

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش آنالیز عددی

پایان نامه کارشناسی ارشد

روش هم‌مکانی موجک برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از ماتریس‌ها

نگارنده: فاطمه طالبیان

استادان راهنما

دکتر مهدی قوتمند
دکتر حجت احسنی طهرانی

استاد مشاور

دکتر سمیه مغاری

تیر ۱۳۹۹

تقدیم به مقدسترین واژه در لغت نامه‌ی
دلم، مادر مهربانم که زندگیم را مدیون
مهر و عطوفت آن می‌دانم، که در سختی‌ها
و دشواری‌های زندگی همواره یآوری دلسوز
و فداکار و پشتیبانی محکم و مطمئن برایم
بوده است.

اکنون که با یاری پروردگار و یاری و راهنمایی اساتید بزرگ موفق به پایان این رساله شده‌ام وظیفه خود دانسته که نهایت سپاسگذاری را از تمامی عزیزانی که در این راه به من کمک کرده‌اند را به عمل آورم:

در آغاز از اساتید بزرگ، آقایان دکتر مهدی قوتمند و دکتر حجت احسنی طهرانی که راهنمایی این پایان نامه را به عهده داشته‌اند کمال تشکر را دارم.

از سرکار خانم دکتر سمیه مغاری که استاد مشاور این پایان نامه بوده‌اند نیز قدردانی می‌نمایم.

از داوران گرامی، آقایان دکتر محمدهادی نوری اسکندری و دکتر علیرضا ناظمی که زحمت داوری و تصحیح این پایان نامه را به عهده داشتند کمال سپاس را دارم.

فاطمه طالبیان

تیر ۱۳۹۹

تعهد نامه

اینجانب **فاطمه طالبیان** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **روش هم مکانی موجک برای حل عددی معادلات دیفرانسیل جزئی با استفاده از ماتریس ها**، تحت راهنمایی **مهدی قوتمند** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فاطمه طالبیان

تیر ۱۳۹۹

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

به دست آوردن جواب‌های کلاسیک معادلات دیفرانسیل جزئی همیشه امکان پذیر نبوده است و در بسیاری موارد تقریبا غیرممکن است. بنابراین برای حل این دسته از معادلات باید از روش‌های تقریبی استفاده کرد. در این پایان نامه، یک روش موثر براساس موجک‌های لژاندر و چبیشف برای یافتن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل جزئی، با شرایط اولیه داده شده گسترش می‌دهیم. در این روش، ماتریس‌های عملگر انتگرال معادلات را برای موجک‌های لژاندر و چبیشف به دست می‌آوریم و با ترکیب روش هم‌مکانی آن را به یک دستگاه معادلات خطی تبدیل می‌کنیم. همچنین آنالیز همگرایی و تخمین خطای مربوطه برای این روش‌ها تحت شرایط داده شده را بررسی می‌کنیم و با ارائه‌ی چند مثال دقت و کارایی روش را نشان می‌دهیم.

کلمات کلیدی: ماتریس عملگر انتگرال، آنالیز همگرایی، معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه اول، موجک لژاندر، موجک چبیشف

فهرست مطالب

م فهرست تصاویر

س فهرست جداول

۱	ماتریس‌های عملگر انتگرال برای موجک‌های لژاندر و چبیشف
۱.۱	مقدمه
۲.۱	تاریخچه موجک
۳.۱	کاربردهایی برای موجک‌ها
۴.۱	معرفی موجک‌های لژاندر و چبیشف
۱.۴.۱	موجک‌های لژاندر
۲.۴.۱	موجک‌های چبیشف
۳.۴.۱	تقریب توابع برحسب موجک‌ها
۵.۱	ماتریس‌های عملگر انتگرال برای موجک‌های لژاندر
۱.۵.۱	ماتریس‌های عملگر انتگرال برای توابع یک و دو متغیره
۲.۵.۱	ماتریس عملگر انتگرال برای متغیرهای چندگانه
۳.۵.۱	مثال‌ها
۶.۱	ماتریس عملگر انتگرال برای موجک‌های چبیشف
۱.۶.۱	ماتریس‌های عملگر انتگرال برای توابع یک و دو متغیره
۲.۶.۱	ماتریس عملگر انتگرال چبیشف برای توابع چندمتغیره
۳.۶.۱	مثال‌ها
۷.۱	نتیجه‌گیری
۳۳	۲ آنالیز همگرایی و برآورد خطا برای مسائل مقدار اولیه جزئی
۱.۲	مقدمه
۲.۲	همگرایی بسط موجک لژاندر
۳.۲	همگرایی بسط موجک چبیشف

۴.۲	آنالیز همگرایی با استفاده از موجک لژاندر	۳۸
۵.۲	آنالیز همگرایی با استفاده از موجک‌های چبیشف	۴۱
۶.۲	نتیجه گیری	۴۶
۳	حل عددی معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از موجک لژاندر و چبیشف	۴۷
۱.۳	مقدمه	۴۷
۲.۳	پیاده سازی روش	۴۷
۳.۳	نتیجه گیری	۵۹
۶۱	مراجع	

فهرست تصاویر

۲۹		۱.۶.۱	مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی مثال	۱.۱
۳۱		۲.۶.۱	مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی مثال	۲.۱
۵۳	$M = M' = ۴, K = K' = ۱$	۱.۲.۳	نمودار خطا یا مثال با موجک لژاندر برای	۱.۳
۵۳	$M = M' = ۴, K = K' = ۱$	۱.۲.۳	نمودار خطا یا مثال با موجک چبیشف برای	۲.۳
۵۴	$M = M' = ۶, K = K' = ۱$	۱.۲.۳	نمودار خطا یا مثال با موجک لژاندر برای	۳.۳
۵۴	$M = M' = ۶, K = K' = ۱$	۱.۲.۳	نمودار خطا یا مثال با موجک چبیشف برای	۴.۳
۵۷	$M = M' = ۴, K = K' = ۱$	۲.۲.۳	نمودار خطا یا مثال با موجک لژاندر برای	۵.۳
۵۸	$M = M' = ۴, K = K' = ۱$	۲.۲.۳	نمودار خطا یا مثال با موجک چبیشف برای	۶.۳
۵۸	$M = M' = ۶, K = K' = ۱$	۲.۲.۳	نمودار خطا یا مثال با موجک لژاندر برای	۷.۳
۵۹	$M = M' = ۶, K = K' = ۱$	۲.۲.۳	نمودار خطا یا مثال با موجک چبیشف برای	۸.۳

فهرست جداول

۲۰	خطای مطلق جواب دقیق و تقریبی مثال ۱.۵.۱ با موجک لژاندر و چبیشف	۱.۱
۲۳	خطای مطلق جواب دقیق و تقریبی مثال ۲.۵.۱ با موجک لژاندر و چبیشف	۲.۱
۲۸	نتایج عددی مثال ۱.۶.۱	۳.۱
۳۱	نتایج عددی مثال ۲.۶.۱	۴.۱
۵۱	لیست نشانه‌گذاری	۱.۳
۵۱	خطاهای مطلق با موجک لژاندر برای سوال ۱.۲.۳	۲.۳
۵۲	خطاهای مطلق موجک چبیشف برای مثال ۱.۲.۳	۳.۳
	خطاهای L_2 و L_∞ با موجک لژاندر (LW) و موجک چبیشف (CW) برای	۴.۳
۵۲	مثال ۱.۲.۳	
۵۶	خطای مطلق موجک لژاندر مثال ۲.۲.۳	۵.۳
۵۶	خطای مطلق موجک چبیشف مثال ۲.۲.۳	۶.۳
۵۷	خطاهای L_2 و L_∞ با موجک لژاندر و چبیشف برای مثال ۲.۲.۳	۷.۳

فصل ۱

ماتریس‌های عملگر انتگرال برای موجک‌های لژاندر و چبیشف

۱.۱ مقدمه

موجک‌ها دسته‌ای از توابع ریاضی هستند که ذاتاً ناپیوسته هستند اما اگر تعداد بازه‌هایشان را ریز کنیم به توابعی پیوسته نزدیک می‌شوند. از آنجایی که برخی معادلات دیفرانسیل با روش‌های کلاسیک قابل حل نمی‌باشند، با استفاده از موجک‌ها می‌توان این معادله دیفرانسیل‌ها را حل نمود. در این فصل ابتدا به ارائه چند تعریف، تاریخچه و کاربردهای موجک می‌پردازیم، سپس به معرفی موجک‌های لژاندر و چبیشف و ماتریس عملگر انتگرال برای موجک‌های لژاندر و چبیشف می‌پردازیم. همچنین حل چندین معادله با توجه به مبحث‌های مطرح شده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲.۱ تاریخچه موجک

نظریه موجک‌ها در طی سه دهه اخیر در ارتباط با ایده‌های قدیمی‌تر در بسیاری از زمینه‌ها شامل ریاضی کاربردی و محض، فیزیک، علوم کامپیوتر و مهندسی گسترش پیدا کرده است. بنابراین تاریخچه موجک‌ها را می‌توان به صورت یک درخت نمایش داد که ریشه‌های آن در

جهت‌های مختلف پراکنده شده‌اند. در این نمایش، تنه درخت متناظر با پیشرفت سریع موجک‌ها در نیمه دوم دهه هشتاد و تلاش‌های محققان حوزه‌های مختلف در این زمینه می‌باشد، تاج و رأس این درخت نیز با شاخه‌های زیاد متناظر با کاربردهای موجک‌ها در زمینه‌های مختلف می‌باشد.

در این مقدمه به معرفی این شاخه‌های مختلف، ریشه‌ها و قسمت تنه‌ی این درخت می‌باشد. به دلیل وجود ریشه‌های زیاد برای موضوع موجک‌ها رویکردهای زیادی برای صحبت کردن راجع به تاریخ آن وجود دارد. در اینجا سعی می‌کنیم از همان ریشه‌ای شروع به مطالعه تاریخیچه موجک‌ها کنیم که وارد بحث موجک‌ها شدیم.

با وجود کاربردهای زیادی که آنالیز فوریه دارد، به دلیل استفاده از توابع پایه‌ای سینوسی و کسینوسی دارای محدودیت‌های زیادی می‌باشد. توابع پایه‌ای سینوسی و کسینوسی در زمان به بی نهایت می‌روند و بنابراین نمی‌توانند برای تقریب سیگنال‌ها و توابع ناپایدار به کار روند. در نتیجه برای سیگنال‌های محرک که اجزا طیفی آنها در امتداد زمان تغییر می‌کنند یک نمایش زمان فرکانس مورد نیاز می‌باشد. اولین تصحیح تبدیل فوریه که می‌توانست برای آنالیز سیگنال‌های محرک به کار رود تبدیل فوریه زمان کوتاه بود. ایده‌ای که پشت تبدیل فوریه زمان کوتاه نهفته است این بود که سیگنال‌ها با استفاده از توابع پنجره‌ای شده آنالیز فوریه به کار برده می‌شود. در تبدیل فوریه زمان کوتاه برای هر قطعه پنجره‌ای شده تبدیل فوریه به کار می‌رود. بنابراین تبدیل فوریه سریع قادر به یک نمایش خوب زمان فرکانس می‌باشد.

دنيس گابور^۱ که علاقه‌مند به نمایش سیگنال‌های مخابراتی با استفاده از توابع پایه‌ای نوسانی بود، اولین کسی بود که تبدیل فوریه سریع را در سال ۱۹۸۶ به کار برد. اندکی بعد در سال ۱۹۴۷ جان ویل^۲ یک نمایش زمان فرکانس مشابه برای نمایش انرژی یک سیگنال در صفحه زمان فرکانس به کار برد.

در فاصله اواخر دهه ۱۹۴۰ تا اوایل دهه ۱۹۷۰ تبدیلات زمان فرکانس زیادی برای حل مسائل مختلف به کار برده شده‌اند که تفاوت آنها در انتخاب توابع تبدیلات پنجره‌ای به کار گرفته شد. باوجود کاربردهای زیادی که تبدیل فوریه سریع داشت در این تبدیل از یک پنجره برای آنالیز تمام سیگنال استفاده می‌شد و این مشکل بزرگ برای تبدیل فوریه سریع بود [۱۴]. در اواخر دهه هفتاد، مورله^۳ که مهندس زمین شناس بود، روشی جایگزین برای تبدیل فوریه زمان کوتاه مطرح کرد. در تبدیل فوریه زمان کوتاه استاندارد ابتدا سیگنال‌های پنجره‌ای شده و سپس ضرایب فوریه محاسبه می‌شدند، اما سیگنال‌هایی که مورله قصد آنالیز آنها را داشت دارای مشخصه‌های متفاوتی در زمان و فرکانس بودند و معمولاً مولفه‌های فرکانس بالای آنها دارای دوره‌ی زمانی کوتاه‌تری نسبت به مولفه‌های با فرکانس پایین‌تر بودند. برای بدست آوردن مولفه‌های با فرکانس بالا، باید یک تبدیل فوریه زمان کوتاه با باند پهن را انتخاب

¹Dennis Gabor

²John weil

³Morlet

می‌کرد، از طرفی دیگر برای مولفه‌های با فرکانس پایین به یک تبدیل فوریه زمان کوتاه با باند باریک نیاز داشت. برای رسیدن به این دو هدف در یک تبدیل سیگنال، مورله به این نتیجه رسید که تبدیلات توابع را به روش‌های متفاوتی تولید کند.

مورله یک موج کسینوسی پنجره‌ای شده را انتخاب کرد و برای بدست آوردن تابع با فرکانس بالاتر آن را در بازه زمانی فشرده کرد و برای بدست آوردن تابع با فرکانس پایین‌تر آن را در بازه زمانی گسترش داد. برای اینکه متوجه شود که در زمان‌های مختلف چه اتفاقی رخ می‌دهد این توابع به خوبی در طول زمان انتقال داده شده‌اند. توابع تبدیل به دو پارامتر موقعیت زمانی و درجه (مقیاس فشرده‌سازی) آنها وابسته بودند.

تفاوت اساسی توابع تبدیل مورله نسبت به تبدیل استاندارد فوریه این بود که در روش مورله توابع با فرکانس بالا خیلی باریک شده بودند، در حالی که چنین اتفاقی برای توابع با فرکانس پایین رخ نداده بود. مورله تصمیم گرفت این توابع تبدیل را "موجک شکل ثابت"^۴ بنامد. مخالفان او می‌گفتند: "اگر این تبدیلات درست هستند" باید در کتاب‌های ریاضی ذکر شده باشند. از آنجایی که در هیچ کتاب ریاضی این موضوع وجود ندارد پس احتمالاً بی‌ارزش است.^۵

در آن زمان مورله دوران سختی را می‌گذراند و قصد داشت همکاران خود را متقاعد کند که تبدیلات او ابزار ریاضی ارزشمند است و در جستجوی کمک برای بدست آوردن یک پایه ریاضی برای تبدیل موجک خود بود.

یکی از دوستان دوران دانشجویی او، گراسمان^۵ را به او معرفی کرد. گراسمان که فیزیک‌دان نظری بود، به طور گسترده در زمینه‌های مکانیک کوانتومی که با مشکلات مشابهی در کاربرد تبدیلات فوریه مواجه بود، کار کرده بود. گراسمان متوجه شد که تبدیلات مورله مشابه روشی است که او به خوبی در مکانیک کوانتومی مورد استفاده قرار داده‌است. او یک فرمول دقیق برای تبدلات مورله ساخت و سپس کاربردهای زیاد را بر روی این موضوع مورد بررسی قرار دادند. در همان زمان یک تحول عمیق در خیلی از ریشه‌های موجک در حال رخ دادن بود.

در بهار ۱۹۸۵ میر^۶ که یک ریاضیدان در حوزه ریاضی محض بود، چیزهایی راجع به کار مورله و گراسمان شنید. وقتی او مقالات آنها را مطالعه کرد متوجه شد که تحلیل و فرمول‌های آنها بازسازی یک کشف از فرمولی است که کالدرون^۷ در دهه‌ی شصت در آنالیز هارمونیک معرفی کرده‌است. میر که یک متخصص برجسته در زمینه خود بود، متوجه رابطه تبدیلات مورله با آنالیز هارمونیک شد و به این بحث کاملاً جدید در حوزه‌ی آنالیز هارمونیک علاقه‌مند شد، همچنین او شیفته تعبیر متفاوت گراسمان و مورله از فرمول کالدرون شد. میر با آنها

^۴Wavelets of Constant Shape

^۵Grossmann

^۶Meyer

^۷Calderon

تماس برقرار کرد و این آغاز یک فعل و انفعال بین محققان در زمینه آنالیز هارمونیک و محققان کاربردی بود که هر دو طرف از این ارتباط بهره بردند. چند هفته بعد میر نه تنها یک اثبات بلکه یک ساختار زیبا از پایه‌های متعامد موجک با خاصیت محلی سازی مکان زمان عالی ارائه کرد و خیلی زود و با کمک میر این ساختار را به N بعد تعمیم داد [۱۴].

در تابستان ۱۹۸۶ مالات^۸ دوست قدیمی دوران دانشجویی خود را که حالا دانشجوی میر بود ملاقات کرد و او پایه‌های موجک میر را برای مالات توضیح داد. بلافاصله مالات به این موضوع علاقه‌مند شد، به ویژه اینکه او متوجه شد که این موضوع از جنبه‌های زیادی برای او آشنا به نظر می‌رسد. در زمینه تخصصی مطالعاتی مالات یعنی آنالیز تصاویر، کاملاً معمول بود که مشخصه‌های درشت در یک تصویر دارای مقیاس بزرگ هستند در حالی که مشخصه‌های ریز باید به‌طور موضعی بیشتر مطالعه شوند. بنابراین فلسفه تجزیه موجک‌ها که در آن توابع باریک برای مشخصه‌های با مقیاس ریز و توابع پهن تر برای مشخصه‌های درشت تر استفاده می‌شوند به‌طور شگفت‌انگیزی با این موضوع سازگار بود. مالات در حالی که به این موضوعات فکر می‌کرد، راجع به ساختارهای لایه‌ای مشابه بسط‌های موجک مطالعه کرد. وقتی او شنید که میر قصد دارد در پاییز به شیکاگو سفر کند، قرار ملاقاتی با او ترتیب داد و پس از بحث‌های طولانی بر روی جزئیات ریاضی نظریه‌ی ”آنالیز چند ریزه ساز”^۹ یک چارچوب برای تمام اتفاقات و کارهای شگفت‌انگیزی را که تا آن زمان در ساخت پایه‌های موجک انجام شده بود توافق کردند و این موضوع ساخت پایه‌های متعامد یکه برای موجک‌ها را بسیار ساده کرد. در همین زمان بود که معلوم شد یک محقق آنالیز حوزه آنالیز هارمونیک به نام استرمبرگ^{۱۰} موجک‌های کاملاً مشابهی را ۵ سال قبل کشف کرده بود. در سال ۱۹۸۸ دابشی^{۱۱} که دانشجوی گراسمان در دانشگاه بروکسل بود قاب‌های موجکی را برای گسسته‌سازی زمان و پارامترهای مقیاس تبدیل موجک گسترش داد. سرانجام با گسترش موجک‌های متعامد یکه با محمل فشرده توسط دابشی، شالوده نظریه‌ی مدرن موجک‌ها بنا نهاده شدند. با وجود تمام کارهایی که توسط مورله، میر، مالات و دابشی در زمینه‌ی موجک‌ها انجام شد آنها اولین افراد در زمینه‌ی پیدایش موجک نبودند بلکه این افتخار به سال ۱۹۰۹ و به آلفرد هار^{۱۲} ریاضیدان آلمانی بر می‌گردد که ساده‌ترین و قابل فهم‌ترین نوع موجک‌های متعامد را در ضمیمه رساله دکتری خود معرفی کرد [۶].

موجک‌های معرفی شده توسط هار در حال حاضر نیز با نام او معرفی می‌شوند با وجود سادگی به دلیل موضعی سازی ضعیف دارای کاربردهای عملی کمی هستند [۱۴]. موجک‌ها دارای کاربردهای فراوانی در حوزه‌های مختلف علمی هستند که در بخش بعد به‌طور مختصر

^۸ Mallat

^۹ Multiresolution Analysis

^{۱۰} Stromberg

^{۱۱} Daubechies

^{۱۲} Alfred Haar

۳.۱ کاربردهایی برای موجک ها

تکنولوژی روز بر پایه انتقال داده از یک مکان به مکان دیگر بنا نهاده شده‌است، بنابراین ذخیره و نمایش اطلاعات با کمترین حجم ممکن دارای اهمیت فوق‌العاده‌ای است. هرچه اطلاعات با حجم کمتر و دقت بیشتری انتقال داده شوند تکنولوژی نیز پیشرفت بیشتری خواهد داشت. این موضوع محققان را بر آن داشت تا پایه‌هایی را معرفی کنند که قابلیت ذخیره و نمایش توابع و اطلاعات در حداقل حجم و حداکثر دقت ممکن را داشته باشند. از سال ۱۹۸۰ به بعد موجک‌ها به عنوان پایه‌هایی که دارای این ویژگی هستند برای نمایش و ذخیره اطلاعات به کار رفته‌اند.

پایه‌های موجکی با توجه به ساختارهایی که دارند می‌توانند داده‌ها را در حجم کم و با دقت بالا ذخیره کنند. به علاوه موجک‌ها قادرند با استفاده از تعداد پایه‌های کمتری توابع را بازسازی کنند. موجک‌ها با توجه به ساختارشان قادرند بر روی رفتارهای محلی توابع تمرکز کنند، بنابراین از آن‌ها می‌توان در پردازش تصاویر و در حوزه پزشکی برای شناسایی تومورهای بالقوه استفاده کرد.

همچنین موجک‌ها در رادار و ردیابی تصاویر برای مشخص کردن مرز حوزه‌های نفتی زیر زمینی و در باستان شناسی برای تعیین مکان اشیاء مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱۱].

در تحلیل و پردازش تصویرهای ویدئویی نیز می‌توان از موجک‌ها استفاده کرد. تلفن‌های تصویری در حال حاضر خیلی مورد استقبال قرار نمی‌گیرند زیرا امکان انتقال دنباله‌ای از تصاویر با کیفیت بالا توسط خطوط تلفن امکان پذیر نیست و حجم این تصاویر از ظرفیت خطوط تلفن بیشتر می‌باشد، ولی اگر تصاویر ویدئویی فشرده شوند یا توسط یک مجموعه از داده‌ها با حجم کمتر ذخیره شوند بدون اینکه کیفیت تصاویر صدمه جدی ببینند، تلفن‌های تصویری نیز قادر به ارسال تصاویر با دقت بالا خواهند بود. استفاده از موجک‌ها با توجه به خواص فشرده‌سازی خوبی که دارند برای این کار می‌تواند بسیار مفید باشد [۱۱].

در تصاویر تلویزیونی صحنه‌های مختلف معمولاً در جزئیات کمی با هم تفاوت دارند. به عنوان مثال: در صحنه‌های تلویزیونی چارچوب تصاویر ثابت است و ممکن است که فقط یک عضو از بدن یک شخص از یک صحنه به صحنه دیگر جابه‌جا شود. بنابراین به‌جای ذخیره و انتقال کل صحنه جدید فقط تفاوت‌های صحنه‌ها باید انتقال داده شوند. اگر از موجک‌ها استفاده شود، ضرایب موجک‌هایی که در تصاویر مشابه‌اند تغییری نمی‌کند و فقط تفاوت‌های کوچک در صحنه‌های متفاوت بروز می‌کنند. از آنجایی که موجک‌ها می‌توانند بر روی ناحیه مشخصی از تصاویر متمرکز شوند، این به‌روزرسانی فقط با تعداد کمی از داده‌ها قابل انجام است [۱۱].

تبدیل موجک‌ها برای ذخیره اثر انگشت در اداره تحقیقات فدرال^{۱۳} مورد استفاده قرار می‌گیرد. اثر انگشت‌ها در اداره تحقیقات فدرال باید به صورت الکترونیک ذخیره شود تا در مواقع ضروری در دسترس باشند. برای ذخیره اثرات انگشت یک نفر به صورت کامل به حدود ۱۰ مگابایت حافظه نیاز است. حال اگر قرار باشد اثرات انگشت حدود ۲۰۰ میلیون نفر ذخیره شوند تقریباً ۲۰۰۰ ترابایت حافظه نیاز دارد و این کار در عمل غیر ممکن است. در نهایت یک گروه تحقیقاتی از آزمایشگاه ملی لوس آلاموس^{۱۴} با استفاده از موجک‌ها این کار را با استفاده از پنج درصد حافظه مورد نیاز انجام دادند [۴]. همچنین مریخ نوردان ناسا^{۱۵} از تبدیلات موجک برای فشرده‌سازی تصاویر ارسالی خود استفاده می‌کنند. از دیگر کاربردهای جالب موجک‌ها، استفاده از تبدیلات موجک برای طراحی نرم‌افزارهای ذخیره فایل‌ها با حجم کم است. فرمت JPEG که یک روش استاندارد و متداول برای فشرده‌سازی پرونده‌های گرافیکی است، با استفاده از تبدیلات موجک تصاویر را فشرده‌سازی می‌کند به طوریکه می‌توان آن‌ها را دوباره به حالت تصویری و قالب اولیه بازگرداند. امروزه قالب JPEG متداول‌ترین روش برای ذخیره فایل‌های تصویری است.

همچنین فرمت Djvu که یک قالب برای فایل‌های رایانه‌ای است و کاربرد اصلی آن در ذخیره‌سازی تصاویر اسکن شده دارای نوشته و ترسیم‌های خطی با حجم کم است، از تبدیلات موجک برای فشرده‌سازی فایل‌ها کمک می‌گیرد.

یکی از کاربردهای دیگر موجک‌ها، استفاده آن‌ها برای حذف اغتشاشات^{۱۶} در زمینه پردازش تصاویر می‌باشد. مسأله مشترک در پردازش سیگنال‌ها، حذف اغتشاشات ناخواسته است. به عنوان مثال صدای هیس ناخواسته در یک نوار کاست مثالی از اغتشاشات است که در بحث پردازش سیگنال به آن پرداخته می‌شود.

یک روش برای حذف اغتشاش ناخواسته این است که ابتدا با استفاده از سری فوری سیگنال‌ها به مؤلفه‌های سینوسی و کسینوسی به صورت زیر تجزیه شوند:

$$\sum_n a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \quad (1.1)$$

و سپس ضرایب متناظر با فرکانس‌های ناخواسته را برابر صفر قرار دهیم. اگر بتوان سیگنال را به صورت سری مثلثاتی بالا تجزیه کرد، این روش ساده و امکان پذیر است، ولی برای بسیاری از سیگنال‌ها که رفتارهای موضعی تری دارند یا دارای اغتشاشات ناگهانی هستند تجزیه به روش فوری امکان پذیر نیست.

این سیگنال دارای دو اغتشاش ناگهانی مجزا است که باید حذف شوند، ولی به دلیل این اغتشاش‌های ناگهانی توابع سینوسی و کسینوسی مدل خوبی برای نمایش و حذف اغتشاش‌های

¹³ FBI

¹⁴ Los Alamos National Laboratory

¹⁵ NASas Mars Rovers

¹⁶ Noise

این سیگنال نیستند. ولی با استفاده از مجموعه پایه‌های موجک می‌توان این سیگنال را به خوبی تجزیه و اغتشاش‌های آن را حذف کرد.

در واقع موجک‌ها موج‌هایی هستند که بر خلاف توابع سینوسی و کسینوسی که تناوب دارند، تنها روی یک بازه متناهی ناصفر می‌باشند. مشابه توابع مثلثاتی در سری فوریه با انتقال و گسترش یک تابع موجک خاص می‌توان پایه‌های موجک با فرکانس‌های متفاوت تولید کرد. وقتی که از موجک برای رفع اغتشاش استفاده می‌شود، مشابه سری فوریه، ابتدا سیگنال به مؤلفه‌های موجکی تجزیه می‌شود، سپس ضرایب متناظر با جملات ناخواسته حذف یا تعدیل می‌شود.

در این پایان نامه یک روش محاسباتی کارآمد را بر اساس موجک‌های لژاندر و چبیشف برای یافتن راه حل تقریبی یک معادله دیفرانسیل دو بعدی هذلولی با شرایط اولیه ارائه می‌دهیم. در این روش ماتریس عملگر انتگرال برای موجک‌های لژاندر و چبیشف حاصل شده و مورد استفاده قرار می‌گیرند تا با شرایط اولیه داده شده به یک سیستم خطی معادلات تبدیل شوند. همچنین تجزیه و تحلیل تبدیل و تخمین خطای مربوط به ایده ارائه شده نیز تحت شرایط کوتاهی مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج عددی حاصل از پیاده سازی در محیط متلب تایید می‌کنند که روش پیشنهادی دقت و کارایی خوبی دارد. علاوه بر این استفاده از موجک‌های لژاندر و چبیشف، دقیق، ساده و سریع هستند.

نظریه موجک که عمدتاً در طی ۳۰ سال گذشته توسعه یافته است مدافع زیادی در بسیاری از زمینه‌های تحقیقات در علوم و مهندسی ایجاد کرده است. با این حال بسیاری از کاربرد موجک‌ها بر تحلیل داده‌ها و استفاده از موجک‌ها به عنوان ابزاری برای فشرده سازی داده متمرکز شده است.

در سال‌های اخیر حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از موجک توجه زیادی را در میان بسیاری از محققان به دست آورده است.

اکثر مشکلات فیزیکی مانند هدایت گرما، انتشار موج، مدل‌های پرتو لیزر به عنوان معادلات دیفرانسیل مدل سازی می‌شوند که جواب آن‌ها به راحتی با روش‌های کلاسیک بدست نمی‌آید. این شاید به دلیل غیرخطی بودن معادله یا فضای نامناسب جواب باشد زیرا معادلات دیفرانسیل معمولاً برای شبیه سازی پدیده‌های فیزیکی در بسیاری از شاخه‌های علوم و مهندسی کاربرد دارند. از سوی دیگر تنها برای برخی از معادلات دیفرانسیل راه حل‌های تحلیلی در دسترس هستند که در بسیاری موارد مشکل یا غیر ممکن است.

بنابراین اخیراً از دیدگاه نظری و محاسباتی در بسیاری از مقالات استفاده از روش‌های مبتنی بر موجک برای حل عددی معادلات دیفرانسیل مورد بررسی قرار گرفته است. در این پایان نامه یک روش هم‌مکانی موجک کارآمد بر اساس موجک‌های لژاندر و چبیشف

برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل مرتبه اول به صورت: [۱۳]

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial(t)} + \frac{\partial u(x, t)}{\partial(x)} + au(x, t) = bv(x, t) \quad (۲.۱)$$

$$(x, t) \in \Lambda (= [\circ, ۱] \times [\circ, ۱]) \quad (۳.۱)$$

با شرایط اولیه $u(\circ, t) = f(t), u(x, \circ) = g(x)$ ارائه می‌دهیم و فرض کنیم a و b اسکالرهایی حقیقی هستند، f ، g و توابع داده شده هستند و u تابع مجهول است که باید تعیین شود. بسیاری از معادلات مکانیک هیدرولیکی و مطالعه معادلات دیفرانسیل جزئی در قرن معاصر توجه بسیاری از پژوهشگران را به خود جذب کرده است.

معادلات دیفرانسیل می‌توانند با ارتعاش ساختار (مثلاً ساختمان‌ها، ماشین آلات و پرتوها) مدل سازی شوند و پایه‌های اساسی فیزیک اتمی هستند. معادلات موج و معادلات تلگراف نمونه‌های از این معادلات دیفرانسیل هستند که معادله تلگراف به طور گسترده‌ای در تجزیه و تحلیل سیگنال برای انتقال و انتشار سیگنال‌های الکتریکی استفاده می‌شود و همچنین بسیاری کاربردهای دیگر را دارد.

۴.۱ معرفی موجک‌های لژاندر و چبیشف

تعریف ۱.۴.۱. [۷] ضرب کرونکر ماتریس A و B به صورت $A \otimes B$ نمایش داده می‌شود و به صورت زیر بیان می‌شود

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

تعریف ۲.۴.۱. [۵] نامساوی کشی شوارتز بیان می‌کند برای هر دو بردار دلخواه x و y در فضای ضرب داخلی داریم:

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

همچنین با گرفتن ریشه دوم طرفین و با توجه به نرم بردارها، نامساوی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

۱.۴.۱ موجک‌های لژاندر

موجک‌های لژاندر توابعی متعامد و مستقل خطی هستند. بنابراین می‌توان آن‌ها را برای تقریب جواب معادلات دیفرانسیل به کاربرد. باکمک ویژگی موجک‌های لژاندر و ماتریس عملگرانتگرال که در بخش بعد به آن می‌پردازیم، دستگاه معادلات دیفرانسیل را به دستگاه

معادلات جبری تبدیل می‌کنیم و با حل معادلات جبری می‌توان جواب معادلات دیفرانسیل را بدست آورد. به طور کلی موجک‌ها به گونه ای ساخته می‌شوند که شامل اتساع (a) و انتقال (b) هستند و هنگامی که این پارامترها به طور پیوسته تغییر می‌کنند، خانواده‌هایی از موجک پیوسته به صورت زیر داریم: [۹]

$$\psi_{a,b}^L(t) = |a|^{-\frac{1}{p}} \psi^L\left(\frac{t-b}{a}\right), a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

اگر پارامترهای a ، b به صورت

$$a = a_0^{-k}, b = nb_0 a_0^{-k}, a_0 > 1, b_0 > 0, n, k \in \mathbb{Z}^+$$

بیان شوند و زیرخانواده موجک گسسته به صورت:

$$\psi_{k,n}(t) = |a_0|^{-\frac{1}{p}} \psi(a_0^k t - nb_0),$$

هستند که در آن $\psi_{k,n}(t)$ پایه موجک برای $L^2(R)$ را تشکیل می‌دهند، به خصوص وقتی که $a_0 = 2$ و $b_0 = 1$ موجک‌های لژاندر $\psi_{n,m}^L(t) = \psi(k, \hat{n}, m, t)$ دارای چهار پارامتر هستند: $\hat{n} = 2n - 1, n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$ و k می‌تواند هر عدد صحیح مثبت فرض شود، m مرتبه چندجمله‌ای‌های لژاندر و t زمان نرمال شده است. موجک یک بعدی لژاندر در بازه $[0, 1]$ به صورت

$$\psi_{n,m}^L(t) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} p_m(2^k x - 2n + 1), & \frac{(n-1)}{2^{k-1}} \leq x \leq \frac{n}{2^{k-1}}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (4.1)$$

تعریف می‌شود که در آن $m = 0, 1, 2, \dots, M-1$ و $n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}$. در (۴.۱) ضریب $\sqrt{m + \frac{1}{2}}$ تابع وزن و $a = 2^{-k}$ و $b = \hat{n} 2^{-k}$ هستند. اینجا $p_m(t)$ مرتبه چندجمله‌ای‌های لژاندر از درجه m هستند و در رابطه بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, \quad P_{s+1}(x) = \frac{s+1}{s+1} x P_s(x) - \frac{s}{s+1} P_{s-1}(x), s = 1, 2, 3, \dots$$

که یک پایه در بازه $[-1, 1]$ تشکیل می‌دهند. تابع معین $f(t)$ روی بازه $[0, 1]$ را می‌توان برحسب موجک‌های لژاندر به صورت زیر بیان کرد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{n,m} \psi_{n,m}(t) = C^T \psi(t) \quad (5.1)$$

که در آن

$$C_{n,m} = \langle f(t), \psi_{n,m}(t) \rangle$$

است. اگر سری‌های نامتناهی در معادله (۵.۱) را به صورت مجموع متناهی بیان کنیم آنگاه معادله (۵.۱) را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^M C_{n,m} \psi_{n,m}(t) = C^T \psi(t)$$

که در آن C و ψ بردارهای مشخص با ابعاد $1 \times (M+1) \times 2^k$ به شکل زیر هستند:

$$C = [c_{0,0}, c_{0,1}, \dots, c_{0,M}, c_{1,0}, \dots, c_{1,M}, \dots, c_{2^{k-1},0}, \dots, c_{2^{k-1},M}]^T \quad (6.1)$$

$$\psi = [\psi_{0,0}(t), \psi_{0,1}(t), \dots, \psi_{0,M}(t), \psi_{1,0}(t), \dots, \psi_{1,M}(t), \dots, \psi_{2^{k-1},0}(t), \dots, \psi_{2^{k-1},M}(t)]^T$$

همچنین موجک‌های دوبعدی لژاندر را می‌توان به عنوان تعمیمی از موجک‌های یک بعدی لژاندر به صورت زیر بیان می‌شود. [۱۰]:

$$\psi_{n,m,n',m'}^L(x,t) = \begin{cases} \psi_{n,m}^L(x) \psi_{n',m'}^L(t), & \frac{(n-1)}{2^{k-1}} \leq x \leq \frac{n}{2^{k-1}}, \frac{(n'-1)}{2^{k'-1}} \leq t \leq \frac{n'}{2^{k'-1}}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

که در آن

$$\psi_{n,m}^L(x) = \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} p_m(2^k x - 2n + 1),$$

$$\psi_{n',m'}^L(t) = \sqrt{m' + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k'}{2}} p_{m'}(2^{k'} t - 2n' + 1),$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, M-1, m' = 0, 1, 2, \dots, M'-1,$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, 2^{k-1}, n' = 1, 2, 3, \dots, 2^{k'-1}.$$

$$\psi_{n,m,n',m'}^L(x,t) = \begin{cases} \sqrt{m + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k}{2}} p_m(2^k x - 2n + 1) \sqrt{m' + \frac{1}{2}} 2^{\frac{k'}{2}} p_{m'}(2^{k'} t - 2n' + 1) \\ \circ \text{ در غیر این صورت} \\ \frac{(n-1)}{2^{k-1}} \leq x \leq \frac{n}{2^{k-1}}, \\ \frac{(n'-1)}{2^{k'-1}} \leq t \leq \frac{n'}{2^{k'-1}} \\ \frac{(m-1)}{2^{k-1}} \leq x \leq \frac{m}{2^{k-1}}, \\ \frac{(m'-1)}{2^{k'-1}} \leq t \leq \frac{m'}{2^{k'-1}} \end{cases}$$

۲.۴.۱ موجک‌های چبیشف

موجک‌های چبیشف $\psi_{n,m}^c = \psi^c(k, 2n-1, m, t)$ چهارآرگومان دارند که $n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}, k \in N$ و m درجه چندجمله‌ای چبیشف از نوع اول و t پارامتر زمان است. به عنوان مثال برای $t \in [0, 1]$ ، آن‌ها در فاصله $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند [۳]:

$$\psi_{n,m}^c(t) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{2}} \hat{T}_m(2^k t - 2n + 1), & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq t < \frac{n}{2^{k-1}}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (7.1)$$

که در آن

$$\hat{T}_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}, & m = 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_m(t), & m > 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

که در آن $m = 0, 1, \dots, M-1$ و M عدد صحیح مثبت است، که در آن $\{T_m(t), m \in N \cup \{0\}\}$ مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌های چبیشف شناخته شده درجه m است و با توجه به تابع وزن $w(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ در بازه $[-1, 1]$ و مطابق فرمول بازگشتی زیر است:

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_{m+1}(t) = 2tT_m(t) - T_{m-1}(t), \quad m = 1, 2, \dots$$

توجه کنید که در هنگام برخورد با موجک چبیشف، تابع وزن $\hat{w}(t) = w(2t-1)$ باید گسترش یابد و به صورت $w_n(t) = w(2^k t - 2n + 1)$ برای دریافت موجک‌های متعامد است. تابع معین $f(t)$ روی بازه $[0, 1]$ را می‌توان به صورت جملاتی از موجک‌های چبیشف به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{n,m} \psi_{n,m}(t) \quad (9.1)$$

که در آن

$$C_{n,m} = \langle f(t), \psi_{n,m}(t) \rangle$$

است. با قطع کردن سری نامتناهی در معادله (۹.۱) تابع f را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$f(x) \approx \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^{2^k-1} C_{n,m} \psi_{n,m}(t) = C^T \psi(t) \quad (10.1)$$

که در آن C و $\psi(t)$ به ترتیب بردار ضرایب و بردار موجک چبیشف به صورت زیر هستند:

$$C = [C_{0,0}, C_{0,1}, \dots, C_{0,m}, C_{1,0}, \dots, C_{1,M}, \dots, C_{2^k-1,0}, \dots, C_{2^k-1,M}]^T \quad (11.1)$$

$$\psi = [\psi_{0,0}(t), \psi_{0,1}(t), \dots, \psi_{0,M}(t), \psi_{1,0}(t), \dots, \psi_{1,M}(t), \dots, \psi_{2^k-1,0}(t), \dots, \psi_{2^k-1,M}(t)]^T$$

همچنین موجک‌های چبیشف دوبعدی را می‌توان به‌عنوان تعمیم موجک چبیشف یک بعدی به‌صورت زیر بیان کرد:

$$\psi_{n,m,n',m'}^c(x,t) = \psi_{n,m}^c(x) \psi_{n',m'}^c(t) \quad (۱۲.۱)$$

که $\psi_{n,m}^c(x)$ در معادله (۸.۱) تعریف شده و $\psi_{n',m'}^c(t)$ با جایگزینی m,n با m',n' به ترتیب می‌توان به روش مشابه به صورت زیر تعریف کرد

$$\psi_{n,m}^c(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{\gamma}} \hat{T}_m(2^k x - 2n + 1), & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱۳.۱)$$

$$\psi_{n',m'}^c(t) = \begin{cases} 2^{\frac{k'}{\gamma}} \hat{T}_{m'}(2^{k'} t - 2n' + 1), & \frac{n'-1}{2^{k'-1}} \leq t < \frac{n'}{2^{k'-1}}, \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱۴.۱)$$

$$\psi_{n,m,n',m'}^c(x,t) = \begin{cases} 2^{\frac{k}{\gamma}} \hat{T}_m(2^k x - 2n + 1) 2^{\frac{k'}{\gamma}} \hat{T}_{m'}(2^{k'} t - 2n' + 1) \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \quad (۱۵.۱)$$

۳.۴.۱ تقریب توابع برحسب موجک‌ها

هر تابع $f(x)$ تعریف شده در بازه $[0, 1]$ را می‌توان برحسب موجک‌ها به صورت زیر نوشت [۱۲]:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} f_{nm} \psi_{nm}(x) \quad (۱۶.۱)$$

که اگر تعداد متناهی جمله از سری بالا را در نظر بگیریم داریم:

$$f(x) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm} \psi(x) = F^T \psi(x) \quad (۱۷.۱)$$

که F و ψ بردارهایی از درجه $2^{k-1}M$ هستند و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F = [f_{1,0}, f_{1,1}, \dots, f_{1,M-1}, f_{2,0}, f_{2,1}, \dots, f_{2,M-1}, \dots, f_{2^{k-1},0}, f_{2^{k-1},1}, \dots, f_{2^{k-1},M-1}] \quad (۱۸.۱)$$

$$\psi = [\psi_{1,0}, \psi_{1,1}, \dots, \psi_{1,M-1}, \psi_{2,0}, \psi_{2,1}, \dots, \psi_{2,M-1}, \dots, \psi_{2^{k-1},0}, \dots, \psi_{2^{k-1},M-1}]$$

همچنین برای توابع دو متغیره هرتابع $f(x, t)$ تعریف شده در $[0, 1] \times [0, 1]$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} f_{nmn'm'} \Psi_{nmn'm'}(x, t). \quad (۱۹.۱)$$

و با قطع جملات سری فوق داریم:

$$f(x, t) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=1}^{2^{k'-1}} \sum_{m'=0}^{M'-1} f_{nmn'm'} \Psi_{nmn'm'}(t, x) = F^T \Psi(x, t), \quad (۲۰.۱)$$

که F و Ψ بردارهای $2^{k-1} 2^{k'-1} M M' \times 1$ هستند و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} F = [& f_{1,0,1,0}, \dots, f_{1,0,1,M'-1}, f_{1,0,2,0}, \dots, f_{1,0,2,M'-1}, \dots, f_{1,0,2^{k'-1},0}, \dots, \\ & f_{1,0,2^{k'-1},M'-1}, \dots, f_{1,M-1,1,0}, \dots, f_{1,M-1,1,M'-1}, \dots, f_{1,M-1,2,0}, \dots, f_{1,M-1,2,M'-1}, \\ & f_{1,M-1,2^{k'-1},0}, \dots, f_{1,M-1,2^{k'-1},M'-1}, f_{2,0,1,0}, f_{2,0,1,M'-1}, f_{2,0,2,0}, \dots, \\ & f_{2,0,2,M'-1}, \dots, f_{2,0,2^{k'-1},M'-1}, \dots, f_{2,M-1,1,0}, \dots, f_{2,M-1,1,M'-1}, \\ & f_{2,M-1,2,0}, \dots, f_{2,M-1,2,M'-1}, f_{2,M-1,2^{k'-1},0}, \dots, f_{2,M-1,2^{k'-1},M'-1}, \dots, \\ & f_{2^{k-1},0,1,0}, \dots, f_{2^{k-1},0,1,M'-1}, f_{2^{k-1},0,2,0}, \dots, f_{2^{k-1},0,2,M'-1}, \dots, \\ & f_{2^{k-1},0,2^{k'-1},0}, \dots, f_{2^{k-1},0,2^{k'-1},M'-1}, \dots, f_{2^{k-1},M-1,2^{k'-1},0}, \dots, f_{2^{k-1},M-1,2^{k'-1},M'-1}]^T, \end{aligned} \quad (۲۱.۱)$$

$$\begin{aligned} \Psi = [& \psi_{1,0,1,0}, \dots, \psi_{1,0,1,M'-1}, \psi_{1,0,2,0}, \dots, \psi_{1,0,2,M'-1}, \dots, \psi_{1,0,2^{k'-1},0}, \dots, \\ & \psi_{1,0,2^{k'-1},M'-1}, \dots, \psi_{1,M-1,1,0}, \dots, \psi_{1,M-1,1,M'-1}, \dots, \psi_{1,M-1,2,0}, \dots, \psi_{1,M-1,2,M'-1}, \\ & \psi_{1,M-1,2^{k'-1},0}, \dots, \psi_{1,M-1,2^{k'-1},M'-1}, \psi_{2,0,1,0}, \psi_{2,0,1,M'-1}, \psi_{2,0,2,0}, \dots, \\ & \psi_{2,0,2,M'-1}, \dots, \psi_{2,0,2^{k'-1},M'-1}, \dots, \psi_{2,M-1,1,0}, \dots, \psi_{2,M-1,1,M'-1}, \\ & \psi_{2,M-1,2,0}, \dots, \psi_{2,M-1,2,M'-1}, \psi_{2,M-1,2^{k'-1},0}, \dots, \psi_{2,M-1,2^{k'-1},M'-1}, \dots, \\ & \psi_{2^{k-1},0,1,0}, \dots, \psi_{2^{k-1},0,1,M'-1}, \psi_{2^{k-1},0,2,0}, \dots, \psi_{2^{k-1},0,2,M'-1}, \dots, \\ & \psi_{2^{k-1},0,2^{k'-1},0}, \dots, \psi_{2^{k-1},0,2^{k'-1},M'-1}, \dots, \psi_{2^{k-1},M-1,2^{k'-1},0}, \dots, \psi_{2^{k-1},M-1,2^{k'-1},M'-1}]^T, \end{aligned} \quad (۲۲.۱)$$

۵.۱ ماتریس‌های عملگر انتگرال برای موجک‌های لژاندر

۱.۵.۱ ماتریس‌های عملگر انتگرال برای توابع یک و دو متغیره

$\psi^L(x)$ بردار موجک یک بعدی لژاندر تعریف می‌شود که یک بردار از بعد $M \times 2^{k-1}$ می‌باشد. که ماتریس عملگر انتگرال P برای متغیر x به صورت زیر بیان می‌باشد:

$$\int_0^x \Psi^L(\varsigma) d\varsigma = \begin{bmatrix} \int_0^x \psi_0^L(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^x \psi_1^L(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^x \psi_2^L(\varsigma) d\varsigma \\ \vdots \\ \int_0^x \psi_N^L(\varsigma) d\varsigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0(x) \\ b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_N(x) \end{bmatrix} = P_x^L \psi^L(x) \quad (23.1)$$

پس داریم:

$$\int_0^x \Psi^L(\varsigma) d\varsigma = P_x^L \psi^L(x)$$

همچنین برای متغیر t داریم:

$$\int_0^t \Psi^L(\varsigma) d\varsigma = \begin{bmatrix} \int_0^t \psi_0^L(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^t \psi_1^L(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^t \psi_2^L(\varsigma) d\varsigma \\ \vdots \\ \int_0^t \psi_N^L(\varsigma) d\varsigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{bmatrix} = P_t^L \psi^L(t) \quad (24.1)$$

که $P_t^L = (I \otimes P^L)$ ، همچنین $\Psi^L(x, t)$ را یک بردار موجک دوبعدی لژاندر می‌نامیم که با استفاده از (۲۲.۱) تعریف شده است. فرض کنید بردار از بعد $M \times 2^{k-1}$ و ضرب کرونگر را نشان می‌دهد، بنابراین:

$$\int_0^x \Psi^L(\varsigma, t) d\varsigma = \int_0^x (\Psi^L(\varsigma) \otimes \Psi^L(t)) d\varsigma = \left(\int_0^x \Psi(\varsigma) d\varsigma \right) \otimes \Psi^L(t)$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^x \psi_0^L(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^x \psi_1^L(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^x \psi_2^L(\varsigma) d\varsigma \\ \vdots \\ \int_0^x \psi_N^L(\varsigma) d\varsigma \end{bmatrix} \otimes \Psi^L(t) = \begin{bmatrix} b_0(x) \\ b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_N(x) \end{bmatrix} \otimes \Psi^L(t) =$$

$$\simeq P^L \Psi^L(x) \otimes I \Psi^L(t) = (P^L \otimes I)(\Psi^L(x) \otimes \Psi^L(t)) = P_x^L \Psi^L(x, t)$$

لذا داریم:

$$\int_0^x \Psi^L(\varsigma, t) d\varsigma = P_x^L \Psi^L(x, t), \quad (25.1)$$

که $P_x^L = P^L \otimes I$ یک ماتریسی از بعد $2^{k-1} 2^{k'-1} MM' \times 2^{k-1} 2^{k'-1} MM'$ است که در آن P^L ماتریسی از بعد $M \times M$ داده شده و به صورت زیر تعریف می شود [۹]:

$$P^L = \frac{1}{2^k} \begin{pmatrix} L & F & F & \dots & F \\ O & L & F & \dots & F \\ \vdots & O & \ddots & \ddots & F \\ O & O & \dots & O & L \end{pmatrix}$$

F و L ماتریس‌های $M \times M$ به صورت زیر هستند:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} & 0 & \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3 \times 5^{\frac{1}{2}}} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 3^{\frac{1}{2}}} & 0 & \frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 7^{\frac{1}{2}}} & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{7^{\frac{1}{2}}}{7 \times 5^{\frac{1}{2}}} & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{(2M-3)^{\frac{1}{2}}}{(2M-3)(2M-5)^{\frac{1}{2}}} & 0 & \frac{(2M-3)^{\frac{1}{2}}}{(2M-3)(2M-1)^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{(2M-1)^{\frac{1}{2}}}{(2M-1)(2M-3)^{\frac{1}{2}}} & 0 \end{pmatrix}$$

هر کدام از صفرها در ماتریس P ماتریس صفر $M \times M$ است.

همچنین ماتریس عملگر انتگرال برای متغیر t را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\int_0^t \Psi^L(x, \varsigma) d\varsigma = \int_0^t (\Psi^L(x) \otimes \Psi^L(\varsigma)) d\varsigma = \Psi^L(x) \otimes \left(\int_0^t \Psi^L(\varsigma) d\varsigma \right)$$

$$= \Psi(x) \otimes \begin{bmatrix} \int_0^t \psi_0^L(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^t \psi_1^L(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^t \psi_2^L(\varsigma) d\varsigma \\ \vdots \\ \int_0^t \psi_N^L(\varsigma) d\varsigma \end{bmatrix} = \Psi(x) \otimes \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{bmatrix}$$

$$\simeq I\Psi^L(x) \otimes P^L\Psi^L(t) = (I \otimes P^L)(\Psi^L(x) \otimes \Psi^L(t)) = P_t^L\Psi^L(x, t)$$

$$P_t^L = (I \otimes P^L) \text{ که}$$

۲.۵.۱ ماتریس عملگر انتگرال برای متغیرهای چندگانه

ماتریس عملگر انتگرال $\psi^L(x, t)$ را برای متغیرچندگانه می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۱۲]:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^x \Psi^L(x', t') dx dt &= \int_0^t \int_0^x \Psi^L(x') \otimes \Psi^L(t') dx' dt' \\ &= \left(\int_0^x \Psi^L(x') dx' \right) \otimes \left(\int_0^t \Psi^L(t') dt' \right) \\ &= P^L\Psi^L(x) \otimes P^L\Psi^L(t) \\ &= (P^L \otimes P^L)\Psi^L(x, t). \end{aligned}$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم:

$$\int_0^t \int_0^x \Psi^L(x', t') dx' dt' = P_{xt}^L\Psi^L(x, t),$$

که

$$P_{xt}^L = P^L \otimes P^L.$$

۳.۵.۱ مثال‌ها

مثال ۱.۵.۱. [۲] فرض کنید

$${}^\circ/25 \dot{y}(t) + y(t) = u(t) \quad (26.1)$$

که

$$y({}^\circ) = {}^\circ u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq {}^\circ \\ {}^\circ & t < {}^\circ \end{cases} \quad (27.1)$$

است. با توجه به معادله (۲۶.۱) و شرایط (۲۷.۱)، $y(t) = 1 - \exp(-4t)$ جواب دقیق معادله است. گو^{۱۷} و جیانگ^{۱۸} در سال ۱۹۹۶ این مسأله را با موجک هار حل کردند. در این جا مسأله را با استفاده از موجک لژاندر حل می‌کنیم که $M = 3$ و $K = 2$ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم تابع مجهول $y(t)$ به صورت زیر داده شده است:

$$y(t) = C^T \psi(t) \quad (28.1)$$

¹⁷Gu

¹⁸Jiang

که در آن

$$C = [c_{10}, c_{11}, c_{12}, c_{20}, c_{21}, c_{22}]^T \quad (29.1)$$

$$\psi(t) = [\psi_{10}, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{20}, \psi_{21}, \psi_{22}]^T \quad (30.1)$$

$$\begin{cases} \psi_{10} = 2^{\frac{1}{4}} \\ \psi_{11} = 6^{\frac{1}{4}}(4t - 1) & 0 \leq t < \frac{1}{4} \\ \psi_{12} = (10)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{3}{4}(4t - 1)^2 - \frac{1}{4}\right] \end{cases} \quad (31.1)$$

$$\begin{cases} \psi_{20} = 2^{\frac{1}{4}} \\ \psi_{21} = 6^{\frac{1}{4}}(4t - 3) & \frac{1}{4} \leq t < 1 \\ \psi_{22} = (10)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{3}{4}(4t - 3)^2 - \frac{1}{4}\right] \end{cases} \quad (32.1)$$

اکنون $u(t)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u(t) = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}[1, 0, 0, 1, 0, 0]\psi(t) = d^T \psi(t) \quad (33.1)$$

با انتگرال گیری از (26.1) از 0 تا t و استفاده از (27.1) و (33.1) داریم:

$$\begin{aligned} {}^0\mathcal{L}\dot{y}(t) + y(t) &= u(t) \\ \int_0^t {}^0\mathcal{L}\dot{y}(t) + \int_0^t y(t) &= \int_0^t u(t) \\ \Rightarrow {}^0\mathcal{L}C^T \psi(t) + \int_0^t C^T \psi(t)dt &= \int_0^t d^T \psi(t)dt \end{aligned} \quad (34.1)$$

از معادله (35.1) استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^t \psi_{\mathcal{L}\times 1}(t)dt = P_{\mathcal{L}\times \mathcal{L}} \psi_{\mathcal{L}}(t) \quad (35.1)$$

داریم:

$${}^0\mathcal{L}C^T \psi(t) + C^T P \psi(t) = d^T p \psi(t).$$

عبارت بالا برای هر t در بازه‌ی $(0, 1)$ برقرار است. بنابراین:

$${}^0\mathcal{L}C^T + C^T P = d^T P \quad (36.1)$$

معادله (۳۶.۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$QC = D \quad (۳۷.۱)$$

که $Q = \circ/۲۵I + P^T$ و $D = P^T d$ است و I ماتریس همانی ۶×۶ است. با توجه به (۳۳.۱) و $d^T = \frac{1}{۲۴}[۱, \circ, \circ, ۱, \circ, \circ]$ بردار d به صورت زیر است:

$$d = \begin{bmatrix} \frac{1}{۲۴} \\ \circ \\ \circ \\ \frac{1}{۲۴} \\ \circ \\ \circ \end{bmatrix}$$

با توجه به مبحث بیان شده در بخش (۵.۱) داریم:

$$P_{۶ \times ۶} = \begin{bmatrix} L_{۳ \times ۳} & F_{۳ \times ۳} \\ O_{۳ \times ۳} & L_{۳ \times ۳} \end{bmatrix} \quad (۳۸.۱)$$

$$L = \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۲۴}{۶۴} & \circ \\ -\frac{۳۴}{۳} & \circ & \frac{۳۴}{۳ \times ۵۴} \\ \circ & -\frac{۵۴}{۵ \times ۳۴} & \circ \end{bmatrix} \quad (۳۹.۱)$$

$$F_{۳ \times ۳} = \begin{bmatrix} ۲ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix} \Rightarrow \quad (۴۰.۱)$$

$$P_{۶ \times ۶} = \frac{1}{۴} \begin{bmatrix} ۱ & \frac{۲۴}{۶۴} & \circ & ۲ & \circ & \circ \\ -\frac{۳۴}{۳} & \circ & \frac{۳۴}{۳ \times ۵۴} & \circ & \circ & \circ \\ \circ & -\frac{۵۴}{۵ \times ۳۴} & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ & ۱ & \frac{۲۴}{۶۴} & \circ \\ \circ & \circ & \circ & -\frac{۳۴}{۳} & \circ & \frac{۳۴}{۳ \times ۵۴} \\ \circ & \circ & \circ & \circ & -\frac{۵۴}{۵ \times ۳۴} & \circ \end{bmatrix} \quad (۴۱.۱)$$

پس

$$P^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}} & 0 & -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 3^{\frac{1}{2}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3 \times 5^{\frac{1}{2}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}} & 0 & -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 3^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3 \times 5^{\frac{1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} \quad (42.1)$$

با توجه به معادله‌های تعریف شده برای Q و D داریم:

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}} & 0 & -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 3^{\frac{1}{2}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3 \times 5^{\frac{1}{2}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}} & 0 & -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 3^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3 \times 5^{\frac{1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} C = \quad (43.1)$$

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}} & 0 & -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 3^{\frac{1}{2}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3 \times 5^{\frac{1}{2}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}} & 0 & -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 3^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3 \times 5^{\frac{1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} \end{bmatrix} \quad (44.1)$$

اکنون با حل معادله (۳۷.۱) و با استفاده از نرم افزار متلب بردار C به صورت زیر محاسبه

می‌شود:

$$C = \begin{bmatrix} 0/3536 \\ 0/2541 \\ 0 \\ 1/0607 \\ 0/2041 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (45.1)$$

جدول ۱.۱: خطای مطلق جواب دقیق و تقریبی مثال ۱.۵.۱ با موجک لژاندر و چبیشف

t	Lg $M = 3$	Chb $M = 3$	Lg $M = 4$	Chb $M = 4$	Lg $M = 5$	Chb $M = 5$
0/0	0/270	0/0127	0/0038	0/0021	$0/4114e - 3$	$0/2038e - 3$
0/1	0/0108	0/0145	0/0014	0/00132	$0/0411e - 3$	$0/0208e - 3$
0/2	0/0047	0/0038	0/0011	0/0017	$0/1114e - 3$	$0/1467e - 3$
0/9	0/0010	0/0014	0/0002	0/0002	$0/0113e - 3$	$0/0052e - 3$
1/0	0/0036	0/0031	0/0005	0/0003	$0/0557e - 3$	$0/0301e - 3$

مثال ۲.۵.۱. [۲] معادله دیفرانسیل بسل^{۱۹} از مرتبه صفر زیر را در نظر بگیرید.

$$xy'' + y' + xy = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \quad (46.1)$$

جواب برحسب تابع بسل از مرتبه صفر به صورت $J_0(x)$ زیر تعریف می‌شود:

$$J_0(x) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{(q!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2q}.$$

در اینجا با استفاده از موجک‌های لژاندر با $M = 3$ و $k = 2$ همین مسأله را حل می‌کنیم. فرض می‌کنیم $y''(x)$ تابعی مجهول است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y''(x) = C^T \psi(x). \quad (47.1)$$

با استفاده از (۳۵.۱)

$$\int_0^t \psi_{6 \times 1}(t) dt = P_{6 \times 6} \psi_6(t) \quad (48.1)$$

¹⁹Bessel

که $\psi_e(t) = [\psi_{01}, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{20}, \psi_{21}, \psi_{22}]^T$ و

$$P_{6 \times 6} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}} & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} & 0 & \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3 \times 5^{\frac{1}{2}}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 3^{\frac{1}{2}}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{2^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} & 0 & \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3 \times 5^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 3^{\frac{1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} \quad (49.1)$$

که

$$P_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} L_{3 \times 3} & F_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & L_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (50.1)$$

،

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2^{\frac{1}{2}}}{6^{\frac{1}{2}}} & 0 \\ -\frac{3^{\frac{1}{2}}}{3} & 0 & \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3 \times 5^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & -\frac{5^{\frac{1}{2}}}{5 \times 3^{\frac{1}{2}}} & 0 \end{bmatrix} \quad (51.1)$$

،

$$F_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (52.1)$$

. از شرایط مرزی در (۴۶.۱) داریم:

$$y'(x) = C^T P \psi(x), \quad y(x) = C^T P^T \psi(x) + d^T \psi(x) \quad (53.1)$$

که d در (۳۳.۱) آورده شده است.

همچنین x را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} [1, \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}, 0, 3, \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}, 0]^T \psi(x) = e^T \psi(x) \quad (54.1)$$

با جایگذاری (۴۷.۱) و (۵۳.۱) در (۴۶.۱) داریم:

$$e^T \psi(x) \psi^T(x) C + C^T P \psi(x) + e^T \psi(x) \psi^T(x) P^T C + e^T \psi(x) \psi^T(x) d = 0 \quad (55.1)$$

که

$$C = [c_{01}, c_{11}, \dots, c_{1M-1}, c_{20}, \dots, c_{2M-1}, \dots, c_{2^{k-1}M-1}]^T$$

$$\psi(t) = [\psi_{10}(t), \psi_{11}(t), \dots, \psi_{1M-1}(t), \psi_{20}(t), \dots, \psi_{2^{k-1}M-1}(t)]^T$$

و $\tilde{C}$ یک ماتریس $(2^{k-1}M) \times (2^{k-1}M)$ است. برای نشان دادن روش محاسبه شده، $M = 3$ و $K = 2$ را انتخاب می‌کنیم و با استفاده از $\psi(x)$ در (۳۰.۱) به دست می‌آوریم:

$$\psi(x)\psi^T(x) = \begin{bmatrix} \psi_{10}\psi_{10} & \psi_{10}\psi_{11} & \psi_{10}\psi_{12} & \psi_{10}\psi_{20} & \psi_{10}\psi_{21} & \psi_{10}\psi_{22} \\ \psi_{11}\psi_{10} & \psi_{11}\psi_{11} & \psi_{11}\psi_{12} & \psi_{11}\psi_{20} & \psi_{11}\psi_{21} & \psi_{11}\psi_{22} \\ \psi_{12}\psi_{10} & \psi_{12}\psi_{11} & \psi_{12}\psi_{12} & \psi_{12}\psi_{20} & \psi_{12}\psi_{21} & \psi_{12}\psi_{22} \\ \psi_{20}\psi_{10} & \psi_{20}\psi_{11} & \psi_{20}\psi_{12} & \psi_{20}\psi_{20} & \psi_{20}\psi_{21} & \psi_{20}\psi_{22} \\ \psi_{21}\psi_{10} & \psi_{21}\psi_{11} & \psi_{21}\psi_{12} & \psi_{21}\psi_{20} & \psi_{21}\psi_{21} & \psi_{21}\psi_{22} \\ \psi_{22}\psi_{10} & \psi_{22}\psi_{11} & \psi_{22}\psi_{12} & \psi_{22}\psi_{20} & \psi_{22}\psi_{21} & \psi_{22}\psi_{22} \end{bmatrix} \quad (56.1)$$

در (۵۶.۱) داریم: اگر $k \neq i$ ، $\psi_{ij}\psi_{kl} = 0$ همچنین $\psi_{ij}\psi_{kl} = 0$ ، $i = k$ اگر $j \neq l$ ، $\psi_{ij}\psi_{kl} = 0$ و $\psi_{ij}\psi_{ij} = 2^{\frac{1}{2}}\psi_{ij}$ اگر فقط عناصر $\psi(x)$ را نگه داریم آنگاه داریم:

$$\psi\psi^T = \begin{bmatrix} 2^{\frac{1}{2}}\psi_{10} & 2^{\frac{1}{2}}\psi_{11} & 2^{\frac{1}{2}}\psi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 2^{\frac{1}{2}}\psi_{11} & 2^{\frac{1}{2}}\psi_{10} + \frac{4}{10^{\frac{1}{2}}}\psi_{11} & \frac{4}{10^{\frac{1}{2}}}\psi_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 2^{\frac{1}{2}}\psi_{12} & \frac{4}{10^{\frac{1}{2}}}\psi_{11} & 2^{\frac{1}{2}}\psi_{10} + \frac{20}{7 \times 10^{\frac{1}{2}}}\psi_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2^{\frac{1}{2}}\psi_{20} & 2^{\frac{1}{2}}\psi_{21} & 2^{\frac{1}{2}}\psi_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 2^{\frac{1}{2}}\psi_{21} & 2^{\frac{1}{2}}\psi_{20} + \frac{4}{10^{\frac{1}{2}}}\psi_{22} & \frac{4}{10^{\frac{1}{2}}}\psi_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 2^{\frac{1}{2}}\psi_{22} & \frac{4}{10^{\frac{1}{2}}}\psi_{21} & 2^{\frac{1}{2}}\psi_{20} + \frac{20}{7 \times 10^{\frac{1}{2}}}\psi_{22} \end{bmatrix} \quad (57.1)$$

با استفاده از بردار C در (۲۹.۱) و ماتریس $\tilde{C}$ در (۲۹.۶) داریم:

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \quad (58.1)$$

که B_i ، $i = 1, 2$ ، ماتریس 3×3 به صورت زیر است:

$$B_i = \begin{bmatrix} 2^{\frac{1}{2}}c_{i0} & 2^{\frac{1}{2}}c_{i1} & 2^{\frac{1}{2}}c_{i2} \\ 2^{\frac{1}{2}}c_{i1} & 2^{\frac{1}{2}}c_{i0} + \frac{4}{10^{\frac{1}{2}}}c_{i2} & \frac{4}{10^{\frac{1}{2}}}c_{i1} \\ 2^{\frac{1}{2}}c_{i2} & \frac{4}{10^{\frac{1}{2}}}c_{i1} & 2^{\frac{1}{2}}c_{i0} + \frac{20}{7 \times 10^{\frac{1}{2}}}c_{i2} \end{bmatrix} \quad (59.1)$$

از (۵۵.۱) داریم:

$$\psi^T(x)\tilde{E}C + \psi^T(x)P^TC + \psi^T(x)\tilde{E}P^{\check{T}} + \psi^T(x)\tilde{E}d = 0,$$

یا

$$\tilde{E}C + P^TC + \tilde{E}P^{\check{T}}C + \tilde{E}d = 0 \quad (۶۰.۱)$$

که $\tilde{E}$ را با توجه به قسمت آخر (۵۵.۱) می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{E} = e^T \psi(x)$$

سپس با جایگذاری $\tilde{E}$ و d و P^T در معادله (۶۰.۱) C به صورت زیر دست می‌آید.

$$C = \begin{bmatrix} -0/1714 & -0/7972 & -0/3536 & -0/3536 & -0/3536 & -0/3536 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0/1845 & -0/3536 & -0/3536 & -0/2533 & -0/4268 & -0/3536 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

جدول ۲.۱: خطای مطلق جواب دقیق و تقریبی مثال ۲.۵.۱ با موجک لژاندر و چبیشف

t	لژاندر	چبیشف
۰/۰	$0/963 \times 10^{-3}$	$0/0601 - 3$
۰/۱	$0/0287 - 3$	$0/0615 - 3$
۰/۲	$0/0360 - 3$	$0/0599 - 3$
۰/۳	$0/0183 - 3$	$0/0090 - 3$
۰/۴	$0/0412 - 3$	$0/0524 - 3$
۰/۵	$0/2695 - 3$	$0/1695 - 3$
۰/۶	$0/0922 - 3$	$0/1602 - 3$
۰/۷	$0/0826 - 3$	$0/1140 - 3$
۰/۸	$0/0688 - 3$	$0/0784 - 3$
۰/۹	$0/1026 - 3$	$0/1577 - 3$
۱/۰	$0/2689 - 3$	$0/1636 - 3$

۶.۱ ماتریس عملگر انتگرال برای موجک‌های چبیشف

۱.۶.۱ ماتریس‌های عملگر انتگرال برای توابع یک و دو متغیره

بردارموجک یک بعدی چبیشف $\psi^c(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود که ماتریسی از بعد M^{k-1} را نشان می‌دهد:

$$\int_0^x \Psi^c(\varsigma) d\varsigma = \begin{bmatrix} \int_0^x \psi_0^c(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^x \psi_1^c(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^x \psi_2^c(\varsigma) d\varsigma \\ \vdots \\ \int_0^x \psi_N^c(\varsigma) d\varsigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0(x) \\ b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_N(x) \end{bmatrix} = P_x^c \psi^c(x) \quad (61.1)$$

بنابراین داریم:

$$\int_0^x \Psi^c(\varsigma) d\varsigma = P_x^c \psi^c(x)$$

همچنین برای متغیر t داریم:

$$\int_0^t \Psi^c(\varsigma) d\varsigma = \begin{bmatrix} \int_0^t \psi_0^c(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^t \psi_1^c(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^t \psi_2^c(\varsigma) d\varsigma \\ \vdots \\ \int_0^t \psi_N^c(\varsigma) d\varsigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{bmatrix} = P_t^c \psi^c(t) \quad (62.1)$$

که $P_t^c = (I \otimes P^c)$

حال فرض کنید $\Psi^C(x, t) = \Psi^C(x) \otimes \Psi^C(t)$ موجک دو بعدی تعریف شده در معادله (۲۲.۱) باشد. ماتریس انتگرال موجک چبیشف را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_0^x \Psi^C(\varsigma, t) d\varsigma = P_x^C \Psi^C(x, t),$$

$$\int_0^x \Psi^C(\varsigma, t) d\varsigma = \int_0^x (\Psi^C(\varsigma) \otimes \Psi^C(t)) d\varsigma = \left(\int_0^x \Psi^C(\varsigma) d\varsigma \right) \otimes \Psi^C(t)$$

$$= \begin{bmatrix} \int_0^x \psi_0^c(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^x \psi_1^c(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^x \psi_2^c(\varsigma) d\varsigma \\ \vdots \\ \int_0^x \psi_N^c(\varsigma) d\varsigma \end{bmatrix} \otimes \Psi^C(t) = \begin{bmatrix} b_0(x) \\ b_1(x) \\ b_2(x) \\ \vdots \\ b_N(x) \end{bmatrix} \otimes \Psi^C(t) =$$

$$\simeq P^c \Psi^c(x) \otimes I \Psi^c(t) = (P^c \otimes I)(\Psi^c(x) \otimes \Psi^c(t)) = P_x^c \Psi^c(x, t)$$

که $P_x^C = P^C \otimes I$ ماتریسی از بعد ${}^2^{K-1} {}^2^{K'-1} MM' \times {}^2^{K-1} {}^2^{K'-1} MM'$ است و P^C ماتریسی از بعد ${}^2^{K-1} M$ به صورت زیر است [۹].

$$P^C = \frac{1}{{}^2^k} \begin{pmatrix} L & F & F & \dots & F \\ O & L & F & \dots & F \\ \vdots & O & \ddots & \ddots & F \\ O & O & \dots & O & L \end{pmatrix},$$

که در آن

$$L = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{{}^2}} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\sqrt{{}^2}}{{}^2} & 0 & \frac{1}{{}^2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \\ \frac{\sqrt{{}^2}}{{}^2} (-1)^r \left(\frac{1}{r-{}^2} - \frac{1}{r} \right) & \dots & -\frac{1}{{}^2(r-{}^2)} & 0 & \frac{1}{{}^2 r} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ \frac{\sqrt{{}^2}}{{}^2} (-1)^M \left(\frac{1}{M-1} - \frac{1}{M} \right) & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{{}^2(M-{}^2)} \end{pmatrix}, \quad (۶۳.۱)$$

$$F = \begin{pmatrix} {}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{{}^2 \sqrt{{}^2}}{{}^2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sqrt{{}^2}}{{}^2} \left(\frac{1-(-1)^r}{r} - \frac{1-(-1)^{r-{}^2}}{r-{}^2} \right) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sqrt{{}^2}}{{}^2} \left(\frac{1-(-1)^M}{M} - \frac{1-(-1)^{M-{}^2}}{M-{}^2} \right) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (۶۴.۱)$$

و صفرنیز ماتریس صفر از مرتبه $M \times M$ است. [۳]
همچنین ماتریس عملگر انتگرال برای متغیر t به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\int_0^t \Psi^C(\varsigma, t) d\varsigma = P_t^C \Psi^C(x, t),$$

،

$$\int_0^t \Psi^c(x, \varsigma) d\varsigma = \int_0^t (\Psi^c(x) \otimes \Psi^c(\varsigma)) d\varsigma = \Psi^c(x) \otimes \left(\int_0^t \Psi^c(\varsigma) d\varsigma \right)$$

$$= \Psi(x) \otimes \begin{bmatrix} \int_0^t \psi_0^c(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^t \psi_1^c(\varsigma) d\varsigma \\ \int_0^t \psi_{{}^2}^c(\varsigma) d\varsigma \\ \vdots \\ \int_0^t \psi_N^c(\varsigma) d\varsigma \end{bmatrix} = \Psi(x) \otimes \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_{{}^2}(t) \\ \vdots \\ a_N(t) \end{bmatrix},$$

$$, \simeq I \Psi^c(x) \otimes P^c \Psi^c(t) = (I \otimes P^c)(\Psi^c(x) \otimes \Psi^c(t)) = P_t^c \Psi^c(x, t)$$

$$P_t^C = I \otimes P^C \text{ که}$$

۲.۶.۱ ماتریس عملگر انتگرال چبیشف برای توابع چندمتغیره

ماتریس عملگر انتگرال چبیشف $\psi^c(x, t)$ برای توابع چند متغیره را به صورت زیر تعریف می‌کنیم [۱۲]:

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^x \Psi^C(x', t') dx dt &= P_{xt}^C \Psi^C(x, t), \\ \int_0^t \int_0^x \Psi^c(x', t') dx dt &= \int_0^t \int_0^x \Psi^c(x') \otimes \Psi^c(t') dx' dt' \\ &= \left(\int_0^x \Psi^c(x') dx' \right) \otimes \left(\int_0^t \Psi^c(t') dt' \right) \\ &= P^c \Psi^c(x) \otimes P^c \Psi^c(t) \\ &= (P^c \otimes P^c) \Psi^c(x, t). \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$\int_0^t \int_0^x \Psi^c(x', t') dx dt = P_{xt}^c \Psi^c(x, t),$$

که در آن

$$P_{xt}^c = P^c \otimes P^c.$$

۳.۶.۱ مثال‌ها

مثال ۱.۶.۱. [۳] معادله انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & (۶۵.۱) \\ & \begin{cases} \int_0^x \left((۵ + x - t)u(t) + \left(\frac{x}{۴} + t\right)v(t)w(t) \right) dt = \frac{1}{۴۸}x^6 + \frac{19}{۴۷۰}x^5 + \frac{19}{۷۴}x^4 + \frac{7}{۴}x^3 + x^2 + ۵x, \\ \int_0^x \left(\left(\frac{x}{۴} + t\right)u(t) + (۳ + x - t)v(t) + \frac{1}{۴}(x^2 - t^2)w(t) \right) dt = \frac{1}{۴۴}x^5 + \frac{35}{۴۸۸}x^4 + \frac{17}{18}x^3 + \frac{5}{۴}x^2 + \frac{9}{۴}x, \\ \int_0^x \left(tu(t)v(t) - xt v^2(t) - ۵w(t) \right) dt = -\frac{1}{۵۴}x^7 + \frac{1}{۷۴}x^6 - \frac{1}{۴}x^5 + \frac{17}{۹۶}x^4 - \frac{9}{۸}x^3 - \frac{1}{۴}x^2 - \frac{1}{۳}x, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

با جواب دقیق $u(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ ، $v(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}$ ، $w(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ با استفاده از روش موجک چبیشف و حل دستگاه غیرخطی حاصل، نتایج زیر به دست می‌آید.

$$C_1 = [1/370909608, 0/1107744910, 0/02796071583, -0/3904883363 \times 10^{-5}, \\ -0/3849125038 \times 10^{-5}, -0/290119063 \times 10^{-5}]^T,$$

$$C_2 = [2/036637098, 0/1477068045, 0/03692842611, -0/2315201546 \times 10^{-5}, \\ -0/2139368296 \times 10^{-5}, 0/1528559747 \times 10^{-5}]^T,$$

$$C_3 = [1/148875490, 0/2215642788, 0/5944442817 \times 10^{-5}, 0/7599016308 \times 10^{-5}, \\ 0/6251581812 \times 10^{-5}, 0/8638907550 \times 10^{-5}]^T.$$

بنابراین جواب تقریبی به صورت زیر است:

$$u(x) \approx C_1^T \psi(x) = -0/001676110122x^5 + 0/003634336424x^4 - 0/002695611180x^3 \\ + 0/2507910494x^2 - 0/00007776845858x + 1/000001158,$$

$$v(x) \approx C_2^T \psi(x) = 0/0008830950267x^5 - 0/001898743184x^4 + 0/001397379211x^3 \\ + 0/3329250622x^2 + 0/00004044331183x + 1/499999358,$$

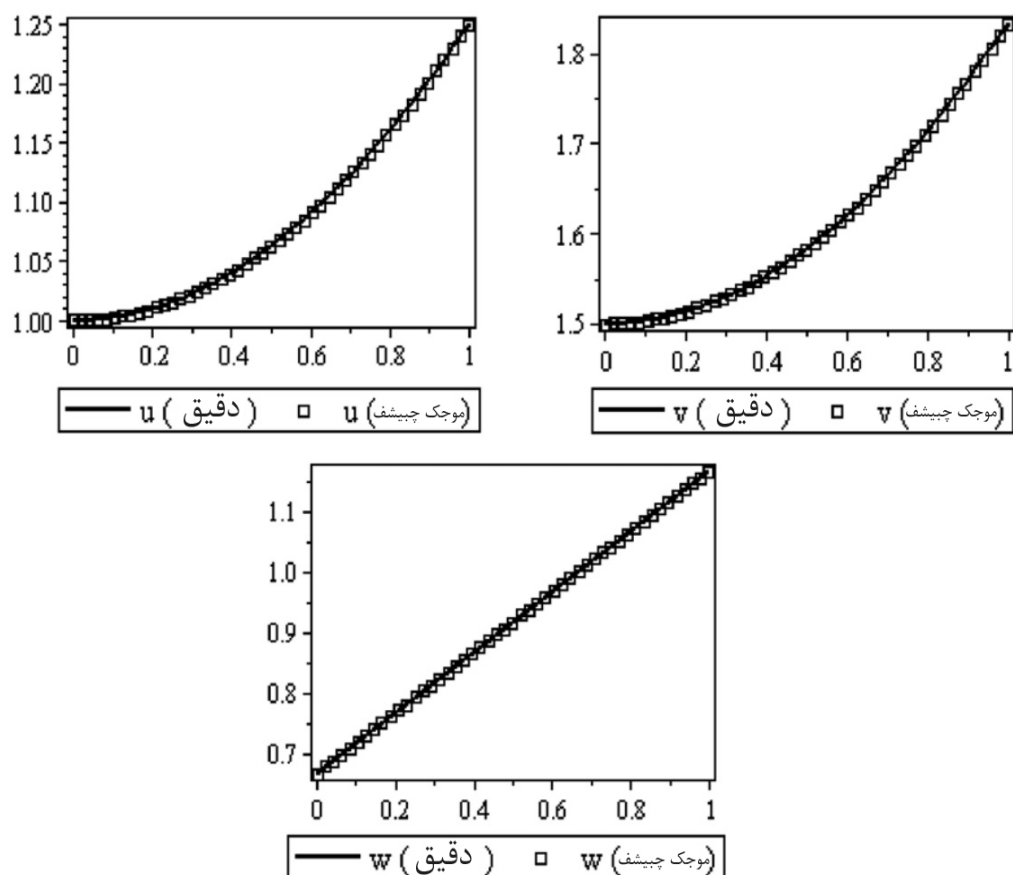
$$w(x) \approx C_3^T \psi(x) = 0/004990957212x^5 - 0/01157446124x^4 + 0/009386241600x^3 \\ - 0/003128439331x^2 + 0/5003793796x + 0/6666569385.$$

مقادیر جوابهای دقیق، تقریبی و خطاهای مطلق در جدول ۳.۱ ارائه شده‌اند و نمودار جواب دقیق و جواب تقریبی در شکل ۱.۱ نشان داده شده است.

جدول ۳.۱: نتایج عددی مثال ۱.۶.۱

x	(دقیق) (u)	(چبیشف) (u)	خطای $(u(x))$	(دقیق) (v)	(چبیشف) (v)	خطای $(v(x))$	(دقیق) (w)	(چبیشف) (w)	خطای $(w(x))$
۰	۱	۱/۰۰۰۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۱۱۵۸	۱/۵	۱/۴۹۹۹۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰۶۴۲	۰/۶۶۶۶۶	۰/۶۶۶۶۵	۰/۰۰۰۰۰۰۹۷۲۸۲
۰/۲	۱/۰۱	۱/۰۱۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۹۵۹۹	۱/۵۱۳۳۳	۱/۵۱۳۳۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰۴۶۰۵	۰/۷۶۶۶۶	۰/۷۶۶۶۵	۰/۰۰۰۰۰۰۸۲۱۹
۰/۴	۱/۰۴	۱/۰۳۹۹۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۳۴۹	۱/۵۵۳۳۳	۱/۵۵۳۳۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۷۹۲	۰/۸۶۶۶۶	۰/۸۶۶۶۶	۰/۰۰۰۰۰۰۳۰۰۵۹
۰/۶	۱/۰۹	۱/۰۸۹۹۹	۰/۰۰۰۰۰۰۰۲۳۰۱۶	۱/۶۲	۱/۶۲۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۱۰۷۲۶	۰/۹۶۶۶۶	۰/۹۶۶۶۷	۰/۰۰۰۰۰۰۷۱۳۶۲
۰/۸	۱/۱۶	۱/۱۶۰۰۰	۰/۰۰۰۰۰۰۰۴۴۵۸۳	۱/۷۱۳۳۳	۱/۷۱۳۳۳	۰/۰۰۰۰۰۰۰۲۴۷۵۳	۱/۰۶۶۶۶	۱/۰۶۶۶۵	۰/۰۰۰۰۰۰۸۱۳۲۴
۱	۱/۲۵	۱/۲۴۹۹۷	۰/۰۰۰۰۰۰۲۲۹۴۵۹	۱/۸۳۳۳۳	۱/۸۳۳۴۶	۰/۰۰۰۰۰۰۱۳۲۶۱۲	۱/۱۶۶۶۶	۱/۱۶۶۷۱	۰/۰۰۰۰۰۰۴۳۹۴۹۶

شکل ۱.۱: مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۱.۶.۱



مثال ۲.۶.۱. [۳] معادله ولترا از درجه یک زیر را با جواب اولیه $u(x) = x^2$ و $v(x) = x$ در نظر بگیرید.

$$\begin{cases} \int_0^x (1 - x^2 + t^2)(u(t) + v^3(t))dt = -\frac{1}{12}x^6 - \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3, \\ \int_0^x (5 + x - t)(u^3(t) - v(t))dt = \frac{1}{56}x^8 + \frac{5}{7}x^7 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{6}x^2. \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (66.1)$$

فرض کنید

$$\begin{aligned} u(x) &\simeq C_1^T \psi(x), & v(x) &\simeq C_2^T \psi(x). \\ u^3(x) &\simeq Y_1^T \psi(x), & v^3(x) &\simeq Y_2^T \psi(x). \\ -\frac{1}{12}x^6 - \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 &\simeq F_1^T \psi(x). \\ \frac{1}{56}x^6 + \frac{5}{7}x^5 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{5}{2}x^3 &\simeq F_2^T \psi(x). \\ (1 - x^2 + t^2) &\simeq \psi^T(x) K_1 \psi(t). \\ (5 + x - t) &\simeq \psi^T(x) K_2 \psi(t). \end{aligned}$$

معادله اول به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{cases} F_1^T \psi(x) = \psi^T(x) K_1 \int_0^x \psi(t) \psi^T(t) (C_1 + Y_2) dt = \psi^T(x) K_1 \tilde{Y}_1 P \psi(x), \\ F_2^T \psi(x) = \psi^T(x) K_2 \int_0^x \psi(t) \psi^T(t) (Y_1 - C_2) dt = \psi^T(x) K_2 \tilde{Y}_2 P \psi(x). \end{cases} \quad (67.1)$$

$W_n(x) \psi^T(x)$ را در دو طرف سیستم (۶۶.۱) ضرب می‌کنیم، سپس از طرفین انتگرال $\int_0^1 (\cdot) dx$ می‌گیریم و سیستم حل می‌شود. بردار عناصر C_1 و C_2 به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} C_1 &= [0.4700121513, 0.4431403268, 0.1108030029, 0.00002342689770, \\ &0.00003248339560, 0.00004361621557]^T, \\ C_2 &= [0.6266750242, 0.4430699839, 0.00002475338584, -0.00003950954832, \\ &0.00002662956111, -0.00004993764185]^T. \end{aligned}$$

جواب‌های زیر حاصل می‌شود:

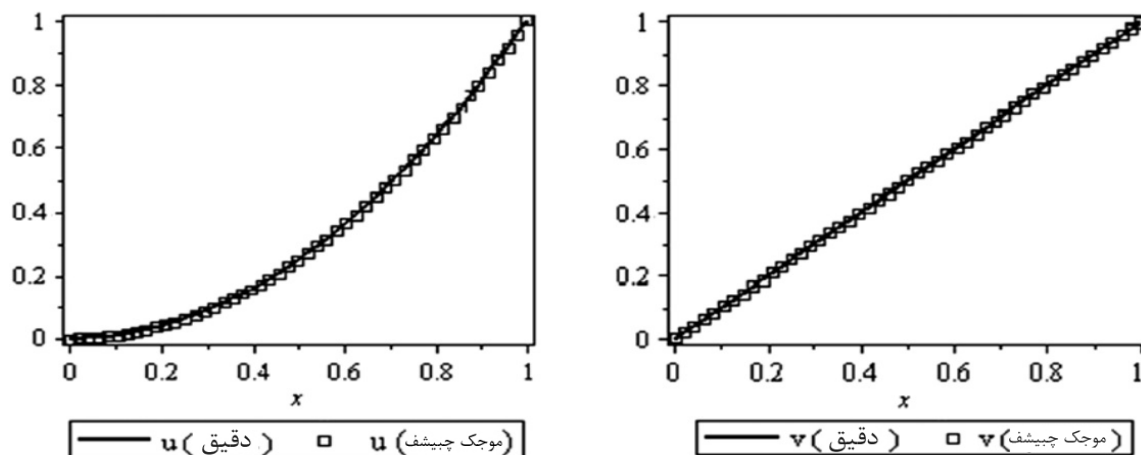
$$\begin{aligned} u(x) &\simeq C_1^T \psi(x) = 0.2519840204x^5 - 0.5830434600x^4 + 0.4658408778x^3 \\ &+ 0.9851318713x^2 + 0.001601910954x - 0.00002607035437, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x) &\simeq C_2^T \psi(x) = -0.2885048049x^5 + 0.7597237616x^4 - 0.7222939205x^3 \\ &+ 0.2971053030x^2 + 0.9950969843x - 0.00002222967372. \end{aligned}$$

در جدول ۴.۱ مقادیر جواب و خطاهای مطلق در برخی از مقادیر x و نمودار جواب‌های دقیق و تقریبی در شکل و تقریب در شکل؟؟ نشان داده شده‌است. مقایسه جواب‌های بدست آمده با استفاده از روش تجزیه آدومیان^{۲۰} در [۱۵] و نتایجی از این روش را نشان می‌دهد که خطای مطلق روش موجک چبیشف کمتر از خطای مطلق روش تجزیه آدومیان است.

²⁰ Adomian

شکل ۲.۱: مقایسه جواب‌های دقیق و تقریبی مثال ۲.۶.۱



جدول ۴.۱: نتایج عددی مثال ۲.۶.۱

x	(u دقیق)	(u چپیشف)	خطای (u(x))	(v دقیق)	(v چپیشف)	خطای (v(x))
۰	۰	-۰/۰۰۰۰۲۶۰۷۰۳	۰/۰۰۰۰۲۶۰۷۰۳۵	۰	۰/۰۰۰۰۲۲۲۲۹۶۷۳۷۲	۰/۰۰۰۰۲۲۲۲۹۶۷۳۷۲
		۵۴۳۷	۴۳۷			
۰/۲	۰/۰۴	۰/۰۳۹۹۸۷۰۵۹۳	۰/۰۰۰۰۱۲۹۶۴۰۷۴۳۷	۰/۲	۰/۱۹۹۹۶۴۶۰۳۰	۰/۰۰۰۰۳۵۳۹۹۶۸۳۶
۰/۴	۰/۱۶	۰/۱۵۹۹۵۲۶۱۵۴	۰/۰۰۰۰۱۷۳۸۴۵۶۷۷۷	۰/۴	۰/۴۰۰۰۴۱۵۵۸۱	۰/۰۰۰۰۴۱۵۵۸۱۱۹۷
۰/۵	۰/۳۶	۰/۳۶۰۰۴۷۸۹۷۴	۰/۰۰۰۰۴۷۸۹۷۳۴۷۰۳	۰/۶	۰/۵۹۹۹۷۷۳۳۶۱	۰/۰۰۰۰۲۲۶۶۳۸۷۰۳
۰/۸	۰/۶۴	۰/۶۳۹۹۶۶۴۶۱۲	۰/۰۰۰۰۳۳۵۳۸۷۵۹۳۷	۰/۸	۰/۷۹۹۹۹۷۷۳۴۶	۰/۰۰۰۰۰۲۲۶۵۳۳۷۳
۱	۱	۱/۰۰۰۱۸۵۸۵۶	۰/۰۰۰۱۸۵۸۵۵۷۱۹۶	۱	۰/۹۹۹۹۲۲۳۴۹	۰/۰۰۰۰۷۷۶۸۵۰۴۷۳

۷.۱ نتیجه‌گیری

به دست آوردن جواب‌های کلاسیک معادلات دیفرانسیل جزئی همیشه امکان پذیر نیست. بنابراین برای حل این دسته از معادلات، از روش‌های تقریبی استفاده می‌شود. در این فصل به معرفی موجک‌های لژاندر و چبیشف پرداختیم، سپس با معرفی ماتریس‌های عملگر انتگرال برای موجک‌های لژاندر و چبیشف یک شکل کلی برای محاسبه این ماتریس‌ها ارائه شد. سپس کاربرد پایه‌های ماتریس‌های عملگر لژاندر و چبیشف همراه با ماتریس‌های عملگر آن‌ها در حل معادلات دیفرانسیل مورد بررسی قرار گرفت. در پایان مثال‌های عددی برای اثبات کارایی این روش ارائه شده است.

فصل ۲

آنالیز همگرایی و برآورد خطا برای مسائل مقدار اولیه جزئی

۱.۲ مقدمه

در این فصل به همگرایی بسط موجک لژاندر و چبیشف، همچنین آنالیز همگرایی و تخمین خطای تقریب مربوطه با استفاده از موجک لژاندر و چبیشف می‌پردازیم. برای بررسی این روش‌ها تحت شرایط داده شده از چندین قضیه و لم استفاده شده است.

۲.۲ همگرایی بسط موجک لژاندر

قضیه ۱.۲.۲. [۸] اگر تابع $f \in L^2([0, 1])$ و دارای مشتق مرتبه دوم کراندار باشد، به‌طوری که

$|f''(x)| \leq M$ ، آنگاه سری موجک لژاندر تابع $f(x)$ به طور یکنواخت به تابع $f(x)$ همگراست، یعنی:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \Psi_{nm}(x),$$

که در آن $C_{nm} = \langle f(x), \Psi_{nm}(x) \rangle$.

برهان.

$$C_{nm} = \int_0^1 f(x) \Psi_{n,m}(x) dx = \int_{\frac{\hat{n}-1}{\varphi^k}^{\frac{\hat{n}+1}{\varphi^k}} f(x) \left(\frac{\varphi^m + 1}{\varphi} \right)^{\frac{1}{\varphi}} \varphi^{\frac{k}{\varphi}} P_m(\varphi^k x - \hat{n}) dx$$

حال فرض می‌کنیم $\varphi^k x - \hat{n} = t$ پس $dx = \frac{1}{\varphi^k} dt$.

$$\begin{aligned} C_{nm} &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{\hat{n}+t}{\varphi^k}\right) \left(\frac{\varphi^m+1}{\varphi}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \varphi^{\frac{k}{\varphi}} P_m(t) \frac{1}{\varphi^k} dt \\ &= \left(\frac{\varphi^m+1}{\varphi^{k+1}}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \int_{-1}^1 f\left(\frac{\hat{n}+t}{\varphi^k}\right) P_m(t) dt \\ &= \left(\frac{1}{\varphi^{k+1}(\varphi^m+1)}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \left(f\left(\frac{\hat{n}+t}{\varphi^k}\right) (P_{m+1}(t) - P_{m-1}(t)) \right) \Big|_{-1}^1 \\ &\quad - \left(\frac{1}{\varphi^{k+1}(\varphi^m+1)}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \int_{-1}^1 f'\left(\frac{\hat{n}+t}{\varphi^k}\right) \frac{1}{\varphi^k} (P_{m+1}(t) - P_{m-1}(t)) dt \\ &= - \left(\frac{1}{\varphi^{k+1}(\varphi^m+1)}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \int_{-1}^1 f'\left(\frac{\hat{n}+t}{\varphi^k}\right) \frac{1}{\varphi^k} (P_{m+1}(t) - P_{m-1}(t)) dt \\ &= - \left(\frac{1}{\varphi^{k+1}(\varphi^m+1)}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \int_{-1}^1 f'\left(\frac{\hat{n}+t}{\varphi^k}\right) (P_{m+1}(t) - P_{m-1}(t)) dt \\ &= - \left(\frac{1}{\varphi^{k+1}(\varphi^m+1)}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \int_{-1}^1 f'\left(\frac{\hat{n}+t}{\varphi^k}\right) (P_{m+1}(t) - P_{m-1}(t)) dt \\ &\quad - \left(\frac{1}{\varphi^{k+1}(\varphi^m+1)}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \int_{-1}^1 f'\left(\frac{\hat{n}+t}{\varphi^k}\right) d\left(\frac{P_{m+2}(t) - P_m(t)}{\varphi^{m+2}} - \frac{P_m(t) - P_{m-2}(t)}{\varphi^{m-1}}\right) \\ &= - \left(\frac{1}{\varphi^{k+1}(\varphi^m+1)}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \int_{-1}^1 f''\left(\frac{\hat{n}+t}{\varphi^k}\right) \left(\frac{P_{m+1}(t) - P_m(t)}{\varphi^{m+2}} - \frac{P_m(t) - P_{m-2}(t)}{\varphi^{m-1}}\right) dt \\ &= \left(\frac{1}{\varphi^{k+1}(\varphi^m+1)}\right)^{\frac{1}{\varphi}} \int_{-1}^1 f''\left(\frac{\hat{n}+t}{\varphi^k}\right) \left(\frac{P_{m+2}(t) - P_m(t)}{\varphi^{m+2}} - \frac{P_m(t) - P_{m-2}(t)}{\varphi^{m-1}}\right) dt \end{aligned}$$

در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-1}^1 f'' \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) \left(\frac{P_{m+2}(t) - P_m(t)}{2m+3} - \frac{P_m(t) - P_{m-2}(t)}{2m-1} \right) dt \right|^2 \\
 &= \left| \int_{-1}^1 f'' \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) \frac{(2m-1)P_{m+2}(t) - (2m+2)P_m(t) + (2m+3)P_{m-2}(t)}{(2m+3)(2m-1)} dt \right|^2 \\
 &\leq \int_{-1}^1 \left| f'' \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) \right|^2 dt \int_{-1}^1 \left| \frac{(2m-1)P_{m+2}(t) - (2m+2)P_m(t) + (2m+3)P_{m-2}(t)}{(2m+3)(2m-1)} \right|^2 dt \\
 &< 2m^2 \int_{-1}^1 \frac{(2m-1)^2 P_{m+2}(t) + (2m+2)^2 P_m(t) + (2m+3)^2 P_{m-2}(t)}{(2m+3)^2 (2m-1)^2} dt \\
 &= \frac{2m^2}{(2m+3)^2 (2m-1)^2} \left[(2m-1)^2 \frac{2}{2m+5} + (2m+2)^2 \frac{2}{2m+1} + (2m+3)^2 \frac{2}{2m-3} \right] \\
 &< \frac{2m^2}{(2m+3)^2 (2m-1)^2} \left[\frac{2(2m-1)^2 + 8(2m+1)^2 + 2(2m+3)^2}{2m-3} \right] \\
 &< \frac{2m^2}{(2m+3)^2 (2m-1)^2} \frac{12(2m+3)^2}{2m-3} = \frac{24m^2}{(2m-1)^2 (2m-3)}.
 \end{aligned}$$

در نتیجه:

(۱.۲)

$$\left| \int_{-1}^1 f'' \left(\frac{\hat{n} + t}{2^k} \right) \left(\frac{P_{m+2}(t) - P_m(t)}{2m+3} - \frac{P_m(t) - P_{m-2}(t)}{2m-1} \right) dt \right| < \frac{24^{\frac{1}{2}} m}{(2m-1)(2m-3)^{\frac{1}{2}}}.$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
 |C_{nm}| &< \frac{12^{\frac{1}{2}} m}{2^{\frac{\Delta k}{2}} (2m+1)^{\frac{1}{2}} (2m-1)(2m-3)^{\frac{1}{2}}} \\
 &< 12^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2^{\frac{\Delta k}{2}} (2m-3)^2} \\
 &< 12^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(2n)^{\frac{\Delta}{2}} (2m-3)^2}.
 \end{aligned} \tag{۲.۲}$$

لذا سری عددی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm}, \tag{۳.۲}$$

همگراست، بنابراین سری توابع

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \Psi_{n,m}(x), \tag{۴.۲}$$

نیز همگرا می‌باشد، پس سری موجک لژاندر تابع به طور یکنواخت به $f(x)$ همگراست. $\square$

۳.۲ همگرایی بسط موجک چبیشف

لم ۱.۳.۲. [۱] اگر سری موجک چبیشف تابع $f(x)$ به طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه سری موجک چبیشف به طور یکنواخت به $f(x)$ همگراست.

برهان. فرض کنید

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \Psi_{nm}(x), \quad (5.2)$$

که $C_{nm} = \langle f(x), \Psi_{nm}(x) \rangle_{w_k}$. دو طرف (۵.۲) را در $\Psi_{pq}(x)w_k(x)$ ضرب می‌کنیم که p, q ثابت هستند و از طرفین در بازه $[0, 1]$ انتگرال می‌گیریم، داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) \Psi_{pq}(x) w_k(x) dx &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \Psi_{nm}(x) \Psi_{pq}(x) \\ &\quad w_k(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \int_0^1 \Psi_{nm}(x) \Psi_{pq}(x) w_k(x) dx = C_{pq} \end{aligned} \quad (6.2)$$

بنابراین

$$\langle g(x), \Psi_{nm}(x) \rangle_{w_k} = C_{nm} \quad (7.2)$$

برای $n = 1, 2, \dots$ و $m = 0, 1, \dots$ در نتیجه f, g به طور یکنواخت یکسانند، بنابراین $f(x) = g(x)$ وقتی $0 \leq x \leq 1$. $\square$

قضیه ۱.۳.۲. [۱] اگر $f \in L^2([0, 1])$ دارای مشتق مرتبه دوم کراندار باشد، یعنی $|f''(X)| \leq M$ آنگاه سری موجک چبیشف آن به طور یکنواخت به $f(x)$ همگراست یعنی:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \Psi_{nm}(x)$$

برهان. باتوجه به (۷.۲) داریم:

$$C_{nm} = \int_0^1 f(x) \Psi_{nm}(x) w_k(x) dx = \int_{\frac{(n-1)}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} 2^{\frac{k}{2}} f(x) \quad (8.2)$$

$$\tilde{T}_m(2^k x - 2n + 1) w(2^k m - 2n + 1) dx. \quad (9.2)$$

اگر $m > 1$ با جایگذاری $2^k x - 2n + 1 = \cos \theta$ در ۹.۲ داریم:

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} \int_0^\pi f\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos m\theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{k}{2}} \sqrt{\pi}} f\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) \left(\frac{\sin m\theta}{m}\right) \Big|_0^\pi \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{k}{2}} m \sqrt{\pi}} \int_0^\pi f'\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) \sin m\theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2^{\frac{k}{2}} 2^{\frac{k}{2}} m \sqrt{2\pi}} f'\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) \left(\frac{\sin(m-1)\theta}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\theta}{m+1}\right) \Big|_0^\pi \\ &\quad + \frac{1}{2^{\frac{\Delta k}{2}} m \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi f''\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) h_m(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (10.2)$$

که

$$h_m(\theta) = \sin \theta \left(\frac{\sin(m-1)\theta}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\theta}{m+1} \right)$$

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} |C_{nm}| &= \left| \frac{1}{2^{\frac{\Delta k}{2}} m \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi f''\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) h_m(\theta) d\theta \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{2^{\frac{\Delta k}{2}} m \sqrt{2\pi}} \right) \int_0^\pi \left| f''\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) h_m(\theta) \right| d\theta \\ &\leq \left(\frac{m}{2^{\frac{\Delta k}{2}} m \sqrt{2\pi}} \right) \int_0^\pi |h_m(\theta)| d\theta. \end{aligned} \quad (11.2)$$

با این حال :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |h_m(\theta)| d\theta &= \int_0^\pi \left| \sin \theta \left(\frac{\sin(m-1)\theta}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\theta}{m+1} \right) \right| d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \left| \frac{\sin \theta \sin(m-1)\theta}{m-1} \right| + \left| \frac{\sin \theta \sin(m+1)\theta}{m+1} \right| d\theta \\ &\leq \frac{2m\pi}{(m^2 - 1)}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

از آن جایی که $n \leq 2^{k-1}$ داریم:

$$|C_{nm}| < \frac{\sqrt{2\pi} m}{(2n)^{\frac{\Delta}{2}} (m^2 - 1)}$$

اگر $m = 1$ با استفاده از (۱۰.۲) داریم:

$$|C_{n1}| < \frac{\sqrt{2\pi}}{(2n)^{\frac{\Delta}{2}}} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|.$$

از این رو سری عددی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{nm},$$

همگراست. برای $m = 0$ تابع $\Psi_{n=1}^{\infty}$ یک تابع متعامد ساخته شده با توجه به تابع وزن $w(t)$ تشکیل می‌دهد، بنابراین

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{n0} \Psi_{n0}(x),$$

همگراست. از طرفی دیگر داریم:

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \Psi_{nm}(x) \right| \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} C_{n0} \Psi_{n0}(x) \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |C_{nm}| |\Psi_{nm}(x)| \leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |C_{nm}| \right| < \infty.$$

بنابراین طبق لم ۱.۳.۲ مجموعه

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{nm} \Psi_{nm}(x),$$

□

به طور یکنواخت به $f(x)$ همگراست.

۴.۲ آنالیز همگرایی با استفاده از موجک لژاندر

قضیه ۱.۴.۲. [۱۲] فرض کنید $u(x, t)$ یک تابع پیوسته تعریف شده در Λ با مشتق دوم مختلط کراندار باشد و برای ثابت B داشته باشیم: $\left| \frac{\partial^4(u(x, t))}{\partial x^2 \partial t^2} \right| \leq B$ آنگاه

الف) $u(x, t)$ می‌تواند به عنوان یک مجموع نامتناهی از موجک لژاندر و همگرایی یکنواخت سری‌ها به تابع $u(x, t)$ گسترش یابد، به طوری که

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} U_{nmn'm'}^L \Psi_{nmn'm'}^L(x, t)$$

$$U_{n,m,n',m'}^L = \langle u(x, t), \Psi_{n,m,n',m'}^L(x, t) \rangle \quad \text{که در آن}$$

(ب)

$$\|\varepsilon_{u,k,M,k',M'}\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq \frac{36B^2}{45k+5k'} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{n'=2^{k'-1}+1}^{\infty} \sum_{m'=M'}^{\infty} \frac{1}{(2m-3)^4 (2m'-3)^4}$$

که در آن

$$\|\varepsilon_{u,k,M,k',M'}\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \int_0^1 \int_0^1 \left| u(x, t) - \sum_{n=1}^{2^{k-1}+1} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=1}^{2^{k'-1}+1} \sum_{m'=0}^{M'-1} U_{n,m,n',m'}^L \Psi_{n,m,n',m'}^L \right|^2 dx dt.$$

برهان. الف) می‌دانیم:

$$U_{n,m,n',m'}^L = \int_0^1 \int_0^1 u(x,t) \Psi_{n,m,n',m'}^L(x,t) dx dt.$$

با استفاده از تعریف موجک لژاندر به دست می‌آوریم:

$$U_{n,m,n',m'}^L = \int_0^1 \int_{\frac{n}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} u(x,t) (2^m + 1)^{1/2} 2^{(k-1)/2} P_m(2^k x - 2n + 1) \Psi_{n',m'}^L(t) dx dt.$$

قرار می‌دهیم $2^k x - 2n + 1 = s$ بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} U_{n,m,n',m'}^L &= \int_0^1 \int_{-1}^1 u\left(\frac{s + 2n - 1}{2^k}, t\right) (2^m + 1)^{1/2} 2^{-(k+1)/2} P_m(s) \Psi_{n',m'}^L(t) ds dt. \\ &= \frac{2^{-(k+1)/2}}{(2^m + 1)^{1/2}} \int_0^1 \Psi_{n',m'}^L(t) \int_{-1}^1 u\left(\frac{s + 2n - 1}{2^k}, t\right) d(P_{m+1}(s) - P_{m-1}(s)) ds dt. \end{aligned}$$

با انتگرال گیری داریم:

$$\begin{aligned} U_{n,m,n',m'}^L &= (-1)^{\frac{2^{-(k+1)/2}}{2^k(2^m + 1)^{1/2}}} \int_0^1 \Psi_{n',m'}^L(t) \int_{-1}^1 \frac{\partial u\left(\frac{s + 2n - 1}{2^k}, t\right)}{\partial s} \\ &\quad (P_{m+1}(s) - P_{m-1}(s)) ds dt \\ &= \frac{-1}{2^{\frac{3k+1}{2}}(2^m + 1)^{1/2}} \int_0^1 \Psi_{n',m'}^L(t) \int_{-1}^1 \frac{\partial u\left(\frac{s + 2n - 1}{2^k}, t\right)}{\partial s} \\ &\quad \times \left(\frac{P'_{m+2}(s) - P'_m(s)}{2^m + 3} - \frac{P'_m(s) - P'_{m-2}(s)}{2^m - 1} \right) ds dt. \end{aligned}$$

دوباره با استفاده از انتگرال بخش‌ها داریم:

$$\begin{aligned} U_{n,m,n',m'}^L &= \frac{1}{2^{\frac{5k+1}{2}}(2^m + 1)^{1/2}} \int_0^1 \Psi_{n',m'}^L(t) \int_{-1}^1 \frac{\partial^2 u\left(\frac{s + 2n - 1}{2^k}, t\right)}{\partial s^2} \\ &\quad \left(\frac{P_{m+2}(s) - P_m(s)}{2^m + 3} - \frac{P_m(s) - P_{m-2}(s)}{2^m - 1} \right) ds dt \quad (13.2) \end{aligned}$$

با توجه به تعریف $\Psi_{n',m'}^L(t)$ داریم:

$$U_{n,m,n',m'}^L = \frac{1}{2^{\frac{5k+1}{2}}(2^m + 1)^{1/2}} \int_{\frac{n'}{2^{k'-1}}}^{\frac{n'}{2^{k'-1}}} (2^{m'} + 1)^{1/2} 2^{(k'-1)/2}$$

$$P_{m'}(\mathfrak{Y}^{k'}t - \mathfrak{Y}n' + 1) \times \int_{-1}^1 \frac{\partial^{\mathfrak{Y}} u\left(\frac{s + \mathfrak{Y}n - 1}{\mathfrak{Y}^k}, t\right)}{\partial s^{\mathfrak{Y}}} \left(\frac{P_{m+\mathfrak{Y}}(s) - P_m(s)}{\mathfrak{Y}m + \mathfrak{Y}} - \frac{P_m(s) - P_{m-\mathfrak{Y}}(s)}{\mathfrak{Y}m - 1} \right) ds dt. \quad (14.2)$$

با جایگذاری: $\mathfrak{Y}^{k'}t - \mathfrak{Y}n' + 1 = r$ داریم:

$$U_{n,m,n',m'}^L = \frac{1}{\mathfrak{Y}^{\frac{\Delta k + 1}{\mathfrak{Y}}} \mathfrak{Y}^{\frac{\Delta k' + 1}{\mathfrak{Y}}} (\mathfrak{Y}m + 1)^{1/\mathfrak{Y}} (\mathfrak{Y}m' + 1)^{1/\mathfrak{Y}}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial^{\mathfrak{F}} u\left(\frac{s + \mathfrak{Y}n - 1}{\mathfrak{Y}^k}, \frac{r + \mathfrak{Y}n' - 1}{\mathfrak{Y}^{k'}}\right)}{\partial r^{\mathfrak{Y}} \partial s^{\mathfrak{Y}}} \sigma_m(s) \sigma_{m'}(r) ds dt,$$

که در آن

$$\sigma_m(s) = \left(\frac{P_{m+\mathfrak{Y}}(s) - P_m(s)}{\mathfrak{Y}m + \mathfrak{Y}} - \frac{P_m(s) - P_{m-\mathfrak{Y}}(s)}{\mathfrak{Y}m - 1} \right),$$

و

$$\sigma_{m'}(r) = \left(\frac{P_{m'+\mathfrak{Y}}(r) - P_{m'}(r)}{\mathfrak{Y}m' + \mathfrak{Y}} - \frac{P_{m'}(r) - P_{m'-\mathfrak{Y}}(r)}{\mathfrak{Y}m' - 1} \right).$$

بنابراین داریم:

$$(15.2)$$

$$|U_{n,m,n',m'}^L|^{\mathfrak{Y}} \leq \frac{B^{\mathfrak{Y}}}{\mathfrak{Y}^{(\Delta k + \Delta k' + \mathfrak{Y})} (\mathfrak{Y}m + 1)(\mathfrak{Y}m' + 1)} \int_{-1}^1 |\sigma_m(s)|^{\mathfrak{Y}} ds \int_{-1}^1 |\sigma_{m'}(r)|^{\mathfrak{Y}} dr.$$

اکنون،

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |\sigma_m(s)|^{\mathfrak{Y}} ds &= \int_{-1}^1 \left(\frac{P_{m+\mathfrak{Y}}(s) - P_m(s)}{\mathfrak{Y}m + \mathfrak{Y}} - \frac{P_m(s) - P_{m-\mathfrak{Y}}(s)}{\mathfrak{Y}m - 1} \right)^{\mathfrak{Y}} ds \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{(\mathfrak{Y}m - 1)P_{m+\mathfrak{Y}}(s) - (\mathfrak{Y}m + \mathfrak{Y})P_m(s) + (\mathfrak{Y}m - \mathfrak{Y})P_{m-\mathfrak{Y}}(s)}{(\mathfrak{Y}m + \mathfrak{Y})(\mathfrak{Y}m - 1)} \right)^{\mathfrak{Y}} ds \\ &\leq \int_{-1}^1 \left(\frac{(\mathfrak{Y}m - 1)^{\mathfrak{Y}} P_{m+\mathfrak{Y}}^{\mathfrak{Y}}(s) - (\mathfrak{Y}m + \mathfrak{Y})^{\mathfrak{Y}} P_m^{\mathfrak{Y}}(s) + (\mathfrak{Y}m - \mathfrak{Y})^{\mathfrak{Y}} P_{m-\mathfrak{Y}}^{\mathfrak{Y}}(s)}{(\mathfrak{Y}m + \mathfrak{Y})^{\mathfrak{Y}} (\mathfrak{Y}m - 1)^{\mathfrak{Y}}} \right) ds \\ &\leq \frac{12(\mathfrak{Y}m + \mathfrak{Y})^{\mathfrak{Y}}}{(\mathfrak{Y}m + \mathfrak{Y})^{\mathfrak{Y}} (\mathfrak{Y}m - 1)^{\mathfrak{Y}} (\mathfrak{Y}m - \mathfrak{Y})^{\mathfrak{Y}}}. \end{aligned}$$

بنابراین به دست می‌آوریم:

$$\int_{-1}^1 |\sigma_m(s)|^{\mathfrak{Y}} ds \leq \frac{12}{(\mathfrak{Y}m - 1)^{\mathfrak{Y}} (\mathfrak{Y}m - \mathfrak{Y})^{\mathfrak{Y}}}. \quad (16.2)$$

به طور مشابه داریم:

$$\int_{-1}^1 |\sigma_{m'}(t)|^{\mathfrak{Y}} dt \leq \frac{12}{(\mathfrak{Y}m' - 1)^{\mathfrak{Y}} (\mathfrak{Y}m' - \mathfrak{Y})^{\mathfrak{Y}}}. \quad (17.2)$$

با گروه‌بندی معادلات (۱۵.۲) و (۱۶.۲) داریم:

$$|U_{n,m,n',m'}^L|^2 \leq \frac{144B^2}{2^{\delta k + \delta k'}(2m+1)(2m'+1)(2m-1)^2(2m'-1)^2(2m-3)(2m'-3)},$$

$$< \frac{36B^2}{2^{\delta k + \delta k'}(2m-3)^4(2m'-3)^4}. \quad (18.2)$$

از این رو سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} U_{nmn'm'}^L$ همگرایی مطلق هستند. بنابراین سری موجک لژاندر $u(x, t)$ همگرا است.

(ب)

$$\|\varepsilon_{u,k,M,k',M'}\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \left[\int_0^1 \int_0^1 |u(x, t) - \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=1}^{2^{k'-1}} \sum_{m'=0}^{M'-1} U_{nmn'm'}^L \Psi_{n,m,n',m'}^L|^2 dx dt \right]$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=2^{k-1}+1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{n'=2^{k'-1}+1}^{\infty} \sum_{m'=M'}^{\infty} |U_{nmn'm'}^L \Psi_{n,m,n',m'}^L|^2 dx dt$$

$$= \sum_{n=2^{k-1}+1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{n'=2^{k'-1}+1}^{\infty} \sum_{m'=M'}^{\infty} |U_{nmn'm'}^L|^2.$$

بنابراین داریم:

$$\|\varepsilon_{u,k,M,k',M'}\|_{L^2(\Lambda)}^2 = \sum_{n=2^{k-1}+1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{n'=2^{k'-1}+1}^{\infty} \sum_{m'=M'}^{\infty} |U_{nmn'm'}^L|^2 \quad (19.2)$$

جایی که آخرین برابری نرمال بودن $\Psi_{n,m,n',m'}^L$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین بنا به معادله (۱۸.۲)، (۱۹.۲) داریم:

$$\|\varepsilon_{u,k,M,k',M'}\|_{L^2(\Lambda)}^2 \leq \frac{36B^2}{2^{\delta k + \delta k'}} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{n'=2^{k'-1}+1}^{\infty} \sum_{m'=M'}^{\infty} \frac{1}{(2m-3)^4(2m'-3)^4}$$

لذا اثبات قضیه کامل می‌شود.

□

۵.۲ آنالیز همگرایی با استفاده از موجک‌های چبیشف

قضیه ۱.۵.۲. [۱۲] فرض کنید $u(x, t)$ یک تابع پیوسته روی $\Omega = ([0, 1) \times [0, 1))$ با مشتق دوم مختلط کراندار باشد و داشته باشیم: $|\frac{\partial^2(u(x, t))}{\partial x^2 \partial t^2}| \leq B$ آن‌گاه

الف) $u(x, t)$ را می‌توان به یک مجموع نامتناهی موجک چبیشف گسترش داد و همگرایی سری‌ها به $u(x, t)$ به طور یکنواخت است، به طوری که

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} U_{nmn'm'}^C \Psi_{nmn'm'}^C(x, t)$$

که در آن $U_{n,m,n',m'}^C = \langle u(x, t), \Psi_{n,m,n',m'}^C(x, t) \rangle_{L^2_{\omega}(\Omega)}$

(ب)

$$\|\varepsilon_{u,k,M,k',M'}\|_{L^2_{\omega}(\Omega)}^2 \leq \frac{2^{-\Delta(k+k')} B^2}{4} \sum_{n=2^{k-1}+1}^{\infty} \sum_{m=M}^{\infty} \sum_{n'=2^{k'-1}+1}^{\infty} \sum_{m'=M'}^{\infty} \frac{1}{(m-1)^4 (m'-1)^4}$$

که در آن

$$\|\varepsilon_{u,k,M,k',M'}\|_{L^2_{\omega}(\Omega)}^2 = \int_0^1 \int_0^1 |u(x, t) - \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=1}^{2^{k'-1}} \sum_{m'=0}^{M'-1} U_{n,m,n',m'}^C \Psi_{n,m,n',m'}^C(x, t)|^2 \omega(x, t) dx dt.$$

برهان. الف) ضرایب موجک چبیشف یک تابع پیوسته $u(x, t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$U_{n,m,n',m'}^C = \int_0^1 \int_0^1 u(x, t) \Psi_{n,m,n',m'}^C(x, t) \omega_n(x) \omega_{n'}(t) dx dt.$$

با استفاده از تعریف موجک چبیشف و قرار دادن $m, m' > 0$ داریم:

$$\begin{aligned} U_{n,m,n',m'}^C &= \int_0^1 \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} u(x, t) 2^{\frac{k}{2}} \overline{T}_m(2^k x - 2n + 1) \Psi_{n',m'}^C(t) \omega_n(x) \omega_{n'}(t) dx dt \\ &= 2^{\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} u(x, t) T_m(2^k x - 2n + 1) \\ &\quad \omega(2^k x - 2n + 1) \Psi_{n',m'}^C(t) \omega_{n'}(t) dx dt. \end{aligned}$$

قرار می‌دهیم $2^k x - 2n + 1 = y$ ، داریم:

$$\begin{aligned} U_{n,m,n',m'}^C &= 2^{-\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \Psi_{n',m'}^C(t) \omega_{n'}(t) \int_{-1}^1 u\left(\frac{y + 2n - 1}{2^k}, t\right) T_m(y) \omega(y) dy dt \\ &= 2^{-\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \Psi_{n',m'}^C(t) \omega_{n'}(t) \int_{-1}^1 \frac{u\left(\frac{y + 2n - 1}{2^k}, t\right)}{\sqrt{1 - y^2}} T_m(y) dy dt. \end{aligned}$$

با فرض $y = \cos \theta$ و تعریف موجک چبیشف رابطه زیر به دست می‌آید:

$$U_{n,m,n',m'}^C = 2^{-\frac{k}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \Psi_{n',m'}^C(t) \omega_{n'}(t) \int_0^{\pi} u\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}, t\right) \cos m \theta d\theta dt.$$

انتگرال بخش‌های بالا رابطه زیر را نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} U_{n,m,n',m'}^C &= 2^{-\frac{r_k}{r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \Psi_{n',m'}^C(t) \omega_{n'}(t) \int_0^\pi \frac{\partial u\left(\frac{\cos\theta + 2^{n-1}}{2^k}, t\right)}{\partial \theta} \frac{\sin m\theta}{m} \sin\theta d\theta dt \\ &= \frac{1}{2^m} 2^{-\frac{r_k}{r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \Psi_{n',m'}^C(t) \omega_{n'}(t) \int_0^\pi \frac{\partial u\left(\frac{\cos\theta + 2^{n-1}}{2^k}, t\right)}{\partial \theta} \\ &\quad (\cos(m-1)\theta - \cos(m+1)\theta) d\theta dt, \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned} U_{n,m,n',m'}^C &= \frac{1}{2^m} 2^{-\frac{r_k}{r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \Psi_{n',m'}^C(t) \omega_{n'}(t) \\ &\quad \left[\int_0^\pi \frac{\partial u\left(\frac{\cos\theta + 2^{n-1}}{2^k}, t\right)}{\partial \theta} \cos(m-1)\theta d\theta - \int_0^\pi \frac{\partial u\left(\frac{\cos\theta + 2^{n-1}}{2^k}, t\right)}{\partial \theta} \cos(m+1)\theta d\theta \right] dt. \end{aligned}$$

معادله بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$U_{n,m,n',m'}^C = 2^{-\frac{r_k}{r}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^1 \Psi_{n',m'}^C(t) \omega_{n'}(t) (I_1 - I_2) dt \quad (20.2)$$

جایی که

$$I_1 = \frac{1}{2^m} \int_0^\pi \frac{\partial u\left(\frac{\cos\theta + 2^{n-1}}{2^k}, t\right)}{\partial \theta} \cos(m-1)\theta d\theta,$$

و

$$I_2 = \frac{1}{2^m} \int_0^\pi \frac{\partial u\left(\frac{\cos\theta + 2^{n-1}}{2^k}, t\right)}{\partial \theta} \cos(m+1)\theta d\theta.$$

یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که:

$$I_1 = \frac{1}{2^m} \int_0^\pi \frac{\partial u\left(\frac{\cos\theta + 2^{n-1}}{2^k}, t\right)}{\partial \theta} \cos(m-1)\theta d\theta.$$

با استفاده از انتگرال بخش‌های بالا برای $m > 1$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2^m(m-1)2^k} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u\left(\frac{\cos\theta + 2^{n-1}}{2^k}, t\right)}{\partial \theta^2} \sin(m-1)\theta \sin\theta d\theta \\ &= \frac{2^{-k}}{2^m(m-1)} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u\left(\frac{\cos\theta + 2^{n-1}}{2^k}, t\right)}{\partial \theta^2} (\cos(m-2)\theta - \cos m\theta) d\theta \end{aligned}$$

و

$$I_2 = \frac{2^{-k}}{2^m(m+1)} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u\left(\frac{\cos\theta + 2^{n-1}}{2^k}, t\right)}{\partial \theta^2} (\cos m\theta - \cos(m+2)\theta) d\theta.$$

بنابراین برای $m > 1$ داریم:

$$I = I_1 - I_2 = \frac{2^{-k}}{2^m} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u\left(\frac{\cos\theta + 2^{n-1}}{2^k}, t\right)}{\partial \theta^2}$$

$$\left(\frac{\cos(m - \gamma)\theta - \cos m\theta}{m - 1} - \frac{\cos m\theta - \cos(m + \gamma)\theta}{m + 1} \right) d\theta$$

با استفاده از جایگذاری مقدار $I_1 - I_2$ در معادله (۲۰.۲) به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} U_{n,m,n',m'}^C &= \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{\gamma^{-\frac{\Delta k}{\gamma}}}{\gamma m} \int_0^1 \Psi_{n',m'}^C(t) \omega_{n'}(t) \int_0^\pi \frac{\partial^\gamma u\left(\frac{\cos\theta + \gamma n - 1}{\gamma^k}, t\right)}{\partial \theta^\gamma} \\ &\quad \times \left(\frac{\cos(m - \gamma)\theta - \cos m\theta}{m - 1} - \frac{\cos m\theta - \cos(m + \gamma)\theta}{m + 1} \right) d\theta dt \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{\gamma^{-\frac{\Delta k}{\gamma}}}{\gamma m} \int_{\frac{n'-1}{\gamma^{k'-1}}}^{\frac{n'}{\gamma^{k'-1}}} \gamma^{\frac{k'}{\gamma}} \bar{T}_{m'}(\gamma^{k'}t - \gamma n' + 1) \omega(\gamma^{k'}t - \gamma n' + 1) \int_0^\pi \frac{\partial^\gamma u\left(\frac{\cos\theta + \gamma n - 1}{\gamma^k}, t\right)}{\partial \theta^\gamma} \\ &\quad \times \left(\frac{\cos(m - \gamma)\theta - \cos m\theta}{m - 1} - \frac{\cos m\theta - \cos(m + \gamma)\theta}{m + 1} \right) d\theta dt \\ &= \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} \frac{\gamma^{-\frac{\Delta k}{\gamma}}}{\gamma m} \int_{\frac{n'-1}{\gamma^{k'-1}}}^{\frac{n'}{\gamma^{k'-1}}} \gamma^{\frac{k'}{\gamma}} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} T_{m'}(\gamma^{k'}t - \gamma n' + 1) \omega(\gamma^{k'}t - \gamma n' + 1) \int_0^\pi \frac{\partial^\gamma u\left(\frac{\cos\theta + \gamma n - 1}{\gamma^k}, t\right)}{\partial \theta^\gamma} \\ &\quad \times \left(\frac{\cos(m - \gamma)\theta - \cos m\theta}{m - 1} - \frac{\cos m\theta - \cos(m + \gamma)\theta}{m + 1} \right) d\theta dt. \end{aligned}$$

اگر قرار دهیم $\gamma^{k'}t - \gamma n' + 1 = \cos\theta'$ آنگاه با محاسبات مشابه به دست می‌آوریم:

$$U_{n,m,n',m'}^C = \frac{\gamma}{\pi} \frac{\gamma^{-\frac{k+k'}{\gamma}}}{\gamma^6 m m'} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial^\gamma u\left(\frac{\cos\theta + \gamma n - 1}{\gamma^k}, \frac{\cos\theta' + \gamma n' - 1}{\gamma^{k'}}\right)}{\partial \theta^\gamma \partial \theta'^\gamma} r_m(\theta) r_{m'}(\theta') d\theta d\theta'$$

جایی که

$$\begin{aligned} r_m(\theta) &= \frac{\cos(m - \gamma)\theta - \cos m\theta}{m - 1} - \frac{\cos m\theta - \cos(m + \gamma)\theta}{m + 1} \\ &= \frac{(m + 1)\cos(m - \gamma)\theta - \gamma m \cos m\theta + (m - 1)\cos(m + \gamma)\theta}{(m - 1)(m + 1)} \end{aligned}$$

9

$$r_{m'}(\theta') = \frac{(m' + 1)\cos(m' - \gamma)\theta' - \gamma m' \cos m'\theta' + (m' - 1)\cos(m' + \gamma)\theta'}{(m' - 1)(m' + 1)}$$

با استفاده از این واقعیت که $B \geq \left| \frac{\partial^\gamma (u(x,t))}{\partial x^\gamma \partial t^\gamma} \right|$ و نامساوی شوارتز رابطه زیر را داریم:

$$\begin{aligned} |U_{n,m,n',m'}^C|^\gamma &\leq \frac{1}{\gamma^9 \gamma^6 m^2 m'^2} \frac{\gamma}{\pi^\gamma} \gamma^{-\Delta(k+k')} \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{\partial^\gamma u\left(\frac{\cos\theta + \gamma n - 1}{\gamma^k}, \frac{\cos\theta' + \gamma n' - 1}{\gamma^{k'}}\right)}{\partial \theta^\gamma \partial \theta'^\gamma} \\ &\quad |r_m(\theta)|^\gamma |r_{m'}(\theta')|^\gamma d\theta d\theta' \\ &\leq \frac{\gamma}{\pi^\gamma} \frac{\gamma^{-\Delta(k+k')}}{\gamma^9 \gamma^6 m^2 m'^2} B^\gamma \int_0^\pi |r_m(\theta)|^\gamma d\theta \int_0^\pi |r_{m'}(\theta')|^\gamma d\theta'. \end{aligned}$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi |r_m(\theta)|^2 d\theta &= \frac{1}{(m-1)^2(m'-1)^2} \int_0^\pi |(m+1)\cos(m-2)\theta - 2m\cos m\theta \\ &\quad + (m-1)\cos(m+2)\theta|^2 d\theta \leq \frac{1}{(m-1)^2(m+1)^2} \\ &\quad \left(\int_0^\pi (m+1)^2 \cos^2(m-2)\theta d\theta + \int_0^\pi 4m^2 \cos^2 m\theta d\theta + \int_0^\pi (m-1)^2 \cos^2(m+2)\theta d\theta \right) \\ &= \frac{1}{(m-1)^2(m+1)^2} \left(\frac{\pi}{2}(m+1)^2 + \frac{\pi}{2}4m^2 + \frac{\pi}{2}(m-1)^2 \right) \\ &= \frac{(3m^2+1)\pi}{(m-1)^2(m+1)^2}. \end{aligned}$$

به طور مشابه:

$$\int_0^\pi |r_{m'}(\theta')|^2 d\theta' \leq \frac{(3m'^2+1)\pi}{(m'-1)^2(m'+1)^2}.$$

بنابراین برای $m, m' > 1$ داریم:

$$\begin{aligned} |U_{n,m,n',m'}^C|^2 &\leq \left(\frac{4}{\pi^2} \right) \frac{2^{-\Delta(k+k')}(3m^2+1)(3m'^2+1)B^2\pi^2}{296m^2m'^2(m-1)^2(m+1)^2(m'-1)^2(m'+1)^2} \\ &\leq \left(\frac{4}{\pi^2} \right) \frac{2^{-\Delta(k+k')}\pi^2}{16(m-1)^4(m'-1)^4} \end{aligned}$$

و

$$|U_{n,m,n',m'}^C|^2 \leq \frac{2^{-\Delta(\frac{k+k'}{2})}B}{2(m-1)^2(m'-1)^2} \quad (22.2)$$

بنابراین سری‌های

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=\circ}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=\circ}^{\infty} U_{nmn'm'}^C$$

همگرایی مطلق هستند. برای $m, m' = \circ$ و با توجه به تعریف $\Psi_{n,\circ,n',\circ}^C(x, t)$ ، سری‌های

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} U_{n,\circ,n',\circ}^C \Psi_{n,\circ,n',\circ}^C(x, t)$$

همگرا هستند. بنابراین سری‌های

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=\circ}^{\infty} \sum_{n'=1}^{\infty} \sum_{m'=\circ}^{\infty} U_{nmn'm'}^C \Psi_{nmn'm'}^C(x, t)$$

به $u(x, t)$ به طور یکنواخت همگرا می‌باشند.

(ب)

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_{u,k,M,k',M'}\|_{L^\gamma_\omega(\Omega)}^2 &= \left[\int_0^1 \int_0^1 \left| u(x,t) - \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=1}^{2^{k'-1}} \sum_{m'=0}^{M'-1} U_{n,m,n',m'}^C \Psi_{n,m,n',m'}^C \right|^2 \omega(x,t) dx dt \right] \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \sum_{n=2^{k-1}+1}^\infty \sum_{m=M}^\infty \sum_{n'=2^{k'-1}+1}^\infty \sum_{m'=M'}^\infty |U_{n,m,n',m'}^C \Psi_{n,m,n',m'}^C|^2 \omega_n(x) \omega_{n'}(t) dx dt \\ &= \sum_{n=2^{k-1}+1}^\infty \sum_{m=M}^\infty \sum_{n'=2^{k'-1}+1}^\infty \sum_{m'=M'}^\infty |U_{n,m,n',m'}^C|^2. \end{aligned}$$

بنابراین به دست می‌آوریم:

$$\|\varepsilon_{u,k,M,k',M'}\|_{L^\gamma_\omega(\Omega)}^2 = \sum_{n=2^{k-1}+1}^\infty \sum_{m=M}^\infty \sum_{n'=2^{k'-1}+1}^\infty \sum_{m'=M'}^\infty |U_{n,m,n',m'}^C|^2, \quad (23.2)$$

که در آن آخرین برابری نرمال بودن $\Psi_{n,m,n',m'}^C$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین بنا به معادله (۲۲.۲) ، (۲۳.۲) داریم:

$$\|\varepsilon_{u,k,M,k',M'}\|_{L^\gamma_\omega(\Omega)}^2 \leq \frac{2^{-\Delta(k+k')} B^2}{4} \sum_{n=2^{k-1}+1}^\infty \sum_{m=M}^\infty \sum_{n'=2^{k'-1}+1}^\infty \sum_{m'=M'}^\infty \frac{1}{(m-1)^4 (m'-1)^4}$$

اثبات کامل شد.

□

۶.۲ نتیجه گیری

در این فصل همگرایی سری موجک لژاندر و چبیشف را بیان کردیم و خطای تقریب توابع را با استفاده از موجک لژاندر و چبیشف مورد بررسی قرار دادیم.

فصل ۳

حل عددی معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از موجک لژاندر و چبیشف

۱.۳ مقدمه

به دست آوردن جواب دقیق برای برخی معادلات دیفرانسیل با روش‌های کلاسیک همیشه امکان پذیر نیست، بنابراین باید از روش‌های تقریبی برای حل آن‌ها استفاده کرد. در این فصل، با توجه به مبحث‌های بیان شده در فصل‌های قبل، برای بدست آوردن این جواب‌های تقریبی ابتدا به پیاده سازی روش می‌پردازیم و سپس با ارائه چندین مثال دقت و کارایی روش را بیان می‌کنیم.

۲.۳ پیاده‌سازی روش

برای حل عددی معادله (۲.۱) ابتدا معادله (۲.۱) را به یک معادله انتگرالی دو بعدی تبدیل می‌کنیم. سپس از ماتریس عملگر انتگرال برای تبدیل یک معادله انتگرال دو بعدی به دستگاه معادلات جبری خطی استفاده می‌شود. از دوطرف معادله (۲.۱) با توجه به x و t انتگرال

می‌گیریم [۱۲].

$$\int_0^x u(x', t) dx' + \int_0^t u(x, t') dt' + a \int_0^t \int_0^x u(x', t') dx' dt' = w(x, t) \quad (۱.۳)$$

که

$$w(x, t) = \int_0^x g(x') dx' + \int_0^t f(t') dt' + b \int_0^t \int_0^x v(x', t') dx' dt'$$

معادله انتگرال بالا فرمولی معادل (۲.۱) است، که در آن $w(x, t)$ تابع معلوم است. حال برای پیدا کردن معادله (۱.۳) $u(x, t)$ و $w(x, t)$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$u(x, t) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=1}^{2^{k'-1}} \sum_{m'=0}^{M'-1} U_{nmn'm'} \psi_{nmn'm'}(x, t) = U^T \Psi(x, t), \quad (۲.۳)$$

$$w(x, t) \approx \sum_{n=1}^{2^{k-1}} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n'=1}^{2^{k'-1}} \sum_{m'=0}^{M'-1} W_{nmn'm'} \psi_{nmn'm'}(x, t) = W^T \Psi(x, t), \quad (۳.۳)$$

به طوریکه:

$$u(x', t) \approx U^T \Psi(x', t)$$

$$u(x, t') \approx U^T \Psi(x, t')$$

در نتیجه داریم:

$$u(x', t') \approx U^T \Psi(x', t')$$

اکنون $u(x', t)$ ، $u(x, t')$ و $u(x', t')$ را در (۱.۳) قرار می‌دهیم، داریم:

$$U^T \int_0^x \Psi(x', t) dx' + U^T \int_0^t \Psi(x, t') dt' + a U^T \int_0^t \int_0^x \Psi(x', t') dx' dt' = W^T \Psi(x, t)$$

یا به طور معادل داریم:

$$U^T P_x \Psi(x, t) + U^T P_t \Psi(x, t) + a U^T P_{x,t} \Psi(x, t) = W^T \Psi(x, t) \quad (۴.۳)$$

با توجه به معادله (۴.۳) می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$U^T (P_x + P_t + a P_{x,t}) \Psi(x, t) = W^T \Psi(x, t). \quad (۵.۳)$$

اکنون نقطه‌ی (x_i, t_j) را در معادله (۵.۳) قرار می‌دهیم:

$$(۶.۳)$$

$$U^T (P_x + P_t + a P_{x,t}) \Psi(x_i, t_j) = W^T \Psi(x_i, t_j) \quad i = 1, 2, \dots, 2^{k-1} M, \quad j = 1, 2, \dots, 2^{k'-1} M$$

که (x_i, t_j) نقاط هم‌مکانی صفرهای چندجمله‌ای چبیشف هستند:

$$x_i = \cos\left(\frac{(i+1)\pi}{2^k M}\right), \quad i = 1, 2, \dots, 2^{k-1} M.$$

$$t_j = \cos\left(\frac{(j+1)\pi}{2^{k'} M'}\right), \quad j = 1, 2, \dots, 2^{k'-1} M'.$$

سیستم (۶.۳) دستگاه با $2^{k-1} 2^{k'-1} M M'$ معادله و با همان تعداد مجهول‌ها است که برای عناصر U حل می‌شود. سپس با قراردادن مقدار U^T در معادله (۲.۳) می‌توان جواب تقریبی معادله (۱.۳) را بدست آورد.

در اینجا، دو مثال عددی را در نظر گرفتیم و با استفاده از موجک لژاندر و چپیشف برای $k = k' = 1$ و $M, M' = 2, 4, 6$ حل شده است. توابع خطا را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\varepsilon_{i,j} = (u_{exact})_{i,j} - (u_{approx})_{i,j}, \quad \varepsilon = u_{exact} - u_{approx},$$

$$\|\varepsilon\|_{L_\infty} = \max |\varepsilon_j|, \quad \|\varepsilon\|_{L_2} = \sqrt{\sum_{j=1}^N |\varepsilon_j|^2}.$$

مثال ۱.۲.۳. [۱۳]

به عنوان مثال اول معادله دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} u_t + u_x + u = (x-t)^2 \\ \phi(x, 0) = x^2, \\ u(0, t) = t^2. \end{cases}$$

جواب دقیق برای این مثال $u(x, t) = (x-t)^2$ است. برای پیدا کردن جواب تقریبی این معادله دیفرانسیل ابتدا معادله دیفرانسیل بالا را با توجه به x و t به ترتیب انتگرال می‌گیریم و شرایط اولیه را تحمیل می‌کنیم به طوری که آن را به معادله انتگرال دو بعدی تبدیل می‌کنیم.

$$\int_0^x u(x', t) dx' + \int_0^t u(x, t') dt' + a \int_0^t \int_0^x u(x', t') dx' dt' = w(x, t)$$

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \int_0^x g(x') dx' + \int_0^t f(t') dt' + b \int_0^t \int_0^x v(x', t') dx' dt' \\ \Rightarrow w(x, t) &= \int_0^x (x')^2 dx' + \int_0^t (t')^2 dt' + \int_0^t \int_0^x (x' - t')^2 dx' dt' = \\ &= \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{3} t^3 + \int_0^t \int_0^x (x' - t')^2 dx' dt' \Rightarrow \\ \int_0^t \int_0^x (x' - t')^2 dx' dt' &= \int_0^x x'^2 dx' + \int_0^x t'^2 dx' - 2 \int_0^x x' t' dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^x + x t'^2 \Big|_0^x - 2 \left(\frac{1}{2} x^2 t' \right) \Big|_0^x \\ &= \frac{1}{3} (x^3 - 0) + t^2 (x - 0) - t' (x^2 - 0) = \frac{1}{3} x^3 + x t^2 - x^2 t' \end{aligned}$$

۵۰ حل عددی معادلات با مشتقات جزئی با استفاده از موجک لژاندر و چبیشف

اکنون با انتگرال نسبت به t داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^x (\frac{1}{3}x^3 + xt^2 - x^2t')dt' &= (\frac{1}{3}x^3t' + \frac{1}{3}xt^3 - \frac{1}{2}x^2t'^2)|_0^t = \\ (\frac{1}{3}x^3t + \frac{1}{3}xt^3 - \frac{1}{2}x^2t^2) &\Rightarrow \\ w(x, t) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{3}x^3t + \frac{1}{3}xt^3 - \frac{1}{2}x^2t^2 \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$w(x, t) = \int_0^t \int_0^x (x' - t')^2 dx' dt' + \int_0^x x'^2 dx' + \int_0^t t'^2 dt' = \frac{1}{3}xt^3 - \frac{1}{2}tx^2 + \frac{1}{3}x^3t + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}t^3. \quad (8.3)$$

حال فرض می‌کنیم $k = k' = 1$ ، $M = M' = 4$ و تقریب $w(x, t) \approx W^T \Psi(x, t)$ در عبارات موجک لژاندر و چبیشف را به کار می‌بریم به طوری که:

$$\begin{aligned} W^L &= [\begin{matrix} 0/19444 & 0/105848 & 0/0434791 & 0/00944911 & 0/105848 & 0/008333 & 0/00181848 \\ 0/043479 & 0/002778 & 0/0094491 & 0/00181848 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}] \\ W^C &= [\begin{matrix} 0/380422 & 0/214045 & 0/0780975 & 0/017355 & 0/214045 & 0/0244893 & 0/00409062 \\ 0/0780975 & 0 & -0/006143 & 0/00071388 & 0/017355 & 0/00409062 & -0/0000980654 \end{matrix}] \end{aligned}$$

برای پیدا کردن جواب تقریبی برای این مثال دستگاه خطی زیر را حل می‌کنیم:

$$U^T(P_x + P_t + aP_{xt})\Psi(x_i, t_j) = W^T \Psi(x_i, t_j). \quad (9.3)$$

این سیستم را برای مقادیر متفاوت k, k', M, M' با موجک لژاندر و چبیشف حل شده است. جواب سیستم خطی بالا برای $k = k' = 1, M = M' = 4$ به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} U^t &= [\begin{matrix} 0/1667 & 0 & 0/0745 & 0 & 0 & -0/1667 & 0 & 0 & 0/0745 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}] \\ U^C &= [\begin{matrix} 0/3926 & 0/1387 & 0/0001 & -0/0001 & -0/3928 & 0 & 0/0003 & 0/1386 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0/0004 & 0/0001 & -0/0001 & 0/0001 & 0/0001 & 0/0001 & 0/0006 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}] \end{aligned}$$

خطاهای مطلق L_2 و خطاهای مطلق L_∞ برای مقادیر متفاوت k, k', M, M' در جداول ۲.۳ تا ۴.۳ نشان داده شده‌اند بعلاوه خطاهای گراف برای $4, 6, K = K' = 1, M = M' = 4$ در شکل‌های ۱.۳ تا ۴.۳ نشان داده شده‌اند.

جدول ۱.۳: لیست نشانه‌گذاری

استفاده از موجک چبیشف	استفاده از موجک لژاندر	نماد عمومی
$\Psi^C(x, t)$	$\Psi^L(x, t)$	$\Psi(x, t)$
P^C	P^L	P
P_x^C	P_x^L	P_x
P_t^C	P_t^L	P_t
P_{xt}^C	P_{xt}^L	P_{xt}
U^C	U^L	U
W^C	W^L	W

جدول ۲.۳: خطاهای مطلق با موجک لژاندر برای سوال ۱.۲.۳

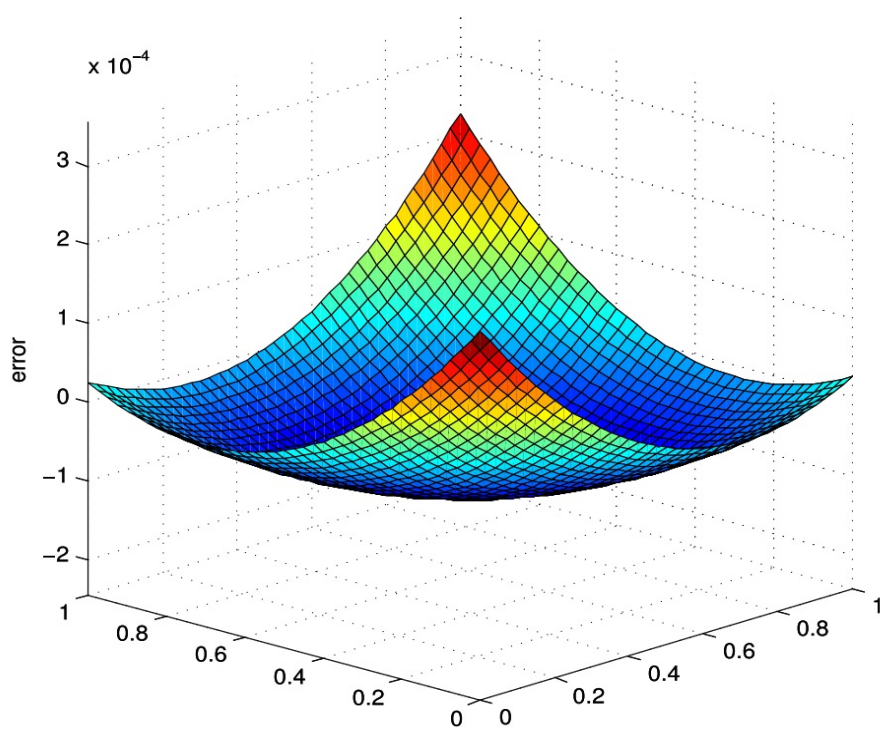
نقاط	$k = k' = 1$	$k = k' = 1$	$k = k' = 1$
(x, t)	$M = M' = 2$	$M = M' = 4$	$M = M' = 6$
$(0/1, 0/1)$	$8/70 \times 10^{-2}$	$1/03 \times 10^{-4}$	$8/20 \times 10^{-5}$
$(0/2, 0/2)$	$2/50 \times 10^{-2}$	$9/0 \times 10^{-6}$	$7/10 \times 10^{-6}$
$(0/3, 0/3)$	$1/03 \times 10^{-1}$	$5/87 \times 10^{-5}$	$4/65 \times 10^{-5}$
$(0/4, 0/4)$	$1/48 \times 10^{-1}$	$9/94 \times 10^{-5}$	$7/86 \times 10^{-5}$
$(0/5, 0/5)$	$1/59 \times 10^{-1}$	$1/12 \times 10^{-4}$	$8/93 \times 10^{-5}$
$(0/6, 0/6)$	$1/36 \times 10^{-1}$	$9/94 \times 10^{-5}$	$7/86 \times 10^{-5}$
$(0/7, 0/7)$	$7/98 \times 10^{-2}$	$5/87 \times 10^{-5}$	$4/65 \times 10^{-5}$
$(0/8, 0/8)$	$1/03 \times 10^{-2}$	$9/0 \times 10^{-6}$	$7/10 \times 10^{-6}$
$(0/9, 0/9)$	$1/34 \times 10^{-1}$	$1/03 \times 10^{-4}$	$8/22 \times 10^{-5}$

جدول ۳.۳: خطاهای مطلق موجک چبیشف برای مثال ۱.۲.۳

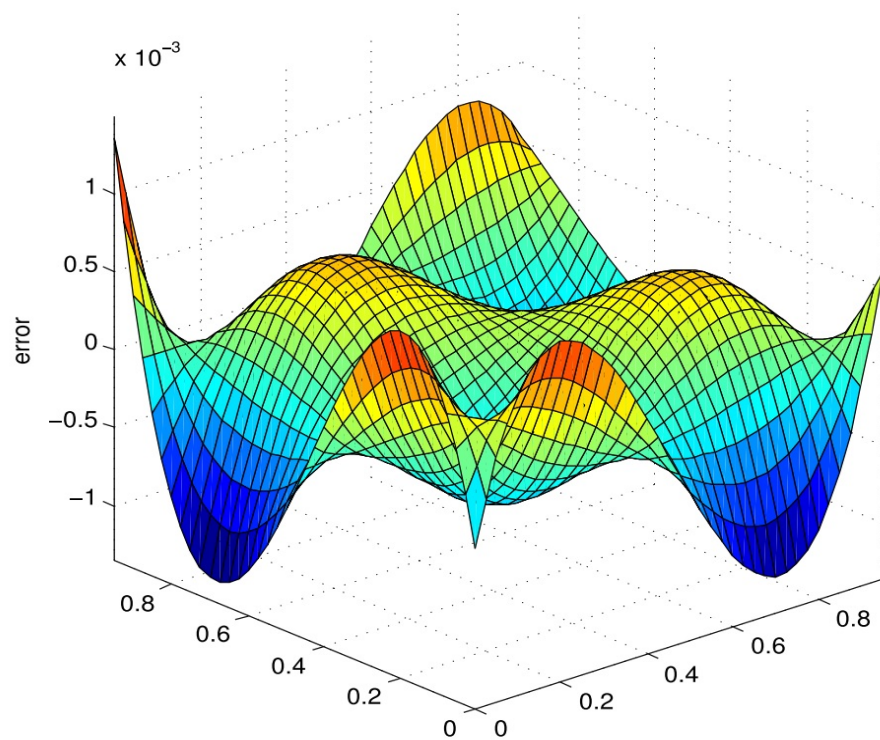
نقاط	$k = k' = 1$	$k = k' = 1$	$k = k' = 1$
(x, t)	$M = M' = 2$	$M = M' = 4$	$M = M' = 6$
$(0/1, 0/1)$	$5/8 \times 10^{-2}$	$2/57 \times 10^{-4}$	$4/16 \times 10^{-4}$
$(0/2, 0/2)$	$5/71 \times 10^{-2}$	$3/83 \times 10^{-4}$	$5/37 \times 10^{-4}$
$(0/3, 0/3)$	$1/37 \times 10^{-1}$	$4/38 \times 10^{-4}$	$3/55 \times 10^{-5}$
$(0/4, 0/4)$	$1/83 \times 10^{-1}$	$2/22 \times 10^{-5}$	$2/65 \times 10^{-4}$
$(0/5, 0/5)$	$1/94 \times 10^{-1}$	$2/30 \times 10^{-4}$	$1/27 \times 10^{-5}$
$(0/6, 0/6)$	$1/69 \times 10^{-1}$	$1/38 \times 10^{-5}$	$1/93 \times 10^{-5}$
$(0/7, 0/7)$	$1/11 \times 10^{-1}$	$3/66 \times 10^{-4}$	$2/11 \times 10^{-5}$
$(0/8, 0/8)$	$1/05 \times 10^{-2}$	$2/75 \times 10^{-4}$	$3/22 \times 10^{-5}$
$(0/9, 0/9)$	$1/14 \times 10^{-1}$	$4/01 \times 10^{-4}$	$1/20 \times 10^{-4}$

جدول ۴.۳: خطاهای L_2 و L_∞ با موجک لژاندر (LW) و موجک چبیشف (CW) برای مثال ۱.۲.۳

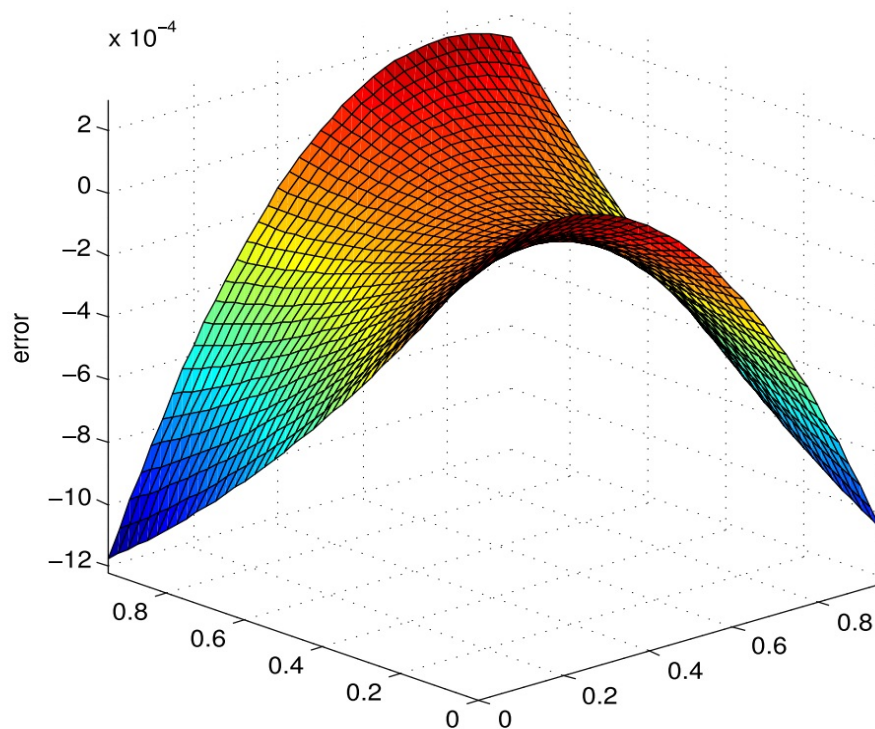
M	L^2 خطای (LW)	L^2 خطای (CW)	L^∞ خطای (LW)	L^∞ خطای (CW)
$M = 2$	$4/52 \times 10^{-1}$	$5/402 \times 10^{-1}$	$1/34 \times 10^{-1}$	$1/94 \times 10^{-1}$
$M = 4$	$3/48 \times 10^{-4}$	$1/2 \times 10^{-3}$	$1/12 \times 10^{-4}$	$4/01 \times 10^{-4}$
$M = 6$	$2/75 \times 10^{-4}$	$1/4 \times 10^{-3}$	$8/22 \times 10^{-4}$	$5/37 \times 10^{-4}$



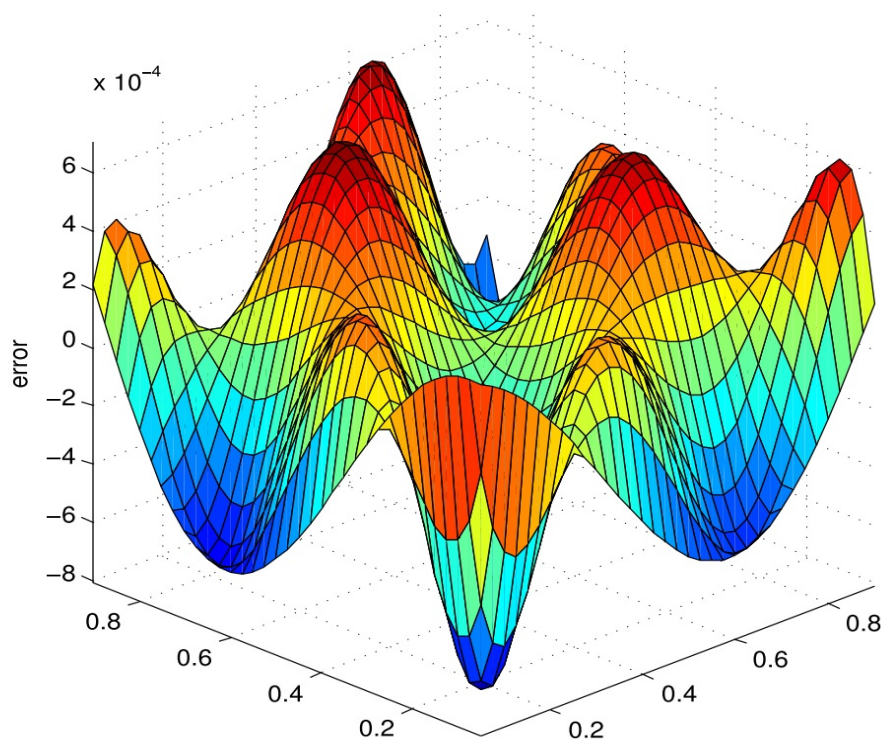
شکل ۱.۳: نمودار خطا یا مثال ۱.۲.۳ با موجک لژاندر برای $M = M' = 4$ ، $K = K' = 1$



شکل ۲.۳: نمودار خطا یا مثال ۱.۲.۳ با موجک چبیشف برای $M = M' = 4$ ، $K = K' = 1$



شکل ۳.۳: نمودار خطا یا مثال ۱.۲.۳ با موجک لژاندر برای $M = M' = 6$ ، $K = K' = 1$



شکل ۴.۳: نمودار خطا یا مثال ۱.۲.۳ با موجک چبیشف برای $M = 6$ ، $K = K' = 1$

مثال ۲.۲.۳. [۱۳] در مثال دوم معادله دیفرانسیل از مرتبه اول با جواب دقیق $u(x, t) = \cos(x + t)$ را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} u_t + u_x + u = -\gamma \sin(x + t) + \cos(x + t) \\ \phi(x, \circ) = \cos(x) \\ u(\circ, t) = \cos(t) \end{cases}$$

مانند مثال قبل از معادله دیفرانسیل بالا نسبت به x و t به ترتیب انتگرال می‌گیریم و شرایط اولیه را در نظر می‌گیریم:

$$\int_{\circ}^x u(x', t) dx' + \int_{\circ}^t u(x, t') dt' + a \int_{\circ}^t \int_{\circ}^x u(x', t') dx' dt' = w(x, t)$$

با توجه به بخش پیاده‌سازی روش داریم:

$$f(t) = \cos(t), \quad \cos(x) = g(x)$$

$$w(x, t) = \int_{\circ}^x \cos(x') dx' + \int_{\circ}^t \cos(t') dt' + \left(\int_{\circ}^t \int_{\circ}^x -\gamma \sin(x' + t') + \cos(x' + t') \right) dx' dt'$$

$$\Rightarrow w(x, t) = \sin(x')|_{\circ}^x + \sin(t')|_{\circ}^t + \left(\int_{\circ}^t \int_{\circ}^x -\gamma \sin(x' + t') + \cos(x' + t') \right) dx' dt'$$

$$w(x, t) = \sin x + \sin t + \left(\int_{\circ}^t \int_{\circ}^x -\gamma \sin(x' + t') + \cos(x' + t') \right) dx' dt' \quad (۱۰.۳)$$

که

$$\begin{aligned} \int_{\circ}^t \int_{\circ}^x -\gamma \sin(x' + t') + \cos(x' + t') dx' dt' &= \int_{\circ}^x (-\gamma \sin(x' + t') + \cos(x' + t')) dx' = \\ \gamma \cos(x' + t') + \sin(x' + t')|_{\circ}^x &= \gamma \cos(x + t') + \sin(x + t') - (\gamma \cos(\circ + t') + \sin(\circ + t')) = \\ \gamma \cos(x + t') + \sin(x + t') - \gamma \cos(\circ) - \gamma \cos(t') - \sin(\circ) - \sin(t') &= \gamma \cos(x + t') + \sin(x + t') \\ - \gamma - \gamma \cos(t') - \sin(t') &\Rightarrow \int_{\circ}^t (\gamma \cos(x + t') + \sin(x + t') - \gamma - \gamma \cos(t') - \sin(t')) dt' \\ &= -\gamma + \gamma \sin(x + t') - \cos(x + t') - \gamma \sin(t') + \cos(t')|_{\circ}^t = \gamma + (\gamma \sin(x + t) - \cos(x + t) - \gamma \sin(t) \\ &+ \cos(t) - (\gamma \sin(x + \circ) - \cos(x + \circ) - \gamma \sin(\circ) - \cos(\circ))) \Rightarrow \end{aligned} \quad (۱۱.۳)$$

به طوری که

$$w(x, t) = -\gamma - \sin(x) + \cos(x) - \sin(t) + \cos(t) + \gamma \sin(x + t) - \cos(x + t).$$

جدول ۵.۳: خطای مطلق موجک لژاندر مثال ۲.۲.۳

نقاط	$K = K' = 1$	$K = K' = 1$	$K = K' = 1$
(x, t)	$M = M' = 2$	$M = M' = 4$	$M = M' = 6$
$(0/1, 0/1)$	$3/77 \times 10^{-2}$	$4/86 \times 10^{-5}$	$9/12 \times 10^{-5}$
$(0/2, 0/2)$	$1/24 \times 10^{-2}$	$2/78 \times 10^{-4}$	$3/36 \times 10^{-5}$
$(0/3, 0/3)$	$3/99 \times 10^{-2}$	$8/64 \times 10^{-5}$	$1/86 \times 10^{-5}$
$(0/4, 0/4)$	$4/86 \times 10^{-2}$	$1/15 \times 10^{-4}$	$2/42 \times 10^{-5}$
$(0/5, 0/5)$	$4/35 \times 10^{-2}$	$1/42 \times 10^{-4}$	$8/30 \times 10^{-5}$
$(0/6, 0/6)$	$3/10 \times 10^{-2}$	$5/40 \times 10^{-6}$	$1/38 \times 10^{-4}$
$(0/7, 0/7)$	$1/81 \times 10^{-2}$	$1/67 \times 10^{-4}$	$9/90 \times 10^{-5}$
$(0/8, 0/8)$	$1/24 \times 10^{-2}$	$2/46 \times 10^{-4}$	$1/20 \times 10^{-6}$
$(0/9, 0/9)$	$2/22 \times 10^{-2}$	$2/29 \times 10^{-4}$	$9/0 \times 10^{-5}$

جدول ۶.۳: خطای مطلق موجک چبیشف مثال ۲.۲.۳

نقاط	$K = K' = 1$	$K = K' = 1$	$K = K' = 1$
(x, t)	$M = M' = 2$	$M = M' = 4$	$M = M' = 6$
$(0/1, 0/1)$	$2/36 \times 10^{-2}$	$3/0 \times 10^{-4}$	$4/53 \times 10^{-4}$
$(0/2, 0/2)$	$2/59 \times 10^{-2}$	$2/0 \times 10^{-4}$	$2/07 \times 10^{-4}$
$(0/3, 0/3)$	$5/23 \times 10^{-2}$	$1/0 \times 10^{-4}$	$6/92 \times 10^{-5}$
$(0/4, 0/4)$	$5/94 \times 10^{-2}$	$5/0 \times 10^{-4}$	$1/39 \times 10^{-4}$
$(0/5, 0/5)$	$5/23 \times 10^{-2}$	$6/0 \times 10^{-4}$	$2/64 \times 10^{-5}$
$(0/6, 0/6)$	$3/73 \times 10^{-2}$	$2/0 \times 10^{-4}$	$7/62 \times 10^{-5}$
$(0/7, 0/7)$	$2/14 \times 10^{-2}$	$2/0 \times 10^{-4}$	$2/10 \times 10^{-5}$
$(0/8, 0/8)$	$1/24 \times 10^{-2}$	$2/0 \times 10^{-4}$	$2/01 \times 10^{-5}$
$(0/9, 0/9)$	$1/81 \times 10^{-2}$	$1/0 \times 10^{-4}$	$3/0 \times 10^{-4}$

دوباره، جواب تقریبی برای این مثال با حل سیستم خطی زیر داده شده است:

$$U^T(P_x + P_t + aP_{xt})\Psi(x_i, t_j) = W^T\Psi(x_i, t_j).$$

برای $K = K' = 1$ و $M = M' = 4$ جواب این سیستم خطی بصورت زیر است:

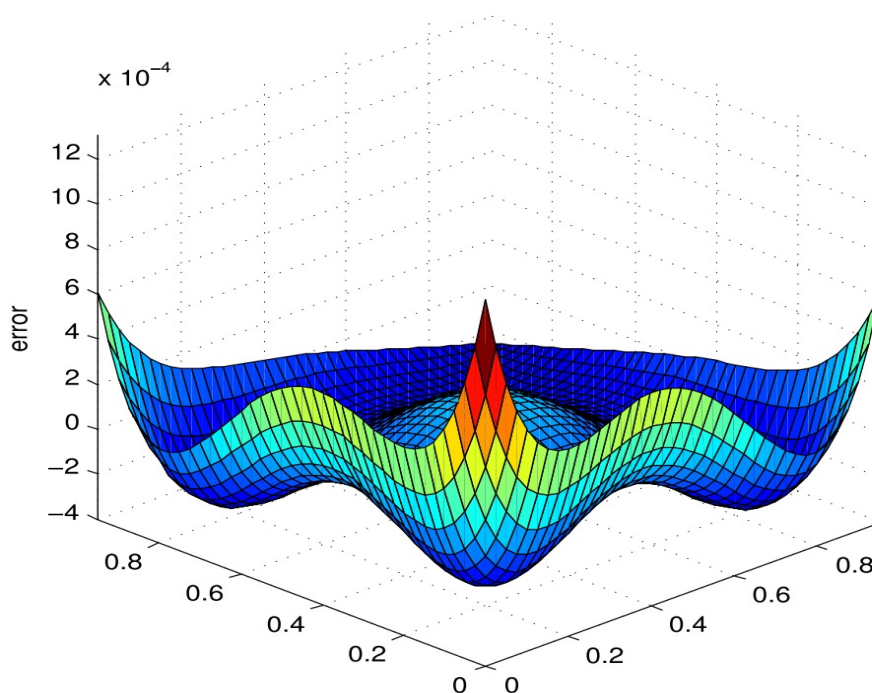
$$U^L = \begin{bmatrix} 0.4968 & -0.2271 & -0.0190 & 0.0025 & -0.2271 & -0.428 & 0.0087 & 0.0005 \\ -0.0190 & 0.0087 & 0.0007 & -0.0001 & 0.0025 & 0.0005 & -0.0001 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U^C = \begin{bmatrix} 0.7476 & -0.4251 & -0.0342 & 0.0046 & -0.4248 & -0.0995 & 0.0199 & 0.0017 \\ -0.0342 & 0.0193 & 0.0017 & 0.0001 & 0.0043 & 0.0017 & -0.0005 & 0.0007 \end{bmatrix}$$

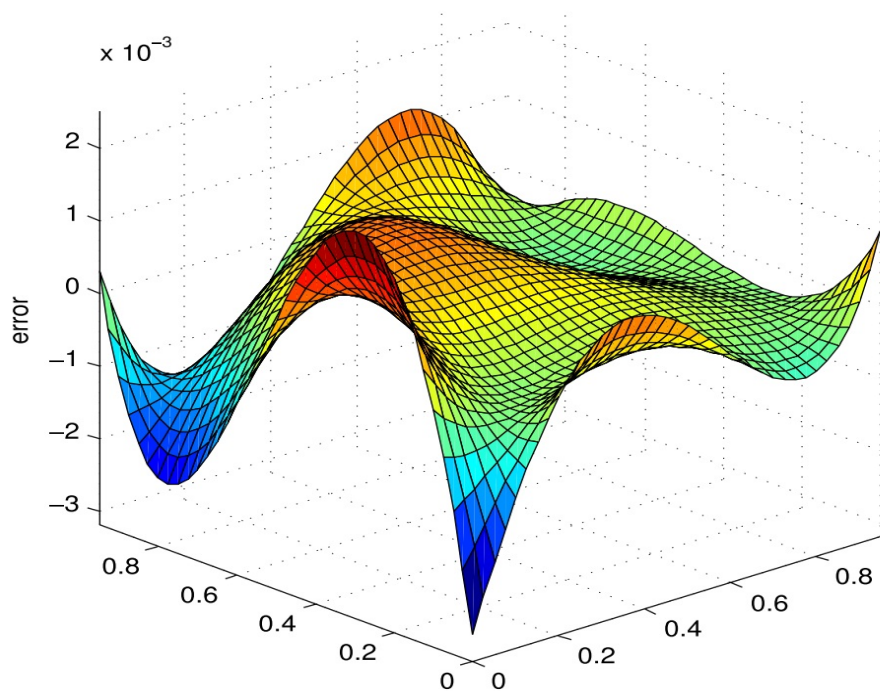
جداول ۵.۳ و ۶.۳ خطای مطلق این مثال را با موجک لژاندر و چبیشف توصیف می‌کند، همچنین L_∞ و L_2 خطاهایی هستند که در جدول ۷.۳ آمده‌اند. خطاهای گراف برای $k = k' = 1$ و $M = M' = 4, 6$ در شکل‌های ۵.۳ تا ۸.۳ نشان داده شده‌اند.

جدول ۷.۳: خطاهای L_∞ و L_2 با موجک لژاندر و چبیشف برای مثال ۲.۲.۳

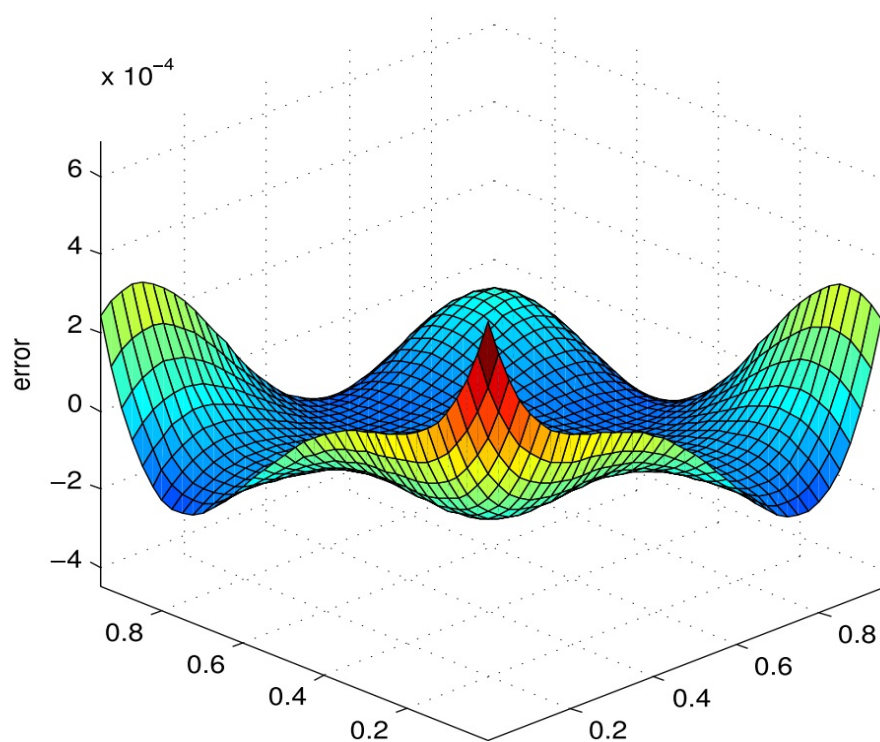
M	L^2 خطای (LW)	L^2 خطای (CW)	L^∞ خطای (LW)	L^∞ خطای (CW)
$M = 2$	$1/47 \times 10^{-1}$	$1/65 \times 10^{-1}$	$4/86 \times 10^{-2}$	$5/94 \times 10^{-2}$
$M = 4$	$7/94 \times 10^{-4}$	$1/7 \times 10^{-3}$	$2/78 \times 10^{-4}$	$6/0 \times 10^{-4}$
$M = 6$	$4/053 \times 10^{-4}$	$8/55 \times 10^{-4}$	$9/90 \times 10^{-5}$	$4/53 \times 10^{-4}$



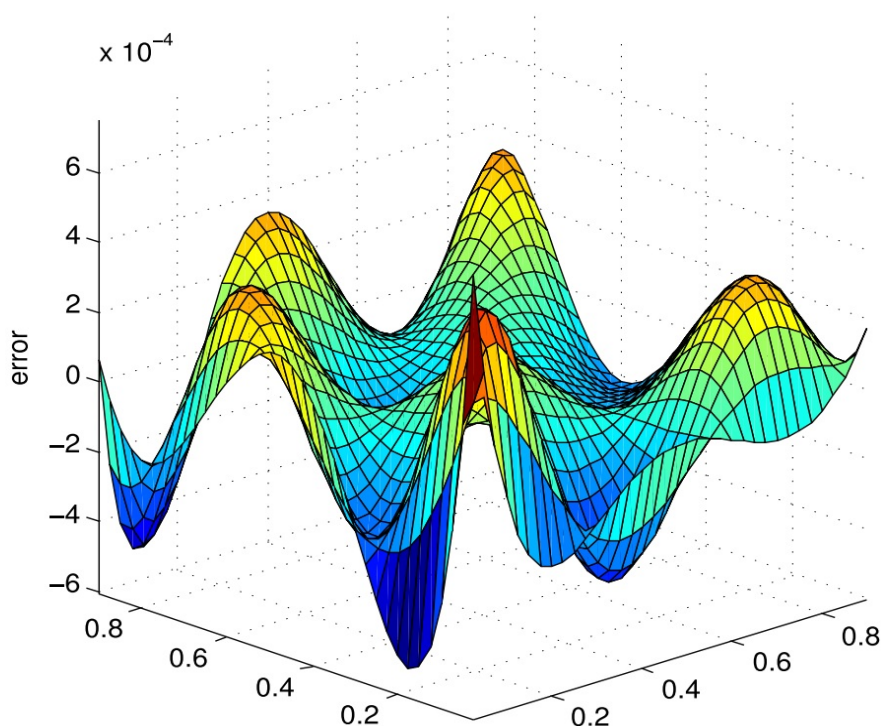
شکل ۵.۳: نمودار خطا یا مثال ۲.۲.۳ با موجک لژاندر برای $M = M' = 4$ ، $K = K' = 1$



شکل ۶.۳: نمودار خطا یا مثال ۲.۲.۳ با موجک چبیشف برای $M = 1, K = K' = 1$ و $M' = 4$



شکل ۷.۳: نمودار خطا یا مثال ۲.۲.۳ با موجک لژاندر برای $M = M' = 6, K = K' = 1$



شکل ۸.۳: نمودار خطا یا مثال ۲.۲.۳ با موجک چبیشف برای $M = 6$ ، $K = K' = 1$

۳.۳ نتیجه گیری

در این فصل با توجه به مباحث‌های بیان شده در فصل‌های قبل، برای بدست آوردن جواب‌های تقریبی، ابتدا به پیاده سازی روش پرداخته شده است. مثال‌های عددی برای اثبات کارایی روش و نتایج عددی دقت و کارایی روش موجک‌ها را در حل معادلات دیفرانسیل جزئی نشان می‌دهند. همچنین جداول ۲.۳ تا ۷.۳ و خطای نمودارهای ۱.۳ تا ۸.۳ نشان می‌دهد که روش پیشنهادی از نظر محاسباتی کارآمد می‌باشد.

- [1] Adibi, H., Assari, P. (2010). Chebyshev wavelet method for numerical solution of Fredholm integral equations of the first kind. Mathematical problems in Engineering, 2010.
- [2] Babolian, E., Fattahzadeh, F. (2007). Numerical solution of differential equations by using Chebyshev wavelet operational matrix of integration. Applied Mathematics and computation, 188(1), 417-426.
- [3] Biazar, J., Ebrahimi, H. (2012). Chebyshev wavelets approach for nonlinear systems of Volterra integral equations. Computers Mathematics with Applications, 63(3), 608-616.
- [4] Bradley, J., Brislawn, C., Hopper, T. (1993). The FBI Wavelet/Scalar Quantization Standard for Gray-scale Fingerprint Image Compression Tech. R e p. La UR, 93, 1659.
- [5] Cox, H. (1969). Optimum arrays and the Schwartz inequality. The Journal of the Acoustical Society of America, 45(1), 228-232.
- [6] Daubechies, I. (1996). Where do wavelets come from? A personal point of view. Proceedings of the IEEE, 84(4), 510-513.
- [7] Langville, A. N., Stewart, W. J. (2004). The Kronecker product and stochastic automata networks. Journal of computational and applied mathematics, 167(2), 429-447.
- [8] Liu, N., Lin, E. B. (2010). Legendre wavelet method for numerical solutions of partial differential equations. Methods for Partial Differential Equations: An International Journal, 26(1), 81-94.
- [9] Razzaghi, M., Yousefi, S. (2001). The Legendre wavelets operational matrix of integration. International Journal of Systems Science, 32(4), 495-502.
- [10] Ray, S. S., Gupta, A. K. (2017). Two-dimensional Legendre wavelet method for travelling wave solutions of time-fractional generalized seventh order KdV equation. Computers Mathematics with Applications, 73(6), 1118-1133.

- [11] Roland, N. G. (2000). Fourier and wavelet representations of functions. Furman University Electronic Journal of Undergraduate Mathematics, 6(1), 1-12.
- [12] Singh, S., Patel, V. K., Singh, V. K. (2018). Application of wavelet collocation method for hyperbolic partial differential equations via matrices. Applied Mathematics and Computation, 320, 407-424..
- [13] Tohidi, E., Toutounian, F. (2014). Convergence analysis of Bernoulli matrix approach for one-dimensional matrix hyperbolic equations of the first order. Computers Mathematics with Applications, 68(1-2), 1-12.
- [14] Yoshida, Y. (2006). Mean values, measurement of fuzziness and variance of fuzzy random variables for fuzzy optimization. In SCIS ISIS SCIS ISIS 2006 (pp. 2277-2282). Japan Society for Fuzzy Theory and Intelligent Informatics.
- [15] Yoshida, Y. (2007, August). Fuzzy extension of estimations with randomness: The perception-based approach. In International Conference on Modeling Decisions for Artificial Intelligence (pp. 295-306). Springer, Berlin, Heidelberg.

Aabstract

Classic solutions to partial differential equations have not always been possible and in many cases almost impossible. Therefore, approximate methods should be used to solve this set of equations. In this thesis, we extend an effective method based on Legendre and Chebyshev wavelets to find the approximate solution of partial differential equations with the given initial conditions. In this method, we obtain the integral operator matrices for Legendre and Chebyshev wavelets, and by combining the collocation method convert into a system of linear equations. We also survey the convergence analysis and the corresponding error estimates for these methods under the given conditions and illustrate the accuracy and efficiency of method by providing some examples.

Keywords: First order partial differential equation, Legendre wavelets, Chebyshev wavelets, Operational matrix of integration, Convergence analysis.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Partial Differential equations

**Application of wavelet collocation method
for hyperbolic partial differential equations
via matrices**

By: Fatemeh Talebian

Supervisors

Dr. Mehdi ghovatmand

Dr. Hojat ahsani tehrani

Advisor

Somayeh moghari

July 2020