ (رکوردهای بالا و پایین). فرض کنید $\{X_i,\ i \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل، هم توزیع (iid) و پیوسته با تابع توزیع تجمعی $F(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشد. X_i را یک رکورد بالا گویند، اگر

$$X_i > \max\{X_۱, X_۲, \ldots, X_{i-۱}\}, \qquad i = ۲, ۳, \ldots$$

طبق قرارداد $X_۱$ را اولین رکورد بالا تعریف می‌کنند. زمانی‌که در آن رکورد بالا رخ می‌دهد، خود یک متغیر تصادفی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_۱ = ۱, \ \ T_n = \min\{i : X_i > X_{T_{n-۱}}\}$$

در این صورت دنباله رکوردهای مستخرج از X_i عبارتست از

$$X_{T_۱}, X_{T_۲}, \ldots$$

اگر nامین رکورد بالا را با U_n نشان دهیم، آن‌گاه

$$U_n = X_{T_n}, \quad n = ۱, ۲, \ldots$$

به طور مشابه X_i را یک رکورد پایین گویند، اگر

$$X_i < \min\{X_۱, X_۲, \ldots, X_{i-۱}\}, \qquad i = ۲, ۳, \ldots$$

طبق قرارداد $X_۱$ را اولین رکورد پایین تعریف می‌کنند. اگر nامین رکورد پایین را با L_n نشان دهیم، آن‌گاه

$$L_n = X_{S_n}, \quad n = ۱, ۲, \ldots$$

که در آن

$$S_۱ = ۱, \quad , S_n = \min\{i : X_i < X_{s_{n-۱}}\}$$

توزیع احتمالی رکوردها

بسیاری از خواص رکوردهای بالا را می‌توان برحسب تابع نرخ از کارافتادگی تجمعی $R(u) = -ln\bar{F}(u)$، بیان کرد که در آن $\bar{F}(u) = ۱ - F(u)$، و در صورت نامنفی بودن متغیر تصادفی، $\bar{F}(u)$ همان تابع بقا در نظریه اعتماد است. تابع چگالی احتمال کناری U_iها عبارت است از

$$f_{U_i}(u) = \frac{R^{i-۱}(u)}{(i-۱)!} f(u), \qquad -\infty < u < \infty, \quad i = ۱, \ldots, n,$$

و تابع چگالی احتمال توأم $U_n, \ldots, U_۱$ به صورت زیر می‌باشد

$$f_{U_۱,\ldots,U_n}(u_۱, \ldots, u_n) = f(u_n) \prod_{i=۱}^{n-۱} r(u_i), \qquad -\infty < u_۱ < \ldots < u_n < \infty,$$

که در آن

$$r(u) = \frac{d}{du} R(u) = \frac{f(u)}{\bar{F}(u)}$$

تابع نرخ خطر است.
اگر در روابط فوق F را به‌جای $\bar{F}$ قرار دهیم، به ترتیب تابع چگالی احتمال کناری و تابع چگالی احتمال توأم رکوردهای پایین به‌دست می‌آیند.

۵.۱ نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار

در مبحث نمونه‌گیری، پژوهش‌گر همواره با مسأله‌ی انتخاب روش مناسب برای جمع‌آوری داده‌ها مواجه است، به‌طوری‌که به دنبال روش‌هایی می‌باشد که دقت را برای برآورد ویژگی‌های یک جامعه‌ی آماری افزایش داده و هزینه را کاهش دهد. در شرایطی که اندازه‌گیری دقیق واحدهای جامعه‌ی آماری سخت، پرهزینه یا زمان‌بر باشد، اما بتوان واحدهای جامعه‌ی آماری را به سادگی و با کمترین هزینه به صورت چشمی یا قضاوتی مرتب کرد، از نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه دار

(RSS) استفاده می‌شود. در این روش نمونه‌گیری، تعداد زیادی نمونه به زیرنمونه‌هایی کوچک‌تر با اندازه های مساوی تقسیم می‌شوند، پس از آن هر زیرمجموعه به طور مجزا مرتب می‌شود و از هر زیر نمونه یک واحد انتخاب می‌شود. به طور مثال فرض کنید مایل به تخمین میانگین طول عمر درختان یک جنگل هستیم. می‌توان درختان را براساس ارتفاع آن‌ها (که به طول عمر آن‌ها وابستگی دارد) به صورت چشمی مرتب کرد. برای دیدن مثال‌های بیشتر به چن [۲۷] و همکاران (۲۰۰۳) مراجعه کنید. در اغلب موارد، روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار بر نمونه‌گیری تصادفی برتری دارد و برآوردگرهایی که از این روش به‌دست می‌آیند، عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای حاصل از روش نمونه‌گیری تصادفی دارند.

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_m$ یک نمونه تصادفی از توزیعی با تابع توزیع احتمال $F(.)$ و تابع چگالی احتمال $f(.)$ باشد. این نمونه را به صورت چشمی یا قضاوتی مرتب کرده، سپس کوچک‌ترین آن‌ها را انتخاب می‌کنیم و با $X_{1,1}$ نشان می‌دهیم و بقیه را کنار می‌گذاریم. نمونه تصادفی دیگری به اندازه m گرفته و پس از مرتب کردن آن به صورت چشمی یا قضاوتی، دومین کوچک‌ترین واحد آن‌را انتخاب می‌کنیم و با $X_{2,2}$ نشان می‌دهیم و سپس بقیه را کنار می‌گذاریم. این کار را m بار انجام می‌دهیم و $X_{m:m}$ را از نمونه mام انتخاب می‌کنیم و با $X_{m,m}$ نشان می‌دهیم. در نهایت به $X_{(m)}^{RSS} = (X_{1,1}, X_{2,2}, \ldots, X_{m,m})$ یک نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه دار[۲۸] (RSS) به اندازه‌ی m گفته می‌شود. به عبارت دیگر، چنانچه $X_{(i:m)k}$ نشان‌دهنده iامین آماره‌ی ترتیبی از نمونه تصادفی kام باشد، آن‌گاه روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه دار در شکل زیر خلاصه می‌شود

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{نمونه اول} : & X_{(1:m)1} & X_{(2:m)1} & \cdots & X_{(m:m)1} & \rightarrow X_{1,1} & = X_{(1:m)1} \\
\text{نمونه دوم} : & X_{(1:m)2} & X_{(2:m)2} & \cdots & X_{(m:m)2} & \rightarrow X_{2,2} & = X_{(2:m)2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\text{نمونه } m\text{ام} & X_{(1:m)m} & X_{(2:m)m} & \cdots & X_{(m:m)m} & \rightarrow X_{m,m} & = X_{(m:m)m}
\end{array}
\qquad (۱.۱)
$$

در واقع ۱.۱ روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار تک چرخه‌ای را نشان می‌دهد. از تعریف نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار مشخص می‌شود که واحدهای آن مستقل هستند، اما دلیلی ندارد که مرتب باشند. اگر شکل فوق را r بار تکرار کنیم، یک نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار r–حلقه‌ای به اندازه‌ی نمونه‌ی rm حاصل خواهد شد. به دلیل این که مرتب کردن واحدهای نمونه به صورت چشمی یا قضاوتی صورت می‌گیرد، ممکن است به ازای اندازه‌های نمونه‌ی بزرگ، خطای رتبه‌بندی افزایش یابد. بنابراین در عمل m را کم تر از ۱۰ در نظر می‌گیرند و با افزایش تعداد حلقه‌ها به اندازه‌ی نمونه دلخواه می‌رسند.

نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار برای نخستین بار توسط مک‌اینتایر [۲۹] (۱۹۵۲) پیشنهاد شد. او

---

[۲۷] Chen

[۲۸] Ranked Set Sampling

[۲۹] McIntyre

نشان داد که میانگین نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار $(\bar{X}_{RSS})$، برآوردگری کاراتر از میانگین نمونه‌ی تصادفی $(\bar{X}_{SRS})$ برای میانگین جامعه‌ی آماری است. پس از آن، نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار تا مدتی به فراموشی سپرده شد، تا این‌که هالز و دل [۳۰] (۱۹۶۶) برای برآورد وزن شاخ و برگ درخت کاج از روش نمونه‌گیری معرفی شده توسط مک اینتایر استفاده کردند و این روش را برای اولین بار نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه دار نامیدند و به طور تجربی و براساس یک تحقیق میدانی به برتری این روش نسبت به روش نمونه‌گیری تصادفی پی بردند. اولین پژوهش نظری در رابطه با نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه دار توسط تاکاهاشی و واکیموتو [۳۱] (۱۹۶۸) صورت گرفت. آن‌ها دوباره روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار را زنده کردند و نشان دادند که اگر رتبه‌بندی در نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار بدون خطا صورت گیرد- که در اصطلاح به آن رتبه‌بندی کامل گفته می‌شود- آن‌گاه واریانس برآوردگر $\bar{X}_{RSS}$ از واریانس برآوردگر $\bar{X}_{SRS}$ به طور اکید کم‌تر است.تاکاهاشی و واکیموتو نیز همانند مک‌اینتایر اسم خاصی برای روش نمونه‌گیری قرار ندادند و این روش را برآورد نااریب میانگین جامعه‌ی آماری براساس نمونه‌ی طبقه‌بندی شده توسط مرتب کردن نامیدند. آن‌ها نشان دادند در بعضی توزیع‌های تک‌مدی مثل توزیع نرمال، واریانس $\bar{X}_{RSS}$ به‌دست آمده از یک نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار به حجم n با واریانس $\bar{X}_{SRS}$ حاصل از یک نمونه‌ی تصادفی به حجم $2n$ برابر است. تاکاهاشی در سال ۱۹۷۰، در کنار نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار ارائه شده توسط مک‌اینتایر، یک روش جدید برای تولید نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه دار ارائه کرد. چندی بعد، دل و کلاتر[۳۲] (۱۹۷۲) بدون در نظر گرفتن شرط رتبه‌بندی کامل، به نتایج مشابه تاکاهاشی و واکیموتو (۱۹۶۸) رسیدند. استوکس [۳۳] (۱۹۸۰) نشان داد که برآوردگر به‌دست آمده براساس نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار برای واریانس جامعه‌ی آماری کاراتر از برآوردگر متناظر آن براساس نمونه‌ی تصادفی (S^2) است. تا قبل از ۱۹۸۰، اکثر پژوهش‌های انجام شده در رابطه با نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار در حالت ناپارامتری انجام می‌شدند. بوهن [۳۴](۱۹۹۶) کارهای ناپارامتری انجام شده درباره‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار را مرور کرد. چند سال بعد از ۱۹۸۰، حالت پارامتری نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار مورد توجه قرار گرفت. از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به استوکس (۱۹۹۵) اشاره کرد که برآوردگر درستنمایی ماکسیمم و بهترین برآوردگر خطی نااریب (BLU) را براساس نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار برای خانواده مکان- مقیاس به‌دست آورد. پاتیل و همکاران [۳۵] (۱۹۹۹) تاریخچه‌ای از کارهای انجام‌شده در رابطه با نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار فراهم کردند. چن در سال ۲۰۰۰ نتایج استوکس در رابطه با اطلاع فیشر را به حالت ناپارامتری تعمیم داد. وی به همراه همکارانش در سال ۲۰۰۳ کتابی در رابطه با نمونه‌گیری مجموعه‌ی

---

[۳۰] Halls and Dell

[۳۱] Takahashi and Wakimoto

[۳۲] Clutter

[۳۳] Stoks

[۳۴] Bohn

[۳۵] Patil

رتبه‌دار به چاپ رساند. ژنگ و الصالح [۳۶] در سال ۲۰۰۴ به بررسی برآوردگر درستنمایی ماکسیمم اصلاح شده پرداختند. بهترین برآوردگر خطی نااریب براساس نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار توسط افراد زیادی از جمله بارنت و مور [۳۷] (۱۹۹۷) و بارتو [۳۸] (۱۹۹۹) مورد توجه قرار گرفت. سینها (۲۰۰۵) یک جمع‌آوری از تحقیقات انجام‌شده‌ی پارامتری و ناپارامتری در خصوص نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار تا آن زمان را ارئه کرد. بالاکریشنان و لی [۳۹] (۲۰۰۶) با مرتب کردن واحدهای نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار، آن‌را $ORSS$ نامیدند و پس از به‌دست آوردن ویژگی‌های توزیعی $ORSS$ یک فاصله‌ی اطمینان برای چندک‌های جامعه‌ی آماری براساس آن به‌دست آوردند. آن‌ها همچنین در سال ۲۰۰۸، مقادیر عددی گشتاورهای $ORSS$ را برای چند توزیع آماری به‌دست آوردند و با استفاده از آن‌ها برآوردگر BLU را براساس $ORSS$ محاسبه کردند. جعفری جوزانی و جانسون [۴۰] (۲۰۱۱) برآوردیابی را براساس RSS در جوامع متناهی در نظر گرفتند (صالحی، ۱۳۹۰ ش، را ببینید).

در این فصل با بررسی معایب و مشکلاتی که در روش جمع‌آوری داده‌های رکوردی و نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه دار وجود دارند به معرفی روش جدیدی تحت عنوان نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی[۴۱] $(RRSS)$ که تلفیقی از رکوردها و مجموعه‌ی رتبه‌دار است می‌پردازیم که نخستین بار توسط صالحی (۱۳۹۴ش) در رساله دکتری مطرح شده است. در این رساله با در نظر گرفتن روش جدید مطرح شده سعی براین داریم با ایده گرفتن از طرح مطرح شده حالت‌های خاص دیگر را مورد بررسی قرار دهیم و با استفاده از روش نمونه گیری مجموعه‌ی رتبه دار رکوردی، خواص توزیع‌های مهم آماری را مورد ارزیابی قرار دهیم. در بخش ۶.۱ به معرفی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی می‌پردازیم و ویژگی‌های توزیعی روش فوق را بررسی می‌کنیم.

۶.۱ معرفی نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی

همان‌طور که در مثال‌های ۱.۴.۱ و ۲.۴.۱ ملاحظه شد، دو روش برای جمع‌آوری داده‌های رکوردی می‌توان در نظر گرفت. مواردی را همچون مثال ۱.۴.۱ در نظر بگیرید که در آن‌ها تعداد آزمایش‌ها ثابت است و تنها رکوردهای حاصل از آن ثبت می‌شوند. در نظریه رکوردها به این روش نمونه‌گیری، تصادفی یا نمونه‌ثابت می‌گویند که تعداد رکوردهای به‌دست آمده تصادفی است. در این روش که از لحاظ اقتصادی روشی مقرون به صرفه است، تنها رکورهای به‌دست آمده تصادفی است و به طور متوسط تقریبا $\log(n)$ داده‌ی رکوردی از میان n متغیر تصادفی مستقل و هم توزیع

[۳۶] Zheng and Al-saleh

[۳۷] Bartnett and Moore

[۳۸] Barreto

[۳۹] Li

[۴۰] Johnson

[۴۱] Record Ranked Set Sampling

ثبت می‌شود.
در مثال ۲.۴.۱ مشاهده کردیم که به محض مشاهده شدن mامین رکورد، آزمایش متوقف شد که در مباحث مطالعات آماره‌های رکوردی به آن نمونه‌گیری معکوس گفته می‌شود. در این روش تعداد رکوردها ثابت است در حالی که تعداد آزمایش‌ها تصادفی می‌باشد.
برای این‌که به میزان دقت از پیش تعیین شده در تحلیل صفت‌های جامعه‌ی آماری مربوطه براساس آماره‌های رکوردی برسیم، لازم است تعداد زیادی آزمایش انجام گیرد تا به تعداد مورد نظر آماره‌های رکوردی برسیم (نمونه‌گیری معکوس رکوردها). برعکس در روش نمونه‌گیری تصادفی رکوردها، اگر تعداد آزمایش‌ها محدود باشد، به طور معمول تعداد کمی رکورد ثبت می‌شود و این امر باعث می‌شود که برآوردگرهای حاصل اغلب ناسازگار باشند (گولاتی و پاجت، ۱۹۹۴، و برگر و گولاتی، ۲۰۰۱ را ببینید.). سامانیگو و وایتاکر[۴۲] (۱۹۸۶) به این نتیجه رسیدند که اگر تعدادی رکورد تنها از یک دنباله از متغیرهای تصادفی در اختیار باشد، فقط در چارچوب آمار پارامتری می‌توان به برآوردگری کارا برای توابع توزیع احتمال جامعه براساس آن‌ها رسید. بدین منظور، آن ها در سال ۱۹۸۸ روشی در متون رکوردها پیشنهاد دادند که براساس آن، برآوردگر تابع توزیع احتمال جامعه‌ی آماری حتی براساس روش نمونه‌گیری تصادفی (نمونه ثابت) رکوردها نیز سازگار است. در واقع، آن‌ها روش نمونه‌گیری تصادفی و معکوس داده‌های رکوردی را که قبلاً به صورت یک نمونه‌ای انجام می‌شد به صورت چند نمونه‌ای تعمیم دادند. به طور دقیق‌تر، m دنباله‌ی تصادفی مستقل را در نظر بگیرید و فرض کنید نمونه‌گیری از دنباله‌ی iام زمانی به اتمام می‌رسد که k_iامین رکورد مشاهده شود. بنابراین در مجموع $n = \sum_{i=1}^{m} k_i$ رکورد در اختیار داریم. شکل ۲.۱ چگونگی جمع‌آوری آماره‌های رکوردی را در این روش نمایش می‌دهد

$$\begin{array}{lllllll} ۱: & X_{(1)1}, & X_{(2)1}, & \dots & \to & U_{(1)1} \quad \dots \quad \dots & U_{(k_1)1} \\ ۲: & X_{(1)2}, & X_{(2)2}, & \dots & \to & U_{(1)2} \quad \dots & U_{(k_2)2} \\ & \vdots & & & & & \\ m: & X_{(1)m}, & X_{(2)m}, & \dots & \to & U_{(1)m} \quad \dots \quad \dots & U_{(k_m)m} \end{array} \qquad (۲.۱)$$

به طوری که $X_{(i)j}$ بیان‌گر iامین مشاهده از jامین دنباله و $U_{(i)j}$ بیان‌گر iامین رکورد معمولی بالا از آن دنباله می‌باشد. در ادامه محققانی روش چندنمونه ای سامانیگو و وایتاکر (۱۹۸۸) را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. به عنوان مثال، گولاتی و پاجت (۱۹۹۴) برآوردگری ناپارامتری برای چندک‌های جامعه‌ی آماری براساس روش چند نمونه‌ای بالا به‌دست آوردند. احمدی و ارقامی (۲۰۰۱) حالت دونمونه‌ای $m = ۲$ را درنظر گرفتند در حالی که رزمخواه و همکاران (۱۳۸۶ش) حالت $k_i = k$ را مورد بررسی قرار دادند و آن‌را با روش یک نمونه‌ای با محاسبه‌کردن میزان اطلاع فیشر آن‌ها تحت توزیع‌های آماری مختلف مقایسه کردند. آن‌ها نتیجه گرفتند که میزان اطلاع فیشر نهفته در آماره‌های رکوردی حاصل از هر دو طرح بستگی به توزیع جامعه‌ی آماری دارد. بدیهی است که به دلیل مستقل بودن دنباله‌های متغیرهای تصادفی در شکل (۲.۱)،

[۴۲] Samanigo and Whitaker

دلیلی ندارد که ترتیبی بین رکوردهای حاصل از دنباله های متفاوت وجود داشته‌باشد، امینی و بالاکریشنان (۲۰۱۳) مجموعه رکوردهای شکل ۲.۱ را مرتب کردند و پس از بررسی ویژگی‌های توزیعی رکوردهای مرتب شده، یک فاصله‌ی اطمینان ناپارامتری برای چندک‌های جامعه‌ی آماری و هم چنین فاصله پیش‌بینی برای آماره‌های رکوردی آینده براساس آن‌ها به‌دست آوردند. در بخش ۵.۱ مشاهده شد که در روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار، نمونه‌های تصادفی جامعه‌ی مورد مطالعه یا متغیر فرعی آن به صورت چشمی یا قضاوتی مرتب می‌شوند و در نهایت واحدهای انتخاب شده به صورت دقیق اندازه‌گیری می‌شوند. از طرفی، همانطور که در ساختار نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار در شکل ۲.۱ مشاهده می‌شود، عناصر روی قطر اصلی، یعنی $X_{۱,۱},\ldots,X_{m,m}$، به عنوان یک نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار انتخاب می‌شوند. در ادامه، یک الگو برای جمع‌آوری آماره‌های رکوردی برگرفته از روش چندنمونه‌ای و نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار معرفی خواهیم کرد و به همین دلیل آن‌را « نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی » می‌نامیم. روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی برای اولین بار در رساله صالحی (۱۳۹۴ش) مطرح و مورد بررسی قرار گرفته‌است. قبل از تعریف طرح فوق در آماره‌های رکوردی، موارد زیر را در نظر بگیرید:

۱) زمانی را در نظر بگیرید که تنها مشاهده‌ی ثبت شده، آخرین رکورد باشد و رکوردهای قبلی به هر دلیلی ثبت نشده‌باشند. به طور مثال در برخی داده‌های ورزشی و داده‌های هواشناسی این اتفاق رخ می‌دهد. مثلا در طول هر ماه، رکورد دما ممکن است چندین بار شکسته شود، اما ممکن است فقط آخرین رکورد ثبت شود. همین رخداد می‌تواند برای میزان بارندگی ماهانه نیز اتفاق بیفتد. به عنوان مثال، شکل زیر نشان دهنده‌ی رکورهای جمع آوری شده از میزان دمای ماه بهمن در m سال می‌باشد

$$\begin{array}{lccccc} ۱: & NA & \ldots & \ldots & NA & U_{(k_۱)۱} \\ ۲: & NA & \ldots & NA & U_{(k_۲)۲} & \\ & \vdots & & & & \\ m: & NA & \ldots & \ldots & NA & U_{(k_m)m} \end{array} \qquad (۳.۱)$$

همان‌طور که مشخص است، به عنوان مثال رکورد دمای ماه بهمن در سال دوم $k_۲$ بار شکسته شده است و تنها آخرین رکورد در دسترس است. رکوردهای جمع آوری شده در شکل بالا مستقل از هم هستند. حال مثال دیگری در این زمینه و در مبحث سیستم‌ها ارائه می‌شود.

مثال ۱.۶.۱. یک سیستم قابل تعمیر موازی با تعمیرات مینیمال را در نظر بگیرید. پس از اعمال تعمیر مینیمال بر روی یک مؤلفه، آن مؤلفه دقیقاً به شرایط قبل از لحظه خرابی باز می‌گردد. فرض کنید این سیستم موازی از m مؤلفه‌ی همسان و مستقل تشکیل شده است که دارای طول عمری با تابع توزیع احتمال $F(.)$ هستند. هم‌چنین فرض کنید که سیستم طوری طراحی شده‌است که iامین مؤلفه‌ی آن $k_i - ۱$ بار قابل تعمیر است $(k_i \geq ۱)$، یعنی مؤلفه iام پس از k_iامین خرابی دیگر قابل تعمیر نیست. در نتیجه، $(k_۱ + \ldots + k_m)$امین خرابی منجر به خرابی کل سیستم می‌شود. بنابراین طول عمر سیستم برابر خواهد بود با $max\{T_۱,\ldots,T_m\}$، به‌طوری‌که T_i طول عمر iامین مؤلفه

است. از طرف دیگر، فرآیند تعمیر مینیمال و رکوردهای بالای مستخرج از مشاهدات مستقل و هم‌توزیع، دارای توزیع مشابه هستند. بنابراین T_i و $U_{(k_i)i}$ در طرح مزبور هم توزیع هستند. از آن‌جا که طول عمر کل سیستم برابر است با $max\{U_{(k_1)1},\ldots,U_{(k_m)m}\}$، بنابراین نیاز است تا به تمامی $U_{(k_i)i}$ دسترسی داشته باشیم.

۲) حالتی که اندازه‌گیری دقیق صفت موردنظر به هر دلیلی مثل گران بودن، از بین رفتن کامل واحدهای تحت آزمایش یا سخت بودن به راحتی امکان پذیر نباشد اما بتوان به صورت چشمی، قضاوتی یا توسط وسیله ای رکوردهای صفت موردنظر را مشخص کرد. به طور دقیق تر، m دنباله‌ی مستقل از متغیرهای تصادفی را در نظر بگیرید. از دنباله ی اول، اولین مشاهده را به عنوان اولین رکورد در نظر می‌گیریم. از دنباله ی دوم، به صورت چشمی دومین رکورد را مشخص می‌کنیم و این عمل را تا mامین دنباله انجام می دهیم و mامین رکورد را از آن دنباله به صورت چشمی اندازه‌گیری می کنیم، در این صورت m رکورد در اختیار خواهیم داشت. شکل (۴.۱) را ببینید.

$$\begin{array}{lccccccc} ۱: & X_{(1)1}, & X_{(2)1}, & \ldots & \rightarrow & U_{(1)1} & & \\ ۲: & X_{(1)2}, & X_{(2)2}, & \ldots & \rightarrow & & U_{(2)2} & \\ & & \vdots & & & & \ddots & \\ m: & X_{(1)m}, & X_{(2)m}, & \ldots & \rightarrow & & & U_{(m)m} \end{array} \qquad (۴.۱)$$

۳) حالتی را در نظر بگیرید که شرایط برقراری هیچ کدام از دو مورد بالا مهیا نباشد. فرض کنید m دنباله مستقل از متغیرهای تصادفی در اختیار است و نمونه‌گیری در هر دنباله به نحوی است که تنها رکوردها ثبت می‌شوند (مثال ۱.۴.۱ و ۲.۴.۱ را ببینید). هم چنین فرض کنید که iامین نمونه‌گیری دنباله‌ای، زمانی متوقف می‌شود که iامین رکورد ثبت شود. از دنباله‌ی iام تنها iامین رکورد را برای استنباط در رابطه با صفت‌های جامعه‌ی آماری حفظ می‌کنیم. از دیدگاه دیگر، این روش مشابه روش چندنمونه‌ای سامانیگو و وایتاکر (۱۹۸۸) است به شرطی که $k_i = i$ باشد و فقط iامین رکورد از دنباله ی iام را در نظر بگیریم. شکل زیر به طور دقیق‌تر این روش را نشان می‌دهد

$$\begin{array}{lccccccc} ۱: & X_{(1)1}, & X_{(2)1}, & \ldots & \rightarrow & \underline{U_{(1)1}} & & \\ ۲: & X_{(1)2}, & X_{(2)2}, & \ldots & \rightarrow & U_{(1)2} & \underline{U_{(2)2}} & \\ & & \vdots & & & \vdots & \ddots & \\ m: & X_{(1)m}, & X_{(2)m}, & \ldots & \rightarrow & U_{(1)m} & U_{(2)m} & \ldots \underline{U_{(m)m}} \end{array} \qquad (۵.۱)$$

بنابراین در این حالت نیز m رکورد $(U_{(1)1},\ldots,U_{(m)m})$ را در اختیار خواهیم داشت. لازم به ذکر است که در عمل نیز ممکن است تنها آخرین رکورد در هر دنباله در دسترس باشد یا حتی تنها آخرین رکورد برای استنباط درباره‌ی پارامتر مجهول جامعه‌ی آماری کافی باشد.

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنید $U_{(m)}^{RRSS} = (U_{(1)1}, \ldots, U_{(m)m})$ آماره‌های رکوردی به‌دست آمده توسط یکی از حالات بالا باشد. مشاهده می‌شود که ساختار تمامی آن‌ها مشابه نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار معرفی شده در شکل ۱.۱ است. اگر قرار دهیم $U_{i,i} = U_{(i)i}$، $i = 1, \ldots, m$، آن‌گاه بردار $(U_{1,1}, U_{2,2}, \ldots, U_{m,m})$ را یک نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی $(RRSS)$ به اندازه‌ی m می‌گوییم.

صالحی و همکاران (۲۰۱۵)، برآوردهایی از قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را براساس نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی در توزیع نمایی یک پارامتری بررسی نمودند. یکی از اهداف آن‌ها مقایسه‌ی $RRSS$ و آماره‌های رکوردی معمولی بر مبنای دو دیدگاه پارامتری و ناپارامتری بود. برای این منظور در مبحث ناپارامتری پیش‌بینی آماره‌های ترتیبی و رکوردهای آینده را مطالعه کردند و در مبحث پارامتری، با در نظر گرفتن خانواده توزیع‌های نرخ خطر متناسب میزان اطلاع فیشر، معیارهای کارایی نسبی و پیتمن- نزدیکی برآوردگرهای حاصل از دو طرح را مقایسه کردند. در نهایت نتیجه گرفتند برآوردگرهای حاصل از طرح $RRSS$ بسیار کاراتر از رکوردهای معمولی است و اطلاع فیشر نهفته در یک نمونه‌ی به اندازه n از $RRSS$ معادل یک نمونه‌ی به اندازه $n(n+1)/2$ براساس رکوردهای معمولی است.

۱.۶.۱ ویژگی‌های حاصل از روش $RRSS$

فرض کنید جامعه‌ی آماری تحت بررسی دارای تابع چگالی $f(.)$ و تابع توزیع احتمال $F(.)$ بوده و X_1 یک متغیر تصادفی مشاهده شده از آن باشد. هم چنین $f_{i,i}(x)$ و $F_{i,i}(x)$ را به‌ترتیب به عنوان تابع چگالی و تابع توزیع احتمال $L_{i,i}$ در نظر بگیرید. در این صورت براساس قرارداد داریم $L_{1,1} \stackrel{d}{=} X_1$. اما برای $i > 1$، با توجه به این که $L_{i,i}$ هم توزیع با iامین رکورد معمولی پایین است داریم

$$f_{i,i}(l) = \frac{\{-logF(l)\}^{i-1}}{(i-1)!} f(l), \quad u \in S_X, \tag{۶.۱}$$

و

$$F_{i,i}(l) = 1 - F(l) \sum_{t=0}^{i-1} \frac{\{-logF(l)\}^t}{t!}, \quad l \in \mathbb{R} \tag{۷.۱}$$

با توجه به استقلال $l_{i,i}$ها و (۶.۱)، تابع چگالی احتمال توأم بردار $\mathbf{L}_{(m)}^{RRSS}$ برابر است با

$$f_{\mathbf{L}_{(m)}^{RRSS}}(l_{(m)}^{RRSS}) = \prod_{i=1}^{m} \frac{\{-logF(l_{i,i})\}^{i-1}}{(i-1)!} f(l_{i,i}), \tag{۸.۱}$$

که در آن $\mathbf{l}_{(m)}^{RRSS} = (l_{1,1}, \ldots, l_{m,m})$ مقدار مشاهده شده‌ی $\mathbf{L}_{(m)}^{RRSS}$ است.
اگر $\mathbf{U}_{(m)}^{RRSS} = (U_{1,1}, U_{2,2}, \ldots, U_{m,m})$ را به عنوان یک $RRSS$ بالا به اندازه‌ی m در نظر بگیریم، آن‌گاه با جایگزین کردن $\bar{F}$ به جای F در روابط (۶.۱) و (۷.۱)، به ترتیب تابع چگالی احتمال

حاشیه‌ای و تابع توزیع احتمال حاشیه‌ای $U_{i,i}$ و هم چنین تابع چگالی احتمال توأم $\mathbf{U}_{(m)}^{RRSS}$ حاصل می‌شوند. به طوری که $\bar{F}(.) = ۱ - F(.)$.

۷.۱ مقدمه‌ای بر روش بوت استرپ

در استنباط آماری در حالت ایده‌آل با جامعه‌ای سروکار داریم که توزیع آن معلوم و تعداد داده‌ها به اندازه‌ی کافی زیاد می‌باشد. در صورتی‌که توزیع جامعه‌ی آماری نامعلوم ولی همچنان تعداد داده‌ها به اندازه‌ی کافی زیاد باشد آن‌گاه با استفاده از قضیه حد مرکزی به نتایج مطلوب دست می‌یابیم. بدترین حالت زمانی است که توزیع جامعه‌ی آماری نامعلوم و نمونه‌ی مشاهده شده کوچک باشد. حال این سؤال مطرح است که در این شرایط چگونه می‌توان استنباط خوب و معتبری ارائه داد.

در واقع تنها اطلاعاتی که از جامعه‌ی آماری در اختیار داریم، نمونه‌ی مشاهده شده‌ی $x = (x_۱, \cdots, x_n)$ به اندازه‌ی کوچک n از جامعه‌ای با تابع توزیع احتمال مجهول $F(.)$ می‌باشد و هدف برآورد پارامتر $\theta = t(F)$ براساس x است. برای این منظور یک برآوردگر را به‌صورت $\hat{\theta} = T(\hat{F}_n)$ محاسبه می‌کنیم، به‌طوری‌که $\hat{F}_n$ همان تابع توزیع احتمال تجربی مشاهدات x است.اما سؤال این است که میزان دقت برآوردگر $\hat{\theta}$ چقدر است؟ افرون[۴۳] (۱۹۷۹)، یک روش بازنمونه‌گیری برای برآورد انحراف معیار $\hat{\theta}$ تحت عنوان نمونه‌گیری بوت استرپ ارائه داد. در ادامه پژوهش‌های بیشتری در این رابطه ارائه گردید که کتاب جامع مقدمه‌ای بر بوت استرپ از افرون و تیبشیرانی[۴۴] (۱۹۹۳)، تقریباً تمام پژوهش‌های انجام شده تا سال ۱۹۹۳ را پوشش می‌دهد. در عین حال که روش بوت استرپ ساختار ساده‌ای دارد ولی نیازمند کامپیوترهای پرقدرت برای شبیه‌سازی است. جهت محاسبه فواصل اطمینان بوت استرپی به کمک نرم افزار R می توانید به فصل پنجم کتاب ریزو[۴۵] (۲۰۰۷)، مراجعه کنید. بوت استرپ در دو حالت پارامتری و ناپارامتری به‌کار گرفته می‌شود که در اینجا به‌شرح هر یک می پردازیم.

- **بوت‌استرپ ناپارامتری**: حالتی را در نظر بگیرید که یک نمونه‌ی مشاهده شده‌ی $\mathbf{x} = (x_۱, \ldots, x_n)$ با اندازه کوچک n از جامعه‌ای با تابع احتمال مجهول $F(.)$ در اختیار داریم. برای برآورد پارامتر $\theta = t(F)$ براساس $\mathbf{x}$ بایستی برآوردگر $\hat{\theta} = T(\hat{F}_n)$ را محاسبه نماییم به طوری‌که $\hat{F}_n$ همان تابع توزیع تجربی مشاهدات $\mathbf{x}$ می‌باشد.

- **بوت‌استرپ پارامتری:** چنانچه توزیع جامعه‌ی آماری مشخص و پارامترهای آن مجهول باشد، ابتدا پارامترهای مجهول را به کمک یکی از روش‌های برآوردیابی کلاسیک به‌دست می‌آوریم. سپس با جایگذاری مقدار برآورد شده به‌جای پارامتر مجهول، از خود توزیع

[۴۳] Efron

[۴۴] Tibshirani

[۴۵] Rizzo

الگوریتم ۱ الگوریتم عمومی بوت‌استرپ ناپارامتری

۱. نمونه تصادفی $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ را از تابع توزیع تجربی F_n تولید می‌کنیم، بدیهی است نمونه‌ی بوت استرپی $\mathbf{x}^*$ یک نمونه تصادفی با جایگذاری به اندازه n از $\mathbf{x}$ می‌باشد.
۲. متناظر با هر نمونه بوت استرپی مثل $\mathbf{x}^*$، می‌توان یک مشاهده‌ی بوت‌استرپی برای $\hat{\theta}$ به‌صورت $\hat{\theta}^* = T(\mathbf{x}^*)$ به‌دست آورد.
۳. مرحله ۱ و ۲ را B مرتبه تکرار کنید تا B نمونه‌ی بوت‌استرپی $(\mathbf{x}_1^*, \ldots, \mathbf{x}_B^*)$ که هر کدام شامل n داده‌ی تولید شده‌ی با جایگذاری از $\mathbf{x}$ هستند را انتخاب کنید (مقدار B در بازه‌ی ۲۰۰-۲۵ انتخاب می‌شود).
۴. مقدار مشاهده‌ی بوت‌استرپی برای $\hat{\theta}$ را به ازای هر $b = 1, \ldots, B$، به صورت $\hat{\theta}_{(b)}^* = T(\mathbf{x}_b^*)$ محاسبه کنید.
۵. با استفاده از B تکرار بوت‌استرپی، برآورد آماره مورد نظر را مانند میانگین و انحراف معیار به‌دست آورید.

جامعه‌ی آماری برای بازنمونه‌گیری استفاده می‌کنیم. در حقیقت، تفاوت بوت‌استرپ پارامتری و ناپارامتری تنها در انتخاب روش تولید نمونه‌های بوت استرپی می‌باشد. به‌طور دقیق‌تر، فرض کنید نمونه‌ی $\mathbf{x}$ را از جامعه‌ای با تابع توزیع احتمال $F(.;\psi)$ مشاهده کرده‌ایم. ابتدا نمونه‌ی بوت‌استرپی $\mathbf{x}^*$ را از توزیع $F(.,\hat{\psi})$ تولید می‌کنیم که $\hat{\psi}$ برآورد پارامتر مجهول ψ براساس یکی از روش‌های کلاسیک برآوردیابی می‌باشد. حال با انجام مراحل ۴ تا ۵ الگوریتم (۱) بوت‌استرپ آماره موردنظر به‌دست می‌آید.

۱.۷.۱ فواصل اطمینان بوت‌استرپ

در این بخش، چند فاصله اطمینان بوت‌استرپی که در کتاب افرون و تیبشیرانی (۱۹۹۴) استفاده شده‌است را معرفی می‌کنیم. بدین منظور فرض کنید $\mathbf{x}$ یک نمونه مشاهده شده از جامعه‌ای با پارامتر مجهول θ باشد. الگوریتم‌های زیر فواصل اطمینان بوت‌استرپی با ضریب تقریبی $1-\alpha$ تولید می‌کنند.

۸.۱ خانواده‌های نرخ خطر

فرض کنید متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته X دارای تابع توزیع تجمعی

$$G(x;\theta,\alpha) = [F(x;\theta)]^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \theta \in \Theta, \quad \alpha > 0,$$

الگوریتم ۲ فاصله اطمینان بوت‌استرپ پایه

۱. B نمونه بوت‌استرپی $\mathbf{x}^*_۱, \cdots, \mathbf{x}^*_B$ از بردار مشاهده شده $\mathbf{x}$ تولید کنید.

۲. برای هر یک از نمونه‌های بوت‌استرپی فوق، مشاهده بوت‌استرپی $d^*_{(b)} = \theta^*_{(b)ML} - \hat{\theta}_{ML}$، $b = ۱, \ldots, B$ را محاسبه کنید.

۳. آن‌گاه بازه $(\hat{\theta}_{ML} - d^*_{۱-\alpha/۲}, \hat{\theta}_{ML} - d^*_{\alpha/۲})$ فاصله اطمینان بوت‌استرپ پایه با ضریب اطمینان تقریبی $\alpha - ۱$ برای پارامتر θ می‌باشد، به‌طوری‌که d^*_α چندک αام بردار $d^* = (d^*_{(۱)}, \ldots, d^*_{(B)})^\top$ می‌باشد.

الگوریتم ۳ فاصله اطمینان بوت‌استرپ صدکی

۱. B نمونه بوت‌استرپی $\mathbf{x}^*_۱, \cdots, \mathbf{x}^*_B$ از بردار مشاهده شده $\mathbf{x}$ تولید کنید.

۲. برای هر یک از نمونه‌های بوت‌استرپی فوق، مشاهده بوت‌استرپی $\theta^*_{(b)}$ را محاسبه کنید.

۳. اگر $\theta^*_{(\alpha)}$ بیان‌گر چندک αام بردار $(\hat{\theta}^*_{(۱)}, \ldots, \hat{\theta}^*_{(B)})$ باشد، آن‌گاه بازه $(\theta^*_{\alpha/۲}, \theta^*_{۱-\alpha/۲})$ فاصله اطمینان بوت‌استرپ صدکی با ضریب اطمینان تقریبی $\alpha - ۱$ برای پارامتر θ است.

الگوریتم ۴ فاصله اطمینان t-بوت‌استرپ

۱. B نمونه بوت‌استرپی $\mathbf{x}^*_۱, \cdots, \mathbf{x}^*_B$ از بردار مشاهده شده $\mathbf{x}$ تولید کنید.

۲. برای هر نمونه بوت‌استرپی، $t^*_{(b)} = \dfrac{\hat{\theta}^*_{(b)} - \hat{\theta}}{\hat{\sigma}(\hat{\theta}^*)}$ را محاسبه کنید. که در آن $\hat{\sigma}(\hat{\theta}^*)$ می‌تواند هر برآورگر استاندارد مانند برآوردگر درستنمایی ماکسیمم $\sigma(\hat{\theta}^*)$ یا برآورد بوت‌استرپی خطای معیار باشد. که برای به‌دست آوردن برآورد بوت‌استرپی انحراف معیار کافیست $\mathbf{x}^*$ را به‌جای $\mathbf{x}$ قرار داده و نمونه‌های بوت‌استرپی را از $\mathbf{x}^*$ تولید کنیم.

۳. آن‌گاه بازه $(\hat{\theta} - t^*_{۱-\alpha/۲}, \hat{\theta} - t^*_{\alpha/۲})$ فاصله اطمینان t-بوت‌استرپ با ضریب اطمینان تقریبی $\alpha - ۱$ برای پارامتر θ می‌باشد، به‌طوری‌که t^*_α چندک αام بردار $t^* = (t^*_{(۱)}, \ldots, t^*_{(B)})^\top$ می‌باشد.

باشد. خانواده‌ای از توزیع‌های $\{G(x;\theta,\alpha),\ \theta\in\Theta,\ \alpha>0\}$، مدل نرخ خطر معکوس متناسب[۴۶] $(PRHR)$ با توزیع پایه $F(x;\theta)$ نامیده می‌شود، که در آن $F(x;\theta)$ یک تابع توزیع پیوسته دلخواه است. همچنین $G(x;\theta,\alpha)$ را تابع توزیع تعمیم‌یافته از تابع توزیع پایه $F(x;\theta)$ می نامند. متغیر تصادفی X از این خانواده دارای تابع چگالی احتمال

$$g(x;\theta,\alpha)=\alpha f(x;\theta)[F(x;\theta)]^{\alpha-1},\quad x\in\mathbb{R},\quad \theta\in\Theta,\quad \alpha>0$$

است. خانواده $PRHR$ توسط گوپتا[۴۷] و همکاران (۱۹۹۸) معرفی شد. همچنین گوپتا و همکاران (۲۰۰۱)، نتایجی را براساس خانواده فوق به‌دست آوردند. با توجه به کاربردهای وسیع خانواده توزیع‌های $PRHR$ در تحلیل‌های بقا و قابلیت اعتماد بخصوص در مطالعات مربوط به سیستم‌های موازی و داده‌های طول عمر سانسور شده از چپ، این مفهوم به طور گسترده‌ای مورد مطالعه واقع شده‌است. برای مثال می‌توان به سنگوپتا و ناندا[۴۸] (۱۹۹۹) و چاندرا و روی[۴۹] (۲۰۰۱)، اشاره کرد. خانواده $PRHR$ بسیاری از مدل‌های طول عمر، از جمله توزیع نمایی تعمیم‌یافته، وایبول، رایلی، پارتو، لوجیستیک، رایلی معکوس، بور نوع III ، گامبل نمایی و توزیع‌های توانی را شامل می‌شود. برای آشنایی بیشتر با خانواده فوق به گوپتا و ناندا[۵۰](۲۰۰۱) و گوپتا و گوپتا[۵۱] (۲۰۰۷) مراجعه نمایید.

همچنین برای متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته X با تابع توزیع تجمعی

$$G(x;\theta,\alpha)=1-[1-F(x;\theta)]^{\alpha},\quad x\in\mathbb{R},\quad \theta\in\Theta,\quad \alpha>0,$$

خانواده‌ای از توابع توزیع $\{G(x;\theta,\alpha),\ \theta\in\Theta,\ \alpha>0\}$ مدل نرخ خطر متناسب با توزیع پایه $F(x;\theta)$ مدل نرخ خطر متناسب[۵۲] (PHR) نامیده می‌شود. بنابراین متغیر تصادفی X دارای تابع چگالی احتمال به صورت

$$g(x;\theta,\alpha)=\alpha f(x;\theta)[1-F(x;\theta)]^{\alpha-1},\quad x\in\mathbb{R},\quad \theta\in\Theta,\quad \alpha>0$$

است. این خانواده شامل چند توزیع طول عمر مشهور از جمله بور نوع XII، لوماکس و وایبول است (احمدی و همکاران، ۲۰۰۸ و ۲۰۰۹؛ مارشال و الکین[۵۳] ۲۰۰۷).

در هر دو مدل، θ می‌تواند بردار پارامتر توزیع پایه باشد ولی α پارامتر عددی تابع توزیع $G(x;\theta,\alpha)$

---

[۴۶] Proportional reversed hazard rate model

[۴۷] Gupta

[۴۸] Sengupta and Nanda

[۴۹] Chandra and Roy

[۵۰] Gupta and Nanda

[۵۱] Gupta and Gupta

[۵۲] Proportional hazard rate model

[۵۳] Marshall and Olkin

است. با توجه به کاربرد وسیعی که خانواده‌های فوق در مدل‌بندی و تحلیل داده‌های طول عمر دارند، محققان کلاس‌های مختلفی از توزیع‌های این خانواده‌ها را با $F(x;\theta)$های مختلف معرفی و به‌طور وسیعی مورد مطالعه قرار دادند.

۹.۱ روش‌های شبیه سازی

در این بخش، دو روش شبیه‌سازی را که در حل مسائل آماری این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند ارائه می‌دهیم. در حقیقت از دیدگاه کلاسیک علاقه‌مند به شبیه‌سازی یک توزیع نمونه‌ای که برخاسته از یک مدل پیچیده است و از دیدگاه بیزی علاقه‌مند به محاسبه برخی مشخصه‌های توزیع پسین هستیم. در ریاضی زنجیر مارکوف[۵۴]، یک فرآیند تصادفی با خاصیت مارکوفی است. در خاصیت مارکوفی، به شرط داده شدن وضعیت حال، وضعیت آینده مستقل از وضعیت گذشته است.

عمده‌ترین محدودیتی که درانجام اکثر روش‌های بیزی روبرو می‌شویم، به‌دست آوردن توزیع پسین است که اغلب نیازمند انتگرال‌گیری از توابعی با ابعاد بالا است. چندین روش برای حل این‌گونه انتگرال‌ها توسط اشخاصی چون اسمیت[۵۵](۱۹۹۱)، تنر [۵۶] (۱۹۹۶) ارائه شده‌است که یکی از این روش‌ها زنجیر مارکوف مونت کارلو[۵۷] ($MCMC$) است که اساس آن شبیه‌سازی درستی از توزیع پیچیده مورد نظر می‌باشد. در واقع روش $MCMC$ همان روش مونت کارلو[۵۸] (MC) است با این تفاوت که در آن نمونه‌گیری براساس ویژگی زنجیر ماکوف صورت می‌گیرد. در اینجا دو روش MC و مونت کارلو با نمونه‌گیری از نقاط مهم [۵۹]شرح داده می‌شود.

۱.۹.۱ روش مونت کارلو

فرض کنید علاقه‌مندیم انتگرال

$$I = \int_a^b g(\theta)d\theta$$

را محاسبه کنیم که $g(\theta)$ یک تابع هموار است. انتگرال فوق را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$I = \int_a^b [(b-a)g(\theta)]\frac{۱}{b-a}d\theta$$

---

[۵۴] Markov Chain

[۵۵] Smith

[۵۶] Tanner

[۵۷] Markov Chain Monte Carlo

[۵۸] Monte Carlo

[۵۹] Monte carlo with important sampling

که مانند محاسبه امید ریاضی $[(b-a)g(\theta)]$ نسبت به توزیع یکنواخت روی (a,b) است. یعنی

$$I = E_{U(a,b)}[(b-a)g(\theta)]$$

که با استفاده از روش گشتاوری

$$\hat{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(b-a)g(\theta_i)]$$

که $\theta_n, \cdots, \theta_1$ یک نمونه تصادفی از توزیع $U(a,b)$ است.

۱۰.۱ روش مونت کارلو با نمونه‌گیری از نقاط مهم

در بسیاری از موارد می‌خواهیم $\mu = E(f(x))$ را محاسبه کنیم که $f(x)$ در خارج از ناحیه A که $p(X \in A)$ کوچک است، تقریباً صفر است. مجموعه A ممکن است حجم کمی داشته باشد یا ممکن است در انتهای توزیع X باشد. یک نمونه ساده مونت کارلویی از توزیع X ممکن است حتی یک نقطه در ناحیه نداشته‌باشد. چنین مشکلاتی در فیزیک انرژی بالا، استنباط بیزی و شبیه‌سازی رویدادهای نادر برای تأمین مالی و بیمه پیش می‌آید.
به‌طور شهودی روشن است که باید نمونه‌هایی از ناحیه‌های جالب و مهم را به‌دست آوریم. ما این‌کار را با نمونه‌گیری از توزیعی انجام می‌دهیم که منطقه‌ی مهم را سنگین کند، به همین دلیل این روش، نمونه‌گیری از نقاط مهم نامیده می‌شود. فرض کنید انتگرال مورد علاقه به‌صورت امید ریاضی یک تابع g نسبت به چگالی p است.

$$I = \int g(x)p(x)dx = \int g(x)\frac{p(x)}{h(x)}h(x)dx$$

که $h(x)$ یک تابع مثبت برای xهایی است که $p(x) > 0$ و $\int h(x)dx = 1$. بنابراین $h(x)$ یک تابع چگالی است. یک روش جایگزین با استفاده از برآورد گشتاوری، I را به‌صورت زیر برآورد می‌کند:

$$\bar{I} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i)w(X_i)$$

که در آن $w(X_i) = \frac{p(X_i)}{h(X_i)}$ که به ازای $i = 1,2,\cdots,n$ ، $X_i \sim h(X)$. h چگالی نمونه‌گیری با اهمیت نامیده می‌شود.
در حقیقت این روش برای کاهش واریانس به‌کار می‌رود. به‌طوری‌که با انتخاب $g(x)w(x)$ تقریبا ثابت در رابطه زیر

$$Var(\bar{I}) = \frac{1}{n}\int (g(x)w(x) - I)^2 h(x)dx$$

می‌توانیم تا جایی که می‌خواهیم واریانس را کوچک کنیم.

فصل ۲

برآورد پارامتر $\mathcal{R}$ در توزیع نمایی تعمیم یافته با استفاده از $RRSS$

۱.۲ مقدمه

همان‌طور که در بخش ۲.۱ بیان شد، یکی از مفاهیم مهم در تحلیل‌های قابلیت اعتماد، مسأله‌ی برآورد پارامتر تنش-مقاومت می‌باشد. مقالات متعددی به مسائل احتمالاتی خاص، مربوط به ارزیابی $\mathcal{R} = Pr(X < Y)$ و ساختن برآوردهای کارآمد و قابل اطمینانی از پارامتر موردنظر برمبنای مقادیر نمونه‌ای با فرض‌های مختلف از توزیع‌های X و Y پرداخته‌اند. به عنوان مثال برخی از نویسندگان با درنظرگرفتن داده‌های کامل به برآورد پارامتر تنش-مقاومت پرداخته‌اند. از جمله اون[۱] و همکاران (۱۹۶۴)، کران بالایی $\mathcal{R}$ را در حالت ناپارامتری محاسبه نمودند. کندو و گوپتا[۲] (۲۰۰۵) با درنظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم یافته استنباط‌هایی در خصوص $\mathcal{R}$ ارائه دادند. رقب[۳] و همکاران (۲۰۰۸) با در نظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم‌یافته سه پارامتری به

[۱] Owen

[۲] Kundu and Gupta

[۳] Raqab

استنباط پارامتر تنش-مقاومت پرداخته‌اند. از سوی دیگر در سال‌های اخیر، استفاده از داده‌های ناقص در تحلیل پارامتر $\mathcal{R}$ مورد توجه پژوهش‌گران زیادی واقع شد. به عنوان مثال، اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۱)، لیو و تسا[۴] (۲۰۱۲)، ساراک‌اوغلو[۵] و همکاران (۲۰۱۲) و بصیرت و همکاران (۲۰۱۳)، با در نظر گرفتن نمونه‌هایی از سانسور پیش‌رونده به برآورد پارامتر تنش-مقاومت پرداختند. همچنین بکلیزی[۶] (۲۰۰۸) پارامتر $\mathcal{R}$ را با در نظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم‌یافته و براساس مقادیر رکوردی مورد بررسی قرار داد. موتلاک[۷] و همکاران (۲۰۱۰) استنباط‌هایی از پارامتر تنش-مقاومت با استفاده از مجموعه‌ی رتبه‌دار (RSS) در توزیع نمایی ارائه نمودند. همان‌طور که در بخش ۶.۱ بیان شد، صالحی و احمدی (۲۰۱۴)، طرحی تحت عنوان $RRSS$ در مبحث رکوردها پیشنهاد دادند که با استفاده از آن می‌توان به نتایج دقیق‌تری دست یافت. صالحی و احمدی در همان سال با استفاده از این طرح به پیش‌بینی آماره‌های ترتیبی و رکوردهای آینده پرداختند و در سال ۲۰۱۵ نیز پارامتر تنش-مقاومت را به صورت نقطه‌ای و فاصله‌ای براساس $RRSS$ مشاهده شده از توزیع نمایی برآورد نمودند. در سال‌های اخیر مقالات متعددی با در نظر گرفتن طرح $RRSS$ ارائه گردید. از جمله اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۷)، اندازه اطلاع $\mathcal{R}$ را به‌دست آوردند. پل و توماس[۸] (۲۰۱۷) با درنظر گرفتن حالتی که اندازه‌گیری متغیرهای موردنظر پرهزینه یا عملا غیرممکن می‌باشد، متغیرهای همراه $RRSS$ را ارائه نمودند. صفریان و همکاران (۲۰۱۹)، با در نظر گرفتن این طرح برآوردهای بهبود یافته پارامتر تنش-مقاومت را به‌دست آوردند. حال در این فصل قصد داریم پارامتر تنش-مقاومت $\mathcal{R}$ را به صورت نقطه‌ای و فاصله‌ای براساس $RRSS$ مشاهده شده از توزیع نمایی تعمیم یافته برآورد کنیم. بنابراین، در بخش ۲.۲، دو برآورد نقطه‌ای درستنمایی ماکسیمم (ML) و برآورد به طور یکنواخت با کمترین واریانس ($UMVU$) را برای $\mathcal{R}$ به‌دست می‌آوریم و برآوردگرهای فوق را براساس معیار کارایی نسبی مقایسه می‌کنیم. در ادامه و در بخش ۳.۲، فاصله‌ی اطمینان دقیق و چند فاصله‌ی اطمینان تقریبی بر پایه‌ی بوت‌استرپ پارامتری برای $\mathcal{R}$ به‌دست می‌آوریم. در نهایت، در بخش‌های ۴.۲ و ۵.۲، به ترتیب با استفاده از یک مطالعه‌ی شبیه‌سازی و هم‌چنین یک مثال واقعی، کارایی برآوردگرهای به‌دست آمده در بخش‌های ۲.۲ و ۳.۲ را بررسی می‌کنیم.

۲.۲ برآورد نقطه‌ای پارامتر تنش-مقاومت

توزیع نمایی تعمیم‌یافته به ترتیب با تابع چگالی و تابع توزیع احتمال

$$f_{GE}(x;\theta,\lambda) = \theta\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\lambda x})^{\theta-1}, \qquad (۱.۲)$$

[۴] Lio and Tsai

[۵] Saracoglu

[۶] Baklizi

[۷] Mutllak

[۸] Paul and Thomas

و

$$F_{GE}(x;\theta,\lambda)=(1-e^{-\lambda x})^{\theta} \qquad x>0, \tag{۲.۲}$$

در اختیار داریم، که در آن $\theta>0$ و $\lambda>0$ به ترتیب پارامترهای شکل و نرخ هستند.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید $X\sim GE(\theta_1,\lambda_1)$ و $Y\sim GE(\theta_2,\lambda_2)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند و $\mathcal{R}=Pr(X<Y)$ همان پارامتر تنش-مقاومت باشد، در این صورت به‌راحتی ثابت می‌شود که

$$\mathcal{R}=1-\int_0^1 \theta_1(1-t)^{\theta_1-1}(1-t^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}})^{\theta_2}dt. \tag{۳.۲}$$

برهان. با استفاده از تبدیل $U=Y-X$ و $V=X$ داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{R}=Pr(X<Y)&=\int_0^\infty f_U(u)du=\int_0^\infty\int_0^\infty f_{U,V}(u,v)dvdu \qquad (۴.۲)\\ &=\int_0^\infty\int_0^\infty \theta_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 v}\left(1-e^{-\lambda_1 v}\right)^{\theta_1-1}\theta_2\lambda_2 e^{-\lambda_2(u+v)}\left(1-e^{-\lambda_2(u+v)}\right)^{\theta_2-1}dudv,\end{aligned}$$

حال با جایگذاری $z=1-e^{-\lambda_2(u+v)}$ در (۴.۲)، داریم

$$\begin{aligned}\mathcal{R}&=\int_0^\infty\left(\int_{1-e^{-\lambda_2 v}}^1\theta_2 z^{\theta_2-1}dz\right)\theta_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 v}\left(1-e^{-\lambda_1 v}\right)^{\theta_1-1}dv\\ &=\int_0^\infty\theta_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 v}\left(1-e^{-\lambda_1 v}\right)^{\theta_1-1}\left[1-(1-e^{-\lambda_2 v})\right]^{\theta_2}dv.\end{aligned}$$

با استفاده از تبدیل $t=e^{-\lambda_1 v}$ اثبات کامل می‌شود. □

اگر $\mathbf{r}=(r_{1,1},r_{2,2},\cdots,r_{n,n})^\top$ مقدار مشاهده شده از بردار $\mathbf{R}=(R_{1,1},R_{2,2},\cdots,R_{n,n})^\top$، یک $RRSS$ پایین به اندازه n از $GE(\theta_1,\lambda_1)$ و $\mathbf{s}=(s_{1,1},s_{2,2},\cdots,s_{m,m})^\top$ مقدار مشاهده‌شده از بردار $\mathbf{S}=(S_{1,1},S_{2,2},\cdots,S_{m,m})^\top$، یک $RRSS$ پایین به اندازه m از $GE(\theta_2,\lambda_2)$، تنها اطلاعاتی باشند که از جوامع X و Y در اختیار داریم، می‌خواهیم برآوردگرهای نقطه‌ای ML و $UMVU$ را برای $\mathcal{R}=Pr(X<Y)$ محاسبه کنیم.

۱.۲.۲ برآوردگر ML

برای محاسبه برآوردگر $\mathcal{R}$ از روش درستنمایی ماکسیمم ۳ حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: $\theta_1\neq\theta_2$ و $\lambda_1\neq\lambda_2$

همان‌طور که در بخش ۶.۱ مشاهده کردیم، واحدهای $RRSS$ مستقل از یکدیگر می‌باشند، لذا با جایگذاری (۱.۲) و (۲.۲) در (۸.۱) تابع درستنمایی توأم به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}L(\theta_1,\theta_2,\lambda_1,\lambda_2)=&\prod_{i=1}^n\left[\frac{\{-\log(1-e^{-\lambda_1 r_{i,i}})^{\theta_1}\}^{i-1}\theta_1\lambda_1 e^{-\lambda_1 r_{i,i}}(1-e^{-\lambda_1 r_{i,i}})^{\theta_1-1}}{(i-1)!}\right]\\ &\times\prod_{j=1}^m\left[\frac{\{-\log(1-e^{-\lambda_2 s_{j,j}})^{\theta_2}\}^{j-1}\theta_2\lambda_2 e^{-\lambda_2 s_{j,j}}(1-e^{-\lambda_2 s_{j,j}})^{\theta_2-1}}{(j-1)!}\right].\end{aligned} \tag{۵.۲}$$

و به همین ترتیب تساوی‌های مربوط به مشتق لگاریتم طبیعی درستنمایی نسبت به پارامترهای $(\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2)$ به ازای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$ داده‌شده به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial \ell(\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2; \mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial \theta_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)}{\theta_1} + \frac{n}{\theta_1} + \sum_{i=1}^{n} \log(1 - e^{-\lambda_1 r_{i,i}}) = 0, \tag{۶.۲}$$

$$\frac{\partial \ell(\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2; \mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial \theta_2} = \sum_{j=1}^{m} \frac{(j-1)}{\theta_2} + \frac{m}{\theta_2} + \sum_{j=1}^{m} \log(1 - e^{-\lambda_2 s_{j,j}}) = 0, \tag{۷.۲}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell(\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2; \mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial \lambda_1} &= \sum_{i=1}^{n} (i-1) \frac{r_{i,i} e^{-\lambda_1 r_{i,i}}}{(1 - e^{-\lambda_1 r_{i,i}}) \log(1 - e^{-\lambda_1 r_{i,i}})} + \frac{n}{\lambda_1} \\ &\quad - \sum_{i=1}^{n} r_{i,i} + (\theta_1 - 1) \sum_{i=1}^{n} \frac{r_{i,i} e^{-\lambda_1 r_{i,i}}}{1 - e^{-\lambda_1 r_{i,i}}} = 0,\end{aligned} \tag{۸.۲}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ell(\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2; \mathbf{r}, \mathbf{s})}{\partial \lambda_2} &= \sum_{j=1}^{m} (j-1) \frac{s_{j,j} e^{-\lambda_2 s_{j,j}}}{(1 - e^{-\lambda_2 s_{j,j}}) \log(1 - e^{-\lambda_2 s_{j,j}})} + \frac{m}{\lambda_2} \\ &\quad - \sum_{j=1}^{m} s_{j,j} + (\theta_2 - 1) \sum_{j=1}^{m} \frac{s_{j,j} e^{-\lambda_2 s_{j,j}}}{1 - e^{-\lambda_2 s_{j,j}}} = 0,\end{aligned} \tag{۹.۲}$$

با حل معادلات (۶.۲) و (۷.۲) خواهیم داشت

$$\hat{\theta}_1(\lambda_1) = -\frac{N}{\sum_{i=1}^{n} \log(1 - e^{-\lambda_1 r_{i,i}})}, \tag{۱۰.۲}$$

$$\hat{\theta}_2(\lambda_2) = -\frac{M}{\sum_{j=1}^{m} \log(1 - e^{-\lambda_2 s_{j,j}})}, \tag{۱۱.۲}$$

که $N := n(n+1)/2$ و $M := m(m+1)/2$ می‌باشد. با حل معادلات غیرخطی حاصل شده از جایگذاری $\hat{\theta}_1(\lambda_1)$ و $\hat{\theta}_2(\lambda_2)$ در رابطه‌ی (۸.۲) و (۹.۲) با استفاده از روش‌های عددی، MLE پارامترهای مجهول را به‌دست می‌آوریم. در نهایت با استفاده از رابطه (۳.۲) و ویژگی پایایی برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم، برآوردگر $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ را محاسبه می کنیم.

حالت دوم: $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ و $\lambda_1 \neq \lambda_2$

در حالتی که پارامترهای شکل برابر و پارامترهای مقیاس متفاوت باشد، با انجام برخی محاسبات جبری، برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترها با حل معادلات زیر به‌دست می‌آید.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1) r_{i,i} e^{-\lambda_1 r_{i,i}}}{(1 - e^{-\lambda_1 r_{i,i}}) \log(1 - e^{-\lambda_1 r_{i,i}})} + \frac{n}{\lambda_1} - \sum_{i=1}^{n} r_{i,i} + (\hat{\theta}(\lambda_1, \lambda_2) - 1) \frac{r_{i,i} e^{-\lambda_1 r_{i,i}}}{(1 - e^{-\lambda_1 r_{i,i}})} = 0, \tag{۱۲.۲}$$

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{(j-1)s_{j,j}e^{-\lambda_2 s_{j,j}}}{(1-e^{-\lambda_2 s_{j,j}})\log(1-e^{-\lambda_2 s_{j,j}})}+\frac{m}{\lambda_2}-\sum_{i=1}^{n}s_{j,j}+(\hat{\theta}(\lambda_1,\lambda_2)-1)\frac{s_{j,j}e^{-\lambda_2 s_{j,j}}}{(1-e^{-\lambda_2 s_{j,j}})}=0, \tag{۱۳.۲}$$

که

$$\hat{\theta}(\lambda_1,\lambda_2)=-\frac{M+N}{\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda_1 r_{i,i}})+\sum_{j=1}^{m}\log(1-e^{-\lambda_2 s_{j,j}})}. \tag{۱۴.۲}$$

حالت سوم: $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ و $\theta_1\neq\theta_2$

با در نظر گرفتن فرض‌های اولیه در مورد **R** و **S** ، تابع درستنمایی ماکسیمم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$L(\theta_1,\theta_2,\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\{-\log(1-e^{-\lambda r_{i,i}})^{\theta_1}\}^{i-1}\theta_1\lambda e^{-\lambda r_{i,i}}(1-e^{-\lambda r_{i,i}})^{\theta_1-1}}{(i-1)!}\right] \tag{۱۵.۲}$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\left[\frac{\{-\log(1-e^{-\lambda s_{j,j}})^{\theta_2}\}^{j-1}\theta_2\lambda e^{-\lambda s_{j,j}}(1-e^{-\lambda s_{j,j}})^{\theta_2-1}}{(j-1)!}\right],$$

و با مشتق‌گیری از تابع درستنمایی نسبت به پارامترهای مجهول داریم:

$$\frac{\partial\ell(\theta_1,\theta_2,\lambda)}{\partial\theta_1}=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)}{\theta_1}+\frac{n}{\theta_1}+\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda r_{i,i}})=0, \tag{۱۶.۲}$$

$$\frac{\partial\ell(\theta_1,\theta_2,\lambda)}{\partial\theta_2}=\sum_{j=1}^{m}\frac{(j-1)}{\theta_2}+\frac{m}{\theta_2}+\sum_{j=1}^{m}\log(1-e^{-\lambda s_{j,j}})=0, \tag{۱۷.۲}$$

$$\frac{\partial\ell(\theta_1,\theta_2,\lambda)}{\partial\lambda}=\sum_{i=1}^{n}(i-1)\frac{r_{i,i}e^{-\lambda r_{i,i}}}{(1-e^{-\lambda r_{i,i}})\log(1-e^{-\lambda r_{i,i}})}+\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}r_{i,i}+(\theta_1-1) \tag{۱۸.۲}$$
$$\times\sum_{i=1}^{n}\frac{r_{i,i}e^{-\lambda r_{i,i}}}{1-e^{-\lambda r_{i,i}}}+\sum_{j=1}^{m}(j-1)\frac{s_{j,j}e^{-\lambda s_{j,j}}}{(1-e^{-\lambda s_{j,j}})\log(1-e^{-\lambda s_{j,j}})}+\frac{m}{\lambda}$$
$$-\sum_{j=1}^{m}s_{j,j}+(\theta_2-1)\sum_{j=1}^{m}\frac{s_{j,j}e^{-\lambda s_{j,j}}}{1-e^{-\lambda s_{j,j}}}=0.$$

بنابراین MLE پارامترهای (۱۶.۲) و (۱۷.۲) به‌صورت تابعی از λ محاسبه می‌گردد.

$$\hat{\theta}_1(\lambda)=-\frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda r_{i,i}})}, \tag{۱۹.۲}$$

$$\hat{\theta}_2(\lambda)=-\frac{M}{\sum_{j=1}^{m}\log(1-e^{-\lambda s_{j,j}})}. \tag{۲۰.۲}$$

با جایگذاری $\hat{\theta}_1(\lambda)$ و $\hat{\theta}_2(\lambda)$ در لگاریتم رابطه (۱۸.۲) و ماکسیمم نمودن آن برحسب λ، برآورد درستنمایی ماکسیمم λ را با استفاده از تساوی زیر محاسبه می‌کنیم

$$h(\hat{\lambda})=\hat{\lambda}. \tag{۲۱.۲}$$

که

$$h(\lambda)=(m+n)\left[\sum_{i=1}^{n} r_{i,i}+\sum_{j=1}^{m} s_{j,j}+\left(\frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-\lambda r_{i,i}})}+1\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{r_{i,i}e^{-\lambda r_{i,i}}}{(1-e^{-\lambda r_{i,i}})}\right.$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{(i-1)r_{i,i}e^{-\lambda r_{i,i}}}{(1-e^{-\lambda r_{i,i}})\log(1-e^{-\lambda r_{i,i}})}+\left(\frac{M}{\sum_{j=1}^{m}\log(1-e^{-\lambda s_{j,j}})}+1\right)\sum_{j=1}^{m}\frac{s_{j,j}e^{-\lambda s_{j,j}}}{(1-e^{-\lambda s_{j,j}})}$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{m}\frac{(j-1)s_{j,j}e^{-\lambda s_{j,j}}}{(1-e^{-\lambda s_{j,j}})\log(1-e^{-\lambda s_{j,j}})}\right]^{-1}.$$

با توجه به این‌که تابع $h(\lambda)$ در بازه $(0,\infty)$ پیوسته و مشتق‌پذیر است و به ازای هر $\lambda\in(0,\infty)$ ، $h(\lambda)\in(0,\infty)$ و همچنین عددی مانند $0<k<1$ وجود دارد به‌طوری‌که $|h'(\lambda)|\leq k<1$. بنابراین $\hat{\lambda}$ یک نقطه‌ی ثابت از حل معادله غیرخطی (۲۱.۲) است که با استفاده از یک فرآیند تکراری ساده به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$h(\lambda_{(j)})=\lambda_{(j+1)},$$

که $\lambda_{(j)}$، jامین تکرار برای $\hat{\lambda}$ می‌باشد. لازم به توضیح است که فرآیند تکرار زمانی متوقف می‌گردد که $|\lambda_{(j)}-\lambda_{(j+1)}|<\epsilon$ به‌طوری‌که ϵ مقداری به اندازه کافی کوچک است. با توجه به این‌که در این حالت پارامتر $\mathcal{R}$ ارائه شده در (۳.۲) به صورت رابطه زیر به‌دست می‌آید

$$\mathcal{R}=\frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2} \qquad (۲۲.۲)$$

بنابراین برطبق رابطه (۲۲.۲) ملاحظه می‌کنیم در این حالت، پارامتر $\mathcal{R}$ مستقل از پارامتر λ می‌باشد، لذا بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض می‌کنیم $\lambda=1$ باشد. بنابراین برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترهای θ_1 و θ_2 به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\hat{\theta}_1=-\frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-r_{i,i}})}, \qquad (۲۳.۲)$$

و

$$\hat{\theta}_2=-\frac{M}{\sum_{j=1}^{m}\log(1-e^{-s_{j,j}})}. \qquad (۲۴.۲)$$

و $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ نیز به‌صورت زیر نتیجه می‌دهد.

$$\hat{\mathcal{R}}_{ML}=\frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_1+\hat{\theta}_2}=\left[1+\frac{N}{M}\frac{T_2}{T_1}\right]^{-1}, \qquad (۲۵.۲)$$

که در آن $T_1=-\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-R_{i,i}})$ و $T_2=-\sum_{j=1}^{m}\log(1-e^{-S_{j,j}})$ می‌باشد.
همان‌گونه که قبلاً نیز بیان شده‌است $R_{i,i}$ها و $S_{j,j}$ها، متغیرهای تصادفی مستقل می‌باشند، با درنظرگرفتن $Z_i=-\log(1-e^{-R_{i,i}})$ می‌توان نشان داد که Z_i دارای توزیع گاما با پارامتر شکل i و پارامتر مقیاس θ_1 می‌باشد و یا به طور معادل $Z_i\sim Gamma(i,\theta_1)$. بنابراین

$$T_1=-\sum_{i=1}^{n}\log(1-e^{-R_{i,i}})\sim Gamma(N,\theta_1), \qquad (۲۶.۲)$$

و به‌طور مشابه

$$T_۲ = -\sum_{j=۱}^{m} \log(۱ - e^{-S_{j,j}}) \sim Gamma(M, \theta_۲). \qquad (۲۷.۲)$$

حال گشتاورهای $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ را طبق قضیه زیر محاسبه می‌کنیم

قضیه ۲.۲.۲. گشتاور مرتبه kام $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ به‌صورت زیر می‌باشد

$$E(\hat{\mathcal{R}}^k_{ML}) = \frac{\Gamma(M+N)\Gamma(N+k)}{\Gamma(N)\Gamma(N+M+k)} \left(\frac{N}{M}\frac{۱-\mathcal{R}}{\mathcal{R}}\right)^N \qquad (۲۸.۲)$$
$$\times\ {}_۲F_۱\left(M+N, N+k, M+N+k, ۱ - \frac{N}{M}\frac{۱-\mathcal{R}}{\mathcal{R}}\right),$$

که درآن ${}_۲F_۱$ نشان‌دهنده‌ی تابع فوق هندسی می‌باشد.

برهان. تابع چگالی $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$، با درنظر گرفتن روابط (۲۶.۲) و (۲۷.۲) و استفاده از روش تبدیل به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$f_{\hat{\mathcal{R}}_{ML}}(x) = \frac{\Gamma(M+N)}{\Gamma(M)\Gamma(N)} \left(\frac{M\theta_۲}{N\theta_۱}\right)^M (۱-x)^{M-۱} x^{-(M+۱)} \left(۱ + \frac{M\theta_۲}{N\theta_۱}(\frac{۱-x}{x})\right)^{-(M+N)}, \qquad (۲۹.۲)$$

که $\Gamma(.)$ نشان‌دهنده‌ی تابع گامای کامل می‌باشد. با در نظر گرفتن تابع فوق هندسی که به فرم زیر تعریف می‌شود (برای جزئیات بیشتر به بیلی[۹] (۱۹۳۵) مراجعه نمایید.)

$${}_۲F_۱ = F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_۰^۱ t^{b-۱}(۱-t)^{c-b-۱}(۱-tz)^{-a} dt$$

جهت استفاده از ویژگی‌های تابع فوق‌هندسی در محاسبه گشتاورها، تابع چگالی به‌دست آمده در رابطه (۲۹.۲) را پس از انجام محاسباتی ساده به فرم زیر نمایش می‌دهیم

$$f_{\hat{\mathcal{R}}_{ML}}(x) = \frac{\Gamma(M+N)}{\Gamma(M)\Gamma(N)} \left(\frac{N}{M}\frac{۱-\mathcal{R}}{\mathcal{R}}\right)^N x^{N-۱}(۱-x)^{M-۱}$$
$$\times \left(۱ - x\left(۱ - \frac{N}{M}\frac{۱-\mathcal{R}}{\mathcal{R}}\right)\right)^{-(M+N)}, ۰ < x < ۱. \qquad (۳۰.۲)$$

با استفاده از رابطه (۳۰.۲) و تعریف تابع فوق هندسی نتیجه مورد نظر به‌دست می‌آید. □

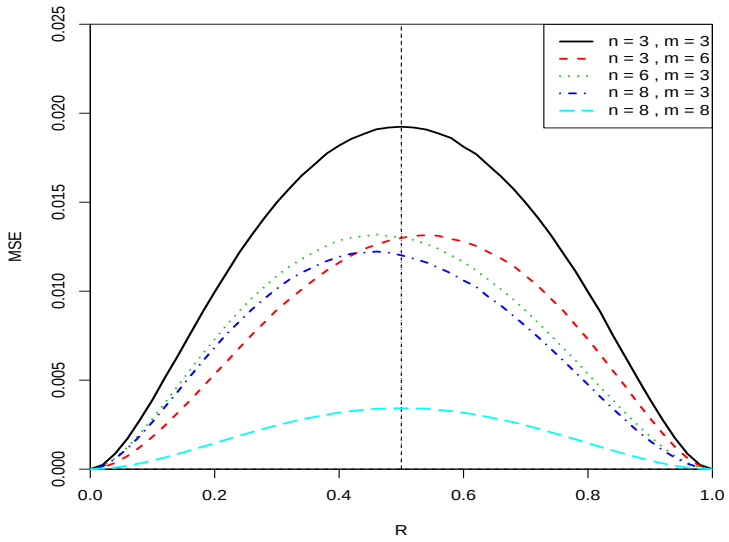
ملاحظه ۱.۲.۲. با استفاده از رابطه (۲۸.۲) امید ریاضی $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ به صورت زیر می‌باشد

$$E(\hat{\mathcal{R}}_{ML}) = \left(\frac{N}{M}\frac{۱-\mathcal{R}}{\mathcal{R}}\right)^N \frac{N}{M+N}\ {}_۲F_۱\left(M+N, N+۱, M+N+۱; ۱ - \frac{N}{M}\frac{۱-\mathcal{R}}{\mathcal{R}}\right),$$

که نشان می‌دهد $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ یک برآوردگر اریب برای $\mathcal{R}$ می‌باشد و می‌توان جهت محاسبه $MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}, \mathcal{R}) = Var(\hat{\mathcal{R}}_{ML}) + (E(\hat{\mathcal{R}}_{ML}) - \mathcal{R})^۲$ آنرا به‌کار برد.

[۹] Bailey

در شکل ۱.۲ نمودار $MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML},\mathcal{R})$ در مقابل $\mathcal{R}$ برای مقادیر مختلف n و m رسم شده‌است. این نمودار نشان می‌دهد که با افزایش اندازه نمونه، MSE کاهش می‌یابد. همچنین زمانی‌که $n=m$ می‌باشد، تابع MSE حول $\mathcal{R}=۰/۵$ متقارن است درحالی‌که به ازای $n\neq m$ از نامتقارن است. درضمن MSE بیشترین مقدار خود را در $\mathcal{R}_{max}\propto\frac{n}{n+m}$ اختیار می‌کند که $\mathcal{R}_{max}=argmax_{\mathcal{R}}MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML},\mathcal{R})$ می‌باشد.



شکل ۱.۲: نمودار $MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML},\mathcal{R})$ در مقابل $\mathcal{R}$.

۲.۲.۲ برآوردگر $UMVU$

در این بخش با در نظرگرفتن توزیع نمایی تعمیم یافته به عنوان توزیع جوامع X و Y و براساس طرح $RRSS$ برآوردگر $UMVU$ پارامتر تنش-مقاومت را محاسبه می‌کنیم.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید $\mathbf{r}=(r_{۱,۱},r_{۲,۲},\cdots,r_{n,n})^{\top}$ مشاهدات مربوط به بردار تصادفی $\mathbf{R}=(R_{۱,۱},R_{۲,۲},\cdots,R_{n,n})^{T}$، یک $RRSS$ پایین به اندازه n از توزیع $GE(\theta_{۱},۱)$ است. همچنین $\mathbf{s}=(s_{۱,۱},s_{۲,۲},\cdots,s_{n,n})^{T}$ مشاهدات بردار تصادفی $\mathbf{S}=(S_{۱,۱},S_{۲,۲},\cdots,S_{n,n})^{T}$ که یک $RRSS$ پایین به اندازه m از $GE(\theta_{۲},۱)$ می‌باشد. بنابراین $UMVUE$ پارامتر $\mathcal{R}$ را می‌توان به صورت عبارتی از برآوردگر درستنمایی ماکسیمم به صورت زیر به‌دست آورد.

$$\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}=\begin{cases}\sum_{s=۰}^{M-۱}\frac{\binom{M-۱}{s}}{\binom{N+s-۱}{s}}\left(-\frac{\hat{\mathcal{R}}_{ML}}{۱-\hat{\mathcal{R}}_{ML}}\frac{N}{M}\right)^{s} & \hat{\mathcal{R}}_{ML}<\frac{M}{N+M},\\ ۱-\sum_{s=۰}^{N-۱}\frac{\binom{N-۱}{s}}{\binom{M+s-۱}{s}}\left(-\frac{۱-\hat{\mathcal{R}}_{ML}}{\hat{\mathcal{R}}_{ML}}\frac{M}{N}\right)^{s} & \hat{\mathcal{R}}_{ML}\geq\frac{M}{N+M}.\end{cases}\qquad(۳۱.۲)$$

برهان. به‌راحتی می‌توان نشان داد که $(T_۱, T_۲)^\top$ ارائه شده در روابط (۲۶.۲) و (۲۷.۲) یک آماره بسنده کامل برای $(\theta_۱, \theta_۲)$ می‌باشد. اگر فرض کنیم $U = -\log(۱ - e^{-R_{۱,۱}})$ و $V = -\log(۱ - e^{-S_{۱,۱}})$ باشد در این صورت آماره

$$I(U < V) = \begin{cases} ۱ & U < V, \\ ۰ & o.w, \end{cases}$$

یک برآورگر ناریب برای $\mathcal{R}$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از روش رائو- بلکول[۱۰] و لهمن و شفه[۱۱] (لهمن و کسلا[۱۲]، ۱۹۹۸)، برآورگر $UMVU$ برای $\mathcal{R}$ با جایگذاری $(t_۱, t_۲)^\top$ به‌جای $(T_۱, T_۲)^\top$ در احتمال شرطی زیر به‌دست می‌آید.

$$P\left(U < V | T_۱ = t_۱, T_۲ = t_۲\right) = \int_{\mathcal{C}} \int f_{U|T_۱=t_۱}(u) f_{V|T_۲=t_۲}(v) du dv, \qquad (۳۲.۲)$$

که انتگرال اخیر روی ناحیه $\mathcal{C} = \{(u, v) : ۰ < u < t_۱, ۰ < v < t_۲, u < v\}$ می‌باشد. قبل از محاسبه این انتگرال، لازم است توزیع شرطی $U|(T_۱ = t_۱)$ و $V|(T_۲ = t_۲)$ را بدانیم. با اندکی محاسبات جبری خواهیم داشت

$$f_{U|(T_۱=t_۱)}(u) = \frac{(N-۱)(t_۱ - u)^{N-۲}}{t_۱^{N-۱}} \qquad ۰ < u < t_۱, \qquad (۳۳.۲)$$

و

$$f_{V|(T_۲=t_۲)}(v) = \frac{(M-۱)(t_۲ - v)^{M-۲}}{t_۲^{M-۱}} \qquad ۰ < v < t_۲. \qquad (۳۴.۲)$$

اگر $t_۱ < t_۲$، سمت راست رابطه (۳۲.۲) (RHS) برابر می‌شود با

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{(N-۱)(M-۱)}{t_۱^{N-۱} t_۲^{M-۱}} \int_۰^{t_۱} \int_u^{t_۲} (t_۱ - u)^{N-۲} (t_۲ - v)^{M-۲} dv du \\ &= \frac{(N-۱)}{t_۱^{N-۱} t_۲^{M-۱}} \int_۰^{t_۱} (t_۱ - u)^{N-۲} (t_۲ - u)^{M-۱} du. \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن تبدیل $z = \frac{u}{t_۱}$ و استفاده از بسط دوجمله‌ای برای $(t_۲ - z t_۱)^{M-۱}$ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} RHS &= (N-۱) \sum_{s=۰}^{M-۱} \left(\frac{t_۱}{t_۲}\right)^s (-۱)^s \binom{M-۱}{s} \int_۰^۱ z^s (۱-z)^{N-۲} dz \\ &= \sum_{s=۰}^{M-۱} (-۱)^s \frac{\binom{M-۱}{s}}{\binom{N+s-۱}{s}} \left(\frac{t_۱}{t_۲}\right)^s. \end{aligned}$$

---

[۱۰] Rao-Blackwell

[۱۱] Lehmann-Scheffe

[۱۲] Cassela

به‌طور مشابه، اگر $t_۲ < t_۱$، آن‌گاه

$$RHS = ۱ - \sum_{s=۰}^{N-۱} (-۱)^s \frac{\binom{N-۱}{s}}{\binom{M+s-۱}{s}} \left(\frac{t_۲}{t_۱}\right)^s.$$

از این‌رو داریم

$$\hat{\mathcal{R}}_{UMVU} = \begin{cases} \sum_{s=۰}^{M-۱} (-۱)^s \frac{\binom{M-۱}{s}}{\binom{N+s-۱}{s}} \left(\frac{T_۱}{T_۲}\right)^s & T_۱ < T_۲, \\ ۱ - \sum_{s=۰}^{N-۱} (-۱)^s \frac{\binom{N-۱}{s}}{\binom{M+s-۱}{s}} \left(\frac{T_۲}{T_۱}\right)^s & T_۱ > T_۲, \end{cases} \tag{۳۵.۲}$$

که $T_۱$ و $T_۲$ به ترتیب در رابطه‌های (۲۶.۲) و (۲۷.۲) بیان شده‌است. درنهایت با استفاده از (۲۵.۲) نتیجه موردنظر محاسبه می‌گردد. □

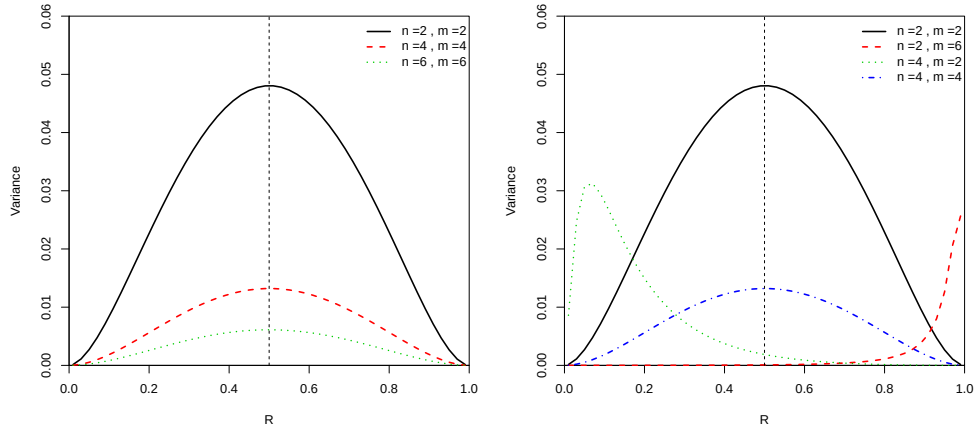
با استفاده از رابطه (۳۱.۲)، نمودار مقادیر عددی $Var(\hat{\mathcal{R}}_{UMVU})$ در مقابل $\mathcal{R}$ را برای ترکیب‌های مختلفی از n و m در شکل ۲.۲ رسم نمودیم. مشاهده می‌کنیم رفتار $Var(\hat{\mathcal{R}}_{UMVU})$ زمانی‌که $n = m$، تقریباً مشابه رفتار $MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}, \mathcal{R})$ می‌باشد اما زمانی‌که $n \neq m$، نمودار فوق رفتار متفاوتی دارد و نامتقارن می‌باشد. بنابراین برای مقایسه بهتر عملکرد این دو برآوردگر نقطه‌ای، از معیار کارایی نسبی استفاده می‌کنیم. با درنظر گرفتن

$$\mathbf{e}(\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}, \hat{\mathcal{R}}_{ML}) = \frac{Var(\hat{\mathcal{R}}_{UMVU})}{MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}, \mathcal{R})},$$

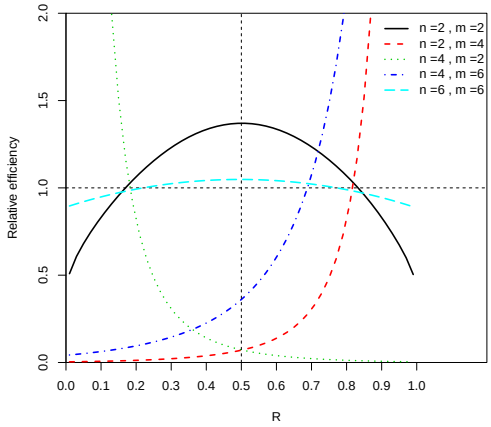
نمودار کارایی نسبی برآورگرهای نقطه‌ای به‌دست آمده را برای نمونه‌هایی با اندازه‌های مختلف در شکل (۳.۲) رسم نمودیم. با توجه به شکل، ملاحظه می‌کنیم نمودار فوق در حالتی که $n = m$ حول $\mathcal{R} = ۰/۵$ متقارن می‌باشد و به ازای $n < m$ و یا $n > m$ از حالت تقارن فاصله می‌گیرند. در حالتی‌که $n = m$، برای مقادیر نزدیک به مقادیر میانی $\mathcal{R}$، کارایی نسبی برآوردگر $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ بهتر از $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}$ می‌باشد. با این حال، ملاحظه می‌شود برای مقادیر ابتدایی و انتهایی $\mathcal{R}$، عملکرد $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}$ بهتر از $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ می‌باشد. این ویژگی در داده‌های واقعی که در بخش ۵.۲ مورد بررسی قرار می‌گیرند نیز مشاهده می‌گردد.

۳.۲ برآورد فاصله‌ای پارامتر تنش-مقاومت

برآوردهای نقطه‌ای و فاصله ای به‌طور نزدیکی به هم مرتبط می‌باشند با این حال فواصل اطمینان شامل اطلاعات بیشتری می‌باشد و استنباط‌های بهتری فراهم می‌کند. در ادامه یک فاصله‌ی اطمینان دقیق برای حالت سوم بخش قبل یعنی حالتی‌که $\lambda_۱ = \lambda_۲ = ۱$ و $\theta_۱ \neq \theta_۲$ باشد را با استفاده از کمیت محور و همچنین سه فاصله اطمینان تقریبی براساس بوت‌استرپ پارامتری برای $\mathcal{R}$ به‌دست می‌آوریم.



شکل ۲.۲: نمودار $Var(\hat{\mathcal{R}}_{UMVU})$ در مقابل $\mathcal{R}$.



شکل ۳.۲: نمودار $\mathbf{e}(\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}, \hat{\mathcal{R}}_{ML})$ در مقابل $\mathcal{R}$.

۱.۳.۲ فاصله اطمینان براساس کمیت‌محوری

با استفاده از رابطه‌ی (۲۵.۲)-(۲۷.۲) داریم

$$\hat{\mathcal{R}}_{ML} \stackrel{d}{=} \left(1 + \frac{1-\mathcal{R}}{\mathcal{R}} W\right)^{-1}, \qquad (۳۶.۲)$$

که در آن $\stackrel{d}{=}$ نشان‌دهنده‌ی هم‌توزیع بودن و $W \sim F_{2M,2N}$ یک متغیر تصادفی با توزیع فیشر به ترتیب با $2M$ و $2N$ درجه‌ی آزادی است. بنابراین با استفاده از (۳۶.۲) یک فاصله اطمینان دقیق

$(۱-\alpha)$٪۱۰۰ برای $\mathcal{R}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\left\{\left(۱+\frac{۱-\hat{\mathcal{R}}_{ML}}{\hat{\mathcal{R}}_{ML}}F_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(۲N,۲M)\right)^{-۱},\left(۱+\frac{۱-\hat{\mathcal{R}}_{ML}}{\hat{\mathcal{R}}_{ML}}F_{\frac{\alpha}{۲}}(۲N,۲M)\right)^{-۱}\right\}, \quad (۳۷.۲)$$

که در آن $F_\alpha(۲N,۲M)$ چندک αام توزیع F با $۲N$ و $۲M$ درجه‌آزادی است.
مقادیر عددی میانگین طول فاصله اطمینان (۳۷.۲) را براساس (۳۶.۲) در جدول‌های ۱.۲ و ۲.۲ برحسب سطح معنی‌داری $\alpha = ۰/۰۵, ۰/۱$ محاسبه کرده‌ایم. برطبق نتایج به‌دست آمده، مشاهده می‌شود با افزایش اندازه‌ی نمونه‌ها، طول فاصله اطمینان کاهش می‌یابد. همچنین زمانی‌که $\mathcal{R} = ۰/۵$، میانگین طول فاصله اطمینان بیشترین مقدار را دارد که شکل‌های ۱.۲ و ۲.۲ مربوط به میانگین توان دوم خطای برآوردگر $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ و واریانس $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}$ نیز براین مطلب صحه می‌گذارند. درحقیقت بیشتر بودن میانگین طول فاصله اطمینان و همچنین میانگین مربع خطا در این نقطه را می‌توان به این نکته دلالت داد که تشخیص قدرت متغیرهای تنش و مقاومت در حوالی $\mathcal{R} = ۰/۵$ سخت‌تر می‌باشد.

۲.۳.۲ فواصل اطمینان بوت‌استرپ پارامتری

در بخش ۷.۱ درخصوص انواع بوت‌استرپ و فواصل اطمینان تقریبی بر پایه‌ی بوت‌استرپ بحث شد. همان‌طور که بیان شد، در صورتی که توزیع جامعه‌ی آماری مشخص باشد و فقط پارامترهای آن مجهول باشند، می‌توان از روش بوت‌استرپ پارامتری برای تولید نمونه‌های بوت‌استرپی استفاده نمود. در این بخش، با فرض این‌که پارامتر مقیاس λ برابر با یک باشد چند فاصله بوت‌استرپی را به‌دست می‌آوریم. فواصل اطمینان بوت‌استرپ پایه‌ای، بوت استرپ صدکی و همچنین t-بوت‌استرپ را با استفاده از روش‌های ارائه شده در افرون و تیبشیرانی (۱۹۹۳) و صالحی و احمدی (۲۰۱۵) به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که تمامی نتایج به‌دست آمده در بخش‌های قبلی از این فصل، براساس $T_۱ = -\sum_{i=۱}^{n}\log(۱-e^{-R_{i,i}})$ و $T_۲ = -\sum_{j=۱}^{m}\log(۱-e^{-S_{j,j}})$ که $T_۱ \sim Gamma(N,\theta_۱)$ و $T_۲ \sim Gamma(M,\theta_۲)$ می باشند، لذا می‌توان از بوت‌استرپ پارامتری به‌جای بوت‌استرپ ناپارامتری برای تولید نمونه‌های بوت‌استرپی استفاده نمود. سه گام معمول از روش بوت‌استرپ برای یافتن فواصل اطمینان به‌شرح الگوریتم زیر می‌باشد.

فاصله اطمینان بوت‌استرپ پایه

با انجام تمام مراحل الگوریتم ۵، مشاهدات بوت‌استرپی $d^\star = \left(d^\star_{(۱)},\ldots,d^\star_{(B)}\right)^T$ را به‌دست آورید که در آن $d^\star_{(b)} = \mathcal{R}^\star_{(b)ML} - \hat{\mathcal{R}}_{ML}$، $b = ۱,\ldots,B$ است. درنهایت بازه اطمینان بوت‌استرپ پایه $(۱-\alpha)$٪۱۰۰ برای $\mathcal{R}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - d^\star_{۱-\alpha/۲}, \hat{\mathcal{R}}_{ML} - d^\star_{\alpha/۲}\right) \quad (۳۸.۲)$$

که در آن $d^\star_\gamma$ چندک γام $d^\star$ می‌باشد.

الگوریتم ۵ الگوریتم عمومی بوت‌استرپ پارامتری

۱. براساس نمونه‌های مستقل مشاهده شده t_{1i} و t_{2j} از توزیع $t_{1i} \sim Gamma(i,\theta_1)$، $t_{2j} \sim Gamma(j,\theta_2),\ \ j=1,\ldots,m$ و $i=1,\ldots,n$، برآوردهای $\hat{\theta}_1$ ، $\hat{\theta}_2$ و $\hat{R}_{ML}$ را به‌ترتیب از روابط (۲۳.۲)، (۲۴.۲) و (۲۵.۲) به‌دست آورید.

۲. نمونه‌های بوت‌استرپی $t^{\star}_{1i} \sim Gamma(i,\hat{\theta}_1)$ که $i=1,\ldots,n$ و $t^{\star}_{2j} \sim Gamma(j,\hat{\theta}_2)$ که $j=1,\ldots,m$ را تولید کنید و با استفاده از آن‌ها برآوردهای بوت استرپی $\hat{\theta}^{\star}_1$، $\hat{\theta}^{\star}_2$ و $\hat{\mathcal{R}}^{\star}_{ML}$ را به‌دست آورید.

۳. گام دو را برای $b=1,\ldots,B$ تکرار کنید تا B مشاهده بوت‌استرپی $\hat{\mathcal{R}}^{\star}_{(b)ML}$ به‌دست آورید.

فاصله‌اطمینان بوت‌استرپ صدکی

ابتدا مراحل ۳-۱ الگوریتم ۵ را انجام دهید. حال اگر $\hat{F}$ تابع توزیع تجربی مشاهدات $\hat{\mathcal{R}}^{\star}_{(b)ML}$ ، $b=1,\ldots,B$ باشد، آن‌گاه بازه‌ی

$$\left(\hat{F}^{-1}(\frac{\alpha}{2}),\hat{F}^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})\right) \qquad (۳۹.۲)$$

یک فاصله اطمینان بوت‌استرپ صدکی برای $\mathcal{R}$ با ضریب تقریبی $100(1-\alpha)\%$ است.

فاصله اطمینان t-بوت‌استرپ

برای به‌دست آوردن فاصله اطمینان t-بوت‌استرپ با انحراف معیار مجانبی، علاوه بر انجام مراحل بیان شده در الگوریتم ۵، به ازای هر تکرار گام دوم، بوت‌استرپ پارامتری دیگری برای به‌دست آوردن انحراف معیار مجانبی انجام دهید. بدین‌صورت که، مرحله دوم الگوریتم فوق را برای $b'=1,\ldots,B'$ تکرار کنید تا $t^{\star\star}_{1i} \sim Gamma(i,\hat{\theta}^{\star}_1)$ و $i=1,\ldots,n$ ، $t^{\star\star}_{2j} \sim Gamma(j,\hat{\theta}^{\star}_2)$ ، $j=1,\ldots,m$ را تولید کنید. سپس با استفاده از مشاهدات $\hat{\mathcal{R}}^{\star\star}_{(b')ML}$، برآورد بوت‌استرپ انحراف استاندارد $\hat{\mathcal{R}}^{\star}_{(b)ML}$ را به صورت زیر به‌دست آورید

$$\hat{\sigma}(\hat{\mathcal{R}}^{\star}_{(b)ML}) = \sqrt{\frac{1}{B'-1}\sum_{b'=1}^{B'}\left(\hat{\mathcal{R}}^{\star\star}_{(b')ML}-\bar{\mathcal{R}}^{\star\star}\right)^2}, \qquad (۴۰.۲)$$

که در این رابطه $\bar{\mathcal{R}}^{\star\star}$ میانگین نمونه $\hat{\mathcal{R}}^{\star\star}_{(b')ML}$ها یعنی $\bar{\mathcal{R}}^{\star\star}=\frac{1}{B'}\sum_{b'=1}^{B'}\hat{\mathcal{R}}^{\star\star}_{(b')ML}$ می‌باشد. حال بردار $t^{\star}=\left(t^{\star}_{(1)},\ldots,t^{\star}_{(B)}\right)$ را در نظر بگیرید، به‌طوری‌که

$$t^{\star}_{(b)}=\frac{\hat{\mathcal{R}}^{\star}_{(b)ML}-\hat{\mathcal{R}}_{ML}}{\hat{\sigma}(\hat{\mathcal{R}}^{\star}_{(b)ML})},\quad b=1,\ldots,B.$$

در این‌صورت فاصله اطمینان t-بوت‌استرپ $\%۱۰۰(۱-\alpha)$ برای $\mathcal{R}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - t^{\star}_{۱-\alpha/۲}\hat{\sigma}(\hat{\mathcal{R}}_{ML}), \hat{\mathcal{R}}_{ML} - t^{\star}_{\alpha/۲}\hat{\sigma}(\hat{\mathcal{R}}_{ML})),$$

که $t^{\star}_{\gamma}$ چندک γام $t^{\star}$ و $\hat{\sigma}(\hat{\mathcal{R}}_{ML})$ نیز برآورد بوت‌استرپی انحراف معیار برآوردگر $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ می‌باشد.

۴.۲ مقایسه‌ی برآوردگرهای فاصله‌ای براساس شبیه‌سازی

در این بخش، براساس نتایج شبیه‌سازی مونت‌کارلو و بوت‌استرپ، فواصل اطمینان مطرح شده در بخش ۳.۲، مقایسه شده‌اند. در فرآیند شبیه‌سازی تمام ترکیب‌های متفاوت $n = ۲,۴,۶$ و $m = ۲,۴,$ درنظر گرفته شده‌است. همچنین $\mathcal{R} = ۰/۱, ۰/۵, ۰/۹۵$ و $\theta_۲ = ۰/۴$ فرض شده‌است و به تبع مفروضات فوق مقادیر مربوط به $\theta_۱$ از رابطه‌ی (۲۲.۲) به‌دست آمده‌است. مقدار $B = ۱۰۰۰$ درنظر گرفته شده‌است و به ازای هرکدام از ترکیب‌ها، ۱۰۰۰۰ نمونه‌ی $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$ به ترتیب از توزیع $GE(\theta_۱, ۱)$ و $GE(\theta_۲, ۱)$ تولید شده‌است. همان طور که می‌دانیم برای محاسبه‌ی انحراف معیار بوت‌استرپی نیاز به تکرار زیاد نیست، لذا انتخاب $B' = ۲۵$ برآوردگر منطقی از انحراف معیار بوت‌استرپی را نتیجه می‌دهد (افرون و تیبشیرانی، ۱۹۹۳). نتایج مربوط به شبیه‌سازی فواصل اطمینان را که شامل میانگین طول فاصله اطمینان (EL) و احتمال پوشش (CP) است در جدول‌های ۱.۲ و ۲.۲ به‌ازای $\alpha = ۰/۰۵, ۰/۱$ به‌طور جداگانه‌ای محاسبه و نمایش داده شده‌است. اگر (L, U) یک فاصله اطمینان برای $\mathcal{R}$ باشد و (L_i, U_i)، $i = ۱, \ldots, ۱۰۰۰۰$، مشاهدات آن باشد، آن‌گاه میانگین طول و احتمال پوشش آن به‌ترتیب برابر است با:

$$EL = \frac{۱}{۱۰۰۰۰}\sum_{i=۱}^{۱۰۰۰۰}(U_i - L_i), \quad CP = \frac{۱}{۱۰۰۰۰}\sum_{i=۱}^{۱۰۰۰۰} I(U_i \le \mathcal{R} \le L_i) \qquad (۴۱.۲)$$

که $I(A)$ تابع نشان‌گر مجموعه‌ی A می‌باشد. همچنین در این جدول‌ها نمادهای زیر به‌کار رفته‌است.

- ML: فاصله اطمینان دقیق بر پایه‌ی کمیت محور براساس رابطه (۳۷.۲).
- $Basic$: فاصله اطمینان بوت‌استرپ پایه برطبق رابطه (۳۸.۲).
- $Perc$: فاصله اطمینان بوت‌استرپ صدکی به‌دست آمده از رابطه (۳۹.۲).
- $Boot-t$: فاصله اطمینان t-بوت‌استرپ با انحراف معیار بوت‌استرپی براساس رابطه (۴۰.۲).

نتایج زیر از جدول‌های ۱.۲ و ۲.۲ کسب می‌شوند.

- میانگین طول تمامی فواصل اطمینان با افزایش حجم نمونه کاهش می‌یابد.
- بیشترین مقدار میانگین طول در نقطه وسط یعنی $\mathcal{R} = ۰/۵$ رخ می‌دهد که این رفتار را قبلاً در نمودارهای مربوط به میانگین توان دوم برآورگرهای نقطه‌ای نیز شاهد بودیم.

جدول ۱.۲: مقادیر EL و CP فواصل اطمینان ٪۹۵ برای $\mathcal{R}$.

EL.Basic	CP.Basic	EL.ML	CP.ML	EL.Boot-t	CP.Boot-t	EL.Perc	CP.Perc	m	n	$\mathcal{R}$	Row
۰.۳۸۰	۰.۷۶۴	۰.۳۸۲	۰.۹۴۸	۰.۴۲۷	۰.۹۵۴	۰.۳۸۲	۰.۹۴۸	۲	۲	۰.۱	۱
۰.۲۳۳	۰.۷۸۲	۰.۳۱۷	۰.۹۵۲	۰.۵۳۳	۰.۹۸۶	۰.۲۳۴	۰.۹۱۸	۴	۲	۰.۱	۲
۰.۲۰۳	۰.۷۷۷	۰.۳۰۰	۰.۹۵۱	۰.۶۲۴	۰.۹۹۴	۰.۲۰۴	۰.۸۹۴	۶	۲	۰.۱	۳
۰.۳۵۳	۰.۸۲۵	۰.۲۷۰	۰.۹۵۰	۰.۳۲۳	۰.۹۶۶	۰.۳۵۵	۰.۹۱۷	۲	۴	۰.۱	۴
۰.۱۷۷	۰.۸۵۹	۰.۱۷۸	۰.۹۵۲	۰.۱۹۰	۰.۹۶۸	۰.۱۷۸	۰.۹۵۱	۴	۴	۰.۱	۵
۰.۱۳۹	۰.۸۶۷	۰.۱۵۱	۰.۹۵۲	۰.۱۹۰	۰.۹۸۵	۰.۱۳۹	۰.۹۴۵	۶	۴	۰.۱	۶
۰.۳۴۱	۰.۸۳۹	۰.۲۴۵	۰.۹۵۲	۰.۳۲۶	۰.۹۸۲	۰.۳۴۳	۰.۸۹۵	۲	۶	۰.۱	۷
۰.۱۵۶	۰.۸۷۹	۰.۱۴۶	۰.۹۵۰	۰.۱۷۳	۰.۹۸۰	۰.۱۵۷	۰.۹۴۴	۴	۶	۰.۱	۸
۰.۱۱۵	۰.۸۹۹	۰.۱۱۵	۰.۹۵۱	۰.۱۲۱	۰.۹۶۳	۰.۱۱۵	۰.۹۵۰	۶	۶	۰.۱	۹
۰.۶۴۲	۰.۷۱۲	۰.۶۴۴	۰.۹۴۸	۰.۸۸۶	۰.۹۵۳	۰.۶۴۴	۰.۹۴۸	۲	۲	۰.۵	۱۰
۰.۵۴۸	۰.۷۸۲	۰.۵۵۸	۰.۹۵۲	۰.۸۸۲	۰.۹۸۴	۰.۵۵۰	۰.۹۱۸	۴	۲	۰.۵	۱۱
۰.۵۲۰	۰.۷۹۴	۰.۵۳۴	۰.۹۵۱	۰.۹۱۱	۰.۹۹۴	۰.۵۲۲	۰.۸۹۴	۶	۲	۰.۵	۱۲
۰.۵۴۷	۰.۷۷۸	۰.۵۵۸	۰.۹۵۰	۰.۸۸۶	۰.۹۸۴	۰.۵۴۹	۰.۹۱۷	۲	۴	۰.۵	۱۳
۰.۴۰۴	۰.۸۶۶	۰.۴۰۶	۰.۹۵۲	۰.۵۰۵	۰.۹۷۲	۰.۴۰۶	۰.۹۵۱	۴	۴	۰.۵	۱۴
۰.۳۵۴	۰.۸۸۹	۰.۳۵۶	۰.۹۵۲	۰.۴۹۴	۰.۹۸۷	۰.۳۵۵	۰.۹۴۵	۶	۴	۰.۵	۱۵
۰.۵۲۰	۰.۷۹۳	۰.۵۳۳	۰.۹۵۲	۰.۹۱۴	۰.۹۹۴	۰.۵۲۲	۰.۸۹۵	۲	۶	۰.۵	۱۶
۰.۳۵۴	۰.۸۸۴	۰.۳۵۶	۰.۹۵۰	۰.۴۹۳	۰.۹۸۶	۰.۳۵۵	۰.۹۴۴	۴	۶	۰.۵	۱۷
۰.۲۹۰	۰.۹۰۸	۰.۲۹۱	۰.۹۵۱	۰.۳۳۳	۰.۹۶۹	۰.۲۹۱	۰.۹۴۹	۶	۶	۰.۵	۱۸
۰.۲۴۹	۰.۷۶۰	۰.۲۵۰	۰.۹۴۸	۰.۲۴۴	۰.۹۴۵	۰.۲۵۱	۰.۹۴۸	۲	۲	۰.۹۵	۱۹
۰.۲۲۹	۰.۸۱۸	۰.۱۶۲	۰.۹۵۲	۰.۱۷۷	۰.۹۶۳	۰.۲۳۰	۰.۹۱۸	۴	۲	۰.۹۵	۲۰
۰.۲۲۳	۰.۸۳۷	۰.۱۴۶	۰.۹۵۱	۰.۱۸۰	۰.۹۷۹	۰.۲۲۴	۰.۸۹۴	۶	۲	۰.۹۵	۲۱
۰.۱۳۴	۰.۷۶۳	۰.۱۹۶	۰.۹۵۰	۰.۲۹۸	۰.۹۸۵	۰.۱۳۵	۰.۹۱۷	۲	۴	۰.۹۵	۲۲
۰.۰۹۹	۰.۸۵۰	۰.۰۹۹	۰.۹۵۲	۰.۰۹۹	۰.۹۶۱	۰.۰۹۹	۰.۹۵۱	۴	۴	۰.۹۵	۲۳
۰.۰۸۸	۰.۸۸۰	۰.۰۸۱	۰.۹۵۲	۰.۰۹۱	۰.۹۷۸	۰.۰۸۸	۰.۹۴۵	۶	۴	۰.۹۵	۲۴
۰.۱۱۵	۰.۷۷۵	۰.۱۸۵	۰.۹۵۲	۰.۳۵۵	۰.۹۹۲	۰.۱۱۵	۰.۸۹۵	۲	۶	۰.۹۵	۲۵
۰.۰۷۷	۰.۸۵۹	۰.۰۸۴	۰.۹۵۰	۰.۱۰۱	۰.۹۸۳	۰.۰۷۷	۰.۹۴۴	۴	۶	۰.۹۵	۲۶
۰.۰۶۳	۰.۸۹۴	۰.۰۶۳	۰.۹۵۱	۰.۰۶۴	۰.۹۵۷	۰.۰۶۳	۰.۹۵۰	۶	۶	۰.۹۵	۲۷

- همان‌طور که انتظار داشتیم، سطح پوشش فاصله اطمینان دقیق بر اساس کمیت محور (۳۷.۲)، به سطح معنی‌داری مد نظر α نزدیک‌تر می‌باشد. با این حال، براساس معیار میانگین طول، فاصله اطمینان بوت‌استرپ پایه بهتر از سایر فواصل اطمینان عمل می‌کند. هچنین فاصله اطمینان $t-$ بوت‌استرپ به سطح اطمینان مورد نظر نزدیک‌تر است.

۵.۲ مثال واقعی

در این بخش قصد داریم برآوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای به‌دست آمده در بخش‌های ۲.۲ و ۳.۲ را با استفاده از یک مجموعه داده‌ی واقعی، آزمایش کنیم. بدین منظور از داده‌های مربوط به آزمایشات موتور راکت که قبلاً توسط گاتمن[۱۳] و همکاران (۱۹۸۸) و کوتز[۱۴] و همکاران (۲۰۰۳)، صفحه ۲۰۵، گزارش شده‌است، استفاده می‌کنیم. در اینجا متغیر تصادفی Y، مقاومت موتور راکت در برابر فشار عملیاتی X است. برطبق داده‌های گزارش‌شده، فشار X به دمای Z بستگی دارد که در بررسی انجام شده، داده‌های X مربوط به دمای $Z = ۵۹^\circ$ در نظر گرفته شده‌است. این داده‌ها شامل ۵۱ مقدار برای (X, Z) و ۱۷ مقدار برای متغیر

[۱۳] Guttman

[۱۴] Kotz

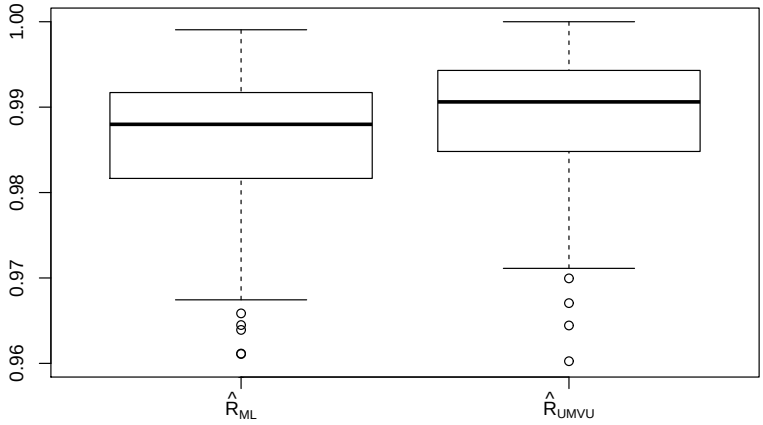
جدول ۲.۲: مقادیر EL و CP فواصل اطمینان ٪۹۰ برای $\mathcal{R}$.

EL.Basic	CP.Basic	EL.ML	CP.ML	EL.Boot-t	CP.Boot-t	EL.Perc	CP.Perc	m	n	$\mathcal{R}$	Row
۰.۳۱۰	۰.۷۴۴	۰.۳۱۱	۰.۸۹۷	۰.۳۳۲	۰.۹۰۶	۰.۳۱۱	۰.۸۹۷	۲	۲	۰.۱	۱
۰.۱۹۴	۰.۷۶۳	۰.۲۵۲	۰.۹۰۰	۰.۳۹۸	۰.۹۷۰	۰.۱۹۵	۰.۸۷۲	۴	۲	۰.۱	۲
۰.۱۷۱	۰.۷۵۸	۰.۲۳۷	۰.۹۰۱	۰.۴۷۵	۰.۹۸۴	۰.۱۷۲	۰.۸۴۸	۶	۲	۰.۱	۳
۰.۲۸۵	۰.۸۰۴	۰.۲۲۷	۰.۸۹۸	۰.۲۷۵	۰.۹۳۰	۰.۲۸۶	۰.۸۷۰	۲	۴	۰.۱	۴
۰.۱۴۶	۰.۸۳۲	۰.۱۴۷	۰.۹۰۱	۰.۱۵۱	۰.۹۱۸	۰.۱۴۷	۰.۹۰۱	۴	۴	۰.۱	۵
۰.۱۱۶	۰.۸۳۸	۰.۱۲۴	۰.۹۰۲	۰.۱۵۱	۰.۹۵۵	۰.۱۱۶	۰.۸۹۶	۶	۴	۰.۱	۶
۰.۲۷۴	۰.۸۱۸	۰.۲۰۷	۰.۸۹۷	۰.۲۸۰	۰.۹۵۶	۰.۲۷۵	۰.۸۵۰	۲	۶	۰.۱	۷
۰.۱۲۹	۰.۸۵۱	۰.۱۲۱	۰.۹۰۰	۰.۱۴۰	۰.۹۴۶	۰.۱۲۹	۰.۸۹۵	۴	۶	۰.۱	۸
۰.۰۹۶	۰.۸۶۸	۰.۰۹۶	۰.۹۰۱	۰.۰۹۸	۰.۹۱۱	۰.۰۹۶	۰.۹۰۲	۶	۶	۰.۱	۹
۰.۵۵۶	۰.۶۸۰	۰.۵۵۸	۰.۸۹۷	۰.۷۶۰	۰.۹۰۲	۰.۵۵۷	۰.۸۹۶	۲	۲	۰.۵	۱۰
۰.۴۷۲	۰.۷۳۹	۰.۴۷۹	۰.۹۰۰	۰.۷۹۰	۰.۹۶۰	۰.۴۷۳	۰.۸۷۲	۴	۲	۰.۵	۱۱
۰.۴۴۸	۰.۷۵۳	۰.۴۵۸	۰.۹۰۱	۰.۸۴۱	۰.۹۸۲	۰.۴۴۹	۰.۸۴۸	۶	۲	۰.۵	۱۲
۰.۴۷۲	۰.۷۴۰	۰.۴۷۹	۰.۸۹۸	۰.۷۹۲	۰.۹۵۸	۰.۴۷۳	۰.۸۶۹	۲	۴	۰.۵	۱۳
۰.۳۴۴	۰.۸۱۶	۰.۳۴۵	۰.۹۰۱	۰.۴۰۵	۰.۹۳۲	۰.۳۴۵	۰.۹۰۰	۴	۴	۰.۵	۱۴
۰.۳۰۰	۰.۸۴۰	۰.۳۰۱	۰.۹۰۲	۰.۳۹۹	۰.۹۶۱	۰.۳۰۱	۰.۸۹۶	۶	۴	۰.۵	۱۵
۰.۴۴۸	۰.۷۵۵	۰.۴۵۸	۰.۸۹۷	۰.۸۴۲	۰.۹۸۱	۰.۴۴۹	۰.۸۴۹	۲	۶	۰.۵	۱۶
۰.۳۰۰	۰.۸۳۵	۰.۳۰۱	۰.۹۰۰	۰.۳۹۹	۰.۹۵۹	۰.۳۰۱	۰.۸۹۵	۴	۶	۰.۵	۱۷
۰.۲۴۵	۰.۸۶۲	۰.۲۴۶	۰.۹۰۱	۰.۲۷۱	۰.۹۲۵	۰.۲۴۶	۰.۹۰۱	۶	۶	۰.۵	۱۸
۰.۱۹۶	۰.۷۴۶	۰.۱۹۷	۰.۸۹۷	۰.۱۸۳	۰.۹۰۱	۰.۱۹۷	۰.۸۹۶	۲	۲	۰.۹۵	۱۹
۰.۱۷۸	۰.۷۹۹	۰.۱۳۴	۰.۹۰۰	۰.۱۴۷	۰.۹۲۸	۰.۱۷۹	۰.۸۷۲	۴	۲	۰.۹۵	۲۰
۰.۱۷۳	۰.۸۲۰	۰.۱۲۲	۰.۹۰۱	۰.۱۵۳	۰.۹۵۱	۰.۱۷۴	۰.۸۴۸	۶	۲	۰.۹۵	۲۱
۰.۱۱۰	۰.۷۴۹	۰.۱۵۱	۰.۸۹۸	۰.۲۱۷	۰.۹۶۸	۰.۱۱۰	۰.۸۷۰	۲	۴	۰.۹۵	۲۲
۰.۰۸۱	۰.۸۲۶	۰.۰۸۱	۰.۹۰۱	۰.۰۷۹	۰.۹۰۴	۰.۰۸۱	۰.۹۰۱	۴	۴	۰.۹۵	۲۳
۰.۰۷۲	۰.۸۵۵	۰.۰۶۷	۰.۹۰۲	۰.۰۷۳	۰.۹۴۳	۰.۰۷۲	۰.۸۹۶	۶	۴	۰.۹۵	۲۴
۰.۰۹۶	۰.۷۵۸	۰.۱۴۲	۰.۸۹۷	۰.۲۶۲	۰.۹۸۳	۰.۰۹۶	۰.۸۵۰	۲	۶	۰.۹۵	۲۵
۰.۰۶۴	۰.۸۳۳	۰.۰۶۹	۰.۹۰۰	۰.۰۸۱	۰.۹۴۹	۰.۰۶۴	۰.۸۹۵	۴	۶	۰.۹۵	۲۶
۰.۰۵۲	۰.۸۶۲	۰.۰۵۲	۰.۹۰۱	۰.۰۵۲	۰.۹۰۴	۰.۰۵۲	۰.۹۰۱	۶	۶	۰.۹۵	۲۷

Y می‌باشند. درابتدا برای بررسی مطابقت توزیع نمایی تعمیم یافته بر داده‌های فوق از معیار کولوموگروف- اسمیرنوف[۱۵] استفاده نمودیم. نتایج مربوط به $P-value$ آزمون کولوموگروف- اسمیرنوف به ترتیب ۰.۱۵۴ و ۰.۶۸۸ به‌دست آمد که نشان می‌دهد توزیع نمایی تعمیم‌یافته بر داده‌های فوق مطابقت دارد. مقادیر $RRSS$ پایین استخراج شده براساس متغیر X در دمای $Z = ۵۹^\circ$ و متغیر Y براساس دیاگرام (۴.۱)، به ترتیب $\mathbf{r} = (۷/۷۴۰۱۰, ۷/۷۲۲۷, ۷/۲۹۰۴۰)$ و $\mathbf{s} = (۱۵/۳۰, ۱۶/۳۰, ۱۶)$، می‌باشد که $n = m = ۳$ است. همان‌طور که قبلاً در بخش ۶.۱ بیان شد، داده‌های مربوط به $RRSS$ها لزوماً مرتب نمی‌باشند که داده‌های فوق نیز این موضوع را تأیید می‌کند. برآوردگرهای نقطه‌ای مربوط به قابلیت اعتماد تنش-مقاومت براساس $RRSS$ پایین به‌دست آمده برابر است با $\hat{\mathcal{R}}_{ML} = ۰/۹۸۷۹$ و $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU} = ۰/۹۸۹۹$. برای بررسی عمکرد برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای نسبت به یکدیگر از روش بوت‌استرپ استفاده نمودیم تا با بازنمونه‌گیری داده‌ها، مشاهدات بیشتری برای بررسی برآوردگرها فراهم نماییم. بدین منظور ۲۰۰ نمونه‌ی بوت‌استرپی از داده‌های اصلی تولید و سپس $RRSS$های پایین را استخراج نمودیم. نمودار جعبه‌ای مشاهدات برآوردگرهای نقطه‌ای در شکل ۴.۲ نمایش داده‌شده‌است. مشاهده می‌شود دامنه‌ی میان چارکی $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}$ کمتر از $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ است، بنابراین با توجه به مقادیر برآوردشده، همان‌طور که قبلاً در شکل ۳.۲ نیز مشاهده کردیم، برای مقادیر انتهایی $\mathcal{R}$، برآوردگر $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}$

[۱۵] Kolomogrov- Smirnov

بهتر از $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ عمل می‌کند. برای بررسی فواصل اطمینان معرفی شده در بخش ۳.۲، فرآیند



شکل ۴.۲: مقایسه $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ و $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}$.

بوت‌استرپ ذکر شده در بالا عیناً ۱۰۰۰ بار دیگر تکرار شد و مقادیر مربوط به میانگین طول فواصل اطمینان بر طبق جدول ۳.۲ گزارش گردید. برطبق نتایج جدول فوق، مشاهده می‌شود

جدول ۳.۲: مقادیر EL براساس داده‌های واقعی

EL.Basic	EL.ML	EL.Boot-t	EL.Perc	α
۰.۰۴۵	۰.۰۳۴	۰.۰۳۴	۰.۰۴۷	۰.۰۵
۰.۰۳۳	۰.۰۲۷	۰.۰۲۴	۰.۰۳۴	۰.۱

میانگین طول فاصله اطمینان همانند نتایج مربوط به شبیه‌سازی می‌باشد. به‌طور دقیق تر، فواصل t-بوت استرپ و ML بهتر از فاصله اطمینان بوت‌استرپ پایه و صدکی عمل کرده‌است. در حقیقت نتایج به‌دست آمده از طریق داده‌های واقعی، کاملاً منطبق بر نتایج بخش قبل می‌باشند.

نتیجه‌گیری

در این فصل، برآوردهایی از قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را تحت شرایطی در نظر گرفتیم که تنها اطلاعات موجود از جامعه، $RRSS$های پایین به‌دست آمده از توزیع نمایی تعمیم یافته می‌باشند. برآوردگرهای ML و $UMVU$ را به‌دست آوردیم و خواص توزیعی برآوردگرهای فوق را بررسی نمودیم. در نهایت رفتار برآوردگرهای فوق نسبت به $\mathcal{R}$ و همچنین در مقایسه با یکدیگر، براساس معیار کارایی نسبی بررسی گردید. مشاهده شد، زمانی‌که $\mathcal{R}$ نزدیک به ۰.۵ است برآودگر ML بهتر

از $UMVU$ عمل می‌کند در حالی‌که برای مقادیر فرین $\mathcal{R}$، عملکرد برآوردگر $UMVU$ بهتر بود. فواصل اطمینان متعددی را به‌دست آوردیم و به کمک شبیه سازی مونت کارلو و با درنظر گرفتن دو معیار میانگین طول فاصله اطمینان و سطح پوشش برآوردگرهای فوق را مقایسه نمودیم. با بررسی نتایج به‌دست آمده، دریافتیم فاصله اطمینان دقیق، براساس کمیت محور بهتر از سایر فواصل اطمینان عمل می‌کند. در نهایت برآوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای به‌دست آمده را در یک مثال واقعی بررسی نمودیم که نتایج حاصل کاملاً منطبق بر نتایج نظری و شبیه سازی‌های صورت‌گرفته در این فصل می‌باشند.

فصل ۳

استنباط بیزی پارامتر $\mathcal{R}$ در توزیع نمایی تعمیم یافته با استفاده از $RRSS$

۱.۳ مقدمه

هدف اصلی ما در این فصل، استنباط در خصوص پارامتر تنش-مقاومت در توزیع نمایی تعمیم یافته براساس طرح $RRSS$ از نقطه نظر بیزی می‌باشد. در سال‌های اخیر رویکرد و روش بیزی به‌طور گسترده‌ای در علوم مختلف به‌کار برده شده‌است. روش بیزی را می‌توان به عنوان روش دیگری که در مقابل روش کلاسیک می‌باشد، در نظر گرفت. در حقیقت به‌کار بردن توزیع‌های پیشین دلیلی است بر اینکه روش بیزی نسبت به روش کلاسیک دارای مزیت و برتری می‌باشد. در روش بیزی پارامترها به عنوان یک متغیر تصادفی در نظر گرفته می‌شوند که دارای یک توزیع احتمالاتی می‌باشند که همان توزیع‌های پیشین هستند. در روش‌های بیزی توزیع احتمالات ذهنی و بر پایه درجه و میزان اعتقاد محقق از تجربیات گذشته می‌باشد و نتایج اصلی و تمام استنباط‌ها براساس توزیع‌های پسین می‌باشد یعنی اطلاعات پیشین با استفاده از داده‌ها و مشاهداتی که از نمونه به‌دست می‌آیند به‌روز شده و براساس این اطلاعات استنباط و برآورد انجام می‌شود. همچنین در این روش فواصل معتبر فواصلی هستند که تحلیل‌گر با ترکیب دانش و اطلاعات

پیشین با داده‌ها و مشاهدات نمونه، با اطمینان $\gamma(1-\alpha)\%$ مطمئن است که پارامتر درست در این بازه قرار می‌گیرد. در این دیدگاه بکلیزی[۱] (۲۰۰۸)، با در نظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم یافته و با استفاده از مقادیر رکوردی به استنباط در خصوص پارامتر تنش-مقاومت پرداخت. از جمله افراد دیگر که از دیدگاه بیزی به مسئله تنش- مقاومت پرداخته‌اند می‌توان به کندو و گوپتا[۲] (۲۰۰۵)، اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۶)، اشاره کرد. در ادامه، این فصل به‌شرح زیر سازماندهی شده‌است:

در بخش ۲.۳، برآورگر بیزی پارامتر تنش-مقاومت را با در نظر گرفتن سه حالت مختلف براساس $RRSS$های پایین از توزیع نمایی تعمیم‌یافته به‌دست می‌آوریم و سپس به کمک نمودار، رفتار برآورگر فوق را از منظر میانگین توان دوم خطا در مقابل $\mathcal{R}$، بررسی می‌نماییم. در بخش ۳.۳، فواصل معتبر بیزی و فواصل HPD را بر طبق توزیع‌های پیشین مزدوج و همچنین ناآگاهی بخش به‌دست می‌آوریم. در نهایت، به ترتیب در بخش‌های ۴.۳ و ۵.۳، به کمک شبیه‌سازی فواصل بیزی به‌دست‌آمده را مقایسه نموده و با یک مثال واقعی نتایج حاصل‌شده را بررسی می‌نماییم.

۲.۳ برآوردگر بیزی پارامتر تنش-مقاومت

در این بخش با درنظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم یافته به عنوان توزیع جوامع X و Y و براساس طرح $RRSS$، به محاسبه‌ی برآورگر بیزی برای $\mathcal{R} = Pr(X < Y)$ می‌پردازیم. در حقیقت فرض براین است که پارامترهای $\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2$ متغیرهای تصادفی مستقل از هم باشند و تحت حالت‌های زیر برآورد بیزی $\mathcal{R}$ را به‌دست می‌آوریم.

حالت اول: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ **و** $\theta_1 \neq \theta_2$

یک انتخاب معمول برای توزیع های پیشین پارامترهای $\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2$ به‌صورت زیر می‌باشد

$$\theta_i \sim Gamma(a_i, b_i), \qquad \lambda_i \sim Gamma(c_i, d_i), \qquad (i = 1, 2) \qquad (۱.۳)$$

که در آن $a_i, b_i, c_i, d_i (> 0)$ ابر-پارامترهای مربوط به توزیع‌های پیشین مستقل از هم هستند. تابع

[۱] Baklizi

[۲] Kundu and Gupta

چگالی پسین توأم پارامترهای $\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2$ متناسب است با

$$\begin{aligned}\pi\left(\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2 | \mathbf{r}, \mathbf{s}\right) \propto \theta_1^{a_1+N-1} e^{-\theta_1\left(b_1+z_{\lambda_1}(\mathbf{r})\right)} \times \theta_2^{a_2+M-1} e^{-\theta_2\left(b_2+z_{\lambda_2}(\mathbf{s})\right)} \\ \times \lambda_1^{n+c_1-1} \prod_{i=1}^{n}\{\log u_i\}^{i-1} e^{\left(-\lambda_1\left[\sum_{i=1}^{n} r_{i,i}+d_1\right]+z_{\lambda_1}(\mathbf{r})\right)} \\ \times \lambda_2^{m+c_2-1} \prod_{j=1}^{m}\{\log v_j\}^{j-1} e^{\left(-\lambda_2\left[\sum_{j=1}^{m} s_{j,j}+d_2\right]+z_{\lambda_2}(\mathbf{s})\right)} \qquad (۲.۳)\end{aligned}$$

که از حاصل‌ضرب تابع درستنمایی (۵.۲) در توزیع‌های پیشین (۱.۳) به‌دست می‌آید. در این توزیع‌های پسین داریم

$$u_i = 1 - e^{-\lambda_1 r_{i,i}}, v_i = 1 - e^{-\lambda_2 s_{j,j}}, z_\lambda(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{k} \log(1 - e^{-\lambda x_i}) \qquad (۳.۳)$$

به‌طوری‌که $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_k)^\top$ و λ می‌تواند هر عدد حقیقی مثبت باشد. تحت تابع زیان مربع خطا (SEL)، برآورگر بیزی $\mathcal{R}$ با توجه به رابطه‌ی (۳.۲) برابر است با $E(\mathcal{R}|\mathbf{R}, \mathbf{S})$ یا به‌طور معادل

$$\hat{\mathcal{R}}_B = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{R}\, \pi\left(\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2 | \mathbf{r}, \mathbf{s}\right) d\theta_1 d\theta_2 d\lambda_1 d\lambda_2. \qquad (۴.۳)$$

بی‌گمان انتگرال (۴.۳) راه‌حل صریحی ندارد. ازاین‌رو به‌ناچار از بعضی الگوریتم‌های عددی یا الگوریتم‌های مبتنی بر شبیه‌سازی مونت‌کارلویی استفاده می‌کنیم. در حقیقت برای حل انتگرال فوق دو راه‌حل پیشنهاد می‌گردد.

۱- استفاده از روش نمونه‌گیری گیبس [۳] برای تولید متغیرهای تصادفی از رابطه (۲.۳) و سپس به‌کار بردن انتگرال‌گیری مونت کارلویی

۲- به‌کارگیری نمونه‌گیری از نقاط مهم [۴]

که در اینجا روش دوم به‌طور دقیق توصیف می‌گردد. تابع چگالی رابطه (۲.۳) را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\pi\left(\theta_1, \theta_2, \lambda_1, \lambda_2 | \mathbf{r}, \mathbf{s}\right) \propto f_1(\theta_1|\lambda_1, \mathbf{r}) f_2(\lambda_1|\mathbf{r}) h_1(\theta_1, \lambda_1|\mathbf{r}) \times g_1(\theta_2|\lambda_2, \mathbf{s}) g_2(\lambda_2|\mathbf{s}) h_2(\theta_2, \lambda_2|\mathbf{s}), \qquad (۵.۳)$$

که

$$f_1(\theta_1|\lambda_1, \mathbf{r}) \sim Gamma\left(a_1 + N, b_1 + z_{\lambda_1}(r)\right)$$

[۳] Gibbs

[۴] Importance sampling

و

$$g_{۱}(\theta_{۲}|\lambda_{۲},\mathbf{s}) \sim Gamma(a_{۲}+M, b_{۲}+z_{\lambda_{۲}}(\mathbf{s}))$$

همچنین

$$f_{۲}(\lambda_{۱}|\mathbf{r}) \propto \lambda_{۱}^{n+c_{۱}-۱} e^{\left(-\lambda_{۱}\left[\sum_{i=۱}^{n} r_{i,i}+d_{۱}\right]+z_{\lambda_{۱}}(\mathbf{r})\right)}$$

و

$$g_{۲}(\lambda_{۲}|\mathbf{s}) \propto \lambda_{۲}^{m+c_{۲}-۱} e^{\left(-\lambda_{۲}\left[\sum_{j=۱}^{m} s_{j,j}+d_{۲}\right]+z_{\lambda_{۲}}(\mathbf{s})\right)}$$

دو تابع چگالی سره می‌باشند. به‌علاوه

$$h(\theta_{۱},\theta_{۲},\lambda_{۱},\lambda_{۲}|\mathbf{r},\mathbf{s}) = \prod_{i=۱}^{n}\{\log(۱-e^{-\lambda_{۱}r_{i,i}})\}^{i-۱} \times \prod_{j=۱}^{m}\{\log(۱-e^{-\lambda_{۲}s_{j,j}})\}^{j-۱}.$$

درنهایت با استفاده از تکنیک نمونه‌گیری از نقاط مهم و با استفاده از الگوریتم زیر می‌توان به یک تقریب خوب از رابطه (۴.۳)، دست یافت.

الگوریتم ۶ الگوریتم نمونه‌گیری از نقاط مهم

۱. تولید $\theta_{۱} \sim Gamma(a_{۱}+N, b_{۱}+z_{\lambda_{۱}}(r))$ و $\theta_{۲} \sim Gamma(a_{۲}+M, b_{۲}+z_{\lambda_{۲}}(\mathbf{s}))$.

۲. تولید $\lambda_{۱}$ و $\lambda_{۲}$ به‌ترتیب از $f_{۲}(\lambda_{۱}|\mathbf{r})$ و $g_{۲}(\lambda_{۲}|\mathbf{s})$، از طریق روش‌های مونت‌کارلو $(MCMC)$ همانند قدم زدن تصادفی.

۳. تکرار مراحل یک و دو B بار برای به‌دست آوردن مشاهدات $(\theta_{۱}^{(t)},\theta_{۲}^{(t)},\lambda_{۱}^{(t)},\lambda_{۲}^{(t)})$، $t=۱,\ldots,B$ و سپس محاسبه‌ی $\mathcal{R}^{(t)}$ از رابطه (۳.۲).

۴. سپس برآورد رابطه (۴.۳)، که با $\hat{\mathcal{R}}_{B}$ نشان می‌دهیم با استفاده از میانگین وزنی

$$\hat{\mathcal{R}}_{B} = \sum_{t=۱}^{B} w_{t}\mathcal{R}^{(t)}, \qquad (۶.۳)$$

که $w_{t} = \dfrac{h(\theta_{۱}^{(t)},\theta_{۲}^{(t)},\lambda_{۱}^{(t)},\lambda_{۲}^{(t)}|\mathbf{r},\mathbf{s})}{\sum_{t=۱}^{B} h(\theta_{۱}^{(t)},\theta_{۲}^{(t)},\lambda_{۱}^{(t)},\lambda_{۲}^{(t)}|\mathbf{r},\mathbf{s})}$ می‌باشد.

حالت دوم: $\lambda_{۱} \neq \lambda_{۲}$ **و** $\theta_{۱} = \theta_{۲} = \theta$

در این حالت فرض کنید پارامترهای $(\theta,\lambda_{۱},\lambda_{۲})$ متغیرهای تصادفی مستقل با تابع چگالی پیشین

گاما به‌صورت زیر باشند؛

$$\theta \sim Gamma(a,b), \qquad \lambda_i \sim Gamma(c_i,d_i), \qquad (i=۱,۲) \tag{۷.۳}$$

که $a,b,c_i,d_i(>۰), i=۱,۲$ ابر- پارامترها می‌باشند. با روشی مشابه حالت اول، تابع چگالی توأم پسین $(\theta,\lambda_۱,\lambda_۲)$ به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\pi(\theta,\lambda_۱,\lambda_۲|\mathbf{r},\mathbf{s}) \propto\ & \theta^{N+M+a-۱} e^{-\theta\left(b+z_{\lambda_۱}(\mathbf{r})+z_{\lambda_۲}(\mathbf{s})\right)} \\ & \times \lambda_۱^{n+c_۱-۱} \prod_{i=۱}^{n}\{\log u_i\}^{i-۱} e^{\left(-\lambda_۱\left[\sum_{i=۱}^{n} r_{i,i}+d_۱\right]+z_{\lambda_۱}(\mathbf{r})\right)} \\ & \times \lambda_۲^{m+c_۲-۱} \prod_{j=۱}^{m}\{\log v_j\}^{j-۱} e^{\left(-\lambda_۲\left[\sum_{j=۱}^{m} s_{j,j}+d_۲\right]+z_{\lambda_۲}(\mathbf{s})\right)}\end{aligned} \tag{۸.۳}$$

که $z_\lambda(\mathbf{x})$ و u_i، v_j در رابطه (۳.۳) بیان شده‌است.
همانند حالت اول، به‌دست آوردن $\hat{\mathcal{R}}_B$ از طریق رابطه بسته امکان‌پذیر نمی‌باشد. بنابراین مشابه با روشی که در حالت اول به طور کامل توضیح داده‌شد، مقدار تقریبی $\hat{\mathcal{R}}_B$ را محاسبه می‌کنیم.

حالت سوم: $\lambda_۱=\lambda_۲=\lambda$ **و** $\theta_۱\neq\theta_۲$

با استفاده از (۲۲.۲)، مشاهده می‌شود در این حالت، پارامتر $\mathcal{R}$ به λ بستگی ندارد. در نتیجه بدون از دست دادن کلیت مسئله، فرض کنید $\lambda=۱$. همچنین فرض کنید $\theta_۱$ و $\theta_۲$ متغیرهای تصادفی به ترتیب با توزیع گاما با پارامترهای $(a_۱,b_۱)$ و $(a_۲,b_۲)$ باشند. بنابراین

$$\theta_۱|\mathbf{r} \sim Gamma(a_۱+N, b_۱+t_۱) \quad \text{و} \quad \theta_۲|\mathbf{s} \sim Gamma(a_۲+M, b_۲+t_۲)$$

که در آن t_i، $i=۱,۲$ مقادیر مشاهده‌شده متغیرهای تصادفی T_i، $i=۱,۲$ می‌باشند. درنتیجه

$$۲(b_۱+T_۱)\theta_۱|\mathbf{r} \sim \chi^۲_{۲(a_۱+N)} \qquad \text{و} \qquad ۲(b_۲+T_۲))\theta_۲|\mathbf{s} \sim \chi^۲_{۲(a_۲+M)}. \tag{۹.۳}$$

بنابراین تابع چگالی پسین $\mathcal{R}$ به شرط $(\mathbf{R},\mathbf{S})$ به فرم زیر خواهد بود:

$$\pi_{\mathcal{R}|(\mathbf{R},\mathbf{S})}(r) = C\frac{r^{a_۲+M-۱}(۱-r)^{a_۱+N-۱}}{[(b_۱+t_۱)(۱-r)+(b_۲+t_۲)r]^{M+N+a_۱+a_۲}}, \quad ۰<r<۱, \tag{۱۰.۳}$$

که

$$C=\frac{۱}{B(a_۱+N,a_۲+M)}(b_۱+t_۱)^{a_۱+N}(b_۲+t_۲)^{a_۲+M}.$$

و $B(.,.)$ تابع بتا می‌باشد.

در نهایت برآورد بیزی $\mathcal{R}$ تحت تابع زیان درجه دوم خطا به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{R}}_B &= \int_{\circ}^{1} r\pi_{\mathcal{R}|(\mathbf{R},\mathbf{S})}(r)dr = \int_{\circ}^{1} C\frac{r^{a_2+M}(1-r)^{a_1+N-1}}{[(b_1+T_1)(1-r)+(b_2+T_2)r]^{M+N+a_1+a_2}}dr \\ &= \frac{a_2+M}{M+N+a_1+a_2}\left(\frac{b_2+T_2}{b_1+T_1}\right)^{a_2+M} \qquad (11.3) \\ &\times \ {}_2F_1\left(M+N+a_1+a_2, M+a_2+1, M+N+a_1+a_2+1, 1-\frac{b_2+T_2}{b_1+T_1}\right).\end{aligned}$$

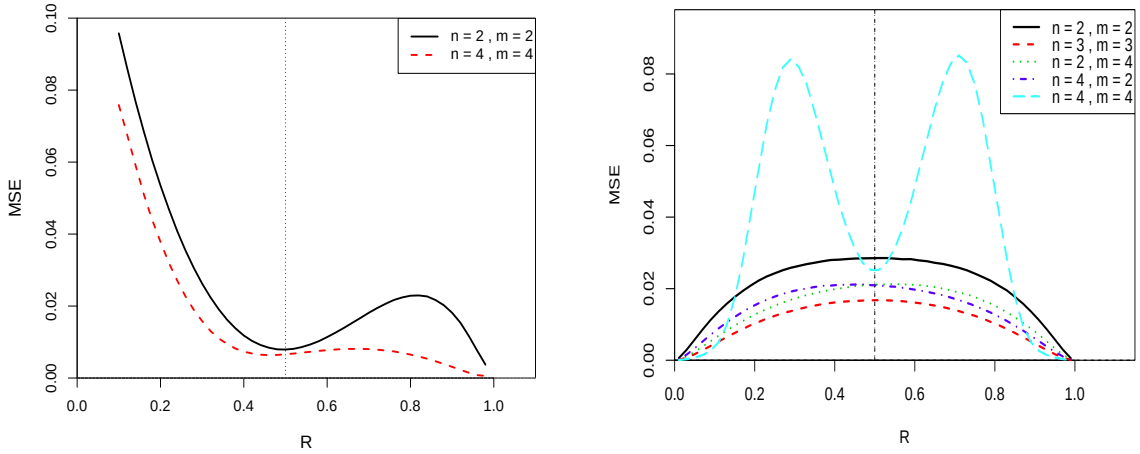
از این‌رو فقط در این حالت برآوردگر بیزی $\mathcal{R}$ به‌صورت بسته به‌دست می‌آید.
در این بخش عملکرد برآورگرهای بیزی در حالت‌های اول و سوم، با کمک شبیه‌سازی مورد بررسی قرار گرفت. بدین‌منظور، دو مجموعه از ابر-پارامترها را در نظر گرفتیم، اولی یک پیشین جفریز را تولید می‌کند و دیگری اشاره به پیشین مناسبی دارد به‌طوری‌که، $a_i = b_i = 2$ و $c_i = d_i = 1$، $i = 1,2$. سپس به ازای θ_i و λ_i، $i = 1,2$ داده‌شده که $\mathcal{R}$ را نتیجه می‌دهد، $RRSS$های $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$ را از توزیع نمایی تعمیم یافته تولید می‌کنیم. با استفاده از الگوریتم (۶) برای حالت اول و رابطه (۱۱.۳) برای حالت سوم، مشاهدات $\hat{\mathcal{R}}_B$ را به‌دست می‌آوریم. به وضوح با تکرار ۱۰۰۰ بار این فرآیند، یک مجموعه از مشاهدات برای $\hat{\mathcal{R}}_B$ به‌دست می‌آید. سپس، مقادیر تابع مخاطره تحت زیان درجه دوم خطا (که در این‌جا با MSE نشان داده شده‌است) از طریق میانگین نمونه $(\hat{\mathcal{R}}_B - \mathcal{R})^2$ها برآورد می‌شود. لازم به ذکر است مقدار θ_2 را ثابت و برابر یک می‌باشد و θ_1 را از یک مقدار کم به مقدارهای بزرگتر طوری در نظر گرفتیم که $\mathcal{R}$ مقادیر بین دامنه $(0,1)$ را اختیار کند. شکل ۱.۳ (ب)، نتایج متناظر با پیشین مناسب برای حالت سوم می‌باشد. (که بسیار شبیه به حالت اول می‌باشد، بنابراین فقط یکی از آن‌ها در این قسمت نمایش داده شده‌است.)

با استفاده از شکل ۱.۳ (ب)، مشاهده می‌شود که برخلاف نمودارهای مربوط به برآوردگرهای نقطه‌ای روش کلاسیک که در فصل قبل در نمودارهای ۱.۲ و ۲.۲ نمایش داده‌شد، بیشترین مخاطره در اطراف مقادیر میانی $\mathcal{R}$ اتفاق نمی‌افتد و کاملاً بستگی به انتخاب ابر-پارامترها دارد. همچنین قابل توجه است که، همان‌طور که انتظار داشتیم، با توجه به شکل ۱.۳ (الف)، پیشین جفریز، شکلی تقریباً مشابه با شکل‌های مربوط به برآورگرهای کلاسیک رسم شده در نمودارهای ۱.۲ و ۲.۲ از فصل قبل دارد.

۳.۳ برآورگرهای فاصله‌ای بیزی پارامتر تنش-مقاومت

با استفاده از رابطه (۹.۳)، به‌طور واضح نتیجه می‌شود که

$$\frac{\theta_1(b_1+T_1)(a_2+M)}{\theta_2(b_2+T_2)(a_1+N)} \mid (\mathbf{r},\mathbf{s}) \sim F\left(2(a_1+N), 2(a_2+M)\right)$$



(الف)

(ب)

شکل ۱.۳: نمودار $MSE(\hat{\mathcal{R}}_B, \mathcal{R})$ در مقابل $\mathcal{R}$ برای حالت ۳ و با ابر-پارامترهای $a_i = c_i = d_i = ۱$ و $b_i = ۲$.

بنابراین فاصله معتبر بیزی $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای $\mathcal{R}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\left[\left(۱ + AF_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(۲(a_۱+N), ۲(a_۲+M))\right)^{-۱}, \left(۱ + AF_{\frac{\alpha}{۲}}(۲(a_۱+N), ۲(a_۲+M))\right)^{-۱}\right], \quad (۱۲.۳)$$

که $A = \frac{(a_۱+N)(b_۲+T_۲)}{(a_۲+M)(b_۱+T_۱)}$.

با استفاده از توزیع پیشین ناآگاهی بخش نیز می‌توان به صورت مشابه، فاصله‌ی معتبر بیزی را به‌دست آورد. همان‌طور که می‌دانید تابع چگالی پیشین جفریز به صورت $\pi(\theta) \propto \sqrt{|I(\theta)|}$ تعریف می‌شود که در آن $I(\theta)$ همان ماتریس اطلاع فیشر می‌باشد. با به‌کاربردن رابطه (۱۶.۲) و عملیات ساده جبری داریم:

$$I(\theta_۱) = \left[-E\frac{d^۲}{d\theta_۱^۲}\log(\theta_۱|r_{i,i})\right] = \frac{N}{\theta_۱^۲}$$

بنابراین توزیع پیشین پارامترهای $\theta_۱$ و $\theta_۲$ به‌ترتیب به‌صورت $۱/\theta_۱$ و $۱/\theta_۲$ به‌دست می‌آید لذا با استدلال‌های مستقیم، می‌توان نشان‌داد که

$$\mathcal{R}|(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \overset{d}{=} \left(۱ + \frac{NT_۲}{MT_۱}W\right)^{-۱} \quad (۱۳.۳)$$

که در آن $W \sim F_{۲N,۲M}$.

بنابراین براساس (۱۳.۳) فاصله معتبر بیزی دیگری برای $\mathcal{R}$ به فرم زیر به‌دست می‌آید.

$$\left[\left(۱+\frac{NT_۲}{MT_۱}F_{۱-\frac{\alpha}{۲}}(۲N,۲M)\right)^{-۱},\left(۱+\frac{NT_۲}{MT_۱}F_{\frac{\alpha}{۲}}(۲N,۲M)\right)^{-۱}\right]. \qquad (۱۴.۳)$$

در ادامه می‌خواهیم چگال‌ترین فاصله پسین (HPD)، را برای $\mathcal{R}$ به‌دست آوریم. بنابراین در ابتدا تعریف رسمی از HPD را ارائه می‌کنیم.

تعریف ۱.۳.۳. فرض کنید $\Pi(\theta|D)$، تابع توزیع پسین پیوسته و تک مدی باشد، در این‌صورت بازه HPD، $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ برای θ به صورت (θ_L,θ_U) خواهد بود که θ_L و θ_U از بهینه‌سازی معادله‌ی زیر به‌دست می‌آیند. (برای مثال برگر[۵] (۱۹۸۵)، را ببینید.)

$$\min_{\theta_L<\theta_U}\left(|\pi(\theta_U|D)-\pi(\theta_L|D)|+|\Pi(\theta_U|D)-\Pi(\theta_L|D)-(۱-\alpha)|\right).$$

بنابراین، یک فاصله HPD، $۱۰۰(۱-\alpha)\%$ به‌صورت

$$C(\pi_\alpha)=\{\theta:\pi(\theta|D)\geq\pi_\alpha\}, \qquad (۱۵.۳)$$

می‌باشد که D نشان‌دهنده داده‌ها و π_α بزرگ‌ترین ثابت می‌باشد که $\Pr(\theta\in C(\pi_\alpha))\geq ۱-\alpha$ و $\pi(\theta|D)$ و $\Pi(\theta|D)$ به‌ترتیب تابع چگالی پسین و تابع توزیع پسین θ می‌باشند.

به نظر می‌رسد که فاصله HPD برای $\mathcal{R}$ فرم بسته‌ای نداشته باشد، اما با استفاده از رابطه (۱۰.۳) داریم:

$$\begin{aligned}\log\pi_{\mathcal{R}|(\mathbf{R},\mathbf{S})}(r)&=(a_۲+M-۱)\log r+(a_۱+N-۱)\log(۱-r)\\&\quad-(M+N+a_۱+a_۲)\log[(b_۱+t_۱)(۱-r)+(b_۲+t_۲)r]\end{aligned}$$

می‌توان نشان داد که $\frac{d}{dr}\log\pi_{\mathcal{R}|(\mathbf{R},\mathbf{S})}(r)=۰$ دارای دو ریشه $r=۰,۱$ می‌باشد، به‌طوری‌که

$$\lim_{r\longrightarrow ۰^+}\frac{d}{dr}\log\pi_{\mathcal{R}|(\mathbf{R},\mathbf{S})}(r)>۰$$

و

$$\lim_{r\longrightarrow ۱^-}\frac{d}{dr}\log\pi_{\mathcal{R}|(\mathbf{R},\mathbf{S})}(r)<۰$$

بنابراین به‌راحتی می‌توان نشان داد که $\pi_{\mathcal{R}|(\mathbf{R},\mathbf{S})}(r)$ تابع چگالی تک مدی می‌باشد. چن و شائو[۶] (۱۹۹۹)، با یک تکنیک مونت کارلویی ساده تقریبی برای بازه HPD به‌دست آوردند. در لم زیر تکنیک فوق بیان می‌گردد.

---

[۵] Berger

[۶] Chen and Shao

لم ۱.۳.۳. فرض کنید $\mathcal{R}_i, i = ۱,۲,\cdots,n$ نمونه تصادفی از (۱۰.۳) باشد و همچنین $\mathcal{R}_{(i)}$ متناظر با مقادیر مرتب‌شده $\mathcal{R}_i$ می‌باشند. در نتیجه فاصله HPD، ٪$۱۰۰(۱-\alpha)$ برای $\mathcal{R}$ را می‌توان به‌صورت زیر تقریب زد

$$C_{j^*}(n) = \left(\mathcal{R}_{(j^*)}, \mathcal{R}_{(j^*+[(۱-\alpha)n])}\right), \qquad (۱۶.۳)$$

که در این رابطه j^* طوری انتخاب می‌شود که

$$\mathcal{R}_{(j^*+[(۱-\alpha)n])} - \mathcal{R}_{(j^*)} = \min_{۱\le j\le n-[(۱-\alpha)n]} (\mathcal{R}_{(j+[(۱-\alpha)n])} - \mathcal{R}_{(j)}), \qquad (۱۷.۳)$$

همچنین $[.]$ نشان‌دهنده‌ی تابع جزء صحیح می‌باشد.

۴.۳ مقایسه برآوردگرهای فاصله‌ای بیزی براساس شبیه‌سازی

در این بخش برای مقایسه‌ی فواصل بیزی مطرح شده در بخش ۳.۳، از شبیه‌سازی مونت کارلویی استفاده کرده‌ایم و در آن مفروضات مطرح شده در بخش ۳.۲ برای تمام ترکیب‌های متفاوت $n = ۲,۴,۶$ و $m = ۲,۴,۶$ در دو جدول مجزا برای سطح معنی‌داری $\alpha = ۰/۰۵, ۰/۱$ در نظر گرفته شده‌است. به‌علاوه، توزیع پیشین پارامترهای $\theta_۱$ و $\theta_۲$ هردو توزیع $Gamma(۱,۲)$ می‌باشد. در ضمن برای حالتی که توزیع پیشین ناآگاهی بخش می‌باشد، توزیع پیشین جفریز در نظر گرفته شده‌است. جدول‌های ۱.۳ و ۲.۳ نتایج شبیه‌سازی را نشان می دهند که در آن نمادهای زیر به‌کاررفته‌اند:

- $BCI۱$: فاصله بیزی به‌دست آمده براساس توزیع پیشین مزدوج.
- $HPD۱$: فاصله HPD به‌دست آمده براساس توزیع پیشین مزدوج.
- $BCI۲$: فاصله بیزی به‌دست آمده براساس توزیع پیشین جفریز.
- $HPD۲$: فاصله HPD به‌دست آمده براساس توزیع پیشین جفریز.

به‌علاوه منظور از EL و CP در جدول‌های ۱.۳ و ۲.۳، به‌ترتیب میانگین طول و احتمال پوشش فواصل معتبر بیزی می‌باشد که در رابطه (۴۱.۲) معرفی شده‌اند.
از جدول‌های ۱.۳ و ۲.۳ نتایج زیر کسب می‌شوند:

- با افزایش اندازه‌ی نمونه، میانگین طول فواصل بیزی کاهش می‌یابد.
- برای اندازه‌ی نمونه‌های مختلف مشاهده می‌شود، میانگین طول فواصل بیزی، بیشترین مقدار خود را در $\mathcal{R} = ۰/۵$ اختیار می‌کند و کمترین میانگین طول فواصل بیزی در $\mathcal{R} = ۰/۹۵$ می‌باشد.
- میانگین طول فواصل HPD کمتر از فاصله معتبر بیزی متناظرش می‌باشد.

جدول ۱.۳ : مقادیر EL و CP فواصل بیزی ٪۹۵ برای $\mathcal{R}$

Row	$\mathcal{R}$	n	m	CP.BCI۱	EL.BCI۱	CP.HPD۱	EL.HPD۱	CP.BCI۲	EL.BCI۲	CP.HPD۲	EL.HPD۲
۱	۰.۱	۲	۲	۰.۸۰۴	۰.۵۱۲	۰.۸۸۱	۰.۴۸۰	۰.۹۴۸	۰.۳۸۲	۰.۹۳۰	۰.۳۳۳
۲	۰.۱	۲	۴	۰.۵۸۰	۰.۴۴۲	۰.۷۸۲	۰.۴۱۲	۰.۹۵۲	۰.۳۱۷	۰.۹۴۲	۰.۲۷۱
۳	۰.۱	۲	۶	۰.۴۵۲	۰.۴۱۸	۰.۷۲۴	۰.۳۸۷	۰.۹۵۱	۰.۳۰۰	۰.۹۴۰	۰.۲۵۶
۴	۰.۱	۴	۲	۰.۹۴۸	۰.۳۱۵	۰.۹۶۳	۰.۲۹۹	۰.۹۵۰	۰.۲۷۰	۰.۹۳۰	۰.۲۵۰
۵	۰.۱	۴	۴	۰.۸۴۹	۰.۲۳۰	۰.۹۰۴	۰.۲۱۹	۰.۹۵۲	۰.۱۷۸	۰.۹۳۹	۰.۱۶۶
۶	۰.۱	۴	۶	۰.۸۰۲	۰.۱۹۸	۰.۸۸۰	۰.۱۸۸	۰.۹۵۲	۰.۱۵۱	۰.۹۴۳	۰.۱۴۱
۷	۰.۱	۶	۲	۰.۹۷۵	۰.۲۵۳	۰.۹۷۷	۰.۲۴۳	۰.۹۵۲	۰.۲۴۵	۰.۹۳۲	۰.۲۳۱
۸	۰.۱	۶	۴	۰.۹۲۳	۰.۱۶۸	۰.۹۴۳	۰.۱۶۲	۰.۹۵۰	۰.۱۴۶	۰.۹۴۰	۰.۱۴۰
۹	۰.۱	۶	۶	۰.۸۹۳	۰.۱۳۶	۰.۹۱۸	۰.۱۳۲	۰.۹۵۱	۰.۱۱۵	۰.۹۴۳	۰.۱۱۱
۱۰	۰.۵	۲	۲	۰.۹۸۳	۰.۵۹۶	۰.۹۵۴	۰.۵۸۰	۰.۹۴۸	۰.۶۴۴	۰.۹۰۴	۰.۶۲۱
۱۱	۰.۵	۴	۲	۰.۹۷۹	۰.۵۱۵	۰.۹۵۲	۰.۵۰۴	۰.۹۵۲	۰.۵۵۸	۰.۹۱۵	۰.۵۴۲
۱۲	۰.۵	۶	۲	۰.۹۸۰	۰.۴۸۸	۰.۹۵۵	۰.۴۷۷	۰.۹۵۱	۰.۵۳۴	۰.۹۱۷	۰.۵۱۹
۱۳	۰.۵	۴	۲	۰.۹۷۷	۰.۵۱۵	۰.۹۵۰	۰.۵۰۳	۰.۹۵۰	۰.۵۵۸	۰.۹۱۰	۰.۵۴۱
۱۴	۰.۵	۴	۴	۰.۹۶۱	۰.۳۹۰	۰.۹۳۶	۰.۳۸۴	۰.۹۵۲	۰.۴۰۶	۰.۹۲۴	۰.۳۹۹
۱۵	۰.۵	۶	۴	۰.۹۶۰	۰.۳۴۴	۰.۹۴۰	۰.۳۳۹	۰.۹۵۲	۰.۳۵۶	۰.۹۳۰	۰.۳۵۰
۱۶	۰.۵	۶	۲	۰.۹۷۹	۰.۴۸۸	۰.۹۵۴	۰.۴۷۷	۰.۹۵۲	۰.۵۳۳	۰.۹۱۶	۰.۵۱۹
۱۷	۰.۵	۶	۴	۰.۹۵۷	۰.۳۴۴	۰.۹۴۰	۰.۳۳۹	۰.۹۵۰	۰.۳۵۶	۰.۹۳۱	۰.۳۵۰
۱۸	۰.۵	۶	۶	۰.۹۵۶	۰.۲۸۵	۰.۹۳۷	۰.۲۸۱	۰.۹۵۱	۰.۲۹۱	۰.۹۳۶	۰.۲۸۷
۱۹	۰.۹۵	۲	۲	۰.۹۳۱	۰.۲۳۹	۰.۹۵۶	۰.۲۱۳	۰.۹۴۸	۰.۲۵۰	۰.۹۴۰	۰.۲۱۳
۲۰	۰.۹۵	۴	۲	۰.۹۱۵	۰.۱۷۴	۰.۹۳۷	۰.۱۶۲	۰.۹۵۲	۰.۱۶۲	۰.۹۴۲	۰.۱۵۰
۲۱	۰.۹۵	۶	۲	۰.۹۱۰	۰.۱۵۸	۰.۹۲۴	۰.۱۵۱	۰.۹۵۱	۰.۱۴۶	۰.۹۴۳	۰.۱۳۶
۲۲	۰.۹۵	۴	۲	۰.۹۶۵	۰.۱۶۴	۰.۹۷۰	۰.۱۴۱	۰.۹۵۰	۰.۱۹۶	۰.۹۴۳	۰.۱۶۴
۲۳	۰.۹۵	۴	۴	۰.۹۴۷	۰.۱۰۰	۰.۹۴۹	۰.۰۹۳	۰.۹۵۲	۰.۰۹۹	۰.۹۴۲	۰.۰۹۲
۲۴	۰.۹۵	۶	۴	۰.۹۴۰	۰.۰۸۳	۰.۹۴۶	۰.۰۷۹	۰.۹۵۲	۰.۰۸۱	۰.۹۴۵	۰.۰۷۷
۲۵	۰.۹۵	۶	۲	۰.۹۷۵	۰.۱۴۷	۰.۹۷۴	۰.۱۲۴	۰.۹۵۲	۰.۱۸۵	۰.۹۴۶	۰.۱۵۳
۲۶	۰.۹۵	۶	۴	۰.۹۵۳	۰.۰۸۲	۰.۹۵۱	۰.۰۷۶	۰.۹۵۰	۰.۰۸۴	۰.۹۴۴	۰.۰۷۷
۲۷	۰.۹۵	۶	۶	۰.۹۵۰	۰.۰۶۳	۰.۹۴۵	۰.۰۶۰	۰.۹۵۱	۰.۰۶۳	۰.۹۴۵	۰.۰۶۰

- زمانی‌که $\mathcal{R} = ۰/۱$، با در نظر گرفتن دو معیار EL و CP، فاصله $HPD۲$ بهتر از $HPD۱$ و $BCI۲$ بهتر از $BCI۱$ عمل می‌کند ولی در $\mathcal{R} = ۰/۵$ کاملاً برعکس عمل می‌کنند. به عبارت دیگر $HPD۱$ و $BCI۱$ بهتر از موارد متناظرشان عمل می‌کنند.
- در $\mathcal{R} = ۰/۱, ۰/۹۵$، احتمال پوشش $HPD۱$ بیشتر از $HPD۲$ می‌باشد.
- زمانی‌که $\mathcal{R} = ۰/۱, ۰/۹۵$ تقریبا همه‌جا $HPD۱$ بهتر از $BCI۱$ می‌باشد. با این حال، زمانی‌که $\mathcal{R} = ۰/۵$، احتمال پوشش $BCI۱$ بیشتر از $HPD۱$ و همچنین $BCI۲$ بیشتر از $HPD۲$ می‌باشد.
- با مقایسه نتایج مربوط به دو جدول، مشاهده می‌شود میانگین طول فواصل بیزی با در نظر گرفتن $\alpha = ۰/۱$ در تمام موارد نسبت به مورد مشابهش با سطح معنی‌داری $\alpha = ۰/۰۵$ کاهش یافته‌است و لیکن احتمال پوشش در جدول ۱.۳ به ضریب اطمینان مدنظر α نزدیک‌تر می‌باشد.

۵.۳ مثال واقعی

در این بخش، فواصل معتبر بیزی و فواصل HPD به‌دست آمده در بخش ۳.۳ را با استفاده از یک مجموعه داده‌ی واقعی آزمایش می‌کنیم. بدین منظور از داده‌های مربوط به آزمایشات موتور

جدول ۲.۳: مقادیر EL و CP فواصل بیزی ٪۹۰ برای $\mathcal{R}$

Row	$\mathcal{R}$	n	m	CP.BCI۱	EL.BCI۱	CP.HPD۱	EL.HPD۱	CP.BCI۲	EL.BCI۲	CP.HPD۲	EL.HPD۲
۱	۰.۱	۲	۲	۰.۶۳۵	۰.۴۳۳	۰.۷۹۷	۰.۴۰۴	۰.۸۹۷	۰.۳۱۱	۰.۸۶۸	۰.۲۶۷
۲	۰.۱	۲	۴	۰.۳۸۵	۰.۳۶۸	۰.۶۵۸	۰.۳۴۱	۰.۹۰۰	۰.۲۵۲	۰.۸۸۱	۰.۲۱۲
۳	۰.۱	۲	۶	۰.۲۴۵	۰.۳۴۷	۰.۵۸۰	۰.۳۱۹	۰.۹۰۱	۰.۲۳۷	۰.۸۸۷	۰.۱۹۹
۴	۰.۱	۴	۲	۰.۸۶۹	۰.۲۶۶	۰.۹۲۰	۰.۲۵۲	۰.۸۹۸	۰.۲۲۷	۰.۸۶۶	۰.۲۰۹
۵	۰.۱	۴	۴	۰.۷۴۶	۰.۱۹۱	۰.۸۴۰	۰.۱۸۲	۰.۹۰۱	۰.۱۴۷	۰.۸۸۳	۰.۱۳۷
۶	۰.۱	۴	۶	۰.۶۷۶	۰.۱۶۴	۰.۷۹۸	۰.۱۵۶	۰.۹۰۲	۰.۱۲۴	۰.۸۸۶	۰.۱۱۶
۷	۰.۱	۶	۲	۰.۹۲۵	۰.۲۱۳	۰.۹۴۲	۰.۲۰۵	۰.۸۹۷	۰.۲۰۷	۰.۸۷۲	۰.۱۹۵
۸	۰.۱	۶	۴	۰.۸۴۵	۰.۱۴۱	۰.۸۹۳	۰.۱۳۶	۰.۹۰۰	۰.۱۲۱	۰.۸۸۵	۰.۱۱۷
۹	۰.۱	۶	۶	۰.۸۱۰	۰.۱۱۳	۰.۸۵۶	۰.۱۱۰	۰.۹۰۱	۰.۰۹۶	۰.۸۹۱	۰.۰۹۲
۱۰	۰.۵	۲	۲	۰.۹۴۷	۰.۵۱۴	۰.۸۸۶	۰.۴۹۹	۰.۸۹۷	۰.۵۵۸	۰.۸۱۵	۰.۵۳۴
۱۱	۰.۵	۲	۴	۰.۹۴۰	۰.۴۴۱	۰.۸۹۶	۰.۴۳۱	۰.۹۰۰	۰.۴۷۹	۰.۸۳۷	۰.۴۶۴
۱۲	۰.۵	۲	۶	۰.۹۴۳	۰.۴۱۷	۰.۸۹۳	۰.۴۰۷	۰.۹۰۱	۰.۴۵۸	۰.۸۴۷	۰.۴۴۴
۱۳	۰.۵	۴	۲	۰.۹۳۹	۰.۴۴۱	۰.۸۹۰	۰.۴۳۰	۰.۸۹۸	۰.۴۷۹	۰.۸۳۴	۰.۴۶۴
۱۴	۰.۵	۴	۴	۰.۹۱۳	۰.۳۳۱	۰.۸۷۶	۰.۳۲۶	۰.۹۰۱	۰.۳۴۵	۰.۸۶۲	۰.۳۳۹
۱۵	۰.۵	۴	۶	۰.۹۱۲	۰.۲۹۱	۰.۸۸۰	۰.۲۸۷	۰.۹۰۲	۰.۳۰۱	۰.۸۷۳	۰.۲۹۷
۱۶	۰.۵	۶	۲	۰.۹۴۲	۰.۴۱۷	۰.۸۹۷	۰.۴۰۷	۰.۸۹۷	۰.۴۵۸	۰.۸۴۵	۰.۴۴۴
۱۷	۰.۵	۶	۴	۰.۹۱۰	۰.۲۹۱	۰.۸۸۳	۰.۲۸۷	۰.۹۰۰	۰.۳۰۱	۰.۸۷۰	۰.۲۹۷
۱۸	۰.۵	۶	۶	۰.۹۰۵	۰.۲۴۱	۰.۸۸۲	۰.۲۳۸	۰.۹۰۱	۰.۲۴۶	۰.۸۸۲	۰.۲۴۳
۱۹	۰.۹۵	۲	۲	۰.۸۷۳	۰.۱۹۲	۰.۹۱۴	۰.۱۶۹	۰.۸۹۷	۰.۱۹۷	۰.۸۸۷	۰.۱۶۵
۲۰	۰.۹۵	۲	۴	۰.۸۴۹	۰.۱۴۵	۰.۸۹۱	۰.۱۳۴	۰.۹۰۰	۰.۱۳۴	۰.۸۸۶	۰.۱۲۳
۲۱	۰.۹۵	۲	۶	۰.۸۳۹	۰.۱۳۲	۰.۸۷۰	۰.۱۲۶	۰.۹۰۱	۰.۱۲۲	۰.۸۸۵	۰.۱۱۳
۲۲	۰.۹۵	۴	۲	۰.۹۲۵	۰.۱۲۸	۰.۹۲۹	۰.۱۰۹	۰.۸۹۸	۰.۱۵۱	۰.۸۹۱	۰.۱۲۴
۲۳	۰.۹۵	۴	۴	۰.۸۹۴	۰.۰۸۲	۰.۸۹۸	۰.۰۷۶	۰.۹۰۱	۰.۰۸۱	۰.۸۸۸	۰.۰۷۵
۲۴	۰.۹۵	۴	۶	۰.۸۸۸	۰.۰۶۹	۰.۸۹۴	۰.۰۶۶	۰.۹۰۲	۰.۰۶۷	۰.۸۹۴	۰.۰۶۳
۲۵	۰.۹۵	۶	۲	۰.۹۳۴	۰.۱۱۴	۰.۹۲۹	۰.۰۹۶	۰.۸۹۷	۰.۱۴۲	۰.۸۹۷	۰.۱۱۵
۲۶	۰.۹۵	۶	۴	۰.۹۰۲	۰.۰۶۷	۰.۹۰۲	۰.۰۶۲	۰.۹۰۰	۰.۰۶۹	۰.۸۹۳	۰.۰۶۳
۲۷	۰.۹۵	۶	۶	۰.۹۰۰	۰.۰۵۲	۰.۸۹۶	۰.۰۵۰	۰.۹۰۱	۰.۰۵۲	۰.۸۹۵	۰.۰۵۰

راکت که در بخش ۵.۲ از فصل قبل بیان شده‌است استفاده می‌کنیم. با درنظر گرفتن شرایط مطرح شده در مثال عددی ارائه شده در بخش ۵.۲ و $RRSS$های پایین به‌دست آمده در مثال فوق، فواصل بیزی را مقایسه می‌کنیم. همچنین توزیع $Gamma(۲,۱)$، به عنوان توزیع پیشین هردو پارامتر $\theta_۱$ و $\theta_۲$ به‌کار برده می‌شود.

مقادیر مربوط به میانگین طول فواصل بیزی بر طبق جدول ۳.۳ گزارش شده است. که در این جدول نمادهای زیر به‌کار رفته است.

$BCI۱$: فاصله معتبر بیزی براساس پیشین‌های مزدوج

$BCI۲$: فاصله معتبر بیزی براساس پیشین‌های جفریز

$HPD۱$: چگال‌ترین فاصله بیزی براساس پیشین‌های مزدوج

$HPD۲$: چگال‌ترین فاصله بیزی براساس پیشین‌های جفریز

بر طبق نتایج جدول ۳.۳، مشاهده می‌شود فاصله $HPD۲$ بهتر از سایر فواصل رفتار می‌کند.

جدول ۳.۳: مقادیر EL براساس داده‌های واقعی

α	BCI۱	HPD۱	BCI۲	HPD۲
۰.۰۵	۰.۰۴۹	۰.۰۴۹	۰.۰۴۷	۰.۰۳۵
۰.۱	۰.۰۳۸	۰.۰۳۸	۰.۰۳۷	۰.۰۲۸

خلاصه فصل

در این فصل برآوردگرهای بیزی در حالت‌های مختلف را برای پارامتر تنش-مقاومت، براساس $RRSS$های پایین از توزیع نمایی تعمیم یافته به‌دست آوردیم. سپس با کمک شبیه‌سازی نمودار مربوط به $MSE(\hat{\mathcal{R}}_B, \mathcal{R})$ در مقابل $\mathcal{R}$ رسم گردید. نکته جالب در خصوص برآوردگر نقطه‌ای بیزی این بود که این برآوردگر با پیشین جفریز، رفتاری مشابه با برآوردگرهای کلاسیک داشت در حالی‌که با پیشین مناسب رفتاری متفاوت داشت به‌طوری‌که بیشترین مقدار میانگین توان دوم خطا، در حوالی نقاط میانی $\mathcal{R}$ رخ نداد. برای حالت سوم، فواصل معتبر بیزی و HPD را با درنظر گرفتن پیشین‌های مزدوج و همچنین ناآگاهی بخش، به‌دست آوردیم. سپس فواصل فوق را به کمک شبیه‌سازی و برطبق معیارهای میانگین طول و احتمال پوشش، مقایسه نمودیم. مشاهده شد فواصل HPD مناسب‌تر از سایر فواصل بیزی می‌باشند. در نهایت فواصل به‌دست آمده از طریق داده‌های واقعی نیز مورد بررسی قرار گرفتند که نتایجی کاملاً منطبق بر شبیه‌سازی داشتند.

فصل ۴

مقایسه $\mathcal{R}$ براساس دو طرح نمونه‌گیری در خانواده نرخ خطر معکوس متناسب

۱.۴ مقدمه

در این فصل استنباط‌های درستنمایی و بیزی قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را در خانواده توزیع‌های با نرخ خطر معکوس متناسب($PRHR$)، براساس طرح $RRSS$ مورد مطالعه قرار می‌دهیم و برآوردگرهای حاصل را با برآوردگرهای متناظر خود که براساس رکوردهای معمولی به‌دست آمده‌اند مقایسه می‌کنیم. مدل $PRHR$ معادل مدل $G(t) = [F_\circ(t)]^\theta$ می‌باشد که $F_\circ(t)$ تابع توزیع پایه است که مستقل از هر پارامتر نامعلومی می‌باشد. بدلیل توجه فراوانی که به قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در علوم مختلف از جمله در صنعت، داروسازی و مهندسی می‌باشد، به دنبال روش‌هایی مناسب برای انتخاب مشاهدات می‌باشیم به‌طوری‌که در حداقل زمان و با کمترین هزینه به برآوردهایی با قابلیت اعتماد بالا دست یابیم. با توجه به‌اینکه خانواده $PRHR$ بسیاری از مدل‌های طول عمر را شامل می‌شود، بنابراین در این فصل قصد داریم استنباط‌های از $\mathcal{R}$ را براساس طرح $RRSS$ به‌دست آوریم و نتایج به‌دست آمده را با نتایج حاصل از رکوردهای معمولی مقایسه کنیم. در بخش ۲.۴ دو طرح موردنظر برای تولید داده‌های رکوردی را معرفی می‌کنیم. در ادامه و در بخش ۳.۴ برآوردگرهای نقطه‌ای کلاسیک و برآوردگر بیزی را به‌دست می‌آوریم و

برآوردگرهای فوق را از طریق معیار توان دوم خطا و اریبی بررسی می‌کنیم. سپس با درنظر گرفتن اندازه نمونه مختلف برای جوامع X و Y کارایی برآوردگرها را نسبت به برآوردگرهای متناظر حاصل از رکوردهای معمولی مقایسه می‌کنیم. در بخش ۴.۴ فواصل اطمینان مجانبی و دقیق بر پایه کمیت محوری و چند فاصله اطمینان بوت‌استرپی محاسبه می‌گردد و در بخش ۵.۴ به کمک شبیه‌سازی فواصل به‌دست آمده مقایسه می‌شوند و براساس مقاله بکلیزی (۲۰۰۸)، مقایسه‌ای بین فواصل اطمینان به‌دست آمده از دو طرح $RRSS$ و رکوردهای معمولی انجام می‌دهیم. در نهایت در بخش ۶.۴ با یک مثال واقعی نتایج حاصل را بررسی می‌کنیم.

۲.۴ معرفی دو طرح در داده‌های رکوردی

با توجه به اینکه هدف اصلی در این بخش استنباط و مقایسه‌ی برآورگرهای پارامتر تنش-مقاومت در مدل $PRHR$ است، لذا دو طرح زیر را در مبحث داده‌های رکوردی درنظر بگیرید:

طرح (R): X و Y متغیرهای تصادفی مستقل از خانواده توزیع‌های $PRHR$، به ترتیب با پارامترهای α و β هستند. فرض کنید آزمایش‌ها به صورت دنباله‌ای انجام می‌شوند و داده‌های رکوردی تنها مشاهدات در دسترس برای انجام تحلیل جامعه‌ی آماری می‌باشند. نمونه‌گیری از جامعه‌ی X تا زمان مشاهده شدن رکورد nام ادامه می‌یابد و به محض مشاهده آن آزمایش متوقف می‌شود. به‌طوری‌که U_i نشان‌دهنده‌ی iامین رکورد از جامعه X است. در نتیجه بردار $U^{(R)} = (U_1, \ldots, U_n)^\top$ را در اختیار داریم. همچنین نمونه‌گیری از جامعه Y تا زمان مشاهده رکورد mام ادامه می‌یابد. در نتیجه، اگر S_j بیان‌گر jامین رکورد مشاهده‌شده باشد، آن‌گاه $S^{(R)} = (S_1, \ldots, S_m)^\top$ را به عنوان بردار تصادفی از مقادیر رکوردی جامعه Y، در اختیار داریم. که نماد (R) نشان‌دهنده‌ی روش رکوردی در جمع‌آوری مشاهدات است.

طرح $(RRSS)$: n دنباله مستقل از متغیرهای تصادفی را در نظر بگیرید و آزمایش در دنباله‌ی iام تا زمان مشاهده‌ی iامین رکورد ادامه می‌یابد. اگر $U_{i,i}$ نشان‌دهنده‌ی iامین رکورد از iامین دنباله باشد، آن‌گاه $U^{(RRSS)} = (U_{1,1}, \ldots, U_{n,n})^\top$ بردار مشاهدات از جامعه‌ی X می‌باشد. به همین ترتیب اگر m دنباله مستقل را در نظر بگیرید که در هر کدام از آن‌ها آزمایش‌ها به صورت دنباله‌ای انجام شود و به محض مشاهده jامین رکورد از jامین دنباله آزمایش متوقف گردد، در این صورت $S^{(RRSS)} = (S_{1,1}, \ldots, S_{m,m})^\top$ بردار مشاهدات در دسترس از جامعه‌ی Y می‌باشد.

۳.۴ برآوردگرهای نقطه‌ای پارامتر $\mathcal{R}$ در خانواده $PRHR$

فرض کنید متغیر تصادفی مطلقاً پیوسته T به ترتیب دارای تابع توزیع و تابع چگالی به صورت زیر است.

$$G(t) = [F_\circ(t)]^\theta \quad \text{و} \quad g(t) = \theta f_\circ(t)[F_\circ(t)]^{\theta-1},$$

که $F_0(t)$ تابع توزیع پایه و مستقل از پارامتر شکل θ است و $\theta > 0$. این خانواده از توزیع‌ها به مدل $PRHR$ معروف هستند. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل از مدل $PRHR$ به ترتیب با پارامترهای α و β باشند. به راحتی نتیجه می‌شود در این حالت $\mathcal{R} = Pr(X < Y) = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$. فرض کنید $\mathbf{u} = (u_{1,1}, u_{2,2}, \cdots, u_{n,n})^\top$ بردار مشاهدات تصادفی $\mathbf{U} = (U_{1,1}, U_{2,2}, \cdots, U_{n,n})^\top$، یک $RRSS$ پایین به اندازه n از مدل $PRHR$ با تابع توزیع تجمعی $G(u) = (F_0(u))^\alpha$ باشد و $\mathbf{s} = (s_{1,1}, s_{2,2}, \cdots, s_{m,m})^\top$ نیز بردار مشاهدات تصادفی $\mathbf{S} = (S_{1,1}, S_{2,2}, \cdots, S_{m,m})^\top$، $RRSS$ پایین به اندازه m از مدل $PRHR$ با تابع توزیع تجمعی $G(s) = (F_0(s))^\beta$ باشد. در این بخش قصد داریم استنباط‌هایی از پارمتر تنش-مقاومت $\mathcal{R}$ ارائه دهیم.

۱.۳.۴ برآوردگر درستنمایی ماکسیمم

برای برآورد $\mathcal{R}$ از طریق روش درستنمایی ماکسیمم، لازم است MLE پارمترهای α و β را به‌دست آوریم. با استفاده از رابطه (۶.۱)، تابع درستنمایی به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$L(\alpha,\beta) = \prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{\{-\log(F(u_{i,i})^\alpha)\}^{i-1}}{(i-1)!}\alpha f(u_{i,i})\left[F(u_{i,i})^{\alpha-1}\right]\right\} \times \prod_{j=1}^{m}\left\{\frac{\{-\log(F(s_{i,i})^\beta)\}^{j-1}}{(j-1)!}\beta f(s_{j,j})\left[F(s_{j,j})^{\beta-1}\right]\right\}, \qquad (۱.۴)$$

و لگاریتم تابع درستنمایی به صورت

$$\begin{aligned}\ell(\alpha,\beta) = &\sum_{i=1}^{n}(i-1)\log\left(-\alpha\log\left(F(u_{i,i})\right)\right) - \log(\prod_{i=1}^{n}(i-1)!) + n\log\alpha + \sum_{i=1}^{n}\log\left(f(u_{i,i})\right)\\ &+ (\alpha-1)\sum_{i=1}^{n}\log\left(F(u_{i,i})\right) + \sum_{j=1}^{m}(j-1)\log\left(-\beta\log\left(F(s_{j,j})\right)\right) - \log\left(\prod_{j=1}^{m}(j-1)!\right)\\ &+ m\log\beta + \sum_{j=1}^{m}\log\left(f(s_{j,j})\right) + (\beta-1)\sum_{j=1}^{m}\log\left(F(s_{j,j})\right).\end{aligned}$$

می‌باشد، بنابراین MLE پارمترهای α و β به صورت زیر نتیجه می‌شوند:

$$\hat{\alpha}_{ML} = -\frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\log\left(F(U_{i,i})\right)}, \qquad (۲.۴)$$

و

$$\hat{\beta}_{ML} = -\frac{M}{\sum_{j=1}^{m}\log\left(F(S_{j,j})\right)}, \qquad (۳.۴)$$

که در آن‌ها $N = \frac{n(n+۱)}{۲}$ و $M = \frac{m(m+۱)}{۲}$. در نتیجه با استفاده از ویژگی پایایی برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم

$$\hat{\mathcal{R}}_{ML} = \frac{\hat{\beta}_{ML}}{\hat{\alpha}_{ML} + \hat{\beta}_{ML}} = \left(۱ + \frac{NH'_m}{MT'_n}\right)^{-۱}, \qquad (۴.۴)$$

به‌طوری‌که $T'_n = -\sum_{i=۱}^{n} \log(F(U_{i,i})$ و $H'_m = -\sum_{j=۱}^{m} \log(F(S_{j,j}))$. همان‌طور که قبلاً بحث شده‌است $U_{i,i}$ها و $S_{j,j}$ها متغیرهای تصادفی مستقل از هم می‌باشند. به‌علاوه می‌توان نشان داد که $T_i = -\log(F(U_{i,i}))$ دارای توزیع گاما است؛ به عبارتی $i = ۱, \ldots, n$ که $T_i \sim Gamma(i, \alpha)$. بنابراین

$$T'_n = -\sum_{i=۱}^{n} \log(F(U_{i,i})) \sim Gamma(N, \alpha), \qquad (۵.۴)$$

و به طور مشابه

$$H'_m = -\sum_{j=۱}^{m} \log(F(S_{j,j})) \sim Gamma(M, \beta). \qquad (۶.۴)$$

با استفاده از رابطه‌های (۵.۴) و (۶.۴) به‌وضوح نتیجه می‌شود

$$\hat{\mathcal{R}}_{ML} \overset{d}{=} \left(۱ + \frac{\alpha}{\beta} W\right)^{-۱}, \qquad (۷.۴)$$

W دارای توزیع فیشر به‌ترتیب با $۲M$ و $۲N$ درجه آزادی است. برطبق توزیع W و با بکارگیری روش تبدیل، تابع چگالی $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$f_{\hat{\mathcal{R}}_{ML}}(r) = \frac{\Gamma(M+N)}{\Gamma(M)\Gamma(N)} \left(\frac{N\alpha}{M\beta}\right)^{N} r^{N-۱}(۱-r)^{M-۱} \left(۱ - r\left(۱ - \frac{N\alpha}{M\beta}\right)\right)^{-(M+N)}.$$

حال برای محاسبه $Var(\hat{\mathcal{R}}_{ML})$، $E(\hat{\mathcal{R}}^{۲}_{ML})$ و $E(\hat{\mathcal{R}}_{ML})$ را به‌صورت زیر محاسبه می‌کنیم (بیلی، ۱۹۳۵):

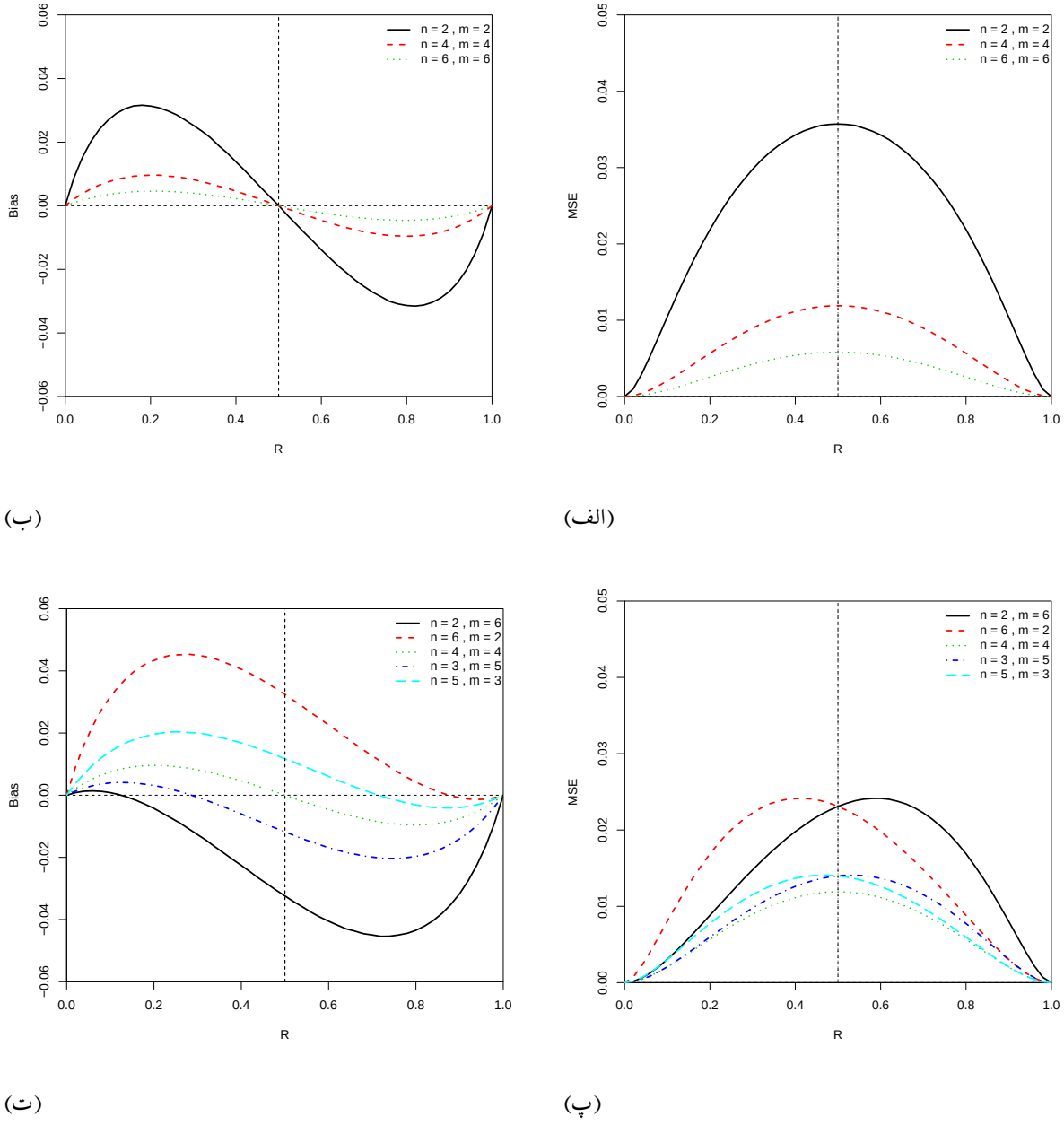
$$E(\hat{\mathcal{R}}_{ML}) = \left(\frac{N\alpha}{M\beta}\right)^{N} \left(\frac{N}{N+M}\right) {}_۲\mathcal{F}_۱\left(M+N, N+۱, M+N+۱, ۱ - \frac{N\alpha}{M\beta}\right), \qquad (۸.۴)$$

و

$$E(\hat{\mathcal{R}}^{۲}_{ML}) = \frac{N(N+۱)}{(M+N+۱)(M+N)} \left(\frac{N\alpha}{M\beta}\right)^{N} {}_۲\mathcal{F}_۱\left(M+N, N+۲, M+N+۲, ۱ - \frac{N\alpha}{M\beta}\right), \qquad (۹.۴)$$

با جایگذاری روابط (۸.۴) و (۹.۴) در $Var(\hat{\mathcal{R}}_{ML})$، می‌توان $MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML})$ را به‌دست آورد. در شکل ۱.۴، نمودار مقادیر MSE و اریبی $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ برای ترکیب‌های مختلف n و m در مقابل $\mathcal{R}$ رسم شده‌است.

برطبق شکل ۱.۴، نکات زیر مشاهده می‌شود:



(ب) (الف)

(ت) (پ)

شکل ۱.۴: نمودار $MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}, \mathcal{R})$ و $Bias(\hat{\mathcal{R}}_{ML}, \mathcal{R})$ در مقابل $\mathcal{R}$

- زمانی‌که $n = m$، نمودارهای $MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}, \mathcal{R})$ و $Bias(\hat{\mathcal{R}}_{ML}, \mathcal{R})$ به ترتیب حول $\mathcal{R} = ۰/۵$ و در نقطه $(۰/۵, ۰)$ متقارن هستند. همچنین اریبی برای مقادیر $R = ۰, ۰/۵, ۱$ برابر صفر است. (شکل‌های (الف) و (ب) را ببینید).

- بر طبق نمودار قسمت (پ) زمانی‌که $n \neq m$، منحنی $MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}, \mathcal{R})$ نامتقارن می‌باشد. زمانی‌که $n < m$، منحنی چوله به راست و زمانی‌که $n > m$ چوله به چپ می‌باشد. به‌علاوه، در حالتی‌که $n = m$، $MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}; \mathcal{R})$ به‌طور معنی‌داری کم‌تر از حالتی می‌باشد که $n \neq m$.

- زمانی‌که اندازه نمونه افزایش می‌یبد، $MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}, \mathcal{R})$ کاهش می‌یابد و مشاهده می‌کنیم که $\mathcal{R}_{max} \propto \frac{n}{n+m}$، که در آن $\mathcal{R}_{max}$ ماکسیمم کننده $MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}, \mathcal{R})$ می‌باشد.

مقایسه‌ی برآودگر ML حاصل از دو طرح نمونه‌گیری

با توجه به رابطه (۸.۴) و (۹.۴)،توزیع $MSE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}, \mathcal{R})$ به توزیع پایه $F_۰$ بستگی ندارد. لذا با در نظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم‌یافته به ترتیب با تابع چگالی و تابع توزیع

$$f_۰(t;\theta) = \theta e^{-t}(۱ - e^{-t})^{\theta-۱}, \qquad (۱۰.۴)$$

و

$$F_۰(t;\theta) = (۱ - e^{-t})^{\theta} \qquad t > ۰, \qquad (۱۱.۴)$$

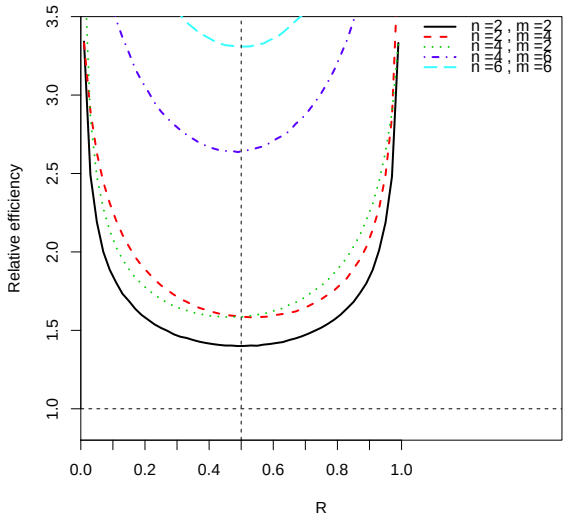
به عنوان توزیعی از خانواده $PRHR$، برآوردگرهای ML به‌دست آمده از دو طرح معرفی شده در بخش ۲.۴ را با استفاده از معیار کارایی نسبی مقایسه می‌کنیم.

$$\mathbf{e}\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{(RRSS)}, \hat{\mathcal{R}}_{ML}^{(R)}\right) = \frac{MSE\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{(R)}, \mathcal{R}\right)}{MSE\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{(RRSS)}, \mathcal{R}\right)}. \qquad (۱۲.۴)$$

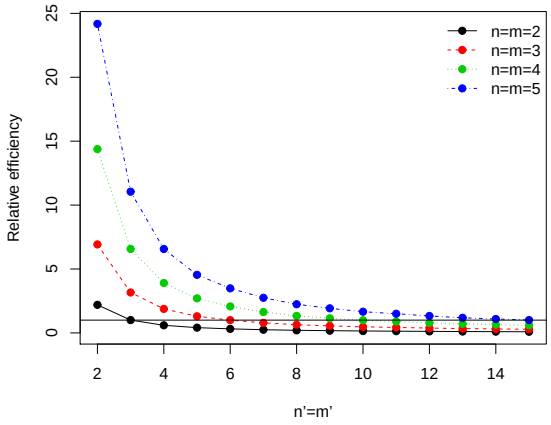
نمودار کارایی نسبی برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم با در نظر گرفتن نمونه‌هایی با اندازه برابر برای دو طرح، با توجه به رابطه (۱۲.۴) و برای ترکیب‌های مختلف (n, m) در شکل ۲.۴ نمایش داده شده‌است. با توجه به شکل ۲.۴، ملاحظه می‌شود، برای ترکیب‌های مختلف (n, m)، کارایی نسبی برآوردگر ML به‌دست آمده از طرح $RRSS$ بهتر از برآورگر متناظر به‌دست آمده از رکوردهای معمولی است. با توجه به نمودار فوق، مشاهده می‌شود با افزایش حجم نمونه کارایی $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{(RRSS)}$ به‌طور معنی‌داری بهتر از $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{(R)}$ است.

همچنین برای تمرکز بیشتر در مورد مقایسه این برآوردگرها، نمودار کارایی نسبی (۱۲.۴) را با در نظر گرفتن $n' = m' = ۲, \cdots, ۱۵$ برای $n = m = ۲, \cdots, ۵$ داده‌شده و به ازای $\mathcal{R} = ۰/۵, ۰/۹۵$ در شکل ۳.۴ رسم نمودیم.

با توجه به شکل ۳.۴، به آسانی مشاهده می‌شود، زمانی‌که $n' = m' \leq N = M$، کارایی نسبی بزرگتر از یک است. به‌طور واضح، زمانی‌که $n' \leq N$ و $m' \leq M$ برآوردگر درستنمایی ماکسیمم



شکل ۲.۴: نمودار $\mathbf{e}(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{(R)}; \hat{\mathcal{R}}_{ML}^{(RRSS)})$ در مقابل $\mathcal{R}$



شکل ۳.۴: نمودار کارایی نسبی $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ براساس رابطه (۱۲.۴)

براساس طرح $RRSS$ بهتر از رکوردهای معمولی است. به عنوان مثال، به‌ازای $n = m = ۴$ (یا به‌طور معادل $N = M = ۱۰$)، برآوردگر $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{(RRSS)}$ کاراتر از برآوردگر $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{(R)}$ به‌ازای $n' = m' = ۸$ می‌باشد.

۲.۳.۴ برآودگر $UMVU$

در این بخش با در نظر گرفتن مدل $PRHR$ برآورگر $UMVU$ پارامتر $\mathcal{R}$ را براساس طرح $RRSS$ به‌دست می‌آوریم. با مراجعه به رابطه (۷.۴)، مشاهده می‌کنیم توزیع $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ به توزیع پایه بستگی ندارد، بنابراین با توجه به قضیه ۳.۲.۲ از فصل دوم نتیجه می‌شود که با درنظر گرفتن مدل $PRHR$ نتایجی مشابه برای $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{s=0}^{M-1}\frac{\binom{M-1}{s}}{\binom{N+s-1}{s}}\left(-\frac{1-\hat{\mathcal{R}}_{ML}}{\hat{\mathcal{R}}_{ML}}\frac{M}{N}\right)^{s}, & \hat{\mathcal{R}}_{ML}<\dfrac{M}{M+N},\\[2ex] \displaystyle 1-\sum_{s=0}^{N-1}\frac{\binom{N-1}{s}}{\binom{M+s-1}{s}}\left(-\frac{\hat{\mathcal{R}}_{ML}}{1-\hat{\mathcal{R}}_{ML}}\frac{N}{M}\right)^{s}, & \hat{\mathcal{R}}_{ML}\geq\dfrac{M}{M+N}.\end{cases} \tag{۱۳.۴}$$

مقایسه‌ی برآودگر $UMVU$ حاصل از دو طرح نمونه‌گیری

برآوردگر $UMVU$ پارامتر $\mathcal{R}$ به صورت تابعی از $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ در رابطه (۱۳.۴) بیان شده‌است. لذا با توجه به رابطه (۷.۴)، $Var(\hat{\mathcal{R}}_{UMVU})$ به توزیع پایه X و Y بستگی ندارد. بنابراین برای مقایسه برآوردگرهای $UMVU$ به‌دست آمده از دو طرح با توجه به

$$\mathbf{e}\left(\hat{\mathcal{R}}^{(RRSS)}_{UMVU},\hat{\mathcal{R}}^{(R)}_{UMVU}\right)=\frac{Var(\hat{\mathcal{R}}^{(R)}_{UMVU})}{Var(\hat{\mathcal{R}}^{(RRSS)}_{UMVU})}.$$

و با درنظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم‌یافته بر طبق روابط (۱۰.۴) و (۱۱.۴) به‌عنوان توزیعی از خانواده‌ی $PRHR$، نمودار کارایی نسبی برآورگرهای فوق را در مقابل $\mathcal{R}$ در شکل ۴.۴، رسم نمودیم.

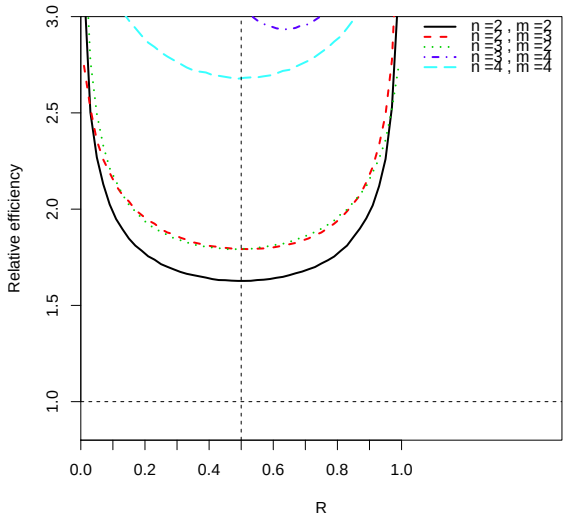
با توجه به شکل ۴.۴، مشاهده می‌شود برای تمام ترکیب‌های مختلف (n,m) در نظر گرفته شده، کارایی نسبی برآوردگر $UMVU$ به‌دست آمده از طرح $RRSS$ بهتر از برآوردگر متناظر به‌دست آمده از رکوردهای معمولی است.

همانند برآوردگر ML، مقادیر کارایی نسبی براساس رابطه (؟؟)، برای $n=m=۲,\cdots,۵$ و $n'=m'=۲,\cdots,۱۵$ در شکل ۵.۴ رسم شده‌است

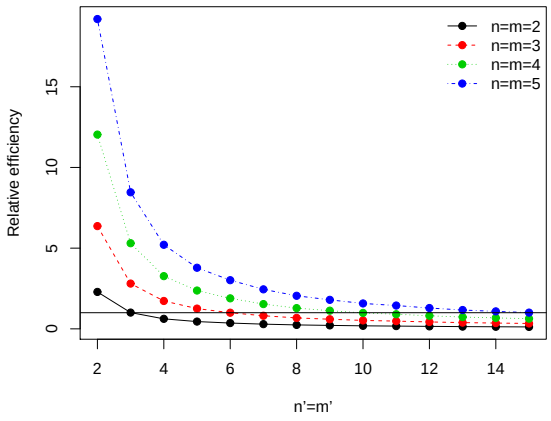
با توجه به شکل ۵.۴، مشاهده می‌شود عملکرد $\hat{\mathcal{R}}^{(R)}_{UMVU}$ زمانی‌که تعداد مشاهدات نمونه افزایش می‌یابد ($n'>N$ و $m'>M$)، بهتر از $\hat{\mathcal{R}}^{(RRSS)}_{UMVU}$ است که این موضوع از نظر اقتصادی مقرون به‌صرفه نمی‌باشد. بنابراین برآوردگر $\hat{\mathcal{R}}^{(RRSS)}_{UMVU}$ برآوردگر کاراتری می‌باشد.

۳.۳.۴ برآوردگر بیزی

در این بخش، استنباط‌های بیزی پارامتر تنش-مقاومت را با فرض این‌که α و β دارای توزیع پیشین گاما باشند مورد بررسی قرار می‌دهیم، به‌طوری‌که $\alpha\sim Gamma(\lambda_1,\mu_1)$ و $\beta\sim Gamma(\lambda_2,\mu_2)$



شکل ۴.۴: نمودار $\mathbf{e}(\hat{\mathcal{R}}^{(R)}_{UMVU};\hat{\mathcal{R}}^{(RRSS)}_{UMVU})$ در مقابل $\mathcal{R}$



شکل ۵.۴: کارایی نسبی $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}$ براساس (؟؟)

بنابراین توزیع پسین α و β به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$\alpha|\mathbf{r} \sim Gamma\left(\lambda_1 + N, \mu_1 + t_n'\right), \qquad (۱۴.۴)$$

و

$$\beta|\mathbf{s} \sim Gamma\left(\lambda_2 + M, \mu_2 + h_m'\right), \qquad (۱۵.۴)$$

که t'_n و h'_m مقادیر مشاهده‌شده متغیرهای تصادفی T'_n و H'_m به ترتیب در روابط (۵.۴) و (۶.۴) می‌باشند. با فرض استقلال α و β، توزیع پسین $\mathcal{R}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$f_{\mathcal{R}|(\mathbf{R},\mathbf{S})}(r)=\frac{\Gamma(\lambda_1+\lambda_2+N+M)}{\Gamma(\lambda_1+N)\Gamma(\lambda_2+M)}\left(\frac{\mu_2+H'_m}{\mu_1+T'_n}\right)^{\lambda_2+M}\frac{r^{\lambda_2+M-1}(1-r)^{\lambda_1+N-1}}{\left(1-r(1-\frac{\mu_2+H'_m}{\mu_1+T'_n})\right)^{\lambda_1+\lambda_2+N+M}}.$$

(۱۶.۴)

و همچنین برآوردگر بیزی $\mathcal{R}$ تحت زیان درجه دوم خطا به صورت زیر است. (کسلا و برگر [۱] ۱۹۹۰).

$$\hat{\mathcal{R}}_B=\int_0^1 r f_{\mathcal{R}|(\mathbf{R},\mathbf{S})}(r)dr=\frac{\lambda_2+M}{\lambda_1+\lambda_2+N+M}\left(\frac{\mu_2+H'_m}{\mu_1+T'_n}\right)^{\lambda_2+M}$$
$$\times\ {}_2F_1\left(\lambda_1+\lambda_2+N+M,\lambda_2+M+1,\lambda_1+\lambda_2+N+M+1,(1-\frac{\mu_2+H'_m}{\mu_1+T'_n})\right).$$

مقایسه‌ی برآودگر بیزی حاصل از دو طرح نمونه‌گیری

با استفاده از رابطه (۱۶.۴)، به آسانی می‌توان نشان داد که $MSE(\hat{\mathcal{R}}_B,\mathcal{R})$ بستگی به انتخاب توزیع پایه برای توابع X و Y ندارد. بار دیگر با درنظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم یافته برآوردگرهای بیز به‌دست آمده از دو طرح را مقایسه می‌کنیم.

$$\mathbf{e}\left(\hat{\mathcal{R}}_B^{(RRSS)},\hat{\mathcal{R}}_B^{(R)}\right)=\frac{MSE\left(\hat{\mathcal{R}}_B^{(R)},\mathcal{R}\right)}{MSE\left(\hat{\mathcal{R}}_B^{(RRSS)},\mathcal{R}\right)}.$$

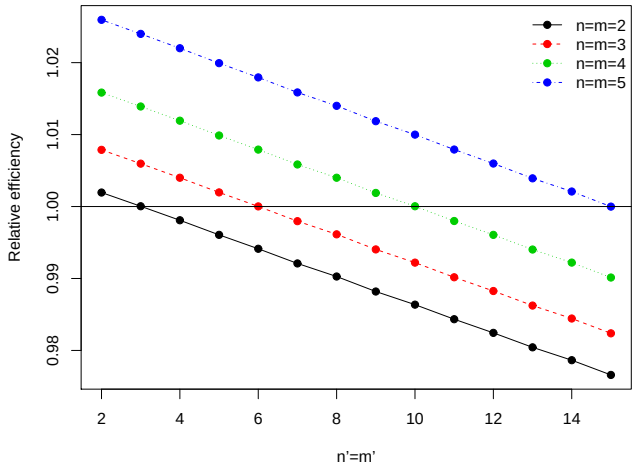
مقادیر کارایی نسبی برآوردگرهای بیز به‌دست آمده براساس دو طرح، در شکل ۶.۴ رسم شده‌است.

با توجه به شکل ۶.۴، مشاهده می‌شود زمانی‌که $n'=m'\leq N=M$، $\mathbf{e}\left(\hat{\mathcal{R}}_B^{(RRSS)},\hat{\mathcal{R}}_B^{(R)}\right)>1$. بنابراین، کارایی نسبی برآوردگر $\hat{\mathcal{R}}_B^{(RRSS)}$ بهتر از برآوردگر $\hat{\mathcal{R}}_B^{(R)}$ می‌باشد.

۴.۴ برآوردگرهای فاصله‌ای‌پارامتر $\mathcal{R}$ در خانواده $PRHP$

در این بخش، چند فاصله اطمینان برای $\mathcal{R}$ ارائه می‌دهیم.

[۱] Casella and Berger



شکل ۶.۴: نمودار کارایی نسبی $\hat{\mathcal{R}}_B$ براساس دو طرح

۱.۴.۴ فاصله اطمینان براساس کمیت محور

با استفاده از رابطه (۷.۴) و با فرض $W = \frac{\beta N H'_m}{\alpha M T'_n}$ فاصله‌اطمینان $\gamma)$٪۱۰۰(۱− برای $\mathcal{R}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left[\left(1+\frac{1-\hat{\mathcal{R}}_{ML}}{\hat{\mathcal{R}}_{ML}}F_{1-\frac{\gamma}{2}(2M,2N)}\right)^{-1},\left(1+\frac{1-\hat{\mathcal{R}}_{ML}}{\hat{\mathcal{R}}_{ML}}F_{\frac{\gamma}{2}(2M,2N)}\right)^{-1}\right],$$

که در آن $F_{2M,2N)}(\gamma)$، چندک γام توزیع F به‌ترتیب با $2M$ و $2N$ درجه آزادی است.

۲.۴.۴ فاصله اطمینان مجانبی

در این بخش می‌خواهیم یک فاصله‌اطمینان مجانبی برای $\mathcal{R}$ براساس $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ به‌دست آوریم. اگر فرض کنید تعداد مشاهدات به اندازه کافی بزرگ باشد به‌طوری که $n,m \to \infty$، در این‌صورت $(\hat{\alpha}_{ML}-\alpha) \xrightarrow{d} N(0,\sigma_1^2)$ و $(\hat{\beta}_{ML}-\beta) \xrightarrow{d} N(0,\sigma_2^2)$ که در آن $(\xrightarrow{d})$ نماد همگرایی در توزیع است و σ_1^2 و σ_2^2 واریانس مجانبی است و به صورت زیر محاسبه می‌گردد.

$$\sigma_1^2 = -1/E\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}logL(\alpha,\mathbf{U})\right)$$
$$\sigma_2^2 = -1/E\left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}logL(\beta,\mathbf{S})\right)$$

که L در رابطه (۱.۴) ارائه شده‌است. به آسانی نشان می‌دهیم که $\sigma_1^2 = \frac{\alpha^2}{N}$ و $\sigma_2^2 = \frac{\beta^2}{M}$. فرض کنید n و m به اندازه کافی بزرگ باشد، به‌طوری‌که $p \longrightarrow \frac{M}{N}$ ، که در آن $p \in (0,1)$ بنابراین داریم

$$\sqrt{N}\begin{pmatrix}\hat{\alpha}-\alpha\\ \hat{\beta}-\beta\end{pmatrix} \xrightarrow{d} N_2\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\alpha^2 & 0\\ 0 & \frac{\beta^2}{p}\end{pmatrix}\right).$$

با فرض $h(t_1,t_2) = \frac{t_2}{t_1+t_2}$ و با استفاده از روش دلتا (واسرمن[۲] (۲۰۰۶) صفحه ۶-۵ را ببینید.) داریم

$$(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}) \xrightarrow{d} N(0,\sigma^2),$$

که

$$\sigma = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\sqrt{\frac{1}{N}(1+\frac{1}{p})}, \qquad (۱۷.۴)$$

براساس این نتایج مجانبی و با به‌کار بردن قضیه اسلاتسکی[۳]، فاصله‌اطمینان مجانبی $100(1-\gamma)\%$ برای $\mathcal{R}$ به صورت زیر نتیجه می‌شود

$$(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - Z_{1-\frac{\gamma}{2}}\hat{\sigma}, \hat{\mathcal{R}}_{ML} + Z_{1-\frac{\gamma}{2}}\hat{\sigma}).$$

که Z_γ، چندک γ توزیع نرمال استاندارد است و $\hat{\sigma}$ با جایگذاری $\hat{\alpha}_{ML}$ و $\hat{\beta}_{ML}$ به‌ترتیب به‌جای α و β در (۱۷.۴) به‌دست می‌آید.

۳.۴.۴ فواصل معتبر بیزی

با استفاده از این واقعیت که $\frac{(\mu_1+T_n')(\lambda_2+M)\alpha}{(\mu_2+H_m')(\lambda_1+N))\beta}|(\mathbf{r},\mathbf{s}) \sim F\left(2(\lambda_1+N), 2(\lambda_2+M)\right)$ فاصله معتبر [۴] بیزی $100(1-\gamma)\%$ برای $\mathcal{R}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\left[(1+AF_{1-\frac{\gamma}{2}})^{-1}, (1+AF_{\frac{\gamma}{2}})^{-1}\right]$$

که $A = \left(\frac{\mu_2+H_m'}{\mu_1+T_n'}\right)\left(\frac{\lambda_1+N}{\lambda_2+M}\right)$.

از طریق روش زنجیر مارکوف مونت کارلو[۵] (MCMC) که توسط چن و شائو[۶] (۱۹۹۹) ارائه شده‌است و با استفاده از لم ۱.۳.۳، فاصله HPD برای $\mathcal{R}$ را به‌دست می‌آوریم.

---

[۲] Wassserman

[۳] Slutsky

[۴] Credible interval

[۵] Monte Carlo Markov Chain

[۶] Chen and Shao

۴.۴.۴ فواصل اطمینان بوت‌استرپ

در این بخش چند فاصله بوت‌استرپی را ارائه می‌دهیم. لازم است بدانید تمام فرآیندهای این بخش بستگی به T_n' و H_m' می‌باشند که به‌ترتیب در روابط (۵.۴) و (۶.۴) داده شده‌است. بنابراین در این بخش از روش بوت‌استرپ پارامتری استفاده می‌نماییم و فواصل بوت‌استرپ صدکی و t-بوت‌استرپ و بوت‌استرپ پایه را به‌دست می‌آوریم. فرآیند بوت‌استرپ تحت گام‌های زیر توضیح داده شده‌است.

گام ۱. $\hat{\alpha}$، $\hat{\beta}$ و $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ را به ترتیب با استفاده از روابط (۵.۴)، (۶.۴) و (۷.۴)، با در نظرگرفتن نمونه‌های مشاهده‌شده مستقل u_i، s_j به ترتیب از توزیع‌های $Gamma(i,\alpha)$، $i = ۱,\ldots,n$ و $Gamma(j,\beta)$، $j = ۱,\ldots,m$ محاسبه می‌کنیم.

گام ۲. $u_i^* \sim Gamma(i,\hat{\alpha})$ و $s_j^* \sim Gamma(j,\hat{\beta})$ را به‌منظور محاسبه $\hat{\alpha}^*$، $\hat{\beta}^*$ و همچنین $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^*$ تولید می‌کنیم.

گام ۳. مرحله ۲ را B بار $(b = ۱,\ldots,B)$ برای محاسبه $\hat{\mathcal{R}}_{(B)ML}^*$ تکرار می‌کنیم.

t-بوت استرپ براساس انحراف معیار مجانبی σ

گام ۲ را $b = ۱\ldots,B$ بار برای به‌دست‌آوردن $\hat{\sigma}^*$ در رابطه (۱۷.۴) به‌ترتیب با جایگذاری $\hat{\alpha}^*$ و $\hat{\beta}^*$ به‌جای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$. فرض کنید $Z^* = (Z_{(۱)}^*,\ldots,Z_{(B)}^*)^\top$ که

$$z_{(b)}^* = \frac{\hat{\mathcal{R}}_{(b)ML}^* - \hat{\mathcal{R}}_{ML}}{\hat{\sigma}_{(b)}^*}, \quad b = ۱,\ldots,B$$

در این‌صورت بازه اطمینان t-بوت‌استرپ $۱۰۰(۱-\gamma)٪$ برای $\mathcal{R}$ به‌صورت زیر است:

$$\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - z^*_{۱-\frac{\gamma}{۲}}\,\hat{\sigma}, \hat{\mathcal{R}}_{ML} - z^*_{\frac{\gamma}{۲}}\,\hat{\sigma}\right).$$

که Z_γ^* چندک γام Z^* می‌باشد.

برای محاسبه فواصل اطمینان بوت‌استرپ صدکی و پایه و همچنین فاصله‌اطمینان t-بوت‌استرپ براساس برآورد بوت‌استرپی واریانس به بخش ۲.۳.۲ از فصل دوم مراجعه نمایید.

۵.۴ مقایسه‌ی برآوردگرها به کمک شبیه‌سازی

در این بخش عملکرد فواصل‌اطمینان به‌دست آمده از طریق شبیه‌سازی مقایسه می‌گردد. بدین‌منظور تمام ترکیب‌های مختلف $n = ۳,۵,۷$ و $m = ۳,۵,۷$ با فرض $\beta = ۰/۳$ و $\mathcal{R} = (۰/۱, ۰/۳, ۰/۵, ۰/۷, ۰/۹)$ در نظر گرفته شده‌است. برای هر ترکیب ۱۰۰۰۰ نمونه شبیه‌سازی شده است. برای برآورد واریانس بوت‌استرپی، $B = ۱۰۰۰$ و $B' = ۲۵$ درنظر گرفته شده‌است. همچنین توزیع پیشین $Gamma(۲,۴)$

برای α و β انتخاب شده‌است. فواصل‌اطمینان زیر را به‌دست‌آورده‌ایم که نتایج شبیه‌سازی در جدول‌های ۱.۴ تا ۴.۴ ارائه شده‌است.

$Perc$: فاصله‌اطمینان بوت‌استرپ صدکی

$Boot-t$۱: فاصله‌اطمینان t-بوت‌استرپ براساس انحراف معیار مجانبی σ

$Boot-t$۲: فاصله‌اطمینان t-بوت‌استرپ براساس برآورد واریانس بوت‌استرپی

$Basic$: فاصله‌اطمینان بوت‌استرپ پایه

MLE: فاصله‌اطمینان براساس کمیت‌محور

$AMLE$: فاصله‌اطمینان مجانبی

$Bayes$: فاصله‌اطمینان بیزی

HPD: فاصله تقریبی HPD

بر طبق نتایج به‌دست آمده از جدول‌های ۱.۴ تا ۴.۴، نکات زیر مشاهده می‌شود

- همان‌طور که انتظار داشتیم سطح پوشش و میانگین طول فاصله‌اطمینان با افزایش اندازه نمونه کاهش می‌یابد.
- واضح است که ماکسیمم مقدار میانگین طول فاصله‌اطمینان در $\mathcal{R}=$ ۰/۵ می‌باشد و برای مقادیر فرین $\mathcal{R}$ کاهش می‌یابد که نتایج شبیه‌سازی با نتایج به‌دست آمده در بخش ۳.۴ مطابقت دارد.
- فاصله‌اطمینان $Boot-t$۱ بخصوص برای اندازه نمونه‌های بزرگ بهتر از فاصله‌اطمینان $Boot-t$۲ عمل می‌کند.
- سطح پوشش فاصله‌اطمینان به‌دست آمده براساس کمیت محور و فاصله‌اطمینان بوت‌استرپ صدکی بسیار نزدیک به سطح اطمینان γ می‌باشد. با این وجود، براساس معیار EL، فاصله‌اطمینان مجانبی بهتر از سایر فواصل عمل می‌کند.در نهایت با در نظر گرفتن دو معیار یعنی سطح پوشش و میانگین طول، مشاهده می‌شود فاصله‌اطمینان بوت‌استرپ صدکی و فاصله‌اطمینان دقیق براساس کمیت محور بهتر می‌باشند.
- همان‌طور که انتظار داشتیم فاصله HPD بهتر از فاصله معتبر بیزی رفتار می‌کند.
- با در نظر گرفتن سطح اطمینان ۰.۰۵ و ۰.۱، مشاهده می‌شود زمانی‌که $\gamma=$ ۰/۱ سطح پوشش و میانگین طول فاصله‌اطمینان کمتر از زمانی می‌باشد که $\gamma=$ ۰/۰۵.

۱.۵.۴ مقایسه‌برآوردگرهای فاصله‌ای حاصل از دو طرح

صالحی و همکاران(۲۰۱۶)، براساس روش نمونه‌گیری معکوس رکوردها، رکوردهای معمولی و $RRSS$ را زمانی‌که توزیع جامعه‌ی آماری از الگوی نرخ خطر متناسب پیروی می‌کرد مقایسه نمودند. آن‌ها چند برآوردگر پارامتر مقیاس توزیع نمایی یک پارامتری را براساس معیار میانگین

جدول ۱.۴: CP و EL برای $\mathcal{R}$ به‌ازای $\gamma = ۰/۰۵$.

$Basic$		$Boot-t۲$		$Boot-t۱$		$perc$					
EL	CP	EL	CP	EL	CP	EL	CP	m	n	$\mathcal{R}$	ردیف
۰.۲۴۳	۰.۸۲۶	۰.۲۱۸	۰.۸۸۱	۰.۲۰۱	۰.۸۴۳	۰.۲۴۴	۰.۹۴۷	۳	۳	۰.۱	۱
۰.۱۷۶	۰.۸۴۰	۰.۱۷۳	۰.۸۴۶	۰.۱۶۷	۰.۸۲۳	۰.۱۷۶	۰.۹۳۷	۵	۳	۰.۱	۲
۰.۱۵۵	۰.۸۴۱	۰.۱۶۱	۰.۸۲۹	۰.۱۵۶	۰.۸۱۱	۰.۱۵۶	۰.۹۲۲	۷	۳	۰.۱	۳
۰.۲۱۶	۰.۸۶۶	۰.۲۱۰	۰.۹۳۰	۰.۱۹۴	۰.۹۰۱	۰.۲۱۷	۰.۹۳۹	۳	۵	۰.۱	۴
۰.۱۳۹	۰.۸۸۶	۰.۱۵۵	۰.۹۰۸	۰.۱۴۷	۰.۸۹۲	۰.۱۴۰	۰.۹۴۹	۵	۵	۰.۱	۵
۰.۱۱۶	۰.۸۹۱	۰.۱۳۴	۰.۸۹۶	۰.۱۲۷	۰.۸۸۵	۰.۱۱۶	۰.۹۴۵	۷	۵	۰.۱	۶
۰.۲۰۵	۰.۸۷۷	۰.۲۰۳	۰.۹۴۴	۰.۱۸۶	۰.۹۱۷	۰.۲۰۶	۰.۹۲۹	۳	۷	۰.۱	۷
۰.۱۲۳	۰.۸۹۳	۰.۱۳۲	۰.۹۲۸	۰.۱۲۳	۰.۹۱۰	۰.۱۲۴	۰.۹۴۹	۵	۷	۰.۱	۸
۰.۰۹۸	۰.۹۰۴	۰.۱۰۷	۰.۹۲۳	۰.۱۰۱	۰.۹۰۷	۰.۰۹۸	۰.۹۴۹	۷	۷	۰.۱	۹
۰.۴۴۷	۰.۸۲۱	۰.۵۳۹	۰.۹۰۷	۰.۵۳۲	۰.۸۸۳	۰.۴۴۹	۰.۹۴۷	۳	۳	۰.۳	۱۰
۰.۳۶۴	۰.۸۴۵	۰.۴۵۱	۰.۸۸۲	۰.۴۴۵	۰.۸۶۹	۰.۳۶۶	۰.۹۳۷	۵	۳	۰.۳	۱۱
۰.۳۳۶	۰.۸۵۴	۰.۴۲۴	۰.۸۶۴	۰.۴۱۸	۰.۸۵۴	۰.۳۳۷	۰.۹۲۳	۷	۳	۰.۳	۱۲
۰.۳۹۸	۰.۸۶۶	۰.۴۷۵	۰.۹۳۱	۰.۴۶۰	۰.۹۱۷	۰.۳۹۹	۰.۹۳۹	۳	۵	۰.۳	۱۳
۰.۲۹۳	۰.۸۹۴	۰.۳۴۰	۰.۹۳۰	۰.۳۲۹	۰.۹۱۸	۰.۲۹۴	۰.۹۴۹	۵	۵	۰.۳	۱۴
۰.۲۵۴	۰.۹۰۲	۰.۲۹۵	۰.۹۲۱	۰.۲۸۵	۰.۹۱۱	۰.۲۵۵	۰.۹۴۵	۷	۵	۰.۳	۱۵
۰.۳۷۸	۰.۸۷۴	۰.۴۴۱	۰.۹۳۰	۰.۴۲۱	۰.۹۱۸	۰.۳۸۰	۰.۹۲۸	۳	۷	۰.۳	۱۶
۰.۲۶۱	۰.۹۰۲	۰.۲۹۲	۰.۹۴۱	۰.۲۸۰	۰.۹۲۹	۰.۲۶۳	۰.۹۴۹	۵	۷	۰.۳	۱۷
۰.۲۱۶	۰.۹۱۴	۰.۲۴۰	۰.۹۳۷	۰.۲۳۰	۰.۹۲۷	۰.۲۱۷	۰.۹۴۹	۷	۷	۰.۳	۱۸
۰.۴۹۹	۰.۸۱۹	۰.۶۵۰	۰.۹۱۰	۰.۶۵۷	۰.۸۹۳	۰.۵۰۱	۰.۹۴۷	۳	۳	۰.۵	۱۹
۰.۴۳۱	۰.۸۵۰	۰.۵۴۹	۰.۹۰۹	۰.۵۴۲	۰.۸۹۷	۰.۴۳۳	۰.۹۳۷	۵	۳	۰.۵	۲۰
۰.۴۰۶	۰.۸۵۷	۰.۵۱۴	۰.۸۹۸	۰.۵۰۲	۰.۸۹۱	۰.۴۰۷	۰.۹۲۲	۷	۳	۰.۵	۲۱
۰.۴۳۲	۰.۸۵۹	۰.۵۴۹	۰.۹۱۵	۰.۵۴۳	۰.۹۰۳	۰.۴۳۳	۰.۹۳۹	۳	۵	۰.۵	۲۲
۰.۳۳۸	۰.۸۹۲	۰.۳۹۶	۰.۹۳۳	۰.۳۸۵	۰.۹۲۳	۰.۳۳۹	۰.۹۴۹	۵	۵	۰.۵	۲۳
۰.۳۰۰	۰.۹۰۵	۰.۳۴۴	۰.۹۳۸	۰.۳۳۳	۰.۹۲۹	۰.۳۰۱	۰.۹۴۶	۷	۵	۰.۵	۲۴
۰.۴۰۶	۰.۸۶۴	۰.۵۱۳	۰.۹۰۴	۰.۵۰۲	۰.۸۹۶	۰.۴۰۸	۰.۹۲۸	۳	۷	۰.۵	۲۵
۰.۳۰۰	۰.۹۰۶	۰.۳۴۳	۰.۹۳۶	۰.۳۳۲	۰.۹۲۸	۰.۳۰۱	۰.۹۴۹	۵	۷	۰.۵	۲۶
۰.۲۵۳	۰.۹۱۷	۰.۲۸۲	۰.۹۴۳	۰.۲۷۲	۰.۹۳۴	۰.۲۵۴	۰.۹۴۹	۷	۷	۰.۵	۲۷
۰.۴۴۵	۰.۸۲۲	۰.۵۳۸	۰.۹۰۷	۰.۵۳۰	۰.۸۸۴	۰.۴۴۷	۰.۹۴۷	۳	۳	۰.۷	۲۸
۰.۳۹۷	۰.۸۵۷	۰.۴۷۴	۰.۹۲۵	۰.۴۵۹	۰.۹۰۷	۰.۳۹۹	۰.۹۳۷	۵	۳	۰.۷	۲۹
۰.۳۷۸	۰.۸۷۱	۰.۴۴۲	۰.۹۲۶	۰.۴۲۲	۰.۹۱۲	۰.۳۸۰	۰.۹۲۳	۷	۳	۰.۷	۳۰
۰.۳۶۴	۰.۸۵۲	۰.۴۵۰	۰.۸۸۵	۰.۴۴۴	۰.۸۷۰	۰.۳۶۵	۰.۹۳۹	۳	۵	۰.۷	۳۱
۰.۲۹۳	۰.۸۸۹	۰.۳۳۹	۰.۹۲۸	۰.۳۲۸	۰.۹۱۶	۰.۲۹۴	۰.۹۴۹	۵	۵	۰.۷	۳۲
۰.۲۶۲	۰.۹۱۰	۰.۲۹۳	۰.۹۴۲	۰.۲۸۰	۰.۹۳۱	۰.۲۶۳	۰.۹۴۵	۷	۵	۰.۷	۳۳
۰.۳۳۶	۰.۸۶۵	۰.۴۲۴	۰.۸۷۵	۰.۴۱۸	۰.۸۶۶	۰.۳۳۸	۰.۹۲۸	۳	۷	۰.۷	۳۴
۰.۲۵۵	۰.۹۰۲	۰.۲۹۵	۰.۹۲۴	۰.۲۸۴	۰.۹۱۳	۰.۲۵۶	۰.۹۴۹	۵	۷	۰.۷	۳۵
۰.۲۱۶	۰.۹۱۵	۰.۲۴۰	۰.۹۴۱	۰.۲۳۰	۰.۹۳۰	۰.۲۱۷	۰.۹۴۹	۷	۷	۰.۷	۳۶
۰.۲۴۱	۰.۸۲۲	۰.۲۱۷	۰.۸۸۰	۰.۲۰۱	۰.۸۴۰	۰.۲۴۳	۰.۹۴۷	۳	۳	۰.۹	۳۷
۰.۲۱۵	۰.۸۵۸	۰.۲۱۰	۰.۹۲۵	۰.۱۹۴	۰.۸۹۲	۰.۲۱۶	۰.۹۳۷	۵	۳	۰.۹	۳۸
۰.۲۰۵	۰.۸۷۴	۰.۲۰۴	۰.۹۴۳	۰.۱۸۷	۰.۹۱۵	۰.۲۰۶	۰.۹۲۲	۷	۳	۰.۹	۳۹
۰.۱۷۵	۰.۸۳۹	۰.۱۷۳	۰.۸۴۸	۰.۱۶۶	۰.۸۲۷	۰.۱۷۶	۰.۹۳۹	۳	۵	۰.۹	۴۰
۰.۱۳۹	۰.۸۷۸	۰.۱۵۵	۰.۹۰۸	۰.۱۴۷	۰.۸۸۸	۰.۱۴۰	۰.۹۴۹	۵	۵	۰.۹	۴۱
۰.۱۲۴	۰.۹۰۱	۰.۱۳۲	۰.۹۳۵	۰.۱۲۴	۰.۹۲۰	۰.۱۲۵	۰.۹۴۵	۷	۵	۰.۹	۴۲
۰.۱۵۶	۰.۸۵۰	۰.۱۶۱	۰.۸۳۹	۰.۱۵۷	۰.۸۲۱	۰.۱۵۶	۰.۹۲۸	۳	۷	۰.۹	۴۳
۰.۱۱۶	۰.۸۹۶	۰.۱۳۴	۰.۹۰۲	۰.۱۲۷	۰.۸۸۹	۰.۱۱۷	۰.۹۴۹	۵	۷	۰.۹	۴۴
۰.۰۹۸	۰.۹۰۷	۰.۱۰۷	۰.۹۲۵	۰.۱۰۱	۰.۹۱۳	۰.۰۹۹	۰.۹۴۹	۷	۷	۰.۹	۴۵

توان دوم خطا و هم‌چنین شاخص پیتمن- نزدیکی مقایسه نمودند و از هردو معیار به این نتیجه رسیدند که طرح $RRSS$ برآوردگر کاراتری نسبت به رکوردهای معمولی دارد.

بکلیزی (۲۰۰۸)، برآوردهای درستنمایی و بیزی قابلیت اعتماد تنش-مقاومت را براساس مقادیر رکورد پایین از توزیع نمایی تعمیم یافته بررسی نمود. او فواصل اطمینان دقیق و تقریبی را به‌دست آورد و عملکرد فواصل فوق را از طریق شبیه‌سازی مطالعه نمود. با توجه به این‌که توزیع نمایی تعمیم یافته جزء خانواده $PRHR$ می‌باشد، بنابراین، در این بخش قصد داریم فواصل اطمینان به دست‌آمده در جدول‌های ۱ و ۲ بکلیزی (۲۰۰۸) را با فواصل متناظر به‌دست آمده براساس طرح

جدول ۲.۴: ادامه

ردیف	$\mathcal{R}$	n	m	MLE		$AMLE$		$Bayes$		HPD	
				EL	CP	EL	CP	EL	CP	EL	CP
۱	۰.۱	۳	۳	۰.۲۴۴	۰.۹۴۹	۰.۱۴۴	۰.۷۸۷	۰.۳۰۸	۰.۷۷۳	۰.۲۹۳	۰.۸۵۳
۲	۰.۱	۳	۵	۰.۱۷۷	۰.۹۳۸	۰.۰۸۰	۰.۶۲۴	۰.۲۵۵	۰.۷۵۸	۰.۲۴۰	۰.۸۶۰
۳	۰.۱	۳	۷	۰.۱۵۶	۰.۹۲۲	۰.۰۶۰	۰.۵۳۳	۰.۲۳۳	۰.۷۴۹	۰.۲۱۹	۰.۸۵۷
۴	۰.۱	۵	۳	۰.۲۱۷	۰.۹۴۰	۰.۰۹۹	۰.۷۱۰	۰.۲۲۱	۰.۸۶۷	۰.۲۱۲	۰.۹۰۶
۵	۰.۱	۵	۵	۰.۱۴۰	۰.۹۵۱	۰.۰۶۳	۰.۶۴۸	۰.۱۶۶	۰.۸۵۶	۰.۱۶۰	۰.۹۰۰
۶	۰.۱	۵	۷	۰.۱۱۶	۰.۹۴۷	۰.۰۴۴	۰.۵۵۳	۰.۱۴۴	۰.۸۵۶	۰.۱۳۸	۰.۹۰۳
۷	۰.۱	۷	۳	۰.۲۰۶	۰.۹۲۸	۰.۰۷۹	۰.۶۴۵	۰.۱۸۸	۰.۹۰۴	۰.۱۸۳	۰.۹۲۴
۸	۰.۱	۷	۵	۰.۱۲۴	۰.۹۴۹	۰.۰۴۷	۰.۵۷۲	۰.۱۳۳	۰.۹۰۵	۰.۱۳۰	۰.۹۱۷
۹	۰.۱	۷	۷	۰.۰۹۹	۰.۹۵۰	۰.۰۳۷	۰.۵۵۳	۰.۱۱۱	۰.۸۹۴	۰.۱۰۷	۰.۹۲۷
۱۰	۰.۳	۳	۳	۰.۴۴۹	۰.۹۴۹	۰.۲۶۴	۰.۷۰۸	۰.۴۱۴	۰.۹۵۴	۰.۴۰۳	۰.۹۳۹
۱۱	۰.۳	۳	۵	۰.۳۶۶	۰.۹۳۸	۰.۱۶۶	۰.۵۸۶	۰.۳۵۶	۰.۹۶۱	۰.۳۴۵	۰.۹۵۷
۱۲	۰.۳	۳	۷	۰.۳۳۷	۰.۹۲۲	۰.۱۲۹	۰.۵۱۱	۰.۳۳۱	۰.۹۷۱	۰.۳۲۰	۰.۹۶۳
۱۳	۰.۳	۵	۳	۰.۴۰۰	۰.۹۴۰	۰.۱۸۱	۰.۶۲۶	۰.۳۵۶	۰.۹۴۵	۰.۳۴۹	۰.۹۲۷
۱۴	۰.۳	۵	۵	۰.۲۹۴	۰.۹۵۱	۰.۱۳۲	۰.۶۰۹	۰.۲۸۴	۰.۹۵۱	۰.۲۷۸	۰.۹۴۲
۱۵	۰.۳	۵	۷	۰.۲۵۵	۰.۹۴۷	۰.۰۹۷	۰.۵۳۴	۰.۲۵۱	۰.۹۵۷	۰.۲۴۵	۰.۹۴۶
۱۶	۰.۳	۷	۳	۰.۳۸۰	۰.۹۲۸	۰.۱۴۵	۰.۵۶۱	۰.۳۳۲	۰.۹۴۳	۰.۳۲۷	۰.۹۲۷
۱۷	۰.۳	۷	۵	۰.۲۶۳	۰.۹۴۹	۰.۱۰۰	۰.۵۴۴	۰.۲۵۱	۰.۹۴۸	۰.۲۴۷	۰.۹۳۷
۱۸	۰.۳	۷	۷	۰.۲۱۷	۰.۹۵۰	۰.۰۸۲	۰.۵۳۴	۰.۲۱۳	۰.۹۵۲	۰.۲۰۹	۰.۹۴۵
۱۹	۰.۵	۳	۳	۰.۵۰۱	۰.۹۴۹	۰.۲۹۵	۰.۶۸۹	۰.۴۴۶	۰.۹۴۹	۰.۴۳۷	۰.۹۲۰
۲۰	۰.۵	۳	۵	۰.۴۳۳	۰.۹۳۸	۰.۱۹۶	۰.۵۸۷	۰.۳۹۲	۰.۹۴۶	۰.۳۸۵	۰.۹۲۳
۲۱	۰.۵	۳	۷	۰.۴۰۸	۰.۹۲۲	۰.۱۵۶	۰.۵۱۷	۰.۳۶۸	۰.۹۴۴	۰.۳۶۱	۰.۹۱۸
۲۲	۰.۵	۵	۳	۰.۴۳۳	۰.۹۴۰	۰.۱۹۷	۰.۵۹۰	۰.۳۹۲	۰.۹۵۱	۰.۳۸۵	۰.۹۲۲
۲۳	۰.۵	۵	۵	۰.۳۳۹	۰.۹۵۱	۰.۱۵۳	۰.۵۹۸	۰.۳۲۱	۰.۹۵۰	۰.۳۱۶	۰.۹۳۲
۲۴	۰.۵	۵	۷	۰.۳۰۱	۰.۹۴۷	۰.۱۱۴	۰.۵۳۳	۰.۲۸۷	۰.۹۴۸	۰.۲۸۳	۰.۹۳۲
۲۵	۰.۵	۷	۳	۰.۴۰۸	۰.۹۲۸	۰.۱۵۶	۰.۵۲۷	۰.۳۶۸	۰.۹۴۷	۰.۳۶۱	۰.۹۲۱
۲۶	۰.۵	۷	۵	۰.۳۰۱	۰.۹۴۹	۰.۱۱۴	۰.۵۲۸	۰.۲۸۷	۰.۹۴۹	۰.۲۸۲	۰.۹۳۱
۲۷	۰.۵	۷	۷	۰.۲۵۴	۰.۹۵۰	۰.۰۹۶	۰.۵۲۷	۰.۲۴۶	۰.۹۴۸	۰.۲۴۳	۰.۹۳۷
۲۸	۰.۷	۳	۳	۰.۴۴۸	۰.۹۴۹	۰.۲۶۳	۰.۷۰۶	۰.۴۰۱	۰.۹۳۶	۰.۳۹۰	۰.۹۱۱
۲۹	۰.۷	۳	۵	۰.۳۹۹	۰.۹۳۸	۰.۱۸۱	۰.۶۲۲	۰.۳۵۵	۰.۹۲۲	۰.۳۴۹	۰.۹۰۵
۳۰	۰.۷	۳	۷	۰.۳۸۰	۰.۹۲۲	۰.۱۴۵	۰.۵۴۸	۰.۳۳۴	۰.۹۱۲	۰.۳۲۹	۰.۸۹۶
۳۱	۰.۷	۵	۳	۰.۳۶۶	۰.۹۴۰	۰.۱۶۶	۰.۵۹۲	۰.۳۴۰	۰.۹۵۰	۰.۳۲۹	۰.۹۲۴
۳۲	۰.۷	۵	۵	۰.۲۹۴	۰.۹۵۱	۰.۱۳۲	۰.۶۰۸	۰.۲۸۰	۰.۹۴۴	۰.۲۷۳	۰.۹۳۰
۳۳	۰.۷	۵	۷	۰.۲۶۳	۰.۹۴۷	۰.۱۰۰	۰.۵۴۴	۰.۲۵۱	۰.۹۴۰	۰.۲۴۶	۰.۹۳۱
۳۴	۰.۷	۷	۳	۰.۳۳۸	۰.۹۲۸	۰.۱۲۹	۰.۵۲۲	۰.۳۱۵	۰.۹۴۷	۰.۳۰۲	۰.۹۲۱
۳۵	۰.۷	۷	۵	۰.۲۵۶	۰.۹۴۹	۰.۰۹۷	۰.۵۳۱	۰.۲۴۷	۰.۹۴۸	۰.۲۴۰	۰.۹۳۲
۳۶	۰.۷	۷	۷	۰.۲۱۸	۰.۹۵۰	۰.۰۸۳	۰.۵۳۳	۰.۲۱۲	۰.۹۴۷	۰.۲۰۸	۰.۹۳۷
۳۷	۰.۹	۳	۳	۰.۲۴۲	۰.۹۴۹	۰.۱۴۳	۰.۷۸۴	۰.۲۲۱	۰.۹۲۷	۰.۲۰۷	۰.۹۲۷
۳۸	۰.۹	۳	۵	۰.۲۱۶	۰.۹۳۸	۰.۰۹۸	۰.۷۰۲	۰.۱۹۲	۰.۹۰۵	۰.۱۸۴	۰.۹۱۹
۳۹	۰.۹	۳	۷	۰.۲۰۶	۰.۹۲۲	۰.۰۸۰	۰.۶۳۰	۰.۱۸۰	۰.۸۹۰	۰.۱۷۳	۰.۹۰۵
۴۰	۰.۹	۵	۳	۰.۱۷۶	۰.۹۴۰	۰.۰۸۰	۰.۶۳۲	۰.۱۶۸	۰.۹۴۸	۰.۱۵۶	۰.۹۳۲
۴۱	۰.۹	۵	۵	۰.۱۴۰	۰.۹۵۱	۰.۰۶۳	۰.۶۴۶	۰.۱۳۵	۰.۹۴۲	۰.۱۲۹	۰.۹۳۹
۴۲	۰.۹	۵	۷	۰.۱۲۵	۰.۹۴۷	۰.۰۴۸	۰.۵۷۸	۰.۱۲۰	۰.۹۳۵	۰.۱۱۶	۰.۹۳۷
۴۳	۰.۹	۷	۳	۰.۱۵۷	۰.۹۲۸	۰.۰۶۰	۰.۵۴۸	۰.۱۵۰	۰.۹۴۷	۰.۱۳۸	۰.۹۲۴
۴۴	۰.۹	۷	۵	۰.۱۱۷	۰.۹۴۹	۰.۰۴۵	۰.۵۵۴	۰.۱۱۵	۰.۹۴۷	۰.۱۰۹	۰.۹۳۸
۴۵	۰.۹	۷	۷	۰.۰۹۹	۰.۹۵۰	۰.۰۳۸	۰.۵۵۱	۰.۰۹۷	۰.۹۴۵	۰.۰۹۴	۰.۹۴۲

$RRSS$ مقایسه کنیم. معیار کارایی نسبی را به صورت $\delta = \frac{EL^{(R)}}{EL^{(RRSS)}}$ در نظر می‌گیریم. که در آن $EL^{(R)}$ و $EL^{(RRSS)}$ به‌ترتیب متوسط طول فواصل اطمینان براساس رکوردهای معمولی و طرح $RRSS$ می‌باشند. در حقیقت زمانی‌که $\delta > ۱$، فاصله اطمینان براساس $RRSS$ عملکرد بهتری در مقایسه با فاصله اطمینان براساس رکوردهای معمولی دارد. حال با در نظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم یافته، مقادیر δ را برای ترکیب‌های مختلف n و m در نظر گرفته شده در بکلیزی (۲۰۰۸)، محاسبه نمودیم و نتایج را در جدول‌های ۵.۴ و ۶.۴ ارائه دادیم.

ملاحظه می‌شود در تمامی حالت‌ها δ مقداری مثبت اختیار می‌کند، بنابراین همان‌طور که

جدول ۳.۴: CP و EL برای $\mathcal{R}$ به‌ازای $\gamma = ۰/۱$.

$Basic$		$Boot-t$۲		$Boot-t$۱		$perc$					
EL	CP	EL	CP	EL	CP	EL	CP	m	n	$\mathcal{R}$	ردیف
۰.۱۹۹	۰.۸۰۲	۰.۱۹۹	۰.۸۵۰	۰.۱۸۷	۰.۸۱۶	۰.۲۰۰	۰.۸۹۷	۳	۳	۰.۱	۱
۰.۱۴۷	۰.۸۱۱	۰.۱۶۲	۰.۸۱۵	۰.۱۵۸	۰.۷۹۹	۰.۱۴۷	۰.۸۸۸	۵	۳	۰.۱	۲
۰.۱۳۰	۰.۸۱۲	۰.۱۵۱	۰.۷۹۸	۰.۱۴۸	۰.۷۸۴	۰.۱۳۱	۰.۸۷۷	۷	۳	۰.۱	۳
۰.۱۷۶	۰.۸۴۰	۰.۱۸۲	۰.۸۹۷	۰.۱۶۹	۰.۸۷۰	۰.۱۷۶	۰.۸۹۲	۳	۵	۰.۱	۴
۰.۱۱۵	۰.۸۵۵	۰.۱۲۶	۰.۸۷۷	۰.۱۲۰	۰.۸۶۲	۰.۱۱۶	۰.۸۹۸	۵	۵	۰.۱	۵
۰.۰۹۷	۰.۸۶۲	۰.۱۰۸	۰.۸۶۷	۰.۱۰۴	۰.۸۵۵	۰.۰۹۷	۰.۸۹۷	۷	۵	۰.۱	۶
۰.۱۶۷	۰.۸۵۳	۰.۱۶۷	۰.۹۰۶	۰.۱۵۴	۰.۸۸۲	۰.۱۶۷	۰.۸۸۲	۳	۷	۰.۱	۷
۰.۱۰۲	۰.۸۶۰	۰.۱۰۷	۰.۸۹۱	۰.۱۰۲	۰.۸۷۵	۰.۱۰۳	۰.۸۹۸	۵	۷	۰.۱	۸
۰.۰۸۲	۰.۸۷۰	۰.۰۸۷	۰.۸۸۴	۰.۰۸۴	۰.۸۷۵	۰.۰۸۲	۰.۸۹۸	۷	۷	۰.۱	۹
۰.۳۷۹	۰.۷۸۴	۰.۴۵۳	۰.۸۶۰	۰.۴۵۱	۰.۸۳۴	۰.۳۸۰	۰.۸۹۸	۳	۳	۰.۳	۱۰
۰.۳۱۰	۰.۸۰۴	۰.۳۸۰	۰.۸۴۳	۰.۳۷۶	۰.۸۲۷	۰.۳۱۱	۰.۸۸۹	۵	۳	۰.۳	۱۱
۰.۲۸۶	۰.۸۱۱	۰.۳۵۵	۰.۸۳۱	۰.۳۵۰	۰.۸۲۰	۰.۲۸۶	۰.۸۷۸	۷	۳	۰.۳	۱۲
۰.۳۳۵	۰.۸۲۵	۰.۳۸۰	۰.۸۸۴	۰.۳۷۰	۰.۸۶۶	۰.۳۳۶	۰.۸۹۳	۳	۵	۰.۳	۱۳
۰.۲۴۷	۰.۸۵۱	۰.۲۷۵	۰.۸۸۵	۰.۲۶۸	۰.۸۷۴	۰.۲۴۸	۰.۸۹۹	۵	۵	۰.۳	۱۴
۰.۲۱۵	۰.۸۵۷	۰.۲۴۰	۰.۸۷۹	۰.۲۳۳	۰.۸۷۱	۰.۲۱۵	۰.۸۹۸	۷	۵	۰.۳	۱۵
۰.۳۱۸	۰.۸۳۳	۰.۳۵۳	۰.۸۸۲	۰.۳۴۰	۰.۸۶۷	۰.۳۱۹	۰.۸۸۳	۳	۷	۰.۳	۱۶
۰.۲۲۰	۰.۸۵۶	۰.۲۳۸	۰.۸۹۲	۰.۲۳۰	۰.۸۷۸	۰.۲۲۱	۰.۸۹۹	۵	۷	۰.۳	۱۷
۰.۱۸۲	۰.۸۶۷	۰.۱۹۶	۰.۸۹۴	۰.۱۹۰	۰.۸۸۰	۰.۱۸۳	۰.۹۰۰	۷	۷	۰.۳	۱۸
۰.۴۲۷	۰.۷۷۵	۰.۵۲۴	۰.۸۶۱	۰.۵۳۱	۰.۸۴۲	۰.۴۲۸	۰.۸۹۸	۳	۳	۰.۵	۱۹
۰.۳۶۸	۰.۸۰۲	۰.۴۳۹	۰.۸۵۹	۰.۴۳۴	۰.۸۴۵	۰.۳۶۹	۰.۸۸۸	۵	۳	۰.۵	۲۰
۰.۳۴۶	۰.۸۱۴	۰.۴۱۱	۰.۸۵۳	۰.۴۰۳	۰.۸۴۱	۰.۳۴۷	۰.۸۷۸	۷	۳	۰.۵	۲۱
۰.۳۶۸	۰.۸۱۱	۰.۴۳۹	۰.۸۶۴	۰.۴۳۴	۰.۸۵۱	۰.۳۶۹	۰.۸۹۳	۳	۵	۰.۵	۲۲
۰.۲۸۶	۰.۸۴۳	۰.۳۲۱	۰.۸۸۴	۰.۳۱۴	۰.۸۷۴	۰.۲۸۷	۰.۸۹۹	۵	۵	۰.۵	۲۳
۰.۲۵۴	۰.۸۵۹	۰.۲۸۰	۰.۸۸۷	۰.۲۷۳	۰.۸۷۷	۰.۲۵۴	۰.۸۹۷	۷	۵	۰.۵	۲۴
۰.۳۴۶	۰.۸۲۱	۰.۴۱۱	۰.۸۶۰	۰.۴۰۳	۰.۸۵۲	۰.۳۴۷	۰.۸۸۳	۳	۷	۰.۵	۲۵
۰.۲۵۴	۰.۸۵۳	۰.۲۸۰	۰.۸۸۸	۰.۲۷۲	۰.۸۷۸	۰.۲۵۴	۰.۹۰۰	۵	۷	۰.۵	۲۶
۰.۲۱۴	۰.۸۶۶	۰.۲۳۱	۰.۸۹۵	۰.۲۲۵	۰.۸۸۳	۰.۲۱۴	۰.۹۰۰	۷	۷	۰.۵	۲۷
۰.۳۷۸	۰.۷۸۳	۰.۴۵۱	۰.۸۶۰	۰.۴۴۹	۰.۸۳۶	۰.۳۷۹	۰.۸۹۸	۳	۳	۰.۷	۲۸
۰.۳۳۵	۰.۸۱۸	۰.۳۷۹	۰.۸۷۵	۰.۳۶۹	۰.۸۵۷	۰.۳۳۶	۰.۸۸۹	۵	۳	۰.۷	۲۹
۰.۳۱۸	۰.۸۲۹	۰.۳۵۴	۰.۸۷۵	۰.۳۴۰	۰.۸۵۸	۰.۳۱۹	۰.۸۷۸	۷	۳	۰.۷	۳۰
۰.۳۰۹	۰.۸۱۰	۰.۳۷۹	۰.۸۴۶	۰.۳۷۵	۰.۸۳۳	۰.۳۱۰	۰.۸۹۳	۳	۵	۰.۷	۳۱
۰.۲۴۷	۰.۸۴۳	۰.۲۷۵	۰.۸۸۲	۰.۲۶۷	۰.۸۶۹	۰.۲۴۸	۰.۸۹۹	۵	۵	۰.۷	۳۲
۰.۲۲۱	۰.۸۶۱	۰.۲۳۹	۰.۸۹۶	۰.۲۳۱	۰.۸۸۵	۰.۲۲۱	۰.۸۹۷	۷	۵	۰.۷	۳۳
۰.۲۸۶	۰.۸۲۲	۰.۳۵۵	۰.۸۳۸	۰.۳۵۰	۰.۸۲۹	۰.۲۸۷	۰.۸۸۳	۳	۷	۰.۷	۳۴
۰.۲۱۵	۰.۸۶۱	۰.۲۴۰	۰.۸۸۳	۰.۲۳۳	۰.۸۷۳	۰.۲۱۶	۰.۸۹۹	۵	۷	۰.۷	۳۵
۰.۱۸۲	۰.۸۶۶	۰.۱۹۶	۰.۸۹۲	۰.۱۹۰	۰.۸۸۱	۰.۱۸۳	۰.۹۰۰	۷	۷	۰.۷	۳۶
۰.۱۹۸	۰.۸۰۰	۰.۱۹۸	۰.۸۴۶	۰.۱۸۶	۰.۸۱۳	۰.۱۹۹	۰.۸۹۸	۳	۳	۰.۹	۳۷
۰.۱۷۵	۰.۸۳۵	۰.۱۸۱	۰.۸۸۹	۰.۱۶۹	۰.۸۶۴	۰.۱۷۶	۰.۸۸۹	۵	۳	۰.۹	۳۸
۰.۱۶۷	۰.۸۴۵	۰.۱۶۸	۰.۹۰۱	۰.۱۵۴	۰.۸۷۷	۰.۱۶۸	۰.۸۷۸	۷	۳	۰.۹	۳۹
۰.۱۴۶	۰.۸۱۴	۰.۱۶۱	۰.۸۱۶	۰.۱۵۷	۰.۸۰۰	۰.۱۴۶	۰.۸۹۳	۳	۵	۰.۹	۴۰
۰.۱۱۵	۰.۸۴۸	۰.۱۲۶	۰.۸۷۳	۰.۱۲۰	۰.۸۵۶	۰.۱۱۶	۰.۸۹۹	۵	۵	۰.۹	۴۱
۰.۱۰۳	۰.۸۶۵	۰.۱۰۸	۰.۸۹۸	۰.۱۰۲	۰.۸۸۳	۰.۱۰۳	۰.۸۹۷	۷	۵	۰.۹	۴۲
۰.۱۳۱	۰.۸۲۲	۰.۱۵۲	۰.۸۰۷	۰.۱۴۹	۰.۷۹۶	۰.۱۳۱	۰.۸۸۳	۳	۷	۰.۹	۴۳
۰.۰۹۷	۰.۸۶۴	۰.۱۰۸	۰.۸۷۱	۰.۱۰۴	۰.۸۶۲	۰.۰۹۸	۰.۸۹۹	۵	۷	۰.۹	۴۴
۰.۰۸۲	۰.۸۷۰	۰.۰۸۷	۰.۸۸۷	۰.۰۸۴	۰.۸۷۶	۰.۰۸۲	۰.۹۰۰	۷	۷	۰.۹	۴۵

انتظار داشتیم فواصل اطمینان براساس طرح نمونه‌گیری $RRSS$ در خانواده $PRHR$ بهتر از رکورهای معمولی رفتار می‌کنند.

۶.۴ مثال واقعی

برای شرح بهتر فرآیندهای ارائه شده در بخش‌های قبل، یک مجموعه داده واقعی در نظر می‌گیریم. در این بررسی، داده‌های مربوط به زمان شکست‌های متوالی سیستم تهویه هوا در هر یک از

جدول ۴.۴: ادامه

ردیف	$\mathcal{R}$	n	m	MLE		$AMLE$		$Bayes$		HPD	
				CP	EL	CP	EL	CP	EL	CP	EL
۱	۰.۱	۳	۳	۰.۸۹۹	۰.۲۰۰	۰.۷۱۴	۰.۱۲۱	۰.۶۳۹	۰.۲۵۷	۰.۷۶۷	۰.۲۴۴
۲	۰.۱	۳	۵	۰.۸۸۹	۰.۱۴۷	۰.۵۴۸	۰.۰۶۷	۰.۶۰۸	۰.۲۱۱	۰.۷۷۲	۰.۱۹۸
۳	۰.۱	۳	۷	۰.۸۷۷	۰.۱۳۱	۰.۴۶۵	۰.۰۵۰	۰.۵۹۶	۰.۱۹۲	۰.۷۶۴	۰.۱۸۰
۴	۰.۱	۵	۳	۰.۸۹۳	۰.۱۷۶	۰.۶۲۷	۰.۰۸۳	۰.۷۷۲	۰.۱۸۵	۰.۸۳۶	۰.۱۷۸
۵	۰.۱	۵	۵	۰.۹۰۱	۰.۱۱۶	۰.۵۶۴	۰.۰۵۳	۰.۷۶۶	۰.۱۳۹	۰.۸۳۴	۰.۱۳۴
۶	۰.۱	۵	۷	۰.۸۹۸	۰.۰۹۷	۰.۴۸۰	۰.۰۳۷	۰.۷۵۸	۰.۱۲۰	۰.۸۳۱	۰.۱۱۵
۷	۰.۱	۷	۳	۰.۸۸۵	۰.۱۶۷	۰.۵۶۲	۰.۰۶۷	۰.۸۲۸	۰.۱۵۸	۰.۸۵۹	۰.۱۵۳
۸	۰.۱	۷	۵	۰.۹۰۰	۰.۱۰۳	۰.۴۹۶	۰.۰۴۰	۰.۸۳۲	۰.۱۱۱	۰.۸۵۲	۰.۱۰۹
۹	۰.۱	۷	۷	۰.۸۹۹	۰.۰۸۲	۰.۴۷۳	۰.۰۳۱	۰.۸۱۸	۰.۰۹۲	۰.۸۶۵	۰.۰۸۹
۱۰	۰.۳	۳	۳	۰.۸۹۹	۰.۳۸۰	۰.۶۲۹	۰.۲۲۲	۰.۹۰۸	۰.۳۵۱	۰.۸۸۳	۰.۳۴۱
۱۱	۰.۳	۳	۵	۰.۸۸۹	۰.۳۱۱	۰.۵۰۸	۰.۱۳۹	۰.۹۱۹	۰.۲۹۹	۰.۹۱۰	۰.۲۹۰
۱۲	۰.۳	۳	۷	۰.۸۷۷	۰.۲۸۷	۰.۴۴۴	۰.۱۰۸	۰.۹۳۳	۰.۲۷۷	۰.۹۱۲	۰.۲۶۸
۱۳	۰.۳	۵	۳	۰.۸۹۳	۰.۳۳۶	۰.۵۴۲	۰.۱۵۲	۰.۸۹۳	۰.۳۰۲	۰.۸۶۵	۰.۲۹۶
۱۴	۰.۳	۵	۵	۰.۹۰۱	۰.۲۴۸	۰.۵۳۴	۰.۱۱۱	۰.۹۰۳	۰.۲۳۹	۰.۸۸۸	۰.۲۳۴
۱۵	۰.۳	۵	۷	۰.۸۹۸	۰.۲۱۵	۰.۴۶۴	۰.۰۸۱	۰.۹۱۱	۰.۲۱۱	۰.۸۹۵	۰.۲۰۶
۱۶	۰.۳	۷	۳	۰.۸۸۵	۰.۳۱۹	۰.۴۸۱	۰.۱۲۲	۰.۸۹۰	۰.۲۸۱	۰.۸۶۳	۰.۲۷۷
۱۷	۰.۳	۷	۵	۰.۹۰۰	۰.۲۲۱	۰.۴۶۸	۰.۰۸۴	۰.۸۹۸	۰.۲۱۱	۰.۸۷۸	۰.۲۰۹
۱۸	۰.۳	۷	۷	۰.۸۹۹	۰.۱۸۳	۰.۴۵۷	۰.۰۶۹	۰.۹۰۰	۰.۱۷۹	۰.۸۹۴	۰.۱۷۶
۱۹	۰.۵	۳	۳	۰.۸۹۹	۰.۴۲۸	۰.۶۱۰	۰.۲۴۸	۰.۸۹۹	۰.۳۸۰	۰.۸۵۰	۰.۳۷۲
۲۰	۰.۵	۳	۵	۰.۸۸۹	۰.۳۶۹	۰.۵۰۸	۰.۱۶۵	۰.۸۹۴	۰.۳۳۲	۰.۸۵۷	۰.۳۲۷
۲۱	۰.۵	۳	۷	۰.۸۷۷	۰.۳۴۷	۰.۴۴۷	۰.۱۳۱	۰.۸۸۶	۰.۳۱۱	۰.۸۵۰	۰.۳۰۵
۲۲	۰.۵	۵	۳	۰.۸۹۳	۰.۳۶۹	۰.۵۱۲	۰.۱۶۵	۰.۸۹۹	۰.۳۳۲	۰.۸۵۴	۰.۳۲۷
۲۳	۰.۵	۵	۵	۰.۹۰۱	۰.۲۸۷	۰.۵۲۶	۰.۱۲۸	۰.۸۹۸	۰.۲۷۱	۰.۸۷۲	۰.۲۶۷
۲۴	۰.۵	۵	۷	۰.۸۹۸	۰.۲۵۴	۰.۴۶۲	۰.۰۹۶	۰.۸۹۸	۰.۲۴۲	۰.۸۷۴	۰.۲۳۹
۲۵	۰.۵	۷	۳	۰.۸۸۵	۰.۳۴۷	۰.۴۵۲	۰.۱۳۱	۰.۸۹۵	۰.۳۱۲	۰.۸۵۰	۰.۳۰۶
۲۶	۰.۵	۷	۵	۰.۹۰۰	۰.۲۵۴	۰.۴۵۷	۰.۰۹۶	۰.۹۰۰	۰.۲۴۲	۰.۸۶۹	۰.۲۳۹
۲۷	۰.۵	۷	۷	۰.۸۹۹	۰.۲۱۴	۰.۴۵۱	۰.۰۸۱	۰.۸۹۷	۰.۲۰۷	۰.۸۸۳	۰.۲۰۵
۲۸	۰.۷	۳	۳	۰.۸۹۹	۰.۳۷۹	۰.۶۳۱	۰.۲۲۱	۰.۸۸۱	۰.۳۳۹	۰.۸۴۳	۰.۳۳۰
۲۹	۰.۷	۳	۵	۰.۸۸۹	۰.۳۳۶	۰.۵۳۷	۰.۱۵۲	۰.۸۵۸	۰.۳۰۱	۰.۸۳۷	۰.۲۹۶
۳۰	۰.۷	۳	۷	۰.۸۷۷	۰.۳۱۹	۰.۴۷۵	۰.۱۲۲	۰.۸۴۶	۰.۲۸۳	۰.۸۲۴	۰.۲۷۹
۳۱	۰.۷	۵	۳	۰.۸۹۳	۰.۳۱۰	۰.۵۱۴	۰.۱۳۹	۰.۸۹۸	۰.۲۸۶	۰.۸۵۴	۰.۲۷۶
۳۲	۰.۷	۵	۵	۰.۹۰۱	۰.۲۴۸	۰.۵۳۵	۰.۱۱۱	۰.۸۹۲	۰.۲۳۵	۰.۸۷۱	۰.۲۳۰
۳۳	۰.۷	۵	۷	۰.۸۹۸	۰.۲۲۱	۰.۴۷۴	۰.۰۸۴	۰.۸۸۷	۰.۲۱۱	۰.۸۷۰	۰.۲۰۸
۳۴	۰.۷	۷	۳	۰.۸۸۵	۰.۲۸۷	۰.۴۴۹	۰.۱۰۹	۰.۸۹۶	۰.۲۶۳	۰.۸۴۹	۰.۲۵۳
۳۵	۰.۷	۷	۵	۰.۹۰۰	۰.۲۱۶	۰.۴۶۰	۰.۰۸۲	۰.۸۹۹	۰.۲۰۷	۰.۸۷۰	۰.۲۰۲
۳۶	۰.۷	۷	۷	۰.۸۹۹	۰.۱۸۳	۰.۴۵۶	۰.۰۶۹	۰.۸۹۴	۰.۱۷۸	۰.۸۸۳	۰.۱۷۵
۳۷	۰.۹	۳	۳	۰.۸۹۹	۰.۱۹۹	۰.۷۱۱	۰.۱۲۰	۰.۸۶۶	۰.۱۸۲	۰.۸۷۰	۰.۱۷۰
۳۸	۰.۹	۳	۵	۰.۸۸۹	۰.۱۷۶	۰.۶۱۹	۰.۰۸۳	۰.۸۳۴	۰.۱۶۰	۰.۸۶۰	۰.۱۵۴
۳۹	۰.۹	۳	۷	۰.۸۷۷	۰.۱۶۸	۰.۵۵۰	۰.۰۶۷	۰.۸۲۰	۰.۱۵۱	۰.۸۴۲	۰.۱۴۶
۴۰	۰.۹	۵	۳	۰.۸۹۳	۰.۱۴۶	۰.۵۵۰	۰.۰۶۷	۰.۸۹۹	۰.۱۳۸	۰.۸۶۹	۰.۱۲۷
۴۱	۰.۹	۵	۵	۰.۹۰۱	۰.۱۱۶	۰.۵۶۸	۰.۰۵۳	۰.۸۸۵	۰.۱۱۲	۰.۸۸۴	۰.۱۰۷
۴۲	۰.۹	۵	۷	۰.۸۹۸	۰.۱۰۳	۰.۵۰۳	۰.۰۴۰	۰.۸۷۸	۰.۱۰۰	۰.۸۸۳	۰.۰۹۷
۴۳	۰.۹	۷	۳	۰.۸۸۵	۰.۱۳۱	۰.۴۷۲	۰.۰۵۰	۰.۸۹۶	۰.۱۲۲	۰.۸۵۵	۰.۱۱۲
۴۴	۰.۹	۷	۵	۰.۹۰۰	۰.۰۹۸	۰.۴۷۸	۰.۰۳۷	۰.۸۹۶	۰.۰۹۵	۰.۸۷۷	۰.۰۹۰
۴۵	۰.۹	۷	۷	۰.۸۹۹	۰.۰۸۲	۰.۴۷۲	۰.۰۳۱	۰.۸۹۲	۰.۰۸۱	۰.۸۹۰	۰.۰۷۸

هواپیماهای بوئینگ ۷۲۰ در نظر گرفته شده‌است. داده‌های ذکر شده در پروسچان[۷] (۱۹۶۳)، در دسترس می‌باشند. به‌طور تصادفی داده‌های مربوط به دو هواپیمای ۷۹۰۸ و ۸۰۴۵ را برای مطالعه قابلیت اعتماد تنش-مقاومت انتخاب نمودیم. سپس برای بررسی این‌که آیا توزیع نمایی تعمیم یافته بر داده‌های فوق مطابقت دارد یا خیر از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف[۸] ($K-S$)، استفاده نمودیم. مشاهده شد P-مقدار آزمون $K-S$ برای مشاهدات X و Y به ترتیب ۰.۳۷۲

[۷] Proschan

[۸] Kolomogrove- Smirnov

جدول ۵.۴: مقادیر δ برای ترکیب‌هایی از m و n زمانی‌که $\gamma = ۰/۰۵$

			HPD			*Boot − t۲*			*Boot − t۱*			*Perc*			*MLE*					
ردیف	n	m	$\mathcal{R}$	δ	CP^R	CP^{RRSS}	δ	CP^R	CP^{RRSS}	δ	CP^R	CP^{RRSS}	δ	CP^R	CP^{RRSS}	δ	CP^R	CP^{RRSS}
۱	۵	۵	۰.۱	۱.۵۷۶	۰.۸۳۲	۰.۹۲۰	۲.۲۲۳	۰.۹۱۲	۰.۹۰۴	۲.۹۵۹	۰.۸۸۱	۰.۹۲۳	۳.۱۰۱	۰.۸۸۳	۰.۹۱۹	۱.۸۷۹	۰.۸۷۷	۰.۹۰۲
۲	۵	۵	۰.۳	۱.۴۷۶	۰.۸۰۶	۰.۹۲۰	۱.۷۰۱	۰.۹۱۹	۰.۹۰۲	۲.۵۹۹	۰.۸۹۱	۰.۹۲۹	۲.۳۱۵	۰.۸۸۸	۰.۹۳۲	۱.۶۷۹	۰.۸۶۵	۰.۸۹۵
۳	۵	۵	۰.۵	۱.۵۰۹	۰.۸۱۹	۰.۹۲۰	۱.۵۹۳	۰.۹۱۸	۰.۸۹۸	۲.۶۲۱	۰.۹۰۲	۰.۹۳۰	۲.۱۷۵	۰.۸۹۷	۰.۹۳۸	۱.۷۰۰	۰.۸۸۱	۰.۹۰۸
۴	۵	۱۰	۰.۱	۱.۸۴۷	۰.۸۸۶	۰.۸۸۸	۳.۰۴۹	۰.۸۴۵	۰.۸۷۰	۲.۵۷۸	۰.۹۳۲	۰.۸۸۴	۲.۱۴۳	۰.۹۴۹	۰.۹۶۹	۲.۱۷۶	۰.۹۰۰	۰.۹۲۵
۵	۵	۱۰	۰.۳	۱.۶۶۹	۰.۸۴۶	۰.۸۸۸	۲.۰۷۸	۰.۸۳۳	۰.۸۷۳	۲.۵۳۹	۰.۹۱۲	۰.۸۹۲	۱.۸۸۱	۰.۹۰۹	۰.۹۶۸	۱.۹۹۱	۰.۸۸۷	۰.۹۰۹
۶	۵	۱۰	۰.۵	۱.۵۸۳	۰.۸۱۴	۰.۸۸۸	۱.۶۹۱	۰.۸۳۵	۰.۸۶۹	۲.۵۹۳	۰.۸۳۷	۰.۸۹۷	۱.۸۴۲	۰.۸۵۰	۰.۹۶۶	۱.۹۲۵	۰.۸۸۹	۰.۹۰۷
۷	۵	۱۵	۰.۱	۱.۹۶۲	۰.۹۱۰	۰.۹۰۷	۳.۲۹۲	۰.۷۷۹	۰.۸۸۱	۲.۵۱۴	۰.۹۳۸	۰.۹۰۵	۱.۷۲۱	۰.۹۴۳	۰.۹۹۵	۲.۲۴۸	۰.۸۹۹	۰.۹۲۱
۸	۵	۱۵	۰.۳	۱.۷۲۶	۰.۸۳۳	۰.۹۰۷	۲.۱۲۴	۰.۷۷۴	۰.۸۸۰	۲.۵۰۴	۰.۸۶۲	۰.۹۱۶	۱.۵۵۳	۰.۸۵۴	۰.۹۹۵	۲.۰۲۷	۰.۸۶۵	۰.۹۱۲
۹	۵	۱۵	۰.۵	۱.۶۰۵	۰.۸۱۰	۰.۹۰۷	۱.۶۶۷	۰.۷۸۳	۰.۸۷۸	۲.۵۷۲	۰.۸۱۱	۰.۹۱۷	۱.۵۳۹	۰.۸۰۸	۰.۹۹۱	۱.۹۵۲	۰.۸۸۶	۰.۹۰۲
۱۰	۱۰	۵	۰.۱	۱.۸۹۷	۰.۸۶۸	۰.۸۹۸	۱.۵۶۰	۰.۸۸۷	۰.۸۹۲	۳.۱۵۲	۰.۸۲۰	۰.۹۰۷	۲.۴۷۶	۰.۷۶۳	۰.۹۷۰	۱.۸۷۷	۰.۸۹۹	۰.۹۰۲
۱۱	۱۰	۵	۰.۳	۲.۰۰۴	۰.۸۸۶	۰.۸۹۸	۱.۵۷۰	۰.۸۹۳	۰.۸۹۳	۲.۹۵۳	۰.۸۸۰	۰.۹۱۵	۲.۰۵۸	۰.۸۱۶	۰.۹۷۷	۱.۸۶۴	۰.۸۹۵	۰.۹۰۴
۱۲	۱۰	۵	۰.۵	۲.۰۹۸	۰.۸۸۷	۰.۸۹۸	۱.۶۷۹	۰.۸۷۷	۰.۸۸۷	۲.۸۶۴	۰.۹۰۳	۰.۹۱۶	۱.۸۹۳	۰.۸۳۳	۰.۹۷۶	۱.۹۱۰	۰.۸۹۳	۰.۹۲۱
۱۳	۱۰	۱۰	۰.۱	۲.۲۱۷	۰.۹۰۳	۰.۸۹۷	۲.۵۸۰	۰.۹۳۳	۰.۹۰۸	۳	۰.۹۱۵	۰.۹۰۶	۳.۱۶۷	۰.۸۹۶	۰.۹۰۵	۲.۵۵۹	۰.۹۲۶	۰.۹۰۳
۱۴	۱۰	۱۰	۰.۳	۲.۱۶۷	۰.۸۸۹	۰.۸۹۷	۲.۲۳۷	۰.۹۱۸	۰.۹۰۷	۲.۸۹۴	۰.۹۳۶	۰.۹۰۸	۲.۷۹۶	۰.۹۱۶	۰.۹۱۵	۲.۴۷۷	۰.۹۰۱	۰.۹۰۱
۱۵	۱۰	۱۰	۰.۵	۲.۱۵۸	۰.۸۵۸	۰.۸۹۷	۲.۱۰۹	۰.۹۱۰	۰.۹۰۶	۲.۸۸۹	۰.۹۱۴	۰.۹۱۰	۲.۶۶۳	۰.۹۱۱	۰.۹۱۹	۲.۴۷۸	۰.۹۰۷	۰.۹۱۰
۱۶	۱۰	۱۵	۰.۱	۲.۴۴۸	۰.۹۱۰	۰.۸۹۲	۳.۱۰۵	۰.۸۹۱	۰.۸۸۶	۳.۰۸۵	۰.۹۴۲	۰.۸۸۸	۲.۸۳۱	۰.۹۳۵	۰.۹۳۴	۲.۸۷۹	۰.۹۲۱	۰.۹۰۰
۱۷	۱۰	۱۵	۰.۳	۲.۲۷۱	۰.۸۸۵	۰.۸۹۲	۲.۵۱۵	۰.۹۰۶	۰.۸۸۶	۲.۹۴۹	۰.۹۴۲	۰.۸۹۲	۲.۵۲۷	۰.۹۳۵	۰.۹۳۷	۲.۷۲۷	۰.۹۱۵	۰.۸۹۷
۱۸	۱۰	۱۵	۰.۵	۲.۲۱۵	۰.۸۷۶	۰.۸۹۲	۲.۲۶۶	۰.۹۰۰	۰.۸۸۳	۲.۹۵۱	۰.۹۱۰	۰.۸۹۵	۲.۴۵۴	۰.۹۲۱	۰.۹۳۸	۲.۷۱۶	۰.۹۲۳	۰.۸۹۸
۱۹	۱۵	۵	۰.۱	۲.۳۳۰	۰.۸۹۱	۰.۸۹۷	۱.۴۱۳	۰.۸۴۱	۰.۸۸۳	۳.۲۹۱	۰.۷۷۲	۰.۹۰۱	۲.۰۵۹	۰.۷۱۰	۰.۹۹۲	۱.۸۶۹	۰.۸۸۸	۰.۹۰۳
۲۰	۱۵	۵	۰.۳	۲.۴۳۷	۰.۹۱۸	۰.۸۹۷	۱.۴۸۷	۰.۸۲۴	۰.۸۸۴	۳	۰.۸۱۴	۰.۹۰۴	۱.۷۳۱	۰.۷۳۹	۰.۹۹۶	۱.۸۵۵	۰.۸۸۵	۰.۹۰۴
۲۱	۱۵	۵	۰.۵	۲.۶۳۶	۰.۹۳۰	۰.۸۹۷	۱.۶۸۱	۰.۸۳۷	۰.۸۸۱	۲.۹۰۷	۰.۸۷۲	۰.۹۰۵	۱.۶۱۳	۰.۷۹۵	۰.۹۹۴	۱.۹۴۴	۰.۸۹۳	۰.۹۱۰
۲۲	۱۵	۱۰	۰.۱	۲.۶۲۱	۰.۹۱۵	۰.۸۹۰	۲.۴۵۸	۰.۹۱۰	۰.۸۸۸	۳.۲۳۷	۰.۸۸۶	۰.۸۷۴	۲.۸۸۶	۰.۸۵۱	۰.۹۴۰	۲.۶۵۵	۰.۹۱۵	۰.۸۹۴
۲۳	۱۵	۱۰	۰.۳	۲.۵۹۴	۰.۹۲۲	۰.۸۹۰	۲.۲۶۹	۰.۹۲۳	۰.۸۸۶	۳.۱۰۳	۰.۹۳۲	۰.۸۷۶	۲.۵۶۱	۰.۸۹۱	۰.۹۴۷	۲.۶۳۴	۰.۹۲۰	۰.۸۹۶
۲۴	۱۵	۱۰	۰.۵	۲.۶۵۲	۰.۹۲۰	۰.۸۹۰	۲.۲۵۹	۰.۹۲۷	۰.۸۸۸	۳.۱۱۸	۰.۹۴۲	۰.۸۷۸	۲.۴۸۲	۰.۹۱۹	۰.۹۴۷	۲.۷۰۳	۰.۹۳۱	۰.۸۹۳
۲۵	۱۵	۱۵	۰.۱	۲.۷۳۹	۰.۹۰۹	۰.۸۹۵	۲.۹۵۷	۰.۹۱۱	۰.۹۰۶	۳.۳۴۸	۰.۹۲۱	۰.۹۰۴	۲.۴۷۹	۰.۹۰۰	۰.۹۱۰	۳.۰۶۵	۰.۹۱۶	۰.۹۰۱
۲۶	۱۵	۱۵	۰.۳	۲.۶۷۹	۰.۹۱۳	۰.۹۱۵	۲.۶۶۰	۰.۹۲۷	۰.۹۰۵	۳.۲۷۱	۰.۹۴۵	۰.۹۰۴	۳.۲۰۵	۰.۹۲۶	۰.۹۱۲	۳.۰۴۸	۰.۹۳۲	۰.۹۰۱
۲۷	۱۵	۱۵	۰.۵	۲.۶۹۰	۰.۹۱۳	۰.۹۱۵	۲.۵۶۸	۰.۹۲۰	۰.۹۰۶	۳.۲۹۹	۰.۹۴۰	۰.۹۰۴	۳.۱۲۸	۰.۹۳۸	۰.۹۱۳	۳.۱۳۰	۰.۹۳۴	۰.۸۹۶

جدول ۶.۴: مقادیر δبرای ترکیب‌هایی از m و n زمانی‌که $\gamma = ۰/۱$.

			HPD			*Boot − t۲*			*Boot − t۱*			*Perc*			*MLE*					
ردیف	n	m	$\mathcal{R}$	δ	CP^R	CP^{RRSS}	δ	CP^R	CP^{RRSS}	δ	CP^R	CP^{RRSS}	δ	CP^R	CP^{RRSS}	δ	CP^R	CP^{RRSS}
۱	۵	۵	۰.۱	۱.۵۶۵	۰.۷۷۴	۰.۹۲۰	۲.۰۸۶	۰.۸۴۶	۰.۹۰۴	۲.۶۲۰	۰.۸۴۱	۰.۹۲۳	۲.۷۵۶	۰.۸۳۶	۰.۹۱۹	۱.۸۵۳	۰.۸۰۲	۰.۹۰۲
۲	۵	۵	۰.۳	۱.۴۷۶	۰.۷۶۰	۰.۹۲۰	۱.۶۶۹	۰.۸۵۶	۰.۹۰۲	۲.۳۶۱	۰.۸۶۴	۰.۹۲۹	۲.۱۳۵	۰.۸۵۲	۰.۹۳۲	۱.۷۶۴	۰.۷۸۵	۰.۸۹۵
۳	۵	۵	۰.۵	۱.۴۹۷	۰.۷۵۲	۰.۹۲۰	۱.۵۵۹	۰.۸۵۲	۰.۸۹۸	۲.۳۸۱	۰.۸۵۷	۰.۹۳۰	۲.۰۲۱	۰.۸۵۵	۰.۹۳۸	۱.۸۰۹	۰.۸۱۱	۰.۹۰۸
۴	۵	۱۰	۰.۱	۱.۸۹۱	۰.۸۱۵	۰.۸۸۸	۲.۹۴۲	۰.۷۳۶	۰.۸۷۰	۲.۵۱۱	۰.۸۹۵	۰.۸۸۴	۲.۰۶۲	۰.۹۰۰	۰.۹۶۹	۲.۳۰۳	۰.۸۱۷	۰.۹۲۵
۵	۵	۱۰	۰.۳	۱.۶۶۵	۰.۷۵۰	۰.۸۸۸	۲.۰۲۱	۰.۷۴۲	۰.۸۷۳	۲.۳۹۰	۰.۸۲۳	۰.۸۹۲	۱.۷۷۱	۰.۸۱۵	۰.۹۶۸	۲.۱۱۸	۰.۷۷۷	۰.۹۰۹
۶	۵	۱۰	۰.۵	۱.۵۷۵	۰.۷۵۸	۰.۸۸۸	۱.۶۶۴	۰.۷۵۹	۰.۸۶۹	۲.۴۱۹	۰.۷۹۲	۰.۸۹۷	۱.۷۳۰	۰.۸۰۰	۰.۹۶۶	۲.۰۴۹	۰.۸۱۴	۰.۹۰۷
۷	۵	۱۵	۰.۱	۲	۰.۸۴۱	۰.۹۰۷	۳.۱۷۵	۰.۶۷۸	۰.۸۸۱	۲.۴۷۷	۰.۸۹۱	۰.۹۰۵	۱.۶۶۷	۰.۸۸۳	۰.۹۹۵	۲.۳۶۹	۰.۸۲۱	۰.۹۲۱
۸	۵	۱۵	۰.۳	۱.۷۲۱	۰.۷۵۵	۰.۹۰۷	۲.۰۷۷	۰.۶۶۵	۰.۸۸۰	۲.۳۸۷	۰.۷۸۵	۰.۹۱۶	۱.۴۸۳	۰.۷۷۲	۰.۹۹۵	۲.۱۹۶	۰.۷۷۳	۰.۹۱۲
۹	۵	۱۵	۰.۵	۱.۵۹۱	۰.۷۳۶	۰.۹۰۷	۱.۶۳۲	۰.۶۷۱	۰.۸۷۸	۲.۴۰۱	۰.۷۳۵	۰.۹۱۷	۱.۴۴۱	۰.۷۳۷	۰.۹۹۱	۲.۰۶۶	۰.۷۹۴	۰.۹۰۲
۱۰	۱۰	۵	۰.۱	۱.۸۸۸	۰.۸۰۳	۰.۸۹۸	۱.۵۱۶	۰.۷۹۳	۰.۸۹۲	۲.۸۰۴	۰.۷۵۲	۰.۹۰۷	۲.۲۰۲	۰.۶۹۱	۰.۹۷۰	۱.۸۲۰	۰.۸۰۹	۰.۹۰۲
۱۱	۱۰	۵	۰.۳	۱.۹۷۵	۰.۸۲۳	۰.۸۹۸	۱.۵۴۴	۰.۷۹۳	۰.۸۹۳	۲.۶۴۱	۰.۷۹۹	۰.۹۱۵	۱.۸۵۹	۰.۷۴۴	۰.۹۷۷	۱.۹۲۷	۰.۸۰۸	۰.۹۰۴
۱۲	۱۰	۵	۰.۵	۲.۰۹۰	۰.۸۴۶	۰.۸۹۸	۱.۶۶۱	۰.۸۱۸	۰.۸۸۷	۲.۶۰۳	۰.۸۵۷	۰.۹۱۶	۱.۷۵۱	۰.۷۹۷	۰.۹۷۶	۲.۰۴۹	۰.۸۴۴	۰.۹۲۱
۱۳	۱۰	۱۰	۰.۱	۲.۲۶۳	۰.۸۳۸	۰.۸۹۷	۲.۵۰۹	۰.۸۴۳	۰.۸۹۸	۲.۸۷۹	۰.۸۸۴	۰.۹۰۶	۳	۰.۸۶۷	۰.۹۰۵	۲.۵۹۶	۰.۸۵۴	۰.۹۰۳
۱۴	۱۰	۱۰	۰.۳	۲.۱۵۳	۰.۸۲۸	۰.۸۹۷	۲.۱۷۶	۰.۸۴۶	۰.۹۰۷	۲.۷۳۹	۰.۸۸۱	۰.۹۰۸	۲.۶۴۵	۰.۸۵۸	۰.۹۱۵	۲.۶۱۲	۰.۸۴۶	۰.۹۰۱
۱۵	۱۰	۱۰	۰.۵	۲.۱۷۴	۰.۸۲۸	۰.۸۹۷	۲.۰۷۱	۰.۸۴۷	۰.۹۰۶	۲.۷۶۶	۰.۸۸۲	۰.۹۱۰	۲.۵۷۳	۰.۸۷۲	۰.۹۱۹	۲.۶۹۱	۰.۸۶۲	۰.۹۱۰
۱۶	۱۰	۱۵	۰.۱	۲.۳۸۸	۰.۸۴۷	۰.۸۹۲	۲.۹۱۷	۰.۸۲۹	۰.۸۸۶	۲.۹۵۹	۰.۹۱۰	۰.۸۸۸	۲.۶۴۴	۰.۹۰۲	۰.۹۳۴	۲.۸۹۸	۰.۸۷۲	۰.۹۰۰
۱۷	۱۰	۱۵	۰.۳	۲.۲۵۹	۰.۸۲۵	۰.۸۹۲	۲.۴۴۱	۰.۸۱۸	۰.۸۸۶	۲.۸۳۳	۰.۸۹۰	۰.۸۹۲	۲.۴۳۴	۰.۸۹۰	۰.۹۳۷	۲.۹۲۸	۰.۸۵۱	۰.۸۹۷
۱۸	۱۰	۱۵	۰.۵	۲.۱۹۵	۰.۸۱۵	۰.۸۹۲	۲.۲۰۳	۰.۸۱۷	۰.۸۸۳	۲.۸۳۰	۰.۸۵۵	۰.۸۹۵	۲.۳۵۸	۰.۸۶۱	۰.۹۳۸	۲.۹۴۶	۰.۸۵۲	۰.۸۹۸
۱۹	۱۵	۵	۰.۱	۲.۲۷۴	۰.۸۶۰	۰.۸۹۷	۱.۳۶۷	۰.۷۵۹	۰.۸۸۳	۲.۸۴۹	۰.۷۱۷	۰.۹۰۱	۱.۸۱۲	۰.۶۶۰	۰.۹۹۲	۱.۸۰۷	۰.۸۱۸	۰.۹۰۳
۲۰	۱۵	۵	۰.۳	۲.۴۳۳	۰.۸۶۹	۰.۸۹۷	۱.۴۶۱	۰.۷۵۱	۰.۸۸۴	۲.۶۸۲	۰.۷۵۱	۰.۹۰۴	۱.۵۶۲	۰.۶۸۲	۰.۹۹۶	۱.۹۰۶	۰.۸۰۷	۰.۹۰۴
۲۱	۱۵	۵	۰.۵	۲.۶۱۸	۰.۸۹۲	۰.۸۹۷	۱.۶۵۳	۰.۷۶۹	۰.۸۸۱	۲.۶۲۸	۰.۸۲۰	۰.۹۰۵	۱.۴۸۷	۰.۷۴۰	۰.۹۹۴	۲.۰۷۵	۰.۸۴۲	۰.۹۱۰
۲۲	۱۵	۱۰	۰.۱	۲.۵۹۲	۰.۸۶۱	۰.۸۹۰	۲.۳۲۰	۰.۸۳۹	۰.۸۸۸	۳.۰۶۱	۰.۸۳۷	۰.۸۷۴	۲.۶۷۲	۰.۸۰۳	۰.۹۴۰	۲.۶۷۳	۰.۸۵۸	۰.۸۹۴
۲۳	۱۵	۱۰	۰.۳	۲.۵۸۹	۰.۸۶۸	۰.۸۹۰	۲.۲۰۴	۰.۸۴۵	۰.۸۸۶	۲.۹۳۹	۰.۸۷۳	۰.۸۷۶	۲.۴۳۴	۰.۸۴۳	۰.۹۴۷	۲.۷۹۱	۰.۸۵۹	۰.۸۹۶
۲۴	۱۵	۱۰	۰.۵	۲.۶۳۹	۰.۸۷۱	۰.۸۹۰	۲.۱۹۵	۰.۸۴۷	۰.۸۸۸	۲.۹۳۳	۰.۸۸۸	۰.۸۷۸	۲.۳۶۴	۰.۸۵۷	۰.۹۴۷	۲.۹۳۸	۰.۸۷۷	۰.۸۹۳
۲۵	۱۵	۱۵	۰.۱	۲.۷۴۴	۰.۸۷۴	۰.۹۱۵	۲.۸۷۲	۰.۸۵۲	۰.۹۰۶	۳.۲۸۲	۰.۹۰۸	۰.۹۰۴	۳.۳۷۵	۰.۸۹۵	۰.۹۱۰	۳.۲۸۹	۰.۸۷۶	۰.۹۰۱
۲۶	۱۵	۱۵	۰.۳	۲.۶۷۴	۰.۸۵۷	۰.۹۱۵	۲.۵۸۴	۰.۸۵۵	۰.۹۰۵	۳.۱۳۳	۰.۸۹۶	۰.۹۰۴	۳.۰۶۵	۰.۸۷۹	۰.۹۱۲	۳.۲۶۱	۰.۸۷۱	۰.۹۰۱
۲۷	۱۵	۱۵	۰.۵	۲.۶۶۰	۰.۸۵۰	۰.۹۱۵	۲.۴۷۲	۰.۸۴۲	۰.۹۰۶	۳.۱۴۰	۰.۸۸۸	۰.۹۰۴	۳.۰۱۸	۰.۸۸۲	۰.۹۱۳	۳.۳۸۵	۰.۸۶۹	۰.۸۹۶

و ۰.۶۶۷ می‌باشد، که مطابقت توزیع نمایی تعمیم یافته را نشان می‌دهد. لازم به ذکر است هر هواپیمای دیگری که بر مدل در نظر گرفته شده مطابقت داشته باشد را می‌توان برای مطالعه انتخاب نمود. مقادیر $RRSS$ پایین این مجموعه داده‌ها براساس دیاگرام ۲.۱ در جدول ۷.۴ ارائه شده‌اند.

جدول ۷.۴: مقادیر $RRSS$ پایین استخراج شده از داده‌های هواپیما

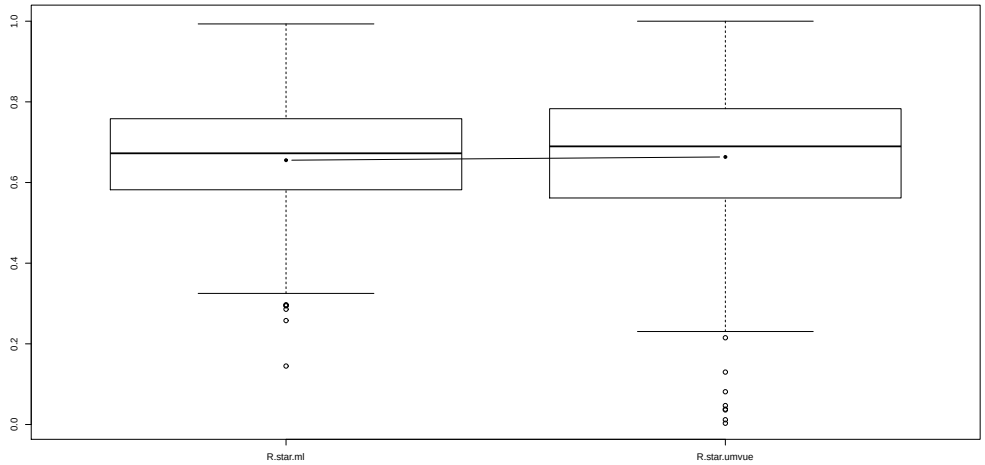
هواپیما												
۷۹۰۷	۷۹۰۸	۷۹۰۹	۷۹۱۰	۷۹۱۱	۷۹۱۲	۷۹۱۳	۷۹۱۴	۷۹۱۵	۷۹۱۶	۷۹۱۷	۸۰۴۴	۸۰۴۵
۱۹۴	۴۱۳	۹۰	۷۴	۵۵	۲۳	۹۷	۵۰	۳۵۹	۵۰	۱۳۰	۴۸۷	۱۰۲
	۹		۴۸	۵۶	۸۷	۱۱	۲۲	۳	۵		۷	۱۴
	۳۴			۳۳	۳				۱۲		۳	۳۲
	۷				۱							۱۴

جدول ۷.۴ نشان می‌دهد که تعداد $RRSS$ پایین برای دو هواپیمای بوئینگ ۷۹۰۸ و ۸۰۴۵ برابر ۴ می‌باشد. برای مطالعه $\mathcal{R} = P(X < Y)$، که در این مثال هدف ما مقایسه سیستم تهویه دو هواپیمای بوئینگ ۷۹۰۸ و ۸۰۴۵ است، فرض کنید X، متغیر فشار باشد که $\mathbf{u} = (۴۱۳,۹,۳۴,۷)$ مقادیر $RRSS$ پایین هواپیمای شماره ۷۹۰۸ می‌باشد و Y متغیر مقاومت باشد که $\mathbf{s} = (۱۰۲,۱۴,۳۲,۱۴)$ $(n = m = ۴)$ مقادیر $RRSS$ پایین از هواپیمای شماره ۸۰۴۵ می‌باشد. برای به‌دست آوردن مشاهدات بیشتر به منظور بررسی عملکرد برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای، با استفاده از روش بوت‌استرپ، باز نمونه‌گیری از داده‌ها صورت می گیرد. بدین منظور ۲۰۰ نمونه‌ی بوت استرپی از داده‌های اصلی تولید می‌شود و سپس مقادیر $RRSS$ پایین استخراج می‌گردد. براساس $RRSS$های به‌دست آمده، برآوردگرهای نقطه‌ای پارامتر تنش-مقاومت به صورت $\hat{\mathcal{R}}_{ML} = ۰/۶۵۵$ و $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU} = ۰/۶۶۳$ به‌دست می‌آید. نمودار جعبه‌ای متناظر با مشاهدات مربوط به برآوردگرهای نقطه‌ای در شکل ۷.۴ رسم شده‌است. برطبق مقادیر برآوردگرهای نقطه‌ای که حدوداً برابر ۰.۶ می‌باشد، انتظار داریم $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ کارایی بهتری نسبت به $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}$ داشته‌باشد. با توجه به شکل ۷.۴ می‌بینیم دامنه میان چارکی در $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ کمتر از $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}$ می‌باشد، که نتایج قبلی را تأیید می‌کند. برای بررسی فواصل اطمینان، فرآیند ذکر شده در بالا را ۱۰۰۰ بار دیگر تکرار می‌کنیم. توزیع‌های $Gamma(۲,۱)$ و $Gamma(۲,۲)$ به ترتیب به عنوان توزیع پیشین α و β درنظر گرفته شده‌است و میانگین طول فواصل اطمینان در جدول ۸.۴ نمایش داده شده‌است.

جدول ۸.۴: مقادیر متوسط طول $\mathcal{R}$ براساس مجموعه داده‌ی واقعی

γ	$Perc$	$Boot-t۱$	$Boot-t۲$	$Basic$	MLE	$AMLE$	$Bayes$	HPD
۰.۰۵	۰.۵۹۳	۰.۸۹۴	۰.۵۹۸	۰.۵۷۸	۰.۳۸۹	۰.۳۹۶	۰.۳۸۵	۰.۳۵۹
۰.۱	۰.۴۹۴	۰.۶۸۸	۰.۴۳۱	۰.۴۸۷	۰.۳۲۹	۰.۳۳۲	۰.۳۲۷	۰.۳۰۶

برطبق نتایج جدول ۸.۴، مشاهده می‌شود همانند بخش قبل متوسط طول $Boot-t۱$ کم‌تر از $Boot-t۲$ می‌باشد. همچنین، میانگین طول MLE و $AMLE$ بهتر از سایر فواصل اطمینان



شکل ۷.۴: مقایسه $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ و $\hat{\mathcal{R}}_{UMVU}$.

می‌باشد. به‌طور دقیق، فاصله اطمینان براساس کمیت محور دارای کمترین متوسط طول می‌باشد. همچنین فاصله HPD نیز بهتر از فاصله معتبر بیزی عمل می‌کند. در نتیجه نتایج این بخش کاملاً نتایج بخش قبل را تأیید می‌کند.

نتیجه‌گیری

در این فصل، برآوردگرهای ML، $UMVU$ و همچنین برآوردگر بیزی پارامتر تنش-مقاومت $\mathcal{R}$ را براساس $RRSS$ پایین از مدل $PRHR$ به‌دست آوردیم. برآوردگرهای ML و $UMVU$ براساس معیار کارایی نسبی مقایسه شدند. مشاهده شد زمانی‌که $\mathcal{R}$ نزدیک به مقدار ۰.۵ می‌باشد، برآوردگر ML بهتر از برآوردگر $UMVU$ عمل می‌کند و برای مقادیر فرین $\mathcal{R}$ عملکرد برآوردگر $UMVU$ بهتر می‌باشد. همچنین در این فصل برآوردگرهای نقطه‌ای حاصل از دو طرح ($RRSS$ و رکوردهای معمولی) را براساس معیار کارایی نسبی مقایسه نمودیم. مشاهده شد برآوردگر $\mathcal{R}$ براساس طرح $RRSS$ بهتر از رکوردهای معمولی عمل می‌کند.

فواصل اطمینان مختلفی محاسبه گردید و براساس شبیه‌سازی مقایسه شدند. براساس مطالعات شبیه‌سازی و همچنین مثال عددی، مشاهده شد فاصله اطمینان صدکی و دقیق براساس ML بهتر از سایر فواصل اطمینان می‌باشد. همچنین فاصله اطمینان HPD عملکرد بهتری نسبت به فاصله اطمینان بیزی دارد. در نهایت برآوردگرهای فاصله‌ای را براساس دو طرح رکوردهای معمولی و $RRSS$ با در نظر گرفتن توزیع نمایی تعمیم یافته به عنوان توزیعی از خانواده $PRHR$، مقایسه نمودیم. مشاهده کردیم فواصل اطمینان براساس طرح $RRSS$ بهتر از فواصل مشابه براساس رکوردهای معمولی عمل می‌کنند. همچنین ثابت کردیم که تمام محاسبات به توزیع پایه در مدل $PRHR$ بستگی ندارد.

فصل ۵

برآورد پارامتر تنش-مقاومت براساس $RRSS$ در توزیع نمایی دو پارامتری

در این فصل، با در نظر گرفتن طرح $RRSS$ و با فرض این‌که متغیرهای تصادفی X و Y مستقل و هم‌توزیع با توزیع نمایی دو پارامتری باشند، به برآورد نقطه‌ای پارامتر تنش-مقاومت می‌پردازیم. مانیشا[۱] و همکاران (۲۰۰۵)، با فرض توزیع نمایی دو پارامتری برآوردگر نااریب با کمترین واریانس پارامتر تنش-مقاومت را محاسبه نمودند. همچنین بکلیزی در سال‌های (۲۰۰۸a) و (۲۰۱۴)، با استفاده از مشاهدات رکوردی، برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای پارامتر تنش-مقاومت را با در نظر گرفتن توزیع نمایی دو پارامتری به‌دست آورد.
در ادامه و در بخش ۱.۵ با در نظر گرفتن حالت‌های مختلف و رکوردهای بالای نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار، برآوردگر درستنمایی ماکسیمم پارامتر تنش-مقاومت را به‌دست می‌آوریم و در بخش ۲.۵ نیز برآوردگر نااریب با کمترین واریانس پارامتر فوق را محاسبه می‌کنیم.

[۱] Manisha

۱.۵ برآوردگر درستنمایی ماکسیمم

در این بخش، به محاسبه برآوردگر درستنمایی ماکسیمم پارامتر تنش-مقامت با در نظرگرفتن توزیع نمایی دو پارمتری و طرح $RRSS$ می‌پردازیم.
تابع چگالی توزیع نمایی دوپارامتری به صورت زیر می‌باشد

$$f(x|\mu,\theta)=\frac{۱}{\theta}e^{-\frac{۱}{\theta}(x-\mu)},\qquad x>\mu,\quad -\infty<\mu<\infty,\quad \theta>۰ \tag{۱.۵}$$

که در آن μ و θ به ترتیب پارامتر مکان و مقیاس می‌باشند. فرض کنید X و Y به ترتیب متغیرهای تصادفی مستقل از توزیع نمایی دو پارامتری باشند که به اختصار با نماد $E(\mu_۱,\theta_۱)$ و $E(\mu_۲,\theta_۲)$ نشان می‌دهیم. همچنین فرض می‌کنیم $\mathbf{r}=(r_{۱,۱},r_{۲,۲},\cdots,r_{n,n})^\top$ بردار مشاهدات $\mathbf{R}=(R_{۱,۱},R_{۲,۲},\cdots,R_{n,n})^\top$ نمونه‌ای به حجم n از رکوردهای بالای نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار با توزیع $E(\mu_۱,\theta_۱)$ می‌باشد و $\mathbf{s}=(s_{۱,۱},s_{۲,۲},\cdots,s_{m,m})^\top$ نیز بردار مشاهدات $\mathbf{S}=(S_{۱,۱},S_{۲,۲},\cdots,S_{m,m})^\top$ نمونه‌ای به حجم m از رکوردهای بالای مجموعه‌ی رتبه‌دار با توزیع $E(\mu_۲,\theta_۲)$ تنها اطلاعات در خصوص جامعه موردنظر می‌باشد.

لم ۱.۱.۵. فرض کنید $X\sim E(\mu_۱,\theta_۱)$ و $Y\sim E(\mu_۲,\theta_۲)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند و $\mathcal{R}=Pr(X<Y)$ همان پارامتر تنش-مقاومت باشد، در این صورت به‌راحتی ثابت می‌شود که

$$\hat{\mathcal{R}}_{ML}=\begin{cases}۱-\dfrac{\theta_۱}{\theta_۱+\theta_۲}e^{-\frac{۱}{\theta_۱}(\mu_۲-\mu_۱)} & \mu_۲-\mu_۱\geq ۰\\[2ex] \dfrac{\theta_۲}{\theta_۱+\theta_۲}e^{-\frac{۱}{\theta_۲}(\mu_۱-\mu_۲)} & \mu_۲-\mu_۱<۰\end{cases} \tag{۲.۵}$$

برهان. در حالت اول با درنظر گرفتن اشتراک نواحی

$$۱)\mu_۲-\mu_۱>۰,\quad ۲)X<Y,\quad ۳)X>\mu_۱,\quad ۴)Y>\mu_۲$$

احتمال مورد نظر برابر است با

$$Pr(X<Y)=\int_{\mu_۲}^{\infty}\int_{\mu_۱}^{y}\frac{۱}{\theta_۱}e^{-\frac{۱}{\theta_۱}(x-\mu_۱)}\frac{۱}{\theta_۲}e^{-\frac{۱}{\theta_۲}(y-\mu_۲)}dxdy$$

که با محاسبه انتگرال فوق نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. در حالت دوم به طریقی مشابه و با اشتراک ناحیه‌های

$$۱)\mu_۲-\mu_۱<۰,\quad ۲)X<Y,\quad ۳)X>\mu_۱,\quad ۴)Y>\mu_۲$$

نتیجه به‌دست می‌آید. □

همان‌طور که در بخش ۶.۱ مشاهده کردیم، واحدهای $RRSS$ مستقل از یکدیگر می‌باشند، لذا با توجه به اینکه $X \sim E(\mu_1, \theta_1)$ و $Y \sim E(\mu_2, \theta_2)$ با جایگذاری تابع چگالی و تابع توزیع X و Y در (۸.۱)تابع درستنمایی توأم به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$L(\theta_1, \mu_1, \theta_2, \mu_2) = \frac{(\frac{1}{\theta_1})^{n(n+1)/2} \prod_{i=1}^{n}(r_{i,i} - \mu_1)^{i-1}}{\prod_{i=1}^{n}(i-1)!} e^{-\frac{1}{\theta_1}\sum_{i=1}^{n}(r_{i,i}-\mu_1)} \times \frac{(\frac{1}{\theta_2})^{m(m+1)/2} \prod_{j=1}^{m}(s_{j,j} - \mu_2)^{j-1}}{\prod_{j=1}^{m}(j-1)!} e^{-\frac{1}{\theta_2}\sum_{j=1}^{m}(s_{j,j}-\mu_2)} \quad (۳.۵)$$

و

$$\mu_1 = min\{r_{i,i} \;\; 1 < i < n\} \quad و \quad \mu_2 = min\{s_{j,j} \; 1 < j < m\} \quad (۴.۵)$$

حال با مشتق‌گیری از لگاریتم تابع درستنمایی توأم نسبت به پارامترهای $(\mu_1, \theta_1, \mu_2, \theta_2)$ به ازای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{s}$ داده‌شده برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم پارامترها به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\hat{\mu}_1 = min\{r_{i,i} \;\; 1 < i < n\} \quad و \quad \hat{\theta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(r_{i,i} - \hat{\mu}_1)}{N} \quad (۵.۵)$$

و

$$\hat{\mu}_2 = min\{s_{j,j} \; 1 < j < m\} \quad و \quad \hat{\theta}_2 = \frac{\sum_{j=1}^{m}(s_{j,j} - \hat{\mu}_2)}{M} \quad (۶.۵)$$

که در آن $N = \frac{n(n+1)}{2}$ و $M = \frac{m(m+1)}{2}$.

در نتیجه با استفاده از (۲.۵) و ویژگی پایایی برآوردگرهای درستنمایی ماکسیمم، برآوردگر $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ به فرم زیر به‌دست می‌آید.

$$\hat{\mathcal{R}}_{ML} = \begin{cases} 1 - \frac{\hat{\theta}_1}{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2} e^{-\frac{1}{\hat{\theta}_1}(\hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1)} & \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1 \geq 0 \\ \frac{\hat{\theta}_2}{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_2} e^{-\frac{1}{\hat{\theta}_2}(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)} & \hat{\mu}_2 - \hat{\mu}_1 < 0 \end{cases} \quad (۷.۵)$$

برای بررسی بیشتر دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

پارامتر مکان در دو جامعه برابر باشند:

در حالتی که $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ با استفاده از روابط (۳.۵) و (۴.۵)، برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترهای $(\mu, \theta_1, \theta_2)$ براساس $RRSS$ بالا به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\hat{\mu} = min\{r_{i.i}, s_{j,j}, \qquad 1 \leq i \leq n \qquad 1 \leq j \leq m\} \quad (۸.۵)$$

$$\hat{\theta}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(r_{i,i} - \hat{\mu}) \quad (۹.۵)$$

$$\hat{\theta}_2 = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{m}(s_{j,j} - \hat{\mu}) \quad (۱۰.۵)$$

بنابراین با توجه به اینکه در این حالت $\mathcal{R} = Pr(X < Y) = \frac{\theta_۲}{\theta_۱ + \theta_۲}$ در نتیجه

$$\hat{\mathcal{R}}_{ML} = \frac{\hat{\theta}_۲}{\hat{\theta}_۱ + \hat{\theta}_۲} \qquad (۱۱.۵)$$

پارامترهای مقیاس دو جامعه برابر باشند:
در صورتی‌که فرض کنیم $\theta_۱ = \theta_۲ = \theta$ باشد و $\mathbf{r} = (r_{۱,۱}, r_{۲,۲}, \cdots r_{n,n})^T$، بردار مشاهدات $RRSS$ بالا به حجم n از توزیع $E(\mu_۱, \theta)$ و $\mathbf{s} = (s_{۱,۱}, s_{۲,۲}, \cdots, s_{m,m})^T$، بردار مشاهدات $RRSS$ بالا به حجم m از توزیع $E(\mu_۲, \theta)$ باشد، برآورد درستنمایی ماکسیمم پارامترهای $(\mu_۱, \mu_۲, \theta)$ براساس $RRSS$ بالا به صورت زیر به‌دست می‌آید

$$\hat{\mu}_۱ = min\{r_{i,i}, ۱ \le i \le n\} \qquad (۱۲.۵)$$

$$\hat{\mu}_۲ = min\{s_{j,j}, ۱ \le j \le m\} \qquad (۱۳.۵)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=۱}^{n}(r_{i,i} - \hat{\mu}_۱) + \sum_{j=۱}^{m}(s_{j,j} - \hat{\mu}_۲)}{N + M} \qquad (۱۴.۵)$$

و به سادگی نتیجه می‌شود

$$\hat{\mathcal{R}}_{ML} = \begin{cases} ۱ - \frac{۱}{۲} e^{-\frac{۱}{\hat{\theta}}(\hat{\mu}_۲ - \hat{\mu}_۱)} & \hat{\mu}_۲ - \hat{\mu}_۱ \ge ۰ \\ \\ \frac{۱}{۲} e^{-\frac{۱}{\hat{\theta}}(\hat{\mu}_۲ - \hat{\mu}_۱)} & \hat{\mu}_۲ - \hat{\mu}_۱ < ۰ \end{cases} \qquad (۱۵.۵)$$

۲.۵ برآورد ناااریب با کمترین واریانس

در این بخش برآوردگر ناااریب با کمترین واریانس، برای پارامتر تنش-مقاومت $\mathcal{R}$ را در حالتی که پارامترهای مکان در دو جامعه برابر باشند را بررسی می‌کنیم. با فرض این‌که $\mu_۱ = \mu_۲ = \mu$ که μ مقداری معلوم می‌باشد، می‌توان نشان داد که $\left(\sum_{i=۱}^{n} R_{i,i}, \sum_{j=۱}^{m} S_{j,j}\right)$ آماره بسنده کامل برای $(\theta_۱, \theta_۲)^T$ می‌باشد. می‌دانیم $R_{۱,۱} \overset{d}{=} X$ و $S_{۱,۱} \overset{d}{=} Y$، در این صورت $I(R_{۱,۱} < S_{۱,۱})$ یک برآوردگر ناااریب برای پارامتر $\mathcal{R}$ می‌باشد. در نتیجه با استفاده از قضیه رائو-بلکول و لهمن-شفه برآوردگر $UMVU$ پارامتر $\mathcal{R}$ را با در نظر گرفتن سه حالت زیر محاسبه می‌کنیم.

حالت اول: $min\{m, n\} \ge ۲$

$$\hat{\mathcal{R}}_{UMVU} = E\left\{ I\left(R_{۱,۱} < S_{۱,۱}\right) \Big| \sum_{i=۱}^{n}(R_{i,i}-\mu), \sum_{j=۱}^{m}(S_{j,j}-\mu) \right\}$$
$$= Pr\left\{ W < \frac{\sum_{j=۱}^{m}(S_{j,j}-\mu)}{\sum_{i=۱}^{n}(R_{i,i}-\mu)} \Big| \sum_{i=۱}^{n}(R_{i,i}-\mu), \sum_{j=۱}^{m}(S_{j,j}-\mu) \right\}$$

که در آن $W = \dfrac{\sum_{j=۲}^{m}(S_{j,j}-\mu)}{\sum_{i=۲}^{n}(R_{i,i}-\mu)} \overset{d}{=} \dfrac{B(۱,N-۱)}{B(۱,M-۱)}$ آماره‌ی فرعی است و بنا به قضیه باسو، مستقل از آماره‌ی بسنده‌ی کامل می‌باشد. بنابراین اگر $F_W(.)$ بیان‌گر تابع توزیع احتمال متغیر تصادفی W باشد، آن‌گاه

$$\hat{\mathcal{R}}_{UMVU} = F_W\left(\frac{\sum_{j=۱}^{m}(S_{j,j}-\mu)}{\sum_{i=۱}^{n}(R_{i,i}-\mu)} \right) \qquad (۱۶.۵)$$

حالت دوم : ($m \geq ۲$و $n = ۱$)

واضح است در این حالت $\left(R_{۱,۱}, \sum_{j=۱}^{m} S_{j,j}\right)$ آماره‌ی بسنده‌ی کامل برای $(\theta_۱,\theta_۲)^T$ می‌باشد بنابراین همانند حالت قبل، برآوردگر $UMVU$ برای $\mathcal{R}$ عبارت‌است از

$$\hat{\mathcal{R}}_{UMVU} = Pr\left\{ W < \frac{\sum_{j=۱}^{m}(S_{j,j}-\mu)}{(R_{۱,۱}-\mu)} \Big| (R_{۱,۱}-\mu), \sum_{j=۱}^{m}(S_{j,j}-\mu) \right\}$$

که در آن $W = \dfrac{\sum_{j=۱}^{m}(S_{j,j}-\mu)}{S_{۱,۱}-\mu} \overset{d}{=} \dfrac{۱}{B(۱,M-۱)}$ آماره فرعی می‌باشد و بنا به قضیه باسو مستقل از آماره‌ی بسنده‌ی کامل می‌باشد بنابراین

$$\hat{\mathcal{R}}_{UMVU} = \left(۱ - \frac{R_{۱,۱}-\mu}{\sum_{j=۱}^{m}(S_{j,j}-\mu)} \right)^{M-۱} \qquad (۱۷.۵)$$

حالت سوم:($m = ۱$ و $n \geq ۲$)

در این حالت $\left(\sum_{i=۱}^{n} R_{i,i}, S_{۱,۱}\right)$ آماره‌ی بسنده‌ی کامل و همانند حالت‌های قبل $UMVU$ برای $\mathcal{R}$ برابر است با

$$\hat{\mathcal{R}}_{UMVU} = Pr\left\{ W < \frac{(S_{۱,۱} - \mu)}{\sum_{i=۱}^{n}(R_{i,i} - \mu)} \middle| \sum_{i=۱}^{n}(R_{i,i} - \mu), (S_{۱,۱} - \mu) \right\}$$

که در آن $W = \frac{(R_{۱,۱} - \mu)}{\sum_{i=۱}^{n}(R_{i,i} - \mu)} \overset{d}{=} \frac{۱}{B(۱, N-۱)}$ آماره فرعی و مستقل از آماره‌ی بسنده‌ی کامل می‌باشد بنابراین

$$\hat{\mathcal{R}}_{UMVUE} = ۱ - \left(۱ - \frac{S_{۱,۱} - \mu}{\sum_{i=۱}^{n}(R_{i,i} - \mu)}\right)^{N-۱} \qquad (۱۸.۵)$$

که $B(.,.)$ تابع بتا می‌باشد.

۱.۲.۵ شبیه سازی

در این بخش به مقایسه عددی برآوردگرهای نقطه‌ای معرفی شده در بخش‌های ۱.۵ و ۲.۵ می‌پردازیم و در آن تمام ترکیب‌های $n = (۲,۴,۶)$ و $m = (۲,۴,۶)$ و پارامتر μ را معلوم در نظر می گیریم. همچنین $\theta_۱ = ۱$ و $\theta_۲$ را طوری در نظر گرفتیم که براساس رابطه (۱۱.۵)، داشته باشیم $\mathcal{R} = (۰/۱, ۰/۳, ۰/۵, ۰/۹۵, ۰/۹۹)$. به ازای هر کدام از ترکیب‌های فوق، ۱۰۰۰۰ نمونه‌ی r و s از توزیع‌های $E(\mu_۱, \theta_۱)$ و $E(\mu_۲, \theta_۲)$ تولید کرده‌ایم. نتایج حاصل در جدول ۱.۵ آمده است. به توجه به نتایج ارائه شده در جدول ۱.۵ ، مشاهده می‌کنیم نقاطی از $\mathcal{R}$ که نزدیک ۰.۵ هستند برآوردگر $UMVU$ خطای بیشتری نسبت به برآوردگر ML دارد. همچنین همان‌گونه که انتظار داشتیم با افزایش حجم نمونه، خطا کاهش یافته‌است.

نتیجه‌گیری

در این فصل، با فرض این‌که دو نمونه مستقل $RRSS$ بالا، به اندازه n و m از توزیع نمایی دو پارامتری، تنها اطلاعات از جوامع X و Y می‌باشد، برآوردگرهای نقطه‌ای پارامتر تنش-مقاومت را با درنظر گرفتن حالت‌های مختلف بررسی نمودیم. در نهایت از طریق شبیه‌سازی، برآوردگرهای فوق را مقایسه نمودیم. مشاهده گردید در حالتی‌که $\mathcal{R} = ۰/۵$ می‌باشد برآوردگر ML بهتر از برآوردگر $UMVU$ عمل می‌کند.

جدول ۱.۵: نتایج مربوط به MLE و $UMVUE$

ردیف	$\mathcal{R}$	n	m	Bias_MLE	MSE_MLE	Var_UMVUE
۱	۰.۱۰۰	۲	۲	۰.۰۱۸-	۰.۰۱۰	۰.۰۰۹
۲	۰.۱۰۰	۲	۴	۰.۰۷۱-	۰.۰۰۷	۰.۰۰۸
۳	۰.۱۰۰	۲	۶	۰.۰۸۵-	۰.۰۰۸	۰.۰۰۹
۴	۰.۱۰۰	۴	۲	۰.۰۵۰	۰.۰۰۸	۰.۰۰۸
۵	۰.۱۰۰	۴	۴	۰.۰۱۵-	۰.۰۰۲	۰.۰۰۲
۶	۰.۱۰۰	۴	۶	۰.۰۵۷-	۰.۰۰۴	۰.۰۰۴
۷	۰.۱۰۰	۶	۲	۰.۱۱۶	۰.۰۱۹	۰.۰۲۱
۸	۰.۱۰۰	۶	۴	۰.۰۱۰	۰.۰۰۲	۰.۰۰۲
۹	۰.۱۰۰	۶	۶	۰.۰۱۲-	۰.۰۰۱	۰.۰۰۱
۱۰	۰.۳۰۰	۲	۲	۰.۰۲۴-	۰.۰۴۷	۰.۰۵۶
۱۱	۰.۳۰۰	۲	۴	۰.۱۷۱-	۰.۰۵۱	۰.۰۵۸
۱۲	۰.۳۰۰	۲	۶	۰.۲۲۵-	۰.۰۶۲	۰.۰۶۸
۱۳	۰.۳۰۰	۴	۲	۰.۱۰۴	۰.۰۳۱	۰.۰۴۰
۱۴	۰.۳۰۰	۴	۴	۰.۰۲۱-	۰.۰۱۲	۰.۰۱۳
۱۵	۰.۳۰۰	۴	۶	۰.۱۳۹-	۰.۰۲۵	۰.۰۲۸
۱۶	۰.۳۰۰	۶	۲	۰.۲۱۲	۰.۰۵۷	۰.۰۷۷
۱۷	۰.۳۰۰	۶	۴	۰.۰۲۷	۰.۰۰۸	۰.۰۰۹
۱۸	۰.۳۰۰	۶	۶	۰.۰۱۶-	۰.۰۰۵	۰.۰۰۶
۱۹	۰.۵۰۰	۲	۲	۰.۰۰۳-	۰.۰۶۷	۰.۰۸۲
۲۰	۰.۵۰۰	۲	۴	۰.۲۱۱-	۰.۰۹۶	۰.۱۱۳
۲۱	۰.۵۰۰	۲	۶	۰.۳۱۲-	۰.۱۳۳	۰.۱۵۱
۲۲	۰.۵۰۰	۴	۲	۰.۱۲۴	۰.۰۳۵	۰.۰۵۰
۲۳	۰.۵۰۰	۴	۴	۰.۰۰۰	۰.۰۱۸	۰.۰۱۹
۲۴	۰.۵۰۰	۴	۶	۰.۱۶۶-	۰.۰۴۲	۰.۰۴۶
۲۵	۰.۵۰۰	۶	۲	۰.۲۱۴	۰.۰۵۵	۰.۰۷۸
۲۶	۰.۵۰۰	۶	۴	۰.۰۴۳	۰.۰۱۱	۰.۰۱۳
۲۷	۰.۵۰۰	۶	۶	۰.۰۰۰	۰.۰۰۸	۰.۰۰۸
۲۸	۰.۹۵۰	۲	۲	۰.۰۱۰	۰.۰۰۳	۰.۰۰۳
۲۹	۰.۹۵۰	۲	۴	۰.۰۵۸-	۰.۰۱۶	۰.۰۱۷
۳۰	۰.۹۵۰	۲	۶	۰.۱۳۶-	۰.۰۴۴	۰.۰۵۰
۳۱	۰.۹۵۰	۴	۲	۰.۰۲۷	۰.۰۰۱	۰.۰۰۱
۳۲	۰.۹۵۰	۴	۴	۰.۰۰۹	۰.۰۰۱	۰.۰۰۱
۳۳	۰.۹۵۰	۴	۶	۰.۰۳۲-	۰.۰۰۳	۰.۰۰۳
۳۴	۰.۹۵۰	۶	۲	۰.۰۳۴	۰.۰۰۱	۰.۰۰۲
۳۵	۰.۹۵۰	۶	۴	۰.۰۱۵	۰.۰۰۰	۰.۰۰۱
۳۶	۰.۹۵۰	۶	۶	۰.۰۰۷	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۳۷	۰.۹۹۰	۲	۲	۰.۰۰۲	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۳۸	۰.۹۹۰	۲	۴	۰.۰۱۴-	۰.۰۰۱	۰.۰۰۱
۳۹	۰.۹۹۰	۲	۶	۰.۰۳۸-	۰.۰۰۵	۰.۰۰۵
۴۰	۰.۹۹۰	۴	۲	۰.۰۰۶	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۴۱	۰.۹۹۰	۴	۴	۰.۰۰۲	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۴۲	۰.۹۹۰	۴	۶	۰.۰۰۷-	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۴۳	۰.۹۹۰	۶	۲	۰.۰۰۷	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۴۴	۰.۹۹۰	۶	۴	۰.۰۰۳	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰
۴۵	۰.۹۹۰	۶	۶	۰.۰۰۲	۰.۰۰۰	۰.۰۰۰

آینده تحقیق

در این رساله، پارامتر تنش-مقاومت را براساس نمونه‌های به‌دست آمده از طرح $RRSS$ بررسی نمودیم. الگوی نرخ خطر معکوس متناسب که شامل تعداد زیادی از توزیع‌های مهم آماری می‌باشد به عنوان توزیع جامعه‌ی آماری در نظر گرفته‌شد و به بررسی پارامتر تنش-مقاومت براساس طرح $RRSS$ پرداختیم. نتایج به‌دست آمده از طرح فوق و آماره‌های رکوردی معمولی را مقایسه نمودیم. این تحقیق می‌تواند در موارد زیر نیز مورد بررسی و مطالعه قرار گیرد.

- در این رساله، طرح $RRSS$، در حقیقت براساس ساختار نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار تک حلقه‌ای می‌باشد، به نظر می رسد می‌توان نتایج فوق را براساس روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی چند حلقه‌ای ادامه داد.
- طرح $RRSS$ را می‌توان از دیدگاه نظریه اطلاع مانند آنتروپی شانون و رنی و معیارهای فاصله از قبیل کولبک نیز بررسی نمود.
- برآورد چندک‌های جامعه براساس داده‌های ترتیبی حاصل از طرح $RRSS$ می‌تواند مورد بررسی محققان واقع شود.
- در این رساله پارامتر تنش-مقاومت با فرض استقلال متغیرهای X و Y می‌باشد، می‌توان با در نظر گرفتن فرض وابستگی متغیرهای X و Y نتایج فوق را بررسی نمود.

مراجع

[۱] بصیرت، م. (۱۳۹۳ ش). *استنباط آماری برای پارامتر تنش- مقاومت بر اساس داده‌های ترتیبی*، رساله ی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد.

[۲] رزمخواه، م.، احمدی، ج.، خطیب آستانه، ب. (۱۳۸۶ ش). *مقایسه ی دو روش استخراج رکوردها از دیدگاه اطلاع فیشر*، مجله‌ی علوم آماری، جلد ۱ ، شماره ی ۴۴ ،۱ .

[۳] صالحی، م. (۱۳۹۰ ش). *نمونه گیری مجموعه رتبه دار: برآورد و پیش بینی*، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد.

[۴] صالحی، م. (۱۳۹۴). *نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار بر مبنای داده‌های رکوردی: پیش‌بینی و برآورد*، رساله‌ی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد.

[5] Ahmadi, J., Arghami, N.R. (2001), "**Some univariate stochastic orders on record values**", Communication in Statistics: Theory and Methods, 30, 69-74.

[6] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998), "**Records**", John Wiley and Sons, New York.

[7] Ahmadi, J., Jafari Jozani, M., Marchand, E., and Parsian, A. (2009), "**Bayesian estimation based on k-record data from a general class of distributions under balanced type loss functions"**, Journal of Statistical Planning and Inference, 139, 1180–1189.

[8] Ahmadi, J. and Balakrishnan, N. (2010), "**Prediction of order statistics and record values from two independent sequences"**, Statistics, 44, 417–430.

[9] Ahmadi, J., Jafari Jozani, M., Marchand, E. and Parsian, A. (2008), "**Prediction of k-records from a general class of distributions under balanced type loss functions**", Metrika, 70, 19-33

[10] Ahmadi, J., Jafari Jozani, M., Marchand, E. and Parsian, A. (2009), "**Bayesian estimation based on k-record data from a general class of distributions under balanced type loss functions**", Journal of Statistical Planing and Inference, 139, 1180-1189.

[11] Ahsanullah, M. and Dinesh S. B. (1996), "**Record values of extreme value distribution and a test for domain of attraction of type I extreme value distribution**", Sankhya V, 58, 151-158.

[12] Amini, M. and Balakrishnan, N. (2013), "**Nonparametric meta-analysis of independent samples**", Computational Statistics and Data Analysis, 66, 70–81.

[13] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (2008), "**A First Course in Order Statistics**", Wiley, New York.

[14] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R., Raqab, M. Z. (2011), "**Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples**", Statistics and Operations Research Transactions, 35(2), 103-124.

[15] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M.Z. (2013), "**Estimation of the stress–strength reliability for the generalized logistic distribution**", Statistical Methodology, 15, 73–94.

[16] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R. and Raqab, M.Z. (2017), "**Estimation of $Pr(Y < X)$ for the two-parameter generalized exponential records**", Communications in Statistics: Simulation and Computation, 46, 379-394.

[17] Awad, A. M., Azzam, M. M. and Hamadan, M. A. (1981), "**Some inference results in $Pr(Y < X)$ in the bivariate exponential model**", Communications in Statistics: Theory and Methods, 10, 2515-2524.

[18] Baklizi, A. (2008a), "**Estimation of $Pr(X < Y)$ using record values in the one and two parameter exponential distributions**", Communications in Statistics: Theory and Methods, 37, 692-698.

[19] Baklizi, A. (2008b), "**Likelihood and Bayesian estimation of $Pr(X < Y)$ using lower record values from the generalized exponential distribution**", Computational Statistics and Data Analysis, 52, 3468-3473.

[20] Baklizi, A. (2014), "**Interval estimation of the stress-strength reliability in the two parameter exponential distribution based on records**", Journal of Statistical Computation and Simulation, 84, 2670-2679.

[21] Balakrishnan, N., Kamps, U. and Kateri, M. (2009), "**Minimal repair under a step-stress test**", Statistics and Probability Letters, 79, 1548-1558.

[22] Balakrishnan, N. and Li, T. (2008), "**Ordered ranked set samples and applications to inference**", Journal of Statistical Planning and Inference, 138, 3512–3524.

[23] Barnett, V. and Moore, K. (1997), "**Best linear unbiased estimates in ranked-set sampling with particular reference to imperfect ordering**", Journal of Applied Statistics, 24, 697–710.

[24] Barreto, M. C. C. and Barnett, V. (1999), "**Best linear unbiased estimators for the simple linear regression model using ranked set sampling**", Environmental and Ecological Statistics, 6, 119–133.

[25] Basirat, M., Baratpour, S. and Ahmadi, J. (2013), "**Statistical inferences for stress-strength in the proportional hazard models based on progressive Type-II censored samples**", Journal of Statistical Computation and Simulation, 85, 431-449.

[26] Basirat, M., Baratpour, S. and Ahmadi, J. (2016), "**On estimation of stress-strength parameter using record values from proportional hazard rate models**", Communications in Statistics-Theory and Methods, 45, 5787-5801.

[27] Bailey, W. N. (1935), "**Generalized Hyper geometric Series**", University Press, Cambridge.

[28] Berger, J. 0. (1985), "**Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis (2nd ed.)**", New York: Wiley.

[29] Birnbaum, Z. W. (1956), "**On a use of Mann-Whitney statistics**", Proceedings of the third Berkeley Symposium in Mathematics, Statistics and Probability, 1, 13–17.

[30] Birnbaum, Z. W. and McCarty, B.C. (1958), "**A distribution-free upper confidence bounds for $Pr(Y < X)$ based on independent samples of X and Y**", The Annals of Mathematical Statistics, 29, 558–562.

[31] Batacharya, G. K., Johnson, R. A. (1974), "**Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model**", Journal of the American Statistical Association, 69, 966-970.

[32] Bohn, L. L. (1996), "**A review of nonparametric ranked set sampling methodology**", Communications in Statistics, Part A-Theory and Methods, 25, 2675–2685.

[33] Carlin, B. P. and Gelfand, A. E. (1993), "**Parametric likelihood inference for record breaking problems**", Biometrika, 80, 507-515.

[34] Casella, G. and Berger, R. L. (1990), "**Statistical Inference**", Pacific Grove, CA: Wadsworth/Brooks Cole.

[35] Chandler, K. N. (1952), "**The distribution and frequency of record value"**, Journal of the Royal Statistical Society, Series B, 14, 220–228.

[36] Chandra, N.N., and Roy, D., (2001), "**Some results on the reversed hazard rate**", Probability in the Engineering and Informational Sciences 15, 95–102

[37] Chen, M. and Shao, Q., (1999), "**Monte carlo estimation of Bayesian credible and HPD intervals**", Journal of Computational and Graphical Statistics, 8 (1), 69-92.

[38] Chen, Z. (2000), "**The efficiency of ranked set sampling relative to simple random sampling under mutiple-parameter family**", Statistica Sinica, 10, 247–263.

[39] Chen, Z., Bai, Z. and Sinha, A. K. (2003), "**Ranked Set Sampling"**: Theory and Applications, Springer, New York.

[40] David, H. A. and Nagaraja, H. N. (2003), "**Order Statistics**", Third edition, John Wiley Sons, Hoboken, New Jersey.

[41] Dell, T. R., and Clutter, J. L. (1972), "**Ranked set sampling theory with order statistics background**", Biometrics, 28, 545–-553.

[42] Efron, B. (1979), "**Computers and the theory of the statistics: thinking the unthinkable**", Society for Industrial and Applied Mathematics, 21, 4, 430-443.

[43] Efron, B. and Tibshirani, R. (1993), "**An Introduction to the Bootstrap**", Chapman and Hall, New York.

[44] Eryilmaz, S. (2008), "**Consecutive k-out-of-n: G system in stress-strength setup**", Communications in Statistics - Simulation and Computation, 37, 579-589.

[45] Eskandarzadeh M., Tahmasebi, S., Afshari, M. (2016), "**Information measures for record ranked set samples**", Ciencia e Natura, 38, 554-563.

[46] Glich, N. (1978), "**Breaking record and breaking boards**", The American Mathematical Monthly, 85, 2-26.

[47] Gulati, S. and Padgett, W. J. (1994), "**Nonparametric quantile estimation from record-breaking data**", Australian Journal of Statistics, 36, 211–223.

[48] Gulati, S. and Padgett, W. J. (2003), "**Parametric and Nonparametric Inference from Record-breaking Data."** Lecture Notes in Statistics, 172, Springer-Verlag, New York.

[49] Gupta, R. C. and Kirmani, S. N. U. A. (1988), "**Closure and monotonicity properties of nonhomogeneous Poisson processes and record values**", Probability in the Engineering and Informational Sciences, 2, 475–484.

[50] Gupta, R.D. and Nanda, A.K., (2001), "**Some results on (reversed) hazard rate ordering**", Communication in Statistics: Theory and Methods, 30, 2447–2458

[51] Gupta, R.C., Gupta, P.L. and Gupta, R.D., (1998), "**Modeling failure time data by Lehman alternatives**", Communication in Statistics: Theory and Methods, 27, 887–904.

[52] Gupta, R.C. and Gupta, R.D., (2007), "**Proportional reversed hazard rate model and its applications**", Journal of Statistical Planning and Inference 137, 3525–3536.

[53] Guttman, I., Johnson, R.A., Battacharyya, G.K. and Reiser, B. (1998), "**Confidence limits for stress-strength models with explanatory variables**", Technometrics, 30(2), 161-168.

[54] Halls and Dell (1966), "**Trial of ranked set sampling for forage yields**", Forest Science, 12, 22–26.

[55] Jafari Jozani, M. and Johnson, B. C. (2011), "**Design based estimation for ranked set sampling in finite populations**", Environmental and Ecological Statistics, 18, 663–685.

[56] Johnson, R. A. (1988), "**Stress-strength Models for Reliability**", Elsevier, 7, 27-54.

[57] Hassan, S. A., Abd-Allah, M. and Nagy, F. H. (2018), "**Bayesian Analysis of Record Statistics Based on Generalized Inverted Exponential Model**", International Journal on Advanced Science Engineering Information Technology, 8(2), 323-335.

[58] Klein, J. P., Basu, A. P. (1985), "**Estimating reliability for bivariate exponential distributions**", Sankhya, 47, 346-353.

[59] Kotz, S., Lumelskii, Y. and Pensky, M. (2003), "**The Stress-Strength Model and its Generalizations: Theory and Applications**", World Scientific, Singapor.

[60] Kochar, S. C. (1990), "**Some partial ordering results on record values**", Communications in Statistics: Theory and Methods, 19, 229-306.

[61] Kochar, S. C. (1996), "**A note on dispersive ordering of record values**", Calcutta Statistical Association, 46, 63-67.

[62] Kundu, D., Gupta, R. D. (2005), "**Estimation of $P(X < Y)$ for generalized exponential distribution**", Metrika, 61, 291-308.

[63] Lehmann, E.L. and Casella, G. (1998), "**Theory of Point Estimation, Second Edition**", Springer Texts in Statistics, New York.

[64] Lio, Y. L. and Tsai, T. R. (2012), "**Estimation of $Pr(X < Y)$ for Burr XII distribution based on the progressively first failure-censored samples**", Journal of Applied Statistics, 39(2), 309-322.

[65] Manisha Pala, M. Masoom Alib, Jungsoo Wooc (2005), "**Estimation and testing of $P(Y > X)$ in two-parameter exponential distributions**", Statistics, 5, 415-428

[66] Mann, H. B., Whitney, D. R. (1947), "**On a test whether one of two random variables is stochastically larger than the other**", The Annals of Mathematical Statistics, 18, 50-60.

[67] Marshall, A. W. and Olkin, O. (2007), "**Life distributions**", Springer, New York

[68] McIntyer, G.A. (1952), "**A method for unbiased selective sampling, using ranked sets**", Australian Journal of Agricultural Research, 3, 385-390.

[69] Muttlak, H. A., Abu-Dayyeh, W. A., Saleh, M. F. and Al-Sawi, E. (2010), "**Estimating $Pr(Y < X)$ using ranked set sampling in case of the exponential distribution**", Communication in Statistics: Theory and Methods, 39, 1855–1868.

[70] Nadar, M and Kizilaslan, F. (2014), "**Classical and Bayesian estimation of $Pr(X < Y)$ using upper record values from Kumaraswamy's distribution**", Statistical Papers, 55, 3, 751-783.

[71] Owen, D. B., Craswell, K. J., Hanson, D. L. (1964), "**Non-parametric upper confidence bounds for $Pr(Y < X)$ and confidence limits for $Pr(Y < X)$ when X and Y are normal**", Journal of the American Statistical Association, 59, 906-924.

[72] Pakdaman, Z., and Ahmadi, J., (2018), "**Point estimation of the stress- strength reliability parameter for parallel system with independent and non-identical components**", Communications in Statistics: Simulation and Computation, 47, 1193-1203.

[73] Patil, G. P., Sinha, A. K. and Taillie, C. (1999), "**Ranked set sampling a bibliography**", Environmental and Ecological Statistics, 6, 91–98.

[74] Paul, J. and Thomas, PY. (2017), "**Concomitant record ranked set sampling**", Communications in Statistics-Theory and methods, 46 (19), 9518-9540.

[75] Proschan (1963), "**Theoretical explanation of observed decreasing failure rate**", Technometrics, 5, 375–383

[76] Raqab, M. Z, Madi, T. and Kundu, D. (2008), "**Estimation of $Pr(Y < X)$ for the three-parameter generalized exponential distribution**", Communications in Statistics-Theory and Methods, 37, 2854-2865.

[77] Rezaei, S., Tahmasbi, R. and Mahmoodi, M. (2010), "**Estimation of $Pr(Y < X)$ for generalized Pareto distribution**", Journal of Statistical Planing and Inference, 140, 480-494.

[78] Rizzo, M. L. (2008), "**Statistical Computing with R**", Chapman Hall, Taylor Francis Group, LLc.

[79] Safarian, A., Arashi, M. and Arabi Belaghi, R. (2019a), "**Improved point and interval estimation of the stress-strength reliability based on record ranked set sampling scheme**", Statistics, 53, 101–125.

[80] Safarian, A., Arashi, M. and Arabi Belaghi, R. (2019b), "**Improved estimators for stress-strength reliability using record ranked set sampling scheme**", Communications in Statistics: Simulation and Computation, 48(9), 2708–2726

[81] Salehi, M., Ahmadi, J. (2014), "**Record ranked set sampling scheme**", Metron, 72, 351-365

[82] Salehi, M., Ahmadi, J. (2015a), "**Estimation of stress-strength using record ranked set sampling scheme from the exponential distribution**", Filomat, 29, 1149-1162.

[83] Salehi, M. and Ahmadi, J. (2015b), "**Predection of order statistics and record values based on ordered ranked set sampling**", Journal of Statistical Computation and Simulation, 85, 77–88.

[84] Salehi, M., Ahmadi, J. and Dey, S. (2016), "**Comparison of two sampling schemes for generating record-breaking data from the proportional hazard rate models**", Communications in Statistics-Theory and Methods, 45, 3721-3733.

[85] Samaniego, F. J., Whitaker, L. R. (1986), "**On estimating population characteristics from record-breaking observations**", I: Parametric Results, Naval research Logistics Quarterly, 33, 531–543.

[86] Samaniego, F. J., Whitaker, L. R. (1988), "**On estimating population characteristics from record-breaking observations**", II: Nonparametric Results, Naval research Logistics Quarterly, 35, 221–236.

[87] Saracoglu, B., Kaya, M. F. (2007), "**Maximum likelihood estimation and confidence intervals of system reliability for Gomperts distribution in stress-strength models**", Selcuk Journal of Applied Mathematics, 8, 25-36.

[88] Saracoglu, B., Kinaci, I. and Kundu, D. (2012), "**On estimation of $\mathcal{R} = Pr(Y < X)$ for exponential distribution under progressive type-II censoring**", Journal of Statistical Computation and Simulation, 82, 729-744.

[89] Sengupta, D. and Nanda, A.K., (1999), "**Log-concave and concave distributions in reliability**", Naval Res. Logistics Quart. 46, 419–433.

[90] Sinha, A. K., R. W. (2005), "**On some recent developments in ranked set sampling**", Bulletin of Informatics and Cybernetics, 37.

[91] Smith, A.F.M. (1991). "**Bayesian computational methods**", Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, 369-386.

[92] Stokes, S. L. (1980), "**Estimation of variance using judgment ordered ranked set samples**", Biometrics, 36, 35–42.

[93] Stokes, S. L. (1995), "**Parametric ranked set sampling**", Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 47, 465–482.

[94] Takahasi, K. and Wakimoto, K. (1968), "**On unbiased estimates of the population mean based on the sample stratified by means of ordering**", Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 20, 1–31.

[95] Tanner, M.A. (1996). "**Tools for Statistical inference**", 3rd ed. Springer-verlag, New York.

[96] Tong, H. (1974), "**A note on the estimation of $Pr(Y < X)$ in the exponential case**", Technometrics, 16, 625.

[97] Wasserman, L. (2006), "**All of Non-parametric Statistics**", Springer, New York.

[98] Wilcoxon, F. (1945), "**Individual comparisons by ranking methods**", Biometrics Bulletin , 1, 80 - 83.

[99] Zheng, G. and Al-Saleh, M. F. (2000), "**Modified maximum likelihood estimators based on ranked set sampling**", Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 54, 641–658.

پیوست آ

کدهای برنامه‌نویسی

به علت حجم زیاد برنامه های استفاده شده در این رساله و جلوگیری از ازدیاد کاذب صفحات، در زیر تنها نمونه ای از کدهای برنامه نویسی محاسبات عددی و شبیه سازی آورده شده اند و سایر کدها، نزد گردآورنده محفوظ می باشند. لذا، خوانندگان گرامی رساله می توانند در صورت تمایل با آدرس ایمیل $sadeghpour.amineh@yahoo.com$ تماس حاصل نمایند. لازم به ذکر است که تمامی محاسبات عددی و شبیه‌سازی این رساله با استفاده از نرم افزار R انجام شده اند.
۱) کد برنامه‌های زیر مربوط به نمودار ۱.۲ هستند.

```
k=5000000
n=c(2,3,4,5,6)
m=c(2,3,4,5,6)
M=m*(m+1)/2
N=n*(n+1)/2
R=seq(0,1,by=0.02)
mse1=numeric(length(R))
mse2=numeric(length(R))
mse3=numeric(length(R))
mse4=numeric(length(R))
```

```
mse5=numeric(length(R))
for(i in 1:length(R)){
#v=rf(k,2*M,2*N)
Rhat = (1+rf(k,2*M[5],2*N[1])*(1-R[i])/R[i])^(-1)
mse1[i] = mean((Rhat-R[i])^2)
Rhat = (1+rf(k,2*M[1],2*N[5])*(1-R[i])/R[i])^(-1)
mse2[i] = mean((Rhat-R[i])^2)
Rhat = (1+rf(k,2*M[3],2*N[3])*(1-R[i])/R[i])^(-1)
mse3[i] = mean((Rhat-R[i])^2)
Rhat = (1+rf(k,2*M[4],2*N[2])*(1-R[i])/R[i])^(-1)
mse4[i] = mean((Rhat-R[i])^2)
Rhat = (1+rf(k,2*M[2],2*N[4])*(1-R[i])/R[i])^(-1)
mse5[i] = mean((Rhat-R[i])^2)
}
plot(c(0,1), c(0,0.05), type = "n", xlab = "R", main = "",
 ylab="MSE",yaxt = "n", xaxs = "i", yaxs = "i")
abline(v=0.5,lty=2)
axis(2)
abline(h=0,lty=2)
lines(R,mse1,type='l',lwd=2)
lines(R,mse2, lty=2, col=2,lwd=2)
lines(R,mse3, lty=3, col=3,lwd=2)
lines(R,mse4, lty=4, col=4,lwd=2)
lines(R,mse5, lty=5, col=5,lwd=2)
abline(v=0.5 , lty=3)
legend("topright",legend=c(expression(paste("n = 2 , m = 6")),
 expression(paste("n = 6 , m = 2")),
expression(paste("n = 4 , m = 4")),
expression(paste("n = 3 , m = 5")),
expression(paste("n = 5 , m = 3"))),
lty=1:6,lwd=2, col=1:6,  bty='n', cex=1)
```

۲) کد برنامه‌ی زیر مربوط به محاسبات شبیه‌سازی جدول‌های ۱.۲ و ۱.۳ می‌باشند.

```
# rm(list=ls())
```

```
library(xtable)
library(parallel)   # for parallel computing
library(doParallel) # for parallel computing
library(foreach)    # for parallel computing
# functions ----------------------------------------------------
Q.boot=function(t,RR){
  f=ecdf(RR)
  ff=function(x) f(x)-t
  uniroot(ff,int=c(0,10))$root
}
Q.boot=Vectorize(Q.boot,"t")
Q.boot(c(0.5,0.9),rexp(100))
f.hpd1=function(N, M, theta1, theta2, B.hpd, a, b, c, d, alpha) {
  B=B.hpd
  # T1=rgamma(1,N,1/theta1)
  # T2=rgamma(1,M,1/theta2)
  # Theta1i=rgamma(B,a+N,1/(b+T1))
  # Theta2i=rgamma(B,c+M,1/(d+T2))
  T1=rgamma(1,shape=N,scale=1/theta1)
  T2=rgamma(1,shape=M,scale=1/theta2)
  Theta1i=rgamma(B,shape=a+N,scale=1/(b+T1))
  Theta2i=rgamma(B,shape=c+M,scale=1/(d+T2))
  Ri=sort(Theta2i/(Theta2i+Theta1i))
  up=B-floor(B*(1-alpha))
  J=1:up
  jst=J[which.min(Ri[J+floor(B*(1-alpha))]-Ri[J])]
  # EL=Ri[jst+floor(B*(1-alpha))]-Ri[jst]
  # CP=ifelse(Ri[jst]<R & R<Ri[jst+floor(B*(1-alpha))],1,0)
  # return(c(EL = EL , CP=CP))
  # return(list(EL = EL , CP=CP))
  LCL=Ri[jst]
  UCL=Ri[jst+floor(B*(1-alpha))]
  return(c(LCL = LCL , UCL=UCL))
}
```

```
f.hpd2=function(N, M, theta1, theta2, B.hpd, alpha) {
  B=B.hpd
  T1=rgamma(1,shape=N,scale=1/theta1)
  T2=rgamma(1,shape=M,scale=1/theta2)
  Theta1i=rgamma(B,shape=N,scale=1/(T1))
  Theta2i=rgamma(B,shape=M,scale=1/(T2))
  Ri=sort(Theta2i/(Theta2i+Theta1i))
  up=B-floor(B*(1-alpha))
  J=1:up
  jst=J[which.min(Ri[J+floor(B*(1-alpha))]-Ri[J])]
  # EL=Ri[jst+floor(B*(1-alpha))]-Ri[jst]
  # CP=ifelse(Ri[jst]<R & R<Ri[jst+floor(B*(1-alpha))],1,0)
  # return(c(EL = EL , CP=CP))
  # return(list(EL = EL , CP=CP))
  LCL=Ri[jst]
  UCL=Ri[jst+floor(B*(1-alpha))]
  return(c(LCL = LCL , UCL=UCL))
}
f.boot_t1=function(n,m,theta2,R,alpha){
  p=min(m,n)/max(m,n)
  N=n*(n+1)/2
  M=m*(m+1)/2
  theta1=theta2*(1/R-1)
  r=c()
  for(i in 1:n) r=c(r,rgamma(1,shape=i,scale=1/theta1))
  s=c()
  for(j in 1:m) s=c(s,rgamma(1,shape=j,scale=1/theta2))
  theta1.hat=N/sum(r)
  theta2.hat=M/sum(s)
  R.hat=theta2.hat/(theta2.hat+theta1.hat)
  I=(n>=m)
  eta.hat=theta2.hat*theta1.hat/(theta1.hat+theta2.hat)^2
  *sqrt(1/(N*p^(1-I))+1/(p^I*M))
  R.star=eta.star=SD=rep(NA,B)
```

```
for(bbb in 1:B){
  r.star=c()
  for(i in 1:n) r.star=c(r.star,rgamma(1,shape=i,scale=1/theta1.hat))
  s.star=c()
  for(j in 1:m) s.star=c(s.star,rgamma(1,shape=j,scale=1/theta2.hat))
  theta1.star=N/sum(r.star)
  theta2.star=M/sum(s.star)
  R.star[bbb]=theta2.star/(theta2.star+theta1.star)
  R.tilde=c()
  for(bb in 1:30){
    r.tilde=c()
   for(i in 1:n) r.tilde=c(r.tilde,rgamma(1,shape=i,scale=1/theta1.star))
    s.tilde=c()
   for(j in 1:m) s.tilde=c(s.tilde,rgamma(1,shape=j,scale=1/theta2.star))
    theta1.tilde=N/sum(r.tilde)
    theta2.tilde=M/sum(s.tilde)
    R.tilde[bb]=theta2.tilde/(theta2.tilde+theta1.tilde)
  }
  SD[bbb]=sqrt(var(R.tilde))
  eta.star[bbb]=theta2.star*theta1.star/(theta1.star+theta2.star)^2
  *sqrt(1/(N*p^(1-I))+1/(p^I*M))
}
z.star=(R.star-R.hat)/eta.star
z1=quantile(z.star,alpha/2,type=1);z2=quantile(z.star,1-alpha/2,type=1)
z.tilde=(R.star-R.hat)/SD
t1=quantile(z.tilde,alpha/2,type=1);t2=quantile(z.tilde,1-alpha/2,type=1)
int.perc=c(Q.boot(alpha/2,R.star),Q.boot(1-alpha/2,R.star))
int.boot1=c(R.hat-z2*eta.hat,R.hat-z1*eta.hat)
int.boot2=c(R.hat-t2*eta.hat,R.hat-t1*eta.hat)
int.AMLE=c(R.hat-qnorm(alpha/2)*eta.hat,R.hat+qnorm(alpha/2)*eta.hat)
l.mle=1/(1+(1-R.hat)/R.hat*qf(1-alpha/2,2*N,2*M))
u.mle=1/(1+(1-R.hat)/R.hat*qf(alpha/2,2*N,2*M))
int.MLE=c(l.mle,u.mle)
deltastar=R.star-R.hat
```

```
# dd=quantile(deltastar,c(alpha,1-alpha))
dd=quantile(deltastar,c(alpha/2,1-alpha/2))
basic.boot=R.hat-c(dd[2],dd[1])
tt1=sum(r)
tt2=sum(s)
A=(a+N)*(d+tt2)/((c+M)*(b+tt1))
# l.bci1=1/(1+A*qf(alpha/2,2*(a+N),2*(c+M)))
# u.bci1=1/(1+A*qf(1-alpha/2,2*(a+N),2*(c+M)))
u.bci1=1/(1+A*qf(alpha/2,2*(a+N),2*(c+M)))
l.bci1=1/(1+A*qf(1-alpha/2,2*(a+N),2*(c+M)))
bci1=c(l.bci1,u.bci1)
# l.bci2=1/(1+N*t2/(M*t1)*qf(alpha/2,2*N,2*M))
# u.bci2=1/(1+N*t2/(M*t1)*qf(1-alpha/2,2*N,2*M))
u.bci2=1/(1+N*tt2/(M*tt1)*qf(alpha/2,2*N,2*M))
l.bci2=1/(1+N*tt2/(M*tt1)*qf(1-alpha/2,2*N,2*M))
bci2=c(l.bci2,u.bci2)
hpd1=f.hpd1(N, M, theta1, theta2, B.hpd, a, b, c, d, alpha)
hpd2=f.hpd2(N, M, theta1, theta2, B.hpd, alpha)
res=c(int.perc,
      # int.boot1,
      int.boot2,int.MLE,
      # int.AMLE,
      basic.boot,
      bci1,
      bci2,
      hpd1,
      hpd2,
      R.hat)
names(res)=c("L.Perc","U.Perc",
             # "L.Boot1","U.Boot1",
             "L.Boot2","U.Boot2",
             "L.MLE","U.MLE",
             # "L.AMLE","U.AMLE",
             "L.basic","U.basic",
```

```
                "L.bci1","U.bci1",
                "L.bci2","U.bci2",
                "L.HPD1","U.HPD1",
                "L.HPD2","U.HPD2",
                "R.hat")
  return(res)
}
# simulation ----------------------------------------------------
# B=10 # Only for test
# B=200
B=1000
# B.hpd=100 # Only for test
B.hpd=1000
#### Prior parameters ###
a=1; b=2
c=1; d=2
###
test=f.boot_t1(n=3,m=3,theta2=0.4,R=0.4,alpha=0.1)
test
#repl=100 # Only for test
# repl=1000
repl=10000
pt=proc.time()
ncore=detectCores()
cl=makeCluster(ncore)
registerDoParallel(cl)
table=foreach(R=c(0.1,0.5,0.95), .combine='rbind') %:%
  foreach(n=c(2,4,6), .combine='rbind') %:%
    foreach(m=c(2,4,6), .combine='rbind') %do% {
      set.seed(123)
      total=t(replicate(repl,expr=f.boot_t1(n,m,theta2=0.4,R,alpha=0.1)))
      L.Perc=total[,1];U.Perc=total[,2]
      # L.Boot1=pmax(total[,3],0);U.Boot1=pmin(total[,4],1)
      L.Boot2=pmax(total[,3],0);U.Boot2=pmin(total[,4],1)
```

```
L.MLE=total[,5];U.MLE=total[,6]
# L.AMLE=pmax(total[,9],0);U.AMLE=pmin(total[,10],1)
L.basic=total[,7];U.basic=total[,8]
L.bci1=total[,9];U.bci1=total[,10]
L.bci2=total[,11];U.bci2=total[,12]
L.hpd1=total[,13];U.hpd1=total[,14]
L.hpd2=total[,15];U.hpd2=total[,16]
#Bias=mean(total[,15])-R
#mse.R=mean((total[,15]-R)^2)
CV.Perc=mean((L.Perc<=R)&(R<=U.Perc))
L.Perc=mean(U.Perc-L.Perc)
# CV.Boot1=mean((L.Boot1<=R)&(R<=U.Boot1))
# L.Boot1=mean(U.Boot1-L.Boot1)
CV.Boot2=mean((L.Boot2<=R)&(R<=U.Boot2))
L.Boot2=mean(U.Boot2-L.Boot2)
CV.MLE=mean((L.MLE<=R)&(R<=U.MLE))
L.MLE=mean(U.MLE-L.MLE)
# CV.AMLE=mean((L.AMLE<=R)&(R<=U.AMLE))
# L.AMLE=mean(U.AMLE-L.AMLE)
CV.basic=mean((L.basic<=R)&(R<=U.basic))
L.basic=mean(U.basic-L.basic)
CV.bci1=mean((L.bci1<=R)&(R<=U.bci1))
L.bci1=mean(U.bci1-L.bci1)
CV.bci2=mean((L.bci2<=R)&(R<=U.bci2))
L.bci2=mean(U.bci2-L.bci2)
CV.hpd1=mean((L.hpd1<=R)&(R<=U.hpd1))
L.hpd1=mean(U.hpd1-L.hpd1)
CV.hpd2=mean((L.hpd2<=R)&(R<=U.hpd2))
L.hpd2=mean(U.hpd2-L.hpd2)
c(CV.Perc,L.Perc,
  # CV.Boot1,L.Boot1,
  CV.Boot2,
  L.Boot2,CV.MLE,L.MLE,
  # CV.AMLE,L.AMLE,
```

```
        CV.basic,L.basic,
        CV.bci1,L.bci1,CV.hpd1,L.hpd1,
        CV.bci2,L.bci2,CV.hpd2,L.hpd2)
    }
#   }
# }
stopCluster(cl)
pt=proc.time()-pt
pt
colnames(table)=c("CV.Perc","L.Perc",
                  # "CV.Boot1","L.Boot1",
                  "CV.Boot2","L.Boot2","CV.MLE","L.MLE",
                  # "CV.AMLE","L.AMLE",
                  "CV.basic","L.basic",
                  "CV.bci1","L.bci1","CV.hpd1","L.hpd1",
                  "CV.bci2","L.bci2","CV.hpd2","L.hpd2")
rownames(table)=NULL
round(table,4)
R=rep(c(0.1,0.5,0.95),each=9)
n=rep(c(2,4,6),each=3,times=3)
m=rep(c(2,4,6),times=9)
round(cbind(R,n,m,table),3)
xtable(round(cbind(R,n,m,table),3),digits=3)
id=1:8
round(cbind(R,n,m,table[,id]),3)
xtable(round(cbind(R,n,m,table[,id]),3),digits=3)
id=9:16
round(cbind(R,n,m,table[,id]),3)
xtable(round(cbind(R,n,m,table[,id]),3),digits=3)
write.table(table,"table1out.txt",row.names = F)
save(table,"table1out.RData")
load("table1out.RData")
```

پیوست ب

اثبات روابط

برهان. رابطه (۲۶.۲):
همان‌طور که قبلاً نیز بیان شده‌است $R_{i,i}$ها متغیرهای تصادفی مستقل و $RRSS$های پایین هستند.
با توجه به رابطه (۶.۱) تابع چگالی $R_{i,i}$ به صورت زیر است:

$$f_{R_{i,i}}(r_{i,i}) = \frac{\{-\log(۱ - e^{-r_{i,i}})^{\theta_۱}\}^{i-۱}}{(i-۱)} \theta_۱ e^{-r_{i,i}} (۱ - e^{-r_{i,i}})^{\theta_۱ - ۱},$$

با در نظر گرفتن

$$Z_i = -\log(۱ - e^{-R_{i,i}}),$$

و استفاده از روش تبدیل

$$f_{Z_i}(z_i) = \frac{\theta_۱^i z_i^{i-۱}}{(i-۱)!} e^{-\theta_۱ z_i}.$$

پس $Z_i \sim Gamma(i, \theta_۱)$، چون $T_۱ = \sum_{i=۱}^{n} Z_i$ بنابراین نتیجه مورد نظر به‌دست می‌آید.
رابطه (۲۷.۲) نیز مشابه روابط فوق محاسبه می‌شود. □

برهان. رابطه (۳۳.۲):

$$f_{U|(T_۱=t_۱)}(u) = \frac{f_u(-\log(۱-e^{-r_{۱,۱}}))f_{T_۱}(\sum_{i=۲}^{n} -\log(۱-e^{-r_{i,i}}) = t_۱ - u)}{f_{T_۱}(\sum_{i=۱}^{n} -\log(۱-e^{-r_{i,i}}) = t_۱)}$$
$$= (N-۱)\frac{(t_۱-u)^{N-۲}}{t_۱^{N-۱}}.$$

رابطه (۳۴.۲) نیز به همین ترتیب اثبات می‌شود. □

برهان. رابطه (۳۶.۲):
با توجه به رابطه (۲۶.۲) و (۲۷.۲) و استفاده از روابط بین توزیع‌ها داریم:

$$۲\theta_۱ T_۱ \sim \chi^۲_{(۲N)},$$
$$۲\theta_۲ T_۲ \sim \chi^۲_{(۲M)}.$$

همچنین با استفاده از رابطه (۲۲.۲)، $\frac{\theta_۱}{\theta_۲} = \frac{۱-\mathcal{R}}{\mathcal{R}}$. با جایگذاری روابط فوق در (۲۵.۲) و با در نظر گرفتن این نکته که حاصل تقسیم دو توزیع $\chi^۲$ توزیع فیشر می‌شود، رابطه هم توزیعی (۳۶.۲) به‌دست می‌آید. □

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

آماره بسنده کامل ..... Complete sufficient statistic
اریبی ..... Bias
احتمال پوشش ..... Coverage Probability (CP)
آزاد-توزیع ..... Distribution-free
آماره ترتیبی ..... Order statistic
الگوی نرخ خطر متناسب ..... Proportional hazard rate model
الگوی نرخ خطر معکوس متناسب ..... Proportional reversed hazard rate model
بازه‌ی اطمینان ..... Confidence interval (CI)
بقا ..... Survival
بوت استرپ ..... Bootstrap
برآورد ..... Estimation
برآوردگر ..... Estimator
برآوردگر درستنمایی ماکسیمم ..... Maximum likelihood estimator (MLE)
برآورگر نااریب با واریانس به‌طور یکنواخت مینیمم .... Uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE)
برآوردگر نقطه‌ای ..... Point estimator
برآوردگر فاصله‌ای ..... Interval estimator
پارامتر ..... Parameter
تابع چگالی ..... Density function
تابع توزیع احتمال ..... Probability distribution function
تابع چگالی احتمال ..... Probability density function
تابع چگالی احتمال توأم ..... Joint probability density function
تابع نشان‌گر ..... Indicator Function
تابع درستنمایی ..... Likelihood function
تابع جزء صحیح ..... Floor function
تابع چندک ..... Quantile function

تابع گامای کامل . . . . . Complete gamma function
تابع گاما . . . . . Gamma function
تابع مخاطره . . . . . Risk function
تنش-مقاومت . . . . . Stress-Strength
تجربی . . . . . Empirical
توزیع تجمعی . . . . . Cumulative Distribution
توزیع مجانبی . . . . . Asymptotic distribution
توزیع نمایی . . . . . Exponential distribution
توزیع وایبل . . . . . Weibull distribution
خانواده مکان-مقیاس . . . . . Location-Scale family
رکورد . . . . . Record
شاخص . . . . . Characteristic
شبیه‌سازی مونت‌کارلو . . . . . Monte Carlo Simulation
طول مورد انتظار . . . . . Expected Length (EI)
طول عمر . . . . . Life Time
قابلیت اعتماد . . . . . Reliability
کارائی . . . . . Efficiency
مستقل . . . . . Independent
مستقل و هم توزیع . . . . . Independent and identically distributed (iid)
میانگین توان دوم خطا . . . . . Mean squared error (MSE)
نااریب . . . . . Unbiased
نسبی . . . . . Relational
نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار . . . . . Ranked set sample (RSS)
نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی . . . . . Record ranked set sample (RRSS)

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

توزیع مجانبی . . . . . Asymptotic distribution
اریبی . . . . . Bias
بوت استرپ . . . . . Bootstrap
شاخص . . . . . Characteristic
تابع گامای کامل . . . . . Complete gamma function
آماره بسنده کامل . . . . . Complete sufficient statistic
بازه‌ی اطمینان . . . . . Confidence interval (CI)
احتمال پوشش . . . . . Coverage Probability (CP)
توزیع تجمعی . . . . . Cumulative Distribution
تابع چگالی . . . . . Density function
آزاد-توزیع . . . . . Distribution-free
تجربی . . . . . Empirical
کارائی . . . . . Efficiency
برآورد . . . . . Estimation
برآوردگر . . . . . Estimator
طول مورد انتظار . . . . . Expected Length (EI)
توزیع نمایی . . . . . Exponential distribution
تابع جزء صحیح . . . . . Floor function
مستقل . . . . . Independent
مستقل و هم توزیع . . . . . Independent and identically distributed (iid)
تابع نشان‌گر . . . . . Indicator Function
برآوردگر فاصله‌ای . . . . . Interval estimator
تابع چگالی احتمال توأم . . . . . Joint probability density function
طول عمر . . . . . Life Time
تابع درستنمایی . . . . . Likelihood function
خانواده مکان-مقیاس . . . . . Location-Scale family

برآوردگر درستنمایی ماکسیمم ..... Maximum likelihood estimator (MLE)
میانگین توان دوم خطا ..... Mean squared error (MSE)
شبیه‌سازی مونت‌کارلو ..... Monte Carlo Simulation
آماره ترتیبی ..... Order statistic
پارامتر ..... Parameter
تابع توزیع احتمال ..... Probability distribution function
تابع چگالی احتمال ..... Probability density function
الگوی نرخ خطر متناسب ..... Proportional hazard rate model
الگوی نرخ خطر معکوس متناسب ..... Proportional reversed hazard rate model
برآوردگر نقطه‌ای ..... Point estimator
تابع چندک ..... Quantile function
نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار ..... Ranked set sample (RSS)
نسبی ..... Relational
قابلیت اعتماد ..... Reliability
رکورد ..... Record
نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی ..... Record ranked set sample (RRSS)
تابع مخاطره ..... Risk function
تنش-مقاومت ..... Stress-Strength
بقا ..... Survival
نااریب ..... Unbiased
برآورگر نااریب با واریانس به‌طور یکنواخت مینیمم .... Uniformly minimum variance unbiased estimator (UMVUE)
توزیع وایبل ..... Weibull distribution

Abstract

In some experiments, we would like to evaluate the strength of a component against the stress of other variables. Such case in reliability theory is called a stress-strength model. The stress-strength reliability has received considerable attention in branches of sciences such as industry, medicine and engineering. So, this thesis studies point, interval and Bayesian estimations of stress-strength reliability parameter based on record ranked set sampling scheme from the generalized exponential distribution. Also, the record ranked set sampling scheme is compared with ordinary records in case of point and interval estimations under the proportional reversed hazard rate model.

Keywords: Stress-Strength reliability, Proportional reversed hazard rate model, Record ranked set sampling, Record values, Generalized exponential distribution.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Probability

Estimation of the Stress-Strength Reliability Based on Record Ranked Set Sample

By: Amineh Sadeghpour

Supervisor

Ahmad Nezakati

Advisor

Mahdi Salehi

April 2020