

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد هندسه

رده بندی ژئودزیک های متریک ریندلر به وسیله ی آنالیز تقارنی

نگارنده: یگانه پلنگی

استاد راهنما

دکتر سید رضا حجازی

استاد مشاور

دکتر الهام لشکریان

مهر ۱۳۹۹

شماره: ۳۳۸-۲۲-۲
تاریخ: ۱۰/۸/۹۹

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای یگانه پلنگی با شماره دانشجویی ۹۷۰۴۱۸۴ رشته ریاضی محض گرایش هندسه تحت عنوان رده بندی ژئودزیک های متریک ریندلر به وسیله آنالیز تقارنی که در تاریخ ۱۳۹۹/۷/۲۱ با حضور هیأت داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☒ الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰	☐ ب) درجه خیلی خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۸
☐ ج) درجه خوب: نمره ۱۷/۹۹ - ۱۶	☐ د) درجه متوسط: نمره ۱۵/۹۹ - ۱۴
☐ ه) کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد	
نوع تحقیق: ☒ نظری ☐ عملی	

عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استاد راهنمای اول	دکتر سیدرضا حجازی	دانشیار	
۲- استاد راهنمای دوم			
۳- استاد مشاور	دکتر الهام لشکریان	استادیار	
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر سیدرضا موسوی	استادیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر احمد معتمدنژاد	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر الهام دسترنج	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر مهدی قوتمند



تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

سپاس‌گزاری...

نمی‌توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر بر زبانم جاری سازم؛ و سپاس خود را در وصف استادان خویش آشکار نمایم؛ که هر چه گویم و سراپیم، کم گفته‌ام. از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر حجازی بسیار سپاسگزارم؛ چرا که بدون راهنمایی‌هایشان تامین این پایان نامه بسیار مشکل می‌نمود؛ سپاس فراوان از سرکار خانم دکتر لشکریان که زحمت مشاوره پژوهش را در اختیار داشتند؛ و به دلیل یاری‌ها و راهنمایی‌های بی چشم داشتشان بسیاری از سختی‌ها را برایم آسان نمودند. با امید اینکه روزگار توفیق جبران زحمت‌های این عزیزان را از ما دریغ ندارد.

در پایان لازم می‌دانم از تمامی افرادی که بطور مستقیم و غیر مستقیم در به ثمر نشستن این پژوهش مرا مرهون مساعدت و همکاری خود نمودند؛ به ویژه از تک تک اعضای خانواده ام که دعای خیرشان همواره حلال مشکلاتم بوده و در فراز و نشیب این مسیر همواره یار و پشتیبانم بوده و کوتاهی‌ها و تقصیراتم را با بردباری نادیده گرفته اند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم و از درگاه الهی برای کلیه سروران بزرگوار آرزوی توفیق روز افزون داشته باشم.

یگانه پلنگی

مهر ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب یگانه پلنگی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان رده بندی ژئودزیک های متریک ریندر به وسیله ی آنالیز تقارنی ، تحت راهنمایی سید رضا حجازی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “ دانشگاه صنعتی شاهرود “ یا “ Shahrood University of Technology “ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

یگانه پلنگی

مهر ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در فصل اول برخی از پیشنیازها و مفاهیم اولیه هندسه منیفلدها مانند میدان‌های برداری و فضای مماس، تانسورها، فرم‌های دیفرانسیل، گروه‌های لی و... معرفی شده است. فصل دوم به مفاهیم هندسه ریمانی مانند اتصال‌ها، ژئودزیک‌ها و... اختصاص یافته است. ناوردایی بی‌نهایت کوچک، دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل، تقارن‌ها و آنالیز تقارنی در فصل سوم بیان شده است. موضوع اصلی پایان‌نامه یعنی طبقه‌بندی ژئودزیک‌های متریک ریندلر در فصل چهارم تبیین شده است.

کلمات کلیدی: میدان‌های برداری، گروه‌های لی، منیفلدهای ریمانی، فضای مینکوفسکی، امتداد، فضا-زمان ریندلر.

فهرست مطالب

ق	پیشگفتار	
۱	پیشنیازها و مفاهیم اولیه	۱
۱	۱.۱ منیفلد	۱
۳	۲.۱ میدان‌های برداری و بردارهای مماس	۳
۹	۳.۱ تانسور	۹
۱۲	۴.۱ فرم دیفرانسیلی	۱۲
۱۳	۵.۱ دیفرانسیل خارجی	۱۳
۱۶	۶.۱ گروه لی	۱۶
۲۳	۲ هندسه ریمانی	۲۳
۲۳	۱.۲ متریک ریمانی	۲۳
۲۵	۲.۲ اتصال‌ها	۲۵
۲۷	۳.۲ ژئودزیک‌ها	۲۷
۲۸	۴.۲ تاب	۲۸
۳۲	۵.۲ خمیدگی	۳۲
۳۷	۳ ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل	۳۷
۳۷	۱.۳ عمل گروه و ناوردایی بی‌نهایت کوچک	۳۷
۳۸	۲.۳ گروه تبدیلات یک-پارامتری	۳۸
۳۸	۳.۳ تبدیلات و توابع و امتداددهی	۳۸
۴۰	۴.۳ دستگاه معادلات دیفرانسیل	۴۰
۴۰	۵.۳ امتداد میدان‌های برداری و تقارن‌ها	۴۰
۵۱	۴ فضا-زمان ریندلر	۵۱
۵۳	۱.۴ معرفی فضا-زمان ریندلر	۵۳
۵۴	۲.۴ ژئودزیک‌های متریک ریندلر	۵۴

۳.۴	رده بندی ژئودزیکهای متریک ریندلر	۶۱
	مراجع	۶۵
	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی	۶۹
	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	۷۱
	نمایه	۷۴

پیشگفتار

یکی از مهم‌ترین شاخه‌های ریاضیات هندسه دیفرانسیل می‌باشد که کاربردهای بسیار وسیعی در علوم مختلف از قبیل مهندسی، فیزیک، آمار، شیمی، زیست‌شناسی و ... دارد [۸، ۱]. امروزه با گسترش مرزهای دانش رشته‌های مختلف علوم آنچنان در هم تنیده شده‌اند که نمی‌توان مرزهای مشخصی بین آن‌ها تعریف کرد. برخی از رویدادهای طبیعی که تحلیل و بررسی آن‌ها در آزمایشگاه ممکن نیست، نیازمند ابزاری هستند که به توصیف دقیق آن‌ها بپردازد. چنین اتفاقاتی در فیزیک به خصوص شاخه نظری آن بسیار زیاد است. از جمله پدیده‌های کیهان‌شناسی که در ابعاد نجومی رخ می‌دهند در این گروه قرار می‌گیرند. هندسه دیفرانسیل ابزار بسیار دقیق و قدرتمندی دارد که می‌توان در این میان به کار آمده و نقیصه‌های موجود را برطرف سازد.

هر اتفاق طبیعی که در عالم رخ می‌دهد اغلب با یک دستگاه معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شود که جواب‌های آن اولین مسئله‌ای است که مورد توجه علاقمندان قرار می‌گیرد. یافتن جواب‌های یک دستگاه معادلات دیفرانسیل بسته به نوع آن (خطی، غیرخطی، ODE ، PDE ، ...) از روش‌های متنوعی پیروی می‌کند و اصولاً نمی‌توان روشی واحد برای همه آن‌ها ارائه کرد. هندسه دیفرانسیل در مبحثی به عنوان آنالیز تقارنی معادلات دیفرانسیل تا حدود بسیار زیادی این مشکل را حل می‌کند. مفهوم فضا-زمان در فیزیک اهمیت بسیاری دارد به طوریکه این دو موجود را از هم جدا ناشدنی می‌داند. مدل‌های مختلفی برای فضا-زمان در طول دوران ارائه شده است مانند فضا-زمان شوارتزچیلد^۱، کر-نیومن^۲، ریزنر-نوردا شتروم^۳، کوتلر^۴، بولرت^۵ و ... نام برد [۱۲]. اولین بار پیش از میلاد مسیح فیلون اسکندری می‌گوید: ”زمان زاییده جهان است، خدا جهان را خلق کرد و آن منجر به ایجاد زمان شد، همزمان با خلق جهان یا بلافاصله پس از آن.“

قوم اینکا زمان و مکان را به عنوان یک مفهوم واحد در نظر می‌گرفتند و آن را پاشا می‌نامیدند. بومیان ساکن رشته کوه آند نیز همچنان براین باور پایدار مانده‌اند. ریاضیدانان و

¹Schwarzschild space-time

²Kerr-Newman space-time

³Reissner-Nordstrom space-time

⁴Kottler space-time

⁵Bollert space-time

فیزیکدانان بزرگی تا کنون به توسعه این مفهوم همت گماشته‌اند از جمله دالامبر^۱، لاگرانژ^۲، همیلتون^۳، ماکسول^۴ و به خصوص ماکسول از معادلات دیفرانسیل جزئی برای گسترش الکتروپوینامیک در چهار بعد فضا-زمان استفاده کرد. به طور کلی فضا-زمان نتیجه‌ای از نسبیت خاص است اما زبان ریاضی آن توسط مینکوفسکی^۵ بیان شد. مفهوم فضای مینکوفسکی اولین نمایش رفتار فضا-زمان به عنوان دو نمود مختلف از مفهوم یکپارچه بیان شد. اندیشه مینکوفسکی سبب شد که به هر دو نسبیت خاص و عام بیشتر از دید هندسی نگاه شود.

یکی از مهمترین فضا-زمان‌ها، فضا-زمان ریندلر است که توسط ولفگانگ ریندلر^۶ معرفی شد. این دستگاه مختصات یک چارچوب مرجع شتابدار با شتاب ثابت را در فضای مینکوفسکی نمایش می‌دهد. در نسبیت خاص هر ذره با شتاب ثابت و حرکت هایپربولیک را می‌توان در مختصات ریندلر توصیف کرد.

هدف ما در این پایان‌نامه طبقه‌بندی ژئودزیک‌های این دستگاه مختصات بر اساس آنالیز تقارنی آن است. یعنی با نوشتن معادلات ژئودزیک و یافتن تقارن‌های آن، طی فرآیندی که در فصل چهارم خواهیم دید ژئودزیک‌های این مختصات را رده‌بندی خواهیم کرد. غالب اصلی این تحقیق به این صورت بنا شده است که در فصل اول مفاهیم بنیادی هندسه دیفرانسیل روی منیفلدها را معرفی خواهیم کرد. دسته‌ای خاص از منیفلدها که از آن به منیفلدهای ریمان یاد می‌شود در فصل دوم توصیف می‌شوند. همچنین در این فصل فضای مینکوفسکی تعریف شده است. در فصل سوم ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل و الگوریتم لی برای یافتن تقارن‌های نقطه‌ای معادلات دیفرانسیل ارائه می‌شود. در انتها و در فصل چهارم با معرفی فضا-زمان ریندلر و ژئودزیک‌های آن، بر اساس الگوریتم فصل سوم ژئودزیک‌ها را دسته‌بندی خواهیم کرد.

¹Jean le Rond D'Alembert

²Joseph Louis Lagrange

³William Hamilton

⁴James Clerk Maxwell

⁵Heremann Minkowski

⁶Wolfgang Rindler

فصل ۱

پیشنیازها و مفاهیم اولیه

۱.۱ منیفلد

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم M یک فضای توپولوژیک باشد. M را یک منیفلد توپولوژیکی n -بعدی می‌گوییم اگر:

۱. هاسدورف باشد، یعنی هر دو نقطه $p, q \in M$ به ترتیب مشمول در زیر مجموعه‌های باز $U, V \subset M$ باشد، به طوریکه:

$$U \cap V = \emptyset$$

۲. شمارای نوع دوم باشد، یعنی پایه‌ای شمارا داشته باشد.

۳. M به طور موضعی اقلیدسی از بعد n باشد، یعنی هر نقطه از M مانند p درون یک مجموعه باز مانند $U \subset M$ باشد که این مجموعه با یک مجموعه باز از $\mathbb{R}^n$ همومورف است.

تعریف ۲.۱.۱. تابع همئومورفیسم $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ را یک دستگاه مختصات (چارت مختصات) می‌گوییم و آن را با (U, φ) نشان می‌دهیم. فرض کنیم (U, φ) یک چارت روی منیفلد n -بعدی M باشد، برای هر $p \in U$ داریم:

$$\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)),$$

به طوریکه توابع $x^i : u \rightarrow \mathbb{R}$ ، را مؤلفه‌های مختصاتی می‌گوییم.

تعریف ۳.۱.۱. نگاشت $F : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ را هموار (C^∞) می‌گوییم، اگر مشتقات جزئی F از هر مرتبه موجود و پیوسته باشد.

تعریف ۴.۱.۱. نگاشت $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ را دیفئومورفیسم از نوع C^∞ یا هموار می‌گوییم، هرگاه F^{-1} و F هموار باشند.

شرط لازم برای دیفئومورفیسم بودن F همئومورفیسم بودن آن است زیرا لازمه مشتق پذیری، پیوستگی است.

در ادامه هرجا صحبت از هموار بودن یا دیفئومورفیسم بود، منظور از نوع C^∞ است.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم M یک منیفلد توپولوژیکی و (U, φ) و (V, ψ) دو چارت مختصاتی همپوش $(U \cap V \neq \emptyset)$ روی M باشند آنگاه نگاشت

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V),$$

را نگاشت گذر از φ به ψ می‌نامیم. دو چارت فوق را به طور هموار سازگار می‌نامیم هرگاه، نگاشت گذر بین آن‌ها دیفئومورفیسم باشد.

تعریف ۶.۱.۱. مجموعه‌ی $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ متشکل از چارت‌های همپوش منیفلد توپولوژیکی $-n$ بعدی M را یک اطلس هموار برای منیفلد M می‌گوییم هرگاه:

۱. دامنه‌ی اعضای $\mathcal{A}$ ، M را بپوشاند.

۲. اعضای $\mathcal{A}$ ، دو به دو به طور هموار سازگار باشند.

تعریف ۷.۱.۱. منیفلد توپولوژیکی $-n$ بعدی M مجهز به یک اطلس هموار را یک منیفلد هموار $-n$ بعدی می‌گوییم.

تعریف ۸.۱.۱. نگاشت $F : M \rightarrow N$ بین دو منیفلد هموار M و N را هموار می‌گوییم، هرگاه هر نقطه از M مانند p درون یک چارت مثل (U, φ) و تصویر آن یعنی $F(p)$ درون یک چارت مثل (V, ψ) باشد، به طوریکه نگاشت

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V),$$

هموار باشد. $F : M \rightarrow N$ را دیفئومورفیسم می‌گوییم اگر F و F^{-1} هموار باشند.

تعریف ۹.۱.۱. تابع $F : M \rightarrow N$ را موضعاً هموار می‌گوییم اگر F روی هر زیرمجموعه باز M مثل U باشد.

لم ۱.۱.۱. هر نگاشت هموار بین دو منیفلد پیوسته است.

۳ میدان‌های برداری و بردارهای مماس

برهان. فرض کنیم $F : M \rightarrow N$ هموار، (U, φ) یک چارت از M و (V, ψ) یک چارت از N باشد. طبق تعریف همواری $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ هموار است چون $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ در فضای اقلیدسی هموار است یعنی حتماً پیوسته می‌باشد. از طرفی می‌دانیم ترکیب توابع پیوسته، پیوسته است بنابراین:

$$\psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi = Id_V \circ F \circ Id_U = F,$$

□ پیوسته است که نشان می‌دهند F یک نگاشتی پیوسته است.

لم ۲.۱.۱. ترکیب دو نگاشت هموار بین منیفلدها، هموار است.

برهان. فرض کنیم $F : M \rightarrow N$ و $G : N \rightarrow P$ دو نگاشت هموار باشند. می‌خواهیم ثابت کنیم $G \circ F : M \rightarrow P$ هموار است. فرض کنیم (U, φ) یک چارت از M و (V, ψ) یک چارت از N و (W, η) یک چارت از P باشد، از همواری F نتیجه می‌شود $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ هموار است و از همواری G نتیجه می‌شود $\eta \circ G \circ \psi^{-1}$ هموار است، در نتیجه ترکیب

$$(\eta \circ G \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = \eta \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1},$$

همواری نگاشت $G \circ F$ را نتیجه می‌دهد.

□

۲.۱ میدان‌های برداری و بردارهای مماس

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنیم $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ مجموعه کلیه توابع هموار حقیقی مقدار روی $\mathbb{R}^n$ باشد. نگاشت خطی $\mathbf{v} : C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ را یک مشتق در نقطه $a \in \mathbb{R}^n$ می‌نامیم، هرگاه به ازای هر $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\mathbf{v}(f \cdot g)(a) = g(a) \cdot \mathbf{v}f(a) + f(a) \cdot \mathbf{v}g(a).$$

قرار می‌دهیم:

$$T_a \mathbb{R}^n = \{ \mathbf{v} : \mathbf{v} \text{ یک عملگر مشتق در نقطه } a \text{ روی } \mathbb{R}^n \text{ است.} \},$$

به $T_a \mathbb{R}^n$ فضای مماسی $\mathbb{R}^n$ گفته می‌شود.

لم ۱.۲.۱. فرض کنیم $(x^1, \dots, x^n)$ یک دستگاه مختصات استاندارد بر فضای $\mathbb{R}^n$ و a نقطه‌ای در $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت بردارهای مماس $\{ \frac{\partial}{\partial x^1} |_a, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} |_a \}$ یک پایه برای فضای مماس $T_a \mathbb{R}^n$ می‌باشد.

□

برهان. [۸]

پس هر عملگر مشتق دلخواهی در $T_a \mathbb{R}^n$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{X} = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x^1} |_a + \cdots + \alpha_n \frac{\partial}{\partial x^n} |_a,$$

که در آن α_i ها ضرایب ثابت می‌باشند.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار $p \in M$ و $C^\infty(M)$ مجموعه کلیه توابع هموار حقیقی مقدار روی M باشد. نگاشت خطی $\mathbf{v} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ را یک عملگر مشتق در نقطه p از منیفلد M می‌گوییم، هرگاه در شرایط زیر صدق کند،

$$\bullet \quad \mathbf{v}(c \cdot f)(p) = c \cdot \mathbf{v}f(p),$$

$$\bullet \quad \mathbf{v}(f + g)(p) = \mathbf{v} \cdot f(p) + \mathbf{v} \cdot g(p)$$

$$\bullet \quad \mathbf{v}(f \cdot g)(p) = g(p) \cdot \mathbf{v}(f)(p) + f(p) \cdot \mathbf{v}(g)(p)$$

قرار می‌دهیم:

$$T_p M = \{ \mathbf{v} : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R} : \mathbf{v} \text{ عملگر مشتق در نقطه } p \in M \text{ است} \},$$

در این صورت به $T_p M$ فضای مماسی منیفلد M در نقطه $p \in M$ گفته می‌شود.

تعریف ۳.۲.۱. اگر $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار بین دو منیفلد M و N باشد، آنگاه به ازای هر $p \in M$ نگاشت

$$F_{*p} = dF_p : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$$

را نگاشت مشتق یا نگاشت پیش برنده F می‌گوییم. به ازای هر $f \in C^\infty(N)$ و $X_p \in T_p M$ ضابطه نگاشت پیش برنده به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$(F_{*p} X) f := X_p(f \circ F). \quad (1.1)$$

گزاره ۱.۲.۱. اگر $G : N \rightarrow P$ و $F : M \rightarrow N$ دو نگاشت هموار باشند، آنگاه $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$ برهان.

$$\begin{aligned} (G \circ F)_{*p} X f &= X_p(f \circ (G \circ F)) \\ &= X_p((f \circ G) \circ F) \\ &= (F_{*p} X)(f \circ G) \\ &= (G_{*F(p)} F_{*p} X) f \\ &= (G_{*F(p)} \circ F_{*p}) X f. \end{aligned}$$

□

تعریف ۴.۲.۱. فرض می‌کنیم M یک منیفلد هموار و U یک زیر مجموعه M باشد نگاشت $i : U \hookrightarrow M$ را که با ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود، نگاشت شمول از U به M می‌گوییم:

$$\begin{cases} i : U \hookrightarrow M \\ p \mapsto p. \end{cases}$$

تعریف ۵.۲.۱. فرض می‌کنیم M یک منیفلد هموار و U یک زیر مجموعه باز آن باشد. اگر U با اطلس روی M خود یک منیفلد باشد، آنگاه U را یک زیر منیفلد باز M می‌گوییم.

لم ۲.۲.۱. هر زیرمجموعه باز از یک منیفلد توپولوژی n -بعدی، خودش هم یک منیفلد توپولوژیکی n -بعدی است.

بعد هر زیر منیفلد باز، با بعد منیفلد اصلی برابر است.

مثال ۱.۲.۱. یک گوی باز در فضای $\mathbb{R}^3$ ، خود یک زیر منیفلد باز $\mathbb{R}^3$ می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۱. فرض کنیم U یک زیر منیفلد باز M و $i : U \hookrightarrow M$ نگاشت شمول باشد. در این صورت برای هر $p \in M$ نگاشت $i_{*p} : T_p U \rightarrow T_p M$ ایزومورفیسم است.

□

برهان. [۸]

گزاره ۲.۲.۱. اگر $F : M \rightarrow N$ دیفیئومورفیسم موضعی باشد، آنگاه $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ایزومورفیسم است.

□

برهان. [۸]

تعریف ۶.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار و (U, φ) یک چارت روی M باشد. چون $\varphi : U \rightarrow \tilde{U}$ یک دیفیئومورفیسم است، بنابراین طبق گزاره (۲.۲.۱)، $\varphi_{*p} : T_p U \rightarrow T_{\varphi(p)} \mathbb{R}^n$ ایزومورفیسم است و می‌دانیم که هر ایزومورفیسمی وارون دارد، بنابراین تعریف می‌کنیم:

$$\varphi_{*p}^{-1} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_{\varphi(p)} = \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p,$$

در نتیجه اگر M یک منیفلد هموار با چارت $(x^1, \dots, x^n)$ در نقطه p باشد، آنگاه پایه فضای $T_p M$ عبارتست از $\left\{ \left. \frac{\partial}{\partial x^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial x^n} \right|_p \right\}$.

گزاره ۳.۲.۱. اگر M یک منیفلد n -بعدی باشد، آنگاه فضای مماسی $T_p M$ یک فضای برداری n -بعدی است.

□

برهان. [۸]

تعریف ۷.۲.۱. اجتماع مجزای $T_p M$ یعنی،

$$\bigsqcup_{p \in M} T_p M = TM,$$

را کلاف مماسی منیفلد M می‌گوییم.

قضیه ۲.۲.۱. اگر M یک منیفلد هموار $-n$ بعدی باشد، آنگاه TM یک منیفلد هموار $-2n$ بعدی است، به طوری که نگاشت $\pi : TM \rightarrow M$ با ضابطه $(p, x) \mapsto p$ هموار است.

برهان. [۸] $\square$

تعریف ۸.۲.۱. یک برش مانند $X : M \rightarrow TM$ از نگاشت $\pi : TM \rightarrow M$ را یک میدان برداری می‌گوییم. مجموعه میدان‌های برداری روی منیفلد هموار M را با نماد $\chi(M)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۹.۲.۱. فرض کنیم $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد و $X \in \chi(M)$. اگر یک میدان برداری مانند $Y \in \chi(N)$ به گونه‌ای موجود باشد که $F_{*p} = Y_{F(p)}$ ، آنگاه X و Y را F مرتبط می‌گوییم.

تعریف ۱۰.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار و $X, Y \in \chi(M)$ باشد. اگر f یک تابع هموار روی M باشد، عملگر $[X, Y] : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ، را کروسه لی روی دو میدان برداری X و Y می‌گوییم که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= XYf - YXf \\ &= (XY - YX)f. \end{aligned}$$

لم ۳.۲.۱. کروسه لی دو میدان برداری X و Y یک میدان برداری است.

برهان. برای توابع هموار و دلخواه $f, g \in C^\infty(M)$ داریم:

$$\begin{aligned} [X, Y](af + bg) &= (XY - YX)(af + bg) \\ &= XY(af + bg) - YX(af + bg) \\ &= XY(af) + XY(bg) - YX(af) - YX(bg) \\ &= axY(f) + bxY(g) - aYX(f) - bYX(g) \\ &= a(XY - YX)f + b(XY - YX)g \\ &= a[X, Y]f + b[X, Y]g, \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

از رابطه (۲.۱) نتیجه می‌گیریم که کروسه خطی است.

$$\begin{aligned} [X, Y](fg) &= XY(f \cdot g) - YX(f \cdot g) \\ &= X(g \cdot Y \cdot f + fY \cdot g) - Y(g \cdot X \cdot f + fX \cdot g) \\ &= X(g \cdot Y \cdot f) + X(f \cdot Y \cdot g) - Y(g \cdot X \cdot f) - Y(f \cdot X \cdot g) \\ &= YfXg + gXYf + YgXf + fXYg - XfYg - gYXf - XgYf - fYXg \\ &= f(XY - YX)g + g(XY - YX)f \\ &= f[X, Y]g + g[X, Y]f, \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

و همچنین از (۳.۱) نتیجه می‌گیریم که کروشه لی در قاعده لایبنیتز صدق می‌کند. $\square$

تعریف ۱۱.۲.۱. اگر M یک منیفلد هموار باشد، آنگاه عملگر کروشه لی روی مجموعه میدان‌های برداری M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\cdot, \cdot] : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M),$$

$$(X, Y) \mapsto [X, Y] = XY - YX.$$

گزاره ۴.۲.۱. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد. برای میدان‌های برداری $X, Y, Z \in \chi(M)$ ، کروشه لی در خواص زیر صدق می‌کند:

۱. برای هر $a, b \in \mathbb{R}$ دو-خطی است:

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$

$$[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z],$$

$$[aX, Y] = [X, aY] = a[X, Y].$$

۲. پاد متقارن است:

$$[X, Y] = -[Y, X].$$

۳. در اتحاد ژاکوبی صدق می‌کند:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

۴. برای هر $f, g \in C^\infty(M)$ داریم:

$$[fX + gY, Z] = f[X, Z] + g[Y, Z] + (fXg)Y - (gYf)X.$$

برهان. با توجه به تعریف کروشه لی می‌توان ثابت کرد. $\square$

تعریف ۱۲.۲.۱. فرض کنیم $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار بین دو منیفلد $-m$ بعدی و $-n$ بعدی باشند. رتبه F در نقطه $p \in M$ برابر با رتبه نگاشت $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ است. رتبه این نگاشت همان رتبه ژاکوبین نگاشت F است. بنابراین:

$$\text{rank} F \leq \min\{\dim M, \dim N\}.$$

تعریف ۱۳.۲.۱. نگاشت هموار $F : M \rightarrow N$ دارای رتبه ثابت k است هرگاه به ازای هر $p \in M$ ، $\text{rank} F(p) = k$.

تعریف ۱۴.۲.۱. نگاشت هموار $F : M \rightarrow N$ یک ایمرزن است، اگر $\text{rank} F = \dim M$. به این معنا که به ازای هر $p \in M$ ، $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ یک به یک باشد.

تعریف ۱۵.۲.۱. نگاشت هموار $F : M \rightarrow N$ یک سابمرژن است، اگر $\text{rank} F = \dim N$. به این معنا که به ازای هر $p \in M$ $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ پوشا باشد.

مثال ۲.۲.۱. رتبه نگاشت $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $F(t) = (\cos t, \sin t)$ در تمام نقاط ثابت، برابر با بعد دامنه یعنی ۱ است، زیرا ژاکوبین آن یعنی:

$$J_F = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix},$$

در هر نقطه $t \in \mathbb{R}$ دارای رتبه یک است.

مثال ۳.۲.۱. رتبه نگاشت $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه $F(x, y) = (3x - 2y, -x + 4y)$ در تمام نقاط ثابت، برابر با بعد دامنه و برد است و هم ایمرژن و هم سابمرژن است زیرا ژاکوبین آن یعنی:

$$J_F = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

دارای رتبه ۲ است.

مثال ۴.۲.۱. رتبه نگاشت $F : \mathbb{R}^3 - \{(\circ, \circ, \circ)\} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ در تمام نقاط ثابت، برابر با بعد برد یعنی ۱ و یک نگاشت ایمرژن است زیرا ژاکوبین آن به صورت زیر تعریف می شود:

$$J_F = (2x \quad 2y \quad 2z).$$

تعریف ۱۶.۲.۱. نگاشت هموار $F : M \rightarrow N$ را یک ایمبدینگ می گوئیم اگر F ایمرژن و همئومورفیسم باشد. چون F یک ایمبدینگ است بنابراین طبق تعریف همئومورفیسمی باید: $\dim M = \dim N$ باشد. اصطلاحاً می گوئیم $F(M)$ در N ایمبد شده یا F یک ایمبدینگ است.

قضیه ۳.۲.۱ (قضیه تابع معکوس در منیفلدها). فرض کنیم $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار بین دو منیفلد همبعد M و N باشد. اگر به ازای هر $p \in M$ نگاشت $F_{*p} : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N$ ایزومورفیسم باشد، آنگاه مجموعه بازی مانند U حول p و مجموعه بازی مانند V حول $F(p)$ وجود دارد که $F|_{U_\circ} : U_\circ \rightarrow V_\circ$ دیفئومورفیسم است.

برهان. فرض کنیم F هموار است. در اینصورت به ازای هر $p \in M$ چارتی مانند (U, φ) حول p و چارتی مانند (V, ψ) حول $F(p)$ وجود دارد که $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ هموار است. چون φ و ψ دیفئومورفیسم هستند بنابراین φ_{*p} و $\psi_{*F(p)}$ ایزومورفیسم هستند، بنابراین

$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) = \psi_{*F(p)} \circ F_{*p} \circ \varphi_{*p}^{-1} = \widehat{F_{*p}}_{\varphi_p}$ می دانیم که یک همسایگی باز مانند $\tilde{U}$ حول $\varphi(p)$ و یک همسایگی مانند $\tilde{V}$ حول $F(\varphi(p))$ وجود دارد که $\hat{F}|_{\tilde{U}_\circ} : \tilde{U}_\circ \rightarrow \tilde{V}_\circ$ دیفئومورفیسم است. حال $\varphi^{-1}(\tilde{U}_\circ) = U_\circ$ و $\psi^{-1}(\tilde{V}_\circ) = V_\circ$ را قرار می دهیم، بنابراین چون $\hat{F}|_{\tilde{U}_\circ}$ دیفئومورفیسم است، پس $F|_{U_\circ} : U_\circ \rightarrow V_\circ$ هم دیفئومورفیسم است. $\square$

قضیه ۴.۲.۱ (قضیه رتبه در منیفلدها). فرض کنیم M و N به ترتیب دو منیفلد هموار m -بعدی و n -بعدی بوده و $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار با رتبه ثابت k باشد، در این صورت به ازای هر $p \in M$ چارتی مانند (U, φ) با مولفه‌های $(x^1, \dots, x^m)$ و به ازای هر $F(p)$ چارتی مانند (V, ψ) با مولفه‌های $(y^1, \dots, y^n)$ موجودند که:

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m) = (y^1, \dots, y^k, \circ, \dots, \circ).$$

برهان. [۸] □

نتیجه ۱.۲.۱. اگر $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار با رتبه ثابت k باشد، در این صورت بعد تصویر F برابر با k است.

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنیم M یک زیرمنیفلد k -بعدی $\mathbb{R}^m$ باشد، در این صورت اگر $(x^1, \dots, x^m)$ یک چارت برای $\mathbb{R}^m$ باشد، چارت روی M را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) : x^{k+1} = \dots = x^m = \circ\}.$$

تعریف ۱۸.۲.۱. اگر $U \subset \mathbb{R}^m$ باز باشد، یک k -برش مانند U در M زیر مجموعه‌ای مانند S است که S به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = \{(x^1, \dots, x^k, x^{k+1}, \dots, x^m) : x^{k+1} = \dots = x^m = \circ\}.$$

بنابراین S با یک زیر مجموعه باز از $\mathbb{R}^k$ هم‌مورف است.

تعریف ۱۹.۲.۱ (زیر منیفلد منظم). فرض کنیم S یک زیرمنیفلد M باشد. S را یک زیر منیفلد k -بعدی ایمبد شده از M می‌گوییم، اگر هر نقطه از S مانند p درون یک چارت از M مانند (U, φ) باشد که $U \cap S$ یک k -برش از U باشد. به چارت (U, φ) یک چارت برشی برای S می‌گوییم. همچنین به مقدار عددی $\dim M - \dim S$ بعد نقصان S در M می‌گوییم.

تعریف ۲۰.۲.۱. فرض کنیم $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار و $c \in M$ باشد. مجموعه

$$F^{-1}(c) = \{p \in M : F(p) = c\},$$

یک مجموعه تراز نگاشت F است.

۳.۱ تانسور

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنیم $V_1, \dots, V_k$ و W فضاهای برداری باشند. نگاشت $F : V_1 \times \dots \times V_k \rightarrow W$ را یک نگاشت k -خطی می‌گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$F(v_1, \dots, a v_i + b v'_i, \dots, v_k) = a F(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + b F(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k).$$

تعریف ۲.۳.۱. اگر V یک فضای برداری k -بعدی باشد، آنگاه نگاشت k -خطی $F : \underbrace{V_1 \times \cdots \times V_k}_{k\text{-بار}} \rightarrow \mathbb{R}$ را یک k -تانسور کواریان (یا یک تانسور از نوع $\binom{k}{0}$) می‌گوییم.

تعریف ۳.۳.۱. مجموعه تمام k -تانسور کواریان روی فضای برداری n -بعدی را با $T^k(V)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۳.۱. فرض کنیم $S, T \in T^k(V)$ در این صورت داریم:

$$(aT)(V_1, \dots, V_k) = aT(V_1, \dots, V_k),$$

$$(T + S)(V_1, \dots, V_k) = T(V_1, \dots, V_k) + S(V_1, \dots, V_k),$$

بنابراین $T^k(V)$ خود نیز یک فضای برداری می‌باشد.

تعریف ۵.۳.۱. اگر V یک فضای برداری و $S \in T^k(V)$ و $T \in T^l(V)$ در این صورت ضرب تانسوری S و T را که با نماد $S \otimes T$ نشان می‌دهیم، یک $(k+l)$ -تانسور کواریان روی V است که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$S \otimes T : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-بار}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{l\text{-بار}} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(S \otimes T)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_{k+l}) = S(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) \cdot T(\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_{k+l}).$$

تعریف ۶.۳.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری n -بعدی باشد بنابراین V یک پایه به صورت $\{e_1, \dots, e_n\}$ دارد.

دوگان فضای برداری V را که با V^* نشان می‌دهیم، یک فضای برداری n -بعدی با پایه $\{\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n\}$ است، به طوریکه:

$$\varepsilon^i(e_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

تعریف ۷.۳.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری n -بعدی باشد، به نگاشت k -خطی $F : V^* \times \cdots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$ یک k -تانسور کنتراواریان (یا یک تانسور از نوع $\binom{0}{k}$) می‌گوییم.

تعریف ۸.۳.۱. مجموعه تمام k -تانسورهای کنتراواریان را با $T_k(V)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۳.۱. ضرب و جمع تانسورهای کنتراواریان دقیقاً مانند تانسورهای کواریان تعریف می‌شود.

تعریف ۱۰.۳.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری n -بعدی باشد، به نگاشت $(k+l)$ -خطی $F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k\text{-بار}} \times \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l\text{-بار}} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تانسور آمیخته از نوع $\binom{k}{l}$ می‌گوییم و آن را با $T_l^k(V)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۱.۳.۱. اگر در تعریف تانسورهای روی فضای برداری به جای V ، فضای مماس بر منیفلد هموار M در نقطه p را قرار دهیم در این صورت مفاهیم تانسور، به تانسور روی منیفلدها تعمیم می‌یابد.

یعنی اگر M یک منیفلد هموار و $p \in M$ ، آنگاه به:

$$F : \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{k\text{-بار}} \rightarrow \mathbb{R},$$

یک k -تانسور کواریان روی M در نقطه‌ی p ،

$$F : \underbrace{T_p^* M \times \cdots \times T_p^* M}_{l\text{-بار}} \rightarrow \mathbb{R},$$

یک k -تانسور کنترآواریان روی M در نقطه‌ی p و

$$F : \underbrace{T_p M \times \cdots \times T_p M}_{k\text{-بار}} \times \underbrace{T_p^* M \times \cdots \times T_p^* M}_{l\text{-بار}} \rightarrow \mathbb{R},$$

یک تانسور از نوع $\binom{k}{l}$ روی M در نقطه p گفته می‌شود.

قضیه ۱.۳.۱. اگر M یک منیفلد هموار و $p \in M$ باشد آنگاه $T_p^* M$ را که فضای هم‌مماس M در نقطه p می‌گوییم یک فضای برداری هم‌بعد با M است که به وسیله صورت‌های دیفرانسیلی $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ تولید می‌شود.

□

برهان. [۸]

بنابراین براساس تعریف k -تانسور اگر M یک منیفلد هموار، $p \in M$ باشد آنگاه یک k -تانسور کواریان مانند T روی M به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n T_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k}.$$

در نمایش فوق $T_{i_1, \dots, i_k}$ یک تابع هموار حقیقی مقدار روی منیفلد M است.

تعریف ۱۲.۳.۱. اگر M یک منیفلد هموار و (x^i) یک چارت حول نقطه p از منیفلد M باشد، آنگاه:

$$T = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n T^{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_k}},$$

k -تانسور کنترآواریان روی M در نقطه‌ی p است، و

$$T = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ j_1, \dots, j_l=1}}^n T^{j_1, \dots, j_l}_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_k} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_l}},$$

یک تانسور از نوع $\binom{k}{l}$ روی منیفلد M در نقطه p است.

۴.۱ فرم دیفرانسیلی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنیم T یک k -تانسور کواریان روی منیفلد M باشد. T را متناوب می‌گوییم اگر داشته باشیم:

$$T(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_k) = -T(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_k).$$

تعریف ۲.۴.۱. مجموع تمام تانسورهای متناوب روی M را با $\Lambda^k(M)$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۳.۴.۱. اگر ω و η به ترتیب یک k -تانسور و یک l -تانسور متناوب روی منیفلد M باشد، ضرب وج به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega \wedge \eta = \frac{(k+l)!}{k!l!} \text{Alt}(\omega \otimes \eta).$$

تعریف ۴.۴.۱. اگر V یک فضای برداری با بعد متناهی باشد، نگاشت $\text{Alt} : T^k(V^*) \rightarrow \Lambda^k(V^*)$ را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\text{Alt}(T) = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma} (\text{sgn} \sigma) T(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}),$$

که σ تمام جایگشت‌های ممکن روی k -تایی $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ است.

تعریف ۵.۴.۱. اگر M یک منیفلد هموار باشد، در این صورت هر تانسور متناوب روی M تعریف شده با ضرب تانسوری وج را یک فرم دیفرانسیلی روی M می‌گوییم بنابراین k -فرم دیفرانسیلی را می‌توان به صورت زیر نمایش دهیم:

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

به طوریکه $\omega_{i_1, \dots, i_k} \in C^\infty(M)$.

تعریف ۶.۴.۱. مجموعه تمام k -فرم‌های دیفرانسیلی روی M را با $\Omega^k(M)$ نشان می‌دهیم.

گزاره ۱.۴.۱ (ویژگی‌های ضرب وج). فرض کنیم θ, η, ω فرم‌های دیفرانسیلی روی M و $a, b \in \mathbb{R}$ باشند، آنگاه:

• توزیع پذیری روی جمع:

$$(a\omega + b\eta) \wedge \theta = a\omega \wedge \theta + b\eta \wedge \theta,$$

$$\omega \wedge (a\eta + b\theta) = a\omega \wedge \eta + b\omega \wedge \theta.$$

• شرکت پذیر است:

$$\omega \wedge (\eta \wedge \theta) = (\omega \wedge \eta) \wedge \theta.$$

• تعویض ناپذیر است: یعنی اگر $\omega \in \Omega^k(M)$ و $\eta \in \Omega^l(M)$ باشد، آنگاه:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega.$$

□

برهان. با استفاده از تعریف ضرب وج قابل اثبات است.

مثال ۱.۴.۱. فرض کنیم $M = \mathbb{R}^3$ باشد، در این صورت:

$$\omega = xz \, dy \wedge dx - z^2 \, dx \wedge dz,$$

$$\eta = (x^2 - y) \, dx + xz \, dy + x^3 \, dz,$$

به ترتیب یک ۲-فرم و یک ۱-فرم دیفرانسیلی روی $\mathbb{R}^3$ هستند. ضرب این دو فرم دیفرانسیلی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= x^4 z \, dy \wedge dx \wedge dy \\ &= -x^4 z \, dx \wedge dy \wedge dz + xz^3 \, dx \wedge dy \wedge dz \\ &= (-x^4 z + xz^3) \, dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\omega \wedge \eta = (-x^4 z + xz^3) \, dx \wedge dy \wedge dz.$$

نکته ۱.۴.۱. اگر M یک منیفلد n بعدی باشد، آنگاه هر فرم دیفرانسیلی با مرتبه بیشتر از n روی M صفر است.

نکته ۲.۴.۱. صفر فرم‌های دیفرانسیلی را همان توابع در نظر می‌گیریم.

تعریف ۷.۴.۱. فرض کنیم $F : M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار باشد. نگاشت $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ را نگاشت پس‌کشنده F می‌گوییم که هر k -فرم دیفرانسیلی روی N را به یک k -فرم دیفرانسیلی روی M تصویر می‌کند. بنابراین اگر داشته باشیم:

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \omega_{i_1, \dots, i_k} \, dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \in \Omega^k(N),$$

آنگاه:

$$F^* \omega = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n (\omega_{i_1, \dots, i_k} \circ F) \, d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F).$$

۵.۱ دیفرانسیل خارجی

تعریف ۱.۵.۱. فرض کنیم ω یک k -فرم دیفرانسیلی روی منیفلد M باشد. عملگر دیفرانسیل (دیفرانسیل خارجی) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M),$$

که اگر:

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

آنگاه

$$d\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

یک $(k+1)$ -فرم است.

مثال ۱.۵.۱. اگر $\omega = (z-x) dx + yz^2 dy - xz dz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ باشد آنگاه دیفرانسیل ω عبارتست از:

$$\begin{aligned} d\omega &= d(z-x) \wedge dx + d(yz^2) \wedge dy - d(xz) \wedge dz \\ &= (-dx + dz) \wedge dx + (z^2 dy + 2yz dz) \wedge dy - (z dx + x dz) \wedge dz \\ &= dz \wedge dx + 2yz dz \wedge dy - z dx \wedge dz \\ &= -(1+z) dx \wedge dz + 2yz dz \wedge dy. \end{aligned}$$

قضیه ۱.۵.۱. اگر ω یک k -فرم دیفرانسیلی روی M باشد، آنگاه:

$$d^2\omega = d(d\omega) = 0.$$

برهان. فرض کنیم $\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ یک k -فرم دیفرانسیلی روی M باشد، آنگاه دیفرانسیل خارجی ω را به صورت زیر داریم:

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \end{aligned}$$

حال برای بدست آوردن $d^2\omega$ باید دیفرانسیل $d\omega$ را بدست بیاوریم:

$$\begin{aligned} d^2\omega &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \sum_{i=1}^n d\left(\frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^i}\right) \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^i}\right) dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^j \partial x^i} - \frac{\partial^2 \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x^i \partial x^j}\right) dx^j \wedge dx^i \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = 0. \end{aligned}$$

□

قضیه ۲.۵.۱. اگر ω یک k -فرم دیفرانسیلی و η یک l -فرم دیفرانسیلی باشد، آنگاه:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

برهان. فرض کنیم داشته باشیم:

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i_1, \dots, i_k}^n \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}, \\ \eta &= \sum_{j_1, \dots, j_l}^n \eta_{j_1, \dots, j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l},\end{aligned}$$

آنگاه:

$$\begin{aligned}d(\omega \wedge \eta) &= \\ &= d \left(\sum_{i_1, \dots, i_k}^n \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge \sum_{j_1, \dots, j_l}^n \eta_{j_1, \dots, j_l} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \right) \\ &= d \left(\sum_{i_1, \dots, i_k}^n \sum_{j_1, \dots, j_l}^n \omega_{i_1, \dots, i_k} \eta_{j_1, \dots, j_l} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \right) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k}^n \sum_{j_1, \dots, j_l}^n d(\omega_{i_1, \dots, i_k} \eta_{j_1, \dots, j_l}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k}^n \sum_{j_1, \dots, j_l}^n (d\omega_{i_1, \dots, i_k} \eta_{j_1, \dots, j_l} + \omega_{i_1, \dots, i_k} d\eta_{j_1, \dots, j_l}) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k}^n \sum_{j_1, \dots, j_l}^n d\omega_{i_1, \dots, i_k} \eta_{j_1, \dots, j_l} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &\quad + \sum_{i_1, \dots, i_k}^n \sum_{j_1, \dots, j_l}^n \omega_{i_1, \dots, i_k} d\eta_{j_1, \dots, j_l} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k}^n d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge \sum_{j_1, \dots, j_l}^n \eta_{j_1, \dots, j_l} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &\quad + (-1)^k \sum_{i_1, \dots, i_k}^n \omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge \sum_{j_1, \dots, j_l}^n d\eta_{j_1, \dots, j_l} \wedge dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_l} \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.\end{aligned}$$

□

قضیه ۳.۵.۱. اگر $F: M \rightarrow N$ یک نگاشت هموار و ω یک k -فرم دیفرانسیلی روی N باشد، آنگاه:

$$d(F^*\omega) = F^*(d\omega).$$

برهان. فرض کنیم داشته باشیم:

$$\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k}^n \omega_{i_1, \dots, i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

آنگاه داریم:

$$d\omega = \sum_{i_1, \dots, i_k}^n d\omega_{i_1, \dots, i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k},$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} F^*(d\omega) &= \sum_{i_1, \dots, i_k}^n d(\omega_{i_1, \dots, i_k} \circ F) \wedge d(x^{i_1} \circ F) \wedge \dots \wedge d(x^{i_k} \circ F) \\ &= d(F^*\omega). \end{aligned}$$

□

۶.۱ گروه لی

تعریف ۱.۶.۱. فرض کنیم G یک گروه جبری مجهز به یک توپولوژی باشد به طوریکه نگاشت‌های زیر

$$\begin{aligned} m : G \times G &\rightarrow G & i : G &\rightarrow G \\ m(g, h) &= g \cdot h, & i(g) &= g^{-1}, \end{aligned}$$

پیوسته باشند، آنگاه G را یک گروه توپولوژیک می‌گوییم.

تعریف ۲.۶.۱. فرض کنیم G یک گروه جبری در عین حال یک منیفلد هموار باشد، به طوریکه نگاشت‌های زیر

$$\begin{aligned} m : G \times G &\rightarrow G & i : G &\rightarrow G \\ m(g, h) &= g \cdot h, & i(g) &= g^{-1}, \end{aligned}$$

هموار باشند، آنگاه G یک گروه لی نام دارد.

مثال ۱.۶.۱. ۱. مجموعه ماتریس‌های وارون‌پذیر مانند

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{R}) : \det A \neq 0\},$$

و

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = \{A \in M(n \times n, \mathbb{C}) : \det A \neq 0\},$$

با عمل ضرب ماتریس‌ها یک گروه لی هستند.

۲. $(\mathbb{R}, +)$ یک منیفلد هموار و با عمل جمع نیز گروه است زیرا نگاشت‌های ضرب و وارون آن که به صورت:

$$\begin{aligned} m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & i : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a + b, & a &\mapsto -a, \end{aligned}$$

تعریف می‌شوند، هموار می‌باشند.

۳. $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$ یک منیفلد هموار و با عمل ضرب نیز گروه است زیرا نگاشت‌های ضرب و وارون آن که به صورت:

$$\begin{aligned} m : \mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{R} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} - \{0\} & i : \mathbb{R} - \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} - \{0\} \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b, & a &\mapsto a^{-1}, \end{aligned}$$

تعریف می‌شوند، هموار می‌باشند.

۴. $SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : \det A = 1\}$ مجموعه ماتریس‌های حقیقی وارون‌پذیر خاص از مرتبه n ، یک گروه لی $(n^2 - 1)$ بعدی است.

۵. $O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n) : AA^T = I_n\}$ مجموعه ماتریس‌های متعامد از مرتبه n ، یک گروه لی $-\frac{n(n-1)}{2}$ بعدی است.

لم ۱.۶.۱. اگر $G_1, \dots, G_n$ ، $-n$ گروه لی باشند، آنگاه $G_1 \times \dots \times G_n$ ، یک گروه لی است.

برهان. می‌دانیم که حاصلضرب منیفلدهای هموار، یک منیفلد هموار است. پس چون $G_1, \dots, G_n$ منیفلدهای هموار هستند، پس $G_1 \times \dots \times G_n$ یک منیفلد هموار است. نگاشت m را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} m : (G_1 \times \dots \times G_n) \times (G_1 \times \dots \times G_n) &\rightarrow (G_1 \times \dots \times G_n) \\ ((g_1, \dots, g_n), (h_1, \dots, h_n)) &\mapsto (g_1 h_1, \dots, g_n h_n), \end{aligned}$$

چون هر G_i گروه لی است یعنی:

$$\begin{aligned} m_i : G_i \times G_i &\rightarrow (G_i) \\ (g_i, h_i) &\mapsto (g_i h_i), \end{aligned}$$

هموار است. پس m تعریف شده در بالا هموار است. نگاشت i را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} i : (G_1 \times \dots \times G_n) &\rightarrow (G_1 \times \dots \times G_n) \\ (g_1, \dots, g_n) &\mapsto (g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}), \end{aligned}$$

چون هر G_i گروه لی است یعنی:

$$\begin{aligned} i_i : G_i &\rightarrow G_i \\ g_i &\mapsto g_i^{-1}, \end{aligned}$$

هموار است. پس i تعریف شده در بالا نیز هموار است. بنابراین $G_1 \times \cdots \times G_n$ یک گروه لی است. $\square$

تعریف ۳.۶.۱. فرض کنیم G یک گروه لی باشد، نگاشت

$$\begin{aligned} Lg : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto gh, \end{aligned}$$

را ضرب از چپ G روی G می‌گوییم.
به همین صورت نگاشت

$$\begin{aligned} Rg : G &\rightarrow G \\ h &\mapsto hg, \end{aligned}$$

را ضرب از راست G روی G می‌گوییم.

تعریف ۴.۶.۱. میدان برداری X روی G را یک میدان برداری ناوردای چپ روی G می‌گوییم، اگر:

$$\begin{aligned} (Lg)_* X_h &= X_{gh}, \\ (Lg)_* &= T_h G \rightarrow T_{gh} G, \end{aligned}$$

به طریق مشابه میدان X روی G ناوردای راست است، اگر:

$$(Rg)_* X_h = X_{hg}.$$

قضیه ۱.۶.۱. مجموعه تمام میدان‌های برداری ناوردای چپ یک زیر فضای برداری از مجموعه تمام میدان‌های برداری روی گروه لی G است.

برهان. به دلیل اینکه جمع دو میدان ناوردای چپ، یک میدان ناوردای چپ است و مضربی از یک میدان ناوردای چپ، یک ناوردای چپ است. به این معنا که اگر X و Y دو میدان برداری ناوردای چپ روی گروه G باشد آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} (Lg)_*(aX_h) &= a(Lg)_*X_h = aX_{gh}, \\ (Lg)_*(X_h + Y_h) &= (Lg)_*X_h + (Lg)_*Y_h = X_{gh} + Y_{gh}. \end{aligned}$$

$\square$

قضیه فوق برای میدان‌های برداری ناوردای راست نیز برقرار است.

لم ۲.۶.۱. گروه لی دو میدان برداری ناوردای چپ (راست)، یک میدان برداری ناوردای چپ (راست) است.

برهان. فرض کنیم X_h و Y_h دو میدان برداری ناوردای چپ باشند، بنابراین داریم:

$$(Lg)_*[X_h, Y_h] = [(Lg)_*X_h, (Lg)_*Y_h] = [X_{gh}, Y_{gh}].$$

□

تعریف ۵.۶.۱. مجموعه تمام میدان‌های برداری چپ روی گروه لی G را جبرلی چپ گروه لی G می‌گوییم و آن را با $\mathcal{G}_L$ نشان می‌دهیم.

به همین صورت مجموعه تمام میدان‌های برداری راست روی گروه لی G را، جبرلی راست گروه لی G می‌گوییم و آن را با $\mathcal{G}_R$ نشان می‌دهیم.

بنابراین جبرهای لی چپ و راست نسبت به گروه لی بسته هستند، به این معنا که گروه لی دو میدان برداری ناوردای چپ یک میدان برداری ناوردای چپ است. به طور مشابه برای ناوردای راست هم صدق می‌کند.

قضیه ۲.۶.۱. اگر G یک گروه باشد، آنگاه جبرهای لی چپ و راست ایزومورف هستند.

برهان. نشان می‌دهیم نگاشت $i_* : \mathcal{G}_L \rightarrow \mathcal{G}_R$ ایزومورفیسم است. برای اینکار باید نشان دهیم i_* هر عضو $\mathcal{G}_L$ را دقیقاً به یک عضو از $\mathcal{G}_R$ متناظر می‌کند، یعنی یک متناظر یک به یک بین $\mathcal{G}_L$ و $\mathcal{G}_R$ وجود دارد. بنابراین برای هر:

$$\begin{aligned} L_g : G &\rightarrow G & R_g : G &\rightarrow G & i : G &\rightarrow G, \\ h &\longmapsto gh, & h &\longmapsto hg, & g &\longmapsto g^{-1}, \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned} (R_g \circ i)h &= R_g(i(h)) \\ &= R_g(h^{-1}) \\ &= h^{-1}g \\ &= (g^{-1}h)^{-1} \\ &= i(L_{g^{-1}})h \\ &= (i \circ L_{g^{-1}})h \implies R_g \circ i = i \circ L_{g^{-1}}. \end{aligned}$$

فرض می‌کنیم $x \in \mathcal{G}_L$ ، آنگاه داریم:

$$\begin{aligned} (R_g)_*(i_*(X_h))f &= (R_g \circ i)_*X_h f = (i \circ L_{g^{-1}})_*X_h f = i_*(L_{g^{-1}})_*X_h f = i_*(X_{g^{-1}h})f \\ &= X_{g^{-1}h}(f \circ i) = X(f \circ i)(g^{-1}h) = X(f(g^{-1}h)^{-1}) = X(f(h^{-1}g)) = X_{h^{-1}g}f. \end{aligned}$$

□

تعریف ۶.۶.۱. فرض کنیم G یک گروه لی و M یک منیفلد هموار باشد. اگر نگاشت $\theta : G \times M \rightarrow M$ با ضابطه $\theta(g, p) = gp$ پیوسته باشد، می‌گوییم G از چپ روی M عمل می‌کند. همچنین اگر θ هموار باشد، می‌گوییم عمل G روی M هموار است.

تعریف ۷.۶.۱. فرض کنیم $g \in G$ و $p \rightarrow g \cdot p$ باشد. آنگاه عمل گروه دارای ویژگی‌های زیر است:

$$1. \theta_{g_1} \circ \theta_{g_2}(p) = \theta_{g_1}(\theta_{g_2}(p)) = \theta_{g_1 g_2}(p)$$

$$2. \theta_e(p) = e \cdot p = p$$

$$3. (\theta_g^{-1})(p) = \theta_{g^{-1}}(p)$$

نگاشت $\theta_g : M \rightarrow M$ که در ویژگی‌های ذکر شده صدق می‌کند، یک تبدیل نام دارد که یک دیفیئومورفیسم است.

مثال ۲.۶.۱. نشان می‌دهیم که θ تعریف شده در مثال‌های زیر، یک تبدیل است.

۱. عمل $\mathbb{R}^n$ روی خودش از چپ به صورت $(\mathbb{R}^n, +)$:

$$\theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(a, x) \mapsto a + x,$$

$$\theta_a \circ \theta_b(x) = \theta_a(b + x) = a + (b + x) = (a + b) + x = \theta_{a+b}x,$$

$$\theta_e(x) = e + x = x,$$

$$(\theta_a x)^{-1} = \theta_{a^{-1}} x = a^{-1} + x.$$

۲. اگر $G = \text{GL}(n)$ و $M = \mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه:

$$\theta : \text{GL}(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(A, x) \mapsto A \cdot x,$$

$$\theta_A \circ (\theta_B(x)) = \theta_A(B \cdot x) = A \cdot (B \cdot x) = (A \cdot B) \cdot x = \theta_{A \cdot B}x,$$

$$\theta_I(x) = I \cdot x = x,$$

$$(\theta_A x)^{-1} = \theta_{A^{-1}} x = A^{-1} \cdot x.$$

تعریف ۸.۶.۱. عمل از راست یک گروه لی مانند G روی منیفلد M به طور مشابه تعریف می‌شود، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\theta : M \times G &\rightarrow M & \theta_g : M &\rightarrow M \\ (p, g) &\mapsto p \cdot g, & p &\mapsto p \cdot g.\end{aligned}$$

تعریف ۹.۶.۱. فرض می‌کنیم G روی M عمل کند. اگر $p \in M$ باشد آنگاه به مجموعه $O_p = \{g \cdot p : g \in G\}$ مدار عضو p تحت عمل گروه لی G می‌گوییم. (به طور مشابه برای راست نیز قابل تعریف است.)

مثال ۳.۶.۱. برای نگاشت‌های زیر مدار عضو p را محاسبه می‌کنیم.

۱. اگر $G = GL(n)$ و $M = \mathbb{R}^n$ باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned}\theta : GL(n) \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (A, x) &\mapsto A \cdot x,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x \in \mathbb{R}^n & \quad O_{x=\circ} = \{A \cdot x : A \in GL(n)\} = \{\circ\}, \\ x = \begin{pmatrix} \circ \\ \vdots \\ \circ \end{pmatrix}_{n \times 1} & \quad O_{x=\circ} = \{A \cdot x : A \in GL(n)\} = \mathbb{R}^n - \{\circ\}.\end{aligned}$$

۲. عمل $\mathbb{R}^n$ روی خودش از چپ:

$$\begin{aligned}\theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (a, x) &\mapsto a + x,\end{aligned}$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad O_x = \{a + x : a \in \mathbb{R}^n\} = \mathbb{R}^n.$$

فصل ۲

هندسه ریمانی

در این فصل برخی از مبانی و مفاهیم اولیه در هندسه ریمانی را ارائه خواهیم کرد. از نتایج این فصل در فصل چهارم استفاده می‌کنیم [۹].

۱.۲ متریک ریمانی

تعریف ۱.۱.۲. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد، 2 – تانسور کوواریان روی M به صورت $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ که در شرایط زیر صدق کند یک متریک ریمانی روی M نام دارد.

(الف) متقارن باشد یعنی، $g(X, Y) = g(Y, X)$.

(ب) اگر داشته باشیم $X \neq 0$ آنگاه، $g(X, X) > 0$ باشد.

(پ) به ازای هر $X, Y, Z \in \chi(M)$ و $r \in \mathbb{R}$ ، متریک ریمانی دوخطی است، یعنی:

$$g(rX, Y) = g(X, rY) = rg(X, Y),$$

$$g(X + Y, Z) = g(X, Z) + g(Y, Z),$$

$$g(X, Y + Z) = g(X, Y) + g(X, Z).$$

2 – تانسور فوق بالا یک ضرب داخلی روی M تعریف می‌کند، که به آن متریک ریمانی گفته می‌شود.

اگر $(x^1, \dots, x^n)$ یک چارت روی M باشد، آنگاه متریک ریمانی g به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i dx^j.$$

تعریف ۲.۱.۲. هر منیفلد هموار M مجهز به متریک ریمانی g یک منیفلد ریمانی نام دارد.

تعریف ۳.۱.۲. فرض کنیم M یک منیفلد هموار باشد، 2 -تانسور کوواریان روی M به صورت $g : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ که در شرایط زیر صدق کند یک متریک شبه ریمانی روی M نام دارد.

(الف) متقارن باشد یعنی، $g(X, Y) = g(Y, X)$.

(ب) $\forall Y \in T_p M \quad g(X, Y) = 0 \Leftrightarrow X = 0$.

(پ) به ازای هر $X, Y, Z \in \chi(M)$ و $r \in \mathbb{R}$ ، متریک شبه ریمانی دوخطی است، یعنی:

$$g(rX, Y) = g(X, rY) = rg(X, Y),$$

$$g(X + Y, Z) = g(X, Z) + g(Y, Z),$$

$$g(X, Y + Z) = g(X, Y) + g(X, Z).$$

تفاوت متریک شبه ریمانی با متریک ریمانی آن است که مولفه‌های متریک شبه ریمانی لزوماً مثبت نیستند.

تعریف ۴.۱.۲. هر منیفلد هموار M مجهز به متریک شبه ریمانی، یک منیفلد شبه ریمانی نام دارد.

تعریف ۵.۱.۲. فرض کنیم M یک منیفلد شبه ریمانی و S یک زیر منیفلد ایمرزن ($i : S \hookrightarrow M$) باشد. یک متریک ریمانی از M به روی S القاء می‌شود که به آن متریک القایی از M به S گفته می‌شود. اگر g متریک روی M باشد این متریک به صورت i^*g می‌باشد.

مثال ۱.۱.۲. برای محاسبه متریک القایی کره S^2 توسط متریک اقلیدسی $\mathbb{R}^2$ به روش زیر عمل می‌کنیم.

اگر $i : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک نگاشت شمول بین کره و فضای اقلیدسی و $g = dx^2 + dy^2 + dz^2$ متریک اقلیدسی باشد و

$$(\varphi, \theta) \rightarrow (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi),$$

مختصات کروی باشد، با توجه به تعریف (۱.۵.۳) متریک کروی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 i^*g &= i^*(dx^2 + dy^2 + dz^2) = d(x \circ i)^2 + d(y \circ i)^2 + d(z \circ i)^2 \\
 &= d(\sin \varphi \cos \theta)^2 + d(\sin \varphi \sin \theta)^2 + d(\cos \varphi)^2 \\
 &= (\cos \varphi \cos \theta d\varphi - \sin \varphi \sin \theta d\theta)^2 + (\cos \varphi \sin \theta d\varphi + \sin \varphi \cos \theta d\theta)^2 + (-\sin \varphi d\varphi)^2 \\
 &= \cos^2 \varphi \cos^2 \theta d\varphi^2 + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta d\theta^2 - 2 \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \cos \theta d\varphi d\theta \\
 &\quad + \cos^2 \varphi \sin^2 \theta d\varphi^2 + \sin^2 \varphi \cos^2 \theta d\theta^2 + 2 \sin \varphi \sin \theta \cos \varphi \cos \theta d\varphi d\theta + \sin^2 \varphi d\varphi^2 \\
 &= \sin^2 \varphi d\theta^2 + \cos^2 \varphi d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\varphi^2 \\
 &= \sin^2 \varphi d\theta^2 + d\varphi^2.
 \end{aligned}$$

۲.۲ اتصال‌ها

برای آنکه بتوانیم مفهوم شتاب یک منحنی روی یک منیفلد را تعریف کنیم لازم است راهی پیدا کنیم که بتوان بدون توجه به مختصات از بردارها (یا میدان‌های برداری) در طول یک منحنی مشتق‌گیری نماییم. به بیان ساده‌تر باید بتوانیم مقادیر دوبردار از دو فضای برداری مجاور و متفاوت را با یکدیگر مقایسه نماییم یا به عبارت دیگر دو فضای برداری مجاور را توسط یک مشق‌گیری به یکدیگر ”الصاق” نماییم. در اینجا است که کلمه ”التصاق” مفهوم پیدا کرده است. در حقیقت برای ساخت هر هندسه‌ای از تعریف اتصال شروع می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۲. یک اتصال خطی روی منیفلد هموار M یک نگاشتی مانند ∇ است که به ازای هر $X, Y, Z \in \chi(M)$ ، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \nabla : \chi(M) \times \chi(M) &\rightarrow \chi(M) \\
 (X, Y) &\longmapsto \nabla_X Y,
 \end{aligned} \tag{۱.۲}$$

و در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

$$\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z \quad f, g \in C^\infty(M) \quad (\text{الف})$$

$$\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (\text{ب})$$

$$\nabla_X(fY) = Y \cdot X(f) + f\nabla_X Y \quad f \in C^\infty(M) \quad (\text{پ})$$

نماد ∇ ”نابلا” خوانده شده و $\nabla_X Y$ مشتق کواریان Y در جهت X نامیده می‌شود.

لم ۱.۲.۲. اگر ∇ یک اتصال خطی روی M باشد، آنگاه ∇ یک تانسور از نوع $(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix})$ است.

برهان. به ازای هر $X, Y, Z \in \chi(M)$ و $f, g \in C^\infty(M)$ ثابت می‌کنیم:

۱.

$$\nabla(fX + gY, Z) = \nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ = f\nabla(X, Z) + g\nabla(Y, Z).$$

۲.

$$\begin{aligned}\nabla(X, fY + gZ) &= \nabla_X(fY + gZ) = \nabla_X(fY) + \nabla_X(gZ) \\ &= Y \cdot X(f) + f\nabla_XY + ZX(g) + g\nabla_XZ.\end{aligned}$$

□

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنیم (U, x^i) یک چارت در منیفلد M باشد، اگر $\{E_1, \dots, E_n\}$ مجموعه‌ای از میدان‌های برداری روی U باشد، آنگاه به E_i ها یک کنج موضعی روی M می‌گوییم و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$E_i = \sum_{j=1}^n E_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (2.2)$$

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنیم $\{E_1, \dots, E_n\}$ یک کنج موضعی روی یک زیر مجموعه باز $U \subset M$ باشد. می‌توانیم $\nabla_{E_i}E_j$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\nabla_{E_i}E_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k E_k \equiv \Gamma_{ij}^k E_k, \quad (3.2)$$

که Γ_{ij}^k را نماد کریستوفل ∇ نسبت به کنج $\{E_i\}$ می‌نامیم. در نمایش فرمولی (۳.۲) که از نوشتن سیگما صرفنظر شده است از نمادگذاری انیشتن استفاده شده است.

لم ۲.۲.۲. فرض کنیم ∇ یک اتصال خطی روی M و U یک زیر مجموعه باز از M و X و Y دو میدان برداری دلخواه روی U و $\{E_i\}_{i=1}^n$ یک کنج موضعی روی M باشد، آنگاه:

$$\nabla_XY = (XY^k + X^iY^j\Gamma_{ij}^k)E_k. \quad (4.2)$$

برهان. فرض کنیم $\{E_1, \dots, E_n\}$ یک کنج موضعی روی M باشد و داشته باشیم:

$$\begin{cases} X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} = X^i E_i, \\ Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j E_j, \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
 \nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j) E_j = X(Y_j) E_j + Y^j \nabla_X E_j \\
 &= X(Y^j) E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j \\
 &= X(Y^j) E_j + Y^j X^i \nabla_{E_i} E_j \\
 &= XY^j E_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k \\
 &= XY^k E_k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k E_k \\
 &= (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) E_k,
 \end{aligned}$$

حال اگر به جای E_i ها نماد ∂_i قرار دهیم، آنگاه داریم:

$$\nabla_X Y = (XY^k + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k) \partial_k.$$

□

۳.۲ ژئودزیک‌ها

تعریف ۱.۳.۲. فرض کنیم I یک بازه از اعداد حقیقی باشد، اگر M یک منیفلد هموار باشد آنگاه هر تابع به صورت $\alpha: I \rightarrow M$ یک خم هموار روی M می‌باشد. اگر $x = (x^1, \dots, x^n)$ یک چارت روی منیفلد هموار M باشد آنگاه خم α در این چارت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t)).$$

تعریف ۲.۳.۲. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی با متریک g باشد. به خم α روی M یک خم ژئودزیک می‌گوییم، اگر خم α نسبت به متریک g کوتاه‌ترین مسیر باشد.

تعریف ۳.۳.۲. اگر $\alpha: I \rightarrow M$ یک خم هموار روی منیفلد M باشد، سرعت این خم به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\alpha: I \rightarrow M$$

$$\alpha_{*t_0} = T_{t_0} I \rightarrow T_{\alpha(t_0)} M$$

$$\alpha_{*t_0} \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} f = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=t_0} (f \circ \alpha) = \dot{\alpha}(t_0) f.$$

تعریف ۴.۳.۲. فرض کنیم α یک خم هموار روی منیفلد ریمانی M باشد. اتصال خطی ∇ روی M یک عملگر مشتق مانند

$$D_t: \chi(\alpha) \rightarrow \chi(\alpha)$$

تعریف می‌کند که در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند:

$$D_t(aX + bY) = aD_t(X) + bD_t(Y) \quad a, b \in \mathbb{R} \quad (\text{الف})$$

$$D_t(fV) = fV + fD_tV \quad f \in C^\infty(I) \quad (\text{ب})$$

$$D_tX = \nabla_{\dot{\alpha}(t)}X \quad (\text{پ})$$

نتیجه ۱.۳.۲. فرض می‌کنیم M یک منیفلد ریمانی و ∇ یک اتصال خطی و α یک خم هموار روی M باشد، در این صورت α خم ژئودزیک نسبت به ∇ نامیده می‌شود، هرگاه $D_t\dot{\alpha} = 0$ باشد.

۴.۲ تاب

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنیم ∇ یک اتصال خطی روی منیفلد ریمانی M و g متریک ریمانی روی آن باشد، می‌گوییم ∇ با متریک g سازگار است هرگاه به ازای هر سه میدان برداری X, Y, Z روی M داشته باشیم:

$$\nabla_X \langle Y, Z \rangle_g = \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z \rangle_g.$$

تعریف ۲.۴.۲. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی باشد. یک تانسور از نوع $\binom{2}{1}$ روی M به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tau : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

به تانسور τ ، تانسور تاب منیفلد M گفته می‌شود.

تعریف ۳.۴.۲. اگر $X, Y, Z \in \chi(M)$ و $a \in \mathbb{R}$ باشد، می‌توان دید که τ یک تانسور از نوع $\binom{2}{1}$ است زیرا:

$$1. \tau(X + Y, Z) = \tau(X, Z) + \tau(Y, Z)$$

$$2. \tau(X, Y + Z) = \tau(X, Y) + \tau(X, Z)$$

$$3. \tau(aX, Y) = \tau(X, aY) = a\tau(X, Y)$$

تعریف ۴.۴.۲. اتصال خطی ∇ روی منیفلد ریمانی M را متقارن می‌گوییم اگر تانسور تاب آن صفر باشد یعنی:

$$\tau(X, Y) = 0 \implies \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

لم ۱.۴.۲. اتصال خطی ∇ روی منیفلد ریمانی M را متقارن است اگر و تنها اگر، $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ باشد.

برهان. فرض میکنیم ∇ متقارن باشد، آنگاه طبق تعریف ۴.۴.۲، تاب آن صفر است یعنی برای هر $X, Y \in \chi(M)$ داریم $\tau(X, Y) = 0$.
 بنابراین قرار می‌دهیم، $X = \partial_i$ و $Y = \partial_j$ پس،

$$\begin{aligned}\tau(X, Y) = 0 &\implies \tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i - [\partial_i, \partial_j] \\ &= \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i \\ &= \Gamma_{ij}^k \partial_k - \Gamma_{ji}^k \partial_k \\ &= (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k \\ &= (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ij}^k) \partial_k = 0,\end{aligned}$$

در نتیجه $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. برای اثبات عکس قضیه فرض می‌کنیم $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ و همچنین برای هر $X, Y \in \chi(M)$ و $X = \partial_i$ و $Y = \partial_j$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\tau(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_{X^i \partial_i} Y^j \partial_j - \nabla_{Y^j \partial_j} X^i \partial_i - [X^i \partial_i, Y^j \partial_j] \\ &= X^i \nabla_{\partial_i} Y^j \partial_j - Y^j \nabla_{\partial_j} X^i \partial_i - (X^i \partial_i(Y^j \partial_j) - Y^j \partial_j(X^i \partial_i)) \\ &= X^i (\partial_i Y^j \partial_j + Y^j \nabla_{\partial_i} \partial_j) - Y^j (\partial_j X^i \partial_i + X^i \nabla_{\partial_j} \partial_i) - (X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i) \partial_j \\ &= X^i (\partial_i Y^j \partial_j + Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k) - Y^j (\partial_j X^i \partial_i + X^i \Gamma_{ji}^k \partial_k) - (X^i \partial_i Y^j - Y^j \partial_j X^i) \partial_j \\ &= X^i \partial_i Y^j \partial_j + X^i Y^j \Gamma_{ij}^k \partial_k - Y^j \partial_j X^i \partial_i - Y^j X^i \Gamma_{ji}^k \partial_k - X^i \partial_i Y^j \partial_j + Y^j \partial_j X^i \partial_j \\ &= (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) X^i Y^j \partial_k = 0.\end{aligned}$$

□

قضیه ۱.۴.۲ (قضیه اساسی هندسه ریمانی). فرض کنیم M یک منیفلد هموار ریمانی با متریک شبه ریمانی g باشد. در این صورت یک اتصال خطی متقارن سازگار با متریک g روی M وجود دارد که یکتاست. این اتصال، اتصال ریمانی یا اتصال لوی-چی ویتا^۱ روی g نامیده می‌شود.

برهان. ابتدا یکتایی را ثابت می‌کنیم، فرض می‌کنیم ∇ چنین اتصالی باشد. میدان‌های برداری $X, Y, Z \in \chi(M)$ را در نظر می‌گیریم، طبق خاصیت سازگاری این اتصال با متریک g داریم،

$$\begin{aligned}\nabla_X \langle Y, Z \rangle_g &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + \langle Y, \nabla_X Z \rangle_g, \\ \nabla_Y \langle Z, X \rangle_g &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle_g + \langle Z, \nabla_Y X \rangle_g, \\ \nabla_Z \langle X, Y \rangle_g &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle_g + \langle X, \nabla_Z Y \rangle_g,\end{aligned}$$

¹Levi-Civita Connection

شرط متقارن بودن اتصال را اعمال می‌کنیم بنابراین:

$$\begin{aligned}\nabla_X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle - \langle Y, \nabla_Z X \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, \nabla_Z X - \nabla_X Z \rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle,\end{aligned}\quad (۱)$$

$$\begin{aligned}\nabla_Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle - \langle Z, \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, \nabla_Y X - \nabla_X Y \rangle \\ &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle,\end{aligned}\quad (۲)$$

$$\begin{aligned}\nabla_Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle - \langle X, \nabla_Y Z \rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, \nabla_Z Y - \nabla_Y Z \rangle \\ &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle\end{aligned}\quad (۳)$$

بنابراین قرار می‌دهیم ۳ - (۱ + ۲)، پس،

$$\begin{aligned}\nabla_X \langle Y, Z \rangle + \nabla_Y \langle Z, X \rangle - \nabla_Z \langle X, Y \rangle &= \\ ۲ \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle,\end{aligned}$$

با مرتب کردن جملات داریم:

$$\begin{aligned}\langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle) \\ &\quad - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle.\end{aligned}\quad (۴)$$

اگر ∇^1 و ∇^2 دو اتصال متقارن و سازگار با متریک g باشند، چون سمت راست رابطه (۴) به نوع اتصال بستگی ندارد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$\langle \nabla_X^1 Y, Z \rangle - \langle \nabla_X^2 Y, Z \rangle = \langle \nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z \rangle = 0,$$

می‌توان نتیجه گرفت $\nabla_X^1 - \nabla_X^2 = 0$ پس $\nabla_X^1 = \nabla_X^2$ ،

بنابراین: $\nabla^1 = \nabla^2$. حال ثابت می‌کنیم چنین اتصالی وجود دارد، فرض کنید (u, x^i) یک چارت روی M باشد و همچنین قرار می‌دهیم $X = \partial_i, Y = \partial_j, Z = \partial_l$ و رابطه (۴) را برای این چارت می‌نویسیم،

$$\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle = \frac{1}{2} (\partial_i \langle \partial_j, \partial_l \rangle + \partial_j \langle \partial_l, \partial_i \rangle - \partial_l \langle \partial_i, \partial_j \rangle). \quad (۵)$$

طبق تعریف ضرایب تانسور متریک به صورت $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ و همچنین $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$ است بنابراین رابطه (۵) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم،

$$\begin{aligned}\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_l \rangle &= \langle \Gamma_{ij}^k \partial_k, \partial_l \rangle = \Gamma_{ij}^k \langle \partial_k, \partial_l \rangle = \Gamma_{ij}^k g_{kl} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}),\end{aligned}$$

فرمول به دست آمده زیر را فرمول کریستوفل می‌نامیم،

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{il} - \frac{\partial}{\partial x^l} g_{ij} \right), \quad (1.2)$$

چون متریک متقارن است لذا $g_{ij} = g_{ji}$ بنابراین $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ در نتیجه طبق تعریف (۴.۴.۲)، تاب اتصال صفر است پس اتصال متقارن است. برای اثبات سازگاری، نشان می‌دهیم $\nabla g = 0$ است،

$$\nabla_{\partial_k} g = \partial_k g_{ij} - g_{il} \Gamma_{kj}^l - g_{lj} \Gamma_{ki}^l,$$

در فرمول کریستوفل دو طرف را در g_{lj} ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} g_{lj} + \Gamma_{kj}^l g_{il} &= \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{2} (\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) \\ &= \partial_k g_{ij} \Gamma_{ki}^l, \end{aligned} \quad (2.2)$$

پس،

$$\nabla_{\partial_k} g = \partial_k g_{ij} - \partial_k g_{ij} = 0,$$

چون ∂_k داخواه بود لذا $\nabla g = 0$ ، بنابراین ∇ با g سازگار است. قضیه اساسی هندسه شبه ریمانی نیز به همین صورت اثبات می‌شود. $\square$

قضیه ۲.۴.۲. اگر $\alpha: I \rightarrow M$ یک خم هموار روی منیفلد ریمانی M با متریک g باشد، آنگاه یک خم ژئودزیک است اگر و تنها اگر مولفه‌های آن یعنی $\alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه دوم زیر صدق کند.

$$\ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) \Gamma_{ij}^k = 0, \quad i, j, k = 1, \dots, n. \quad (3.2)$$

برهان. فرض کنید X یک میدان برداری در راستای خم α باشد و $X(t) = X^j(t) \partial_j$ بنابراین،

$$\begin{aligned} D_t X(t_0) &= D_t (X^j(t_0) \partial_j) \\ &= D_t X^j(t_0) \partial_j + X^j(t_0) D_t \partial_j \\ &= \dot{X}^j(t_0) \partial_j + X^j \nabla_{\dot{\alpha}(t_0)} \partial_j \\ &= [\dot{X}^j(t_0) \partial_k + X^j(t_0) (\dot{\alpha}(t_0) \partial_j + \dot{\alpha}^i(t_0) \Gamma_{ij}^k \alpha(t_0) \partial_k)] \\ &= [\dot{X}^k(t_0) + X^j(t_0) \dot{\alpha}(t_0) \Gamma_{ij}^k \alpha(t_0)] \partial_k, \end{aligned}$$

حال اگر $x = (x^1, \dots, x^n)$ چارتی روی M ، $\alpha(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ یک خم در چارت x و X یک میدان برداری در راستای خم α باشد، آنگاه α ژئودزیک است اگر و تنها اگر در دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی زیر صدق کند:

$$\begin{aligned} D_t \dot{\alpha}(t) = 0 &\iff \nabla_{\dot{\alpha}(t)} \dot{\alpha}(t) = 0, \\ &\iff \ddot{x}^k(t) + \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) \Gamma_{ij}^k x(t) = 0, \\ &\iff \ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0. \end{aligned}$$

□

مثال ۱.۴.۲. فرض کنید $g = d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2$ یک متریک روی کره S^2 باشد. برای بدست آوردن معادلات ژئودزیک آن، ابتدا g_{ij} را که ضرایب متریک است مشخص می‌کنیم،

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = \sin^2 \varphi,$$

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = g^{21} = 0, \quad g^{22} = \frac{1}{\sin^2 \varphi},$$

بنابراین با توجه به معادلات ژئودزیک، $\ddot{x}^k + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^k = 0$ و همچنین طبق فرمول کریستوفل (۱.۲) که از اثبات قضیه اساسی هندسه ریمانی به دست می‌آید، ژئودزیک متریک فوق به صورت زیر بدست می‌آید:

$$k=1 \quad \ddot{\varphi}(t) + \dot{\varphi}(t)\dot{\varphi}(t)\Gamma_{11}^1 + \dot{\varphi}(t)\dot{\theta}(t)\Gamma_{12}^1 + \dot{\theta}(t)\dot{\varphi}(t)\Gamma_{21}^1 + \dot{\theta}(t)\dot{\theta}(t)\Gamma_{22}^1 = 0,$$

$$k=2 \quad \ddot{\theta}(t) + \dot{\varphi}(t)\dot{\varphi}(t)\Gamma_{11}^2 + \dot{\varphi}(t)\dot{\theta}(t)\Gamma_{12}^2 + \dot{\theta}(t)\dot{\varphi}(t)\Gamma_{21}^2 + \dot{\theta}(t)\dot{\theta}(t)\Gamma_{22}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}g^{11} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{2}g^{12} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{12}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{11}}{\partial \varphi} \right) = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \cot \varphi,$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\sin \varphi \cos \varphi,$$

$$\Gamma_{22}^2 = 0,$$

بنابراین با جایگذاری، معادلات ژئودزیک عبارت خواهند بود از:

$$\alpha = \begin{cases} \ddot{\varphi} - \sin \varphi \cos \varphi \dot{\theta}^2 = 0, \\ \ddot{\theta} + 2 \cot \varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} = 0. \end{cases}$$

۵.۲ خمیدگی

تعریف ۱.۵.۲. فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی باشد، تانسور خمیدگی ریمانی برای منیفلد M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

قضیه ۱.۵.۲. خمیدگی ریمانی یک یک تانسور از نوع $\binom{3}{1}$ می‌باشد، زیرا به ازای هر $r \in \mathbb{R}$ و $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ می‌توان دید که:

$$1. R(X + Y, Z)W = R(X, Z)W + R(Y, Z)W$$

$$2. R(X, Y + Z)W = R(X, Y)W + R(X, Z)W$$

$$3. R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W$$

$$4. R(rX, Y)Z = R(X, rY)Z = R(X, Y)(rZ) = rR(X, Y)Z$$

برهان. با توجه به تعریف (۱.۵.۲) قابل اثبات است. $\square$

تعریف ۲.۵.۲. هر منیفلد ریمانی که تانسور خمیدگی آن صفر باشد را یک منیفلد تخت می‌گوییم.

تعریف ۳.۵.۲. اگر M یک منیفلد ریمانی باشد آنگاه تانسور خمیدگی نوع دوم روی M به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R_m : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$R_m(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W).$$

قضیه ۲.۵.۲. (ویژگی‌های تانسور خمیدگی ریمانی نوع دوم). فرض کنیم M یک منیفلد ریمانی و R_m تانسور خمیدگی ریمانی نوع دوم روی M باشد، آنگاه به ازای $X, Y, Z, W \in \chi(M)$ داریم:

$$1. R_m(W, X, Y, Z) = -R_m(X, W, Y, Z)$$

$$2. R_m(W, X, Y, Z) = -R_m(W, X, Y, Z)$$

$$3. R_m(W, X, Y, Z) = -R_m(Y, Z, W, X)$$

$$4. R_m(W, X, Y, Z) + R_m(X, Y, W, Z) + R_m(Y, W, X, Z) = 0$$

رابطه اخیر را اتحاد اول بیانچی^۱ می‌نامیم.

برهان. ۱. با استفاده از تعریف (۳.۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned} R_m(W, X, Y, Z) &= g(R(W, X)Y, Z) \\ &= g(\nabla_W \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_W Y - \nabla_{[W, X]} Y, Z), \end{aligned}$$

¹Bianchi identity

همچنین برای طرف دوم تساوی داریم:

$$\begin{aligned}
 R_m(X, W, Y, Z) &= g(R(X, W)Y, Z) \\
 &= g(\nabla_X \nabla_W Y - \nabla_W \nabla_X Y - \nabla_{[X, W]} Y, Z) \\
 &= g(\nabla_X \nabla_W Y - \nabla_W \nabla_X Y + \nabla_{[W, X]} Y, Z) \\
 &= g(-(\nabla_W \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_W Y - \nabla_{[W, X]} Y), Z) \\
 &= -g(\nabla_W \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_W Y - \nabla_{[W, X]} Y, Z) \\
 &= R_m(W, X, Y, Z).
 \end{aligned}$$

پس ویژگی اول ثابت می‌شود.

۲. ویژگی‌های دوم و سوم هم به طور مشابه اثبات می‌شوند.

۳. برای ویژگی چهارم با توجه به تعریف (۳.۵.۲) داریم:

$$\begin{aligned}
 &R_m(W, X, Y, Z) + R_m(X, Y, W, Z) + R_m(Y, W, X, Z) \\
 &= g(R(W, X)Y, Z) + g(R(X, Y)W, Z) + g(R(Y, W)X, Z) \\
 &= g(R(W, X)Y + R(X, Y)W + R(Y, W)X, Z) = 0,
 \end{aligned}$$

باید ثابت کنیم:

$$R(W, X)Y + R(X, Y)W + R(Y, W)X = 0,$$

بنابراین:

$$\begin{aligned}
 &R(W, X)Y + R(X, Y)W + R(Y, W)X \\
 &= (\nabla_W \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_W Y - \nabla_{[W, X]} Y) + (\nabla_X \nabla_Y W - \nabla_Y \nabla_X W - \nabla_{[X, Y]} W) \\
 &+ (\nabla_Y \nabla_W X - \nabla_W \nabla_Y X - \nabla_{[Y, W]} X) \\
 &= \nabla_W(\nabla_X Y - \nabla_Y X) + \nabla_X(\nabla_Y W - \nabla_W Y) + \nabla_Y(\nabla_W X - \nabla_X W) \\
 &- \nabla_{[W, X]} Y - \nabla_{[X, Y]} W - \nabla_{[Y, W]} X \\
 &= \nabla_W[X, Y] + \nabla_X[Y, W] + \nabla_Y[W, X] - \nabla_{[W, X]} Y - \nabla_{[X, Y]} W - \nabla_{[Y, W]} X,
 \end{aligned}$$

چون روی هر منیفلد ریمانی یک اتصال متقارن وجود دارد، بنابراین:

$$\begin{aligned}
 &\nabla_W[X, Y] + \nabla_X[Y, W] + \nabla_Y[W, X] - \nabla_{[W, X]} Y - \nabla_{[X, Y]} W - \nabla_{[Y, W]} X \\
 &= [W, [X, Y]] + [X, [Y, W]] + [Y, [W, X]] = 0.
 \end{aligned}$$

□

تعریف ۴.۵.۲. اگر مولفه‌های تانسور خمیدگی ریمانی نوع دوم R_m را با R_{ijkl} نمایش دهیم، آنگاه از ویژگی‌های ۱ و ۲ نتیجه می‌شود که مولفه‌های تانسور R_m نسبت به زیرنویس‌های اول و دوم و همچنین نسبت به زیرنویس‌های سوم و چهارم پادمتقارن هستند. از ویژگی ۳ نتیجه می‌شود تعویض دو زیرنویس اول و دوم با دو زیرنویس سوم و چهارم تأثیری در مولفه‌های تانسور R_m ندارد و همچنین رابطه ۴ که به اتحاد بیانچی مشهور است بیان می‌دارد که جمع حاصل از تغییردوری سه مولفه اول تانسور R_m برابر صفر است. این ویژگی تانسور خمیدگی نوع دوم را می‌توان در مولفه‌های آن نیز مشاهده کرد.

$$۱. R_{ijkl} = R_{jikl},$$

$$۲. R_{ijkl} = R_{ijlk},$$

$$۳. R_{ijkl} = R_{klij},$$

$$۴. R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl} = 0.$$

فصل ۳

ساختار هندسی معادلات دیفرانسیل

در این فصل با دیدگاهی هندسی دستگاه‌های معادلات دیفرانسیل را مطالعه خواهیم کرد. ابتدا منیفلد همواری تحت عنوان فضای کامل به دستگاه متناظر می‌شود به طوریکه جواب‌های این دستگاه زیرمنیفلدهای این فضا می‌باشند. آنالیز تقارنی که در ادامه معرفی شده است شرایطی را مورد مطالعه قرار می‌دهد که در بطن آن چگونگی تبدیل شدن زیرمنیفلدهای مذکور به یکدیگر مشخص شده است. به بیان دیگر آنالیز تقارنی با متناظر ساختن دسته‌ای از میدان‌های برداری روی فضای کامل معادله کمک می‌کند تا با داشتن یک جواب رده وسیعی از جواب‌های دیگر را بدست آوریم. نظریه تقارنی معادلات دیفرانسیل بسیار وسیع و گسترده می‌باشد. ما در این فصل با مبانی این نظریه آشنا خواهیم شد و در فصل آینده از آن استفاده خواهیم کرد [۲، ۶، ۷، ۱۰، ۱۱].

۱.۳ عمل گروه و نوردایی بی‌نهایت کوچک

تعریف ۱.۱.۳. فرض کنیم G یک گروه‌لی با جبرلی g باشد که روی M عمل می‌کند. آنگاه به ازای هر $v \in g$ مولد بی‌نهایت کوچک $\hat{v}$ متناظر با v در نقطه $p \in M$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\hat{v}_p = d\phi_p(v_e),$$

نگاشت ϕ به صورت $\phi_p : G \rightarrow M$ تعریف می‌شود به طوری که $g \rightarrow g \cdot p$ ، تعداد این مولدهای بی‌نهایت کوچک برابر با بعد گروه است.

۲.۳ گروه تبدیلات یک-پارامتری

تعریف ۱.۲.۳. در صفحه (x, y) تبدیلات زیر را تبدیلات یک پارامتری می‌نامیم:

$$x_1 = f(x, y, \varepsilon), \quad y_1 = f(x, y, \varepsilon),$$

هرگاه در خاصیت‌های زیر صدق کند:

۱. اگر $\varepsilon = 0$ باشد آنگاه تبدیل همانی بدست می‌آید.

$$x = f(x, y, 0), \quad y = f(x, y, 0),$$

۲. اگر پارامتر $-\varepsilon$ باشد آنگاه تبدیل وارون بدست می‌آید.

$$x = f(x, y, -\varepsilon), \quad y = f(x, y, -\varepsilon),$$

۳. (بسته بودن): یعنی اگر:

$$x_1 = f(x_1, y_1, \delta), \quad y_1 = f(x_1, y_1, \delta),$$

آنگاه آن نیز دوباره عضوی از گروه باشد و علاوه بر آن بتوان نتیجه گرفت که پارامتر $\varepsilon + \delta$ آن را بدست می‌دهد. یعنی:

$$x_1 = f(x_1, y_1, \varepsilon + \delta), \quad y_1 = f(x_1, y_1, \varepsilon + \delta),$$

همچنین می‌دانیم که خاصیت شرکت پذیری معمولی را می‌توان از خاصیت بسته بودن گروه نتیجه گرفت.

تعریف ۲.۲.۳. فرض کنیم G یک گروه تبدیلات باشد که روی منیفلد M عمل می‌کند. یک تابع G - ناوردا تابعی حقیقی مانند $I : M \rightarrow \mathbb{R}$ است به طوری که برای هر $g \in G, p \in M$

$$I(g \cdot p) = I(p).$$

۳.۳ تبدیلات و توابع و امتداددهی

تعریف ۱.۳.۳. یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با $-p$ متغیر مستقل $x = (x^1, \dots, x^p)$ و $-q$ متغیر وابسته $u = (u^1, \dots, u^q)$ را در نظر می‌گیریم. جواب این دستگاه تابعی به فرم $u = f(x)$ می‌باشد. همچنین فرض می‌کنیم x یک دستگاه مختصات روی $X \simeq \mathbb{R}^p$ و u یک دستگاه مختصات روی $U \simeq \mathbb{R}^q$ باشد.

تعریف ۲.۳.۳. فضای کامل برای دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = \circ$ ، متشکل از متغیرهای مستقل X و متغیرهای وابسته U به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$E = X \times U \simeq \mathbb{R}^{p+q},$$

که در آن p متغیرهای مستقل و q متغیرهای وابسته می‌باشد.

تعریف ۳.۳.۳. اگر E فضای کامل دستگاه معادلات دیفرانسیل $\Delta = \circ$ باشد، آنگاه تبدیل $g: E \rightarrow E$ را یک تقارن برای دستگاه می‌گوییم به طوریکه اگر $u = f(x)$ یک جواب دستگاه باشد، آنگاه $\tilde{u} = g \cdot u$ یک جواب جدید برای دستگاه باشد.

حال قبل از اینکه مراحل پیدا کردن تقارن‌های یک دستگاه را توضیح بدهیم ابتدا یک تعریف هندسی برای معادلات دیفرانسیل بیان می‌کنیم. برای اینکار لازم است که فضای کامل را به فضای مشتقات جزئی متغیرها گسترش دهیم. این گسترش منجر به تولید فضایی بزرگتر به نام فضای جت (فضای افشانه) می‌شود که دستگاه در آن قابل مطالعه است.

یک تابع حقیقی هموار مانند $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ که $X \simeq \mathbb{R}^p$ با ضابطه‌ی $f(x) = f(x^1, \dots, x^p)$ تعریف می‌شود، دارای تعداد $P_k = \binom{p+k-1}{k}$ ، مشتق جزئی متمایز از مرتبه k نسبت به متغیرهای $J = (j_1, \dots, j_k)$ هرگاه J یک اندیس چندگانه از متغیرهای تابع f باشد، آنگاه مشتق جزئی تابع f نسبت به J به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_k}},$$

همچنین مرتبه اندیس چندگانه J ، نشان دهنده‌ی مراتب مشتق‌گیری از تابع فوق است و با نماد $\#J = k$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۳.۳. فرض کنید $f: X \rightarrow U$ یک تابع p متغیره، q مقدار با ضابطه‌ی

$$u = f(x^1, \dots, x^p) = (f_1(x^1, \dots, x^p), \dots, f_q(x^1, \dots, x^p)),$$

باشد. در این صورت فضای تمام مشتقات جزئی این تابع تا مرتبه $-n$ ام را با

$$U^{(n)} := U \times U_1 \times \dots \times U_n, \quad (1.3)$$

نشان می‌دهیم، همچنین بعد فضای مشتقات جزئی برابر است با:

$$\begin{aligned} \dim U^{(n)} &= \dim U + \dim U_1 + \dots + \dim U_n \\ &= q + qp_1 + qp_2 + \dots + qp_n \\ &= q + \binom{p+1-1}{1} + \binom{p+2-1}{2} + \dots + \binom{p+n-1}{n} \\ &= q \binom{p+n}{n} = qp^{(n)}. \end{aligned}$$

تعریف ۵.۳.۳. با اضافه نمودن فضای متغیرهای مستقل به $U^{(n)}$ ، به فضای

$$J^{(n)} = X \times U^{(n)}, \quad (۲.۳)$$

دست می‌یابیم که به آن فضای جت مرتبه $-n$ ام تابع $u = f(x)$ گفته و آن را با نماد $J^{(n)}f$ نشان می‌دهیم، همچنین بعد این فضا برابر با $p + qp^{(n)}$ می‌باشد.

مثال ۱.۳.۳. تابع $u = f(x, y)$ را در نظر بگیرید که شامل دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته می‌باشد. برای یافتن $J^{(۲)}$ باید مشتقات جزئی تابع فوق را تا مرتبه دوم بنویسیم، در این صورت داریم:

$$J^{(۲)} = (x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}).$$

تعریف ۶.۳.۳. فرض کنیم $f : X \rightarrow U$ تابعی دلخواه باشد. امتداد مرتبه $-n$ ام تابع f را که با $f^{(n)}$ نشان می‌دهیم تابعی هموار به صورت

$$f^{(n)} : X \rightarrow U^{(n)},$$

است.

مثال ۲.۳.۳. با توجه به تعریف (۶.۳.۳) تابع $f = f(x, y)$ را تا مرتبه دوم امتداد می‌دهیم، در این صورت داریم:

$$f^{(۲)}(x, y) = (f, f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yy}).$$

۴.۳ دستگاه معادلات دیفرانسیل

تعریف ۱.۴.۳. یک دستگاه $-m$ معادله دیفرانسیل مرتبه $-n$ ام با $-p$ متغیر مستقل و $-q$ متغیر وابسته مانند Δ با فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ ، یک تابع هموار به صورت $\Delta : J^{(n)} \rightarrow \mathbb{R}^m$ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Delta(x, u^{(n)}) = (\Delta_1(x, u^{(n)}), \dots, \Delta_m(x, u^{(n)})). \quad (۱.۳)$$

بنابراین (۱.۳) یک دستگاه شامل $-m$ معادله دیفرانسیل جزئی (PDE) با $-p$ متغیر مستقل و $-q$ متغیر وابسته خواهد بود. همچنین به ازای $p = ۱$ ، دستگاه (۱.۳) یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) می‌باشد.

۵.۳ امتداد میدان‌های برداری و تقارن‌ها

در این بخش فرمول صریحی را برای یافتن تقارن‌های یک دستگاه معادلات دیفرانسیل دلخواه ارائه خواهیم کرد و در پی آن با مثال‌هایی الگوریتم محاسباتی مورد نظر را تبیین خواهیم کرد.

تعریف ۱.۵.۳. فرض کنید که $\mathcal{O} \subset E$ مجموعه‌ای باز بوده و $F(x, u^{(n)})$ تابعی هموار روی $J^{(n)}(\mathcal{O})$ باشد. منظور از مشتق کامل F نسبت به x^i تابعی هموار روی $J^{(n+1)}(\mathcal{O})$ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_i F(x, f^{(n+1)}(x)) = \frac{\partial}{\partial x^i} [F(x, u^{(n)})],$$

مثال ۱.۵.۳. برای نوشتن عملگر مشتق کامل مرتبه اول روی فضای $E \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ، ابتدا مختصات فضای جت مرتبه اول E را به صورت (x, u, u_x) ، در نظر می‌گیریم، بنابراین عملگر موردنظر به صورت:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x},$$

نوشته می‌شود.

مثال ۲.۵.۳. به طور مشابه عملگر مشتق کامل مرتبه دوم، روی فضای $E \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ با در نظر گرفتن مختصات (x, u, u_x, u_{xx}) ، به صورت:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}},$$

نوشته می‌شود.

مثال ۳.۵.۳. فرض کنیم فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ باشد. بنابراین تعداد متغیرهای مستقل دو، تعداد متغیرهای وابسته یک می‌باشد. مختصات فضای جت مرتبه دوم آن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(x, t, u, u_x, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}).$$

بنابراین عملگرهای مشتق کامل مرتبه دوم نسبت به متغیرهای مستقل x و t به صورت زیر می‌باشد:

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{xtt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}},$$

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xtt} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xtt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{ttt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}.$$

قضیه ۱.۵.۳. اگر v یک میدان برداری روی فضای $E \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ به صورت زیر باشد:

$$v = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{\alpha=1}^q \varphi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha},$$

آنگاه امتداد مرتبه $-n$ ام v از رابطه‌ی زیر بدست می‌آید:

$$v^{(n)} = v + \sum_{\alpha=1}^q \sum_{\#J=j=0}^n \varphi_\alpha^J(x, u^{(j)}) \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha}, \quad (1.3)$$

ضرایب φ_α^J که به ضرایب امتداد معروفند از تساوی

$$\varphi_\alpha^J = D_J Q^\alpha + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^\alpha, \quad (2.3)$$

بدست می‌آیند. همچنین عبارت:

$$Q^\alpha = \varphi^\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}, \quad (3.3)$$

را مشخصه میدان برداری v می‌نامیم.

برهان. قضیه را به ازای $n = 1$ ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم $g_\varepsilon = \exp(\varepsilon v)$ گروه یک-پارامتری نظیر میدان برداری v باشد که تبدیل آن با فرمول زیر است:

$$(\bar{x}, \bar{u}) = g_\varepsilon \cdot (x, u) = (\varphi_\varepsilon(x, u), \psi(x, u)),$$

9

$$\begin{aligned} \xi^i(x, u) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varphi_\varepsilon^i(x, u), & i = 1, 2, \dots, p, \\ \varphi_\alpha(x, u) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \psi_\varepsilon^\alpha(x, u), & \alpha = 1, 2, \dots, q, \end{aligned}$$

به طور کلی $\varphi_\varepsilon^i, \psi_\varepsilon^\alpha$ مولفه‌های $\varphi_\varepsilon, \psi_\varepsilon$ هستند. به ازای $(x, u) \in E$ و $(x, u^{(1)}) \in j^1(\mathcal{O})$ تابع $u = f(x)$ با امتداد مرتبه $u^{(1)} = f^{(1)}(x)$ و مولفه‌های $u_i^\alpha = \frac{\partial f^\alpha(x)}{\partial x^i}$ ، $u^\alpha = f^\alpha(x)$ مفروض است. با انتخاب ε به اندازه کافی کوچک، تبدیل f تحت g_ε خوش‌تعریف است و به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\bar{u} = \bar{f}_\varepsilon(\bar{x}) = (g_\varepsilon \cdot f)(\bar{x}) = [\psi_\varepsilon \circ (Id \times f)] \circ [\varphi_\varepsilon \circ (Id \times f)^{-1}](\bar{x}),$$

با استفاده از قاعده‌ی مشتق زنجیری ماتریس ژاکوبین،

$$J\bar{f}_\varepsilon(x) = \left(\frac{\partial \bar{f}_\varepsilon^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \right),$$

به فرض $x = [\varphi_\varepsilon \circ (Id \times f)]^{-1}(\bar{x})$ به شکل،

$$J\bar{f}_\varepsilon(\bar{x}) = J[\psi_\varepsilon \circ (Id \times f)](x) \cdot J\varphi_\varepsilon \circ (Id \times f)(x), \quad (4.3)$$

نوشته می‌شود. بسط فرمول (۴.۳) امتدا مرتبه اول $g_\varepsilon^{(1)}$ را بدست می‌دهد. برای یافتن مولد بی‌نهایت کوچک $v^{(1)}$ ، باید از (۴.۳) نسبت به ε مشتق بگیریم و در نهایت قرار دهیم $\varepsilon = 0$ و اگر $\Xi(\varepsilon)$ یک ماتریس مربعی وارون‌پذیر از توابع وابسته به ε باشد، آنگاه:

$$\frac{d}{d\varepsilon} [\Xi(\varepsilon)^{-1}] = -\Xi(\varepsilon)^{-1} \frac{d\Xi(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Xi(\varepsilon)^{-1},$$

هرگاه $\varepsilon = \circ$ باشد داریم:

$$\varphi_{\circ}(x, f(x)) = x, \quad \psi_{\circ}(x, f(x)) = f(x), \quad (5.3)$$

بنابراین اگر I ماتریس همانی $p \times p$ باشد، آنگاه:

$$J[\varphi_{\circ} \circ (I \, d \times f)](x) = I \, d, \quad J[\xi_{\circ} \circ (I \, d \times f)](x) = Jf(x),$$

حال با مشتق‌گیری از (۴.۳) در نقطه $\varepsilon = \circ$ ، و با استفاده از قاعده لایپ‌نیتس روابط زیر بدست می‌آیند،

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\circ} J\bar{f}_{\varepsilon}(\bar{x}) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\circ} J[\psi_{\varepsilon} \circ (I \, d \times f)](x) - Jf(x) \cdot \left. \frac{d}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\circ} J[\varphi_{\varepsilon} \circ (I \, d \times f)](x) \\ &= J[\varphi_{\circ} \circ (I \, d \times f)](x) - Jf(x) \cdot J[\xi_{\circ} \circ (I \, d \times f)](x), \end{aligned} \quad (6.3)$$

توجه می‌شود که در تساوی دوم عبارت بالا $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^p)^T$ و $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^q)^T$ دو بردار ستونی هستند. درایه‌های ماتریس رابطه (۶.۳) ضرایب φ_{α}^k عبارت $\frac{\partial}{\partial x^k}$ را در $v^{(1)}$ مشخص می‌کند، به عنوان مثال درایه $(\alpha, k) -$ ام برابر است با:

$$\varphi_{\alpha}^k(x, u^{(1)}) = \frac{\partial}{\partial x^k} [\varphi_{\alpha}(x, f(x))] - \sum_{i=1}^p \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial}{\partial x^k} [\xi^i(x, f(x))],$$

لذا اگر قرار دهیم $u_{k,i}^{\alpha} = \frac{\partial^2 u^{\alpha}}{\partial x^k \partial x^i}$ ، با به کارگیری مشتق کامل رابطه بالا به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha}^k(x, u^{(1)}) &= D_k[\varphi_{\alpha}(x, u)] - \sum_{i=1}^p D_k[\xi^i(x, u)] u_i^k \\ &= D_k[\varphi_{\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^{\alpha}}] + \sum \xi^i u_{k,i}^{\alpha}, \end{aligned} \quad (7.3)$$

حال قضیه را در حالت عمومی اثبات می‌کنیم. ابتدا باید توجه کنیم که $J^{(n+1)}(\mathcal{O})$ را می‌توان به عنوان زیرفضایی از $J^1(j^n(\mathcal{O}))$ در نظر گرفت (زیرا مشتق مرتبه $(n+1) -$ ام u_J^{α} را می‌توان به عنوان مشتق مرتبه اول مشتقات مرتبه اول $-n$ ام در نظر گرفت). پس به کمک استقرا میتوان $v^{(n)}$ را از روی $v^{(n-1)}$ بدین صورت ساخت. فرض کنیم $v^{(n-1)}$ یک میدان برداری روی $J^{(n-1)}(\mathcal{O})$ باشد، بنابراین با یک بار امتداد دادن آن یک میدان برداری در $J^1(J^{(n+1)}(\mathcal{O}))$ می‌رسیم، که ضرایب آن به ازای اندیس چندگانه $1 \leq k \leq p$ ، $J = (j^1, \dots, j^k)$ ، $\alpha = 1, \dots, q$ ، برابر با $u_{J,k}^{\alpha} = \frac{\partial u_J^{\alpha}}{\partial x^k}$ حال با توجه به (۷.۳) ضرایب $\frac{\partial}{\partial x^k}$ در امتداد مرتبه اول $v^{(n-1)}$ برابر خواهند بود با:

$$\varphi_{\alpha}^{J,k} = D_k \varphi_{\alpha}^J - \sum_{i=1}^p D_k \xi^k \cdot u_{J,i}^{\alpha} \quad (8.3)$$

حال داریم:

$$\begin{aligned}\varphi_{\alpha}^{J,k} &= D_k D_J(\varphi_{\alpha} - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^{\alpha}) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i}^{\alpha} - \sum_{i=1}^p D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^{\alpha} \\ &= D_k D_J(\varphi_{\alpha} - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^{\alpha}) + \sum_{i=1}^p (D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^{\alpha} + \xi^i u_{J,i,k}) - \sum_{i=1}^p D_k \xi^i \cdot u_{J,i}^{\alpha} \\ &= D_k D_J(\varphi_{\alpha} - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^{\alpha}) + \sum_{i=1}^p \xi^i u_{J,i,k}.\end{aligned}\quad (9.3)$$

□

قضیه ۲.۵.۳. تقارن‌های یک دستگاه معادلات دیفرانسیل، تشکیل یک جبرلی می‌دهند.

□

برهان. [۱۰]

قضیه ۳.۵.۳. فرض کنیم G یک گروه لی همبند باشد که روی فضای کامل متناظر با دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه $-n$ ام $\Delta = \circ$ عمل میکند. G یک گروه تقارن برای این دستگاه است هرگاه به ازای هر مولد بی‌نهایت کوچک v از جبرلی گروه G داشته باشیم:

$$v^{(n)}(\Delta) \equiv \circ, \quad \text{mod } \Delta.$$

□

برهان. [۱۰]

ترکیب هر سه قضیه فوق نشان می‌دهد که برای یافتن گروه تقارنی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل ابتدا لازم است که جبرلی مولدهای تقارن را بدست آوریم. در نهایت با فرآیندی که بعداً توضیح داده خواهند شد به کمک جبرلی تقارن‌ها می‌توان گروه لی تقارن دستگاه را بدست آورد.

مثال ۴.۵.۳. با یک مثال ساده شروع می‌کنیم. می‌خواهیم تقارن‌های معادله دیفرانسیل معمولی $u_{xx} = \circ$ را بدست آوریم. مولدهای تقارن معادله عبارتست از:

$$v = \xi(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \varphi(x, u) \frac{\partial}{\partial u},$$

حال به کمک قضیه (۱.۵.۳) باید ضرایب $\xi(x, u)$ و $\varphi(x, u)$ را بدست آوریم. چون معادله مرتبه دو است، بنابراین میدان برداری فوق را باید تا مرحله دوم امتداد داده و با استفاده از قضیه (۱.۵.۳) تقارن‌ها را بیابیم.

امتداد مرتبه دوم v برابر است با:

$$v^{(2)} = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \varphi \frac{\partial}{\partial u} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}}.$$

با توجه به اینکه مشخصه میدان برداری v از رابطه $Q = \varphi - \xi u_x$ بدست می‌آید، ضرایب φ^{xx}, φ^x را به شکل زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\varphi^x &= D_x Q + \xi u_{xx} = \varphi_x \\ &= (\varphi_u - \xi_x)u_x - \xi_u u_x^2, \\ \varphi^{xx} &= D_x^2 Q + \xi u_{xxx} \\ &= \varphi_{xx} + (\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \xi_{uu}u_x^2 + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 + (\varphi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 3\xi_u u_x u_{xx},\end{aligned}$$

حال با اثر $v^{(2)}$ بر معادله داریم:

$$v^{(2)}(u_{xx}) = \varphi^{xx} = 0$$

یعنی:

$$\varphi_{xx} + (\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \xi_{uu}u_x^2 + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 + (\varphi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 3\xi_u u_x u_{xx} = 0,$$

با جایگذاری $u_{xx} = 0$ در بالا داریم:

$$\varphi_{xx} + (\varphi_{xu} - \xi_{xx})u_x + (\varphi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - \xi_{uu}u_x^3 = 0,$$

حال با مساوی قرار دادن ضرایب مشتقات تابع u در طرف تساوی بالا داریم:

$$\begin{cases} \varphi_{xx} = 0, & (1) \\ \varphi_{xu} - \xi_{xx} = 0, & (2) \\ \varphi_{uu} - 2\xi_{xu} = 0, & (3) \\ -\xi_{uu} = 0. & (4) \end{cases}$$

از معادله (۱) مشخص می‌شود که $\varphi_{xx} = a(u)x + b(u)$ ، همچنین از معادله (۲) مشخص می‌شود که $\varphi_x = a$ و از (۳) نتیجه می‌شود $\varphi_{xx} = 0$ ، از معادله‌ی (۴) نتیجه می‌شود $\xi = c(x)u + d(x)$. بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{aligned}\xi &= c_1 x^2 + c_2 xu + c_3 x + c_4 u + c_5, \\ \varphi &= c_1 xu + c_2 u^2 + c_6 x + c_7 u + c_8.\end{aligned}$$

که $c_1, \dots, c_8$ ثابت‌هایی دلخواه هستند. پس جبرلی تقارن‌های معادله $u_{xx} = 0$ یک جبرلی

۸- بعدی است که توسط مولدهای بی‌نهایت کوچک زیر تولید می‌شود،

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ v_2 &= \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_3 &= x \frac{\partial}{\partial x}, \\ v_4 &= x \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_5 &= u \frac{\partial}{\partial x}, \\ v_6 &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_7 &= x^2 \frac{\partial}{\partial x} + xu \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_8 &= xu \frac{\partial}{\partial x} + u^2 \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

مثال ۵.۵.۳. معادله دیفرانسیل جزئی مرتبه دوم زیر را در نظر بگیرید،

$$u_t = u_{xx} + u_x^2. \quad (۱۰.۳)$$

این معادله از دو متغیر مستقل و یک متغیر وابسته با فضای کامل $E \simeq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ تشکیل شده است. پس لازم است برای یافتن تقارن‌ها، یک میدان برداری به صورت زیر انتخاب شود،

$$v = \xi^1(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \varphi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}. \quad (۱۱.۳)$$

چون معادله (۱۰.۳) مرتبه دوم است لازم است که امتداد مرتبه دوم میدان برداری (۱۱.۳) یعنی،

$$v^{(2)} = v + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \quad (۱۲.۳)$$

را روی معادله اثر بدهیم. ضرایب امتداد این میدان عبارتند از:

$$\begin{aligned} \varphi^x &= D_x(\varphi - \xi^1 u_x - \xi^2 u_t) + \xi^1 u_{xx} + \xi^2 u_{xt}, \\ \varphi^t &= D_t(\varphi - \xi^1 u_x - \xi^2 u_t) + \xi^1 u_{tx} + \xi^2 u_{tt}, \\ \varphi^{xx} &= D_{xx}(\varphi - \xi^1 u_x - \xi^2 u_t) + \xi^1 u_{xxx} + \xi^2 u_{xxt}, \\ \varphi^{xt} &= D_{xt}(\varphi - \xi^1 u_x - \xi^2 u_t) + \xi^1 u_{xtx} + \xi^2 u_{xtt}, \\ \varphi^{tt} &= D_{tt}(\varphi - \xi^1 u_x - \xi^2 u_t) + \xi^1 u_{xtt} + \xi^2 u_{ttt}, \end{aligned} \quad (۱۳.۳)$$

که در آن D_x و D_t عملگرهای مشتق کامل زیر هستند:

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + u_x \frac{\partial}{\partial u} + u_{xx} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xxt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{xtt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}, \\ D_t &= \frac{\partial}{\partial t} + u_t \frac{\partial}{\partial u} + u_{xt} \frac{\partial}{\partial u_x} + u_{tt} \frac{\partial}{\partial u_t} + u_{xtt} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + u_{xtt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + u_{ttt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}}. \end{aligned}$$

با اثر دادن (۱۲.۳) بر (۱۰.۳) داریم:

$$\varphi^t = \varphi^{xx} + 2\varphi^x u_x \quad (14.3)$$

با جایگذاری ضرایب (۱۳.۳) در (۱۴.۳) و فاکتورگیری از ضرایب مشتقات به دستگاه مشخصه،

$$\begin{aligned} \xi_{ttt}^2 &= 0, & \varphi_{tu} &= -\varphi_t - \frac{1}{4}\xi_{tt}^2, & \varphi_{uu} &= -\varphi_u, \\ \varphi_{xx} &= \varphi_t, & \xi_u^2 &= 0, & \xi_x^2 &= 0, & \xi_t^1 &= -2\varphi_{ux} - 2\varphi_x, \\ \xi_u^1 &= 0, & \xi_x^1 &= \frac{1}{4}\xi_t^2, \end{aligned}$$

می‌رسیم که حل آن منجر به یافتن ضرایب (۱۱.۳) به شرح زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{\lambda}(-x^2 - 2t)c_1 + c_4 x + c_5, \\ \xi^2 &= \frac{1}{4}c_1 t^2 + c_2 t + c_3, \\ \xi^1 &= \frac{1}{4}(c_1 x - 4c_4)t + \frac{1}{4}c_2 x + c_9, \end{aligned}$$

که $c_1, c_2, \dots, c_9$ ثابت‌های دلخواهی هستند. بنابراین تقارن‌های معادله (۱۰.۳) با مولدهای زیر تولید می‌شوند،

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial}{\partial t}, \\ v_2 &= \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_3 &= \frac{\partial}{\partial x}, \\ v_4 &= -2t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_5 &= \frac{1}{4}x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t}, \\ v_6 &= \frac{1}{4}tx \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{4}t^2 \frac{\partial}{\partial t} + (-\frac{1}{\lambda}x^2 - \frac{1}{4}t) \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

مثال ۶.۵.۳. در قرن نوزدهم دو فیزیکدان به نام‌های مکس بورن^۱ و لئوپولد اینفلد^۲ نظریه کلاسیک الکترومغناطیس را تعمیم دادند. این نظریه در فیزیک ذرات بنیادی و نظریه ریسمان کاربرد فراوانی دارد. این تئوری به کمک یک PDE غیر خطی مرتبه دوم به شکل،

$$(1 - u_t^2)u_{xx} + 2u_x u_t u_{xt} - (1 + u_x^2)u_{tt} = 0, \quad (15.3)$$

توصیف می‌شود. همانطور که از ظاهر معادله پیداست برای یافتن تقارن‌های آن یک میدان برداری به فرم (۱۱.۳) را در نظر می‌گیریم. چون معادله مرتبه دو است باید میدان برداری

^۱Max Born

^۲Leopold Infeld

مورد نظر را تا مرتبه دو امتداد بدهیم. با اثر امتداد مرتبه دوم میدان روی معادله بورن-اینفلد خواهیم داشت:

$$(1 - u_t^2)\varphi^{xx} - 2u_t u_{xx}\varphi^t + 2u_t u_{xt}\varphi^x + 2u_x u_{xt}\varphi^t + 2u_x u_t\varphi^{xt} - (1 + u_x^2)\varphi^{tt} + 2u_x u_{tt}\varphi^x = 0. \quad (16.3)$$

با بسط دادن دستگاه (۱۶.۳) و فاکتورگیری از مشتقات u دستگاه معادلات مشخصه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \xi_{xx}^2 &= \xi_{xu}^2 = \xi_{tt}^2 = \xi_{uu}^2 = 0, \\ \xi_x^1 &= \xi_t^2, \quad \xi_t^1 = \xi_x^2, \quad \xi_u^1 = -\varphi_x, \\ \xi_t^2 &= -\varphi_u, \quad \xi_u^2 = \varphi_t, \quad \xi_{tu}^2 = -\varphi_{xx}. \end{aligned}$$

با حل دستگاه فوق ضرایب ξ^1, ξ^2, φ به شرح زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= c_1 + c_4 t - c_5 u + c_7 x, \\ \xi^2 &= c_2 + c_4 x + c_6 u + c_7 t, \\ \varphi &= c_3 + c_5 x + c_6 t + c_7 u. \end{aligned}$$

بنابراین مولدهای جبرلی تقارن‌های معادله (۱۵.۳) عبارتند از:

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, \quad v_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad v_3 = \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_4 &= t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t}, \quad v_5 = -u \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_6 &= u \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial u}, \quad v_7 = x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial u}. \end{aligned}$$

مثال ۷.۵.۳. معادله دیفرانسیل انتشار موج (۳+۱)-بعدی در حالت کلی یک PDE مرتبه دوم به صورت،

$$u_{tt} = (f(u)u_x)_x + (g(u)u_y)_y + (h(u)u_z)_z + k(u), \quad (17.3)$$

می‌باشد به طوریکه k, h, g, f توابعی هموار از u می‌باشند. به ازای $1 = f = g = h$ و $k = 0$ معادله (۱۷.۳) به معادله،

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}, \quad (18.3)$$

کاهش می‌یابد. همانطور که دیده می‌شود هر تقارن این معادله یک میدان برداری به شکل،

$$v = \xi^1 \frac{\partial}{\partial t} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^3 \frac{\partial}{\partial y} + \xi^4 \frac{\partial}{\partial z} + \varphi \frac{\partial}{\partial u},$$

می‌باشد. با اثر دادن امتداد مرتبه دوم این میدان برداری روی معادله (۱۸.۳) داریم:

$$\varphi^{tt} = \varphi^{xx} + \varphi^{yy} + \varphi^{zz},$$

که در آن،

$$\begin{aligned}\varphi^{tt} &= D_{tt}(\varphi - \xi^1 u_t - \xi^2 u_x - \xi^3 u_y - \xi^4 u_z) + \xi^1 u_{ttt} + \xi^2 u_{xtt} + \xi^3 u_{ytt} + \xi^4 u_{ztt}, \\ \varphi^{xx} &= D_{xx}(\varphi - \xi^1 u_t - \xi^2 u_x - \xi^3 u_y - \xi^4 u_z) + \xi^1 u_{txx} + \xi^2 u_{xxx} + \xi^3 u_{yxx} + \xi^4 u_{zxx}, \\ \varphi^{yy} &= D_{yy}(\varphi - \xi^1 u_t - \xi^2 u_x - \xi^3 u_y - \xi^4 u_z) + \xi^1 u_{tyy} + \xi^2 u_{xyy} + \xi^3 u_{yyy} + \xi^4 u_{zyy}, \\ \varphi^{zz} &= D_{zz}(\varphi - \xi^1 u_t - \xi^2 u_x - \xi^3 u_y - \xi^4 u_z) + \xi^1 u_{tzz} + \xi^2 u_{xzz} + \xi^3 u_{yzz} + \xi^4 u_{zzz},\end{aligned}$$

حال با بسط ضرایب فوق و حل دستگاه معادلات مشخصه تقارن‌های معادله موج به شرح زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{\partial}{\partial x}, & v_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & v_3 &= \frac{\partial}{\partial z}, & v_4 &= \frac{\partial}{\partial t}, & v_5 &= u \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_6 &= z \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial z}, & v_7 &= t \frac{\partial}{\partial y} + y \frac{\partial}{\partial t}, & v_8 &= z \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial z}, \\ v_9 &= t \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial t}, & v_{10} &= z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, & v_{11} &= y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}, \\ v_{12} &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z} + t \frac{\partial}{\partial t}, \\ v_{13} &= \frac{1}{t}(y^2 + z^2 - x^2 - t^2) \frac{\partial}{\partial x} - xy \frac{\partial}{\partial y} - xz \frac{\partial}{\partial z} - xt \frac{\partial}{\partial t} - xu \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_{14} &= xz \frac{\partial}{\partial x} + yz \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{t}(t^2 + z^2 - x^2 - y^2) \frac{\partial}{\partial z} + tz \frac{\partial}{\partial t} - zu \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_{15} &= xy \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{t}(y^2 + t^2 - x^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial y} + yz \frac{\partial}{\partial z} + yt \frac{\partial}{\partial t} - yu \frac{\partial}{\partial u}, \\ v_{16} &= tx \frac{\partial}{\partial x} + ty \frac{\partial}{\partial y} + tz \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{t}(x^2 + t^2 - y^2 - z^2) \frac{\partial}{\partial t} - tu \frac{\partial}{\partial u}.\end{aligned}$$

مثال ۸.۵.۳. به عنوان آخرین نمونه معادله زومرون^۱ را در نظر می‌گیریم که یک PDE مرتبه چهارم غیرخطی به صورت زیر است،

$$\left(\frac{u_{xt}}{u}\right)_{tt} - \left(\frac{u_{xt}}{u}\right)_{xx} + 2(u^2)_{xt} = 0. \quad (19.3)$$

برای یافتن تقارن‌ها ضرورت دارد که معادله را بسط دهیم. شکل مبسوط معادله (۱۹.۳) عبارتست از:

$$\begin{aligned}u^2 u_{xttt} - uu_{tt} u_{xt} - 2uu_t u_{xtt} + 2u_t^2 u_{xt} - u^2 u_{xxx} + uu_{xx} u_{xt} + 2uu_x u_{xxt} \\ - 2u_x u_{xt} + 4u_x u_t u^2 + 4u^4 u_{xt} = 0.\end{aligned} \quad (20.3)$$

¹Zoomeron

با توجه به متغیرهای معادله و مرتبه آن لازم است که میدان برداری (۱۱.۳) را تا مرتبه چهارم امتداد بدهیم. بنابراین:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(4)} = & \mathbf{v} + \varphi^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \varphi^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \varphi^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \varphi^{xt} \frac{\partial}{\partial u_{xt}} + \varphi^{tt} \frac{\partial}{\partial u_{tt}} \\ & + \varphi^{xxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxx}} + \varphi^{xxt} \frac{\partial}{\partial u_{xxt}} + \varphi^{xtt} \frac{\partial}{\partial u_{xtt}} + \varphi^{ttt} \frac{\partial}{\partial u_{ttt}} \\ & + \varphi^{xxxx} \frac{\partial}{\partial u_{xxxx}} + \varphi^{xxxt} \frac{\partial}{\partial u_{xxxt}} + \varphi^{xxtt} \frac{\partial}{\partial u_{xxtt}} + \varphi^{xttt} \frac{\partial}{\partial u_{xttt}} + \varphi^{tttt} \frac{\partial}{\partial u_{tttt}}. \end{aligned}$$

حال با اثر دادن $\mathbf{v}^{(4)}$ بر معادله (۲۰.۳) داریم:

$$\begin{aligned} & u^2 \varphi^{xttt} + 2uu_{xttt}\varphi - u_{xt}u_{tt}\varphi - uu - tt\varphi^{xt} - uu_{xt}\varphi^{tt} \\ & - 2(u_t u_{xtt}\varphi + u_x u_{tt}\varphi^t + uu_t\varphi^{xtt}) \\ & + 2(u_t u_{xt}\varphi^t + u_t^2 \varphi^{xt}) - 2uu_{xxxt}\varphi - u^2 \varphi^{xxxt} \\ & + u_{xx}u_{xt}\varphi + uu_{xt}\varphi^{xx} + uu_{xx}\varphi^{xt} \\ & + 2(u_x u_{xxt}\varphi + uu_{xxt}\varphi^x + uu_x\varphi^{xxt}) \\ & - 2(2u_x u_{xt}\varphi^x + u_x^2 \varphi^{xt}) + 4(3u^2 u_x u_t \varphi + u^3 u_t \varphi^x + u^3 u_x \varphi^t) \\ & + 4(4u^3 u_{xt}\varphi + u^3 \varphi^{xt}) = 0. \end{aligned}$$

ضرایب مرتبه اول و دوم امتداد در مثال‌های قبلی محاسبه شده است. حال لازم است که ضرایب سوم و چهارم امتداد را به شرح زیر بدست آوریم:

$$\begin{aligned} \varphi^{xxt} &= D_{xxt}(\varphi - \xi^1 u_x - \xi^2 u_t) + \xi^1 u_{xxxt} + \xi^2 u_{xxtt}, \\ \varphi^{xtt} &= D_{xtt}(\varphi - \xi^1 u_x - \xi^2 u_t) + \xi^1 u_{xttt} + \xi^2 u_{xttt}, \\ \varphi^{xxx} &= D_{xxx}(\varphi - \xi^1 u_x - \xi^2 u_t) + \xi^1 u_{xxxx} + \xi^2 u_{xxxxt}, \\ \varphi^{xttt} &= D_{xttt}(\varphi - \xi^1 u_x - \xi^2 u_t) + \xi^1 u_{xtttt} + \xi^2 u_{xtttt}, \end{aligned}$$

با محاسبه ضرایب فوق و جایگذاری آن در معادلات مشخصه یک جبرلی سه-بعدی با مولدهای زیر برای تقارن‌های معادله زومرون بدست می‌آید:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{v}_3 = x \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial t} - u \frac{\partial}{\partial u}.$$

فصل ۴

فضا- زمان ریندلر

در این فصل به مطالعه یکی از کاربردهای هندسه دیفرانسیل در فیزیک نظری می‌پردازیم و با معرفی متریک ریندلر و ژئودزیک‌های آن، به کمک مفهوم تقارن‌های معادلات دیفرانسیل به بحث و رده‌بندی جواب‌ها خواهیم پرداخت.

در اواخر قرن نوزدهم فیزیکدانان در طی آزمایشاتی دریافتند که مفاهیم فضا و زمان در مکانیک نیوتنی عیوبی دارد. برای نمونه ذره‌ای که در نزدیکی سرعت نور حرکت می‌کند، گذشت زمانی متفاوت را نسبت به ذره ساکن تجربه می‌کند. مشاهده می‌شود انرژی و مومنتوم ذرات به طور ناگهانی به دستگاه مختصات وابسته می‌شوند. این وابستگی به معنای آن است که فضا و زمان نمی‌توانند مطلق باشند. برای نمونه یک ساعت نوری، گذشت زمانی متفاوت را نسبت دو ناظر مختلف اندازه‌گیری می‌کند. حتی دو ناظر ساکن و متحرک، شکل متفاوتی را از ساعت متحرک می‌بینند. به این پدیده اتساع زمان گفته می‌شود که در نسبیت خاص به آن پرداخته شده است.

این وابستگی در ابتدا در نسبیت خاص انیشتین توضیح داده شد. در این نظریه برخی از خاصیت‌ها همچون جرم ذره ساکن و سرعت نور، غیر قابل تغییر در نظر گرفته می‌شوند. اما برخی از ویژگی‌ها وابسته به نحوه حرکت در فضا و زمان است. در سال ۱۹۰۷ استاد سابق انیشتین، «هرمان مینکوفسکی»^۱ ایده‌ای انقلابی را مطرح کرد. او نشان داد که فضا و زمان را می‌توان در قالب یک مفهوم و یک عبارت بیان کرد. او فرمولی را ارائه داد که توصیف کننده

^۱Hermann Minkowski

بستر حرکت و کنش ذرات با یکدیگر هستند. این جمله به معنای آن است که تجربه شما از محیط اطراف وابسته به نحوه حرکت شما در فضا و زمان است. با این حال این رابطه گرانش را در خود نداشت. فضا زمانی که او توسعه داد امروزه تحت عنوان فضای مینکوفسکی شناخته می‌شود. از این نوع بیان فضا-زمان در کوانتوم مکانیک نیز استفاده می‌شود.

اگر نیروی گرانش حذف شود، فضای مینکوفسکی تمامی پرسش‌ها را در مورد نحوه حرکت ذره پاسخ می‌دهد. در این حالت فضا-زمان، بدون خمیدگی و خالی بوده و بستر مورد نیاز جهت حرکت و کنش ذرات را با یکدیگر فراهم می‌کند. توجه داشته باشید که زمانی شما شتاب را احساس می‌کنید که در کنش با ذره یا جسم دیگری قرار گیرید. برای نمونه ممکن است شخصی شما را هل داده و شما به سمت جلو حرکت کنید. اما در دنیای واقعی نیروی گرانش نیز عاملی است که می‌تواند به ذرات شتاب وارد کند. این آلبرت انیشتین بود که برای اولین بار با استفاده از آزمایشی ذهنی نیروی گرانش را با شتاب جایگزین کرد.

بیان مینکوفسکی بستری از فضا-زمان را توصیف می‌کند که تحت گرانش قرار نگرفته است. این در حالی است که یک جرم، فضا و زمان اطرافش را خم می‌کند. ارتباط بین فضای تخت مینکوفسکی و فضای خمیده ناشی از وجود جرم، با استفاده از نسبیت عام قابل توصیف است. فرمول‌بندی ریاضیاتی نسبیت عام، تحت عنوان تانسور متریک یا تانسور متریک انیشتین شناخته می‌شود. البته هندسه ریمانی نیز می‌تواند این فضا زمان را توصیف کند. ریمان، ریاضیدان قرن نوزدهم است که نحوه تغییر هر نوع میدان، طول، هندسه و فاصله بین نقاط را در فضای خمیده فرمول‌بندی کرده است [۹، ۱۲].

انیشتین تقریباً یک دهه را روی فرمول‌بندی ریاضیاتی مفهوم گرانش وقت گذاشت و نهایتاً شکل کلی معادله نسبیت عام را ارائه داد. این معادله بیان می‌کند که جرم چگونه فضای اطرافش را خم می‌کند. هم‌چنین نحوه حرکت یک جرم در فضا زمان خمیده نیز با استفاده از نسبیت عام قابل توصیف است.

قانون اول نیوتن می‌گوید اگر به جسم در حال حرکت نیرویی وارد نشود، مسیر و جهت حرکت جسم ثابت خواهد ماند. بیان نسبیتی این گزاره آن است که اگر جسمی در فضا-زمانی تخت در حال حرکت باشد، مسیرش تغییر نخواهد کرد. این در حالی است که جسم قرار گرفته در فضا-زمان خمیده، مسیر خمیده شده را طی می‌کند.

از نظر فیزیکی پارامترهای بسیاری هستند که در تانسور متریک تاثیرگذارند. گرانش در نتیجه جرم و نحوه توزیع آن ایجاد می‌شود. در نسبیت عام این تاثیر را با استفاده از مفهوم چگالی مورد بررسی قرار می‌دهند. با این حال جالب است بدانید که نحوه توزیع جرم تنها یکی از ۱۶ پارامتری است که در توضیح شکل فضا-زمان تاثیرگذار است. در این تانسور مولفه‌های فشاری همچون فشار تابشی، فشار خلا و فشار ناشی از حرکت سریع ذرات نیز سه مولفه‌ای هستند که در تانسور متریک تاثیرگذارند.

نهایتاً ۶ مولفه دیگر نحوه تغییر شکل حجم را در حضور جرم‌ها توضیح می‌دهند. هم‌چنین این مولفه‌ها نحوه تغییر شکل اجسام در حال حرکت را توصیف می‌کنند. رابطه بین جرم،

انرژی و فضا زمان در تمامی سیستم‌ها از جمله زمین تا ستاره نوترونی و حتی برای امواج گرانشی برقرار است.

توجه داشته باشید که تانسور متریک 4×4 بوده، اما متقارن است. در حقیقت این تانسور 4 مولفه قطری (چگالی و مولفه‌های فشار) و 6 مولفه غیرقطری (مولفه‌های تغییر حجم) دارد که این مولفه‌ها نسبت به یکدیگر مستقل هستند. 6 مولفه دیگر غیر قطری با استفاده از مفهوم تقارن تعیین می‌شوند.

متریک، ارتباط بین کل ماده و انرژی موجود در عالم را برای ما توصیف می‌کند. هم‌چنین نحوه خمیدگی فضا زمان در عالم نیز با استفاده از این تانسور بیان می‌شود. در حقیقت نسبیت عام به حدی قدرتمند است که اگر شما دانسته باشید که تمام انرژی و ماده موجود در جهان کجا بوده و چه فعالیتی داشته‌اند، آن‌گاه می‌توانید فرآیند عالم از گذشته، حال و آینده را درک کنید.

۱.۴ معرفی فضا- زمان ریندلر

در فیزیک نسبیتی، جدول مختصات ریندلر یک جدول مختصات مهم و مفید است که بخشی از فضا زمان تخت مارا نشان می‌دهد.

جدول ریندلر توسط ولفگانگ ریندلر معرفی شد. دستگاه مختصات ریندلر یک چارچوب مرجع شتابدار با شتاب ثابت را در فضا زمان مینکوفسکی نمایش می‌دهد. در نسبیت خاص یک ذره با شتاب ثابت دچار حرکت هایبربولیک می‌شود. برای چنین ذره‌ای می‌توان چارچوب ریندلری یافت که آن ذره ساکن باشد.

تعریف ۱.۱.۴. مختصات فضا- زمان ریندلر با مختصات (t, x, y, z) نوشته می‌شود که به وسیله‌ی معادلات هذلولوی زیر بیان می‌شود:

$$T = x \sinh(\alpha t),$$

$$X = x \cosh(\alpha t),$$

$$Y = y,$$

$$Z = z.$$

تعریف ۲.۱.۴. متریک ریندلر یک متریک شبه ریمانی و با مختصات (t, x, y, z) است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$g = -dT^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

که در آن،

$$dT = \alpha x \cosh(\alpha t) dt + \sinh(\alpha t) dx,$$

$$dX = \alpha x \sinh(\alpha t) dt + \cosh(\alpha t) dx,$$

$$dY = dy,$$

$$dZ = dz,$$

بنابراین صورت متریک ریندلر عبارتست از:

$$g = -(\alpha x)^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

با توجه به این متریک داریم:

$$g_{tt} = -(\alpha x)^2,$$

$$g_{xx} = 1,$$

$$g_{yy} = 1,$$

$$g_{zz} = 1,$$

بنابراین تانسور ضرایب متریک ریمانی g به شکل زیر است،

$$\begin{pmatrix} -(\alpha x)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

۲.۴ ژئودزیک‌های متریک ریندلر

درفصل دوم ژئودزیک‌ها از دیدگاه هندسی بررسی شدند. در فیزیک، کوتاه‌ترین مسیری که یک ذره آزاد می‌کند ژئودزیک نام دارد. در فضا- زمان تخت ژئودزیک‌ها خط مستقیم هستند ولی در فضا- زمان خمیده ژئودزیک‌ها براساس نوع متریک و مختصات خاص آن فضا- زمان نوشته می‌شوند.

با توجه به متریک ریندلر و ضرایب متریک، کریستوفل‌های غیر صفر عبارتند از:

$$\Gamma_{tx}^t = \Gamma_{xt}^t = \frac{1}{x},$$

$$\Gamma_{tt}^x = \alpha^2 x,$$

بنابراین خم $c(t) = (t(s), x(s), y(s), z(s))$ ، یک ژئودزیک متریک ریندلر است هرگاه در دستگاه زیر صدق کند:

$$\begin{cases} k=1, & i, j=1, 2, 3, 4 \\ \ddot{x}^1(t) + \dot{x}^1(t)\dot{x}^2(t)\Gamma_{12}^1 + \dot{x}^2(t)\dot{x}^1(t)\Gamma_{21}^1 = 0, \\ k=2, & i, j=1, 2, 3, 4 \\ \ddot{x}^2(t) + \dot{x}^1(t)\dot{x}^1(t)\Gamma_{11}^2 = 0, \\ k=3, & i, j=1, 2, 3, 4 \\ \ddot{x}^3(t) = 0, \\ k=4, & i, j=1, 2, 3, 4 \\ \ddot{x}^4(t) = 0, \end{cases}$$

بنابراین با جایگذاری کریستوفل‌ها و ساده سازی داریم:

$$\begin{cases} \ddot{t} + \dot{t}(\frac{\dot{x}}{x}) = 0, \\ \ddot{x} + \dot{t}(\alpha^2 x) = 0, \\ \ddot{y} = 0, \\ \ddot{z} = 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

به‌طوریکه منظور از $\dot{t}, \dot{x}, \dots$ مشتقات مؤلفه‌های ژئودزیک نسبت به پارامتر s است. دستگاه معادلات ژئودزیک هندسه ریندلر، یک دستگاه ۴- معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی مرتبه دو است که روی فضای کامل $E \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$ و با مختصات جت $J^2(E) = (s, t, x, y, z, \dot{t}, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, \ddot{t}, \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z})$ تعریف می‌شود، که شامل یک متغیر مستقل s و چهار متغیر وابسته (t, x, y, z) است. بنابراین برای بدست آوردن تقارن‌های نقطه‌ای، ابتدا میدان برداری مختصات فضا-زمان (s, t, x, y, z) را به صورت،

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = & \xi(s, t, x, y, z) \frac{\partial}{\partial s} + \varphi_1(s, t, x, y, z) \frac{\partial}{\partial t} + \varphi_2(s, t, x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} \\ & + \varphi_3(s, t, x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + \varphi_4(s, t, x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

تعریف می‌کنیم.

با توجه به اینکه دستگاه معادلات ژئودزیک از مرتبه دو است، بنابراین میدان برداری را به صورت زیر تا مرتبه دو امتداد می‌دهیم،

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(2)} = & \xi \frac{\partial}{\partial s} + \varphi_1 \frac{\partial}{\partial t} + \varphi_2 \frac{\partial}{\partial x} + \varphi_3 \frac{\partial}{\partial y} + \varphi_4 \frac{\partial}{\partial z} \\ & + \varphi_1^s \frac{\partial}{\partial t_s} + \varphi_2^s \frac{\partial}{\partial x_s} + \varphi_3^s \frac{\partial}{\partial y_s} + \varphi_4^s \frac{\partial}{\partial z_s} \\ & + \varphi_1^{ss} \frac{\partial}{\partial t_{ss}} + \varphi_2^{ss} \frac{\partial}{\partial x_{ss}} + \varphi_3^{ss} \frac{\partial}{\partial y_{ss}} + \varphi_4^{ss} \frac{\partial}{\partial z_{ss}}. \end{aligned}$$

شرط ناوردایی دستگاه معادلات دیفرانسیل را برای دستگاه معادلات ریندلر عبارتست از:

$$v^{(2)}(\Delta) = 0, \quad \text{هرگاه} \quad \Delta = 0,$$

به طوریکه منظور از Δ دستگاه معادلات دیفرانسیل (۱.۴) می باشد.

برای محاسبه ضرایب امتداد، ابتدا عملگر مشتق کامل D_s را به صورت زیر می نویسیم:

$$D_s = \frac{\partial}{\partial s} + \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} + \ddot{t} \frac{\partial}{\partial \dot{t}} + \ddot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \ddot{y} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} + \ddot{z} \frac{\partial}{\partial \dot{z}} \\ + \dddot{t} \frac{\partial}{\partial \ddot{t}} + \dddot{x} \frac{\partial}{\partial \ddot{x}} + \dddot{y} \frac{\partial}{\partial \ddot{y}} + \dddot{z} \frac{\partial}{\partial \ddot{z}}.$$

مشخصه های میدان برداری (۲.۴) عبارتند از:

$$Q^t = \varphi_1 - \xi \frac{\partial t}{\partial s} = \varphi_1 - \xi t_s, \\ Q^x = \varphi_2 - \xi \frac{\partial x}{\partial s} = \varphi_2 - \xi x_s, \\ Q^y = \varphi_3 - \xi \frac{\partial y}{\partial s} = \varphi_3 - \xi t_s, \\ Q^z = \varphi_4 - \xi \frac{\partial z}{\partial s} = \varphi_4 - \xi t_s.$$

لذا ضرایب امتداد برابرند با:

$$\varphi_1^s = D_s Q^t + \xi t_{ss}, \\ \varphi_2^s = D_s Q^x + \xi x_{ss}, \\ \varphi_3^s = D_s Q^y + \xi y_{ss}, \\ \varphi_4^s = D_s Q^z + \xi z_{ss}, \\ \varphi_1^{ss} = D_{ss} Q^t + \xi t_{sss}, \\ \varphi_2^{ss} = D_{ss} Q^x + \xi x_{sss}, \\ \varphi_3^{ss} = D_{ss} Q^y + \xi y_{sss}, \\ \varphi_4^{ss} = D_{ss} Q^z + \xi z_{sss}.$$

با بسط ضرایب فوق بر حسب عملگر مشتق کامل D_s داریم:

$$\begin{aligned}
 \varphi_{\lambda}^s &= \varphi_{\lambda s} + t\varphi_{\lambda t} + \dot{x}\varphi_{\lambda x} + \dot{y}\varphi_{\lambda y} + \dot{z}\varphi_{\lambda z} \\
 &\quad - \dot{t}\xi_s - \dot{t}^2\xi_t - \dot{t}\dot{x}\xi - \dot{t}\dot{y}\xi_y - \dot{t}\dot{z}\xi_z, \\
 &\quad \vdots \\
 \varphi_{\mathfrak{f}}^{ss} &= \varphi_{\mathfrak{f}ss} - 2\dot{t}\dot{z}\dot{x}\xi_{tx} - 2\dot{t}\dot{z}\dot{y}\xi_{ty} - 2\dot{x}\dot{z}\dot{y}\xi_{xy} + 2\dot{t}\dot{z}\varphi_{\mathfrak{f}tz} - \dot{z}\dot{t}^2\xi_{tt} \\
 &\quad - 2\dot{t}\dot{z}^2\xi_{tz} - \dot{t}\dot{z}\xi_t + 2\dot{x}\dot{y}\varphi_{\mathfrak{f}xy} + 2\dot{x}\dot{z}\varphi_{\mathfrak{f}xz} - \dot{z}\dot{x}^2\xi_{xx} \\
 &\quad - 2\dot{x}\dot{z}^2\xi_{xz} - \ddot{x}\dot{z}\xi_x + 2\dot{y}\dot{z}\varphi_{\mathfrak{f}yz} - \dot{z}\dot{y}^2\xi_{yy} - 2\dot{y}\dot{z}^2\xi_{yz} \\
 &\quad - \ddot{y}\dot{z}\xi_y - 2\dot{z}\dot{t}\xi_t - 2\dot{z}\dot{x}\xi_x - 2\dot{z}\dot{y}\xi_y - 3\dot{z}\dot{z}\xi_z - 2\dot{z}\dot{y}\xi_{sy} \\
 &\quad - 2\dot{z}\dot{t}\xi_{st} - 2\dot{z}\dot{x}\xi_{sx} + 2\dot{t}\dot{x}\varphi_{\mathfrak{f}tx} + 2\dot{t}\dot{y}\varphi_{\mathfrak{f}ty} + \dot{y}^2\varphi_{\mathfrak{f}yy} \\
 &\quad + \ddot{y}\varphi_{\mathfrak{f}y} + \dot{z}^2\varphi_{\mathfrak{f}zz} - \dot{z}^3\xi_{zz} + \ddot{z}\varphi_{\mathfrak{f}z} - 2\dot{z}\xi_s + \dot{t}^2\varphi_{\mathfrak{f}tt} \\
 &\quad + \ddot{t}\varphi_{\mathfrak{f}t} + \dot{x}^2\varphi_{\mathfrak{f}xx} + \ddot{x}\varphi_{\mathfrak{f}x} + 2\dot{t}\varphi_{\mathfrak{f}st} + 2\dot{x}\varphi_{\mathfrak{f}sx} \\
 &\quad + 2\dot{y}\varphi_{\mathfrak{f}sy} + 2\dot{z}\varphi_{\mathfrak{f}sz} - \dot{z}\xi_{ss} - 2\dot{z}^2\xi_{sz}.
 \end{aligned}$$

حال میدان برداری $v^{(2)}$ را روی دستگاه اثر داده و به پیمانه دستگاه مساوی صفر قرار می‌دهیم. با بسط دادن آن و صفر قرار دادن مشتقات متغیرهای وابسته یک دستگاه معادلات مشخصه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 \xi_{sss} &= \xi_{sst} = \xi_{ssx} = \xi_{ssy} = \xi_{ssz} \\
 &= \varphi_{\lambda ss} = \varphi_{\lambda sy} = \varphi_{\lambda sz} = \varphi_{\lambda zz} = \varphi_{\mathfrak{r}ss} \\
 &= \varphi_{\mathfrak{r}st} = \varphi_{\mathfrak{r}sx} = \varphi_{\mathfrak{r}sz} = \varphi_{\mathfrak{r}tz} = \varphi_{\mathfrak{r}xx} \\
 &= \varphi_{\mathfrak{r}xz} = \varphi_{\mathfrak{r}zz} = \varphi_{\mathfrak{f}ss} = \varphi_{\mathfrak{f}st} = \varphi_{\mathfrak{f}sx} \\
 &= \varphi_{\mathfrak{f}sy} = \varphi_{\mathfrak{f}ty} = \varphi_{\mathfrak{f}xx} = \varphi_{\mathfrak{f}sy} = \varphi_{\mathfrak{f}yy} \\
 &= \xi_{ty} = \xi_{tz} = \xi_{xx} = \xi_{xy} = \xi_{xz} = \xi_{yy} = \xi_{yz} = \xi_{zz} = 0, \\
 \varphi_{\lambda stt} &= \alpha^2\varphi_{\lambda s}, \\
 \varphi_{\lambda ttt} &= 3\alpha^2x\varphi_{\lambda tx} + 4\varphi_{\lambda t}, \\
 \varphi_{\lambda ttx} &= \alpha^2\varphi_{\lambda x}, \\
 &\quad \vdots \\
 \varphi_{\mathfrak{r}y} &= x(\xi_{sy} - \varphi_{\lambda ty}), \\
 \varphi_{\mathfrak{r}z} &= x(\xi_{sz} - \varphi_{\lambda tz}).
 \end{aligned}$$

با حل دستگاه فوق ضرایب $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned}\xi &= x(c_{14}s + c_{12})e^{-\alpha t} + x(c_{15}s + c_{13})e^{\alpha t} + \frac{1}{\alpha}c_{18}s^2 + \frac{1}{\alpha}(2c_{16}y + 2c_{19} + 2c_{21}z)s \\ &c_{17}y + c_{22}z + c_{20}, \\ \varphi_1 &= \frac{1}{x}((c_{14}y + c_{13}s + c_{15}z + c_{10})e^{-\alpha t} + c_9e^{-2\alpha t}x + c_8xe^{2\alpha t} \\ &+ (c_6z + c_2y + sc_4 + c_{11})e^{\alpha t} + c_7x), \\ \varphi_2 &= \frac{1}{\alpha}((2c_{14}y + 2c_{15}z + 2c_{13}s + 2c_{10})\alpha + 2c_{14}x^2)e^{-\alpha t} \\ &+ c_9\alpha e^{-2\alpha t}x - c_8\alpha e^{2\alpha t}x + \frac{1}{\alpha}((-2c_6z - 2c_2y - 2sc_4 - 2c_{11})\alpha + 2c_{15}x^2)e^{\alpha t} \\ &+ \frac{1}{\alpha}x(c_{18}s + 2c_{21}z + 2c_{16}y + 2c_{19}), \\ \varphi_3 &= x(c_{14}y + c_{23})e^{-\alpha t} + x(c_{15}y + c_{24})e^{\alpha t} + c_{16}y^2 \\ &+ \frac{1}{\alpha}(c_{18}s + 2c_{26} + 2c_{21}z)y + sc_{25} + c_{28}z + c_{27}, \\ \varphi_4 &= x(zc_{14} + c_{29})e^{-\alpha t} + x(c_{15}z + c_{30})e^{\alpha t} + c_{21}z^2 \\ &+ \frac{1}{\alpha}(c_{18}s + 2c_{32} + 2c_{16}y)z + sc_{31} + c_{33} + c_{34}y.\end{aligned}$$

بنابراین با جایگذاری این ضرایب در میدان برداری (۲.۴) یک جبرلی ۲۵- بعدی از تقارن ها با مولدهای زیر بدست می آیند،

$$\begin{aligned}X_1 &= s\frac{\partial}{\partial y}, & X_2 &= \frac{\partial}{\partial y}, & X_3 &= s\frac{\partial}{\partial z}, & X_4 &= \frac{\partial}{\partial z}, \\ X_5 &= \frac{\partial}{\partial t}, & X_6 &= s\frac{\partial}{\partial s}, & X_7 &= \frac{\partial}{\partial s}, & X_8 &= z\frac{\partial}{\partial s}, \\ X_9 &= y\frac{\partial}{\partial y}, & X_{10} &= z\frac{\partial}{\partial y}, & X_{11} &= z\frac{\partial}{\partial z}, & X_{12} &= y\frac{\partial}{\partial z}, \\ X_{13} &= x\frac{\partial}{\partial x}, & X_{14} &= y\frac{\partial}{\partial s}, & X_{15} &= xe^{\alpha t}\frac{\partial}{\partial y}, & X_{16} &= xe^{\alpha t}\frac{\partial}{\partial s}, \\ X_{17} &= xe^{\alpha t}\frac{\partial}{\partial z}, & X_{18} &= xe^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial s}, & X_{19} &= xe^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial y}, & X_{20} &= xe^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial z}, \\ X_{21} &= sz\frac{\partial}{\partial s} + xz\frac{\partial}{\partial x} + yz\frac{\partial}{\partial y} + z^2\frac{\partial}{\partial z}, & X_{22} &= sy\frac{\partial}{\partial s} + xy\frac{\partial}{\partial x} + y^2\frac{\partial}{\partial y} + yz\frac{\partial}{\partial z}, \\ X_{23} &= s^2\frac{\partial}{\partial s} + sx\frac{\partial}{\partial x} + sy\frac{\partial}{\partial y} + sz\frac{\partial}{\partial z}, \\ X_{24} &= sxe^{\alpha t}\frac{\partial}{\partial s} + x^2e^{\alpha t}\frac{\partial}{\partial x} + xye^{\alpha t}\frac{\partial}{\partial y} + xze^{\alpha t}\frac{\partial}{\partial z}, \\ X_{25} &= sxe^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial s} + x^2e^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial x} + xye^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial y} + xze^{-\alpha t}\frac{\partial}{\partial z}.\end{aligned}$$

در ادامه با محاسبه کروشه‌های لی این مولدها جبرلی بودن آن‌ها به اثبات می‌رسد:

$$\begin{aligned}
 [X_1, X_2] &= 0, & [X_1, X_3] &= 0, & [X_1, X_4] &= 0, & [X_1, X_5] &= 0, & [X_1, X_6] &= -X_1, \\
 [X_1, X_7] &= -X_2, & [X_1, X_8] &= -X_{10}, & [X_1, X_9] &= X_1, & [X_1, X_{10}] &= 0, \\
 [X_1, X_{11}] &= 0, & [X_1, X_{12}] &= X_3, & [X_1, X_{13}] &= 0, & [X_1, X_{14}] &= X_6 - X_9, \\
 [X_1, X_{15}] &= 0, & [X_1, X_{16}] &= -X_{15}, & [X_1, X_{17}] &= 0, & [X_1, X_{18}] &= -X_{15}, \\
 [X_1, X_{19}] &= 0, & [X_1, X_{20}] &= 0, & [X_1, X_{21}] &= 0, & [X_1, X_{22}] &= X_{23}, & [X_1, X_{23}] &= 0, \\
 [X_1, X_{24}] &= 0, & [X_1, X_{25}] &= 0, \\
 [X_2, X_3] &= 0, & [X_2, X_4] &= 0, & [X_2, X_5] &= 0, & [X_2, X_6] &= -X_1, & [X_2, X_7] &= 0, \\
 [X_2, X_8] &= 0, & [X_2, X_9] &= X_2, & [X_2, X_{10}] &= 0, & [X_2, X_{11}] &= 0, & [X_2, X_{12}] &= X_4, \\
 [X_2, X_{13}] &= 0, & [X_2, X_{14}] &= X_7, & [X_2, X_{15}] &= 0, & [X_2, X_{16}] &= 0, & [X_2, X_{17}] &= 0, \\
 [X_2, X_{18}] &= 0, & [X_2, X_{19}] &= 0, & [X_2, X_{20}] &= 0, & [X_2, X_{21}] &= X_{10}, \\
 [X_2, X_{22}] &= X_6 + X_{13} + 2X_9 + X_{11}, & [X_2, X_{23}] &= X_1, & [X_2, X_{24}] &= X_{15}, \\
 [X_2, X_{25}] &= X_{19}, \\
 [X_3, X_4] &= 0, & [X_3, X_5] &= 0, & [X_3, X_6] &= -X_3, & [X_3, X_7] &= -X_4, \\
 [X_3, X_8] &= X_6 - X_{11}, & [X_3, X_9] &= 0, & [X_3, X_{10}] &= X_1, & [X_3, X_{11}] &= X_3, \\
 [X_3, X_{12}] &= 0, & [X_3, X_{13}] &= 0, & [X_3, X_{14}] &= -X_{12}, & [X_3, X_{15}] &= 0, & [X_3, X_{16}] &= -X_{17}, \\
 [X_3, X_{17}] &= 0, & [X_3, X_{18}] &= -X_{19}, & [X_3, X_{20}] &= 0, & [X_3, X_{21}] &= X_{23}, \\
 [X_3, X_{22}] &= 0, & [X_3, X_{23}] &= 0, & [X_3, X_{24}] &= 0, & [X_3, X_{25}] &= 0, \\
 [X_4, X_5] &= 0, & [X_4, X_6] &= 0, & [X_4, X_7] &= 0, & [X_4, X_8] &= X_7, & [X_4, X_9] &= 0, \\
 [X_4, X_{10}] &= X_2, & [X_4, X_{11}] &= X_4, & [X_4, X_{12}] &= 0, & [X_4, X_{13}] &= 0, & [X_4, X_{14}] &= 0, \\
 [X_4, X_{15}] &= 0, & [X_4, X_{16}] &= 0, & [X_4, X_{17}] &= 0, & [X_4, X_{18}] &= 0, & [X_4, X_{19}] &= 0, \\
 [X_4, X_{20}] &= 0, & [X_4, X_{21}] &= X_6 + X_{13} + X_9 + 2X_{10}, & [X_4, X_{22}] &= X_{12}, & [X_4, X_{23}] &= X_3, \\
 [X_4, X_{24}] &= X_{17}, & [X_4, X_{25}] &= X_{20}, \\
 [X_5, X_6] &= 0, & [X_5, X_7] &= 0, & [X_5, X_8] &= 0, & [X_5, X_9] &= 0, & [X_5, X_{10}] &= 0, \\
 [X_5, X_{11}] &= 0, & [X_5, X_{12}] &= 0, & [X_5, X_{13}] &= 0, & [X_5, X_{14}] &= 0, & [X_5, X_{15}] &= \alpha X_{15}, \\
 [X_5, X_{16}] &= \alpha X_{16}, & [X_5, X_{17}] &= \alpha X_{17}, & [X_5, X_{18}] &= -\alpha X_{16}, & [X_5, X_{19}] &= -\alpha X_{15}, \\
 [X_5, X_{20}] &= -\alpha X_{17}, & [X_5, X_{21}] &= 0, & [X_5, X_{22}] &= 0, & [X_5, X_{23}] &= 0, \\
 [X_5, X_{24}] &= \alpha X_{24}, & [X_5, X_{25}] &= -\alpha X_{25}, \\
 [X_6, X_7] &= -X_7, & [X_6, X_8] &= -X_8, & [X_6, X_9] &= 0, & [X_6, X_{10}] &= 0, & [X_6, X_{11}] &= 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [X_6, X_{12}] &= 0, & [X_6, X_{13}] &= 0, & [X_6, X_{14}] &= -X_{14}, & [X_6, X_{15}] &= 0, \\
 [X_6, X_{16}] &= -X_{16}, & [X_6, X_{17}] &= 0, & [X_6, X_{18}] &= -X_{16}, & [X_6, X_{19}] &= 0, \\
 [X_6, X_{20}] &= 0, & [X_6, X_{21}] &= 0, & [X_6, X_{22}] &= 0, & [X_6, X_{23}] &= X_{23}, \\
 [X_6, X_{24}] &= 0, & [X_6, X_{25}] &= 0, \\
 [X_7, X_8] &= 0, & [X_7, X_9] &= 0, & [X_7, X_{10}] &= 0, & [X_7, X_{11}] &= 0, & [X_7, X_{12}] &= 0, \\
 [X_7, X_{13}] &= 0, & [X_7, X_{14}] &= 0, & [X_7, X_{15}] &= 0, & [X_7, X_{16}] &= 0, & [X_7, X_{17}] &= 0, \\
 [X_7, X_{18}] &= 0, & [X_7, X_{19}] &= 0, & [X_7, X_{20}] &= 0, & [X_7, X_{21}] &= X_8, & [X_7, X_{22}] &= X_{14}, \\
 [X_7, X_{23}] &= 2X_6 + X_{13} + X_9 + X_{11}, & [X_7, X_{24}] &= X_{16}, & [X_7, X_{25}] &= X_{18}, \\
 [X_8, X_9] &= 0, & [X_8, X_{10}] &= 0, & [X_8, X_{11}] &= -X_8, & [X_8, X_{12}] &= -X_{14}, \\
 [X_8, X_{13}] &= 0, & [X_8, X_{14}] &= 0, & [X_8, X_{15}] &= 0, & [X_8, X_{16}] &= 0, & [X_8, X_{17}] &= -X_{18}, \\
 [X_8, X_{19}] &= 0, & [X_8, X_{20}] &= -X_{18}, & [X_8, X_{21}] &= 0, & [X_8, X_{22}] &= 0, \\
 [X_8, X_{23}] &= X_{21}, & [X_8, X_{24}] &= 0, & [X_8, X_{25}] &= 0, \\
 [X_9, X_{10}] &= -X_{10}, & [X_9, X_{11}] &= 0, & [X_9, X_{12}] &= X_{12}, & [X_9, X_{13}] &= 0, \\
 [X_9, X_{14}] &= X_{14}, & [X_9, X_{15}] &= -X_{15}, & [X_9, X_{16}] &= 0, & [X_9, X_{17}] &= 0, \\
 [X_9, X_{18}] &= 0, & [X_9, X_{19}] &= -X_{15}, & [X_9, X_{20}] &= 0, & [X_9, X_{21}] &= 0, \\
 [X_9, X_{22}] &= X_{22}, & [X_9, X_{23}] &= 0, & [X_9, X_{24}] &= 0, & [X_9, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{10}, X_{11}] &= -X_{10}, & [X_{10}, X_{12}] &= -X_9 + X_{11}, & [X_{10}, X_{13}] &= 0, & [X_{10}, X_{14}] &= X_8, \\
 [X_{10}, X_{15}] &= 0, & [X_{10}, X_{16}] &= 0, & [X_{10}, X_{17}] &= -X_{15}, & [X_{10}, X_{18}] &= 0, \\
 [X_{10}, X_{19}] &= 0, & [X_{10}, X_{20}] &= -X_{15}, & [X_{10}, X_{21}] &= 0, & [X_{10}, X_{22}] &= X_{21}, \\
 [X_{10}, X_{23}] &= 0, & [X_{10}, X_{24}] &= 0, & [X_{10}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{11}, X_{12}] &= -X_{12}, & [X_{11}, X_{13}] &= 0, & [X_{11}, X_{14}] &= 0, & [X_{11}, X_{15}] &= 0, \\
 [X_{11}, X_{16}] &= 0, & [X_{11}, X_{17}] &= -X_{17}, & [X_{11}, X_{18}] &= 0, & [X_{11}, X_{19}] &= 0, \\
 [X_{11}, X_{20}] &= -X_{20}, & [X_{11}, X_{21}] &= X_{21}, & [X_{11}, X_{22}] &= 0, & [X_{11}, X_{23}] &= 0, \\
 [X_{11}, X_{24}] &= 0, & [X_{11}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{12}, X_{13}] &= 0, & [X_{12}, X_{14}] &= 0, & [X_{12}, X_{15}] &= -X_{17}, & [X_{12}, X_{16}] &= 0, \\
 [X_{12}, X_{17}] &= 0, & [X_{12}, X_{18}] &= 0, & [X_{12}, X_{19}] &= -X_{20}, & [X_{12}, X_{20}] &= 0, \\
 [X_{12}, X_{21}] &= X_{22}, & [X_{12}, X_{22}] &= 0, & [X_{12}, X_{23}] &= 0, & [X_{12}, X_{24}] &= 0, \\
 [X_{12}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{13}, X_{14}] &= 0, & [X_{13}, X_{15}] &= X_{15}, & [X_{13}, X_{16}] &= X_{16}, & [X_{13}, X_{17}] &= X_{17}, \\
 [X_{13}, X_{18}] &= X_{18}, & [X_{13}, X_{19}] &= X_{19}, & [X_{13}, X_{20}] &= X_{20}, & [X_{13}, X_{21}] &= 0, \\
 [X_{13}, X_{22}] &= 0, & [X_{13}, X_{23}] &= 0, & [X_{13}, X_{24}] &= X_{24}, & [X_{13}, X_{25}] &= X_{25},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [X_{14}, X_{15}] &= -X_{16}, & [X_{14}, X_{16}] &= 0, & [X_{14}, X_{17}] &= 0, & [X_{14}, X_{18}] &= 0, \\
 [X_{14}, X_{19}] &= -X_{18}, & [X_{14}, X_{20}] &= 0, & [X_{14}, X_{21}] &= 0, & [X_{14}, X_{22}] &= 0, \\
 [X_{14}, X_{23}] &= X_{22}, & [X_{14}, X_{24}] &= 0, & [X_{14}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{15}, X_{16}] &= 0, & [X_{15}, X_{17}] &= 0, & [X_{15}, X_{18}] &= 0, & [X_{15}, X_{19}] &= 0, & [X_{15}, X_{20}] &= 0, \\
 [X_{15}, X_{21}] &= 0, & [X_{15}, X_{22}] &= X_{24}, & [X_{15}, X_{23}] &= 0, & [X_{15}, X_{24}] &= 0, \\
 [X_{15}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{16}, X_{17}] &= 0, & [X_{16}, X_{18}] &= 0, & [X_{16}, X_{19}] &= 0, & [X_{16}, X_{20}] &= 0, & [X_{16}, X_{21}] &= 0, \\
 [X_{16}, X_{22}] &= 0, & [X_{16}, X_{23}] &= X_{24}, & [X_{16}, X_{24}] &= 0, & [X_{16}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{17}, X_{18}] &= 0, & [X_{17}, X_{19}] &= 0, & [X_{17}, X_{20}] &= 0, & [X_{17}, X_{21}] &= X_{24}, \\
 [X_{17}, X_{22}] &= 0, & [X_{17}, X_{23}] &= 0, & [X_{17}, X_{24}] &= 0, & [X_{17}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{18}, X_{19}] &= 0, & [X_{18}, X_{20}] &= 0, & [X_{18}, X_{21}] &= 0, & [X_{18}, X_{22}] &= 0, \\
 [X_{18}, X_{23}] &= X_{25}, & [X_{18}, X_{24}] &= 0, & [X_{18}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{19}, X_{20}] &= 0, & [X_{19}, X_{21}] &= 0, & [X_{19}, X_{22}] &= X_{25}, & [X_{19}, X_{23}] &= 0, \\
 [X_{19}, X_{24}] &= 0, & [X_{19}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{20}, X_{21}] &= X_{25}, & [X_{20}, X_{22}] &= 0, & [X_{20}, X_{23}] &= 0, & [X_{20}, X_{24}] &= 0, \\
 [X_{20}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{21}, X_{22}] &= 0, & [X_{21}, X_{23}] &= 0, & [X_{21}, X_{24}] &= 0, & [X_{21}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{22}, X_{23}] &= 0, & [X_{22}, X_{24}] &= 0, & [X_{22}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{23}, X_{24}] &= 0, & [X_{23}, X_{25}] &= 0, \\
 [X_{24}, X_{25}] &= 0.
 \end{aligned}$$

حال که نشان دادیم این ۲۵- میدان برداری تقارنهای دستگاه (۱.۴) می باشند، در ادامه رده بندی ژئودزیکها بر اساس تقارنهای دستگاه انجام خواهد شد.

۳.۴ رده بندی ژئودزیکهای متریک ریندلر

برای طبقه بندی جوابهای دستگاه (۱.۴) به کمک تقارنها به این صورت عمل می کنیم که ابتدا عمل گروه یک- پارامتری هر یک از مولدهای بی نهایت کوچک جبرلی تقارنها را بدست آوردیم. سپس هر یک از این عمل گروهها منجر به تولید حالت کلی از جوابهای دستگاه می شود به طوریکه هر جواب دلخواهی از این دستگاه در یکی از این ۲۵- حالت قرار می گیرد.

با توجه به این توضیحات عمل گروه یک پارامتری هر یک از این مولدها عبارتند از:

$$\begin{aligned}
 \exp(\varepsilon X_1)(s, t, x, y, z) &= (s, t, x, \varepsilon s + y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_2)(s, t, x, y, z) &= (s, t, x, \varepsilon + y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_3)(s, t, x, y, z) &= (s, t, x, y, \varepsilon s + z), \\
 \exp(\varepsilon X_4)(s, t, x, y, z) &= (s, t, x, y, \varepsilon + z), \\
 \exp(\varepsilon X_5)(s, t, x, y, z) &= (s, \varepsilon + t, x, y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_6)(s, t, x, y, z) &= (e^\varepsilon s, t, x, y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_7)(s, t, x, y, z) &= (s + \varepsilon, t, x, y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_8)(s, t, x, y, z) &= (\varepsilon z + s, t, x, y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_9)(s, t, x, y, z) &= (s, t, x, e^\varepsilon y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_{10})(s, t, x, y, z) &= (s, t, x, \varepsilon z + y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_{11})(s, t, x, y, z) &= (s, t, x, y, e^\varepsilon z), \\
 \exp(\varepsilon X_{12})(s, t, x, y, z) &= (s, t, x, y, \varepsilon y + z), \\
 \exp(\varepsilon X_{13})(s, t, x, y, z) &= (s, t, e^\varepsilon x, y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_{14})(s, t, x, y, z) &= (\varepsilon y + s, t, x, y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_{15})(s, t, x, y, z) &= (s, t, \varepsilon x e^{\alpha t}, y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_{16})(s, t, x, y, z) &= (\varepsilon x e^{\alpha t} + s, t, x, y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_{17})(s, t, x, y, z) &= (s, t, x, y, \varepsilon x e^{\alpha t} + z), \\
 \exp(\varepsilon X_{18})(s, t, x, y, z) &= (\varepsilon x e^{-\alpha t} + s, t, x, y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_{19})(s, t, x, y, z) &= (s, t, x, \varepsilon x e^{-\alpha t} + y, z), \\
 \exp(\varepsilon X_{20})(s, t, x, y, z) &= (s, t, x, y, \varepsilon x e^{-\alpha t} + z), \\
 \exp(\varepsilon X_{21})(s, t, x, y, z) &= \left(\frac{s}{1-\varepsilon z}, t, \frac{x}{1-\varepsilon z}, \frac{y}{1-\varepsilon z}, \frac{z}{1-\varepsilon z} \right), \\
 \exp(\varepsilon X_{22})(s, t, x, y, z) &= \left(\frac{s}{1-\varepsilon y}, t, \frac{x}{1-\varepsilon y}, \frac{y}{1-\varepsilon y}, \frac{z}{1-\varepsilon y} \right), \\
 \exp(\varepsilon X_{23})(s, t, x, y, z) &= \left(\frac{s}{1-\varepsilon s}, t, \frac{x}{1-\varepsilon s}, \frac{z}{1-\varepsilon s} + y - z, \frac{z}{1-\varepsilon s} \right), \\
 \exp(\varepsilon X_{24})(s, t, x, y, z) &= \left(s \exp \left\{ \int_0^\varepsilon \frac{x e^{\alpha t}}{1-u e^{\alpha t}} du \right\}, t, \frac{x}{1-\varepsilon x e^{\alpha t}}, \right. \\
 &\quad \left. y \exp \left\{ \int_0^\varepsilon \frac{x e^{\alpha t}}{1-u e^{\alpha t}} du \right\}, z \exp \left\{ \int_0^\varepsilon \frac{x e^{\alpha t}}{1-u e^{\alpha t}} du \right\}, \right. \\
 \exp(\varepsilon X_{25})(s, t, x, y, z) &= \left(s \exp \left\{ \int_0^\varepsilon \frac{x e^{-\alpha t}}{1-u e^{-\alpha t}} du \right\}, t, \frac{x}{1-\varepsilon x e^{-\alpha t}}, \right. \\
 &\quad \left. y \exp \left\{ \int_0^\varepsilon \frac{x e^{-\alpha t}}{1-u e^{-\alpha t}} du \right\}, z \exp \left\{ \int_0^\varepsilon \frac{x e^{-\alpha t}}{1-u e^{-\alpha t}} du \right\} \right).
 \end{aligned}$$

بنابراین اگر $c(s) = (t(s), x(s), y(s), z(s))$ یک ژئودزیک متریک ریندلر باشد آنگاه خم‌های زیر همگی یک ژئودزیک متریک ریندلر می‌باشند:

$$c(s) = (t(s), x(s), \varepsilon s + y(s), z(s)),$$

$$c(s) = (t(s), x(s), \varepsilon + y(s), z(s)),$$

$$c(s) = (t(s), x(s), y(s), \varepsilon s + z(s)),$$

$$c(s) = (t(s), x(s), y(s), \varepsilon + z(s)),$$

$$c(s) = (\varepsilon + t(s), x(s), y(s), z(s)),$$

$$c(s) = (t(e^{-\varepsilon}s), x(e^{-\varepsilon}s), y(e^{-\varepsilon}s), z(e^{-\varepsilon}s)),$$

$$c(s) = (t(s - \varepsilon), x(s - \varepsilon), y(s - \varepsilon), z(s - \varepsilon)),$$

$$c(s) = (t(s - \varepsilon z(s)), x(s - \varepsilon z(s)), y(s - \varepsilon z(s)), z(s - \varepsilon z(s))),$$

$$c(s) = (t(s), x(s), e^{\varepsilon}y(s), z(s)),$$

$$c(s) = (t(s), x(s), y(s) + \varepsilon z(s), z(s)),$$

$$c(s) = (t(s), x(s), y(s), e^{\varepsilon}z(s)),$$

$$c(s) = (t(s), x(s), y(s), \varepsilon y(s) + z(s)),$$

$$c(s) = (t(s), e^{\varepsilon}x(s), y(s), z(s)),$$

$$c(s) = (t(s - \varepsilon y(s)), x(s - \varepsilon y(s)), y(s - \varepsilon y(s)), z(s - \varepsilon y(s))),$$

$$c(s) = (t(s), x(s), \varepsilon x(s)e^{\alpha t(s)} + y(s), z(s)),$$

$$c(s) = (t(s - \varepsilon x(s)e^{\alpha t(s)}), x(s - \varepsilon x(s)e^{\alpha t(s)}), y(s - \varepsilon x(s)e^{\alpha t(s)}), z(s - \varepsilon x(s)e^{\alpha t(s)})),$$

$$c(s) = (t(s), x(s), y(s), \varepsilon x(s) + e^{\alpha t} + z(s))$$

$$c(s) = (t(s - \varepsilon x(s)e^{-\alpha t(s)}), x(s - \varepsilon x(s)e^{-\alpha t(s)}), y(s - \varepsilon x(s)e^{-\alpha t(s)}), z(s - \varepsilon x(s)e^{-\alpha t(s)})),$$

$$c(s) = (t(s), x(s), y(s) + \varepsilon x(s)e^{-\alpha t(s)}, z(s)),$$

$$c(s) = (t(s), x(s), y(s), z(s) + \varepsilon x(s)e^{-\alpha t(s)}),$$

$$c(s) = (t(\frac{s}{1 + \varepsilon z(s)}), \frac{x(\frac{s}{1 + \varepsilon z(s)})}{1 - \varepsilon z(\frac{s}{1 + \varepsilon z(s)})}, \frac{y(\frac{s}{1 + \varepsilon z(s)})}{1 - \varepsilon z(\frac{s}{1 + \varepsilon z(s)})}, \frac{z(\frac{s}{1 + \varepsilon z(s)})}{1 - \varepsilon z(\frac{s}{1 + \varepsilon z(s)})}),$$

$$c(s) = (t(\frac{s}{1 + \varepsilon y(s)}), \frac{x(\frac{s}{1 + \varepsilon y(s)})}{1 - \varepsilon y(\frac{s}{1 + \varepsilon y(s)})}, \frac{y(\frac{s}{1 + \varepsilon y(s)})}{1 - \varepsilon y(\frac{s}{1 + \varepsilon y(s)})}, \frac{z(\frac{s}{1 + \varepsilon y(s)})}{1 - \varepsilon y(\frac{s}{1 + \varepsilon y(s)})}),$$

$$c(s) = (t(\frac{s}{s + \varepsilon s}), \frac{x(\frac{s}{1 + \varepsilon z(s)})}{1 - \varepsilon s}, \frac{y(\frac{s}{1 + \varepsilon z(s)})}{1 - \varepsilon s} + y(\frac{s}{1 + \varepsilon z(s)}) - z(\frac{s}{1 + \varepsilon z(s)}), \frac{z(\frac{s}{1 + \varepsilon z(s)})}{1 - \varepsilon s}),$$

$$c(s) = (t(s \exp\{-\int_0^\varepsilon \frac{xe^{\alpha t}}{1 - ue^{\alpha t}} du\}), \frac{x(s \exp\{-\int_0^\varepsilon \frac{xe^{\alpha t}}{1 - ue^{\alpha t}} du\})}{1 - \varepsilon x(s \exp\{-\int_0^\varepsilon \frac{xe^{\alpha t}}{1 - ue^{\alpha t}} du\})e^{\alpha t(s \exp\{-\int_0^\varepsilon \frac{xe^{\alpha t}}{1 - ue^{\alpha t}} du\})}},$$

$$y(s \exp\{-\int_0^\varepsilon \frac{xe^{\alpha t}}{1 - ue^{\alpha t}} du\}) \exp\{\int_0^\varepsilon \frac{xe^{\alpha t}}{1 - ue^{\alpha t}} du\},$$

$$z(s \exp\{-\int_0^\varepsilon \frac{xe^{\alpha t}}{1 - ue^{\alpha t}} du\}) \exp\{\int_0^\varepsilon \frac{xe^{\alpha t}}{1 - ue^{\alpha t}} du\},$$

$$c(s) = (t(s \exp\{-\int_0^\varepsilon \frac{xe^{-\alpha t}}{1-ue^{-\alpha t}} du\}), \frac{x(s \exp\{-\int_0^\varepsilon \frac{xe^{-\alpha t}}{1-ue^{-\alpha t}} du\})}{1-\varepsilon x(s \exp\{-\int_0^\varepsilon \frac{xe^{-\alpha t}}{1-ue^{-\alpha t}} du\})e^{-\alpha t(s \exp\{-\int_0^\varepsilon \frac{xe^{-\alpha t}}{1-ue^{-\alpha t}} du\})}},$$

$$y(s \exp\{-\int_0^\varepsilon \frac{xe^{-\alpha t}}{1-ue^{-\alpha t}} du\}) \exp\{\int_0^\varepsilon \frac{xe^{-\alpha t}}{1-ue^{-\alpha t}} du\},$$

$$z(s \exp\{-\int_0^\varepsilon \frac{xe^{-\alpha t}}{1-ue^{-\alpha t}} du\}) \exp\{\int_0^\varepsilon \frac{xe^{-\alpha t}}{1-ue^{-\alpha t}} du\}.$$

بنابراین با توجه به گروه یک- پارامتری تولید شده توسط تقارن‌ها ژئودزیک‌ها طبقه بندی شدند، یعنی هر جواب از دستگاه در یکی از این ۲۵ رده قرار می‌گیرد.

مراجع

- [۱] ب. بیدآباد، ”هندسه منیفلد ۲“ انتشارات دانشگاه امیرکبیر، چاپ اول، زمستان ۱۳۸۹.
- [2] G. W. Blumnan, A.F. Cheviakon and S. C. Anco, **Applicatins of Symmetry Methods to Partial Differential Equations**, Springer, New York (2002).
- [3] S. R. Hejazi, ” Lie group analysis, Hamiltonian equations and conservation laws of Born-Infeld equation” **Asian-European Journal of Mathematics** , 7(3) (2014) 1450040 (19 pages).
- [4] S. R. Hejazi and E. Lashkarian, ” On the structure of conservation laws of (3+1)-dimensional wave equation” **Arab Journal of Mathematical Sciences**, 24 (2) (2018) 199-224.
- [5] S. R. Hejazi, A. Naderifard and S. Rashidi, ” Conservation laws and similarity reduction of Zoomeron equation ” **Vestnik KRAUNC. Fiz-Mat. Nauki**, 14 (3) (2016) 7-13.
- [6] P. E. Hydon, ”**Equivalence, Invariar and Symmetry**”, Cambridge University press, Cambridge 1995.
- [7] N. H. Ibragimov, A. V. Aksenov, V. A. Baikov, V. A. Chugunov, R. K. Gazizov and A. G. Meshkov, ”**CRC handbook of Lie group analysis of differential equation, Applications in engineering and physical sciences**”, 2, Boca Raton: CRC press, 1995.
- [8] J. M. Lee, ”**Introduction to Smooth Manifolds**”, Springer, New York, 2013.
- [9] J. M. Lee, ”**Reimmanian Manifolds, an Introduction to Currature**”, Spriger, New York, 2000.
- [10] P. J. Olver, ”**Applicatins of Lie groups to differential equation**” , Springer (2000).

-
- [11] P. J. Olver, "**Equivalence, Invariant and Symmetry**", Cambridge University press, Cambridge 1995.
- [12] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, "**Gravitation**", W. H. Freeman and company, USA, 1973.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

connection	اتصال
linear connection	اتصال خطی
prolongation	امتداد
immersion	ایمرژن
tangent vector	بردار مماس
section	برش
dimension	بعد
basis	پایه
function	تابع
tensor	تانسور
coordinate	چارت مختصاتی
polynomial	چند جمله‌ای
motion	حرکت
determinant	دترمینان
dual	دوگان
diffeomorphism	دیفئومورفیسم
regular submanifold	زیر منیفلد منظم
submersion	سابمرژن
action	عمل
infinitesimal group action	عمل گروه بی‌نهایت کوچک
topological space	فضای توپولوژیکی
total space	فضای کامل
jet space	فضای جت
tangent space	فضای مماس
Hausdorff space	فضای هاسدورف

bundle.....	کلاف
vector bundle	کلاف برداری
dual bundle	کلاف دوگان
tangent bundle	کلاف مماسی
Lie group	گروه لی
lemma	لم
Riemannian metric	متریک ریمانی
dependent variable	متغیر مستقل
partial differential equation	معادلات دیفرانسیل جزئی
ordinary differential equation	معادلات دیفرانسیل معمولی
determining equations	معادلات مشخصه
manifold	منیفلد
vector field	میدان برداری
smooth	هموار

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

action	عمل
basis	پایه
bracket	کروشه
bundle	کلاف
complete	کامل
connected	همبند
counnection	اتصال
covariant	کواریان
covariant derivative	مشتق کواریان
cristoffel	کریستوفل
definition	تعریف
determinant	دترمینان
diffeomorphism	دیفئومورفیسم
dimension	بعد
dual	دوگان
equation	تابع
Hausdorff space	فضای هاسدورف
identity	همانی
immersion	ایمرژن
jet space	فضای جت
local coordinate	مختصات موضعی
locally Euclidean	موضعا اقلیدسی
polynomial	چندجمله‌ای
submanifold	زیر منیفلد
smooth	هموار

symmetry	تقارن
topological space	فضای توپولوژیکی
tensor	تانسور
total derivative	مشتق کامل
total space	فضای کامل
vector field	میدان برداری

نمایه

- اطلس، ۲
ایمبدینگ، ۸
ایمرژن، ۷
تاب، ۲۸
تانسور، ۲۴
جبرلی، ۱۹
دیفئومورفیسم، ۲
زیر منیقلد باز، ۴
سابمرژن، ۷
شمارای نوع دوم، ۱
فضای مماسی، ۳
فضای کامل، ۴۱
قاعده لایینیتز، ۶
قضیه تابع معکوس در منیفلدها، ۸
قضیه رتبه در منیفلدها، ۸
متریک ریمانی، ۲۳
متغیرهای وابسته، ۴۱
مشتق کامل، ۴۱
منیفلد، ۲
موضعی اقلیدسی، ۱
میدان برداری، ۶
ناوردا، ۱۸
نمایه، ۶۴
هاسدورف، ۱
هموار، ۲
ژاکوبین، ۷
کروشه لی، ۵
کلاف مماسی، ۵
کنج موضعی، ۲۶
گروه لی، ۱۹

Aabstract

The present thesis is organized in four sections. In the first section some basic and fundamental concepts of the geometry of manifolds such as vector feilds, tangent spaces, tansors, differential forms, Lie groups and etc. are introduced. Second section is devoted to some Riemannian geometry concepts like connections, geodesics and etc. Infinitesimal invariance, system of differential equations, symmetry and symmetry analysis are mentioned in section three. Finally the main topic of this thesis i.e., the classification of Rindler geodesics are coming in section four.

Key Words: vector feilds, Lie groups, Reiemmanian manifolds, Minkowski space, prolongation, Rindler space.time.



Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in Geometry

Classification of Rindlers geodesics via symmetry analysis

By: Yegane Palangi

Supervisor:

Dr. Seyed Reza Hejazi

Advisor:

Dr. Elham Lashkarian

October 2020