بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی محض، گرایش آنالیز

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

بررسی هندسی ریشه‌های یکهنگ سه‌جمله‌ای

نگارنده: ملیحه رضوانی

استاد راهنما

دکتر احمد معتمدنژاد

استاد مشاور

دکتر رضا حجازی

دی ماه ۹۸

قدردانی

پروردگار را شاکرم که بار دیگر به من فرصت آموختن داد.
بر خود لازم می‌دانم از راهنمایی‌های ارزنده و همراهی جناب آقای دکتر معتمدنژاد در تدوین پایان‌نامه تقدیر و تشکر کنم.

ملیحه رضوانی
دی ماه ۹۸

تعهد نامه

اینجانب ملیحه رضوانی دانشجوی کارشناسی ارشد رشته ریاضی محض دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان‌نامه با عنوان بررسی هندسی ریشه‌های یکهنگ سه‌جمله‌ای ، تحت راهنمایی احمد معتمدنژاد متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این پایان‌نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان‌نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچجا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام ‘‘ دانشگاه صنعتی شاهرود ‘‘ یا ‘‘ Shahrood University of Technology ‘‘ به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی پایان‌نامه تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان‌نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

ملیحه رضوانی

دی ماه ۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

چکیده

این پایان‌نامه به بررسی تعداد ریشه‌های یکهنگ سه جمله‌ای مختلط $P(z) = z^n + z^k - ۱$ می‌پردازد و شرایط لازم و کافی برای وجود ریشه‌های یکهنگ این سه‌جمله‌ای‌ها را بیان می‌کند، در ادامه وجود ریشه‌های یکهنگ و تعداد آن‌ها را برای چندجمله‌ای‌های متقارن چپ لیتل وود و چندجمله‌ای‌های خود معکوس لیتل وود مورد بررسی قرار می‌دهد. در فصل پایانی به تعیین طوقی پرداخته می‌شود که همه ریشه‌های چندجمله‌ای مختلط غیر ثابت را در بر دارد. از اعداد فیبوناتچی و اعداد پل در تعیین کران‌ها استفاده می‌شود.

کلمات کلیدی: چندجمله‌ای‌های مختلط، ریشه یکهنگ، چندجمله‌ای خود معکوس، چندجمله‌ای متقارن چپ، کران، دنباله فیبوناتچی.

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش‌نیازها و مفاهیم مقدماتی

۱.۱ نماد و تعاریف

$\mathbb{R}$: مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$: مجموعه اعداد مختلط

$\bar{z}$: مزدوج عدد مختلط z

$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = ۱\}$: دایره یکه

$\mathbb{Z}[x]$: حلقه چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح

$\mathbb{C}[x]$: حلقه چندجمله‌ای‌های با ضرایب مختلط

$\mathbb{Z}_۲$: مجموعه اعداد صحیح به پیمانه ۲

$\gcd(a, b)$: بزرگترین شمارنده a و b

$\operatorname{lcm}(a, b)$: کوچکترین مضرب مشترک a و b

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$: فرمول دموآور

این بخش شامل تعاریف و مفاهیم اولیه مورد نیاز در فصول بعد می‌باشد.

تعریف ۱.۱.۱. چندجمله‌ای $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ که برای هر i، $a_i \in \mathbb{C}$، و برای بعضی مقادیر i، $a_i \neq 0$ باشد، چندجمله‌ای مختلط نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱. ریشه‌های چندجمله‌ای مختلط که روی دایره یکه قرار می‌گیرند، ریشه یکهنگ[۱] نامیده می‌شوند.

تعریف ۳.۱.۱. یک چندجمله‌ای که فقط شامل متغیرهای درجه فرد باشد را چندجمله‌ای فرد گویند.

مثال. چندجمله‌ای $p(z) = 7z^7 - 4z^3 + z$، چندجمله‌ای فرد است.

تعریف ۴.۱.۱. یک چندجمله‌ای که فقط شامل متغیرهای درجه زوج باشد را چندجمله‌ای زوج گویند.

مثال. چندجمله‌ای $p(z) = 4z^8 - 2z^6 + 4z^2 + 1$، چندجمله‌ای زوج است.

تعریف ۵.۱.۱. چندجمله‌ای $\alpha(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ که برای هر i، $a_i = \pm 1$ را چندجمله‌ای لیتل وود[۲] گویند.

مثال. چندجمله‌ای $\alpha(z) = z^4 - z^3 + z^2 + z - 1$، چندجمله‌ای لیتل وود است.

تعریف ۶.۱.۱. چندجمله‌ای $\alpha(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ را خود معکوس[۳] گویند در صورتی که $\alpha(z) = z^{n-1} \alpha\left(\frac{1}{z}\right)$. (به طور غیر رسمی در صورتی که ضرایب $\alpha(z)$ متقارن باشند.)

به عنوان مثال چندجمله‌ای‌های زیر خودمعکوس هستند:

$$\alpha(z) = z^4 + 5z^3 + 3z^2 + 5z + 1 = z^4 \alpha\left(\frac{1}{z}\right)$$
$$\alpha(z) = 2z^7 - z^5 + z^4 + z^3 - z^2 + 2 = z^7 \alpha\left(\frac{1}{z}\right)$$

[۱] Unimodular
[۲] Littelwood
[۳] Self-reciprocal

تعریف ۷.۱.۱. چندجمله‌ای $\alpha(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ را متقارن چپ[۴] گویند در صورتی که $n = 2m + 1$ و برای هر $1 \leq j \leq m$، $a_{m+j} = (-1)^j a_{m-j}$.

به عنوان مثال چندجمله‌ای‌های زیر متقارن چپ هستند:

$$\alpha(z) = 1 + z - z^2 - z^3 + z^4$$

$$\alpha(z) = z^8 - z^7 - z^6 + z^5 - z^4 - z^3 - z^2 + z + 1$$

تعریف ۸.۱.۱. چندجمله‌ای $T_n(c)$ از درجه n را چندجمله‌ای چبیشف[۵] نوع اول گویند در صورتی که θ متغیری حقیقی باشد و $c = \cos\theta$

$$T_n(c) = \cos n\theta$$

چندجمله‌ای‌های $T_0(c)$، $\cdots$، $T_4(c)$ در زیر نوشته شده است:

$$T_0(c) = 1 \qquad T_1(c) = c$$

$$T_2(c) = 2c^2 - 1$$

$$T_3(c) = 4c^3 - 3c$$

$$T_4(c) = 8c^4 - 8c^2 + 1$$

تعریف ۹.۱.۱. چندجمله‌ای $U_n(c)$ از درجه n را چندجمله‌ای چبیشف نوع دوم گویند در صورتی که θ متغیری حقیقی باشد و $c = \cos\theta$

$$U_n(c) = \frac{\sin\left((n+1)\theta\right)}{\sin\theta}$$

چندجمله‌ای‌های $U_0(c)$، $\cdots$، $U_3(c)$ در زیر نوشته شده است:

$$U_0(c) = 1 \qquad U_1(c) = 2c$$

$$U_2(c) = 4c^2 - 1$$

$$U_3(c) = 8c^3 - 4c$$

---

[۴] Skewsymmetric

[۵] Chebyshev

تعریف ۱.۱.۱۰. فرض کنیم R و S دو حلقه باشند. تابع f از R به S یک همریختی از حلقه‌ها نامیده می‌شود هرگاه برای هر a و b حقیقی

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$
$$f(ab)=f(a)f(b)$$

تعریف ۱.۱.۱۱. اعداد فیبوناتچی[۶] به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$F_۰=۱\ ,\ F_۱=۱\ ,\ F_n=F_{n-۱}+F_{n-۲}\quad n\geq ۲$$

تعریف ۱.۱.۱۲. اعدد پل[۷] به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$P_۰=۰\ ,\ P_۱=۱\ ,\ P_n=۲P_{n-۱}+P_{n-۲}\quad n\geq ۲$$

مثال. دنباله اعداد پل در زیر داده شده است:

$$۰,۱,۲,۵,۱۲,۲۹,\cdots$$

تعریف ۱.۱.۱۳. برای هر دو عدد حقیقی مثبت t و s، دنباله t و s-فیبوناتچی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F_{t,s,۰}=۰\ ,\ F_{t,s,۱}=۱\ ,\ F_{t,s,n+۱}=tF_{t,s,n}+sF_{t,s,n-۱}\quad n\geq ۱$$

تعریف ۱.۱.۱۴. یک تابع را در یک میدان تحلیلی گویند اگر در همه نقاط این میدان، مشتق‌پذیر باشد.

تعریف ۱.۱.۱۵. تابعی را که در تمام نقاط صفحه مختلط تحلیلی باشد، تابع تام گویند.

به عنوان مثال چندجمله‌ای‌ها، توابع تام هستند.

تعریف ۱.۱.۱۶. مجموعه S را فشرده نامند اگر هر پوشش باز آن شامل یک زیرپوشش متناهی باشد.

[۶] Fibonacci
[۷] Pell

۲.۱ قضایای پایه

در این بخش چند قضیه که در فصل‌های بعد مورد نیاز هستند، بیان می‌شود.

قضیه ۱.۲.۱. قضیه (لیوویل[۸]) [۱۲]
هر تابع تام کراندار، ثابت است.

قضیه ۲.۲.۱. [۱۲] فرض کنید $p(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ یک چندجمله‌ای باشد که $a_n\neq 0$، آن‌گاه برای $|z|=r$ به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\frac{|a_n|}{2}r^n\leq|p(z)|\leq\frac{3|a_n|}{2}r^n$$

قضیه ۳.۲.۱. (قضیه اساسی جبر) اگر $p(z)=a_nz^n+\cdots+a_1z+a_0$ که $a_n\neq 0$ یک چندجمله‌ای از درجه n باشد، آن‌گاه اعداد مختلط z_1، z_2، $\cdots$ ، z_n وجود دارند که

$$p(z)=a_n\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$$

و z_jها لزوماً متمایز نیستند.

برهان: اگر $p(z)$ هرگز صفر نباشد، $\frac{1}{p(z)}$ تام است. طبق قضیه ۲.۲.۱ وقتی $z\to\infty$، $\frac{1}{p(z)}$ به صفر میل می‌کند بنابراین برای $|z|\geq R$، $\left|\frac{1}{p(z)}\right|<1$.
ولی $\frac{1}{p(z)}$ بر مجموعه فشرده $|z|\leq R$ پیوسته است و در نتیجه کران‌دار است پس $\frac{1}{p(z)}$ بر تمام صفحه کراندار است و طبق قضیه لیوویل باید ثابت باشد که متناقض است، در نتیجه حداقل یک ریشه مثل z_1 وجود دارد. با فاکتورگیری $(z-z_1)$ از $p(z)$ یک چندجمله‌ای از درجه $n-1$ باقی می‌ماند. با به کار بستن قضیه درباره چندجمله‌ای جدید، ریشه‌ای مثل z_2 به دست می‌آید. با n بار تکرار این فرآیند به

$$p(z)=a_n\prod_{j=1}^{n}(z-z_j)$$

می‌رسیم. □

[۸] Liouville

قضیه ۴.۲.۱. اگر $p(z)$ یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد، آن‌گاه z_0 ریشه چندجمله‌ای است اگر و تنها اگر $\bar{z}_0$ ریشه چندجمله‌ای باشد.

برهان: فرض کنیم $p(z) = a_n z^n + \cdots , a_1 z + a_0$ که a_iها حقیقی باشند، z_0 ریشه چندجمله‌ای است پس

$$p(z_0) = a_n z_0^n + \cdots , a_1 z_0 + a_0 = 0$$

در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\overline{a_n z_0^n + \cdots , a_1 z_0 + a_0} = \bar{0}$$

$$a_n \bar{z}_0^n + \cdots + a_1 \bar{z}_0 + a_0 = 0$$

$$\therefore \quad p(\bar{z}_0) = 0$$

از آنجا که همه روابط بالا برگشت‌پذیرند، قضیه ثابت می‌شود. □

نتیجه ۵.۲.۱. هر چندجمله‌ای درجه فرد و با ضرایب حقیقی باید حداقل یک ریشه حقیقی داشته باشد.

برهان: از قضیه ۴.۲.۱ نتیجه می‌شود. □

قضیه ۶.۲.۱. چندجمله‌ای

$$Q(z) = z^n - |a_{n-1}|z^{n-1} - |a_{n-2}|z^{n-2} - \cdots - |a_1|z - |a_0|$$

که a_iها مختلط باشند، و همگی همزمان صفر نباشند ریشه مثبت و یکتا دارد.

برهان: بدیهی است وقتی $z \longrightarrow \infty$، $Q(z) \longrightarrow \infty$ و همچنین برای $\varepsilon > 0$، به اندازه کافی کوچک $Q(\varepsilon)$ منفی است بنابراین $Q(z)$ حداقل یک ریشه مثبت دارد.

اثبات یکتایی:

فرض کنیم $Q(z)$ دو ریشه مثبت و یکتا داشته باشد. اگر قرار دهیم

$$\begin{aligned} Q_*(z) = z^n Q\Big(\frac{1}{z}\Big) &= z^n \Big(\frac{1}{z^n} - |a_{n-1}|\frac{1}{z^{n-1}} - |a_{n-2}|\frac{1}{z^{n-2}} - \cdots - |a_1| \cdot \frac{1}{z} - |a_0|\Big) \\ &= 1 - |a_{n-1}|z - |a_{n-2}|z^2 - \cdots - |a_1|z^{n-1} - |a_0|z^n \end{aligned}$$

$Q_*(z)$ نیز دو ریشه مثبت دارد لذا طبق قضیه رول یک نقطه بحرانی مثبت دارد ولی واضح است که برای $z > 0$، $Q'_*(z) < 0$ می‌باشد.

$$Q'_*(z) = -n|a_0|z^{n-1} - (n-1)|a_1|z^{n-2} - \cdots - |a_{n-1}|$$

که یک تناقض است. بنابراین $Q(z)$ فقط یک ریشه مثبت دارد. □

قضیه ۷.۲.۱. (قضیه کران کلاسیک یا قدیمی کوشی[۹]) فرض کنید $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ یک چندجمله‌ای مختلط باشد، در اینصورت همه ریشه‌های $p(z)$ در دیسک زیر قرار می‌گیرند.

$$\{z : |z| < \eta\}$$

که η ریشه مثبت و یکتای چندجمله‌ای $Q(z)$ است که ضرایبش همزمان صفر نیستند.

$$Q(z) = z^n - |a_{n-1}|z^{n-1} - |a_{n-2}|z^{n-2} - \cdots - |a_1|z - |a_0|$$

برهان: فرض کنیم ξ ریشه $p(z)$ باشد، داریم:

$$|\xi|^n = \Big|\sum_{j=0}^{n-1} a_j \xi^j\Big| \le \sum_{j=0}^{n-1} |a_j||\xi|^j$$

در نتیجه

$$|\xi|^n - \sum_{j=0}^{n-1} |a_j||\xi|^j \le 0$$

به عبارت بهتر

$$Q\big(|\xi|\big) \le 0$$

پس $|\xi|$ از η بزرگتر نیست. لذا η کران کوشی ریشه‌های f است. □

قضیه ۸.۲.۱. فرض کنیم a و b دو عدد صحیح باشند و a یا b مخالف صفر باشد، در این صورت بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b وجود دارد، بعلاوه اگر d بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک a و b باشد، آن‌گاه اعداد صحیح λ و μ یافت می‌شوند به طوری که $d = \lambda a + \mu b$.

[۹] Cauchy

قضیه ۹.۲.۱. (قضیه معادلات خطی دیوفانتوسی[10]) معادله صحیح $ax+by=c$ یک جواب دارد اگر و فقط اگر $g|c$ که $g=\gcd(a,b)$.

بعلاوه اگر $x=x_\circ$ و $y=y_\circ$ جواب‌های معلوم معادله باشند، همه جواب‌های صحیح معادله عبارتند از

$$x=x_\circ+m\cdot\frac{b}{g} \qquad m\in\mathbb{Z}$$
$$y=y_\circ+m\cdot\frac{a}{g}$$

برهان: از اینکه $(x_\circ,y_\circ)$ جواب‌های معلوم معادله‌اند داریم:

$$ax_\circ+by_\circ=c$$

از طرفی:

$$g|a\ ,\ g|b$$
$$\therefore\quad g|ax_\circ+by_\circ=c$$
$$\therefore\quad g|c$$

پس عدد صحیحی مثل c' وجود دارد که $c=gc'$، پس بنابر قضیه ۸.۲.۱ اعداد صحیح μ و λ یافت می‌شوند که $g=\lambda a+\mu b$، با ضرب طرفین این تساوی در c' به تساوی

$$(c'\lambda)a+(c'\mu)b=c'g=c$$

می‌رسیم که نتیجه می‌دهد $(c'\lambda,c'\mu)$ هم در معادله $ax+by=c$ صدق می‌کنند.

برعکس: فرض کنیم $g|c$ و $(x_\circ,y_\circ)$ یک جواب معادله مورد نظر باشد. اگر (x',y') یک جواب دلخواه معادله باشد، می‌توان نوشت:

$$ax_\circ+by_\circ=ax'+by'=c$$
$$a(x'-x_\circ)=-b(y'-y_\circ)$$
$$\frac{a}{g}(x'-x_\circ)=-\frac{b}{g}(y'-y_\circ) \qquad g\neq\circ \tag{۱.۱}$$

[10] Diophantine

از آنجا که $\frac{a}{g}$ و $\frac{b}{g}$ اعداد صحیح هستند از رابطه

$$\frac{b}{g}\Big|\frac{a}{g}(x'-x_\circ)$$

که $\gcd\left(\frac{a}{g},\frac{b}{g}\right)=۱$.
می‌توان نتیجه گرفت:

$$\frac{b}{g}\Big|x'-x_\circ$$

پس عدد صحیحی مانند k وجود دارد که

$$x'-x_\circ = k\cdot\frac{b}{g}$$
$$\therefore\quad x' = x_\circ + k\cdot\frac{b}{g}$$

با جایگذاری رابطه بالا در رابطه (۱.۱) داریم:

$$\frac{a}{g}\left(k\cdot\frac{b}{g}\right) = -\frac{b}{g}(y'-y_\circ)$$
$$\therefore\quad y' = y_\circ - k\cdot\frac{b}{g}$$

پس جواب‌های دلخواه معادله به صورت زیر در می‌آیند:

$$x_k = x_\circ + k\cdot\frac{b}{g}$$
$$y_k = y_\circ - k\cdot\frac{b}{g}$$

همچنین به سادگی می‌توان دریافت که برای عدد صحیح k، زوج (x_k,y_k) در معادله $ax+by=c$ صدق می‌کند. $\square$

قضیه ۱.۲.۱۰. [۱۲] فرض کنیم تابع $f(z)$ درون و بر روی مرز ساده بسته C تحلیلی باشد و فرض کنیم بر C، $f(z)\neq\circ$. اگر N تعداد صفرهای درون C باشد آن‌گاه:

$$\frac{۱}{۲\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = N$$
$$\int \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = i\Delta_C \arg f(z)$$
$$\frac{۱}{۲\pi}\Delta_C \arg f(z) = N$$

که به اصل شناسه (اصل آرگومان) معروف است.

که تغییرات خالص در $\arg f(z)$ به هنگام پیمایش z بر مرز C به وردنش شناسه $f(z)$ بر C موسوم است و با $\Delta_C \arg f(z)-$ نشان داده می‌شود.

فصل ۲

ریشه‌های یکهنگ چندجمله‌ای

۱.۲ مقدمه

بنابر قضیه اساسی جبر، هر چندجمله‌ای غیر ثابت حداقل یک ریشه دارد از این قضیه به راحتی می‌توان نتیجه گرفت که هر چندجمله‌ای غیر ثابت از درجه n، دقیقاً n ریشه (که لزوماً متمایز نیستند) دارد. این قضیه تعداد ریشه‌ها را مشخص می‌کند اما روشی برای پیدا کردن مکان ریشه‌ها ارائه نمی‌دهد. مطالعه مکان هندسی ریشه‌های چندجمله‌ای‌ها، مساله‌ای اساسی است که به اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم برمی‌گردد. مقاله جدید ملمان[۱] [۹] کارهای قبلی در این زمینه را بهبود بخشید و کران‌هایی بر قطاع‌های زاویه‌ای و طوق شامل ریشه‌ها ارائه نموده است.

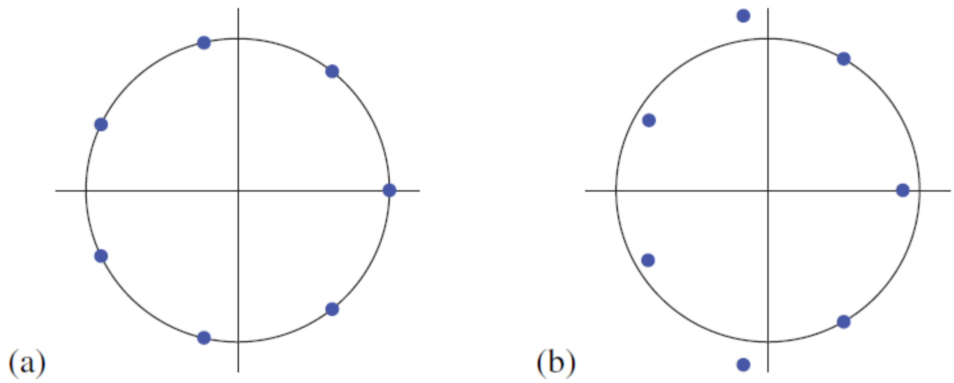
به طور کلی مساله یافتن مکان هندسی و شمارش تعداد ریشه‌های یک چندجمله‌ای با توجه به موقعیت هندسی آن‌ها که درون، برون یا روی دایره یکه قرار گرفته باشند از اهمیت

[۱] Melman

خاصی برخوردار است. به عنوان مثال الگوریتم شور_کان[۲] روشی بازگشتی است که تعداد ریشه‌های یک چندجمله‌ای مختلط را که درون، برون یا روی دایره یکه قرار گرفته‌اند، محاسبه می‌کند ولی برای پیدا کردن مکان دقیق ریشه‌ها ناکارآمد است و بعید است که فرمول واضحی برحسب درجه چندجمله‌ای و تعداد ریشه‌هایی که روی دایره یکه قرار می‌گیرند به دست آید.

۲.۲ ریشه‌های یکهنگ سه جمله‌ای $p(z) = z^n + z^k - ۱$

چندجمله‌ای $p(z) = z^۷ - ۱$ را در نظر می‌گیریم. طبق فرمول دموآور[۳] این چندجمله‌ای دارای ۷ ریشه یکهنگ به صورت کلی $e^{\frac{i۲k\pi}{۷}}$، $۰ \leq k \leq ۶,$ است در فواصل یکسان روی دایره یکه توزیع شده‌اند و همان طور که در شکل (a) نشان داده شده است در قطاع‌های زاویه‌ای $\frac{۲\pi}{۷}$ قرار گرفته‌اند. با افزودن یک جمله با درجه‌ای کمتر مانند $z^۵$، ریشه‌های چندجمله‌ای $p(z) = z^۷ + z^۵ - ۱$ از تقارن کمتری برخوردار می‌شوند و همانطور که در شکل (b) مشاهده می‌شود فقط دو ریشه یکهنگ وجود دارد.



شکل ۱.۲: ریشه‌های $p(z) = z^۷ - ۱$ در سمت چپ و ریشه‌های $p(z) = z^۷ + z^۵ - ۱$ در سمت راست روی یک دایره یکه نشان داده شده‌اند.

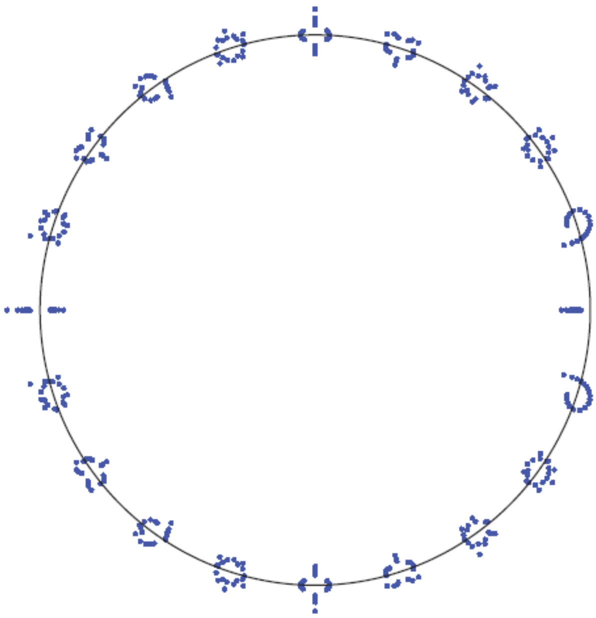
با تبدیل جمله $z^۵$ به $z^۴$، چندجمله‌ای دیگر ریشه یکهنگ ندارد. بطور کلی اگر خانواده چندجمله‌ای‌های $p(z) = z^۷ + z^k - ۱$ به ازای $k = ۱, ۲, \cdots, ۶$ را در نظر بگیریم، تنها مورد ریشه

[۲] Schur-cohn

[۳] De moivre

یکهنگ در $k = ۵$ رخ می‌دهد. افزودن جمله درجه پایین‌تر z^k به چندجمله‌ای $p(z) = z^۷ - ۱$ الگوی پیچیده‌ای برای محل ریشه‌ها به دست می‌دهد.

به عنوان مثالی دیگر شکل ۲.۲ همه ۳۸۰ ریشه‌ی خانواده چندجمله‌ای‌های $p(z) = z^{۲۰} + z^k - ۱$ را به ازای $k = ۱, ۲, \cdots, ۱۹$ نشان می‌دهد.



شکل ۲.۲: دایره یکه و ۳۸۰ ریشه‌ی $p(z) = z^{۲۰} + z^k - ۱$ برای $۱ \leq k \leq ۱۹$.

به نظر می‌رسد برخی ریشه‌ها یکهنگ باشند اما بیشتر ریشه‌ها یکهنگ نیستند. در ادامه خواهیم دید که ۸ ریشه از ۲۰ ریشه چندجمله‌ای $z^{۲۰} + z^۴ - ۱$ یکهنگ هستند، اما وقتی $k \neq ۴$ هیچ یک از ریشه‌ها بر دایره یکه قرار نمی‌گیرند.

به عنوان مثالی متفاوت اگر $n = ۱۷$، خانواده چندجمله‌ای‌های متناظر $p(z) = z^{۱۷} + z^k - ۱$، وقتی که $k = ۱, ۷, ۱۳$ دقیقاً دو ریشه یکهنگ دارد و برای سایر مقادیر ریشه یکهنگ وجود ندارد. با توجه به مثال‌های بالا در این بخش وجود و تعداد ریشه‌های یکهنگ خانواده چندجمله‌ای‌های $p(z) = z^n + z^k - ۱$ مورد بررسی قرار می‌گیرد. در سراسر بخش فرض می‌کنیم n و k اعداد طبیعی هستند و $۱ \leq k \leq n - ۱$.

شرایط لازم و کافی برای آنکه $p(z) = z^n + z^k - ۱$ ریشه یکهنگ داشته باشد

لم ۱.۲.۲. اگر $p(z) = z^n + z^k - ۱$ ریشه یکهنگ داشته باشد آن‌گاه $(n+k) \equiv ۰$ (پیمانه ۶).

برهان: فرض کنیم $p(z) = z^n + z^k - ۱$ دارای ریشه یکهنگی به فرم $e^{i\theta}$ باشد، با جایگذاری این ریشه در معادله $p(z) = ۰$ و بازنویسی آن داریم:

$$e^{in\theta} + e^{ik\theta} = ۱ \qquad (۱.۲)$$

$$\overline{e^{in\theta} + e^{ik\theta}} = \overline{۱}$$

$$\overline{e^{in\theta}} + \overline{e^{ik\theta}} = ۱ \qquad (۲.۲)$$

فرض کنیم $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ اعداد مختلطی باشند که خود و مزدوجشان در روابط (۱.۲) و (۲.۲) صدق کنند پس می‌توان نوشت:

$$z + z' = ۱$$

$$(x+iy) + (x'+iy') = ۱$$

$$\begin{cases} x + x' = ۱ \\ y + y' = ۰ \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = ۱ - x' \\ y = -y' \end{cases} \qquad (۳.۲)$$

از یکهنگ بودن z و z' داریم:

$$x^۲ + y^۲ = ۱ \quad \text{و} \quad x'^۲ + y'^۲ = ۱$$

از روابط بالا و رابطه (۳.۲) نتیجه می‌گیریم:

$$x^۲ = ۱ - y^۲ = ۱ - y'^۲ = x'^۲$$

$$\therefore \quad x = \pm x'$$

با توجه به رابطه (۳.۲)، $x = -x'$ قابل قبول نیست پس $x = x' = \frac{۱}{۲}$ و $y = -y' = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

به عبارت دیگر تنها اعداد مختلطی که خود و مزدوجشان در روابط (۱.۲) و (۲.۲) صدق می‌کنند $\frac{۱}{۲}\pm i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ هستند که می‌توان به صورت $e^{\pm i\frac{\pi}{۳}}$ در مختصات قطبی نوشت.
با توجه به زاویه‌های $n\theta$ و $k\theta$ در می‌یابیم که مقادیر α و β که در هر دو معادله صدق می‌کنند عبارتند از:

$$n\theta = \pm\frac{\pi}{۳} + ۲\pi\alpha$$
$$k\theta = \pm\frac{\pi}{۳} + ۲\pi\beta$$

با حل دو معادله بالا برحسب θ و مساوی قرار دادن نتایج داریم:

$$\pm\frac{\pi}{۳n} + \frac{۲\pi\alpha}{n} = \pm\frac{\pi}{۳k} + \frac{۲\pi\beta}{k}$$
$$(n+k) = \pm۶(n\beta - k\alpha) \tag{۴.۲}$$
$$(n+k) = ۰ \qquad (\text{پیمانه } ۶)$$

□

از لم ۱.۲.۲ می‌توان نتیجه گرفت که اگر (پیمانه ۶) $(n+k)\neq ۰$، چندجمله‌ای $p(z)$ ریشه یکهنگ ندارد.

لم بالا شرط لازم برای n و k می‌دهد ولی کافی نیست چرا که چندجمله‌ای‌های $z^۴+z^۲-۱$ و $z^۹+z^۳-۱$ هر دو در شرط لم ۱.۲.۲ صدق می‌کنند اما هیچکدام ریشه یکهنگ ندارند. در دو مثال بالا $\gcd(n,k)\neq ۱$، با تغییر متغیر $w=z^۲$ و $u=z^۳$ چندجمله‌ای‌های بالا به ترتیب به چندجمله‌ای‌های $w^۲+w-۱$ و $u^۳+u-۱$ تبدیل می‌شوند که هیچ کدام ریشه یکهنگ ندارند.
این مشاهده ما را به لم بعدی رهنمون می‌سازد:

لم ۲.۲.۲. چندجمله‌ای $p(z)=z^n+z^k-۱$ ریشه یکهنگ دارد اگر و فقط اگر چندجمله‌ای $q(z)=z^{\frac{n}{g}}+z^{\frac{k}{g}}-۱$ ریشه یکهنگ داشته باشد که $g=\gcd(n,k)$.

برهان: فرض کنیم λ ریشه یکهنگ $p(z)$ باشد. پس λ^g هم ریشه یکهنگ $q(z)$ خواهد بود. چون:

$$q(\lambda^g) = (\lambda^g)^{\frac{n}{g}} + (\lambda^g)^{\frac{k}{g}} - ۱ = \lambda^n + \lambda^k - ۱ = p(\lambda) = ۰$$

برعکس فرض کنیم γ ریشه یکهنگ $q(z)$ باشد و w ریشه gام γ باشد یعنی $w^g = \gamma$ پس:

$$p(w) = w^n + w^k - ۱ = (w^g)^{\frac{n}{g}} + (w^g)^{\frac{k}{g}} - ۱ = q(\gamma) = ۰$$

□

لم ۲.۲.۲ نشان می‌دهد که کافی است چندجمله‌ای‌هایی را مورد بررسی قرار دهیم که n و k نسبت به هم اول باشند، در مواردی که $\gcd(n,k) = g > ۱$ چندجمله‌ای $q(z) = z^{\frac{n}{g}} + z^{\frac{k}{g}} - ۱$ مورد بررسی قرار گیرد که در این حالت ریشه‌های یکهنگ p، به ترتیب با ریشه‌های یک تا gام ریشه‌های یکهنگ q متناظر خواهند بود.

با شرط $\gcd(n,k) = ۱$ می‌توان عکس لم ۱.۲.۲ را بیان و اثبات کرد. اثبات عکس لم ۱.۲.۲ به نتایج قضیه معادلات خطی دیوفانتوسی وابسته است.

لم ۳.۲.۲. اگر در چندجمله‌ای $p(z) = z^n + z^k - ۱$

$$\gcd(n,k) = ۱\ ,\ (n+k) \equiv ۰ \qquad (\text{پیمانه } ۶)$$

آن‌گاه $e^{\pm i\frac{\pi}{۳}}$ تنها ریشه‌های یکهنگ $p(z)$ خواهند بود.

برهان: در ابتدا توجه می‌کنیم که با توجه به فرض، مجموع n و k مضربی از ۶ است و نیز n و k نسبت به هم اول هستند پس n و k را نمی‌توان به صورت‌های $۶h$، $۶h+۲$، $۶h+۳$ و یا $۶h+۴$ نوشت، پس فقط همنهشت ±۱ خواهند بود به پیمانه ۶، یعنی اعداد غیرمنفی s و t وجود دارند به طوری که $n = ۶s \pm ۱$ و $k = ۶t \mp ۱$.

فرض کنیم $n = ۶s + ۱$ و $k = ۶t - ۱$ (اثبات در حالت دیگر مشابه است.)

لذا می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} p(z) &= z^{۶s+۱} + z^{۶t-۱} - ۱ \\ &= z^{۶s} \cdot z + z^{۶t}\left(\frac{۱}{z}\right) - ۱ \end{aligned}$$

بنابراین

$$p\left(e^{\pm i\frac{\pi}{۳}}\right) = \left(e^{\pm i\frac{\pi}{۳}}\right)^{۶s} \cdot e^{\pm i\frac{\pi}{۳}} + \left(e^{\pm i\frac{\pi}{۳}}\right)^{۶t} \cdot e^{\mp i\frac{\pi}{۳}} - ۱$$

با توجه به اینکه $\left(e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right)^{6s} = \left(e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right)^{6t} = 1$ داریم:

$$p\left(e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right) = \left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 1$$
$$= 0$$

برعکس فرض می‌کنیم $p(e^{i\theta}) = 0$، نشان می‌دهیم $\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2\ell\pi$ که $\ell \in \mathbb{Z}$.

می‌دانیم که معادله $(n+k) = \pm 6(n\beta - k\alpha)$ از این فرض که p ریشه یکهنگ دارد به دست می‌آید. در واقع معادله بالا دو معادله خطی دیوفانتوسی زیر با متغیرهای α و β است:

$$-6k\alpha + 6n\beta = n + k \tag{۵.۲}$$

$$6k\alpha - 6n\beta = n + k \tag{۶.۲}$$

و طبق قضیه معادلات خطی دیوفانتوسی، دارای جواب هستند در صورتی که $\gcd(6n, 6k) | n + k$، که به سادگی از فرض $\gcd(n, k) = 1$ و این که $\gcd(6k, 6n) = 6$ و $6 | n + k$ نتیجه می‌شود.

از اینکه $n+k$ بر ۶ بخشپذیر است و $k = 6t - 1$ و $n = 6s + 1$، نتیجه می‌گیریم که زوج $\beta = t$ و $\alpha = s$ جواب معادله (۵.۲) و زوج $\beta = k - t$ و $\alpha = n - s$ جواب معادله (۶.۲) خواهند بود.

پس طبق قضیه معادلات خطی دیوفانتوسی همه جواب‌های صحیح معادله (۵.۲) به صورت

$$\alpha = s + m.n \quad , \quad \beta = t + m.k \quad m \in \mathbb{Z} \tag{۷.۲}$$

و به طور مشابه همه جواب‌های صحیح معادله (۶.۲) به صورت

$$\alpha = n - s - m.n \quad , \quad \beta = k - t - m.k \quad m \in \mathbb{Z} \tag{۸.۲}$$

خواهند بود. با یادآوری اینکه معادله‌های زیر از فرض ریشه یکهنگ بودن $e^{i\theta}$ به دست می‌آید داریم:

$$n\theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi\alpha$$
$$k\theta = \mp\frac{\pi}{3} + 2\pi\beta$$
$$\theta(n+k) = 2\pi(\alpha + \beta)$$

با جایگذاری $k=6t-1$ و $n=6s+1$ در رابطه بالا و محاسبه θ، به تساوی زیر می‌رسیم:

$$\theta=\frac{\pi}{3}.\frac{(\alpha+\beta)}{s+t} \tag{9.2}$$

با جایگزین‌کردن مقادیر ممکن برای α و β از رابطه‌های (۷.۲) و (۸.۲) در رابطه (۹.۲) داریم:

$$\theta=\frac{\pi}{3}.\frac{s+t+m.(n+k)}{s+t}=\frac{\pi}{3}+2m\pi$$

و

$$\theta=\frac{\pi}{3}.\frac{(n+k-(s+t)-m(n+k))}{s+t}=-\frac{\pi}{3}+(1-m)2\pi$$

به بیان دیگر $\theta\equiv\pm\frac{\pi}{3}$ (پیمانه 2π). □

حال می‌توان به طور کامل مشخص کرد که کی و کجا خانواده چندجمله‌ای‌های مختلط، ریشه‌های یکهنگ دارند.

قضیه ۴.۲.۲. فرض کنیم $p(z)=z^n+z^k-1$ و $g=\gcd(n,k)$. اگر $6\left|\frac{n}{g}+\frac{k}{g}\right.$ آن‌گاه p دقیقاً $2g$ ریشه یکهنگ دارد که زوج‌های مزدوج z_m و $\overline{z}_m$ از $z_m=e^{i\left(\frac{\pi}{3g}+\frac{2\pi m}{g}\right)}$ که $0\le m\le g-1$ به دست می‌آیند.

برهان: قرار می‌دهیم $q(z)=z^{\frac{n}{g}}+z^{\frac{k}{g}}-1$. با توجه به فرض قضیه می‌توان نتیجه گرفت

$$\frac{n}{g}+\frac{k}{g}\equiv 0 \qquad (\text{پیمانه } 6)$$

و $\gcd\left(\frac{n}{g},\frac{k}{g}\right)=1$، پس طبق لم (۳.۲.۲)، $e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ تنها ریشه‌های یکهنگ $q(z)$ خواهند بود. و طبق لم (۲.۲.۲)، $p(z)$ نیز ریشه یکهنگ دارد. فرض کنیم $z=e^{i\theta}$ ریشه یکهنگ $p(z)$ باشد لذا می‌توان نوشت:

$$z^g=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

$$(e^{i\theta})^g=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

$$e^{ig\theta}=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

$$g\theta=\pm i\frac{\pi}{3}+2m\pi$$

$$\theta=\pm i\frac{\pi}{3g}+\frac{2\pi m}{g} \qquad 0\le m\le g-1$$

پس ریشه‌های یکهنگ $p(z)$ را می‌توان به فرم زیر نوشت:

$$z_m = e^{i\left(\frac{\pi}{۳g}+\frac{۲\pi m}{g}\right)}$$

و

$$\bar{z}_m = e^{-i\left(\frac{\pi}{۳g}+\frac{۲\pi m}{g}\right)}$$

که $۰ \leq m \leq g - ۱$.

بنابراین p، دقیقاً $۲g$ ریشه یکهنگ دارد. □

فرض کنیم $n = ۷۰$، چندجمله‌ای $p(z) = z^{۷۰} + z^k - ۱$ را در نظر می‌گیریم. با آزمون و خطا در می‌یابیم که تنها ۶ مقدار برای k وجود دارد که

$$\frac{۷۰}{\gcd(۷۰, k)} + \frac{k}{\gcd(۷۰, k)} = ۰ \qquad (\text{پیمانه } ۶)$$

مقادیر k و تعداد ریشه‌های یکهنگ $p(z)$ در جدول زیر نشان داده شده است:

k	$\gcd(n, k)$	تعداد ریشه‌های یکهنگ
۲	۲	۴
۱۴	۱۴	۲۸
۲۶	۲	۴
۳۸	۲	۴
۵۰	۱۰	۲۰
۶۲	۲	۴

جدول ۱.۲: برای $n = ۷۰$، مقادیر k که ریشه یکهنگ دارند

از بین ۴۸۳۰ $(= ۶۹ \times ۷۰)$ ریشه خانواده $p(z) = z^{۷۰} + z^k - ۱$، تنها ۶۴ ریشه یکهنگ هستند. تعداد ریشه‌های یکهنگ خانواده‌ای از چندجمله‌ای‌های درجه n، بسیار متغیر است. در جدول زیر تعداد ریشه‌های یکهنگ برای چند مقدار مختلف n داده شده است.

n	۵۰	۵۱	۵۲	۵۳	۵۴	۵۵	۶۹	۷۰	۷۱	۸۰	۹۰	۱۰۰
ریشه یکهنگ	۳۲	۱۸	۸	۱۸	۰	۵۴	۲۴	۶۴	۲۴	۳۲	۳۶	۶۴

جدول ۲.۲: تعداد ریشه‌های یکهنگ برای مقادیر مختلف n

مشاهدات زیر از جدول بالا به دست می‌آیند:

۱ــ در حالتی که $n = ۲^{\mu}۳^{\nu}$ که $\mu, \nu \in \mathbb{N}$، ریشه یکهنگ وجود ندارد نظیر $n = ۵۴$ یا $n = ۷۲$.

۲ــ در حالتی که $n \geq ۵$ اول باشد، کافی است $k_۰$ را کوچکترین عدد مثبتی در نظر بگیریم که $n + k_۰$، مضربی از ۶ باشد، برای هر $m = ۰, ۱, \cdots$ که $k = k_۰ + ۶m$ تا جایی که $k \leq n - ۱$، دقیقاً یک جفت ریشه مزدوج یکهنگ وجود دارد. مانند $n = ۵۳$، قرار می‌دهیم $k_۰ = ۱$ و برای هر k که $m = ۰, ۱, \cdots, ۸$، $k = ۱ + ۶m$، ۹ جفت ریشه یکهنگ وجود دارد.

۳.۲ ریشه‌های یکهنگ چندجمله‌ای‌های خاص لیتل وود

در این بخش به بررسی ریشه‌های یکهنگ چندجمله‌ای‌های متقارن چپ لیتل وود و چندجمله‌ای‌های خودمعکوس لیتل وود می‌پردازیم. در ابتدا لازم است که برخی از ویژگی‌های چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول و دوم را بیان کنیم.

با یادآوری اینکه برای هر عدد صحیح نامنفی n

$$T_n(c) = \cos n\theta \qquad\qquad c = \cos\theta$$

و

$$U_n(c) = \frac{\sin\left((n+۱)\theta\right)}{\sin\theta} \qquad\qquad c = \cos\theta$$

را به ترتیب چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول و نوع دوم می‌نامیم.

به کمک اتحادهای مثلثاتی برای $n \geq ۱$ داریم:

$$T_{n+۱} = \cos(n+۱)\theta = \cos(n\theta + \theta) = \cos n\theta \cdot \cos\theta + \sin\theta \cdot \sin n\theta$$

با اضافه و کم کردن عبارت $\cos n\theta \cdot \cos\theta$ عبارت بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$T_{n+۱} = ۲\cos\theta \cdot \cos n\theta - \cos\left((n-۱)\theta\right)$$

و در نتیجه

$$T_{n+1} = ۲c \cdot T_n - T_{n-۱} \tag{۱۰.۲}$$

برای به دست آوردن رابطه

$$U_{n+1} = ۲cU_n - U_{n-۱} \tag{۱۱.۲}$$

می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
U_{n+۱} = \frac{\sin\big((n+۲)\theta\big)}{\sin\theta} &= \frac{\sin n\theta \cdot \cos ۲\theta + \cos n\theta \cdot \sin ۲\theta}{\sin\theta} \\
&= \frac{۱}{\sin\theta}\Big[\sin n\theta\big(۲\cos^۲\theta - ۱\big) + \cos n\theta \cdot \big(۲\sin\theta \cdot \cos\theta\big)\Big] \\
&= \frac{۱}{\sin\theta}\Big[۲\cos\theta\big(\cos\theta \cdot \sin n\theta + \cos n\theta \cdot \sin\theta\big) - \sin n\theta\Big] \\
&= \frac{۱}{\sin\theta}\Big[۲\cos\theta \cdot \sin\big((n+۱)\theta\big) - \sin n\theta\big)\Big] \\
&= ۲c \cdot U_n - U_{n-۱}
\end{aligned}$$

برخی دیگر از ویژگی‌های مربوط به چندجمله‌ای‌های چبیشف به استقراء ثابت می‌شوند.

۱ــ T_n و U_n چندجمله‌ای‌های فرد هستند اگر n فرد باشد و اگر n زوج باشد، T_n و U_n چندجمله‌ای‌های زوج هستند.

برهان: از آنجا که برای $n = ۱$ و $n = ۲$ داریم:

$$T_۱ = c$$

$$T_۲ = ۲c^۲ - ۱$$

حکم برای $n = ۱,۲$ برقرار است. فرض کنیم حکم استقراء برای $n = k$ و $n = k+۱$ هم برقرار باشد. با استفاده از رابطه (۱۰.۲)، اگر n زوج باشد $T_{n+۱}$ به صورت تفاضل دو چندجمله‌ای فرد در می‌آید و لذا فرد است، همچنین اگر n فرد باشد $n+۱$ عددی زوج است و $T_{n+۱}$ تفاضل دو چندجمله‌ای زوج است.

به همین ترتیب برای U_n نیز می‌توان نتیجه را به دست آورد. □

۲ـ برای $n \geq ۱$، جمله پیشرو T_n، $۲^{n-۱}c^n$ است و برای $n \geq ۰$ جمله پیشرو U_n، $۲^n c^n$ است.

برهان: بدیهی است که حکم برای $n = ۱$ برقرار است. فرض کنیم حکم برای $n = k$ هم برقرار باشد. نشان می‌دهیم جمله پیشرو $T_{n+۱}$، $۲^n c^{n+۱}$ است. از آنجا که

$$T_{n+۱} = ۲c \cdot T_n - T_{n-۱} \tag{۱۲.۲}$$

جمله پیشرو T_n و $T_{n-۱}$ به ترتیب $۲^{n-۱}c^n$ و $۲^{n-۲}c^{n-۱}$ است پس طبق رابطه (۱۲.۲) جمله پیشرو $T_{n+۱}$ برابر

$$۲c \cdot ۲^{n-۱}c^n = ۲^n c^{n+۱}$$

خواهد بود.

به همین ترتیب ثابت می‌شود جمله پیشرو U_n برای $n \geq ۰$، $۲^n c^n$ است. □

۳ـ U_n را می‌توان به صورت ترکیب خطی از $T_۰$، $T_۱$، $\cdots$ ، T_n نوشت:

$$U_{۲m} = T_۰ + \sum_{k=۱}^{m} ۲T_{۲k}$$
$$U_{۲m+۱} = \sum_{k=۰}^{m} ۲T_{۲k+۱}$$

در زیر $U_۴$ و $U_۹$ به صورت ترکیب خطی از T_nها نوشته شده‌اند:

$$U_۴ = T_۰ + ۲T_۲ + ۲T_۴$$

$$U_۹ = ۲T_۱ + ۲T_۳ + ۲T_۵ + ۲T_۷ + ۲T_۹$$

برهان: با استفاده از اتحاد مثلثاتی

$$\sin\big((n+۱)\theta\big) - \sin\big((n-۱)\theta\big) = ۲\sin\theta \cdot \cos n\theta$$

داریم:

$$U_n - U_{n-۲} = ۲T_n \tag{۱۳.۲}$$

اگر $m = ۰$ داریم:

$$U_۰ = T_۰ = ۱$$

فرض کنیم برای $n = ۲(m-۱)$ داشته باشیم:

$$U_{۲(m-۱)} = T_۰ + \sum_{k=۱}^{m-۱} ۲T_{۲k}$$

پس طبق رابطه (۱۳.۲) برای $n = ۲m$ می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{aligned} U_{۲m} - U_{۲(m-۱)} &= ۲T_{۲m} \\ U_{۲m} = U_{۲(m-۱)} + ۲T_{۲m} &= T_۰ + \sum_{k=۱}^{m-۱} ۲T_{۲k} + ۲T_{۲m} \\ &= T_۰ + \sum_{k=۱}^{m} ۲T_{۲k} \end{aligned}$$

اگر n فرد باشد، داریم:

$$U_۱ = ۲T_۱ = ۲c$$

فرض کنیم برای $n = ۲m - ۱$ داشته باشیم:

$$U_{۲(m-۱)+۱} = U_{۲m-۱} = \sum_{k=۰}^{m-۱} ۲T_{۲k+۱}$$

با استفاده از رابطه (۱۳.۲) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} U_{۲m+۱} - U_{۲m-۱} &= ۲T_{۲m+۱} \\ U_{۲m+۱} &= \sum_{k=۰}^{m-۱} ۲T_{۲k+۱} + ۲T_{۲m+۱} = \sum_{k=۰}^{m} ۲T_{۲k+۱} \end{aligned}$$

□

اگر متغیر x را به صورت $x := ۲c$ تعریف کنیم، $۲T_n$ و U_n را می‌توان به صورت چندجمله‌ای‌هایی برحسب x در نظر گرفت که ضرایب صحیح دارند. بنابراین $T_۰$، $۲T_۱$، $\cdots$ و $U_۰$، $U_۱$، $\cdots$ به $\mathbb{Z}[x]$ تعلق دارند.

توجه می‌کنیم که وقتی U_n به عنوان یک چندجمله‌ای در $\mathbb{Z}[x]$ در نظر گرفته می‌شود جمله پیشرو آن x^n است، همچنین جمله پیشرو $۲T_n$ وقتی $n \geq ۱$ نیز x^n است. از این به بعد برای جلوگیری از ابهام، هرگاه U_n و $۲T_n$ را به صورت چندجمله‌ای‌هایی برحسب x در نظر بگیریم آن‌ها را به صورت $\overline{U_n}$ و $\overline{۲T_n}$ می‌نویسیم.

فرض کنیم φ همومورفیسم طبیعی از $\mathbb{Z}$ به $\mathbb{Z}_۲$ باشد و Φ همومورفیسمی از $\mathbb{Z}[x]$ به $\mathbb{Z}_۲[x]$ باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Phi(a_۰ + a_۱x + \cdots + a_nx^n) = \varphi(a_۰) + \varphi(a_۱)x + \cdots + \varphi(a_n)x^n$$

(به این معنی که Φ همه ضرایب را به پیمانه ۲ تقلیل می‌دهد)

لم ۲.۳.۱. فرض کنیم n عدد صحیح نامنفی باشد و $A(x)$ و $B(x)$ دو چندجمله‌ای در $\mathbb{Z}[x]$ باشند که در شرایط زیر صدق کنند:

$$\deg A(x) = n + ۱$$

$$\deg B(x) = n$$

$$\Phi\big(A(x)\big) = \Phi\big(\overline{U_{n+۱}}\big)$$

$$\Phi\big(B(x)\big) = \Phi\big(\overline{U_n}\big)$$

و یکی از $A(x)$ و $B(x)$ فرد و دیگری زوج باشد.

در این صورت هیچ عدد مختلطی همزمان ریشه $A(x)$ و $B(x)$ نیست.

برهان: (با استقرا) اگر $n = ۰$، طبق فرض لم، $B(x)$ چندجمله‌ای ثابت غیر صفر و فرد است چون:

$$\Phi(B(x)) = \Phi(U_۰) = \Phi(۱) = ۱$$

$$\therefore \quad \Phi(B(x)) = ۱$$

پس فاقد ریشه است در نتیجه $A(x)$ و $B(x)$ ریشه مشترکی نخواهند داشت و حکم برقرار است.

فرض کنیم $A(x)$ و $B(x)$ دو چندجمله‌ای در $\mathbb{Z}[x]$ باشند که در شرایط زیر صدق می‌کنند:

$$\deg\big(A(x)\big) = n + ۲$$

$$\deg\big(B(x)\big) = n + ۱$$

$$\Phi\big(A(x)\big) = \Phi\big(\overline{U_{n+۲}}\big)$$

$$\Phi\big(B(x)\big) = \Phi\big(\overline{U_{n+۱}}\big)$$

یکی از $A(x)$ و $B(x)$ فرد و دیگری زوج باشد. (فرض استقرا)

می‌خواهیم نشان دهیم $A(x)$ و $B(x)$ ریشه مشترک ندارند، از فرض نتیجه می‌گیریم که جمله پیشرو $A(x)$، ax^{n+2} است که a فرد است (در غیر این صورت $\Phi(A(x)) = \Phi(\overline{U_n})$ که خلاف فرض است.) و جمله پیشرو $B(x)$، bx^{n+1} است که b فرد است. (در غیر این صورت $\Phi(B(x)) \neq \Phi(\overline{U_{n+1}})$)

قرار می‌دهیم:

$$r := \operatorname{lcm}(a,b)$$
$$s := \frac{r}{a}$$
$$t := \frac{r}{b}$$

پس r، s و t اعداد فرد هستند. قرار می‌دهیم:

$$C(x) = sA(x) - txB(x)$$

$C(x)$ ترکیبی خطی از $A(x)$ و $B(x)$ است که جمله x^{n+2} از بین رفته است، از طرفی $C(x)$ فرد است اگر $A(x)$ فرد باشد و زوج خواهد بود اگر $A(x)$ زوج باشد. (چون اگر $A(x)$ زوج باشد، پس $B(x)$ فرد است و $C(x)$ به صورت تفاضل دو چندجمله‌ای زوج در می‌آید، به همین ترتیب اگر $A(x)$ فرد باشد، $C(x)$ هم فرد است.)

لذا می‌توان نوشت:

$$\Phi\big(C(x)\big) = \Phi\Big(sA(x) - t\cdot xB(x)\Big)$$

از آنجا که Φ هومومورفیسم است پس:

$$= \Phi(s)\Phi(A(x)) + \Phi(t)\Phi(-x)\Phi(B(x))$$

با توجه به فرد بودن s و t و فرض استقرا داریم:

$$\Phi(\overline{U_{n+2}}) + \Phi(-x\overline{U_{n+1}}) = \Phi(\overline{U_{n+2}} - x\overline{U_{n+1}})$$

که با توجه به رابطه

$$U_{n+1} = xU_n - U_{n-1}$$

نتیجه می‌گیریم:

$$\Phi(C(x)) = \Phi(\overline{U_n})$$
$$\therefore \deg C(x) = n$$

به این معنی که $B(x)$ و $C(x)$ در شرایط فرض استقراء صدق می‌کنند. لذا هیچ ریشه مشترکی ندارند پس $A(x)$ و $B(x)$ هم ریشه مشترک ندارند. $\square$

به عنوان مثال $A(x) = ۵x^۴ - ۳x^۲ + ۷$ و $B(x) = ۷x^۳ + ۲x$ را در نظر می‌گیریم:

$$\Phi(A(x)) = x^۴ - x^۲ + ۱ \qquad \overline{U_۴} = x^۴ - ۳x^۲ + ۱$$
$$\Phi(\overline{U_۴}) = x^۴ - x^۲ + ۱ \qquad \overline{U_۳} = x^۳ - ۲x$$
$$\Phi(B(x)) = x^۳$$
$$\Phi(\overline{U_۳}) = x^۳$$

$A(x)$ زوج و $B(x)$ فرد است. و طبق لم بالا، هیچ ریشه مشترکی ندارند.

با حل دو معادله $۵x^۴ - ۳x^۲ + ۷$ و $۷x^۳ + ۲x$ نیز درستی نتیجه بالا به دست می‌آید.

قضیه ۲.۳.۲. چندجمله‌ای‌های متقارن چپ لیتل وود، ریشه یکهنگ ندارند.

برهان: فرض کنیم $\alpha(z)$ یک چندجمله‌ای متقارن چپ لیتل وود باشد. درجه $\alpha(z)$ زوج است چون تعداد جملات $\alpha(z)$، فرد است پس $n - ۱$ زوج است، لذا می‌توان نوشت:

$$\alpha(z) = a_۰ + a_۱ z + \cdots + a_{۲m} z^{۲m} \qquad a_i = \pm ۱$$

و $a_{m+j} = (-۱)^j a_{m-j}$، که $j = ۱, ۲, \cdots, m$. پس

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(z)}{z^m} &= a_۰ \cdot \frac{۱}{z^m} + \cdots + a_{m-۱}\frac{۱}{z} + a_m + a_{m+۱} z + \cdots + a_{۲m} z^m \\ &= a_m + \sum_{j=۱}^{m} \left(a_{m+j} z^j + a_{m-j} \frac{۱}{z^j} \right)\end{aligned}$$

از اینکه $a_{m-j} = (-۱)^j a_{m+j}$ داریم:

$$= a_m + \sum_{j=۱}^{m} \left(a_{m+j} z^j + (-۱)^j a_{m+j} \frac{۱}{z^j} \right)$$

$$= a_m + \sum_{j=1}^{m} a_{m+j}\left(z^j + (-1)^j \frac{1}{z^j}\right)$$

قرار می‌دهیم:

$$f(z) := a_m + \sum_{j=1}^{m} a_{m+j}\left(z^j + (-1)^j \frac{1}{z^j}\right)$$

از آنجا که $\alpha(z)$ ریشه یکهنگ ندارد معادل است با $f(z)$ ریشه یکهنگ ندارد و آن هم با $f(iz)$ ریشه یکهنگ ندارد معادل است، پس کافی است نشان دهیم $f(iz)$ ریشه یکهنگ ندارد لذا:

$$\begin{aligned}
f(iz) &= a_m + \sum_{j=1}^{m} a_{m+j}\left((iz)^j + (-1)^j \frac{1}{(iz)^j}\right)\\
&= a_m + \sum_{j=1}^{m} a_{m+j}\left(i^j z^j + \left(\frac{-1}{i}\right)^j \frac{1}{z^j}\right)\\
&= a_m + \sum_{j=1}^{m} a_{m+j}\; i^j\left(z^j + \frac{1}{z^j}\right)\\
&= a_m + \sum_{j=1}^{m} a_{m+j}\; i^j 2\cos j\theta \qquad (z = e^{i\theta})
\end{aligned}$$

در روابط بالا از $i = -\frac{1}{i}$ و $z^j + \frac{1}{z^j} = 2\cos j\theta$ استفاده کردیم.

در ادامه نشان می‌دهیم $\operatorname{Re} f(iz)$ و $\operatorname{Im} f(iz)$ هر دو همزمان صفر نیستند. با یادآوری اینکه $a_i = \pm 1$، قرار می‌دهیم $r := \left[\frac{m}{2}\right]$.

$$\operatorname{Re} f(iz) = \pm 1 \pm 2\cos 2\theta \pm 2\cos 4\theta \pm \cdots \pm 2\cos 2r\theta$$

$$\operatorname{Im} f(iz) = \pm 2\cos\theta \pm 2\cos 3\theta \pm 2\cos 5\theta \pm \cdots \pm 2\cos\left((2r \pm 1)\theta\right)$$

که با توجه به تعریف چندجمله‌ای‌های چبیشف دو تساوی بالا را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\operatorname{Re} f(iz) = \pm 1 \pm 2T_2 \pm 2T_4 \pm \cdots \pm 2T_{2r}$$

$$\operatorname{Im} f(iz) = \pm 2T_1 \pm 2T_3 \pm 2T_5 \pm \cdots \pm 2T_{2r\pm 1}$$

قرار می‌دهیم $A := \operatorname{Re} f(iz)$ و $B := \operatorname{Im} f(iz)$. پس A و B چندجمله‌ای‌های برحسب x با ضرایب صحیح می‌باشند که $x = 2c = 2\cos\theta$.

A و B در فرض لم ۱.۲.۲ صدق می‌کنند زیرا:

$$\deg\big(A(x)\big) = ۲r$$
$$\deg\big(B(x)\big) = ۲r \pm ۱$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned}
\Phi(A) &= \Phi(۱ \pm \overline{۲T_۲} \pm \overline{۲T_۴} \pm \cdots \pm \overline{۲T_{۲r}}) \\
&= \Phi(\pm ۱) + \Phi(\pm\overline{۲T_۲}) + \Phi(\pm\overline{۲T_۴}) + \cdots + \Phi(\pm\overline{۲T_{۲r}}) \\
&= \Phi(۱) + \Phi(\overline{۲T_۲}) + \Phi(\overline{۲T_۴}) + \cdots + \Phi(\overline{۲T_{۲r}}) \\
&= \Phi(۱ + \overline{۲T_۲} + \overline{۲T_۴} + \cdots + \overline{۲T_{۲r}}) \\
&= \Phi(\overline{U_{۲r}})
\end{aligned}$$

و نیز

$$\begin{aligned}
\Phi(B) &= \Phi(\pm\overline{۲T_۱} \pm \overline{۲T_۳} \pm \overline{۲T_۵} \pm \cdots \pm \overline{۲T_{۲r\pm۱}}) \\
&= \Phi(\pm\overline{۲T_۱}) + \Phi(\pm\overline{۲T_۳}) + \Phi(\pm\overline{۲T_۵}) + \cdots + \Phi(\pm\overline{۲T_{۲r\pm۱}}) \\
&= \Phi(\overline{۲T_۱}) + \Phi(\overline{۲T_۳}) + \Phi(\overline{۲T_۵}) + \cdots + \Phi(\overline{۲T_{۲r\pm۱}}) \\
&= \Phi(\overline{۲T_۱} + \overline{۲T_۳} + \overline{۲T_۵} + \cdots + \overline{۲T_{۲r\pm۱}}) \\
&= \Phi(\overline{U_{۲r\pm۱}})
\end{aligned}$$

$A(x)$ زوج و $B(x)$ فرد است، لذا $A(x) = \operatorname{Re} f(iz)$ و $B(x) = \operatorname{Im} f(iz)$ هیچ‌گاه با هم صفر نمی‌شوند در نتیجه $f(iz)$ ریشه ندارد و قضیه ثابت می‌شود.

برای آنکه ثابت کنیم هر چندجمله‌ای خودمعکوس لیتل وود، حداقل یک ریشه یکهنگ دارد قضایای زیر را ثابت می‌کنیم. □

قضیه ۳.۳.۲. اگر تابع f از $[\circ, \pi]$، به $\mathbb{R}$، به صورت

$$f(\theta) = \cos n\theta + a_{n-۱}\cos\big((n-۱)\theta\big) + \cdots + a_۱\cos\theta$$

باشد که $a_۱$، $\cdots$ ، $a_{n-۱}$ حقیقی باشند، آن‌گاه برای برخی θهای عضو $[\circ, \pi]$، $f(\theta) = ۱$ و برای برخی θهای عضو $[\circ, \pi]$، $f(\theta) = -۱$.

برهان: چندجمله‌ای $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z \pm 1$ را در نظر می‌گیریم. برای $z = e^{i\theta}$ داریم:

$$p(e^{i\theta}) = e^{in\theta} + a_{n-1}e^{i(n-1)\theta} + \cdots + a_1 e^{i\theta} \pm 1$$
$$= \cos n\theta + a_{n-1}\cos(n-1)\theta + \cdots + a_1\cos\theta \pm 1$$
$$+ i(\sin n\theta + a_{n-1}\sin(n-1)\theta + \cdots + a_1\sin\theta)$$

پس:

$$\mathrm{Re}\,\left(p(e^{i\theta})\right) = \cos n\theta + a_{n-1}\cos(n-1)\theta + \cdots + a_1\cos\theta \pm 1$$

لذا می‌توان نوشت:

$$f(\theta) \pm 1 = \mathrm{Re}\,\left(p(e^{i\theta})\right)$$

از آنجا که حاصل‌ضرب همه ریشه‌های p، ± 1 است نتیجه می‌گیریم p حداقل یک ریشه درون یا روی دایره واحد دارد (در غیر این صورت حاصل‌ضرب ریشه‌ها بیشتر از یک می‌شد.) فرض کنیم Γ نشان‌دهنده منحنی بسته $p(e^{i\theta})$ باشد که $\theta \in [0, 2\pi]$.

اگر p یک ریشه روی دایره واحد داشته باشد قطعاً Γ از مرکز می‌گذرد، بنابراین خط $\mathrm{Re}\ z = 0$ را قطع می‌کند.

اگر p ریشه‌ای روی دایره واحد نداشته باشد پس حداقل یک ریشه درون دایره یکه دارد. طبق اصل شناسه Γ حداقل یکبار مرکز را احاطه می‌کند و در نتیجه خط $\mathrm{Re}\,(z) = 0$ را قطع می‌کند.

در هر دو مورد معادله $f(\theta) \pm 1 = \mathrm{Re}(p(e^{i\theta}))$ حداقل یک ریشه حقیقی دارد و قضیه ثابت می‌شود. □

قضیه ۴.۳.۲. فرض کنیم $\alpha(z)$ چندجمله‌ای خودمعکوس از درجه زوج باشد به صورت

$$\alpha(z) = a_0 + \cdots + a_{m-1}z^{m-1} + a_m z^m + a_{m-1}z^{m+1} + \cdots + a_0 z^{2m}$$

که a_0، ...، a_m حقیقی‌اند. اگر $|a_m| \leq 2|a_0|$ آن‌گاه $\alpha(z)$ حداقل یک ریشه یکهنگ دارد.

برهان: فرض کنیم $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

برای $z = e^{i\theta}$ به عنوان عضوی از S داریم:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(z)}{z^m} &= a_0\frac{1}{z^m} + \cdots + a_{m-1}\frac{1}{z} + a_m + a_{m-1}z + \cdots + a_0 z^m\\ &= a_m + a_0\left(z^m + \frac{1}{z^m}\right) + \cdots + a_{m-1}\left(z + \frac{1}{z}\right)\\ &= a_m + a_0(2\cos m\theta) + \cdots + a_{m-1}(2\cos\theta)\\ &= a_m + 2\left[a_0\cos m\theta + \cdots + a_{m-1}\cos\theta\right]\\ &= a_m + 2a_0\left[\cos m\theta + \cdots + \frac{a_{m-1}}{a_0}\cos\theta\right]\end{aligned}$$

طبق قضیه ۳.۳.۲، به ازای بعضی از $\theta \in [0, \pi]$

$$\cos m\theta + \cdots + \frac{a_{m-1}}{a_0}\cos\theta = 1$$

و به ازای بعضی از $\theta \in [0, \pi]$

$$\cos m\theta + \cdots + \frac{a_{m-1}}{a_0}\cos\theta = -1$$

پس برای $\theta \in [0, \pi]$، $\frac{\alpha(z)}{z^m}$ مقادیر $a_m + 2a_0$ و $a_m - 2a_0$ را اختیار می‌کند.

فرض کنیم $a_0 \geq 0$، فرض قضیه ایجاب می‌کند که

$$-2a_0 \leq a_m \leq 2a_0$$

بدین معنا که $[a_m - 2a_0, a_m + 2a_0]$ شامل صفر است. از پیوستگی و حقیقی مقدار بودن $\frac{\alpha(z)}{z^m}$ نتیجه می‌گیریم که $z \in S$ی وجود دارد که $\frac{\alpha(z)}{z^m} = 0$ و در نتیجه آن $\alpha(z) = 0$. اگر $a_0 < 0$ اثبات مشابه است. □

نتیجه ۵.۳.۲. هر چندجمله‌ای خودمعکوس لیتل وود، حداقل یک ریشه یکهنگ دارد.

برهان: فرض کنیم $\alpha(z)$ یک چندجمله‌ای خودمعکوس لیتل وود باشد، اگر درجه α فرد باشد، با محاسبه مستقیم می‌توان نشان داد که -1 ریشه α است.

اگر درجه α زوج باشد شرط $|a_m| \leq 2|a_0|$ قضیه ۴.۳.۲ برقرار است و لذا α یک ریشه یکهنگ دارد. □

قضیه ۶.۳.۲. فرض کنیم $p_n(x) := x^{2n} + x^{2n-1} + \cdots + x^{n+1} - x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ و $q_n(x) = x^{2n+1} - x^{2n} - \cdots - x + 1$، چندجمله‌ای $q_n(x)$ حداقل $2n-1$ ریشه یکهنگ و چندجمله‌ای $p_n(x)$ حداقل $\frac{2n-8}{3}$ ریشه یکهنگ دارد.

برهان: قرار می‌دهیم $r_n(x) := (x-1)q_n(x)$، پس:

$$r_n(x) = x^{2n+2} - 2x^{2n+1} + 2x - 1$$

و

$$\begin{aligned} s_n(x) &:= (x-1)p_n(x) \\ &= x^{2n+1} - 2x^{n+1} + 2x^n - 1 \end{aligned}$$

با جایگذاری $x = e^{it}$ در چندجمله‌ای‌های بالا داریم:

$$\begin{aligned} r_n(e^{it}) &= \big(-2\sin(n+1)t + 2i\cos(n+1)t\big)\big(\sin(n+1)t - 2\sin nt\big) \\ s_n(e^{it}) &= \Big(-2\sin\frac{2n+1}{2}t + 2i\cos\frac{2n+1}{2}t\Big) \times \Big(\sin\frac{2n+1}{2}t - 2\sin\frac{t}{2}\Big) \end{aligned}$$

حال با شمارش تعداد تغییر علامت‌های تابع $f(t) = \sin(n+1)t - 2\sin nt$ می‌بینیم تابع $r_n(e^{it})$ حداقل $2n$ صفر در $[0,2\pi)$ دارد. چون تابع $f(t)$ در بازه $\left[\frac{k\pi + \frac{\pi}{2}}{n}, \frac{(k+1)\pi + \frac{\pi}{2}}{n}\right]$ که $k = 0, \cdots, 2n-1$ تغییر علامت می‌دهد. بنابراین چندجمله‌ای $q_n(x)$ حداقل $2n-1$ ریشه یکهنگ دارد.

حال می‌توانیم به طور مشابه به اثبات قسمت دوم بپردازیم، قرار می‌دهیم:

$$\phi(t) = \sin\frac{2n+1}{2}t - 2\sin\frac{t}{2}$$

تعداد صفرهای $\phi(t)$ در بازه $[0,\frac{\pi}{3}]$ برابر تعداد صفرها در بازه $[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$ است چون $\phi(2\pi - t) = \phi(t)$. حال با شمارش تعداد تغییر علامت‌های تابع $\phi(t)$ در بازه $\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ می‌بینیم که $\phi(t)$ حداقل $\frac{n-4}{3}$ ریشه در این بازه دارد. چون تابع $\phi(t)$ در بازه

$$\left[\frac{2k\pi + \pi}{2n+1}, \frac{2\pi(k+1) + \pi}{2n+1}\right] \subset \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \qquad k = 0, 1, \cdots, \left[\frac{n-4}{3}\right]$$

تغییر علامت می‌دهد. پس تابع $\phi(t)$ حداقل $\frac{2n-8}{3}$ ریشه در بازه $(0,2\pi)$ دارد. بنابراین چندجمله‌ای $p_n(x)$ حداقل $\frac{2n-8}{3}$ ریشه یکهنگ دارد. □

فصل ۳

تعیین طوقی برای ریشه‌های چندجمله‌ای

مقدمه

در این فصل به مطالعه مکان هندسی ریشه‌های چندجمله‌ای‌های مختلط می‌پردازیم و با تعیین کران بالا و پایین برای قدرمطلق ریشه‌های چندجمله‌ای، طوق مختلطی را مشخص می‌کنیم که همه ریشه‌های چندجمله‌ای را در بر می‌گیرد. برای این کار چندجمله‌ای‌ها را به عنوان تابعی از ضرایبشان در نظر می‌گیریم.

گوس[۱] و کوشی از اولین کسانی بودند که به این موضوع پرداختند. قضیه کران کلاسیک یا قدیمی کوشی کران بالایی برای صفرهای چندجمله‌ای تعیین می‌کند. از آن زمان تاکنون بررسی‌های متعددی به ارائه کران برای صفرهای چندجمله‌ای پرداخته‌اند و به رشد و توسعه

[۱] Gauss

آن کمک کرده‌اند.

در این فصل طوق شامل ریشه‌ها را با استفاده از اعداد فیبوناتچی، اعداد پل و نیز اعداد t و s−فیبوناتچی مشخص می‌کنیم. برای این کار برخی ویژگی‌های دنباله‌های فیبوناتچی و k فیبوناتچی را بیان می‌کنیم.

۱.۳ برخی از ویژگی‌های دنباله فیبوناتچی و k-فیبوناتچی

اعداد فیبوناتچی F_n، جملات دنباله $\{۰,۱,۱,۳,۵,۸,\cdots,\}$ هستند که هر جمله مجموع دو جمله قبلی است، با شروع از مقادیر $F_۰ = ۰$ و $F_۱ = ۱$. از طرفی نسبت بین دو جمله متوالی اعداد فیبوناتچی به نسبت طلایی میل می‌کند، که با $\tau = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۱.۱.۳. برای هر عدد حقیقی مثبت k، دنباله k−فیبوناتچی $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ به صورت بازگشتی توسط

$$F_{k,n+۱} = kF_{k,n} + F_{k,n-۱} \qquad n \geq ۱$$

که $F_{k,۰} = ۰$ و $F_{k,۱} = ۱$، تعریف می‌شود.

اگر k یک متغیر حقیقی x باشد، آن‌گاه $F_{k,n} = F_{x,n}$ که با چندجمله‌ای‌های فیبوناتچی که به صورت زیر تعریف می‌شوند مطابقت دارد.

$$F_{n+۱}(x) = \begin{cases} ۱ & n = ۰ \\ x & n = ۱ \\ xF_n(x) + F_{n-۱}(x) & \end{cases}$$

موارد خاص دنباله k−فیبوناتچی عبارتند از

- اگر $k = ۱$، دنباله فیبوناتچی معمولی به دست می‌آید.

$$F_۰ = ۰, \quad F_۱ = ۱, \quad F_{n+۱} = F_n + F_{n-۱} \qquad n \geq ۱$$

$$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{۰,۱,۱,۲,۳,۵,۸,\cdots\}$$

- اگر $k=2$، دنباله پل نمایان می‌شود.

$$P_0=0,\quad P_1=1,\quad P_{n+1}=2P_n+P_{n-1}\qquad n\geq 1$$

$$\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{0,1,2,5,12,29,70,\cdots\}$$

- اگر $k=3$، دنباله زیر به دست می‌آید.

$$H_0=0,\quad H_1=1,\quad H_{n+1}=3H_n+H_{n-1}\qquad n\geq 1$$

$$\{H_n\}_{n\in\mathbb{N}}=\{0,1,3,10,33,109,\cdots\}$$

گزاره زیر فرمولی برای محاسبه nامین عدد k–فیبوناتچی را ارائه می‌دهد.

گزاره ۲.۱.۳. nامین عدد k–فیبوناتچی از $F_{k,n}=\dfrac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_2}$ به دست می‌آید که r_1 و r_2 ریشه‌های معادله مشخصه $r^2=kr+1$ هستند که $r_1>r_2$.

برهان: ریشه‌های معادله مشخصه $r^2=kr+1$ عبارتند از

$$r_1=\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\quad,\quad r_2=\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

که اگر $k>0$ داریم:

$$r_2<0<r_1\quad,\quad |r_2|<|r_1|$$

$$r_1+r_2=k\quad,\quad r_1r_2=-1$$

$$r_1-r_2=\sqrt{k^2+4}$$

پس برای نوشتن جمله عمومی دنباله k–فیبوناتچی به صورت $F_{k,n}=c_1r_1^n+c_2r_2^n$، ضرایب c_1 و c_2 با مقادیر معلوم $n=0$ و $n=1$، به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$c_1=\frac{1}{r_1-r_2}=-c_2$$

که با جایگذاری این مقادیر در $F_{k,n}=c_1r_1^n+c_2r_2^n$ فرمول زیر به دست می‌آید:

$$F_{k,n}=\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_2}\tag{1.3}$$

□

موارد خاص عبارتند از:

- اگر $k=1$، برای دنباله معمولی فیبوناتچی، $r_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $r_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ به دست می‌آید که r_1 به نسبت طلایی معروف است که با τ نیز نمایش داده می‌شود. برای نمایش r_2 معمولاً از φ استفاده می‌کنیم. فرمول جمله عمومی دنباله فیبوناتچی به صورت $F_n=\frac{\tau^n-\varphi^n}{\tau-\varphi}$ نمایش داده می‌شود.
- اگر $k=2$، برای دنباله پل، $r_1=1+\sqrt{2}$ و $r_2=1-\sqrt{2}$ به دست می‌آید که به ترتیب با α و β نمایش داده می‌شوند. α به نسبت نقره‌ای موسوم است.
- اگر $k=3$، برای دنباله $\{H_n\}$، حل معادله مشخصه به $r_1=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$ و $r_2=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ می‌انجامد. r_1 به نسبت برنزی معروف است.

دو اتحاد زیر از رابطه (۱.۳) به دست می‌آیند:

- **اتحاد کاتالان**[۲]:

$$F_{k,n-r}F_{k,n+r}-F_{k,n}^2=(-1)^{n+1-r}F_{k,r}^2 \tag{۲.۳}$$

برهان: با استفاده از رابطه (۱.۳)، طرف چپ رابطه (۲.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned}
&F_{k,n-r}F_{k,n+r}-F_{k,n}^2\\
&=\frac{r_1^{n-r}-r_2^{n-r}}{r_1-r_2}\cdot\frac{r_1^{n+r}-r_2^{n+r}}{r_1-r_2}-\left(\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1-r_2}\right)^2\\
&=\frac{r_1^{2n}-r_1^{n-r}r_2^{n+r}-r_1^{n+r}r_2^{n-r}+r_2^{2n}-r_1^{2n}+2r_1^nr_2^n-r_2^{2n}}{(r_1-r_2)^2}\\
&=\frac{1}{(r_1-r_2)^2}\cdot\left(-(r_1r_2)^n\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^r-(r_1r_2)^n\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^r+2(r_1r_2)^n\right)
\end{aligned}$$

از اینکه $r_1r_2=-1$ داریم:

$$=(-1)^{n+1-r}\frac{(r_1^r-r_2^r)^2}{(r_1-r_2)^2}$$

---
[۲] Catalan

$$= (-1)^{n+1-r} \cdot F_{k,r}^2$$

توجه کنید که اگر $r = 1$، اتحاد کاسینی[3] برای دنباله k−فیبوناتچی به دست می‌آید.

$$F_{k,n-1}F_{k,n+1} - F_{k,n}^2 = (-1)^n$$

□

• اتحاد دوکان[4]:

$$F_{k,m}F_{k,n+1} - F_{k,m+1}F_{k,n} = (-1)^n F_{k,m-n} \qquad m > n$$

برهان: با استفاده از رابطه (۱.۳) طرف چپ اتحاد بالا به صورت زیر در می‌آید:

$$= \frac{r_1^m - r_2^m}{r_1 - r_2} \cdot \frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2} - \frac{r_1^{m+1} - r_2^{m+1}}{r_1 - r_2} \cdot \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$$
$$= \frac{r_1^n r_2^n (r_1 - r_2)(r_1^{m-n} - r_2^{m-n})}{(r_1 - r_2)^2}$$

و با توجه به $r_1 r_2 = -1$ داریم:

$$= (-1)^n F_{k,m-n}$$

□

فرمول دیگری برای جمله عمومی دنباله k−فیبوناتچی از گزاره زیر به دست می‌آید:

گزاره ۳.۱.۳. اگر $[a]$، نشان‌دهنده قسمت صحیح عدد حقیقی a باشد،

$$F_{k,n} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2i+1} k^{n-1-2i}(k^2+4)^i$$

[3] Cassini
[4] d´Ocagne

برهان: اگر r_1 و r_2 جواب‌های معادله مشخصه $r^2 = kr + 1$ باشند داریم:

$$F_{k,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}}\left(\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^n\right)$$

با بسط توان nام به رابطه

$$F_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{k^2+4}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2i+1} k^{n-1-2i} (\sqrt{k^2+4})^{2i+1}$$

می‌رسیم که پس از ساده کردن، به نتیجه مورد نظر می‌رسیم. □

موارد خاص عبارتند از:

- اگر $k = 1$ برای دنباله فیبوناتچی معمولی داریم:

$$F_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2i+1} 5^i$$

- اگر $k = 2$، جمله عمومی دنباله پل به صورت زیر در می‌آید:

$$P_n = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2i+1} 2^{n-1-2i} 8^i$$

که به صورت زیر ساده می‌شود.

$$P_n = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2i+1} 2^i$$

- اگر $k = 3$، جمله عمومی دنباله $\{H_n\}$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$H_n = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n}{2i+1} \left(\frac{13}{9}\right)^i$$

حد خارج‌قسمت دو جمله متوالی دنباله

یک ویژگی مفید این دنباله‌ها آن است که حد خارج‌قسمت دو جمله متوالی دنباله برابر ریشه مثبت معادله مشخصه همان دنباله است.

برای دنباله k-فیبوناتچی داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{k,n}}{F_{k,n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{r_1^n-r_2^n}{r_1^{n-1}-r_2^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n}{\frac{1}{r_1}-\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n\cdot\frac{1}{r_2}}$$

و با توجه به اینکه وقتی $|r_2|<r_1$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n=0$$

پس

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{k,n}}{F_{k,n-1}}=r_1$$

فرمول سوم جمله عمومی دنباله k-فیبوناتچی

گزاره ۴.۱.۳.

$$F_{k,n}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n-1-i}{i}k^{n-1-2i}\qquad n\geq 2$$

برهان: (با استقراء)

برای $n=2$ داریم

$$F_{k,2}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{1}{2}\right]}\binom{n-1-i}{i}k^{1-2i}=k$$

که طبق تعریف $F_{k,2}$ درست است.

فرض کنیم فرمول بالا برای $F_{k,n-1}$ و $F_{k,n}$ هم درست باشد. (فرض استقراء)

طبق تعریف $F_{k,n+1}$ داریم:

$$F_{k,n+1}=kF_n+F_{k,n-1}$$

$$F_{k,n+1}=k\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n-1-i}{i}k^{n-1-2i}+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\binom{n-2-i}{i}k^{n-2-2i}$$

$$=k^n+k\cdot\sum_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n-1-i}{i}k^{n-1-2i}+\sum_{i=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\binom{n-2-i}{i}k^{n-2-2i}$$

اگر در جمله آخر به جای i، $i-1$ قرار دهیم، نتیجه می‌شود:

$$F_{k,n+1}=k^n+\sum_{i=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}\binom{n-1-i}{i}k^{n-2i}+\sum_{i=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]}\binom{n-1-i}{i-1}k^{n-2i}$$

با استفاده از رابطه $\binom{m}{i}\cdot\binom{m}{i-1}=\binom{m+1}{i}$ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$F_{k,n+1}=k^n+\sum_{i=1}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-1}{i}k^{n-2i}$$
$$F_{k,n+1}=\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-i}{i}k^{n-2i}$$

□

موارد خاص عبارتند از :

- اگر $k=1$ برای دنباله فیبوناتچی معمولی داریم:

$$F_n=\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n-1-i}{i-1}\qquad n\geq 2$$

- اگر $k=2$ برای دنباله پل به فرمول زیر می‌رسیم:

$$P_n=\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n-1-i}{i}2^{n-1-2i}\qquad n\geq 2$$

- اگر $k=3$ برای دنباله $\{H_n\}$ داریم:

$$H_n=\sum_{i=0}^{[\frac{n-1}{2}]}\binom{n-1-i}{i}3^{n-1-2i}\qquad n\geq 2$$

مجموع جملات ابتدایی دنباله k-فیبوناتچی

گزاره ۵.۱.۳. فرض کنیم $S_{k,n}$ مجموع $(n+1)$ جمله ابتدایی دنباله k-فیبوناتچی باشد یعنی

$$S_{k,n}=\sum_{i=0}^{n}F_{k,i}$$

در این صورت

$$S_{k,n}=\frac{1}{k}(F_{k,n+1}+F_{k,n})-\frac{1}{k}$$

برهان: در ابتدا توجه می‌کنیم که با استفاده از رابطه (۱.۳) داریم:

$$S_{k,n}=\frac{1}{r_1-r_2}\sum_{i=0}^{n}(r_1^i-r_2^i)$$

با استفاده از مجموع جملات دنباله هندسی، $\sum_{i=0}^{n} r_j^i$ برای $j = 1, 2, \cdots$ داریم:

$$S_{n,k} = \frac{1}{r_1 - r_2}\Big(\frac{r_1^{n+1} - 1}{r_1 - 1} - \frac{r_2^{n+1} - 1}{r_2 - 1}\Big)$$

با توجه به اینکه r_1، r_2 ریشه‌های معادله مشخصه $r^2 = kr + 1$ هستند لذا با استفاده از روابط

$$r_1 r_2 = -1 \quad , \quad r_1 + r_2 = k$$

داریم:

$$\begin{aligned} S_{k,n} &= \frac{1}{k}\left(\frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2} + \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} - \frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_2}\right) \\ &= \frac{1}{k}(F_{k,n+1} + F_{k,n}) - \frac{1}{k} \end{aligned}$$

□

موارد خاص عبارتند از:

- اگر $k = 1$ برای دنباله فیبوناتچی معمولی داریم:

$$S_{1,n} = F_{n+2} - 1$$

همچنین ممکن است به صورت زیر نوشته شود:

$$S_{1,n} = -1 + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n+2}{2i-1} 5^i$$

- اگر $k = 2$ برای دنباله پل داریم:

$$S_{2,n} = \frac{1}{2}(P_{n+1} + P_n) - \frac{1}{2}$$

و یا

$$S_{2,n} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \binom{n+1}{2i} 2^i$$

۲.۳ تعیین طوق با استفاده از اعداد فیبوناتچی

لم ۱.۲.۳. اگر $F_n = a\alpha^n + b\beta^n$ که $a = \frac{1}{\sqrt{5}}, b = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. در اینصورت

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k} F_k = F_{4n}$$

برهان: توجه می‌کنیم که $\alpha+\beta = 1$ و $\alpha\beta = -1$ با جایگذاری روابط $2 = 1-\alpha\beta$ و $3 = 1-2\alpha\beta$ در طرف چپ تساوی بالا داریم:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (1-\alpha\beta)^{n-k} (1-2\alpha\beta)^{k} \cdot F_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^{n-k} (\alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta^3)^{k} \cdot F_k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (\alpha\beta)^{n-k} \Big(\sum_{l=0}^{2} \beta^l \alpha^{2-l}\Big)^{n-k} \cdot \Big(\sum_{l=0}^{3} \beta^l \alpha^{3-l}\Big)^{k} (a\alpha^k + b\beta^k) \\
&= a\alpha^n \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \beta^{n-k} \Big(\sum_{l=0}^{2} \beta^l \alpha^{2-l}\Big)^{n-k} \cdot \Big(\sum_{l=0}^{3} \beta^l \alpha^{3-l}\Big)^{k} \right\} \\
&+ b\beta^n \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \Big(\sum_{l=0}^{2} \beta^l \alpha^{2-l}\Big)^{n-k} \cdot \Big(\sum_{l=0}^{3} \beta^l \alpha^{3-l}\Big)^{k} \right\} \\
&= a\alpha^n \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \Big(\sum_{l=0}^{3} \beta^l \alpha^{3-l}\Big)^{k} \cdot \Big(\sum_{l=0}^{2} \beta^{l+1} \alpha^{2-l}\Big)^{n-k} \right\} \\
&+ b\beta^n \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \Big(\sum_{l=0}^{3} \beta^l \alpha^{3-l}\Big)^{k} \cdot \Big(\sum_{l=0}^{2} \beta^l \cdot \alpha^{3-l}\Big)^{n-k} \right\}
\end{aligned}$$

در روابط بالا از تساوی‌های زیر استفاده کرده‌ایم:

$$\begin{aligned}
\beta^{n-k}\Big(\sum_{l=0}^{2} \beta^l \alpha^{2-l}\Big)^{n-k} &= \beta^{n-k}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^{n-k} = \Big(\sum_{l=0}^{2} \beta^{l+1} \alpha^{2-l}\Big)^{n-k} \\
\alpha^{n-k}\Big(\sum_{l=0}^{2} \beta^l \alpha^{2-l}\Big)^{n-k} &= \alpha^{n-k}(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)^{n-k} = \Big(\sum_{l=0}^{2} \beta^{l} \alpha^{3-l}\Big)^{n-k}
\end{aligned}$$

پس داریم:

$$= a\alpha^n \left\{ \sum_{l=0}^{3} \beta^l \alpha^{3-l} - \sum_{l=0}^{2} \beta^{l+1} \alpha^{2-l} \right\}^{n}$$

$$
\begin{aligned}
&+ b\beta^n \left\{ \sum_{l=0}^{3} \beta^l \alpha^{3-l} - \sum_{l=0}^{2} \beta^l \alpha^{3-l} \right\}^n \\
&= a\alpha^n (\alpha^3)^n + b\beta^n (\beta^3)^n \\
&= a\alpha^{4n} + b\beta^{4n} \\
&= F_{4n}
\end{aligned}
$$

□

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنیم $A(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ $(a_k \neq 0)$ چندجمله‌ای مختلط غیر ثابت باشد، در اینصورت همه ریشه‌های این چندجمله‌ای در طوق

$$C = \{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$$

قرار دارند که

$$r_1 = \frac{3}{2} \min_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\binom{n}{k} 2^n F_k}{F_{4n}} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{\frac{1}{k}} \tag{۳.۳}$$

$$r_2 = \frac{2}{3} \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_{4n}}{\binom{n}{k} 2^n F_k} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{\frac{1}{k}} \tag{۴.۳}$$

برهان: از رابطه (۳.۳) نتیجه می‌گیریم:

$$r_1^k \leq \frac{\binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k F_k}{F_{4n}} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \qquad k = 1, 2, \cdots, n \tag{۵.۳}$$

باید نشان دهیم $r_1 \leq |z|$.

فرض کنیم $|z| < r_1$ (فرض خلف):

$$
\begin{aligned}
|A(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right| \\
&\geq |a_0| - \sum_{k=1}^{n} |a_k|\, |z|^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&> |a_0| - \sum_{k=1}^{n} |a_k|\, r_1^k \\
&= |a_0| \Big(1 - \sum_{k=1}^{n} \Big|\frac{a_k}{a_0}\Big| r_1^k \Big) \qquad (6.3)
\end{aligned}
$$

با توجه به (۵.۳) می‌توان نوشت:

$$
\Big|\frac{a_k}{a_0}\Big| r_1^k \leq \frac{\binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k F_k}{F_{4n}} \qquad k = 1, 2, \cdots, n
$$

و با جایگذاری آن در (۶.۳) داریم:

$$
\begin{aligned}
|A(z)| &> |a_0| \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \Big|\frac{a_k}{a_0}\Big| r_1^k \right) \\
&\geq |a_0| \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k F_k}{F_{4n}} \right) = 0
\end{aligned}
$$

به عبارت بهتر نشان دادیم که اگر $|z| < r_1$ آن‌گاه $A(z) > 0$، یعنی $A(z)$ در $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_1\}$ ریشه‌ای ندارد پس $|z| > r_1$.

بدیهی است همه صفرهای $A(z)$ قدرمطلقی کمتر یا مساوی ریشه‌های مثبت و یکتای معادله

$$
G(z) = |a_n| z^n - |a_{n-1}| z^{n-1} - \cdots - |a_1| z - |a_0| = 0
$$

دارند.

برای اثبات قسمت دوم قضیه کافی است نشان دهیم $G(r_2) \geq 0$.

طبق رابطه (۴.۳) داریم:

$$
\Big|\frac{a_{n-k}}{a_n}\Big| \leq \frac{\binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k F_k}{F_{4n}} r_2^k \qquad k = 1, 2, \cdots, n
$$

بنابراین:

$$
\begin{aligned}
G(r_2) &= |a_n| \left[r_2^n - \sum_{k=1}^{n} \Big|\frac{a_{n-k}}{a_n}\Big| r_2^{n-k} \right] \\
&\geq |a_n| \left[r_2^n - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k F_k}{F_{4n}} r_2^k \right) r_2^{n-k} \right]
\end{aligned}
$$

$$= |a_n| r_2^n \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k} 2^{n-k} 3^k F_k}{F_{4n}} \right) = 0$$

□

به عنوان مثال چندجمله‌ای $A(z) = z^3 + 0/1z^2 + 0/3z + 0/7$ را در نظر می‌گیریم. طبق قضیه کوشی همه صفرهای چندجمله‌ای در طوق

$$0/41 \leq |z| < 1/7$$

قرار می‌گیرند حال آن که با استفاده از قضیه بالا همه صفرهای چندجمله‌ای در طوق

$$r_1 \simeq 0/58 \leq |z| \leq 1/23 \simeq r_2$$

قرار می‌گیرند.

۳.۳ تعیین طوق با استفاده از اعداد پل

در قضیه‌های بعدی کران‌های ناحیه مختلط طوقی شکل را با استفاده از ضرایب دوجمله‌ای و اعداد پل تعیین می‌کنیم.

قضیه ۱.۳.۳. فرض کنید r، s ریشه‌های معادله درجه دوم $x^2 - ax - b = 0$ باشند که a و b حقیقی و مثبت باشند. دنباله‌های $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ و $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$A_n = cr^n + ds^n \qquad , \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n-1} r^k s^{n-1-k}$$

که c و d اعداد حقیقی ثابت هستند. اگر $j \geq 2$ آن‌گاه

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (bB_{j-1})^{n-k} B_j^k A_k = A_{jn} \tag{۷.۳}$$

در جمله قبلی اگر $r \neq s$، $B_n = (r^n - s^n)/(r-s)$ و اگر $r = s$، $B_n = ns^{n-1}$.

برهان: از معادله درجه دوم $x^2 - ax - b = 0$ داریم:

$$a = r + s \qquad , \qquad b = -rs$$

با جایگذاری a، b، A_n و B_n در (۷.۳) داریم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(rs)^{n-k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^l r^{j-2-l}\right)^{n-k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^l r^{j-1-l}\right)^{k}(cr^k+ds^k)\\
&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}r^{n-k}s^{n-k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^l r^{j-2-l}\right)^{n-k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^l r^{j-1-l}\right)^{k}cr^k\\
&+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}r^{n-k}s^{n-k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^l r^{j-2-l}\right)^{n-k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^l r^{j-1-l}\right)^{k}ds^k\\
&=cr^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}s^{n-k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^l r^{j-2-l}\right)^{n-k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^l r^{j-1-l}\right)^{k}\right\}\\
&+ds^k\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}r^{n-k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^l r^{j-2-l}\right)^{n-k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^l r^{j-1-l}\right)^{k}\right\}\\
&=cr^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^l r^{j-1-l}\right)^{k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^{l+1} r^{j-2-l}\right)^{n-k}\right\}\\
&+ds^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\left(\sum_{l=0}^{j-1}s^l r^{j-1-l}\right)^{k}\left(\sum_{l=0}^{j-2}s^l r^{j-1-l}\right)^{n-k}\right\}\\
&=cr^n\left\{\sum_{l=0}^{j-1}s^l r^{j-1-l}-\sum_{l=0}^{j-2}s^{l+1}r^{j-2-l}\right\}^n\\
&+ds^n\left\{\sum_{l=0}^{j-1}s^l r^{j-1-l}-\sum_{l=0}^{j-2}s^{l}r^{j-2-l}\right\}^n\\
&=cr^n(r^{j-1})^n+ds^n(s^{j-1})^n\\
&=cr^{jn}+ds^{jn}\\
&=A_{jn}
\end{aligned}$$

□

توجه کنید اگر در رابطه بالا $a=b=1$ اتحادهای چزارو[5] به دست می‌آید:

اگر $j=2$:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k=F_{2n}$$

[5] Cecaro

و اگر $j=3$:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} F_k = F_{3n}$$

قضیه ۲.۳.۳. فرض کنید $A(z)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ که $a_k \neq 0$، یک چندجمله‌ای مختلط غیر ثابت باشد. در این صورت برای هر $j \geq 2$ همه صفرهای چندجمله‌ای در طوق $C=\{z\in\mathbb{C} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ قرار می‌گیرند که

$$r_1 = \min_{1\leq k\leq n} \left\{ \frac{\binom{n}{k} A_k B_j^k (bB_{j-1})^{n-k}}{A_{jn}} \left| \frac{a_0}{a_k} \right| \right\}^{\frac{1}{k}} \tag{۸.۳}$$

$$r_2 = \max_{1\leq k\leq n} \left\{ \frac{A_{jn}}{\binom{n}{k} A_k B_j^k (bB_{j-1})^{n-k}} \left| \frac{a_{n-k}}{a_n} \right| \right\}^{\frac{1}{k}} \tag{۹.۳}$$

برهان: برای اثبات کافی است نشان دهیم $r_1 \leq |z|$.

فرض کنیم $|z| < r_1$ (فرض خلف). داریم:

$$\begin{aligned} |A(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \right| \\ &= \left| a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k z^k \right| \\ &\geq |a_0| - \sum_{k=1}^{n} |a_k||z|^k \\ &> |a_0| - \sum_{k=1}^{n} |a_k| r_1^k \\ &= |a_0| \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{a_k}{a_0} \right| r_1^k \right) \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

با توجه به (۸.۳) می‌توان نوشت:

$$\left| \frac{a_k}{a_0} \right| r_1^k \leq \frac{\binom{n}{k} A_k B_j^k (bB_{j-1})^{n-k}}{A_{jn}} \qquad k = 1, 2, \cdots, n$$

و با جایگذاری نامساوی بالا در (۱۰.۳) نتیجه می‌گیریم:

$$|A(z)| > |a_0| \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{a_k}{a_0} \right| r_1^k \right)$$

$$\geq |a_\circ| \left(۱ - \sum_{k=۱}^{n} \frac{\binom{n}{k} A_k B_j^k (bB_{j-۱})^{n-k}}{A_{jn}} \right) \geq \circ$$

پس $A(z)$ هیچ ریشه‌ای در $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_۱\}$ ندارد. بدیهی است که همه صفرهای $A(z)$ قدرمطلقی کمتر یا مساوی با ریشه مثبت و یکتای معادله زیر دارند:

$$B(z) = |a_n|z^n - |a_{n-۱}|z^{n-۱} - \cdots - |a_۱|z - |a_\circ| = \circ$$

برای اثبات قسمت دوم قضیه کافی است نشان دهیم $B(r_۲) \geq \circ$.

از رابطه (۹.۳) می‌توان نوشت:

$$\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| \leq \frac{\binom{n}{k} A_k B_j^k (bB_{j-۱})^{n-k}}{A_{jn}} r_۲^k \qquad k = ۱, ۲, \cdots, n$$

لذا:

$$\begin{aligned} B(r_۲) &= |a_n| \left[r_۲^n - \sum_{k=۱}^{n} \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| r_۲^{n-k} \right] \\ &\geq |a_n| \left[r_۲^n - \sum_{k=۱}^{n} \left(\frac{\binom{n}{k} A_k B_j^k (bB_{j-۱})^{n-k}}{A_{jn}} \right) r_۲^{n-k} \right] \\ &= |a_n| r_۲^n \left(۱ - \sum_{k=۱}^{n} \frac{\binom{n}{k} A_k B_j^k (bB_{j-۱})^{n-k}}{A_{jn}} \right) \\ &= \circ \end{aligned}$$

$\square$

نتیجه ۳.۳.۳. فرض کنیم $A(z) = \sum_{k=\circ}^{n} a_k z^k$ که $a_k \neq \circ$ یک چندجمله‌ای مختلط غیر ثابت باشد در این صورت همه ریشه‌های چندجمله‌ای در طوق

$$C = \{z \in \mathbb{C} : r_۱ \leq |z| \leq r_۲\}$$

قرار می‌گیرند که

$$r_۱ = \min_{۱ \leq k \leq n} \left\{ \frac{\binom{n}{k} ۲^k p_k}{p_{۲n}} \left|\frac{a_\circ}{a_k}\right| \right\}^{\frac{۱}{k}}$$

$$r_۲ = \max_{۱\le k\le n}\left\{\frac{p_{۲n}}{\binom{n}{k}۲^k p_k}\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|\right\}^{\frac{۱}{k}}$$

برهان: از آنجا که طبق قضیه ۱.۳.۳،

$$\sum_{k=\circ}^{n}\binom{n}{k}(bB_{j-۱})^{n-k}B_j^k A_k = A_{jn}$$

رابطه بالا را برای اعداد پل می‌نویسیم. پس داریم:

$$\sum_{k=\circ}^{n}\binom{n}{k}B_{j-۱}^{n-k}B_j^k p_k = p_{jn}$$

با قرار دادن $j=۲$ در رابطه بالا و استفاده از قضیه ۲.۳.۳، نتیجه ثابت می‌شود. □

قضیه بعدی کران‌های صفرهای چندجمله‌ای را با استفاده از دنباله t–فیبوناتچی تعیین می‌کند. برای اثبات قضیه به لم زیر نیاز داریم.

لم ۴.۳.۳. در دنباله t–فیبوناتچی، برای هر عدد حقیقی مثبت t داریم:

$$\sum_{k=۱}^{n}(t^۲+۱)^{n-k}(t^۳+۲t)^k F_{t,k}\binom{n}{k} = F_{t,۴n}$$

برهان: از آنجا که $F_{t,k}=a\alpha^k+b\beta^k$ که

$$a=\frac{۱}{\sqrt{t^۲+۴}},\quad b=-\frac{۱}{\sqrt{t^۲+۴}},\quad \alpha=\frac{t+\sqrt{t^۲+۴}}{۲},\quad \beta=\frac{t-\sqrt{t^۲+۴}}{۲}$$

پس داریم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=۱}^{n}\binom{n}{k}(t^۲+۱)^{n-k}(t^۳+۲t)^k F_{t,k}\\
&=\sum_{k=۱}^{n}\binom{n}{k}(t^۲-\alpha\beta)^{n-k}(t^۳-۲t\alpha\beta)^k F_{t,k}\\
&=\sum_{k=۱}^{n}\binom{n}{k}(\alpha^۲+\alpha\beta+\beta^۲)^{n-k}(\alpha^۳+\alpha^۲\beta+\alpha\beta^۲+\beta^۳)^k F_{t,k}\\
&=\sum_{k=۱}^{n}(-۱)^{n-k}\binom{n}{k}(\alpha\beta)^{n-k}\Big(\sum_{l=\circ}^{۲}\beta^l\alpha^{۲-l}\Big)^{n-k}\Big(\sum_{l=\circ}^{۳}\beta^l\alpha^{۳-l}\Big)^k(a\alpha^k+b\beta^k)\\
&=a\alpha^n\left\{\sum_{k=\circ}^{n}(-۱)^{n-k}\binom{n}{k}\beta^{n-k}\Big(\sum_{l=\circ}^{۲}\beta^l\alpha^{۲-l}\Big)^{n-k}\Big(\sum_{l=\circ}^{۳}\beta^l\alpha^{۳-l}\Big)^k\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+b\beta^n\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\alpha^{n-k}\Big(\sum_{l=0}^{2}\beta^l\alpha^{2-l}\Big)^{n-k}\Big(\sum_{l=0}^{3}\beta^l\alpha^{3-l}\Big)^{k}\right\}\\
&=a\alpha^n\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\Big(\sum_{l=0}^{3}\beta^l\alpha^{3-l}\Big)^{k}\Big(\sum_{l=0}^{2}\beta^{l+1}\alpha^{2-l}\Big)^{n-k}\right\}\\
&+b\beta^n\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\Big(\sum_{l=0}^{3}\beta^l\alpha^{3-l}\Big)^{k}\Big(\sum_{l=0}^{2}\beta^l\alpha^{3-l}\Big)^{n-k}\right\}\\
&=a\alpha^n\left\{\sum_{l=0}^{3}\beta^l\alpha^{3-l}-\sum_{l=0}^{2}\beta^{l+1}\alpha^{2-l}\right\}+b\beta^n\left\{\sum_{l=0}^{3}\beta^l\alpha^{3-l}-\sum_{l=0}^{2}\beta^l\alpha^{3-l}\right\}^n\\
&=a\alpha^n(\alpha^3)^n+b\beta^n(\beta^3)^n\\
&=a\alpha^{4n}+b\beta^{4n}\\
&=F_{t,4n}
\end{aligned}
$$

□

قضیه ۵.۳.۳. فرض کنیم $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n$ یک چندجمله‌ای مختلط غیر ثابت از درجه n باشد و

$$\lambda_k=\frac{\binom{n}{k}(t^3+2t)^k(t^2+1)^nF_{t,k}}{(t^2+1)^kF_{t,4n}}$$

که t عددی حقیقی و مثبت است در این صورت همه ریشه‌های $p(z)$ در طوق

$$R=\{z\in\mathbb{C}:s_1\le|z|\le s_2\}$$

قرار می‌گیرند که

$$
\begin{aligned}
s_1&=\min_{1\le k\le n}\left\{\lambda_k\left|\frac{a_0}{a_k}\right|\right\}^{\frac{1}{k}}\\
s_2&=\max_{1\le k\le n}\left\{\frac{1}{\lambda_k}\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|\right\}^{\frac{1}{k}}
\end{aligned}
$$

توجه کنید که اگر $t=1$ قضیه ۲.۲.۳ به دست می‌آید.

برهان: ابتدا نشان می‌دهیم که همه ریشه‌های $p(z)$ در

$$|z|\le s_2=\max_{1\le k\le n}\left|\frac{1}{\lambda_k}\cdot\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|^{\frac{1}{k}}$$

قرار دارند، یعنی

$$\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| \leq |\lambda_k| s_2^k \qquad k = 1,2,3,\cdots,n$$

یا

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| \frac{1}{s_2^k} \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k| \tag{11.3}$$

فرض کنیم $|z| > s_2$ (فرض خلف) پس می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} |p(z)| &= \left|a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\right| \\ &\geq |a_n|\,|z|^n \left\{1 - \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| \frac{1}{|z|^k}\right\} \\ &> |a_n|\,|z|^n \left\{1 - \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| \frac{1}{s_2^k}\right\} \end{aligned}$$

با استفاده از لم ۴.۳.۳ و (۱۱.۳) برای $|z| > s_2$ نتیجه می‌گیریم

$$|p(z)| > 0$$

پس همه صفرهای $p(z)$ در $|z| \leq s_2$ قرار می‌گیرند و قسمت دوم قضیه ثابت می‌شود.

برای اثبات قسمت اول قضیه، از قسمت دوم استفاده می‌کنیم.

اگر $a_0 = 0$ در این صورت داریم:

$$s_1 = \min_{1\leq k\leq n} \left|\lambda_k \frac{a_0}{a_k}\right|^{\frac{1}{k}} = 0$$

اگر $a_0 \neq 0$، در این صورت چندجمله‌ای

$$Q(z) = z^n p\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

طبق قسمت دوم قضیه اگر $Q(z) = 0$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} |z| &\leq \max_{1\leq k\leq n} \left|\frac{1}{\lambda_k}\frac{a_k}{a_0}\right|^{\frac{1}{k}} \\ &= \max_{1\leq k\leq n} \left|\frac{1}{\lambda_k \frac{a_0}{a_k}}\right|^{\frac{1}{k}} \\ &= \frac{1}{\min\limits_{1\leq k\leq n} \left|\lambda_k \frac{a_0}{a_k}\right|^{\frac{1}{k}}} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{s_1}$$

حال با عوض کردن z با $\frac{1}{z}$ داریم:

$$|z| \geq s_1 = \min_{1\leq k\leq n} \left|\lambda_k \frac{a_0}{a_k}\right|^{\frac{1}{k}}$$

□

۴.۳ تعیین طوق با استفاده ازدنباله s و tفیبوناتچی

آخرین قضیه این فصل تعیین کران‌های ریشه‌های چندجمله‌ای را با استفاده از دنباله t و s–فیبوناتچی بهبود می‌بخشد. برای اثبات قضیه به لم‌های زیر نیاز داریم:

لم ۱.۴.۳. برای اعداد حقیقی مثبت t و s، اعداد حقیقی a، b، α و β وجود دارد به طوری که

$$F_{t,s,n} = a\alpha^n + b\beta^n$$

که

$$a = \frac{1}{\sqrt{t^2+4s}}, \quad b = \frac{-1}{\sqrt{t^2+4s}}, \quad \alpha = \frac{t+\sqrt{t^2+4s}}{2}, \quad \beta = \frac{t-\sqrt{t^2+4s}}{2}$$

برهان: فرض کنیم $F_{t,s,n} = a\alpha^n + b\beta^n$، طبق تعریف $F_{t,s,n+1}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} a\alpha^{n+1} + b\beta^{n+1} &= t(a\alpha^n + b\beta^n) + s(a\alpha^{n-1} + b\beta^{n-1}) \\ &= a(t\alpha^n + s\alpha^{n-1}) + b(t\beta^n + s\beta^{n-1}) \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\alpha^{n+1} = t\alpha^n + s\alpha^{n-1}, \qquad \beta^{n+1} = t\beta^n + s\beta^{n-1}$$

پس برای $n = 1$، می‌توان نوشت:

$$\alpha^2 - t\alpha - s = 0, \qquad \beta^2 - t\beta - s = 0$$

با حل معادله‌های بالا

$$\alpha = \frac{t+\sqrt{t^2+4s}}{2}, \qquad \beta = \frac{t-\sqrt{t^2+4s}}{2} \tag{۱۲.۳}$$

به دست می‌آید. به بیان دیگر با استفاده از شرط‌های $F_{t,s,0}=0$ و $F_{t,s,1}=1$ در $F_{t,s,n}=a\alpha^n+b\beta^n$ به

$$a+b=0, \qquad a\alpha+b\beta=1$$

می‌رسیم یعنی

$$a=-b, \qquad a=\frac{1}{\alpha-\beta}$$

که با استفاده از رابطه (۱۲.۳) به $a=\frac{1}{\sqrt{t^2+4s}}$ و $b=\frac{-1}{\sqrt{t^2+4s}}$ می‌رسیم. □

نتیجه ۲.۴.۳. برای اعداد حقیقی مثبت t و s داریم:

$$F_{t,s,2n}=(\alpha^n+\beta^n)F_{t,s,n}=\frac{1}{2^n}\left\{\left(t+\sqrt{t^2+4s}\right)^n+\left(t-\sqrt{t^2+4s}\right)^n\right\}F_{t,s,n}$$

برهان:

$$\begin{aligned} f_{t,s,2n}=a\{\alpha^{2n}-\beta^{2n}\}&=a\{(\alpha^n+\beta^n)(\alpha^n-\beta^n)\}\\ &=(\alpha^n+\beta^n)a\{(\alpha^n-\beta^n)\}\\ &=(\alpha^n+\beta^n)F_{t,s,n}\end{aligned}$$

□

نتیجه ۳.۴.۳. برای اعداد حقیقی مثبت t و s داریم:

$$\begin{aligned} F_{t,s,8n}&=(\alpha^{4n}+\beta^{4n})F_{t,s,4n}\\ &=\frac{1}{16^n}\left\{\left(t+\sqrt{t^2+4s}\right)^{4n}+\left(t-\sqrt{t^2+4s}\right)^{4n}\right\}F_{t,s,4n}\end{aligned}$$

برهان: کافی است در نتیجه ۳.۳.۳، به جای n، $4n$ قرار دهیم. □

لم ۴.۴.۳. برای هر دنباله t و s−فیبوناتچی داریم:

$$\sum_{k=1}^{n}(t^6s+5t^4s^2+6t^2s^3+s^4)^{n-k}\times(t^7+6t^5s+10t^3s^2+4ts^3)^k \times F_{t,s,k}\binom{n}{k}=F_{t,s,8n} \tag{۱۳.۳}$$

برهان: طبق لم (۱.۴.۳) داریم:

$$\alpha+\beta=t, \qquad \alpha\beta=-s, \qquad F_{t,s,k}=a\alpha^k+b\beta^k$$

طرف چپ رابطه بالا برابر است با

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}s^{n-k}(t^6+5t^4s+6t^2s^2+s^3)^{n-k}$$
$$\times(t^7+6t^5s+10t^3s^2+4ts^3)^k(a\alpha^k+b\beta^k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(\alpha\beta)^{n-k}\left(t^6-5t^4(\alpha\beta)+6t^2(\alpha\beta)^2-(\alpha\beta)^3\right)^{n-k}$$
$$\times\left(t^7-6t^5(\alpha\beta)+10t^3(\alpha\beta)^2-4t(\alpha\beta)^3\right)^k(a\alpha^k+b\beta^k)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(\alpha\beta)^{n-k}$$
$$\times(\alpha^6+\alpha^5\beta+\alpha^4\beta^2+\alpha^3\beta^3+\alpha^2\beta^4+\alpha\beta^5+\beta^6)^{n-k}$$
$$\times(\alpha^7+\alpha^6\beta+\alpha^5\beta^2+\alpha^4\beta^3+\alpha^3\beta^4+\alpha^2\beta^5+\alpha\beta^6+\beta^7)^k$$
$$\times(a\alpha^k+b\beta^k)$$
$$=a\alpha^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\beta^{n-k}\Big(\sum_{l=0}^{6}\beta^l\alpha^{6-l}\Big)^{n-k}\Big(\sum_{l=0}^{7}\beta^l\alpha^{7-l}\Big)^k\right\}$$
$$+b\beta^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\alpha^{n-k}\Big(\sum_{l=0}^{6}\beta^l\alpha^{6-l}\Big)^{n-k}\Big(\sum_{l=0}^{7}\beta^l\alpha^{7-l}\Big)^k\right\}$$
$$=a\alpha^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\Big(\sum_{l=0}^{6}\beta^{l+1}\alpha^{6-l}\Big)^{n-k}\Big(\sum_{l=0}^{7}\beta^l\alpha^{7-l}\Big)^k\right\}$$
$$+b\beta^n\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\Big(\sum_{l=0}^{6}\beta^l\alpha^{7-l}\Big)^{n-k}\Big(\sum_{l=0}^{7}\beta^l\alpha^{7-l}\Big)^k\right\}$$
$$=a\alpha^n\left\{\sum_{l=0}^{7}\beta^l\alpha^{7-l}-\sum_{l=0}^{6}\beta^{l+1}\alpha^{6-l}\right\}^n$$
$$+b\beta^n\left\{\sum_{l=0}^{7}\beta^l\alpha^{7-l}-\sum_{l=0}^{6}\beta^l\alpha^{7-l}\right\}^n$$
$$=a\alpha^n(\alpha^7)^n+b\beta^n(\beta^7)^n=a\alpha^{8n}+b\beta^{8n}=F_{t,s,8n}$$

□

قضیه ۵.۴.۳. فرض کنیم $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$، یک چندجمله‌ای مختلط غیر ثابت از درجه n باشد و برای هر r و s حقیقی و مثبت:

$$\lambda_k = \Big(16^n (t^7 + 6t^5 s + 10t^3 s^2 + 4ts^3)^k \cdot (t^6 s + 5t^4 s^2 + 6t^2 s^3 + s^4)^{n-k} \times F_{t,s,k} \cdot \binom{n}{k}\Big)\Big(\big[(t + \sqrt{t^2 + 4s})^{4n} + (t - \sqrt{t^2 + 4s})^{4n}\big] F_{t,s,4n}\Big)^{-1}$$

در این صورت همه صفرهای $p(z)$ در طوق

$$R = \{z \in \mathbb{C} : s_1 \leq |z| \leq s_2\}$$

قرار می‌گیرند که

$$s_1 = \min_{1\leq k\leq n} \left\{\lambda_k \left|\frac{a_0}{a_k}\right|\right\}^{\frac{1}{k}} \tag{۱۴.۳}$$

$$s_2 = \max_{1\leq k\leq n} \left\{\frac{1}{\lambda_k} \left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right|\right\}^{\frac{1}{k}} \tag{۱۵.۳}$$

برهان: از رابطه (۱۴.۳) نتیجه می‌گیریم:

$$s_1^k \leq \lambda_k \left|\frac{a_0}{a_k}\right| \qquad k = 1, \cdots, n \tag{۱۶.۳}$$

برای $|z| < s_1$ داریم:

$$\begin{aligned} |p(z)| &= \Big|\sum_{k=0}^{n} a_k z^k\Big| \\ &\geq |a_0| - \sum_{k=1}^{n} |a_k|\,|z|^k \\ &> |a_0| - \sum_{k=1}^{n} |a_k| s_1^k \\ &= |a_0|\Big(1 - \sum_{k=1}^{n} \Big|\frac{a_k}{a_0} s_1^k\Big|\Big) \end{aligned} \tag{۱۷.۳}$$

از رابطه (۱۶.۳) به

$$\left|\frac{a_k}{a_0}\right| s_1^k \leq \lambda_k \qquad k = 1, \cdots, n$$

می‌رسیم که با جایگذاری رابطه بالا در رابطه (۱۷.۳) داریم:

$$|p(z)| > |a_0|\Big(1 - \sum_{k=1}^{n} |\lambda_k|\Big)$$

با استفاده از نتیجه ۳.۴.۳ و لم ۴.۴.۳ ، داریم: $|p(z)| > 0$ برای $|z| < s_1$، بنابراین $p(z)$ در $|z| < s_1$ ریشه‌ای ندارد.

برای اثبات قسمت اول قضیه توجه می‌کنیم که همه ریشه‌های $p(z)$ قدرمطلقی کمتر از یا مساوی با ریشه مثبت و یکتای چندجمله‌ای

$$G(z) = |a_n|z^n - |a_{n-1}|z^{n-1} - \cdots - |a_1|z - |a_0|$$

دارند، بنابراین برای قسمت دوم قضیه کافی است ثابت کنیم $G(s_2) \geq 0$.

از رابطه (۱۵.۳) داریم:

$$\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| \leq \lambda_k s_2^k \qquad k = 1, \cdots, n$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} G(s_2) &= |a_n|\left(s_2^n - \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{a_{n-k}}{a_n}\right| s_2^{n-k}\right) \\ &\geq |a_n|\left(s_2^n - \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k| s_2^n\right) \\ &= |a_n| s_2^n \left(1 - \sum_{k=1}^{n}|\lambda_k|\right) = 0 \end{aligned}$$

و اثبات به پایان می‌رسد. □

مراجع

[1] M. Bidkham and E. Shahani, An annulus for the zeros of polynomials, *Appl.Math Lett. 24*(2011), 122-125.

[2] M. Brilleslyper and schaubroeck, Locating Unimodular Roots, *College Mathematics Journal 45, No. 3*(2014)162-168.

[3] A. L. Cauchy, Excercised de mathematiques, Annee de Bure Frees Paris, 1829.

[4] j. L. Diaz-Barrero, An annulus for the zeros of polynomials, J. Math. Anal. Appl. 273(2002), 349-352.

[5] J. L. Diaz-Barrero and J. j. Egozcue, Bounds for moduli of zeros, *Appl. Math. Lett 17 (2004)*, 993-996.

[6] P. Drungilas, Unimodular roots of Reciprocal Littlewood polynomials, j. Korean Math. soc. 45(2008), No.3 , pp.835-840.

[7] S. Falcon, A. Plaza, The k-Fibonacci sequence and pascal 2-triangle, chaos solitons Fractals 33 (2007) 38-49.

[8] J. C. Masan & Hondscomb, D. C, Chebyshev polynomials, champan & Hall/ CRC (2003).

[9] A. Melman, Geometry of Trinomials, *Pacific Journal of Mathematics 259, No. 1 (2012)* 141-159.

[10] I. D. Mercer, Unimodular roots of special Littlewood polynomials, Canad. *Math. Bull 49 (2006), No. 3*, 438-447.

[11] K. Mukunda, Littlewood Pisot numbers, J. Number Theory 117 (2006), No 1, 106-121.

[12] H. Silverman, Complex variables and applications, Houghton Mifflin.

[13] A. Zireh, Location of zeros of polynomials, Applied Analysis. No. 18(2012), 159-166.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

ابهام	Ambiguity
اتحادهای مثلثاتی	Trigonometric identities
استقراء	Induction
اثبات	Proof
اصل	Principle
اعداد مختلط	Complex number
بخش	Portion
به پیمانه	Modulo
تعمیم	Generalization
تکرار	Multiciplity
جمله پیشرو	Ieading term
خودمعکوس	Self-reciproval
چندجمله‌ای	Polynomial
در نتیجه	Consequently
درجه	Degree
دنباله	Sequence
ریشه	Root
ریشه	Zero
شرایط اولیه	Initial conditions
شرایط لازم و کافی	Necessary and sufficient conditions

ضرایب .... Coefficients
طوق .... Annulus
غیر ثابت .... Non constant
قدر مطلق .... Moduluse
قرار گرفتن .... Lie
قضیه .... Theorem
قطبی .... Polar
کران .... Bound
مانند .... Analogue
متقارن .... Polindromic
متقارن از چپ .... Skew symmetric
معادله .... Equation
مکان .... Location
ناحیه .... Region
نتیجه .... Corollary
یکهنگ .... Unimodular
یکه .... Unit
وجود .... Existance

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

ابهام	Ambiguity
مانند	Analogue
طوق	Annulus
کران	Bound
ضرایب	Coefficients
اعداد مختلط	Complex number
نتیجه	Corollary
در نتیجه	Consequently
درجه	Degree
معادله	Equation
وجود	Existance
تعمیم	Generalization
استقراء	Induction
شرایط اولیه	Initial conditions
جمله پیشرو	Leading term
قرار گرفتن	Lie
مکان	Location
به پیمانه	Modulo
قدر مطلق	Moduluse
تکرار	Multiciplity

Necessary and sufficient conditions .... شرایط لازم و کافی

Non constant .... غیر ثابت

Polar .... قطبی

Polindromic .... متقارن

Polynomial .... چندجمله‌ای

Portion .... بخش

Principle .... اصل

Proof .... اثبات

Region .... ناحیه

Root .... ریشه

Self-reciproval .... خودمعکوس

Skew symmetric .... متقارن از چپ

Sequence .... دنباله

Theorem .... قضیه

Trigonometric identities .... اتحادهای مثلثاتی

Unimodular .... یکهنگ

Unit .... یکه

Zero .... ریشه

Abstract

In this thesis, we studied on number of unimodular roots of complex trinomial $P(z) = z^n + z^k - 1$ and expressed the necessary and sufficient conditions for the existence of unimodular roots. In the following we studied the existence of unimodular roots and their number for skewsymmetric Littlewood polynomials and self-reciprocal Littlewood polynomials. The final chapter deals with determined an annulus contaning all of the roots non-constant complex polynomial by using Fibonacci numbers and Pell numbers for bounds.

Keywords: complex polynomial, unimodular root, self-reciprocal polynomial, skewsymmetric polynomial, annulus, Fibonacci sequence.

Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Analysis

On Geometry of unimodular roots of trinomial

By: Malihe Rezvani

Supervisor

Ahmad Motamednegad

Advisor

Reza Hejazi

December 2019