

الحمد لله  
الرحمن الرحيم





دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش بهینه‌سازی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

# تجزیه و تحلیل پایداری برای شبکه‌های عصبی سلولی تاخیری براساس رویکرد نامساوی ماتریسی خطی

نگارنده: محسن جامعی

استاد راهنما

دکتر علیرضا ناظمی

تیر ۱۳۹۹





دانشگاه شاهرود

مدیریت تحصیلات تکمیلی

شماره:

تاریخ:

باسمه تعالی

ویرایش:

### فرم شماره ۶: صورتجلسه دفاع از پایان نامه تحصیلی دوره کارشناسی ارشد

با تأییدات خداوند متعال و با استعانت از حضرت ولی عصر (عج) ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد **نام دانشجو** به شماره دانشجویی **۴۵۷۳** رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی تحت عنوان **همگرایی بدون مش** کارکنش برای معادلات سهموی تمام غیرمتعلق که در تاریخ ۱۳۹۴/۱۰/۲۷ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

|                                                                   |                                    |                                |
|-------------------------------------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|
| <input type="checkbox"/> قبول (با درجه: <b>بسیار امتیاز ۱۸۱</b> ) | <input type="checkbox"/> دفاع مجدد | <input type="checkbox"/> مردود |
|-------------------------------------------------------------------|------------------------------------|--------------------------------|

۲- بسیار خوب (۱۸۱ - ۱۸۰)

۱- عالی (۲۰ - ۱۹)

۴- قابل قبول (۱۵۹ - ۱۴)

۳- خوب (۱۶۹ - ۱۶)

۵- نمره کمتر از ۱۴ غیر قابل قبول

| عضو هیأت داوران                 | نام و نام خانوادگی    | مرتبه علمی | امضاء |
|---------------------------------|-----------------------|------------|-------|
| ۱- استاد راهنمای اول            | دکتر علی مس فروش      | استادیار   |       |
| ۲- استاد راهنمای دوم            |                       |            |       |
| ۳- استاد مشاور                  | دکتر مهدی قوتمند      | استادیار   |       |
| ۴- نماینده شورای تحصیلات تکمیلی | دکتر ابراهیم هاشمی    | استاد      |       |
| ۵- استاد ممتحن اول              | دکتر حجت احسنی طهرانی | استادیار   |       |
| ۶- استاد ممتحن دوم              | دکتر علیرضا ناظمی     | دانشیار    |       |

رئیس دانشکده:



تقریم به

همسر

## سپاس‌گزاری

سپاس خدای مهربان را که در همه احوال، توکل بر او بهترین پشتوانه‌ام در زندگی بوده است.  
سپاس از پدر، مادر و همسر عزیزم که صبورانه مرا همراهی کرده و مراتب موفقیت‌م را رقم زده‌اند.  
سپاس فراوان از استاد ارجمند و صبورم جناب آقای دکتر علیرضا ناظمی که در این راه پرفراز و نشیب کمک و نیرویی بودند تا از پس سختی‌ها و ناملایمات، با تلاش و پشتکار برآیم.

محسن جامعی

تیر ۱۳۹۹



## تعهد نامه

اینجانب **محسن جامعی** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته **ریاضی کاربردی علوم ریاضی** دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **تجزیه و تحلیل پایداری برای شبکه‌های عصبی سلولی تاخیری براساس رویکرد نامساوی ماتریسی خطی**، تحت راهنمایی **علیرضا ناظمی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیر گذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

محسن جامعی

تیر ۱۳۹۹

## مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.



## چکیده

در این پایان نامه ابتدا در فصل اول در مورد شبکه‌های عصبی بیولوژیکی و مصنوعی توضیحاتی داده می‌شود. سپس در فصل دوم مقدمات و مفاهیم اساسی مورد نیاز در مباحث پایداری شبکه‌های عصبی بیان می‌شود. در فصل سوم با در نظر گرفتن شبکه عصبی سلولی تاخیری، ثابت می‌کنیم که نقطه تعادل یکتا است. سپس با ارائه یک تابع لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب و استفاده از نامساوی ماتریسی خطی ثابت می‌کنیم سیستم پایدار مجانبی است. در فصل چهارم با در نظر گرفتن یک سیستم دینامیکی تاخیری از شبکه‌های عصبی کوهن-گراسبرگ و ارائه یک تابع لیاپانوف-کراسوفسکی مناسب و با استفاده از نامساوی ماتریسی خطی و همچنین تکنیک نابرابری هالانای ثابت می‌کنیم سیستم پایدار مجانبی و پایدار نمایی است.

کلمات کلیدی: نامساوی ماتریسی خطی، لیاپانوف-کراسوفسکی، پایداری مجانبی، شبکه‌های عصبی سلولی تاخیری.



## لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱.



# فهرست مطالب

## فهرست تصاویر

ف

## فهرست جداول

ق

### ۱ مقدمات و مفاهیم اساسی مرتبط با شبکه‌های عصبی

۱

۱.۱ شبکه‌های عصبی بیولوژیکی . . . . . ۱

۲.۱ شبکه‌های عصبی مصنوعی . . . . . ۳

۳.۱ انواع شبکه‌های عصبی مصنوعی از نظر برگشت‌پذیری . . . . . ۶

۱.۳.۱ شبکه‌های پیشخور . . . . . ۶

۲.۳.۱ شبکه‌های عصبی بازگشتی . . . . . ۶

۴.۱ تاریخچه تکامل شبکه عصبی . . . . . ۶

۵.۱ انواع شبکه‌های عصبی . . . . . ۸

۱.۵.۱ شبکه‌های عصبی پرسپترون چند لایه . . . . . ۸

۲.۵.۱ شبکه‌های عصبی شعاعی . . . . . ۹

۶.۱ شبکه‌های عصبی ماشین‌های بردار پشتیبان . . . . . ۱۰

۷.۱ نگاشت‌های خود سازمان‌ده . . . . . ۱۰

۸.۱ شبکه‌های عصبی یادگیرنده رقمی ساز بردار . . . . . ۱۱

۱.۸.۱ مدل شبکه‌های عصبی هاپفیلد . . . . . ۱۲

### ۲ مقدمات و مفاهیم اساسی مرتبط با پایداری

۱۳

۱.۲ مقدمه . . . . . ۱۳

۲.۲ تاریخچه نامساوی ماتریسی خطی . . . . . ۱۳

۳.۲ تعاریف اولیه . . . . . ۱۵

۱.۳.۲ سیستم . . . . . ۱۶

۲.۳.۲ نامساوی ماتریسی خطی . . . . . ۱۸

۳.۳.۲ سیستم‌های دینامیکی و پایداری . . . . . ۱۹

۴.۳.۲ تعاریف . . . . . ۲۰

|    |       |                                                                             |       |
|----|-------|-----------------------------------------------------------------------------|-------|
| ۲۲ | ..... | قضایای مرتبط با پایداری                                                     | ۴.۲   |
| ۲۳ | ..... | سیستم‌های دینامیکی تأخیری                                                   | ۱.۴.۲ |
| ۲۵ |       | <b>۳ تحلیل پایداری و بررسی یکتایی نقطه تعادل شبکه‌های عصبی سلولی تأخیری</b> |       |
| ۲۵ | ..... | مقدمات و مفروضات مسئله                                                      | ۱.۳   |
| ۲۶ | ..... | اثبات یکتایی نقطه تعادل شبکه‌های عصبی سلولی تأخیری                          | ۲.۳   |
| ۳۰ | ..... | اثبات پایداری مجانبی سراسری شبکه‌های عصبی سلولی تأخیری                      | ۳.۳   |
| ۳۴ | ..... | مثال‌های عددی                                                               | ۴.۳   |
| ۳۷ |       | <b>۴ پایداری مجانبی و نمایی شبکه‌های عصبی کوهن-گراسبرگ</b>                  |       |
| ۳۷ | ..... | مقدمه و معرفی مسئله                                                         | ۱.۴   |
| ۳۸ | ..... | شرایط اولیه سیستم                                                           | ۱.۱.۴ |
| ۳۸ | ..... | مفروضات مسئله                                                               | ۲.۱.۴ |
| ۳۹ | ..... | اثبات پایداری مجانبی سراسری                                                 | ۲.۴   |
| ۴۱ | ..... | اثبات پایداری نمایی                                                         | ۳.۴   |
| ۴۵ | ..... | مثال‌های عددی                                                               | ۴.۴   |
| ۴۶ | ..... | نتایج و پیشنهادات                                                           | ۵.۴   |
| ۴۷ |       | <b>مراجع</b>                                                                |       |



## فهرست تصاویر

|    |                                                              |      |
|----|--------------------------------------------------------------|------|
| ۲  | ..... ساختار یک نرون.                                        | ۱.۱  |
| ۳  | ..... مدل ریاضی یک نرون.                                     | ۲.۱  |
| ۴  | ..... ساختار یک نرون با لایه ورودی، لایه پنهان و لایه خروجی. | ۳.۱  |
| ۶  | ..... شبکه‌های عصبی دو لایه بازگشتی.                         | ۴.۱  |
| ۹  | ..... شبکه‌های عصبی پرسپترون                                 | ۵.۱  |
| ۹  | ..... شبکه‌های عصبی شعاعی                                    | ۶.۱  |
| ۱۰ | ..... شبکه‌های عصبی ماشین بردار پشتیبان                      | ۷.۱  |
| ۱۱ | ..... شبکه‌های عصبی نگاشت‌های خود سازمان‌ده                  | ۸.۱  |
| ۱۱ | ..... شبکه‌های عصبی یادگیرنده رقمی ساز بردار                 | ۹.۱  |
| ۱۲ | ..... شبکه‌های عصبی هاپفیلد                                  | ۱۰.۱ |
| ۲۱ | ..... پایداری لیاپانوف.                                      | ۱.۲  |
| ۲۲ | ..... پایداری مجانبی.                                        | ۲.۲  |
| ۴۵ | ..... مسیر متغیرهای حالت $u_1(t)$ و $u_2(t)$ در مثال (۵۷.۴). | ۱.۴  |
| ۴۶ | ..... مسیر متغیرهای حالت $u_1(t)$ و $u_2(t)$ در مثال (۵۸.۴). | ۲.۴  |



# فهرست جداول

|     |                 |   |
|-----|-----------------|---|
| ۱.۱ | توابع فعال سازی | ۵ |
|-----|-----------------|---|



# فصل ۱

## مقدمات و مفاهیم اساسی مرتبط با شبکه‌های عصبی

### ۱.۱ شبکه‌های عصبی بیولوژیکی

واحد اصلی شبکه عصبی<sup>۱</sup>، سلولی خاص به نام نرون<sup>۲</sup> است و بدون شک نحوه کار مغز و راز شعور آدمی در آن نهفته است. نرون‌ها با وجود تفاوت‌های زیاد از نظر اندازه و شکل ظاهری، مشخصه‌های مشترکی دارند. همان‌طور که در شکل (۱.۱) نشان داده شده است از تنه سلولی نرون تعدادی شاخک کوتاه خارج می‌شود که دندریت<sup>۳</sup> نام دارند. دندریت‌ها و تنه سلولی، سیگنال‌ها را از نرون‌های مجاور دریافت می‌کنند و از طریق یک لوله باریک به نام آکسون<sup>۴</sup> به نرون‌های دیگر منتقل می‌گردد [۲۵].

آکسون در انتهای خود به تعدادی رشته جانبی باریک تقسیم می‌شود که پایانه‌های آکسونی نام دارد و با دندریت‌های سایر نرون‌ها مرتبط است. ارتباط بین آکسون یک نرون و دندریت نرون دیگر را سیناپس<sup>۵</sup> می‌نامند. یک سیناپس، مرکب

---

<sup>۱</sup>Neural Networks

<sup>۲</sup>Neuron

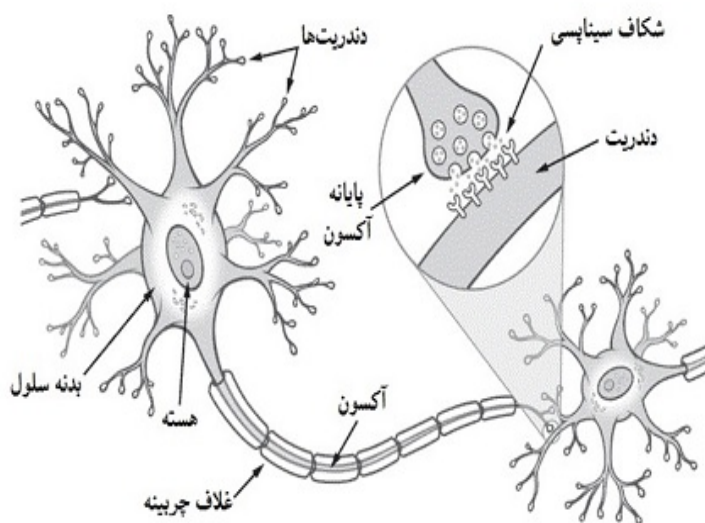
<sup>۳</sup>Dendrite

<sup>۴</sup>Axon

<sup>۵</sup>Synapse

از پایانه قبل از سیناپسی<sup>۶</sup>، شکاف سیناپسی<sup>۷</sup> و پایانه بعد از سیناپسی<sup>۸</sup> است. همه سیگنال‌های جمع‌بندی شده، در تنه نرون ترکیب می‌شوند و اگر وسعت سیگنال‌های ترکیب شده به آستانه نرون برسد، مرحله تحریک شدن<sup>۹</sup> فعال می‌شود و یک سیگنال خروجی تولید می‌شود. این سیگنال به صورت یک پالس منفرد یا بخشی از پالس‌ها در یک میزان خاص به موازات آکسون به پایانه‌های سیناپسی انتقال می‌یابد و موجب ترشح موادی به نام عصب-رسانه می‌شود. عصب-رسانه در داخل شکاف سیناپسی پخش می‌شود و نرون بعدی را تحریک می‌کند و به این ترتیب یک سیگنال از یک نرون به دیگری انتقال می‌یابد. تعداد بسیار زیادی آکسون از نرون‌های مختلف با دندریت‌های یک نرون به این صورت ارتباط برقرار می‌کنند.[۲۵]

نرون‌ها با توجه به عملکردشان به سه دسته تقسیم می‌شوند[۲۵]



شکل ۱.۱: ساختار یک نرون.

(۱) **نرون‌های حسی:** این نرون‌ها پیام‌ها را از گیرنده‌ها به دستگاه عصبی مرکزی منتقل می‌کنند. گیرنده سلول خاصی است که در اندام‌های حسی، عضلات، پوست و ... قرار دارد و تغییرات فیزیکی یا شیمیایی را در می‌یابد، این تغییرات را به سیگنال‌های عصبی تبدیل می‌کند.

(۲) **نرون‌های حرکتی:** این نرون‌ها پیام‌ها را از مغز یا طناب نخاعی به اندام‌های عمل کننده می‌رسانند.

(۳) **نرون‌های رابط:** این نرون‌ها پیام‌ها را از نرون‌های حسی می‌گیرند و به یک نرون رابط دیگر انتقال می‌دهند و یا پیام‌ها را به یک نرون حرکتی می‌رسانند. نرون‌های رابط فقط در مغز، چشم و طناب نخاعی یافت می‌شوند.

حال منظور از یادگیری عبارت است از تغییری نسبتاً ساختاری در سیناپس (بعد از تحریک)، که این تغییر ساختاری باعث افزایش کارایی سیناپس می‌شود.

<sup>6</sup>Resynaptic Terminal

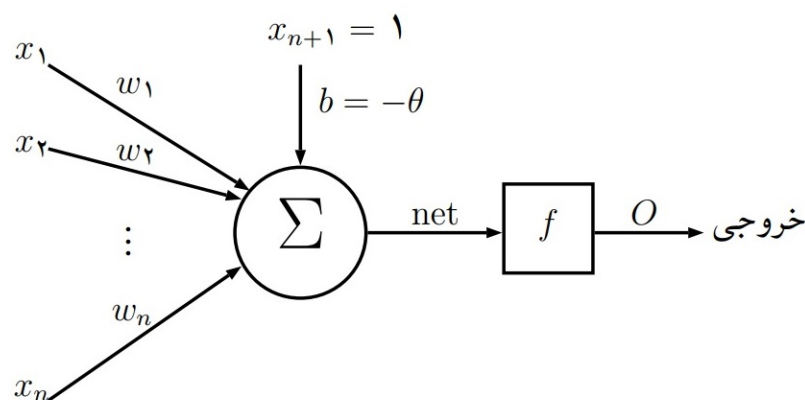
<sup>7</sup>Synaptic Cleft

<sup>8</sup>Postsynaptic Termina

<sup>9</sup>Firing

## ۲.۱ شبکه‌های عصبی مصنوعی

بعد از اشاره‌ای گذرا بر شبکه عصبی بیولوژیکی و نشان دادن گوشه‌ای بسیار کوچک از این جهان مرموز و فوق‌العاده پیچیده به موضوع اصلی یعنی شبکه‌های عصبی مصنوعی<sup>۱۰</sup> می‌پردازیم. شبکه‌های عصبی مصنوعی مدل‌های سخت افزاری یا نرم افزاری الهام گرفته از ساختار و رفتار نرون‌های بیولوژیکی و سیستم‌های عصبی انسان هستند که شامل عناصر پردازشی (به نام نرون‌ها) و ارتباطات میان آنها با ضرایب (وزن‌ها) اختصاص یافته به ارتباطات است، که ساختار شبکه عصبی را تشکیل می‌دهند. در این پایان‌نامه ما شبکه‌های عصبی مصنوعی را یک مدل ریاضی فرض خواهیم کرد و به جای استفاده از عبارت شبکه‌های عصبی مصنوعی به طور خلاصه عبارت شبکه‌های عصبی را به کار خواهیم برد.



شکل ۲.۱: مدل ریاضی یک نرون.

مدل شبیه‌سازی شده یک نرون، در شکل (۲.۱) نمایش داده شده است. یک نرون در حالت کلی یک مجموعه از  $n + 1$  ورودی  $x_j$  ( $j = 1, \dots, n + 1$ ) دارد. این ورودی‌ها همان سیگنال‌های عصبی هستند که از محیط یا از یک نرون دیگر فرستاده می‌شوند.  $w_j$  ( $j = 1, \dots, n + 1$ ) که روی آکسون‌ها واقع هستند نقش ساختار سیناپسی را ایفا می‌کنند. این‌ها هستند که باید تغییر کنند تا فرآیند یادگیری اتفاق افتد، حال این‌که این تغییر بر چه قاعده‌ای استوار باشد بستگی به الگوریتم آموزش یا تعلیم دارد. وزن آخرین ورودی یعنی  $-\theta$  را با  $b$  نشان می‌دهند و آن را بایاس می‌نامند. سیگنال‌های عصبی  $x_1$  و  $x_2$  و  $\dots$  و  $x_{n+1}$  به ترتیب در  $w_1$  و  $w_2$  و  $\dots$  و  $w_{n+1}$  ضرب شده و مجموع این حاصل‌ضرب‌ها که در شکل آن را با  $\text{net}$  نشان می‌دهیم، وارد نرون می‌شوند. در این مرحله نرون همانند یک تابع روی  $\text{net}$  عمل می‌کند و حاصل کار خود (برد تابع) را از طریق آکسون‌های طرف راست به نرون‌های دیگر می‌فرستد. این تابع را تابع فعال‌سازی<sup>۱۱</sup> می‌نامند [۲۵].

البته خاطر نشان می‌کنیم که اگر نرون به عنوان تابع فرض شود این تابع از  $\mathbb{R}^n$  به  $\mathbb{R}$  تعریف می‌شود، یعنی سیگنال خروجی از نرون در تمام آکسون‌های طرف راست یکسان می‌باشد که روی شکل با  $O$  نمایش داده‌ایم. همان‌طور که قبلاً اشاره شد نرون‌ها می‌توانند حسی، ارتباطی و یا حرکتی باشند. اطلاعات از طریق نرون‌های حسی دریافت می‌شود و از

<sup>10</sup> Artificial Neural Networks

<sup>11</sup> Activation Function

طریق نرون‌های ارتباطی انتقال می‌یابد و بالاخره نتیجه کار شبکه عصبی و یا واکنش شبکه عصبی به اطلاعات دریافت شده از طریق نرون‌های حرکتی به خارج منتقل می‌شود در شکل (۳.۱) نرون‌های حسی را لایه ورودی، نرون‌های حرکتی را لایه خروجی و نرون‌های ارتباطی را لایه پنهان نیز می‌گویند. لایه مخفی می‌تواند از چندین لایه تشکیل گردد البته در شکل (۳.۱) لایه مخفی تک لایه در نظر گرفته شده است [۲۵].

مشخصه‌های اصلی یک شبکه عصبی که در طراحی آن باید مدنظر قرار گیرند عبارت‌اند از [۲۵]

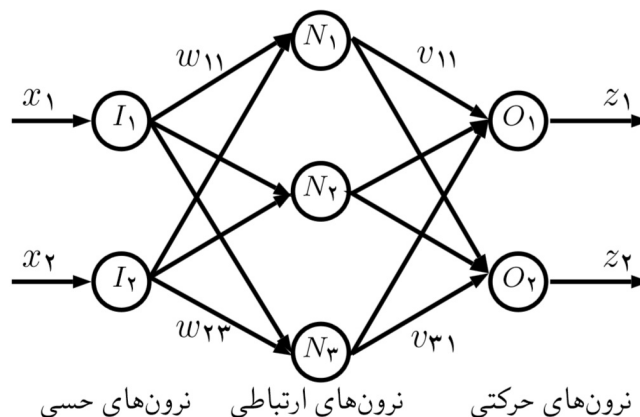
**معماری شبکه عصبی:** نحوه اتصالات بین نرون‌ها، تعداد آن‌ها و تعداد لایه‌های تشکیل دهنده بخش نرون‌های ارتباطی را معماری شبکه عصبی می‌گویند.

**تابع‌های فعال‌سازی:** این‌که چه تابعی روی نرون قرار بگیرد تا بر ورودی‌های نرون اثر کرده و خروجی نرون را تولید کند تابع فعال‌سازی آن نرون نامیده می‌شود. در جدول (۱.۱) تعدادی از مهم‌ترین توابع فعال‌سازی نشان داده شده است.

**الگوریتم آموزش:** روشی که وزن‌های روی آکسون‌ها بر اساس آن تغییر می‌کنند ( $w_{ij}$  ها و  $v_{jk}$  ها در شکل (۳.۱)) تا خروجی شبکه عصبی به حالت مطلوب درآید را الگوریتم آموزش می‌گوییم.

با توجه به مطالب قبل می‌توان برای شبکه‌های عصبی مصنوعی خصوصیات عمومی زیر را نسبت داد:

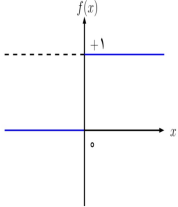
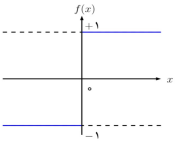
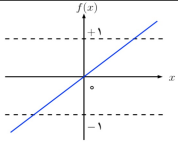
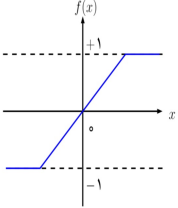
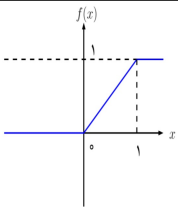
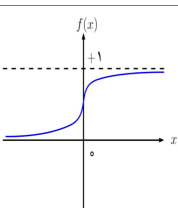
۱. پردازش اطلاعات در عناصر بسیار ساده به نام نرون (سلول عصبی) انجام می‌گیرد.
۲. سیگنال‌های عصبی بین سلول‌های عصبی از طریق اتصالات بین آن‌ها مبادله می‌شوند.
۳. به هر خط اتصال (آکسون) یک وزن نسبت داده می‌شود که در شبکه‌های عصبی معمولی این وزن‌ها در سیگنال‌های منتقل شده ضرب می‌شوند.
۴. هر نرون دارای یک تابع فعال‌سازی می‌باشد که این تابع در اکثر موارد غیرخطی است.



شکل ۳.۱: ساختار یک نرون با لایه ورودی، لایه پنهان و لایه خروجی.



جدول ۱.۱: توابع فعال‌سازی

| ردیف | نام                       | تعریف تابع                                                                                | شکل تابع                                                                            |
|------|---------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| ۱    | آستانه‌ای دو مقدار        | $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$                            |    |
| ۲    | آستانه‌ای دو مقدار متقارن | $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$                           |    |
| ۳    | خطی                       | $f(x) = x$                                                                                |    |
| ۴    | آستانه‌ای خطی متقارن      | $f(x) = \begin{cases} -1, & x < -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$ |   |
| ۵    | آستانه‌ای خطی             | $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$    |  |
| ۶    | سیگموئید                  | $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$                                                               |  |

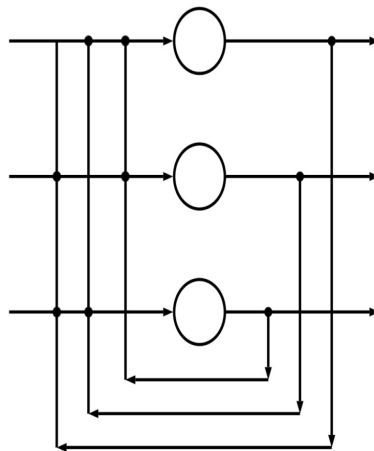
## ۳.۱ انواع شبکه‌های عصبی مصنوعی از نظر برگشت پذیری

### ۱.۳.۱ شبکه‌های پیشخور

شبکه‌های پیشخور<sup>۱۲</sup> شبکه‌هایی هستند که مسیر پاسخ در آن‌ها، همواره رو به جلو پردازش می‌شوند و به نرون‌های لایه قبل باز نمی‌گردد. در این نوع شبکه‌ها به سیگنال‌ها اجازه می‌دهند تنها از مسیر یک طرفه عبور کنند، یعنی از ورودی تا خروجی بنابراین بازخوردی وجود ندارد، به این معنی که خروجی هر لایه تأثیری بر همان لایه ندارد. در بدن انسان نیز پیام‌های عصبی یک طرفه حرکت می‌کنند، از دندریت به بدنه سلول و سپس به آکسون [۲۰].

### ۲.۳.۱ شبکه‌های عصبی بازگشتی

در شبکه‌های عصبی بازگشتی<sup>۱۳</sup>، حداقل یک سیگنال برگشتی از یک نرون به همان نرون یا نرون‌های همان لایه و یا لایه قبل وجود دارد. چنین شبکه‌ای حافظه‌ای را نگه می‌دارد و حالت بعد نه تنها به سیگنال‌های ورودی بلکه به حالات قبل شبکه نیز وابسته است. این شبکه‌های عصبی معمولاً در مدل ریاضی به صورت معادلات دیفرانسیل مرتبه اول ظاهر می‌شوند [۲۵].



شکل ۴.۱: شبکه‌های عصبی دو لایه بازگشتی.

## ۴.۱ تاریخچه تکامل شبکه عصبی

در سال ۱۹۴۳ یک نرولوژیست به نام وارن مک کلاچ<sup>۱۴</sup> به همراه یک متخصص آمار به نام والتر پیتز<sup>۱۵</sup> اولین مدل ریاضی نرون را ارائه دادند [۱۴]. این نرون ساده یک عنصر محاسبه‌گر بود که عناصری به نام ورودی را در مقادیر ثابتی به نام

<sup>12</sup>Feedforward Networks

<sup>13</sup> Recurrent Neural Network

<sup>14</sup>Warren McCulloch

<sup>15</sup>Walter Pitts

وزن ضرب می‌کرد و آنها را از یک عملگر خطی عبور می‌داد و حاصل خروجی نرون را تشکیل می‌داد. در این مدل وزن‌ها مقادیر ثابتی بودند. در سال ۱۹۴۹ دونالد هب<sup>۱۶</sup> [۵] کتابی درباره نحوه یادگیری در مغز انسان نوشت. بر این مبنا قانون یادگیری برای نرون را ارائه داد که به قانون هب معروف است و بعدها در تعلیم شبکه‌های عصبی از آن استفاده شد. در سال ۱۹۵۴ فارلی و کلارک<sup>۱۷</sup> [۲۴] مدلی از نرون‌ها را به‌طور تصادفی به هم وصل کردند و قانون هب را پیاده‌سازی نمودند و نشان دادند که می‌توان دو الگوی ورودی را با این قانون تعلیم از هم تشخیص داد. با پیشرفت علم کامپیوتر اولین مدل از نرون عصبی مصنوعی توسط ناتانیال روچستر<sup>۱۸</sup> محقق شرکت IBM در سال ۱۹۵۸ با استفاده از کامپیوتر شبیه‌سازی شد. روزنبلات<sup>۱۹</sup> [۱۵] در سال ۱۹۵۸ نرون ساده مک‌کلاچ پیتز را اصلاح کرد و به آن قابلیت یادگیری و سازگاری را اضافه کرد و این نرون را پرسپترون<sup>۲۰</sup> نامید. قانون تعلیم پرسپترون اولین قانون رسمی برای شبکه‌های عصبی است.

برنارد ویدرو<sup>۲۱</sup> و مارسین هاف<sup>۲۲</sup> و همکارانشان یک مدل سه سطحی از نرون‌ها را ابداع کردند که آدلاین<sup>۲۳</sup> نام‌گذاری شد و مختصر شده حروف "عصر خطی تطبیقی"<sup>۲۴</sup> بود [۱۸]، و برای آدلاین یک قانون تعلیم بر مبنای مشتق‌گیری بیان نمودند. این قانون تعلیم به  $\alpha - LMS$  معروف است. از متصل کردن چند آدلاین به یکدیگر مادلاین<sup>۲۵</sup> ساخته شد. ویدرو و هاف از شبکه عصبی مادلاین برای حذف اکو از خطوط تلفن استفاده نمودند.

سال ۱۹۶۹ آغاز یک دوره رکود برای شبکه عصبی بود. پاپرت و مینسکی<sup>۲۶</sup> [۱۳] کتابی به نام پرسپترون نوشتند و نشان دادند که اگرچه گیت‌های OR و AND را می‌توان با استفاده از پرسپترون پیاده‌سازی کرد ولی گیت XOR قابل پیاده‌سازی نیست و لذا نمی‌توان از شبکه عصبی برای پردازش اطلاعات استفاده کرد. دهه ۱۹۷۰ همچنین دهه ظهور نگاشت خود سازمانده<sup>۲۷</sup> به اختصار SOM به وسیله‌ی وان در مالسبورگ<sup>۲۸</sup>، اماری<sup>۲۹</sup> و گراسبرگ<sup>۳۰</sup> و حافظه‌های انجمنی توسط کوهنن<sup>۳۱</sup> و اندرسون<sup>۳۲</sup> بوده است.

الگوریتم پس انتشار<sup>۳۳</sup> پال ورباس<sup>۳۴</sup> [۱۷] در سال ۱۹۷۴ ارائه شد و بعدها توسط رامل هارت<sup>۳۵</sup> [۱۶] به‌طور مستقل

<sup>16</sup>Donald Hebb

<sup>17</sup>Farley and Clark

<sup>18</sup>Nathanial Rochester

<sup>19</sup>Frank Rosenblatt

<sup>20</sup>Perceptron

<sup>21</sup>Bernard Widrow

<sup>22</sup>Marcian Hoff

<sup>23</sup>Adeline

<sup>24</sup>Adaptive Linear Elements

<sup>25</sup>Madaline

<sup>26</sup>Papert and Minsky

<sup>27</sup>Self Organizing Map

<sup>28</sup>Von der Malsburg

<sup>29</sup>Amari

<sup>30</sup>Grossberg

<sup>31</sup>Kohonen

<sup>32</sup>Anderson

<sup>33</sup>Back Propagation

<sup>34</sup>Paul Werbos

<sup>35</sup>Rumelhart

کشف گردید. این الگوریتم از زمان پیدایش به‌طور گسترده به‌عنوان یک الگوریتم آموزش در شبکه‌های عصبی پیشخور<sup>۳۶</sup> مورد استفاده قرار گرفته است. سال ۱۹۸۲ تا ۱۹۸۶ را می‌توان تولد دوباره شبکه عصبی دانست. در این سال‌ها دو اتفاق مهم در این زمینه رخ داد. اول ارائه شبکه عصبی بازگشتی و مفهوم تابع انرژی توسط جان هاپفیلد<sup>۳۷</sup> [۷] بود که در سال ۱۹۸۲ منتشر شد. دومین اتفاق، حل مسأله فروشنده دوره‌گرد (TSP) توسط شبکه هاپفیلد بود. هاپفیلد نشان داد که از این شبکه بازگشتی می‌توان برای حل مسائل بهینه‌سازی استفاده کرد و افق جدیدی را در شبکه‌های عصبی مصنوعی گشود [۸].

## ۵.۱ انواع شبکه‌های عصبی

انواع مختلفی از مدل‌های محاسباتی تحت عنوان کلی شبکه‌های عصبی مصنوعی معرفی شده‌اند، که هر یک برای دسته‌ای از کاربردها قابل استفاده‌اند و در هر کدام، از وجه مشخصی از قابلیت‌ها و خواص مغز انسان الهام گرفته شده است [۲۲]. در همه این مدل‌ها، یک ساختار ریاضی، که البته به صورت گرافیکی هم قابل نمایش دادن است، در نظر گرفته می‌شود که یک سری پارامترها تنظیم دارد. این ساختار کلی، توسط یک الگوریتم یادگیری یا تربیت<sup>۳۸</sup> تنظیم و بهینه می‌شود، که بتواند رفتار مناسبی را از خود نشان دهد [۲۲].

نگاهی به فرآیند یادگیری در مغز انسان نیز، نشان می‌دهد که در واقع ما نیز در مغزمان فرآیندی مشابه با این را تجربه می‌کنیم و همه مهارت‌ها، دانسته‌ها و خاطرات ما، در اثر تضعیف یا تقویت ارتباط میان سلول‌های عصبی مغز شکل می‌گیرند. این تقویت و تضعیف، در زبان ریاضی خودش را به صورت تنظیم یک پارامتر موسوم به وزن<sup>۳۹</sup> یا مدل‌سازی توصیف می‌شود. اما طرز نگاه مدل‌های شبکه‌های عصبی مصنوعی کاملاً متفاوت است و هر یک، بخشی از قابلیت‌های یادگیری و تطبیق مغز انسان را هدف قرار داده و تقلید نموده‌اند. در ادامه، یک بررسی مروری از انواع شبکه‌های عصبی مختلف آمده است [۲۲].

### ۱.۵.۱ شبکه‌های عصبی پرسپترون چند لایه

یکی از پایه‌ای‌ترین مدل‌های عصبی موجود، مدل پرسپترون چند لایه<sup>۴۰</sup> [۲۲] یا به اختصار MLP است که عملکرد انتقالی مغز انسان را شبیه‌سازی می‌کند. در این نوع شبکه عصبی، رفتار شبکه‌ای مغز انسان و انتشار سیگنال در آن بیشتر مد نظر بوده است و از این رو، گاهی با نام شبکه‌های پیشخور نامیده می‌شوند. هر یک از سلول‌های عصبی مغز انسان، موسوم به نرون پس از دریافت ورودی از یک سلول عصبی یا غیر عصبی دیگر، پردازشی روی آن انجام می‌دهد و نتیجه را به یک سلول عصبی دیگر یا غیر عصبی انتقال می‌دهد. این رفتار تا حصول نتیجه‌ای مشخص ادامه دارد، که احتمالاً منجر به یک تصمیم، پردازش، تفکر و یا حرکت خواهد شد. شکل (۵.۱) را ببینید.

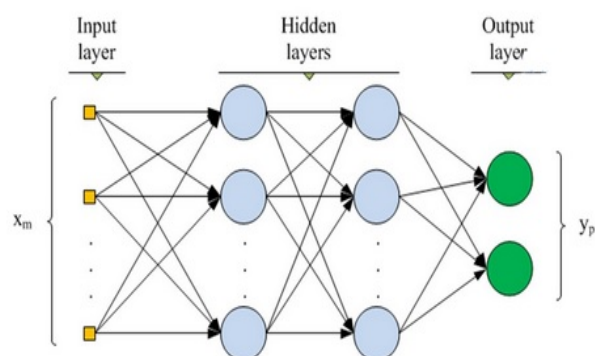
<sup>۳۶</sup>Feed Forward

<sup>۳۷</sup>John Hopfield

<sup>۳۸</sup>Training Algorithm

<sup>۳۹</sup>Weight

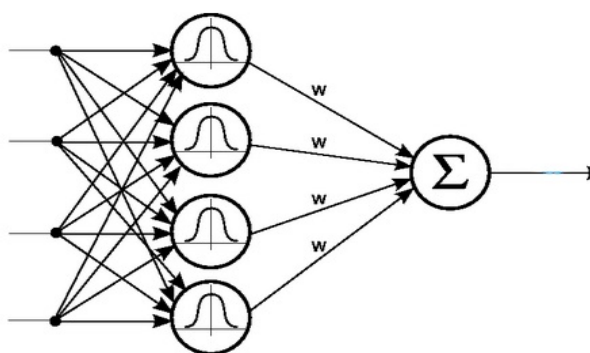
<sup>۴۰</sup>Multi-Layer Perceptron



شکل ۵.۱: شبکه‌های عصبی پرسپترون

## ۲.۵.۱ شبکه‌های عصبی شعاعی

مشابه الگوی شبکه‌های عصبی MLP، نوع دیگری از شبکه‌های عصبی وجود دارند که در آن‌ها، واحدهای پردازنده، از نظر پردازشی بر موقعیت خاصی متمرکز هستند. این تمرکز، از طریق توابع شعاعی<sup>۴۱</sup> [۲۲] یا به اختصار RBF مدل‌سازی می‌شود. از نظر ساختار کلی، شبکه‌های عصبی RBF تفاوت چندانی با شبکه‌های MLP ندارند و صرفاً نوع پردازشی که نرون‌ها روی ورودی‌هایشان انجام می‌دهند، متفاوت است. با این حال شبکه‌های RBF غالباً دارای فرآیند یادگیری و آماده‌سازی سریع‌تری هستند. در واقع به دلیل تمرکز نرون‌ها بر محدوده عملکردی خاص، کار تنظیم آن‌ها راحت‌تر خواهد بود. شکل (۶.۱) را ببینید.

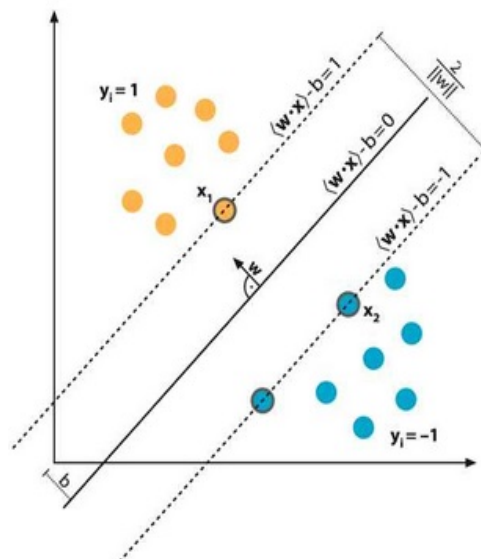


شکل ۶.۱: شبکه‌های عصبی شعاعی

<sup>۴۱</sup>Radial Basis functions

## ۶.۱ شبکه‌های عصبی ماشین‌های بردار پشتیبان

در شبکه‌های عصبی MLP و RBF، غالباً توجه بر بهبود ساختار شبکه‌های عصبی است، به نحوی که خطای تخمین و میزان اشتباه‌های شبکه‌های عصبی کمینه شود. اما در نوع خاصی از شبکه‌های عصبی، موسوم به ماشین بردار پشتیبان<sup>۴۲</sup> [۲۲] یا به اختصار SVM، صرفاً بر روی کاهش ریسک عملیاتی مربوط به عدم عملکرد صحیح، تمرکز می‌شود. ساختار یک شبکه SVM، اشتراکات زیادی با شبکه عصبی MLP دارد و عملاً تفاوت اصلی آن، در شیوه یادگیری است. شکل (۷.۱) را ببینید.



شکل ۷.۱: شبکه‌های عصبی ماشین بردار پشتیبان

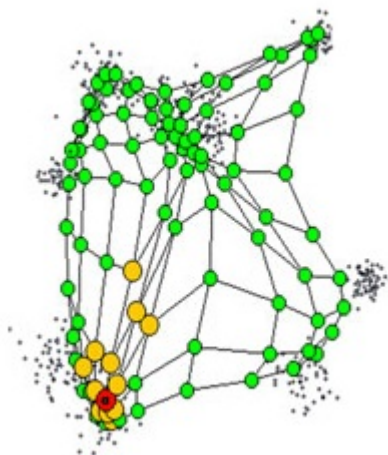
## ۷.۱ نگاشت‌های خود سازمان‌ده

شبکه عصبی کوهنن<sup>۴۳</sup> و یا نگاشت خود سازمان‌ده<sup>۴۴</sup> [۲۲] یا به اختصار SOM نوع خاصی از شبکه‌های عصبی است که از نظر شیوه عملکرد، ساختار و کاربرد، کاملاً با انواع شبکه‌های عصبی که پیش از این مورد بررسی قرار گرفتند، متفاوت است. ایده اصلی نگاشت خود سازمان‌ده، از تقسیم عملکردی ناحیه قشری مغز، الهام گرفته شده است و کاربرد اصلی آن در حل مسائلی است که به مسائل یادگیری بدون نظارت معروف هستند. در واقع کارکرد اصلی یک SOM، در پیدا کردن شباهت‌ها و دسته‌های مشابه در میان انبوهی از داده‌ها است که در اختیار آن قرار گرفته است. مشابه با کاری که قشر مغز انسان انجام داده و انبوهی از ورودی‌های حسی و حرکتی به مغز را در گروه‌های مشابهی طبقه‌بندی کرده است. شکل (۸.۱) را ببینید.

<sup>۴۲</sup>Support Vector Machine

<sup>۴۳</sup>Kohonen

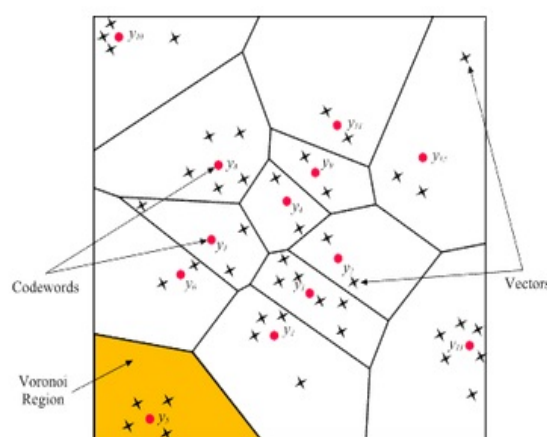
<sup>۴۴</sup>Self-Organizing Map



شکل ۸.۱: شبکه‌های عصبی نگاشت‌های خود سازمان‌ده

## ۸.۱ شبکه‌های عصبی یادگیرنده رقمی ساز بردار

این نوع خاص از شبکه‌های عصبی تعمیم ایده شبکه‌های عصبی SOM برای حل مسائل یادگیری با نظارت بیان شده است. از طرفی شبکه عصبی یادگیرنده رقمی ساز بردار<sup>۴۵</sup> [۲۲] یا به اختصار LVQ می‌تواند به این‌صورت تعبیر شود که گویا شبکه عصبی MLP با یک رویکرد متفاوت کاری را که باید انجام دهد، یاد می‌گیرد. اصلی‌ترین کاربرد این نوع شبکه‌های عصبی، در حل مسائل طبقه‌بندی است، که گستره وسیعی از کاربردهای سیستم‌های هوشمند را پوشش می‌دهد. شکل (۹.۱) را ببینید.

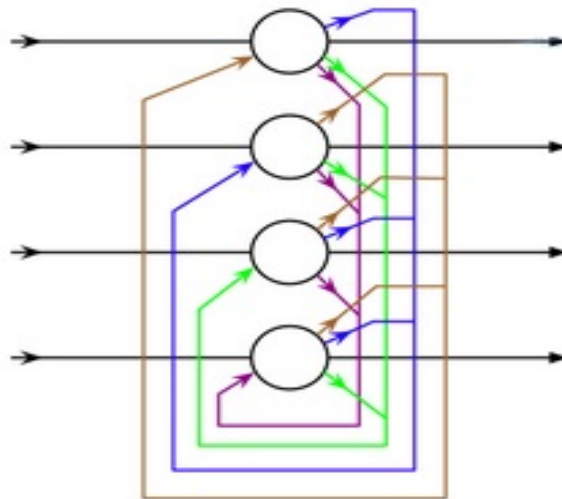


شکل ۹.۱: شبکه‌های عصبی یادگیرنده رقمی ساز بردار

<sup>45</sup>Learning Vector Quantization

### ۱.۸.۱ مدل شبکه‌های عصبی هاپفیلد

در سال ۱۹۸۲، جان هاپفیلد که در انیستوی تکنولوژی کالیفرنیا فعالیت می‌کرد و در آزمایشگاه‌های AT AND "TBELL مشغول به کار بود، مدلی را تصور نمود که با ماهیت غیر همزمانی نرون‌های بیولوژیکی مطابقت داشت. در واقع، این مدل یک شبکه تصادفی و ناهمزمان بود که در تضاد با شبکه پرسپترون است. به طور کلی، شبکه هاپفیلد [۲۱] یک شبکه کاملاً متصل بازگشتی است که متشکل از یک لایه نرونی است. این شبکه، همچنین یک شبکه به طور متقارن وزن گذاری شده است. واحد اصلی مدل هاپفیلد یک عنصر پردازشگر با دو خروجی است که یکی از آن‌ها غیر مستقیم و دیگری معکوس است. شبکه‌ی هاپفیلد نوعی شبکه‌ی عصبی بازگشتی است که تابع فعال‌ساز نرون‌های آن می‌تواند تابع علامت باشد، یعنی خروجی هر نرون فقط 1 و -1 است. شکل (۱۰.۱) را ببینید.



شکل ۱۰.۱: شبکه‌های عصبی هاپفیلد



## فصل ۲

# مقدمات و مفاهیم اساسی مرتبط با پایداری

## ۱.۲ مقدمه

اولین قدم در تحلیل کمی هر سیستم دینامیکی<sup>۱</sup> فرمول‌بندی دسته‌ای از معادلات ریاضی است که رفتار آن سیستم را توصیف می‌کند. با این حال حتی در دقیق‌ترین این فرمول‌بندی‌ها، اثرات تمام نیروهای اغتشاش‌گر ناشناخته، قابل محاسبه نیست. مفهوم پایداری<sup>۲</sup> که نشأت گرفته از ریاضیات است، به تحقیق در مورد اثرات چنین نیروهایی می‌پردازد [۲۰]. در بعضی موارد، اثر این اغتشاشات ممکن است ناچیز باشد، در حالی که در موارد دیگر ممکن است منجر به انحرافی قابل ملاحظه در رفتار سیستم شود که پس از آن، سیستم اغتشاشی از خود نشان نمی‌دهد. از لحاظ کیفی رفتار از نوع اول را پایدار، و نوع دوم را ناپایدار گویند. چون نیروهای اغتشاش‌گر در تمامی سیستم‌های فیزیکی مشاهده می‌شود، مطالعه روی مسائل پایداری هم به دلایل نظری و هم کاربردی از اهمیت بالایی برخوردار است.

## ۲.۲ تاریخچه نامساوی ماتریسی خطی

تاریخچه نامساوی ماتریسی خطی LMI<sup>۳</sup> در تجزیه و تحلیل سیستم‌های دینامیکی به بیش از ۱۰۰ سال می‌رسد. از سال ۱۸۹۰ فردی به نام لیاپانوف<sup>۴</sup> کار اصلی خود را که در حال حاضر به نظریه لیاپانوف معروف است ارائه نمود. وی

<sup>۱</sup>Dynamical Systems

<sup>۲</sup>Stability

<sup>۳</sup>Linear matrix inequality

<sup>۴</sup>Lyapunov

نشان داد که معادله دیفرانسیل

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t), \quad (1.2)$$

پایدار است، اگر و تنها اگر ماتریس معین مثبت<sup>۵</sup>  $P$  موجود باشد به طوریکه نامساوی

$$A^T P + PA < 0,$$

برقرار باشد، که به آن نامساوی لیاپانوف بر روی  $P$  می گویند که فرم خاصی از نامساوی ماتریسی خطی است. همچنین لیاپانوف به صراحت نشان داد این نخستین نامساوی ماتریسی خطی است که با انتخاب  $Q = Q^T$  مناسب و سپس حل معادله خطی  $A^T P + PA = -Q$  می توان آن را حل کرد [۲].

پایدارای مجانبی<sup>۶</sup> سیستم های غیر خطی که توسط لیاپانوف در اواخر قرن ۱۹ معرفی شد [۱۲]، به طور گسترده ای مورد مطالعه قرار گرفت. پایداری لیاپانوف، پایداری را به عنوان یک خاصیت درونی سیستم در نظر می گیرد و با تاثیرات اختلالات آنی از تغییر شرط اولیه سر و کار دارد. این پایداری مستلزم آن است که منحنی های مسیر سیستم، در مدت زمان نامحدود به ناحیه مورد نظر همگرا شوند. اثر بخشی هر سیستم کنترلی عمدتاً به وسیله دقت و نیز سرعت که به وسیله آن متغیرها کنترل می شود، مورد قضاوت قرار می گیرد. اما قبل از تلاش برای برآورده کردن معیارهای خاص عملکرد یا بهینه سازی سیستم، اطمینان یافتن از پایداری آن امری لازم است. از این رو یکی از اهداف اولیه در تحلیل سیستم های کنترلی داشتن درکی واضح از خواص پایداری آن سیستم است [۲۰]. نقطه عطف مهم بعدی در سال ۱۹۸۰ توسط لُور<sup>۷</sup> و پاسنیکاو<sup>۸</sup> اتفاق افتاد. آن ها روش های لیاپانوف را برای برخی از مسائل عملی خاص در مهندسی کنترل به ویژه مسأله پایداری سیستم های کنترل با عملکردی خاص اعمال نمودند [۲].

موفقیت بزرگ بعدی در اوایل دهه ی ۱۹۶۰ رخ داد، زمانی که پژوهشگرانی چون یاکوبوویچ<sup>۹</sup>، کالمن<sup>۱۰</sup>، پاپاو<sup>۱۱</sup> و دیگر محققان روش نامساوی ماتریسی خطی را که در مسأله ی لُور موجود بوده توانستند با استفاده از معیارهای ساده ی گرافیکی به لم<sup>۱۲</sup> PR کاهش دهند. در اوایل سال ۱۹۶۰، نامساوی ماتریسی خطی در نظریه کنترل به رسمیت شناخته شد. در سال ۱۹۷۱ مشخص شد نامساوی ماتریسی خطی که در لم حقیقی مثبت بیان شده، نه تنها می توان آن را از طریق برنامه های گرافیکی حل کرد، بلکه توسط معادله جبری ریکاتی ARE<sup>۱۳</sup> قابل حل است. در همین سال جی. سی. ویلمز<sup>۱۴</sup> نامساوی ماتریسی خطی را بر روی مسائل کنترل بهینه ی درجه ی دوم بررسی کرد. لذا در سال های اخیر پژوهشگران چندین روش را برای انواع خاصی از نامساوی ماتریسی خطی یافتند که می توان به روش مستقیم (برای سیستم های کوچک)، روش گرافیکی، و حل معادلات ریکاتی اشاره نمود [۲].

<sup>5</sup>Positive definite

<sup>6</sup>Asymptotically Stable

<sup>7</sup>Lur'r

<sup>8</sup>Posnikow

<sup>9</sup>Yakubovich

<sup>10</sup>Kalman

<sup>11</sup>Popov

<sup>12</sup>Positive real

<sup>13</sup>Algebraic Riccati Equation

<sup>14</sup>J.C. Willems

## ۳.۲ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۳.۲ (مشتق انتگرال). فرض کنید  $p(x)$  و  $q(x)$  توابعی پیوسته و مشتق پذیر باشند و داشته باشیم

$$f(x) = \int_{p(x)}^{q(x)} h(t) dt,$$

آن گاه مشتق تابع بالا به شکل زیر است

$$f'(x) = q'(x) \cdot h(q(x)) - p'(x) \cdot h(p(x)).$$

تعریف ۲.۳.۲ (ماتریس متقارن <sup>۱۵</sup> [۲۱]). ماتریس مربعی  $A$  را متقارن می گویند، هرگاه  $A = A^T$ .

تعریف ۳.۳.۲ (ماتریس قطری <sup>۱۶</sup> [۱۹]). ماتریس مربعی  $D$  را قطری می گویند، هرگاه تمام درایه های خارج قطر اصلی برابر صفر باشند و آن را به دو صورت زیر نمایش می دهند

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix},$$

$$D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n).$$

تعریف ۴.۳.۲ (معین مثبت <sup>۱۷</sup> [۲۱]). ماتریس متقارن  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  را معین مثبت می گویند هرگاه به ازای هر بردار غیر صفر  $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  داشته باشیم  $x^T A x > 0$ .

تعریف ۵.۳.۲ (نیمه معین مثبت <sup>۱۷</sup> [۲۱]). ماتریس متقارن  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  را نیمه معین مثبت می گویند هرگاه به ازای هر بردار غیر صفر  $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  داشته باشیم  $x^T A x \geq 0$ .

تعریف ۶.۳.۲ (معین منفی <sup>۱۸</sup> [۲۱]). ماتریس متقارن  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  را معین منفی می گویند هرگاه به ازای هر بردار غیر صفر  $x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  داشته باشیم  $x^T A x < 0$ .

تعریف ۷.۳.۲ (تجزیه چولسکی <sup>۱۹</sup> [۶]). فرض کنید  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  یک ماتریس متقارن و معین مثبت باشد. در این صورت ماتریس پایین مثلثی منحصر بفرد  $M = m_{(ij)}$  وجود دارد به طوری که درایه های روی قطر اصلی آن مثبت هستند و  $A = M M^T$ .

<sup>15</sup>Symmetric matrix

<sup>16</sup>Diagonal matrix

<sup>17</sup>positive semi definite

<sup>18</sup>Negative definite

<sup>19</sup>Cholesky decomposition

**تعریف ۸.۳.۲** ([۲۵]). تابع  $F : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  روی  $E$  در شرط لیپ شیتز<sup>۲۰</sup> صدق می‌کند (پیوسته لیپ شیتز<sup>۲۱</sup> است) اگر ثابت  $L$  وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر دو نقطه  $x, y \in E$  داشته باشیم

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L \|x - y\|.$$

تابع  $F$  پیوسته لیپ شیتز محلی<sup>۲۲</sup> روی  $E$  نامیده می‌شود اگر برای نقطه  $x_0 \in E$  یک  $\varepsilon -$  همسایگی مانند  $N_\varepsilon(x_0) \subset E$  و یک ثابت  $L_0$  وجود داشته باشد به‌طوری که برای هر دو نقطه  $x, y \in N_\varepsilon(x_0)$  داشته باشیم

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L_0 \|x - y\|.$$

**تعریف ۹.۳.۲** ([۳]). اگر  $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع پیوسته باشد، مشتق دینی راست بالای<sup>۲۳</sup>  $r(t)$  به صورت زیر تعریف می‌شود

$$D^+r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sup \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}.$$

## ۱.۳.۲ سیستم

سیستم عبارت است از مجموعه‌ای شامل چندین علت و معلول که از فعل و انفعالات آن‌ها بر یکدیگر، رفتاری مشخص و معین نتیجه می‌شود. به طور کلی سیستم‌ها را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد:

الف) سیستم حلقه باز

ب) سیستم بازخورد<sup>۲۴</sup>

**تعریف ۱۰.۳.۲** (سیستم حلقه باز [۲۰]). سیستم حلقه باز سیستمی است که رفتار گذشته آن تأثیری بر رفتار آینده‌اش ندارد، به عبارت دیگر رفتار خروجی سیستم هیچ اثری بر روی ورودی سیستم ندارد. مانند جسمی که در خلاء در فضای بی‌کران در حال حرکت است و هیچ نیرویی از خارج به آن وارد نمی‌شود. سرعت این جسم همواره ثابت و مسیر حرکت آن یک خط راست است.

**تعریف ۱۱.۳.۲** (سیستم بازخورد [۲۰]). سیستم بازخورد، سیستمی است که عملکرد خروجی آن در زمان گذشته بر عملکرد خروجی آن در زمان حال و آینده اثر می‌گذارد. به طور کلی می‌توان بازخورد را به انتقال و بازگشت اطلاعات تعبیر کرد. در طبیعت سیستم‌های بازخورد فراوانی وجود دارد، مثل راه رفتن، رانندگی، سرد شدن فنجان چای و غیره.

**تعریف ۱۲.۳.۲** (معادله حرکت [۱۰]). بسیاری از سیستم‌های فیزیکی را می‌توان با دستگاه معادلات دیفرانسیل به

<sup>20</sup>Lipschitz

<sup>21</sup>Lipschitz Continuous

<sup>22</sup>Locally Lipschitz Continuous

<sup>23</sup>The upper right Dini derivative

<sup>24</sup>Feedback

صورت زیر توصیف کرد

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \end{cases} \quad (۲.۲)$$

برای دستگاه معادلات دیفرانسیل (۲.۲) فرض کنید

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}.$$

آن گاه آن را می توان به صورت زیر نمایش داد

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (۳.۲)$$

که در آن  $t$  متغیر زمان،  $x(t)$  بردار ستونی  $n$  بعدی موسوم به بردار حالت و  $u(t)$  بردار ستونی  $m$  بعدی موسوم به بردار ورودی یا متغیر کنترل می باشد. معادله دیفرانسیل فوق را معادله حالت سیستم می نامند.

**تعریف ۱۳.۳.۲** (بردار خروجی [۱۰]). فرض کنیم  $y(t)$  بردار  $r$  بعدی باشد که با زمان تغییر می کند و به صورت زیر به  $x(t)$  و  $u(t)$  وابسته است

$$\begin{cases} y_1(t) = g_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \\ \vdots \\ y_r(t) = g_r(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \end{cases} \quad (۴.۲)$$

یا

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_r(t) \end{bmatrix} = g(x(t), u(t), t),$$

در این حالت به  $y(t)$  بردار خروجی می گویند.

**تعریف ۱۴.۳.۲** (معادلات سیستم [۱۰]). معادلات سیستم دیفرانسیل را به صورت زیر نمایش می دهند

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t), \\ y(t) = g(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), u_1(t), \dots, u_m(t), t). \end{cases} \quad (۵.۲)$$

**تعریف ۱۵.۳.۲** (سیستم خطی زمانی گسسته [۱۰]). برای سیستم خطی گسسته، معادلات حالت و خروجی را به صورت زیر در نظر می گیرند

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (۶.۲)$$

$$y(k) = Cx(k). \quad (۷.۲)$$

تعریف ۱۶.۳.۲ (سیستم خطی زمانی پیوسته [۱۰]). برای سیستم خطی پیوسته، معادلات حالت و خروجی را به صورت زیر در نظر می‌گیرند

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (۸.۲)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (۹.۲)$$

## ۲.۳.۲ نامساوی ماتریسی خطی

تعریف ۱۷.۳.۲ ([۲]). نامساوی ماتریسی خطی به شکل زیر بیان می‌شود

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0,$$

که در آن  $F_i = F_i^T$ ,  $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$  و  $x \in \mathbb{R}^M$  در تعریف فوق  $F(x) = F^T(x)$  است.

لم ۱.۳.۲ (مکمل شور<sup>۲۵</sup> [۳]). نامساوی ماتریسی خطی زیر

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} > 0,$$

با عبارت زیر معادل است

$$S_{22} > 0, \quad S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^T > 0, \quad (۱۰.۲)$$

که

$$S_{11} = S_{11}^T,$$

$$S_{22} = S_{22}^T.$$

لم ۲.۳.۲ ([۳]). برای هر بردار  $a, b \in \mathbb{R}^n$  و ماتریس معین مثبت  $Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$  نامساوی زیر را داریم

$$2a^T b \leq a^T Y a + b^T Y^{-1} b. \quad (۱۱.۲)$$

لم ۳.۳.۲ (نابرابری هالانای<sup>۲۶</sup> [۳]). فرض کنید  $p > q > 0$  و  $y(t)$  یک تابع پیوسته نامنفی<sup>۲۷</sup> روی بازه  $[t_0 - \tau, t_0]$  و  $t \geq t_0$  باشد، در این صورت نامساوی زیر را داریم

$$D^+ y(t) \leq -p y(t) + q \bar{y}(t),$$

که  $\bar{y}(t) = \sup_{t-\tau \leq s \leq t} \{y(s)\}$  یک ثابت است و  $\tau \geq 0$ . بعلاوه برای  $t \geq t_0$  نامساوی زیر را داریم

$$y(t) \leq \bar{y}(t_0) e^{-\lambda(t-t_0)},$$

<sup>25</sup>Schur complement

<sup>26</sup>Halanay inequality

<sup>27</sup>Nonegative continuous function

که  $\lambda$  یک جواب منحصر به فرد مثبت برای معادله زیر است

$$\lambda = p - qe^{\lambda\tau}. \quad (۱۲.۲)$$

لم ۴.۳.۲ ([۱۱]). فرض کنید  $Q_1, Q_2$  و  $Q_3$  ماتریس‌های حقیقی با ابعاد مناسب هستند به طوری که  $Q_3 = Q_3^T > 0$  در این صورت نامساوی زیر را داریم

$$Q_1^T Q_2 + Q_2^T Q_1 \leq Q_1^T Q_3 Q_1 + Q_2^T Q_3^{-1} Q_2.$$

### ۳.۳.۲ سیستم‌های دینامیکی و پایداری

در این بخش سیستم‌های دینامیکی را معرفی نموده و تعاریف و مفاهیم مربوط به پایداری را ارائه می‌دهیم. قبل از شروع بحث باید به این نکته توجه کنیم که مواردی مانند شبکه‌های عصبی، آشوب<sup>۲۸</sup> و فراکتال‌ها<sup>۲۹</sup> همگی جزء مفاهیمی از سیستم‌های دینامیکی هستند. عنوان سیستم‌های دینامیکی با تغییرات در حالت‌های یک سیستم در گذر زمان سر و کار دارد، چه اینکه سیستم کاملاً روی نقطه تعادل<sup>۳۰</sup> خود استقرار پیدا کند یا اینکه به طور مداوم دور حلقه‌ای دور بزند یا پیچیده‌تر رفتار کند، این دینامیک‌ها هستند که ما برای تحلیل رفتار از آن‌ها استفاده می‌کنیم. با اینکه دینامیک‌ها امروزه به عنوان مبحث بین رشته‌ای شناخته می‌شوند، در اصل به عنوان شاخه‌ای از فیزیک شناخته می‌شدند [۲۰]. از نیوتون<sup>۳۱</sup> می‌توان به عنوان اولین کسی که در زمینه سیستم‌های دینامیکی فعالیت کرده نام برد. او با کشف قوانین جاذبه، حرکت، قوانین عمل و عکس العمل و معرفی معادلات دیفرانسیل و تلفیق آن‌ها توانست قوانین کپلر<sup>۳۲</sup> در مورد حرکت سیارات را تشریح کند. به خصوص نیوتون توانست مسأله دو جسم (حرکت ماه به دور زمین) را حل کند و نتیجه زیر را بدست آورد نیروی جاذبه گرانشی متناسب با عکس مجذور فاصله بین آن‌ها است.

نسل‌های متوالی از ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان سعی کرده‌اند روش تحلیلی نیوتون را برای مسأله سه جسم گسترش دهند (خورشید، زمین، ماه). حتی تلاش‌ها با تعیین پاداش هنگفت از طرف پادشاه سوئد به اوج خود رسید، اما مسأله خیلی مشکل‌تر از آن شده بود که قابل حل باشد. در نهایت آنان را به این نتیجه رساند که اساساً حل مسأله سه جسم در پیدا کردن جواب صریح و فرمول مشخص برای حرکت اجسام غیر ممکن است.

اما در سال ۱۸۰۰ هنری پوانکاره<sup>۳۳</sup> با دید جدیدی به مسئله نگاه کرد و نگاه کیفی را به جای نگاه کمیتی مورد بررسی قرار داد. برای مثال سوالاتی را مطرح کرد:

آیا سیستم خورشیدی برای همیشه پایدار خواهد بود؟ یا سیارات می‌توانند به سمت بی‌نهایت حرکت کنند؟ پوانکاره برای تحلیل چنین سوالاتی دیدگاه هندسی پرقدرتی را گسترش داد. همچنین او اولین کسی بود که امکان بروز آشوب را مطرح کرد. از جمله مسائلی که آشوب را مورد توجه قرار داد، نوسانگرهای غیرخطی بودند که کاربردهایی در علوم و مهندسی مانند لیزر، رادار، رادیو و... داشتند. با اختراع کامپیوترهای با سرعت بالا در دهه ۱۹۵۰ میلادی،

<sup>28</sup>Chaos

<sup>29</sup>Fractals

<sup>30</sup>Equilibrium Point

<sup>31</sup>Newton

<sup>32</sup>Kepler

<sup>33</sup>H. Poincaré

دانشمندان توانستند معادلاتی را حل کنند که قبل از آن ممکن نبود. این چنین گام مهمی در زمینه درک و آگاهی نسبت به سیستم‌های غیر خطی برداشته شد. به عنوان نمونه ادوارد لورنتز<sup>۳۴</sup> در سال ۱۹۶۳ میلادی با معرفی حرکت آشوبناک در جذب کننده‌های عجیب، این علم را وارد مرحله جدیدی کرد. در دهه ۱۹۷۰ دو شاخه دیگر در دینامیک پا به عرصه این علم گذاشتند. یکی از آن‌ها فراکتال‌ها بودند که توسط مندل بروت<sup>۳۵</sup> ارائه شد. آن‌ها شکل‌های گرافیکی زیبایی را شامل می‌شدند که توسط کامپیوتر به دست می‌آمد. دیگری در حوزه بیولوژی-ریاضی کاربرد داشت. دانشمندان نوسانگرهای غیرخطی را در بیولوژی به کار بردند. فیزیک، نجوم، ریاضیات، بیولوژی، شیمی، اقتصاد، علوم کامپیوتر، هواشناسی و علوم پزشکی از جمله علومی هستند که امروزه مطالعه سیستم‌های دینامیکی غیرخطی را سرلوحه کار خویش قرار دادند.

## ۴.۳.۲ تعاریف

**تعریف ۱۸.۳.۲** ([۹]). فرض کنید  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر باشد.  $V(x)$  به طور شعاعی بی کران گفته می‌شود اگر

$$\|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty.$$

**تعریف ۱۹.۳.۲** ([۹]). دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل به شکل زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t), \quad (۱۳.۲)$$

که در آن  $x(t) = [x_i(t)]^T$ ،  $t \geq 0$  بردار وضعیت، حالت<sup>۳۶</sup> یا حرکت<sup>۳۷</sup> نامیده می‌شود. چنین دستگاهی یک دستگاه وابسته به زمان یا غیرخودگردان<sup>۳۸</sup> است. به این معنی که متغیر  $t$  به طور آشکار در ضابطه‌ی  $f$  ظاهر می‌شود. اگر  $f_i$  به طور صریح به  $t$  وابسته نباشد به عبارتی

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t)), \quad (۱۴.۲)$$

در این صورت سیستم را خودگردان<sup>۳۹</sup> یا مستقل از زمان می‌نامند.

به چنین دستگاه معادله‌ی دیفرانسیلی که بردار وضعیت آن با تغییر زمان تغییر می‌کند، یک سیستم دینامیکی گفته می‌شود. در ادامه از نماد  $\dot{x}(t)$  برای نمایش مشتق  $x$  نسبت به زمان استفاده می‌کنیم.

**تعریف ۲۰.۳.۲** (نقطه تعادل و نقطه تعادل تنها<sup>۴۰</sup> [۹]). سیستم دینامیکی زیر را در نظر بگیرید

$$\dot{x} = f(x(t)), \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad (۱۵.۲)$$

که در آن  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  می‌باشد.  $x^*$  یک نقطه تعادل (۱۵.۲) نامیده می‌شود اگر  $f(x^*) = 0$ . همچنین اگر همسایگی  $\Omega^* \subseteq \mathbb{R}^n$  از  $x^*$  وجود داشته باشد که  $f(x^*) = 0$  و  $f(x) \neq 0$ ،  $\forall x \in \Omega^* \setminus \{x^*\}$ ، آن گاه  $x^*$  یک نقطه تعادل تنها نامیده می‌شود.

<sup>۳۴</sup>E.Norton Lorenz

<sup>۳۵</sup>Mandelbrot

<sup>۳۶</sup>State Vector

<sup>۳۷</sup>Motion

<sup>۳۸</sup>Nonautonomous

<sup>۳۹</sup>Autonomous

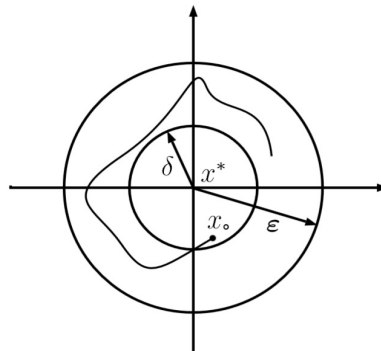
<sup>۴۰</sup>Isolated Equilibrium Point



**تعریف ۲۱.۳.۲** (پایداری به مفهوم لیپانوف<sup>۴۱</sup> [۹]). فرض کنید  $x(t)$  یک جواب (۱۵.۲) باشد، نقطه تعادل تنها  $x^*$ ، پایدار به مفهوم لیپانوف است اگر برای هر  $x_0 = x(t_0)$  و هر  $\varepsilon > 0$ ، یک  $\delta > 0$  وجود داشته باشد به طوری که اگر  $\|x(t_0) - x^*\| < \delta$  آن گاه

$$\|x(t) - x^*\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

شکل (۱.۲) پایداری لیپانوف را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۲: پایداری لیپانوف.

**تعریف ۲۲.۳.۲** (همگرایی سراسری [۹]). سیستم دینامیکی (۱۵.۲) همگرایی سراسری به مجموعه جواب‌های (۱۵.۲) که با  $\Omega^*$  نمایش داده می‌شود، گفته می‌شود اگر برای هر نقطه آغازین دلخواه، مسیر  $x(t)$  در رابطه زیر صدق کند

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(x(t), \Omega^*) = 0,$$

که در آن

$$\text{dist}(x, \Omega^*) = \inf_{y \in \Omega^*} \|x - y\|,$$

و  $\|\cdot\|$  نرم  $l_2$  را نشان می‌دهد.

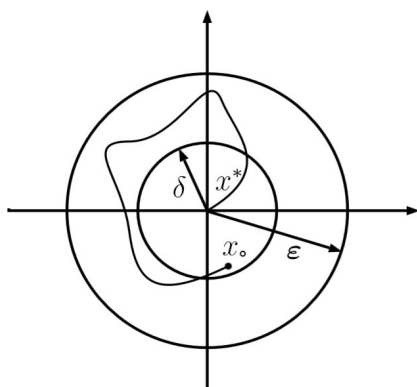
**تعریف ۲۳.۳.۲** (پایدار مجانبی سراسری<sup>۴۲</sup> [۹]). سیستم دینامیکی (۱۵.۲) در نقطه تعادل یکتای  $x^*$ ، پایدار مجانبی سراسری نامیده می‌شود اگر  $x^*$  به مفهوم لیپانوف پایدار باشد و در شرط زیر صدق کند

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*.$$

شکل (۲.۲) پایداری مجانبی را نشان می‌دهد.

<sup>۴۱</sup>Stability in the Sense of Lyapunov

<sup>۴۲</sup>Globally Asymptotically Stable



شکل ۲.۲: پایداری مجانبی.

**تعریف ۲۴.۳.۲** (پایدار نمایی سراسری [۴۳] ۹). سیستم دینامیکی (۱۵.۲) در نقطه  $x^*$  پایداری نمایی سراسری با نرخ  $\beta$  نامیده می‌شود اگر برای هر نقطه آغازین دلخواه، مسیر  $x(t)$  در رابطه زیر صدق کند

$$\|x(t) - x^*\| \leq \alpha \|x(t_0) - x^*\| e^{-\beta(t-t_0)}, \quad \forall t \geq t_0,$$

که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  ثابت‌های مثبت و مستقل از نقاط آغازین هستند. واضح است که پایداری نمایی سراسری پایداری مجانبی سراسری را نتیجه می‌دهد.

## ۴.۲ قضایای مرتبط با پایداری

**قضیه ۱.۴.۲** (قضیه پایداری لیپانوف [۲۵] ۹). فرض کنید که  $x = 0$  یک نقطه تعادل سیستم (۱۵.۲) باشد و  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع به‌طور پیوسته مشتق پذیر باشد به‌طوری‌که

$$V(0) = 0 \quad \text{الف)}$$

$$V(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{ب) به ازای هر}$$

$$\dot{V}(x) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{ج) به ازای هر}$$

آن‌گاه  $x = 0$  نقطه پایداری سیستم خواهد بود.

**قضیه ۲.۴.۲** (قضیه پایداری مجانبی [۲۵] ۹). تحت شرایط قضیه ۱.۴.۲ اگر  $V(\cdot)$  در شرایط زیر صدق کند

$$V(0) = 0 \quad \text{الف)}$$

$$V(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{ب) به ازای هر}$$

$$\dot{V}(x) < 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \text{ج) به ازای هر}$$

آن گاه  $x = 0$  پایدار مجانبی خواهد بود.

**قضیه ۳.۴.۲** (قضیه پایداری مجانبی سراسری [۲۵]). تحت شرایط قضیه ۱.۴.۲ اگر  $V(\cdot)$  به طور شعاعی بی کران باشد آن گاه نقطه  $x = 0$  پایدار مجانبی سراسری است.

## ۱.۴.۲ سیستم‌های دینامیکی تأخیری

در نمایش پدیده‌های اجتماعی و طبیعی نه تنها از معادلات دیفرانسیل معمولی که مستقل از حالت‌های گذشته و فقط قابل تعیین با حالت‌های کنونی هستند استفاده می‌شود، بلکه از معادلات دیفرانسیل تأخیری [۱] که با حالت‌های قبلی ارتباط دارند استفاده می‌شود. تأخیرات زمانی اغلب در سیستم‌های مکانیکی، فیزیکی، زیست شناسی، اقتصادی، الکترونیکی و شیمیایی رخ می‌دهد. این معادلات که دسته‌ای مهم و وسیع از سیستم‌های دینامیکی هستند، کاربرد وسیعی در سیستم‌های کنترل دارند. در این سیستم‌ها یک کنترل کننده بر موقعیت و شرایط سیستم نظارت می‌کند و تنظیماتی در سیستم انجام می‌دهد. چون این تنظیمات هیچ‌گاه فوری انجام نمی‌شوند، تأخیری میان مشاهده و عمل کنترل به وجود می‌آید.

معادلات دیفرانسیل تأخیری به دو دسته‌ی عمده تقسیم می‌شوند:

**دسته‌ی اول:** معادلات دیفرانسیل تأخیری پیشینی<sup>۴۴</sup> هستند که به اختصار با RDDE نمایش داده می‌شوند. این معادلات به صورت زیر هستند

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), x(t - \tau_2), \dots, x(t - \tau_k)),$$

که در آن  $\tau_j$ ها به ازای  $j = 1, 2, \dots, k$  نشان دهنده‌ی توابع تأخیر هستند که به سه صورت ثابت، وابسته به زمان و وابسته به زمان و حالت ظاهر می‌شوند.

**دسته دوم:** معادلات دیفرانسیل تأخیری خنثی<sup>۴۵</sup> که آن‌ها را به اختصار با NDDE نمایش می‌دهند و صورت کلی زیر را دارند

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau_1), \dot{x}(t - \tau_2)),$$

که در آن  $\tau_1$  و  $\tau_2$  نشان دهنده‌ی توابع تأخیر هستند و می‌توانند ثابت، وابسته به زمان و وابسته به زمان و حالت باشند.

سیستم‌های دینامیکی که با معادله دیفرانسیل تأخیری توصیف می‌شوند را می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$\dot{x}(t) = -Ax(t) + W_0g(x(t)) + W_1g(x(t - \tau)) + I,$$

که در آن  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  بردار حالت سیستم دینامیکی است، ماتریس‌های  $A = [a_{ij}]_{n \times n}$  و  $W_0 = [w_{ij}^0]_{n \times n}$  ماتریس‌های ارتباط هستند و ماتریس  $W_1 = [w_{ij}^1]_{n \times n}$  ماتریس تأثیر تأخیرات است.

تابع  $g(x(t)) = [g_1(x(t)), g_2(x(t)), \dots, g_n(x(t))]^T$  تابع فعالیت سیستم دینامیکی است و

$I = [I_1, I_2, \dots, I_n]$  بردار ثابت و  $\tau$  تابع تأخیر سیستم است [۲۳].

<sup>۴۴</sup>Retarded Delay Differential Equations

<sup>۴۵</sup>Neutral Delay Differential Equations



## فصل ۳

# تحلیل پایداری و بررسی یکتایی نقطه تعادل شبکه‌های عصبی سلولی تاخیری

### ۱.۳ مقدمات و مفروضات مسئله

در این فصل ابتدا به معرفی مسأله و سپس به بررسی یکتایی نقطه تعادل می‌پردازیم و در ادامه به تحلیل پایداری مجانبی شبکه‌های عصبی سلولی تاخیری می‌پردازیم. مطالب به کار رفته در این فصل از مقاله [۱۱] است. رفتار دینامیکی شبکه‌های عصبی سلولی تاخیری را می‌توان با معادلات حالت زیر توصیف کرد

$$\dot{x}(t) = -x(t) + Ay(x(t)) + A^\tau y(x(t - \tau)) + u, \quad (۱.۳)$$

که در آن  $x(t)$  یک بردار حالت به صورت زیر است

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)]^T \in \mathbb{R},$$

و  $y(x(t))$  یک بردار خروجی به صورت زیر است

$$y(x(t)) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)]^T \in \mathbb{R},$$

$A = [a_{ij}]_{n \times n}$  ماتریس بازخورد حالت است که  $A^\tau = [a_{ij}^\tau]_{n \times n}$  یک ماتریس بازخورد حالت تاخیری و  $\tau$  یک تاخیر زمانی است ( $\tau > 0$ ).

$u$  یک بردار ثابت ورودی به صورت زیر است

$$u = [u_1, u_2, \dots, u_n] \in \mathbb{R}^n,$$

و  $y_i(x_i(t))$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$y_i(x_i(t)) = 0.5(|x_i(t) + 1| - |x_i(t) - 1|) \in [-1, 1], \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

برای راحتی نمایش هر نقطه تعادل  $x^*$  از سیستم (۱.۳) را به مبداء انتقال می‌دهیم. اگر تغییرات زیر را انجام دهیم

$$z(t) = x(t) - x^*, \quad z(t - \tau) = x(t - \tau) - x^*,$$

آنگاه سیستم (۱.۳) به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\dot{z}(t) = -z(t) + A\phi(z(t)) + A^T\phi(z(t - \tau)), \quad (2.3)$$

که به حسب مؤلفه‌ها به صورت زیر بیان می‌شود

$$\dot{z}_i(t) = -z_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij}\phi_j(z_j(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij}^T\phi_j(z_j(t - \tau)), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

در اینجا  $z(t)$  یک بردار حالت جدید به صورت زیر است

$$z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n,$$

و داریم

$$\begin{aligned} \phi(z(t)) &= [\phi(z_1(t)), \dots, \phi(z_n(t))]^T \in \mathbb{R}^n, \\ \phi_j(z_j(t)) &= y_j(z_j(t) + x_j^*) - y_j(z_j(t)), \quad \phi(0) = 0, \\ \phi(z_j(t)) &< z_j(t), \\ \phi_j^2(z_j(t)) &\leq z_j(t)\phi(z_j(t)), \quad j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.3)$$

## ۲.۳ اثبات یکتایی نقطه تعادل شبکه‌های عصبی سلولی تاخیری

قضیه ۱.۲.۳. اگر ماتریس معین مثبت  $P$  و  $\alpha > 0$  وجود داشته باشند به طوری که

$$\Omega \equiv A^T P A + \alpha(A + A^T) + \alpha P^{-1} + (\alpha + 1)(A^T)^T P A^T < 0, \quad (4.3)$$

آنگاه مبداء به عنوان نقطه تعادل سیستم (۲.۳) یکتا است.

اثبات. فرض کنیم نقطه تعادل یکتا نباشد،

می‌دانیم سرعت در نقطه تعادل صفر است یعنی

$$\dot{x}(t) = 0,$$

با جایگذاری  $x^*(t)$  و  $x^{**}(t)$  در (۱.۳) داریم

$$0 = -x^*(t) + Ay(x^*(t)) + A^T y(x^*(t - \tau)) + u,$$

$$0 = -x^{**}(t) + Ay(x^{**}(t)) + A^T y(x^{**}(t - \tau)) + u,$$

با تفریق این دو عبارت از یکدیگر داریم

$$0 = -x^*(t) + Ay(x^*(t)) + A^T y(x^*(t - \tau)) + u + x^{**}(t) - Ay(x^{**}(t)) - A^T y(x^{**}(t - \tau)) - u,$$

با دسته بندی و فاکتور گیری داریم

$$x^{**} - x^* + A^T [y(x^*(t - \tau)) - y(x^{**}(t - \tau))] + A[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))] = 0,$$

$$x^* - x^{**} = +A^T [y(x^*(t - \tau)) - y(x^{**}(t - \tau))] + A[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))],$$

می‌دانیم که وقتی  $t \rightarrow \infty$  آنگاه  $t - \tau \rightarrow \infty$  بنابراین داریم

$$x^* - x^{**} = +A^T [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))] + A[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))],$$

با فاکتورگیری داریم

$$x^* - x^{**} = (A + A^T)[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))], \quad (۵.۳)$$

دو طرف عبارت (۵.۳) را در  $2[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]$  ضرب می‌کنیم

$$2(x^* - x^{**})[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))] = 2(A + A^T)[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))][y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))], \quad (۶.۳)$$

عبارت (۶.۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$(۷.۳)$$

$$2(x^* - x^{**})^T [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))] = 2(A + A^T)[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))],$$

با جایگذاری (۵.۳) در طرف اول عبارت (۷.۳) داریم

$$2(A + A^T)^T [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))], \quad (۸.۳)$$

با ساده کردن عبارت (۸.۳) داریم

$$\underbrace{(A + A^T)^T [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]}_{\text{از این عبارت ترانواده می‌گیریم}} \quad (۹.۳)$$

$$+ (A + A^T)^T [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))],$$

حاصل عبارتی که از آن ترانواده گرفته‌ایم یک عدد می‌شود و ترانواده هر عدد با خودش برابر است.

$$\underbrace{(A + A^T)[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))][y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T}_{\text{این عبارت را ضرب می‌کنیم}} \quad (۱۰.۳)$$

$$+ (A + A^T)^T [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))],$$

با ساده کردن (۱۰.۳) داریم

$$\begin{aligned} & A[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))][y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T \\ & + A^T[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))][y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T \\ & + \underbrace{(A^T + (A^T)^T)[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]}_{\text{این عبارت را ضرب می‌کنیم}}, \end{aligned} \quad (۱۱.۳)$$

با ساده کردن (۱۱.۳) داریم

$$\begin{aligned} & A[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))][y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T \\ & + A^T[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))][y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T \\ & + A^T[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))] \\ & + (A^T)^T[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]. \end{aligned} \quad (۱۲.۳)$$

با توجه به لم (۴.۳.۲)  $Q_1$ ،  $Q_2$  و  $Q_3$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{aligned} Q_1 &= A^T[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))], \\ Q_2 &= [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))], \\ Q_3 &= P, \end{aligned} \quad (۱۳.۳)$$

که در آن  $P$  یک ماتریس معین مثبت و متقارن است.

عبارت (۱۲.۳) را با استفاده از (۱۳.۳) به صورت زیر می‌نویسیم

$$\begin{aligned} & (A + A^T)[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))][y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T \\ & + \underbrace{A^T[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]}_{Q_1} \underbrace{[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T}_{Q_2^T} \\ & + \underbrace{(A^T)^T[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T}_{Q_1^T} \underbrace{[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]}_{Q_2} \\ & \leq (A + A^T)[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))][y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T \\ & + \underbrace{[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T}_{Q_1^T} \underbrace{(A^T)^T}_{Q_3} \underbrace{[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]}_{Q_1} A^T \\ & + \underbrace{[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T}_{Q_2^T} \underbrace{P^{-1}}_{Q_3^{-1}} \underbrace{[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]}_{Q_2} \end{aligned} \quad (۱۴.۳)$$



با فاکتور گیری از طرف دوم (۱۴.۳) داریم

$$\begin{aligned}
 & (A + A^T)[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))][y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T \\
 & + \underbrace{A^T[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]}_{Q_1} \underbrace{[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T}_{Q_2^T} \\
 & + \underbrace{(A^T)^T[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]^T}_{Q_1^T} \underbrace{[y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))]}_{Q_2} \\
 & \leq [y(x^*) - y(x^{**})]^T [(A + A^T) + (A^T)^T P A^T + P^{-1}] [y(x^*) - y(x^{**})].
 \end{aligned} \tag{۱۵.۳}$$

حال با توجه به (۱۵.۳) و (۶.۳) داریم

$$\begin{aligned}
 & 2(x^* - x^{**})^T [y(x^*(t)) - y(x^{**}(t))] \\
 & \leq [y(x^*) - y(x^{**})]^T [(A + A^T) + (A^T)^T P A^T + P^{-1}] [y(x^*) - y(x^{**})],
 \end{aligned} \tag{۱۶.۳}$$

با ضرب دو طرف (۱۶.۳) در  $\alpha > 0$  داریم

$$\begin{aligned}
 & 2\alpha(x^* - x^{**})[y(x^*) - y(x^{**})] \\
 & \leq [y(x^*) - y(x^{**})]^T [\alpha(A + A^T) + \alpha(A^T)^T P A^T + \alpha P^{-1}] [y(x^*) - y(x^{**})].
 \end{aligned} \tag{۱۷.۳}$$

از آنجایی که  $P$  یک ماتریس معین مثبت است طبق تجزیه چولسکی (۷.۳.۲) ماتریس پایین مثلثی  $Q$  وجود دارد به طوری که

$$P = Q^T Q,$$

حال داریم

$$\begin{aligned}
 & [y(x^*) - y(x^{**})]^T A^T P A [y(x^*) - y(x^{**})] \\
 & = [Q A [y(x^*) - y(x^{**})]]^T [Q A [y(x^*) - y(x^{**})]] \geq 0,
 \end{aligned} \tag{۱۸.۳}$$

به طور مشابه داریم

$$\begin{aligned}
 & [y(x^*) - y(x^{**})]^T (A^T)^T P A^T [y(x^*) - y(x^{**})] \\
 & = [Q A^T [y(x^*) - y(x^{**})]]^T [Q A^T [y(x^*) - y(x^{**})]] \geq 0,
 \end{aligned} \tag{۱۹.۳}$$

حال با اضافه کردن (۱۸.۳) و (۱۹.۳) به (۱۷.۳) و با استفاده از (۳.۳) داریم

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{2\alpha[y(x^*) - y(x^{**})]^T [y(x^*) - y(x^{**})]}_{\text{این عبارت همراه نامنفی است چون نرم می‌شود}} \leq \underbrace{2\alpha(x^* - x^{**})^T [y(x^*) - y(x^{**})]}_{\text{طبق (۳.۳)}} \\
 & \leq \underbrace{[y(x^*) - y(x^{**})]^T [\alpha(A + A^T) + \alpha(A^T)^T P A^T + \alpha P^{-1}] [y(x^*) - y(x^{**})]}_{\text{طبق (۱۷.۳)}} \\
 & \quad + \underbrace{[y(x^*) - y(x^{**})]^T A^T P A [y(x^*) - y(x^{**})]}_{\text{(۱۸.۳)}} + \underbrace{[y(x^*) - y(x^{**})]^T (A^T)^T P A^T [y(x^*) - y(x^{**})]}_{\text{(۱۹.۳)}} \\
 & = [y(x^*) - y(x^{**})]^T [A^T P A + \alpha(A + A^T) + \alpha P^{-1} + (\alpha + 1)(A^T)^T P A^T] [y(x^*) - y(x^{**})].
 \end{aligned} \tag{۲۰.۳}$$

با انتخاب

$$\Omega = [A^T P A + \alpha(A + A^T) + \alpha p^{-1} + (\alpha + 1)(A^\tau)^T P A^\tau], \quad (21.3)$$

داریم

$$[y(x^*) - y(x^{**})]^T \Omega [y(x^*) - y(x^{**})] \geq 0, \quad (22.3)$$

از طرفی طبق (24.3)،  $\Omega < 0$  است  $\Omega$  معین منفی است) و همچنین طبق قضیه چولسکی (7.3.2) ماتریس پایین مثلثی  $R$  وجود دارد به طوری که  $\Omega = -R^T R$ . بنابراین  $-\Omega = R^T R$ . لذا باتوجه به (22.3) داریم

$$[R[y(x^*) - y(x^{**})]]^T [R[y(x^*) - y(x^{**})]] \leq 0. \quad (23.3)$$

بنابراین

$$||R[y(x^*) - y(x^{**})]|| = 0.$$

در نتیجه

$$y(x^*) = y(x^{**}),$$

و

$$x^* = x^{**}.$$

□

بنابراین نقطه تعادل یکتا است.

### ۳.۳ اثبات پایداری مجانبی سراسری شبکه‌های عصبی سلولی تأخیری

قضیه ۱.۳.۳. اگر ماتریس معین مثبت  $P$  و  $\alpha > 0$  وجود داشته باشد به طوری که

$$\Omega \equiv A^T P A + \alpha(A + A^T) + \alpha P^{-1} + (\alpha + 1)(A^\tau)^T P A^\tau < 0, \quad (24.3)$$

آنگاه سیستم (2.3) پایدار مجانبی سراسری است.

اثبات. یک تابع لیاپانوف-کراسوفسکی معرفی می‌کنیم به طوری که  $V(z(t)) > 0$  و  $\frac{dV(z(t))}{dt} < 0$  باشد.

تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$(25.3)$$

$$V(z(t)) = z^T(t) P z(t) + 2\alpha \int_0^{z_i(t)} \phi(s) ds + (\alpha + 1) \int_{t-\tau}^t \phi^T(z(s)) (A^\tau)^T P A^\tau \phi(z(s)) ds,$$

به طوری که  $P^T = P > 0$  و  $\alpha > 0$ . با گرفتن مشتق از (25.3) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) = & \dot{z}^T(t) P z(t) + z^T(t) P \dot{z}(t) + \alpha \phi^T(z(t)) \dot{z}(t) + \alpha \dot{z}^T(t) \phi(z(t)) \\ & + (\alpha + 1) \phi^T(z(t)) (A^\tau)^T P A^\tau \phi(z(t)) - (\alpha + 1) \phi^T(z(t - \tau)) (A^\tau)^T P A^\tau \phi(z(t - \tau)), \end{aligned} \quad (26.3)$$

حال با جایگذاری (۲.۳) در (۲۶.۳) داریم

$$\begin{aligned}\dot{V}(z(t)) = & \underbrace{[-z(t) + A\phi(z(t)) + A^\tau \phi(z(t-\tau))]^T}_{\text{ترانهاده را در داخل کروشه تاثیر می‌دهیم}} Pz(t) \\ & + z^T(t)P[-z(t) + A\phi(z(t)) + A^\tau \phi(z(t-\tau))] \\ & + \alpha \phi^T(z(t))[-z(t) + A\phi(z(t)) + A^\tau \phi(z(t-\tau))] \\ & + \alpha[-z(t) + A\phi(z(t)) + A^\tau \phi(z(t-\tau))]^T \phi(z(t)) \\ & + (\alpha + 1)\phi^T(z(t))(A^\tau)^T P A^\tau \phi(z(t)) - (\alpha + 1)\phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T P A^\tau \phi(z(t-\tau)),\end{aligned}\quad (۲۷.۳)$$

بنابراین

$$\begin{aligned}\dot{V}(z(t)) = & [-z^T(t) + A^T \phi^T(z(t)) + (A^\tau)^T \phi^T(z(t-\tau))]Pz(t) \\ & + z^T(t)P[-z(t) + A\phi(z(t)) + A^\tau \phi(z(t-\tau))] \\ & + \alpha \phi^T(z(t))[-z(t) + A\phi(z(t)) + A^\tau \phi(z(t-\tau))] \\ & + \alpha[-z^T(t) + A^T \phi^T(z(t)) + (A^\tau)^T \phi^T(z(t-\tau))] \phi(z(t)) \\ & + (\alpha + 1)\phi^T(z(t))(A^\tau)^T P A^\tau \phi(z(t)) - (\alpha + 1)\phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T P A^\tau \phi(z(t-\tau)),\end{aligned}\quad (۲۸.۳)$$

با ساده کردن (۲۸.۳) داریم

$$\begin{aligned}\dot{V}(z(t)) = & -z^T(t)Pz(t) + A^T \phi^T(z(t))Pz(t) + (A^\tau)^T \phi^T(z(t-\tau))Pz(t) \\ & - z^T(t)Pz(t) + z^T(t)PA\phi(z(t)) + z^T(t)PA^\tau \phi(z(t-\tau)) \\ & - \alpha \phi^T(z(t))z(t) + \alpha \phi^T(z(t))A\phi(z(t)) + \alpha \phi^T(z(t))A^\tau \phi(z(t-\tau))] \\ & - \alpha z^T(t)\phi(z(t)) + \alpha A^T \phi^T(z(t))\phi(z(t)) + \alpha (A^\tau)^T \phi^T(z(t-\tau))\phi(z(t)) \\ & + \alpha \phi^T(z(t))(A^\tau)^T P A^\tau \phi(z(t)) + \phi^T(z(t))(A^\tau)^T P A^\tau \phi(z(t)) \\ & - \alpha \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T P A^\tau \phi(z(t-\tau)) - \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T P A^\tau \phi(z(t-\tau)),\end{aligned}\quad (۲۹.۳)$$

با استفاده از لم (۴.۳.۲) داریم

$$\begin{aligned}& \underbrace{\phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T}_{Q_1^T} \underbrace{Pz(t)}_{Q_2} + \underbrace{z^T(t)P}_{Q_2^T} \underbrace{\phi(z(t-\tau))A^\tau}_{Q_1} \\ & \leq \underbrace{\phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T}_{Q_1^T} \underbrace{P}_{Q_3} \underbrace{\phi(z(t-\tau))A^\tau}_{Q_1} + \underbrace{z^T(t)P^T}_{Q_2^T} \underbrace{P^{-1}}_{Q_3} \underbrace{Pz(t)}_{Q_2},\end{aligned}\quad (۳۰.۳)$$

$$\begin{aligned} & \underbrace{\phi^T(z(t))A^T}_{Q_1^T} \underbrace{Pz(t)}_{Q_2} + \underbrace{z^T(t)P}_{Q_2^T} \underbrace{\phi(z(t))A}_{Q_1} \\ & \leq \underbrace{\phi^T(z(t))A^T}_{Q_1^T} \underbrace{P}_{Q_3} \underbrace{\phi(z(t))A}_{Q_1} + \underbrace{z^T(t)P^T}_{Q_2^T} \underbrace{P^{-1}}_{Q_3} \underbrace{Pz(t)}_{Q_2}, \end{aligned} \quad (31.3)$$

9

$$\begin{aligned} & \underbrace{\phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T}_{Q_1^T} \underbrace{\phi(z(t))}_{Q_2} + \underbrace{\phi^T(z(t))}_{Q_2^T} \underbrace{\phi(z(t-\tau))A^\tau}_{Q_1} \\ & \leq \underbrace{\phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T}_{Q_1^T} \underbrace{P}_{Q_3} \underbrace{\phi(z(t-\tau))A^\tau}_{Q_1} + \underbrace{\phi^T(z(t))}_{Q_2^T} \underbrace{P^{-1}}_{Q_3} \underbrace{\phi(z(t))}_{Q_2}. \end{aligned} \quad (32.3)$$

با جمع کردن طرفین (30.3)، (31.3) و (32.3) داریم

$$\begin{aligned} & \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T Pz(t) + z^T(t)P\phi(z(t-\tau))A^\tau \\ & + \phi^T(z(t))A^T Pz(t) + z^T(t)P\phi(z(t))A \\ & + \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T \phi(z(t)) + \phi^T(z(t))\phi(z(t-\tau))A^\tau \\ & \leq \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T P\phi(z(t-\tau))A^\tau + z^T(t)Pz(t) \\ & + \phi^T(z(t))A^T P\phi(z(t))A + z^T(t)Pz(t) \\ & + \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T P\phi(z(t-\tau))A^\tau + \phi^T(z(t))P^{-1}\phi(z(t)), \end{aligned} \quad (33.3)$$

حال با جایگذاری (33.3) در (29.3) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(z(t)) & = -z^T(t)Pz(t) + A^T \phi^T(z(t))Pz(t) + (A^\tau)^T \phi^T(z(t-\tau))Pz(t) \\ & - z^T(t)Pz(t) + z^T(t)PA\phi(z(t)) + z^T(t)PA^\tau \phi(z(t-\tau)) \\ & - \alpha \phi^T(z(t))z(t) + \alpha \phi^T(z(t))A\phi(z(t)) + \alpha \phi^T(z(t))A^\tau \phi(z(t-\tau))] \\ & - \alpha z^T(t)\phi(z(t)) + \alpha A^T \phi^T(z(t))\phi(z(t)) + \alpha (A^\tau)^T \phi^T(z(t-\tau))\phi(z(t)) \\ & + \alpha \phi^T(z(t))(A^\tau)^T PA^\tau \phi(z(t)) + \phi^T(z(t))(A^\tau)^T PA^\tau \phi(z(t)) \\ & - \alpha \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T PA^\tau \phi(z(t-\tau)) - \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T PA^\tau \phi(z(t-\tau)) \\ & \leq \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T P\phi(z(t-\tau))A^\tau + z^T(t)Pz(t) \\ & + \phi^T(z(t))A^T P\phi(z(t))A + z^T(t)Pz(t) \\ & + \alpha \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T P\phi(z(t-\tau))A^\tau + \alpha \phi^T(z(t))P^{-1}\phi(z(t)) + \\ & - 2z^T(t)Pz(t) - \alpha \phi^T(z(t))z(t) + \alpha \phi^T(z(t))A\phi(z(t)) - \alpha z^T(t)\phi(z(t)) + \alpha \phi^T(z(t))A^T \phi(z(t)) \\ & + \alpha \phi^T(z(t))(A^\tau)^T PA^\tau \phi(z(t)) + \phi^T(z(t))(A^\tau)^T PA^\tau \phi(z(t)) \\ & - \alpha \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T PA^\tau \phi(z(t-\tau)) - \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^T PA^\tau \phi(z(t-\tau)), \end{aligned} \quad (34.3)$$

با ساده سازی طرف دوم (۳۴.۳) داریم

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(z(t)) = & -z^T(t)Pz(t) + A^T\phi^T(z(t))Pz(t) + (A^\tau)^T\phi^T(z(t-\tau))Pz(t) \\
 & -z^T(t)Pz(t) + z^T(t)PA\phi(z(t)) + z^T(t)PA^\tau\phi(z(t-\tau)) \\
 & -\alpha\phi^T(z(t))z(t) + \alpha\phi^T(z(t))A\phi(z(t)) + \alpha\phi^T(z(t))A^\tau\phi(z(t-\tau))] \\
 & -\alpha z^T(t)\phi(z(t)) + \alpha A^T\phi^T(z(t))\phi(z(t)) + \alpha(A^\tau)^T\phi^T(z(t-\tau))\phi(z(t)) \\
 & + \alpha\phi^T(z(t))(A^\tau)^TPA^\tau\phi(z(t)) + \phi^T(z(t))(A^\tau)^TPA^\tau\phi(z(t)) \\
 & -\alpha\phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^TPA^\tau\phi(z(t-\tau)) - \phi^T(z(t-\tau))(A^\tau)^TPA^\tau\phi(z(t-\tau)) \\
 \leq & \phi^T(z(t))A^TP\phi(z(t))A + \alpha\phi^T(z(t))P^{-1}\phi(z(t)) \\
 & -\alpha\phi^T(z(t))z(t) + \alpha\phi^T(z(t))A\phi(z(t)) - \alpha z^T(t)\phi(z(t)) + \alpha\phi^T(z(t))A^T\phi(z(t)) \\
 & + \alpha\phi^T(z(t))(A^\tau)^TPA^\tau\phi(z(t)) + \phi^T(z(t))(A^\tau)^TPA^\tau\phi(z(t)),
 \end{aligned}
 \tag{۳۵.۳}$$

که با فاکتورگیری از طرف دوم (۳۵.۳) داریم

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(z(t)) \leq & \phi^T(z(t)) \underbrace{[A^TPA + \alpha P^{-1} + \alpha(A + A^T) + (\alpha + 1)(A^\tau)^TPA^\tau]}_{\Omega} \phi(z(t)) \\
 & -\alpha\phi^T(z(t))z(t) - \alpha\phi(z(t))z^T(t),
 \end{aligned}
 \tag{۳۶.۳}$$

عبارت (۳۶.۳) را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم

$$\dot{V}(z(t)) \leq \phi^T(z(t))\Omega\phi(z(t)) - 2\alpha\phi^T(z(t))z(t),$$

با استفاده از (۳.۳) داریم

$$\dot{V}(z(t)) \leq \phi^T(z(t))\Omega\phi(z(t)) - 2\alpha\phi^T(z(t))z(t) \leq \phi^T(z(t))\Omega\phi(z(t)) - 2\alpha\phi^2(z(t)),$$

حال با استفاده از (۴.۳) داریم

$$\dot{V}(z(t)) \leq \phi^T(z(t))\Omega\phi(z(t)) - 2\alpha\phi^2(z(t)) \leq \phi^T(z(t))\Omega\phi(z(t)) < 0, \tag{۳۷.۳}$$

□

لذا سیستم (۲.۳) پایدار مجانبی سراسری است.

**نتیجه ۱.۳.۳.** اگر عدد  $r > 0$  و ماتریس معین مثبت  $P = P^T > 0$  وجود داشته باشد به طوری که شرایط زیر را داشته باشد

الف)  $-(A + A^T + rI)$  معین مثبت باشد.

ب)  $\lambda_{\max}((A^\tau)^TPA^\tau) \leq 2 + a + r - \lambda_{\max}(P^{-1})$

که  $a = \lambda_{\min}[-(A + A^T + rI)] > 0$  است، آنگاه سیستم (۲.۳) در مبدأ پایدار مجانبی است.

اثبات. در (۳۷.۳) برای هر ماتریس  $A$  و  $A^T$  داریم

$$\begin{aligned}\phi^T(z(t))A^T P A \phi(z(t)) &\leq \lambda_{\max}(A^T P A) \|\phi(z(t))\|_2^2, \\ \phi^T(z(t))(A^T)^T P A^T \phi(z(t)) &\leq \lambda_{\max}((A^T)^T P A^T) \|\phi(z(t))\|_2^2,\end{aligned}\quad (38.3)$$

که  $\lambda_{\max}$  بیشترین مقدار ویژه ماتریس مربوطه است.  
به طور مشابه داریم

$$\begin{aligned}-\phi^T(z(t))(A + A^T)\phi(z(t)) &= -\phi^T(z(t))(A + A^T + rI)\phi(z(t)) + r\phi^T(z(t))\phi(z(t)) \\ &\geq \lambda_{\min}(-A - A^T - rI) \|\phi(z(t))\|_2^2 + r \|\phi(z(t))\|_2^2 \\ &= (a + r) \|\phi(z(t))\|_2^2.\end{aligned}\quad (39.3)$$

با استفاده از (۳۷.۳) داریم

$$\begin{aligned}\dot{V}(z(t)) &\leq [\lambda_{\max}(A^T P A) + \lambda_{\max}((A^T)^T P A^T)] \|\phi(z(t))\|_2^2 \\ &\quad - \alpha [2 + a + r - \lambda_{\max}(P^{-1}) - \lambda_{\max}((A^T)^T P A^T)] \|\phi(z(t))\|_2^2.\end{aligned}\quad (40.3)$$

با توجه به اینکه  $\lambda_{\max}((A^T)^T P A^T) \leq 2 + a + r - \lambda_{\max}(P^{-1})$  است،  $\alpha$  به صورت زیر انتخاب می‌شود

$$\alpha > \frac{\lambda_{\max}(A^T P A) + \lambda_{\max}((A^T)^T P A^T)}{2 + a + r - \lambda_{\max}(P^{-1}) - \lambda_{\max}((A^T)^T P A^T)}, \quad (41.3)$$

□

بنابراین اگر  $\|\phi(z(t))\| \neq 0$  آنگاه  $\dot{V}(z(t)) < 0$  است.

اگر در نتیجه (۱.۳.۳)، قرار دهیم  $P = I$  آنگاه نتیجه زیر را داریم.

**نتیجه ۲.۳.۳.** اگر عدد  $r > 0$  وجود داشته باشد به طوری که شرایط زیر برقرار باشد

الف)  $-(A + A^T + rI)$  معین مثبت باشد.

ب)  $\|A^T\|_2 \leq \sqrt{1 + a + r}$

که  $\|A^T\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}((A^T)^T A^T)}$  و  $a = \lambda_{\min}[-(A + A^T + rI)] > 0$  است، آنگاه سیستم (۲.۳) در مبداء پایدار مجانبی است.

## ۴.۳ مثال‌های عددی

**مثال ۱.۴.۳.** سیستم (۲.۳) مفروض است. ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad (42.3)$$

با گرفتن  $r = 3$  داریم

$$-(A + A^T + rI) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

و  $\|A^T\| = \sqrt{6}$  اگر

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix},$$

آنگاه

$$\lambda_{\max}((A^T)^T P A^T) = 3 \leq 2 + 1 + 3 - 2 = 4.$$

بنابراین شرایط نتیجه (۱.۳.۳) برقرار است، لذا سیستم (۲.۳) پایدار مجانبی است.

**مثال ۲.۴.۳.** سیستم (۲.۳) مفروض است. ماتریس‌های زیر را در نظر بگیرید

$$A = \begin{pmatrix} -0.1 & -1 \\ 1 & -0.9 \end{pmatrix}, \quad A^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad (۴۳.۳)$$

با گرفتن  $r = 0.5$  داریم

$$-(A + A^T + rI) = \begin{pmatrix} 1.7 & 0 \\ 0 & 1.3 \end{pmatrix},$$

آنگاه  $a = 1.3$  و  $\|A^T\| = \sqrt{3}$  اگر

$$P = \begin{pmatrix} 0/5 & 0 \\ 0 & 0/5 \end{pmatrix},$$

آنگاه

$$\lambda_{\max}((A^T)^T P A^T) = 1.5 \leq 2 + 1.3 + 0.5 - 2 = 1.8.$$

بنابراین شرایط نتیجه (۱.۳.۳) برقرار است، لذا سیستم (۲.۳) پایدار مجانبی است.





## فصل ۴

# پایداری مجانبی و نمایی شبکه‌های عصبی کوهن-گراسبرگ

### ۱.۴ مقدمه و معرفی مسئله

مدل شبکه عصبی کوهن-گراسبرگ<sup>۱</sup> توسط کوهن و گراسبرگ در سال ۱۹۸۳ معرفی شد [۴] که آن را می‌توان با معادلات دیفرانسیل معمولی به شکل زیر بیان کرد

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -a_i(u_i(t)) \left[ b_i(u_i(t)) - \sum_{j=1}^n a_{ij}g_j(u_j(t)) + I_i \right], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

در این فصل شبکه‌های عصبی کوهن-گراسبرگ تأخیری را با استفاده از معادلات دیفرانسیل زیر در نظر می‌گیریم (مطالب ذکر شده در این فصل از مقاله [۳] است)

$$\frac{du_i(t)}{dt} = -a_i(u_i(t)) \left[ b_i(u_i(t)) - \sum_{j=1}^n a_{ij}g_j(u_j(t)) - \sum_{j=1}^n b_{ij}g_j(x_j(t - \tau_j)) + I_i \right], \quad (۱.۴)$$

که در آن  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  ماتریس اتصال وزن<sup>۲</sup>،  $B = (b_{ij})_{n \times n}$  ماتریس اتصال تأخیری وزن<sup>۳</sup> و  $a_j(u_j(t))$

<sup>۱</sup>Cohen–Grossberg

<sup>۲</sup>Connection weight matrix

<sup>۳</sup>Delayed connection weight matrix

توابع تقویت<sup>۴</sup>،  $b_i(u_i(t))$  توابع رفتاری<sup>۵</sup> و  $g_i(u_i(t))$  توابع فعال‌ساز هستند.

#### ۱.۱.۴ شرایط اولیه سیستم

شرایط اولیه سیستم (۱.۴) به صورت زیر است

$$u_i(s) = \phi_i(s) \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}), \quad s \in [- \tau, 0], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

که در آن

$$\tau = \max(\tau_j, 1 \leq j \leq n).$$

#### ۲.۱.۴ مفروضات مسئله

$a_i$  کراندار، مثبت و پیوسته است، همچنین

$$0 < \underline{\alpha}_i \leq a_i(u) \leq \bar{\alpha}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (۲.۴)$$

$b_i(u_i)$  پیوسته است و

$$b'_i \geq \gamma_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

تابع فعال‌ساز  $g_i(u_i)$  کراندار است و ثابت  $G_i > 0$  وجود دارد به طوری که

$$|g_i(v_1) - g_i(v_2)| \leq G_i |v_1 - v_2|, \quad \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}. \quad (۳.۴)$$

اگر  $u^* = (u_1^*, \dots, u_n^*)$  را به عنوان نقطه تعادل سیستم (۱.۴) در نظر بگیریم با انتقال این نقطه به

$x(t) = u(t) - u^*$  می‌توانیم سیستم (۱.۴) را به صورت زیر باز نویسی کنیم

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = -\alpha_i(x_i(t)) \left[ \beta_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j(x_j(t)) - \sum_{j=1}^n b_{ij} \phi_j(x_j(t - \tau_j)) \right], \quad (۴.۴)$$

که  $\alpha_i(x_i(t))$ ،  $\beta_i(x_i(t))$  و  $\phi_j(x_j(t))$  به صورت زیر هستند

$$\alpha_i(x_i(t)) = a_i(x_i(t) + u_i^*), \quad (۵.۴)$$

$$\beta_i(x_i(t)) = b_i(x_i(t) + u_i^*) - b_i(u_i^*), \quad (۶.۴)$$

$$\phi_j(x_j(t)) = g_j(x_j(t) + u_j^*) - g_j(u_j^*), \quad (۷.۴)$$

همچنین روابط زیر را در نظر می‌گیریم

$$x_i(t) \beta_i(x_i(t)) \geq \gamma_i x_i^2(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (۸.۴)$$

$$\phi_i^2(t) \leq G_i^2 x_i^2(t), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (۹.۴)$$

<sup>۴</sup>Amplification functions

<sup>۵</sup>behaved functions

## ۲.۴ اثبات پایداری مجانبی سراسری

قضیه ۱.۲.۴. سیستم (۱.۴) پایدار مجانبی سراسری است اگر ماتریس‌های قطری مثبت مانند  $P = (P_1, \dots, P_n)$  و  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$  وجود داشته باشند به طوری که

$$\begin{pmatrix} 2P\Gamma - PAQA^T P - GQG - GQ^{-1}G & -PB \\ -B^T P & Q \end{pmatrix} > 0, \quad (۱۰.۴)$$

یا

$$2P\Gamma - PAQA^T P - GQG - GQ^{-1}G - PBQ^{-1}B^T P > 0,$$

که در آن  $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  و  $G = (G_1, \dots, G_n)$  ماتریس‌هایی قطری هستند و  $B = B^T$ .

اثبات. تابع لیاپانوف زیر را در نظر بگیرید

$$V(x(t)) = 2 \sum_{i=1}^n P_i \int_0^{x_i(t)} \frac{s}{\alpha_i(s)} ds + \sum_{i=1}^n Q_i \int_{t-\tau_i}^t \phi_i^2(x_i(s)) ds. \quad (۱۱.۴)$$

با گرفتن مشتق از (۱۱.۴) داریم

$$\dot{V}(x(t)) = 2 \sum_{i=1}^n P_i \left[ \frac{x_i(t)}{\alpha_i(x_i(t))} \left( \frac{dx_i(t)}{dt} \right) \right] + \sum_{i=1}^n Q_i \left[ \phi_i^2(x_i(t)) - \phi_i^2(x_i(t - \tau_i)) \right], \quad (۱۲.۴)$$

با جایگذاری (۴.۴) در (۱۲.۴) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & 2 \sum_{i=1}^n P_i \left[ \frac{x_i(t)}{\alpha_i(x_i(t))} \left( -\alpha_i(x_i(t)) \left( \beta_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j(x_j(t)) - \sum_{j=1}^n b_{ij} \phi_j(x_j(t - \tau_j)) \right) \right) \right] \\ & + \sum_{i=1}^n Q_i \left[ \phi_i^2(x_i(t)) - \phi_i^2(x_i(t - \tau_i)) \right], \end{aligned} \quad (۱۳.۴)$$

با ساده‌سازی (۱۳.۴) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & -2 \sum_{i=1}^n P_i x_i(t) \left[ \beta_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j(x_j(t)) - \sum_{j=1}^n b_{ij} \phi_j(x_j(t - \tau_j)) \right] \\ & + \sum_{i=1}^n Q_i \phi_i^2(x_i(t)) - \sum_{i=1}^n Q_i \phi_i^2(x_i(t - \tau_i)). \end{aligned} \quad (۱۴.۴)$$

(۱۴.۴) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) = & -2 \sum_{i=1}^n P_i x_i(t) \beta_i(x_i(t)) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i x_i(t) a_{ij} \phi_j(x_j(t)) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i x_i(t) b_{ij} \phi_j(x_j(t - \tau_j)) \\ & + \sum_{i=1}^n Q_i \phi_i^2(x_i(t)) - \sum_{i=1}^n Q_i \phi_i^2(x_i(t - \tau_i)). \end{aligned} \quad (۱۵.۴)$$

با استفاده از (۸.۴) داریم

$$-2 \sum_{i=1}^n P_i x_i(t) \beta_i(x_i(t)) \leq -2 \sum_{i=1}^n P_i \gamma_i x_i^2(t) = -2x^T(t) \Gamma P x(t). \quad (۱۶.۴)$$

همچنین

$$2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i x_i(t) a_{ij} \phi_j(x_j(t)) = 2Px^T(t) A \phi(x(t)), \quad (۱۷.۴)$$

$$2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i x_i(t) b_{ij} \phi_j(x_j(t - \tau_j)) = 2x^T(t) P B \phi(x(t - \tau)), \quad (۱۸.۴)$$

$$\sum_{i=1}^n Q_i \phi_i^2(x_i(t)) = \phi^T(x(t)) Q \phi(x(t)), \quad (۱۹.۴)$$

$$\sum_{i=1}^n Q_i \phi_i^2(x_i(t - \tau_i)) = \phi^T(x(t - \tau)) Q \phi(x(t - \tau)), \quad (۲۰.۴)$$

که  $G = (G_1, \dots, G_n)$  و  $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ،  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ ،  $P = (P_1, \dots, P_n)$  ماتریس‌های قطری می‌باشند و  $\phi(x(t))$  و  $\phi(x(t - \tau))$  به شکل زیر هستند

$$\phi(x(t)) = (\phi_1(x_1(t)), \dots, \phi_n(x_n(t)))^T, \quad (۲۱.۴)$$

$$\phi(x(t - \tau)) = (\phi_1(x_1(t - \tau_1)), \dots, \phi_n(x_n(t - \tau_n)))^T. \quad (۲۲.۴)$$

حال با جایگذاری (۱۶.۴)، (۱۷.۴)، (۱۸.۴)، (۱۹.۴) و (۲۰.۴) در (۱۵.۴) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq -2x^T(t) \Gamma P x(t) + 2Px^T(t) A \phi(x(t)) + 2x^T(t) P B \phi(x(t - \tau)) \\ &\quad - \phi^T(x(t)) Q \phi(x(t)) - \phi^T(x(t - \tau)) Q \phi(x(t - \tau)). \end{aligned} \quad (۲۳.۴)$$

از طرفی طبق لم (۲.۳.۲) داریم

$$2x^T(t) P A \phi(x(t)) \leq x^T(t) P A Q A^T P x(t) + \phi^T(x(t)) Q^{-1} \phi(x(t)). \quad (۲۴.۴)$$

با جایگذاری (۲۴.۴) در (۲۳.۴) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq -2x^T(t) \Gamma P x(t) + x^T(t) P A Q A^T P x(t) + \phi^T(x(t)) Q^{-1} \phi(x(t)) + 2x^T(t) P B \phi(x(t - \tau)) \\ &\quad - \phi^T(x(t)) Q \phi(x(t)) - \phi^T(x(t - \tau)) Q \phi(x(t - \tau)). \end{aligned} \quad (۲۵.۴)$$

از طرفی طبق (۹.۴) داریم

$$\phi^T(x(t)) Q^{-1} \phi(x(t)) \leq G x^T(t) Q^{-1} x(t) G, \quad (۲۶.۴)$$

$$\phi^T(x(t)) Q \phi(x(t)) \leq G x^T(t) Q x(t) G, \quad (۲۷.۴)$$

حال با جایگذاری (۲۶.۴) و (۲۷.۴) در (۲۵.۴) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & -2x^T(t)\Gamma Px(t) + x^T(t)PAQA^TPx(t) + Gx^T(t)Q^{-1}x(t)G + 2x^T(t)PB\phi(x(t-\tau)) \\ & Gx^T(t)Qx(t)G - \phi^T(x(t-\tau))Q\phi(x(t-\tau)). \end{aligned} \quad (28.4)$$

با ساده‌سازی (۲۸.۴) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & x^T(t)(-2\Gamma P + PAQA^TP + GQ^{-1}G + GQG)x(t) + 2x^T(t)PB\phi(x(t-\tau)) \\ & - \phi^T(x(t-\tau))Q\phi(x(t-\tau)). \end{aligned} \quad (29.4)$$

عبارت (۲۹.۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$\dot{V}(x(t)) \leq - \begin{pmatrix} x^T(t) & \phi^T(x(t-\tau)) \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} x(t) \\ \phi(x(t-\tau)) \end{pmatrix}, \quad (30.4)$$

که در آن  $\Omega$  به شکل زیر است

$$\Omega = \begin{pmatrix} 2P\Gamma - PAQA^TP - GQG - GQ^{-1}G & -PB \\ -B^TP & Q \end{pmatrix} > 0,$$

چون طبق (۱۰.۴)،  $\Omega > 0$  می‌باشد لذا  $\dot{V}(x(t)) < 0$  است. لذا سیستم (۱.۴) پایدار مجانبی سراسری است.  $\square$

### ۳.۴ اثبات پایداری نمایی

**قضیه ۱.۳.۴.** سیستم (۱.۴) پایدار نمایی سراسری است، اگر شرایط اولیه و مفروضات گفته شده برقرار باشد،  $\alpha > \beta > 0$ ، ماتریس قطری مثبت  $P = (P_1, \dots, P_n)$  وجود داشته باشد و همچنین ماتریس قطری معین مثبت  $Q$  وجود داشته باشد به طوری که

$$2P\Gamma - PAQA^TP - PBQB^TP - GQ^{-1}G - \frac{\alpha}{\alpha}P > 0, \quad (31.4)$$

و

$$-GQ^{-1}G + \frac{\beta}{\alpha}P > 0, \quad (32.4)$$

که  $\alpha = \min_{1 \leq i \leq n}(\alpha)$ ،  $\bar{\alpha} = \max_{1 \leq i \leq n}(\bar{\alpha})$ ،  $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  و  $G = (G_1, \dots, G_n)$  ماتریس‌های قطری هستند.

**اثبات.** تابع لیپانوف زیر را در نظر می‌گیریم

$$V(x(t)) = 2 \sum_{i=1}^n P_i \int_0^{x_i(t)} \frac{s}{\alpha_i(s)} ds. \quad (33.4)$$

با محاسبه انتگرال در (۳۳.۴) داریم

$$V(x(t)) = \sum_{i=1}^n P_i \frac{x_i^2(t)}{\alpha_i(x_i(t))}, \quad (34.4)$$

از طرفی

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n P_i x_i^2(t) \leq V(x(t)) \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n P_i x_i^2(t), \quad (35.4)$$

یا

$$\frac{1}{\alpha} x^T(t) P x(t) \leq V(x(t)) \leq \frac{1}{\alpha} x^T(t) P x(t). \quad (36.4)$$

با محاسبه مشتق در (۳۳.۴) داریم

$$\dot{V}(x(t)) = 2 \sum_{i=1}^n P_i \left[ \frac{x_i(t)}{\alpha_i(x_i(t))} \left( \frac{dx_i(t)}{dt} \right) \right], \quad (37.4)$$

باجایگذاری (۴.۴) در (۳۷.۴) داریم

$$\dot{V}(x(t)) = 2 \sum_{i=1}^n P_i \left[ \frac{x_i(t)}{\alpha_i(x_i(t))} \left( -\alpha_i(x_i(t)) \left( \beta_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j(x_j(t)) - \sum_{j=1}^n b_{ij} \phi_j(x_j(t - \tau_j)) \right) \right) \right], \quad (38.4)$$

از طرفی

$$\dot{V}(x(t)) = -2 \sum_{i=1}^n P_i x_i(t) \left[ \beta_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^n a_{ij} \phi_j(x_j(t)) - \sum_{j=1}^n b_{ij} \phi_j(x_j(t - \tau_j)) \right], \quad (39.4)$$

در نتیجه

$$\dot{V}(x(t)) = -2 \sum_{i=1}^n P_i x_i(t) \beta_i(x_i(t)) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i x_i(t) a_{ij} \phi_j(x_j(t)) + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i x_i(t) b_{ij} \phi_j(x_j(t - \tau_j)), \quad (40.4)$$

با استفاده از (۸.۴) داریم

$$-2 \sum_{i=1}^n P_i x_i(t) \beta_i(x_i(t)) \leq -2 \sum_{i=1}^n P_i \gamma_i x_i^2(t) = -2x^T(t) \Gamma P x(t), \quad (41.4)$$

همچنین

$$2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i x_i(t) a_{ij} \phi_j(x_j(t)) = 2x^T(t) A \phi(x(t)), \quad (42.4)$$

$$2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_i x_i(t) b_{ij} \phi_j(x_j(t - \tau_j)) = 2x^T(t) P B \phi(x(t - \tau)), \quad (43.4)$$

حال با جایگذاری (۴۱.۴)، (۴۲.۴) و (۴۳.۴) در (۴۰.۴) داریم

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2x^T(t)\Gamma Px(t) + 2x^T(t)PA\phi(x(t)) + 2x^T(t)PB\phi(x(t-\tau)), \quad (۴۴.۴)$$

از طرفی طبق لم (۲.۳.۲) داریم

$$2x^T(t)PA\phi(x(t)) \leq x^T(t)PAQA^TPx(t) + \phi^T(x(t))Q^{-1}\phi(x(t)), \quad (۴۵.۴)$$

$$2x^T(t)PB\phi(x(t-\tau)) \leq x^T(t)PBQB^TPx(t) + \phi^T(x(t-\tau))Q^{-1}\phi(x(t-\tau)), \quad (۴۶.۴)$$

با جایگذاری (۴۵.۴) و (۴۶.۴) در (۴۴.۴) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & -2x^T(t)\Gamma Px(t) + x^T(t)PAQA^TPx(t) + \phi^T(x(t))Q^{-1}\phi(x(t)) + \\ & x^T(t)PBQB^TPx(t) + \phi^T(x(t-\tau))Q^{-1}\phi(x(t-\tau)), \end{aligned} \quad (۴۷.۴)$$

از طرفی طبق (۹.۴) داریم

$$\phi^T(x(t))Q^{-1}\phi(x(t)) \leq Gx^T(t)Q^{-1}x(t)G, \quad (۴۸.۴)$$

$$\phi^T(x(t-\tau))Q^{-1}\phi(x(t-\tau)) \leq Gx^T(t-\tau)Q^{-1}x(t-\tau)G. \quad (۴۹.۴)$$

حال با جایگذاری (۴۸.۴) و (۴۹.۴) در (۴۷.۴) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & -2x^T(t)\Gamma Px(t) + x^T(t)PAQA^TPx(t) + Gx^T(t)Q^{-1}x(t)G + \\ & x^T(t)PBQB^TPx(t) + Gx^T(t-\tau)Q^{-1}x(t-\tau)G, \end{aligned} \quad (۵۰.۴)$$

حال با اضافه و کم کردن  $\frac{\alpha}{\alpha}x^T(t)Px(t)$  و  $\frac{\beta}{\alpha}x^T(t-\tau)Px(t-\tau)$  به طرف دوم (۵۰.۴) و فاکتورگیری داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & x^T(t) \left( -2\Gamma P + PAQA^TP + GQ^{-1}G + PBQB^TP + \frac{\alpha}{\alpha}P \right) x(t) \\ & + x^T(t-\tau) \left( GQ^{-1}G - \frac{\beta}{\alpha}P \right) x(t-\tau) - \frac{\alpha}{\alpha}x^T(t)Px(t) + \frac{\beta}{\alpha}x^T(t-\tau)Px(t-\tau). \end{aligned} \quad (۵۱.۴)$$

با جایگذاری (۳۶.۴) در (۵۱.۴) داریم

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) \leq & x^T(t) \left( -2\Gamma P + PAQA^TP + GQ^{-1}G + PBQB^TP + \frac{\alpha}{\alpha}P \right) x(t) \\ & + x^T(t-\tau) \left( GQ^{-1}G - \frac{\beta}{\alpha}P \right) x(t-\tau) - \alpha V(x(t)) + \beta V(x(t-\tau)). \end{aligned} \quad (۵۲.۴)$$

با توجه به (۳۱.۴) و (۳۲.۴) داریم

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\alpha V(x(t)) + \beta \bar{V}(x(t)). \quad (۵۳.۴)$$

حال با استفاده از لم (۳.۳.۲) داریم

$$V(x(t)) \leq \bar{V}(x(t_0))e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

از طرفی با استفاده از (۳.۵.۴) داریم

$$\frac{1}{\alpha} \min(P_i) \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \leq V(x(t)) \leq \bar{V}(x(t_0))e^{-\lambda(t-t_0)} \leq \frac{1}{\alpha} \max(P_i) \sup_{t-\tau \leq s \leq t_0} \left[ \sum_{i=1}^n x_i^2(s) \right] e^{-\lambda(t-t_0)},$$

که این معادل است با

$$\sum_{i=1}^n (u_i(t) - u_i^*)^2 \leq \frac{\bar{\alpha} \max(p_i)}{\alpha \min(p_i)} \sup_{t-\tau \leq s \leq t_0} \left[ \sum_{i=1}^n (u_i(s) - u_i^*)^2 \right] e^{-\lambda(t-t_0)},$$

لذا سیستم (۱.۴) پایدار سراسری نمایی نیز است.

□

در قضیه (۱.۲.۴) و (۱.۳.۴) قرار دهید،  $P = Q = E$  به طوری که  $E$  یک ماتریس همانی باشد، آنگاه نتایج زیر را داریم.

**نتیجه ۱.۳.۴.** سیستم (۱.۴) پایدار مجانبی سراسری است اگر ماتریس‌های قطری مثبت مانند  $P = (P_1, \dots, P_n)$  و  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$  وجود داشته باشند به طوری که

$$\begin{pmatrix} 2\Gamma - AA^T - 2G^2 & -B \\ -B^T & E \end{pmatrix} > 0, \quad (۵۴.۴)$$

یا

$$2\Gamma - AA^T - 2G^2 - BB^T > 0,$$

که  $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  و  $G = (G_1, \dots, G_n)$  ماتریس‌های قطری هستند.

**نتیجه ۲.۳.۴.** سیستم (۱.۴) پایدار نمایی سراسری است اگر شرایط اولیه و مفروضات گفته برقرار باشد،  $\alpha > \beta > 0$ ، ماتریس‌های قطری مثبت  $P = (P_1, \dots, P_n)$  و  $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$  وجود داشته باشند به طوری که

$$2\Gamma - AA^T - BB^T - G^2 - \frac{\alpha}{\alpha} E > 0, \quad (۵۵.۴)$$

و

$$-G^2 + \frac{\beta}{\alpha} E > 0, \quad (۵۶.۴)$$

که  $\alpha = \min_{1 \leq i \leq n}(\alpha)$ ،  $\bar{\alpha} = \max_{1 \leq i \leq n}(\bar{\alpha})$ ،  $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  و  $G = (G_1, \dots, G_n)$  ماتریس‌های قطری هستند.



## ۴.۴ مثال‌های عددی

مثال ۱.۴.۴. شبکه عصبی تأخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{du_i(t)}{dt} = - \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tanh(2u_1(t)) \\ \tanh(u_2(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tanh(2u_1(t - \tau_1)) \\ \tanh(u_2(t - \tau_2)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}. \quad (57.4)$$

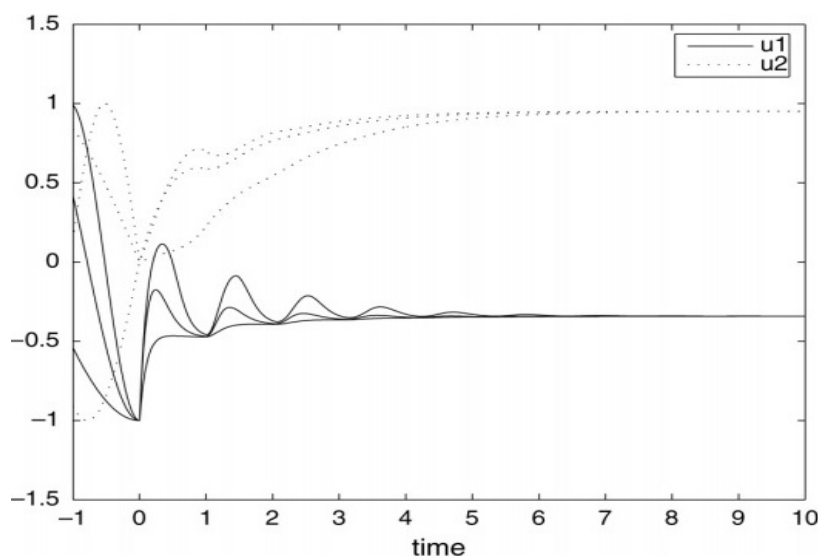
که در آن

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

داریم

$$2\Gamma - AA^T - 2G^2 - BB^T = \begin{pmatrix} 0.75 & -0.05 \\ -0.05 & 0.9 \end{pmatrix}$$

و  $\tau_1 = \tau_2 = 1$ . به وضوح  $2\Gamma - AA^T - 2G^2 - BB^T$  معین مثبت است، بنابراین با توجه (۱.۳.۴) سیستم (۵۷.۴) پایدار مجانبی سراسری است. رفتار سیستم (۵۷.۴) در شکل (۱.۴) نمایش داده شده است.



شکل ۱.۴: مسیر متغیرهای حالت  $u_1(t)$  و  $u_2(t)$  در مثال (۵۷.۴).

مثال ۲.۴.۴. شبکه عصبی تأخیری زیر را در نظر بگیرید

$$\frac{du_i(t)}{dt} = - \begin{pmatrix} 2 + f(u_1(t)) & 0 \\ 0 & 2 + f(u_2(t)) \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(u_1(t)) \\ f(u_2(t)) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(2u_1(t - \tau_1)) \\ f(u_2(t - \tau_2)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right], \quad (58.4)$$

که در آن

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

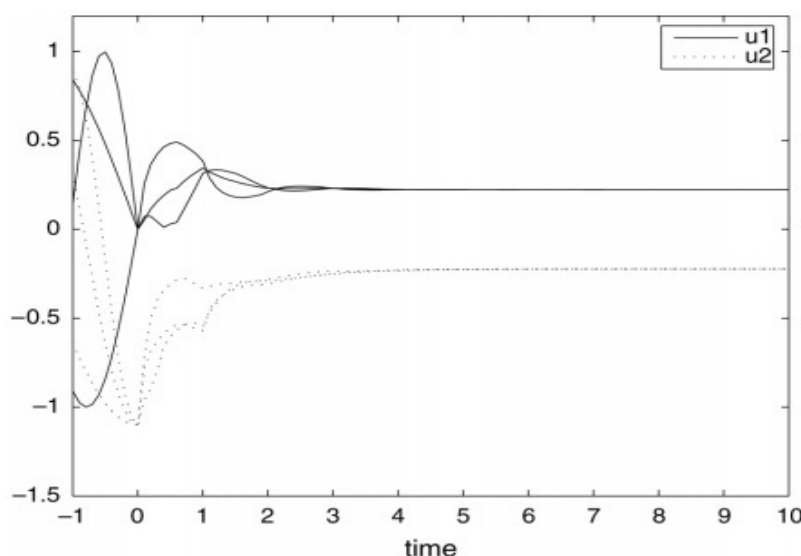
داریم

$$2\Gamma - AA^T - BB^T - G^2 - \frac{\alpha}{\alpha} E = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0,$$

و

$$-G^2 + \frac{\beta}{\alpha} E = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} > 0,$$

فرض کنید  $f(x) = 0.5(|x+1| - |x-1|)$ ،  $\bar{\alpha} = 3$ ،  $\underline{\alpha} = 1$  و  $\tau_1 = \tau_2 = 1$ . با توجه به (۲.۳.۴) سیستم (۵۸.۴) پایدار نمایی سراسری است. رفتار سیستم (۵۸.۴) در شکل (۲.۴) نمایش داده شده است.



شکل ۲.۴: مسیر متغیرهای حالت  $u_1(t)$  و  $u_2(t)$  در مثال (۵۸.۴).

## ۵.۴ نتایج و پیشنهادات

در این پایان‌نامه ابتدا به ارائه مقدماتی از شبکه‌های عصبی، سیستم‌های دینامیکی، پایداری و نامساوی ماتریسی خطی پرداختیم. سپس بررسی پایداری مجانبی شبکه‌های عصبی سلولی تاخیری صورت گرفت. شرایط پایداری به‌دست آمده با استفاده از تابع لیاپانوف کراسوفسکی و رویکرد نامساوی ماتریسی خطی مورد بررسی قرار گرفت. همچنین در انتهای این فصل دو مثال برای نشان دادن اعتبار و عملکرد روش‌های معرفی شده ارائه گردید. در انتها پایداری مجانبی سراسری برای رده‌ای از شبکه‌های عصبی سلولی تاخیری کوهن-گراسبرگ با استفاده از رویکرد نامساوی ماتریسی خطی و لم نابرابری هالانای ارائه گردید.

## مراجع

- [1] Adivar, M. and Raffoul, Y. N. Stability and periodicity in dynamic delay equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 58(2):264–272, 2009.
- [2] Boyd, S., El G., Laurent, Feron, E., and Balakrishnan, V. *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. Siam, 1994.
- [3] Cao, J. and Li, X. Stability in delayed cohen–grossberg neural networks: Lmi optimization approach. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 212(1-2):54–65, 2005.
- [4] Cohen, M. A and Grossberg, S. Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, (5):815–826, 1983.
- [5] Hebb, D. O. *The organization of behavior: a neuropsychological theory*. J. Wiley; Chapman & Hall, 1949.
- [6] Higham, N. J. *Analysis of the Cholesky decomposition of a semi-definite matrix*. Oxford University Press, 1990.
- [7] Hopfield, J.J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities. *Proceedings of the national academy of sciences*, 79(8):2554–2558, 1982.
- [8] Hopfield, J.J and Tank, D. W. “neural” computation of decisions in optimization problems. *Biological cybernetics*, 52(3):141–152, 1985.
- [9] Khalil, Hassan K and Grizzle, Jessy W. *Nonlinear systems*, volume 3. Prentice hall Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [10] Kirk, D. E. *Optimal control theory: an introduction*. Courier Corporation, 2004.
- [11] Liao, X., Wong, K.W, and Yang, S. Stability analysis for delayed cellular neural networks based on linear matrix inequality approach. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 14(09):3377–3384, 2004.

- [12] Lyapunov, A. M. The general problem of the stability of motion. *International journal of control*, 55(3):531–534, 1992.
- [13] Minsky, M. and P., Seymour A. *Perceptrons: An introduction to computational geometry*. MIT press, 2017.
- [14] Moghaddas, M and Effati, S. A novel recurrent neural network based on ncp function for solving convex nonlinear optimization problems. 2013.
- [15] Rosenblatt, F. Principles of neurodynamics. perceptrons and the theory of brain mechanisms. Technical report, Cornell Aeronautical Lab Inc Buffalo NY, 1961.
- [16] Rumelhart, D .E., H., Geoffrey, E., and W., Ronald J. Learning representations by back-propagating errors. *nature*, 323(6088):533–536, 1986.
- [17] Werbos, P. Beyond regression:” new tools for prediction and analysis in the behavioral sciences. *Ph. D. dissertation, Harvard University*, 1974.
- [18] Widrow, B. Generalization and information storage in networks of adaline neurons. self organizing systems. *Yovitz, MC, Jacobi, GT, and Goldstein, GD editors*, pages 435–461, 1962.
- [۱۹] بابانژاد، ع. تجزیه چولسکی وار برای ماتریس های پادمتقارن. کارشناسی ارشد، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری - دانشگاه مازندران - دانشکده علوم پایه، ۱۳۸۳.
- [۲۰] ذاکری، ح. بررسی بعضی رفتار دینامیکی سرتاسری و موضعی نوع خاصی از شبکه های عصبی. کارشناسی ارشد، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری - دانشگاه مازندران - دانشکده علوم ریاضی، ۱۳۹۴.
- [۲۱] روان بخش، ف. تحلیل پایداری شبکه های عصبی هاپفیلد تأخیری. کارشناسی ارشد، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری - دانشگاه بجنورد - دانشکده علوم ریاضی، ۱۳۹۵.
- [۲۲] سیفی، م. شبکه های عصبی مصنوعی و کاربردهای آن. کارشناسی ارشد، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری - دانشگاه آموزش عالی غیاث الدین جمشید کاشانی - دانشکده علوم ریاضی، ۱۳۹۵.
- [۲۳] شهبازی، ز. پایداری مجانبی شبکه های عصبی هاپفیلد. کارشناسی ارشد، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری - دانشگاه زنجان - دانشکده علوم ریاضی، ۱۳۹۱.
- [۲۴] ضمیری، آ. شبکه های عصبی مصنوعی و بهینه سازی. کارشناسی ارشد، دانشگاه فردوسی مشهد - دانشکده علوم ریاضی، ۱۳۸۷.
- [۲۵] مقدس، م. حل رده ای از مسائل بهینه سازی غیرخطی با استفاده از شبکه های عصبی. کارشناسی ارشد، وزارت علوم، تحقیقات و فناوری - دانشگاه فردوسی مشهد - دانشکده علوم ریاضی، ۱۳۹۲.

## **Aabstract**

In this thesis in the first in chapter , biological and artificial neural networks are explained. Then in the second chapter, stability of neural networks are given. By considering the delayed cell neral network in chapter 3, we show that the equilibrium point is unique. Then by presenting a suitable Lyapunov–Krasovskii function and using the linear matrix inequality we prove that the system is asymptotically stable. In chapter 4, by considering a delayed daynamic system of the Cohen–Grossberg delay network and presenting a suitable Lyapunov–Krasovskii function, and using the linear matrix inequality, as well as the Halanay inequality technique, we prove that the system is asymptotically stable and exponentially stable.

**keywords:** linear matrix inequality, Lyapunov–Krasovskii, asymptotic stability, delay Cellular neural networks.



**Shahrood University of Technology**

**Faculty Of Mathematical Sciences**

**MSc Thesis in: Optimization**

**STABILITY ANALYSIS FOR DELAYED  
CELLULAR NEURAL NETWORKS BASED  
ON LINEAR MATRIX INEQUALITY  
APPROACH**

**By: mohsen jamei**

**Supervisor**

**Alireza Nazemi**

**June 2020**