





دانشکده علوم ریاضی

رساله دکتری ریاضی کاربردی - نظریه گراف

بررسی عدد احاطه گری رومی کامل برای رده‌هایی از گراف‌ها

نگارنده: مهسا دارکوتی

استادان راهنما

دکتر صادق رحیمی شعرباف
دکتر عبدالله آل‌هوز

استاد مشاور
دکتر هادی رهبانی

دی ماه ۱۳۹۸

ماحصل آموخته‌هایم را تقدیم می‌کنم

به استوارترین تکیه‌گاهم، دستان گرم پدرم

به سبزترین نگاه زندگی‌ام، چشمان پر مهر مادرم

که همواره مهر آسمانی‌شان آرام بخش آلام زمینی‌ام است
و هرچه بکوشم قطره‌ای از دریای بی‌کران مهربانیشان را
سپاس نتوانم بگویم. امروز هستی‌ام به امید آن دو است،
باشد که حاصل تلاشم نسیم‌گونه غبار خستگی‌شان را بزدايد.
بوسه بر دستان پر مهرشان...

به برادر مهربانم که آفتاب مهرش در آستانه قلبم همچنان
پابرجاست و هرگز غروب نخواهد کرد...

و تقدیم به همسر عزیزم که بودنش نشانه لطف الهی در
زندگی من است و مسیح‌وار با صبرش در تمامی لحظات
همراه و همگام من بوده است...

سپاس‌گزاری

اکنون که به یاری پروردگار و راهنمایی اساتید بزرگ موفق به پایان این رساله شده‌ام وظیفه خود دانسته که نهایت سپاسگذاری را از تمامی عزیزانی که در این راه به من کمک کرده‌اند به عمل آورم:

در آغاز از اساتید بزرگ و ارجمند جناب آقای دکتر عبدالله آل‌هوز و آقای دکتر صادق رحیمی شهرباف که راهنمایی این رساله را به عهده داشته‌اند کمال تشکر را دارم. همچنین، از جناب آقای دکتر هادی رهبانی که استاد مشاور این رساله بوده‌اند قدردانی می‌نمایم.

از اساتید گرانمایه هیئت داوران که داوری و تصحیح این رساله را بر عهده داشتند نهایت تشکر را دارم.

مهسا دارکوتی

دی ماه ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب مهسا دارکوتی دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده رساله با عنوان بررسی عدد احاطه گری رومی کامل برای رده‌هایی از گراف‌ها، تحت راهنمایی دکتر صادق رحیمی شعرفاف و دکتر عبدالله آل‌هوز متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این رساله تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ رسیده است.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از پایان‌نامه رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

مهسا دارکوتی

دی ماه ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

در یک گراف G تابع $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ ، تابع احاطه‌گر رومی کامل می‌باشد هرگاه هر رأس u با $f(u) = 0$ ، مجاور دقیقاً یک رأس v باشد به‌طوری‌که $f(v) = 2$. وزن یک تابع احاطه‌گر رومی کامل f برابر با مجموع وزن همه‌ی رئوس گراف می‌باشد. عدد احاطه‌گری رومی کامل گراف G عبارت است از کمترین وزن در میان توابع احاطه‌گر رومی کامل روی گراف G که آن را با نماد $\gamma_R^P(G)$ نشان می‌دهند. در این رساله تابع احاطه‌گر رومی کامل را بررسی کرده و برخی از ویژگی‌ها و کران‌های موجود برای این پارامتر بیان می‌شود. سپس نشان می‌دهیم که مسأله احاطه‌گری رومی کامل حتی برای گراف‌های دوبخشی نیز NP -کامل است. تلاش شده است که برخی از کران‌های قبلی را بهبود بخشیده و به‌ویژه کران بالای جدیدی برای درخت‌ها ارائه گردد. همچنین همه‌ی درختان احاطه‌گر رومی کامل یال بحرانی را تعیین و همه درختانی که در آن‌ها عدد احاطه‌گر رومی کامل و عدد احاطه‌گر رومی ضعیف، قویاً برابر می‌باشند، مشخص شده است.

کلمات کلیدی: عدد احاطه‌گری، عدد احاطه‌گری رومی، عدد احاطه‌گری رومی کامل، عدد احاطه‌گری رومی ضعیف، گراف، درخت.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. M. Darkooti, A. Alhevaz, S. Rahimi and H. Rahbani, On perfect Roman domination number in trees: Complexity and bounds, *Journal of Combinatorial Optimization*, **38** (2019), 712-720.
2. M. Darkooti, A. Alhevaz, S. Rahimi and H. Rahbani, Characterization of perfect Roman domination edge critical trees, *Le Matematiche*, **74** (2019), 109–118.
3. A. Alhevaz, M. Darkooti, H. Rahbani and Y. Shang, Strong equality of perfect Roman and weak Roman domination in trees, *Mathematics*, **7** (2019), 1-13.
4. M. Darkooti, A. Alhevaz, Some new bounds on perfect Roman domination number of graphs, *The 50th Annual Iranian Mathematics Conference*, 2019, Shiraz University, 715-717.

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
ق	فهرست جداول
ش	پیشگفتار
۱	۱ مقدمات
۱	۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه
۴	۲.۱ مجموعه‌ی احاطه‌گر
۴	۳.۱ توابع احاطه‌گر
۶	۴.۱ تاریخچه و کاربردهای مجموعه‌ی احاطه‌گر و تابع احاطه‌گر رومی
۱۱	۲ خواص تابع احاطه‌گر رومی کامل
۱۱	۱.۲ کران‌های موجود
۱۲	۲.۲ کران‌های جدید
۱۶	۳.۲ پیچیدگی محاسباتی
۲۱	۳ کران بالای جدید برای عدد احاطه‌گر رومی کامل در درختان
۲۱	۱.۳ مقدمه
۲۳	۲.۳ نتایج اصلی
۳۳	۴ گراف‌های احاطه‌گر رومی کامل یال بحرانی
۳۳	۱.۴ مقدمه
۳۴	۲.۴ خواص گراف‌های γ_R^P - یال بحرانی
۳۵	۳.۴ درختان γ_R^P - یال بحرانی
۴۳	۵ تابع احاطه‌گری رومی کامل و ضعیف
۴۴	۱.۵ درختان T با خاصیت $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$

۵۹	۶ پیشنهادهایی برای برخی کارهای آتی
۶۳	مراجع
۶۷	آ
۷۱	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۷۵	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۷۹	نمایه

فهرست تصاویر

۵	یک تابع احاطه‌گر رومی، روی گراف G با وزن $\gamma_R(G) = 4$	۱.۱
۵	یک تابع احاطه‌گر رومی کامل، روی گراف G با وزن $\gamma_R^P(G) = 5$	۲.۱
۶	یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف، روی گراف G با وزن $\gamma_r(G) = 4$	۳.۱
۸	نقشه امپراطوری روم.	۴.۱
۹	نقشه امپراطوری بریتانیا.	۵.۱
	NP - کامل بودن مسأله تابع احاطه‌گر رومی کامل برای گراف‌های دوبخشی.	۱.۲
۱۸		
۲۱	مثالی از خانواده‌ی $\mathcal{T}$	۱.۳
۲۲	گراف‌های G_1 و G_2	۲.۳
۳۴	عملگر $\mathcal{C}_1$	۱.۴
۳۶	درختان T_1 و T_2	۲.۴
۴۵	درخت F	۱.۵
۴۶	عملگرهای $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_6$	۲.۵
	درخت T از خانواده $\mathcal{T}$ که از درخت $K_{1,4}$ با عملگرهای $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, \mathcal{O}_4$ و $\mathcal{O}_6$	۳.۵
۴۶	به‌دست می‌آید.	

فهرست جداول

آ.۸ نمادها ۶۸

پیشگفتار

یکی از مهم‌ترین مفاهیم مطرح شده در نظریه‌ی گراف مفهوم **احاطه‌گری**^۱ است. مطالعه در مورد انتخاب کمترین تعداد وزیران در صفحه‌ی شطرنج به‌طوری که روی تمام صفحه احاطه داشته باشند به سال ۱۸۶۲ برمی‌گردد که توسط دیانیچ^۲ مطرح شد. این مسأله پس از آن در شکل‌های متفاوت و با سایر مهره‌های شطرنج نیز عنوان شد و برادران یاگلوب^۳ آن‌ها را در سال ۱۹۶۴ در قالب کتابی بررسی نمودند. این مسأله‌ها که برخی از آن‌ها هم‌چنان حل نشده باقی ماندند در واقع خاستگاه اصلی مفهوم احاطه هستند. اولین بار در سال ۱۹۵۸ کلاود برگ^۴ در کتاب خود در نظریه‌ی گراف، مفهومی به نام ضریب پایداری خارجی^۵ تعریف نمود. بعدها در سال ۱۹۶۲ اویستین اور^۶ برای همین مفهوم در کتاب خود از واژه‌ی **مجموعه احاطه‌گر**^۷ استفاده کرد و از آن پس تحت همین عنوان شناخته شد و مورد بررسی قرار گرفت. در اواسط دهه‌ی هشتاد کوکاینه^۸ و هدت نیه‌می^۹ کارهای انجام شده برای این مفهوم را جمع‌آوری کرده و مفهوم اندازه‌ی کوچکترین مجموعه احاطه‌گر در گراف G را بکار بردند و با نماد $\gamma(G)$ نمایش دادند. پس از این مقاله مفهوم احاطه در اشکال گوناگونی تعریف و تعمیم یافت به‌طوری که امروزه به یکی از مهم‌ترین و جذاب‌ترین مباحث در نظریه‌ی گراف تبدیل شده است.

مجموعه‌های احاطه‌گر و توابع احاطه‌گر دو بخش اصلی این تعمیم‌ها را به خود اختصاص داده‌اند. هدف اصلی در اغلب این موارد به‌دست آوردن اندازه‌ی کوچکترین مجموعه‌ی احاطه‌گر یا یافتن کمترین وزن ممکن برای توابع احاطه‌گر می‌باشد که به آن عدد احاطه‌ای می‌گویند. توابع احاطه‌گر رومی یکی از موضوعات جذاب برای محققین در حوزه نظریه‌ی گراف می‌باشد. با توجه به کاربردهای مختلف تابع احاطه‌گر رومی در سالیان اخیر تعمیم‌های زیادی از آن ارائه شده است. احاطه‌گری رومی در گراف‌ها از استراتژی یک فرمانروا گرفته شده است، کسی که برای اطمینان از امنیت فرمانروایی‌اش، قصد داشت قدرت نیروی نظامی خود را با حداقل نیرو بهینه‌سازی کند. منشأ اصلی احاطه‌گری رومی در گراف‌ها به قرن چهار قبل از میلاد مسیح برمی‌گردد. کنستانتین^{۱۰} کبیر برای دفاع از شهرها دستور داد که برای محافظت از شهرهای بدون سپاه، شهری با دو سپاه در مجاورت آن وجود داشته باشد، تا اگر شهر بدون

¹Domination

²De Jaenisch

³Yaglom

⁴Clude Berge

⁵Coefficient of external stability

⁶Oysteine Ore

⁷Dominating set

⁸Cockayne

⁹Hedentniemi

¹⁰Constantion

سپاهی مورد هجوم حمله قرار گرفت، شهر شامل دو سپاه بدون آن که خودش آسیب‌پذیر شود، بتواند سپاهی را برای محافظت از آن شهر اعزام کند. تعداد لشکرهای مورد نیاز در این مثال، امروزه تحت عنوان احاطه‌گری رومی در گراف شناخته می‌شود. اولین بار در سال ۱۹۹۹ استوارت^۱ در [۲۷] و پس از آن نیز ریول^۲ و روزینگ^۳ در [۲۶] احاطه‌گر رومی را بررسی نمودند. با این توصیف، کوکاینه و همکارانش در [۷] تابع احاطه‌گری رومی گراف G را به صورت زیر تعریف کردند. تابع $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ ، یک تابع احاطه‌گری رومی روی گراف G نامیده می‌شود هرگاه هر رأس u با $f(v) = 0$ حداقل با یک رأس v از G با $f(v) = 2$ مجاور باشد.

یک نوع دیگر از این توابع تعریف شده، تابع احاطه‌گر رومی کامل می‌باشد. در یک گراف G تابع $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ ، تابع احاطه‌گر رومی کامل می‌باشد هرگاه هر رأس u با $f(u) = 0$ مجاور دقیقاً یک رأس v باشد به‌طوری که $f(v) = 2$. در این رساله تابع احاطه‌گر رومی کامل را مطالعه کرده و کران‌هایی جدید برای آن به‌دست می‌آوریم.

به‌طور خلاصه، در فصل اول این رساله به ذکر تعاریف و مفاهیم مورد نیاز، مانند تابع احاطه‌گر رومی، احاطه‌گری رومی ضعیف و احاطه‌گر رومی کامل می‌پردازیم. همچنین در بخش آخر تاریخچه توابع احاطه‌گر رومی و برخی از کاربردهای آن‌ها را بیان می‌کنیم.

در فصل دوم، ابتدا در بخش ۱.۲ چندین کران ارائه شده برای تابع احاطه‌گر رومی کامل را بیان می‌کنیم. در بخش ۲.۲ کران‌های جدیدی بر اساس درجه، مرتبه، قطر و کمر گراف ارائه می‌دهیم. در بخش ۳.۲ نشان می‌دهیم که مسأله احاطه‌گر رومی کامل در گراف‌ها نیز یک مسأله NP - کامل است.

در فصل سوم ابتدا در بخش ۱.۳ کران ارائه شده برای عدد احاطه‌گر رومی کامل برای درختان بیان می‌شود. سپس در بخش ۲.۳ این کران را بهبود می‌دهیم.

در فصل چهارم ابتدا در بخش ۲.۴ خواص توابع احاطه‌گر رومی کامل یال-بحرانی را بررسی می‌کنیم. سپس در بخش ۳.۴ همه‌ی درختان احاطه‌گر رومی کامل یال-بحرانی را مشخص می‌کنیم.

در فصل پنجم همه‌ی درختانی که برای آن‌ها عدد احاطه‌گر رومی کامل با عدد احاطه‌گر رومی ضعیف، قویاً برابر است را تعیین می‌کنیم.

¹Stewart²Revelle³Rosing

فصل ۱

مقدمات

در این فصل پس از بیان تعاریف اولیه و مفاهیم مقدماتی در نظریه‌ی گراف به بحث پیرامون مجموعه‌های احاطه‌گر و توابع احاطه‌گر رومی در گراف‌ها می‌پردازیم. در ادامه این فصل، به‌منظور ایجاد انگیزه در خواننده در راستای مطالعه این رساله، به بیان تاریخچه و کاربردهایی از توابع احاطه‌گر رومی می‌پردازیم. تعاریف ارائه شده در این فصل و سایر مفاهیم مرتبط با نظریه‌ی گراف برگرفته از مرجع [۱۲] است.

۱.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

سنگ بنایی برای توسیع موضوع نظریه‌ی گراف در اوایل سال ۱۷۳۶ مطرح شد، زمانی که اوایلر تلاش کرد و موفق شد یک راه‌حل جانبی برای مسأله پل معروف کونیگسبرگ بدهد. در زندگی روزمره و فعالیت‌هایی که انجام می‌دهیم مسائل و فرآیندهایی وجود دارند که می‌توان برای بیان آن‌ها از نقاط و خطوطی که برخی یا تمام نقاط را به هم وصل می‌کنند، استفاده نمود. حاصل تجرید ریاضی این نوع مدل‌سازی، پیدایش مفهومی با عنوان گراف است. به‌عنوان مثال در شبکه‌های مخابراتی برای نشان دادن مراکز مخابراتی از نقاط و برای نشان دادن ارتباط بین دو مرکز مخابراتی از خطوطی که نقاط را به هم وصل می‌کنند استفاده می‌کنیم. آنچه که اهمیت دارد این است که، دو نقطه چند بار به هم وصل شده‌اند یا دو نقطه‌ی مشخص، توسط خطی به هم متصل هستند یا خیر. مطالعه‌ی این اشکال و نمودارها و حل مسائل مربوط به آن‌ها به

مفهوم گراف منتهی می‌شود.

گراف $G = (V(G), E(G))$ عبارت است از مجموعه‌ی متناهی و ناتهی $V(G)$ و خانواده $E(G)$ از دوتایی‌های نامرتب از اعضای در $V(G)$. هر عضو $V(G)$ یک **رأس** و هر عضو $E(G)$ یک **یال** نامیده می‌شود. تعداد رأس‌ها، یعنی $|V(G)|$ ، **مرتبه** گراف نامیده شده و با نماد $n(G)$ مشخص می‌شود. $|E(G)|$ نیز **اندازه** گراف نامیده شده و با نماد $m(G)$ نمایش داده می‌شود. همچنین هر یال $\{u, v\} \in E(G)$ را با $uv \in E(G)$ مشخص کرده و اگر $e = uv \in E(G)$ می‌گوییم u و v با هم مجاور هستند. اگر دو سر یک یال بر هم منطبق باشند آن را **طوقه** می‌نامند. دو یال با رؤس ابتدا و انتهای یکسان را **یال‌های موازی** می‌نامند. **گراف ساده**، گرافی است که یال موازی و طوقه نداشته باشد، همچنین گرافی که مجموعه رأس‌های آن متناهی باشد، **گراف متناهی** نامیده می‌شود. **همسایگی باز** رأس v که با نماد $N_G(v)$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از مجموعه رؤس مجاور با v در گراف G ، یعنی $N_G(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$. همچنین **همسایگی بسته** رأس v که با نماد $N_G[v]$ نمایش داده می‌شود، عبارت است از $N_G[v] = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\} \cup \{v\}$.

درجه رأس v که با نماد $\deg_G(v)$ نمایش داده می‌شود، برابر با تعداد همسایه‌های رأس v در گراف G است. **ماکسیمم درجه** و **مینیمم درجه** رؤس گراف G را به ترتیب با نماد $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نمایش می‌دهیم. یک **رأس منفرد** رأسی است که با هیچ رأس دیگری مجاور نباشد. یک **برگ** (**رأس آویزان**) رأسی از درجه یک است. و رأسی که در همسایگی یک رأس آویزان باشد را **رأس پشتیبان** می‌نامیم. مجموعه برگ‌های گراف G را با نماد $L(G)$ و مجموعه رؤس پشتیبان آن را با نماد $S(G)$ نمایش می‌دهیم. یک رأس پشتیبان را **پشتیبان قوی** گوییم هرگاه دارای حداقل دو همسایه برگ باشد. برای هر رأس پشتیبان x مجموعه‌ی همه‌ی برگ‌های همسایه آن را با L_x نمایش می‌دهیم. منظور از **زیرتقسیم کردن** یال uv در گراف G افزودن رأس جدید w به گراف G و جایگزینی یال uv با مسیر uvw است.

برای هر زیرمجموعه S از $V(G)$ ، **زیرگراف القایی** توسط S ، $G[S]$ زیرگراف ماکسیمال از G با مجموعه رؤس S را مشخص می‌کند. برای یک زیرمجموعه S از رأس‌های گراف G ، $G - S$ گراف به‌دست آمده از G با حذف رأس‌های S است. اگر $S = \{v\}$ آن‌گاه برای راحتی $G - S$ را به‌صورت $G - v$ نمایش می‌دهیم.

یک **گراف غیر بدیهی** گرافی از مرتبه حداقل ۲ می‌باشد. **گراف کامل**، گرافی است که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک یال وجود داشته باشد. یک گراف کامل از مرتبه n دارای n رأس و نیز $\frac{n(n-1)}{2}$ یال است که آن را با نماد K_n نمایش می‌دهند. فرض کنید G گرافی n رأسی باشد. در این صورت **مکمل** (یا **متمم**) گراف G که با نماد $\bar{G}$ نمایش داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رؤس $V(G)$ به‌طوری‌که هر دو رأس مانند u و v در $\bar{G}$ مجاور هستند اگر و فقط اگر در G مجاور نباشند. **گراف منتظم** گرافی است که درجه‌ی تمام رؤس آن یکسان باشد. گراف منتظمی که درجه هر رأس آن k باشد، گراف k -منتظم می‌گوییم. تعداد یال‌های گراف k -منتظم برابر است با: $q = \frac{nk}{2}$.

گراف دوبخشی گرافی است که مجموعه رأس‌های آن به دو زیرمجموعه X و Y چنان افراز شود، که یک سر تمام یال‌های گراف G در X و سر دیگر آن‌ها در Y باشد. یک گراف دوبخشی با بخش‌های X و Y ، که در آن هر رأس X به تمام رؤوس رأس Y وصل شده باشد، **گراف دوبخشی کامل** نامیده می‌شود. اگر $|X| = n$ و $|Y| = m$ آن گاه گراف دوبخشی کامل با بخش‌های X و Y را با نماد $K_{n,m}$ نمایش می‌دهیم. **گراف وتري** گرافی است که شامل هیچ دور القایی به طول حداقل ۴ نباشد.

یک **گشت** به طول k یک دنباله متناوب $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ از رأس‌ها و یال‌هاست، به‌طوری‌که برای هر $i = 1, \dots, k$ یک یال $e_i = v_{i-1}v_i$ باشد. یک **مسیر** مسیر گشتی است که هیچ رأس تکراری نداشته باشد. یک مسیر را در یک گراف به صورت فهرست مرتبی از رأس‌های متمایز $v_n, \dots, v_1, v_0$ در نظر می‌گیریم، به‌طوری‌که برای هر $i = 1, \dots, n$ $e_i = v_{i-1}v_i$ یک یال باشد. یک مسیر n رأسی را با P_n نمایش می‌دهیم. مسیری که رأس ابتدای آن u و رأس انتهایی آن v باشد را یک (u, v) -مسیر می‌گویند. یک **دور** گشت بسته‌ای به طول حداقل سه است که در آن رأس ابتدایی و رأس انتهایی بر یکدیگر منطبق هستند و هیچ رأس تکراری دیگری نداریم. یک دور n رأسی را با C_n نشان می‌دهیم.

گراف G **همبند** نامیده می‌شود هرگاه برای هر دو رأس متمایز u و v ، مسیری از u به v موجود باشد. فرض کنید u و v رأس‌های گراف G باشند. در این صورت **فاصله** بین u و v که آن را با نماد $d_G(u, v)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از طول کوتاه‌ترین مسیر بین u و v در گراف G . **قطر** یک گراف، $diam(G)$ ، طول مسیر بین دو رأسی است که بیشترین فاصله ممکن را دارند. هر مسیر بین دو رأس با فاصله $diam(G)$ را یک مسیر قطری گویند. کوتاه‌ترین دور موجود در گراف G را **کمر** گراف گویند و طول این دور را با نماد $g(G)$ نمایش می‌دهند.

هر گراف همبند فاقد دور، **درخت** نام دارد. هر زیرگراف القایی همبند یک درخت را نیز **زیردرخت** گویند. یک **درخت ریشه‌دار** درختی است که یک رأس آن از بقیه رؤوس متمایز شده باشد. رأس متمایز شده **ریشه درخت** نامیده می‌شود. برای استفاده بهینه از درخت‌ها در اثبات قضیه‌ها یا در سایر کاربردها از جمله علوم کامپیوتر از آن به‌صورت درخت ریشه‌دار استفاده می‌شود.

اگر T یک درخت ریشه‌دار باشد، آن گاه زیردرخت ریشه‌دار در رأس v را با نماد T_v نمایش می‌دهیم. اگر $u \in N_{T_v}(v)$ باشد، گوییم u **فرزند** v و v **پدر** u است. یک **ستاره مضاعف** گرافی است که از اتصال رؤوس مرکزی دو ستاره $K_{\lambda, p}$ و $K_{\lambda, q}$ با یک یال به‌دست می‌آید. بنابراین ستاره مضاعف درختی با دقیقاً دو رأس غیربرگ می‌باشد.

گراف G همراه با تابع وزن $f: V \rightarrow R$ را یک **گراف وزن‌دار** می‌نامیم هرگاه به هر رأس v از مجموعه $V(G)$ وزن $f(v)$ نظیر شود.

۲.۱ مجموعه‌ی احاطه‌گر

مجموعه S از رئوس را در گراف G یک **مجموعه احاطه‌گر** گوییم هرگاه هر رأس $v \in V(G)$ یا در S باشد یا با عضوی از S مجاور باشد. **عدد احاطه‌گری**^۱ گراف G ، برابر است با اندازه کوچک‌ترین مجموعه احاطه‌گر موجود در گراف G و با نماد $\gamma(G)$ نشان داده می‌شود. یک مجموعه احاطه‌گر G از اندازه $\gamma(G)$ ، یک $\gamma(G)$ -مجموعه نامیده می‌شود.

انواع زیادی از احاطه‌گری‌ها توسط نویسندگان مختلف معرفی و مطالعه شده‌اند. مفهوم احاطه‌گری کامل را ویچسل^۲ معرفی کرد.

زیرمجموعه S از $V(G)$ یک **مجموعه احاطه‌گر کامل**^۳ نامیده می‌شود به‌طوری‌که هر رأس $u \in V(G) \setminus S$ دارای دقیقاً یک مجاور در مجموعه S باشد. کمترین اندازه در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر کامل گراف G را **عدد احاطه‌گر کامل**^۴ گراف G گویند و با نماد $\gamma_p(G)$ نمایش داده می‌شود.

۳.۱ توابع احاطه‌گر

تحت شرایط مختلف به انواع گوناگونی از احاطه‌گری نیاز داریم. قرار دادن شرط‌های مختلف بر روی رأس‌هایی که به‌عنوان مجموعه‌ی احاطه‌گر انتخاب شده‌اند، منشأ تعریف انواع گوناگونی از مجموعه‌های احاطه‌گر است. با کمی دقت در این تعاریف می‌توان حضور یک تابع انتخاب در تمامی آن‌ها را دید. تابعی با مجموعه‌ی مقادیر $\{0, 1\}$ که به اعضای مجموعه‌ی احاطه‌گر مورد نظر عدد یک و به رأس‌های خارج از آن عدد صفر را نسبت می‌دهد. حال فرض کنید از مجموعه‌های احاطه‌گر دیگری به جای $\{0, 1\}$ در این تابع استفاده شود. وقتی تابع جدید به یک رأس مقداری غیر از صفر را نسبت می‌دهد علاوه بر انتخاب آن به‌عنوان یک عضو مجموعه‌ی احاطه‌گر، روش یا نوع احاطه‌گری رأسی بر سایر رأس‌ها را نیز مشخص می‌کند. با این نوع نگرش انواع گوناگونی از احاطه‌گری به وجود می‌آید. این دسته از توابع را تحت عنوان توابع احاطه‌گر خواهیم شناخت. در ادامه به بیان مفهوم تابع احاطه‌گری رومی، تابع احاطه‌گری رومی ضعیف و تابع احاطه‌گری رومی کامل خواهیم پرداخت.

فرض کنید $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ ، تابعی باشد که برای هر رأس $v \in V$ با شرط $f(v) = 0$ ، همسایه‌ای مانند $u \in N(v)$ وجود داشته باشد که $f(u) = 2$. چنین تابعی، **تابع احاطه‌گر رومی**^۵ و یا به اختصار RDF نامیده می‌شود. وزن یک تابع احاطه‌گر رومی را با نماد $w(f)$ نشان می‌دهند و برابر با مقدار $\sum_{v \in V} f(v)$ است. کمترین مقدار وزن یک RDF روی G **عدد احاطه‌گری رومی**^۶ گراف G گویند و با نماد $\gamma_R(G)$ نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر، یک

¹Domination number

²P. M. Weichsel

³Perfect dominating set

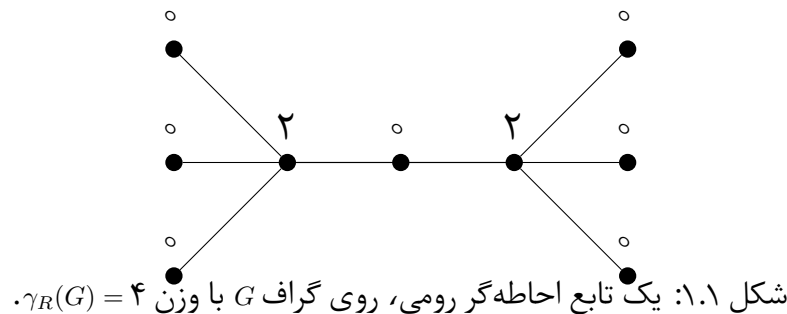
⁴Perfect domination number

⁵Roman dominating function

⁶Roman dominating number

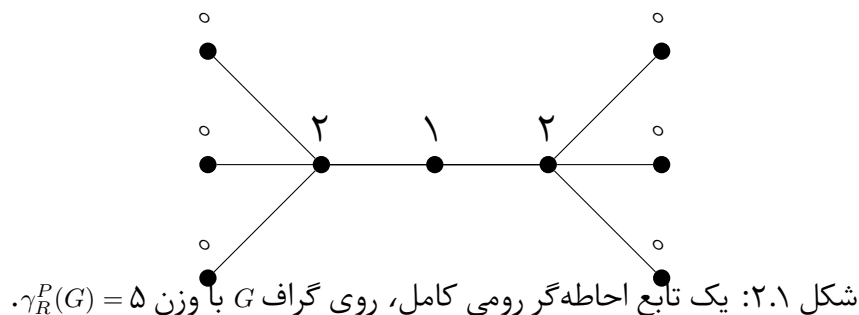
تابع احاطه گر رومی، یک رنگ آمیزی از رئوس گراف با رنگ‌های $\{0, 1, 2\}$ می‌باشد به طوری که هر رأس با رنگ ۰ همسایه حداقل یک رأس با رنگ ۲ باشد.

هر تابع احاطه گر رومی مانند f را می‌توان با افزایش به صورت $f = (V_0, V_1, V_2)$ نمایش داد. در این افزایش به ازای هر $i = 0, 1, 2$ داریم: $V_i = \{v \in V(G) | f(v) = i\}$. در این نمایش، وزن تابع f را می‌توان از تساوی $w(f) = |V_1| + 2|V_2|$ محاسبه نمود.



احاطه‌گری رومی اولین بار در سال ۱۹۹۹ توسط استوارت به طور ضمنی در [۲۷] مطالعه شد و سپس مورد توجه ریاضی‌دانان زیادی قرار گرفت و در مقالات زیادی از جمله [۷] مورد بحث و بررسی قرار گرفت. تاکنون انواع مختلفی از احاطه‌گری رومی در مقالات مورد بررسی قرار گرفته‌اند مانند [۱۷، ۲۱، ۲۴].

هنینگ^۱ و همکاران در [۱۶] احاطه‌گری رومی کامل را به صورت زیر معرفی کردند. تابع $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ یک **تابع احاطه گر رومی کامل**^۲ یا به اختصار PRDF می‌نامیم اگر هر رأس v که $f(v) = 0$ دارای دقیقاً یک همسایه u با $f(u) = 2$ باشد. وزن یک تابع احاطه گر رومی کامل را با نماد $w(f)$ نشان داده و برابر با $\sum_{v \in V} f(v)$ می‌باشد. کمترین وزن در بین تمام توابع احاطه‌گری رومی کامل، **عدد احاطه‌گری رومی کامل**^۳ نام دارد و با نماد $\gamma_R^P(G)$ نمایش داده می‌شود.



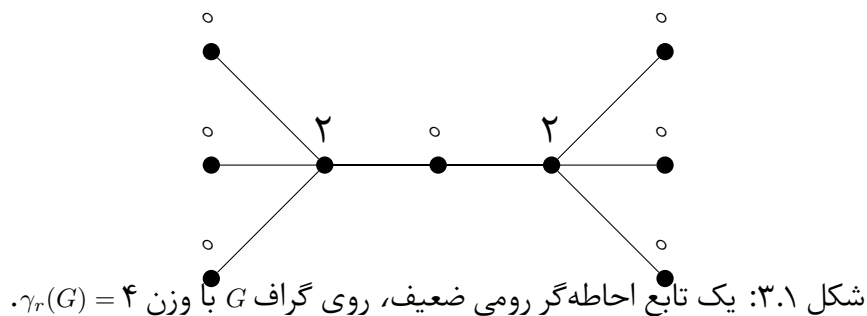
هنینگ و هدت نیه‌می، تابع احاطه‌گری رومی ضعیف را به صورت زیر معرفی کردند. فرض کنید G یک گراف و $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ تابعی باشد که به هر رأس G مقدار ۰، ۱ یا ۲ نظیر کند. رأس u با $f(u) = 0$ را نسبت به f بی‌دفاع گویند، هرگاه دارای رأس مجاور با وزن

¹Henning

²Perfect Roman dominating function

³Perfect Roman domination number

مثبت نباشد. تابع $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ را یک **تابع احاطه گر رومی ضعیف**^۱ یا به اختصار WRDF گویند، هرگاه هر رأس u با $f(u) = 0$ مجاور رأس v باشد به طوری که $f(v) > 0$ و تابع $f' : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ با ضابطه‌ی $f'(u) = 1$ ، $f'(v) = f(v) - 1$ و برای هر $w \in V(G) \setminus \{u, v\}$ $f'(w) = f(w)$ دارای رأس بی دفاع نباشد. وزن f برابر $\sum_{v \in V} f(v)$ می باشد و با نماد $w(f)$ نشان داده می شود. **عدد احاطه گری رومی ضعیف**^۲ گراف G کمترین وزن بین همه‌ی توابع احاطه گر رومی ضعیف گراف G می باشد و با نماد $\gamma_r(G)$ نشان داده می شود.



۴.۱ تاریخچه و کاربردهای مجموعه‌ی احاطه گر و تابع احاطه گر رومی

در سال‌های اخیر مفهوم احاطه گری در گراف‌ها به دلیل کاربردهای زیاد آن در زمینه‌های مختلف همچون علوم کامپیوتر و شبکه‌های الکترونیکی مورد توجه محققین زیادی قرار گرفته و رشد چشمگیری داشته است.

به نظر می‌رسد که منشأ مفهوم احاطه گری بازی شطرنج می باشد، که در آن نظر بر این بود که مربع شطرنج با مهره‌های شطرنج پوشیده و یا احاطه شود. طبق قوانین بازی شطرنج، وزیر قادر است در جهت عمودی، افقی و مورب به تعداد دلخواه حرکت کند. همان‌طور که گفته شد این مفهوم برای نخستین بار توسط دیانیچ در سال ۱۸۶۲ روی صفحه‌ی شطرنج مورد استفاده قرار گرفت تا حداقل تعداد وزیر مورد نیاز برای پوشش یک صفحه شطرنج را تعیین کند. اما بعدها به عنوان بحث نظری در نظریه گراف‌ها بررسی و مطالعه گردید و تاکنون مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است. در سال ۱۸۹۲ بال^۳ در [۲۹] مسأله کمترین تعداد مهره‌های وزیر مورد نیاز جهت قرار گرفتن روی صفحه‌ی شطرنج به قسمی که هر خانه‌ای مورد حمله‌ی یک وزیر قرار گرفته و هیچ وزیری مورد حمله‌ی وزیر دیگری نباشد را مطرح کرد. این مسأله به مسأله‌ی ۵- وزیر مشهور شد. در این مسأله خانه وزیر مورد نظر، یک رأس و مربع‌هایی که وزیر می‌تواند در آن‌ها حرکت کند، رؤس مجاور با آن در نظر گرفته شده است.

¹Weak Roman dominating function

²Weak Roman domination number

³W. W Rouse Ball

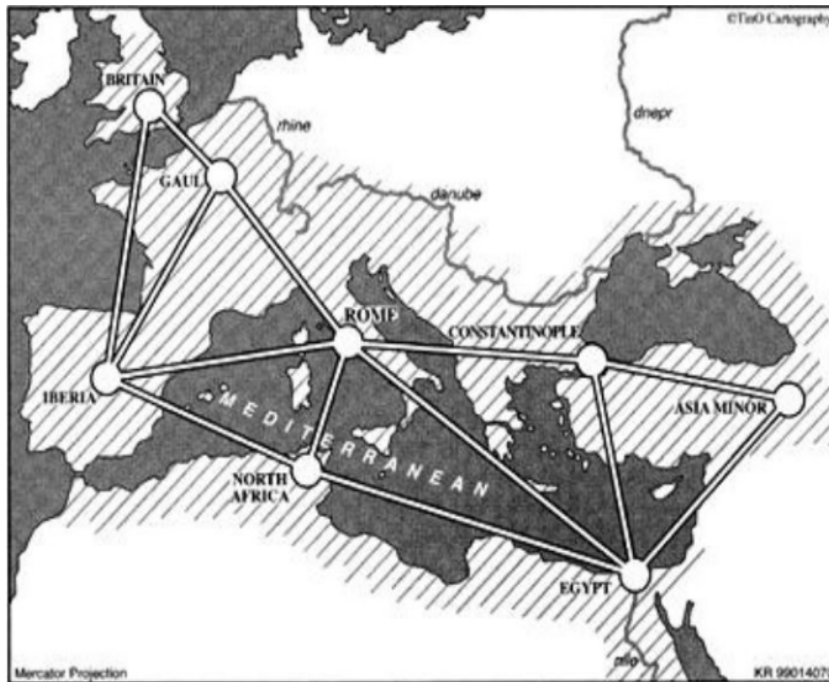
از جمله کاربردهای دیگر آن می‌توان در مخابرات برای نصب دکل‌های آنتن در مناطقی از شهر یا انتخاب بهترین مکان‌ها برای احداث بیمارستان یا مراکز آتش‌نشانی و ... اشاره نمود. به‌عنوان مثال، فرض کنید قرار است در مناطقی از شهر دکل‌های مخابرات نصب شود به‌طوری‌که به تمامی نقاط شهر آنتن دهی مناسب انجام شده و همچنین از نظر اقتصادی نیز مقرون به صرفه باشد. یعنی با انتخاب کمترین نقاط برای نصب دکل به هدف مورد نظر دست پیدا کنیم. برای این منظور مناطق مختلف شهر را به‌عنوان رئوس گراف در نظر می‌گیریم و با توجه به برد آنتن دهی، در صورت نصب دکل در هر منطقه، آن مناطقی که آنتن دهی می‌شوند را با خطوطی به آن متصل می‌کنیم و به این ترتیب یال‌های گراف مورد نظر را رسم کرده و گرافی طراحی می‌کنیم.

در ادامه نیز به بیان کاربردهای نظامی از تابع احاطه‌گری رومی می‌پردازیم. یکی از مهمترین عواملی که در عملیات نظامی و دفاعی باعث موفقیت یا شکست می‌شود، چگونگی استقرار نیروهای دفاعی در منطقه مورد نظر می‌باشد. همچنین برای هر دولتی حفظ امنیت کل کشور با حداقل نیرو به خاطر کاهش هزینه‌ها خیلی حیاتی می‌باشد. با استفاده از مفهوم احاطه‌گر رومی می‌توان بهترین مکان استقرار نیروهای دفاعی و همچنین چگونگی استقرار تعداد مشخصی نیروی دفاعی برای حفظ و امنیت بیشترین مناطق ممکن را با توجه به مدل گرافی هر سرزمین مشخص کرد.

در حدود قرن چهار قبل از میلاد مسیح امپراطوری روم مورد حمله قرار گرفت. نقشه امپراطوری روم را در شکل ۴.۱ می‌توانید ببینید. مدل ریاضی ما یک گراف $G = (V, E)$ با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E است. هر رأس در گراف ما نمایشگر یک ناحیه در امپراتوری روم است و دو رأس با یک یال به هم متصل هستند اگر نقاط متناظرشان مجاور باشند. امپراطور کنستانتین مجبور شد که چهار ارتش خود را در هشت منطقه استقرار دهد تا از امپراطوری در مقابل این حملات دفاع کند. او می‌خواست طوری هر واحد ارتش را در این هشت منطقه استقرار دهد، که هر منطقه توسط یک یا دو واحد ارتش استقرار یافته در همان منطقه محافظت شود و یا در مجاورت یک منطقه با دو واحد ارتش باشد به‌طوری‌که در مواقع حمله یک واحد ارتش از این منطقه به منطقه بی‌دفاع فرستاده شود. امپراطور کنستانتین تصمیم گرفت که دو واحد ارتش در روم و دو واحد دیگر در قسطنطنیه استقرار پیدا کنند. بدین ترتیب تنها بریتانیا در مواقع حمله بی‌دفاع بود و به همین دلیل بعد از مدتی امپراطوری روم کنترل بریتانیا را از دست داد. مطمئناً دلایل بسیار زیاد و پیچیده‌ای برای این موضوع وجود دارد که نمی‌توان آنها را با این مدل ساده توضیح داد. با این وجود استوارت در [۲۷] به درستی استدلال می‌کند که اگر امپراطور کنستانتین درک ریاضی قویتری داشت، شاید امپراطوری روم در مدت زمان بیشتری می‌توانست بریتانیا را حفظ کند. در واقع شش راه برای بهبود استقرار واحدهای ارتش که توسط امپراطور در نظر گرفته بود وجود دارد. این شش راه توسط ریول و روسینگ در [۲۶] ارائه شده‌اند.

علاوه بر استقرار واحدهای ارتش روم، همین استدلال نیز می‌تواند در بهینه‌سازی و کاهش

تعداد ناوگان بریتانیا^۱ در پایان قرن نوزدهم و یا واحدهای نظامی آمریکا در طول جنگ سرد استفاده کرد [۲۶]. علاوه بر کاربردهای نظامی می‌توان از این استدلال در پیدا کردن بهترین منطقه شهر برای ایستگاه آتش نشانی، بیمارستان، رستوران و ... استفاده کرد. تعداد زیادی از مسائل بهینه‌سازی را می‌توان با احاطه‌گری رومی و انواع آن مدل کرد.



شکل ۴.۱: نقشه امپراطوری روم.

یک مسأله مشابه به دفاع امپراطوری روم، مسأله دفاع از امپراطوری بریتانیا می‌باشد. در قرن ۱۹ میلادی امپراطوری بریتانیا سرمایه و نیروی کافی برای حفظ و دفاع از مناطق کلیدی خود را داشت. امپراطوری بریتانیا در حدود ۱۵۰ سال با شش ناوگان جنگی که هر کدام متشکل از بیست کشتی بودند برای دفاع و حفظ مناطق مستعمره از سیاست دفاع رو به جلو استفاده می‌کرد. در اواخر قرن ۱۹ میلادی با کاهش قدرت بریتانیا و ظهور آلمان به‌عنوان یک نیروی دریایی جدید این استراتژی باید مورد تجدید نظر قرار می‌گرفت. با وجود افزایش تحرک و قدرت کشتی‌های نوین باعث کاهش ناوگان جنگی بریتانیا به هشت کشتی شد، ولی در قرن ۱۹ این تعداد به چهار ناوگان جنگی رسید. به دلیل وجود شش منطقه کلیدی بریتانیا نیاز به تغییر دفاع در عمق داشت. لرد فیشر^۲ ابتدا سه ناوگان جنگی را در بریتانیا مستقر کرد و یک ناوگان جنگی را هم در مدیترانه استقرار داد. دلیل این کار او به خاطر افزایش تنش‌ها در اروپا و همچنین قویتر شدن نیروی دریایی آلمان بود.

قوانین حرکتی ناوگان جنگی بریتانیا همان قوانین حرکتی حاکم بر واحدهای ارتش امپراطوری روم می‌باشند. یک ناوگان جنگی باید بعد از یک مرحله حرکت در یک منطقه حضور یابد تا دوباره راه‌اندازی شود. یک مرحله حرکت به منزله عبور از یکی از مناطق کلیدی می‌باشد. در

¹Britain

²Lord Fisher

شکل ۵.۱ می‌توانید شش منطقه کلیدی و راههای ارتباطی بین آنها را ببینید. استراتژی لرد فیشرفقط امنیت سه منطقه بریتانیا، شرق هند و مدیترانه را در یک مرحله تضمین می‌کرد. بدترین منطقه از نظر امنیت در این استراتژی شرق دور بود که طی پنج مرحله می‌شد برای آن نیروی دفاعی فرستاد.



شکل ۵.۱: نقشه امپراطوری بریتانیا.

در حقیقت برای دفاع از هر سرزمینی با استفاده از این استراتژی کافی است، ابتدا مدل گرافی از این سرزمین ارائه شود، که در آن هر منطقه را به عنوان یک رأس در نظر می‌گیریم و هر دو منطقه‌ای که با هم ارتباط داشته باشند را با یک یال به هم متصل می‌کنیم. در این صورت اگر یک رأس دارای وزن ۲ باشد، آن گاه در آن مکان ۲ واحد ارتش استقرار پیدا می‌کند. همچنین اگر رأسی دارای وزن ۱ باشد، آن منطقه باید توسط یک واحد ارتش مورد دفاع قرار گیرد. رئوسی که وزن صفر می‌گیرند، با توجه به تابع احاطه‌گر رومی دارای حداقل رأس مجاوری با وزن ۲ هستند و بنابراین در صورت حمله به آن منطقه یک واحد ارتش از منطقه مجاورش با دو واحد نیرو می‌تواند از آن منطقه دفاع کند. همان‌طور که در قبل گفتیم در صورتی که برای دفاع از امپراطوری از این استراتژی استفاده کنیم، دقیقاً چهار واحد ارتش نیاز داریم.

فصل ۲

خواص تابع احاطه گر رومی کامل

در این فصل کران‌های عمومی عدد احاطه گر رومی کامل را بیان می‌کنیم و در پایان پیچیدگی محاسباتی مسأله عدد احاطه گر رومی کامل را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که این مسأله برای گراف‌ها یک مسأله NP - کامل می‌باشد.

۱.۲ کران‌های موجود

هنینگ و همکاران در [۱۴] کران‌های زیر را برای عدد احاطه گر رومی کامل گراف‌های منتظم به‌دست آوردند.

قضیه ۱.۱.۲. [۱۴] برای هر دور C_n از مرتبه $n \geq 3$ داریم، $\gamma_R^P(C_n) \leq \frac{4}{5}n$ و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $n = 5$.

قضیه ۲.۱.۲. [۱۴] اگر G گرافی ۳-منتظم باشد، آن‌گاه $\gamma_R^P(G) \leq \frac{3}{4}n$ و این کران دقیق می‌باشد.

در ادامه کران‌هایی برای عدد احاطه گر رومی کامل گراف‌های k -منتظم با $k \geq 4$ ارائه می‌شود.

قضیه ۳.۱.۲. [۱۴] اگر G گرافی k -منتظم از مرتبه n به‌طوری‌که $k \geq 4$ باشد، در این صورت
$$\gamma_R^P(G) \leq \frac{k^2 + k + 3}{k^2 + 3k + 1}n$$

هنینگ و همکاران قضایای ۲.۱.۲ و ۳.۱.۲ را برای گراف‌هایی با کمر حداقل ۷ به صورت زیر بهبود داده‌اند.

قضیه ۴.۱.۲. [۱۴] اگر G گرافی k -منتظم از مرتبه n با $k \geq 3$ و نیز $g(G) \geq 7$ باشد، آن‌گاه

$$\gamma_R^P(G) \leq \left(\frac{k^2 - k + 4}{k^2 + k + 2} \right) n.$$

۲.۲ کران‌های جدید

در این بخش ما ابتدا یک کران بالا و یک کران پایین جدید برای $\gamma_R^P(G)$ بر اساس مرتبه و ماکسیمم درجه گراف ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۲. اگر G گرافی از مرتبه n و ماکسیمم درجه $\Delta(G)$ باشد، آن‌گاه،

$$\gamma_R^P(G) \leq n - \Delta(G) + 1.$$

برهان. فرض کنید u رأسی از گراف G با بیشترین درجه باشد یا به عبارتی داشته باشیم $\deg(u) = \Delta(G)$ و لذا $|N[u]| = \Delta(G) + 1$. اگر $f = (V_0, V_1, V_2)$ باشد در این صورت تابع $f = (N(u), V(G) \setminus N[u], \{u\})$ یک تابع احاطه گر رومی کامل از وزن

$$2 + |V(G) \setminus N[u]| = 2 + (n - (\Delta(G) - 1)) = n - \Delta(G) + 1.$$

می‌باشد و بنابراین چون $\gamma_R^P(G)$ کمترین وزن بین تمام توابع احاطه گر رومی کامل روی گراف G می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که $\gamma_R^P(G) \leq n - \Delta(G) + 1$.

برای قابل دستیابی بودن کران قضیه ۱.۲.۲ گراف $G = K_{1,2}$ را در نظر بگیرید. $\square$

در قضیه بعدی کران پایین جدید برای عدد احاطه گر رومی کامل گراف بر اساس ماکسیمم درجه و مرتبه آن ارائه می‌شود.

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید G گرافی از مرتبه $n \geq 3$ و همچنین m یک عدد صحیح باشد به طوری که $1 \leq m \leq \frac{n-1}{2}$. اگر برای هر $\gamma_R^P(G)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ زیرگراف القایی

$$G[V_2 \cup V_1], \text{ گراف } \bar{K}_{|V_2 \cup V_1|} \text{ باشد و } \frac{n-m}{m+1} \leq \delta(G), \text{ آن‌گاه داریم،}$$

$$n + m - m\Delta(G) \leq \gamma_R^P(G).$$

برهان. فرض کنید $f' = (V'_0, V'_1, V'_2)$ یک $\gamma_R^P(G)$ -تابع باشد، آن‌گاه با توجه به فرض، هیچ دو رأس با وزن مثبتی مجاور نیستند و لذا مجاور هر رأس با وزن ۲، دارای وزن صفر است و همچنین هر رأس با وزن ۲ دارای حداقل $\delta(G)$ رأس مجاور با وزن صفر است. بنابراین گراف G دارای حداقل $|V'_2|(\delta(G) + 1)$ رأس می‌باشد. در این صورت داریم $n \geq |V'_2|(\delta(G) + 1)$ ، از طرفی

$\delta(G) \geq n - m(\delta(G) + 1)$ ، پس داریم $\frac{n-m}{m+1} \leq \delta(G)$. حال ادعا می‌کنیم که $|V'_1| \leq m$. با برهان خلف فرض کنید که $|V'_1| \geq m+1$ در این صورت،

$$\begin{aligned} n &\geq |V'_1|(\delta(G) + 1) \\ &\geq (m+1)(\delta(G) + 1) \\ &= m(\delta(G) + 1) + 1 + \delta(G) \\ &\geq m(\delta(G) + 1) + 1 + n - m(\delta(G) + 1) \\ &= n + 1. \end{aligned}$$

که یک تناقض است. بنابراین $|V'_1| \leq m$. از طرفی می‌دانیم که هر رأس با وزن صفر مجاور دقیقاً یک رأس از وزن ۲ می‌باشد و لذا $|V'_0| \leq \Delta(G)|V'_1|$ در این صورت داریم،

$$\begin{aligned} \gamma_R^P(G) &= 2|V'_1| + |V'_0| \\ &= |V'_1| + n - |V'_0| \\ &\geq n + |V'_1| - \Delta(G)|V'_1| \\ &= n - m(\Delta(G) - 1). \end{aligned}$$

□ برای قابل دستیابی بودن کران قضیه ۲.۲.۲ می‌توانیم گراف $G = K_{1,2}$ را در نظر بگیریم.

در قضیه زیر یک کران بالا ساده برای $\gamma_R^P(G)$ ارائه می‌شود و همچنین تمام گراف‌هایی که در تساوی کران ارائه شده صدق می‌کنند را مشخص می‌کنیم.

قضیه ۳.۲.۲. اگر G گرافی از مرتبه n باشد، آن‌گاه $\gamma_R^P(G) \leq n$. به‌علاوه تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $G = mK_2 \cup \bar{K}_c$ که در آن m و c اعداد صحیحی هستند که $n = 2m + c$.

برهان. فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد و $f: V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ تابعی باشد که به هر رأس گراف G وزن ۱ نظیر کند، در این صورت f یک تابع احاطه‌گر رومی کامل از وزن n می‌باشد و لذا $\gamma_R^P(G) \leq w(f) = n$. حال فرض کنید $\gamma_R^P(G) = n$ ، اگر G دارای یک رأس u با درجه حداقل ۲ باشد، آن‌گاه به‌وضوح تابع $h = (N(u), V(G) \setminus N[u], \{u\})$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای گراف G از وزن

$$\begin{aligned} 2 + |V(G) \setminus N[u]| &= 2 + (n - (\deg(u) + 1)) \\ &= 2 + n - \deg(u) - 1 \\ &\leq 2 + n - 2 - 1 \\ &= n - 1. \end{aligned}$$

می باشد که یک تناقض است. بنابراین برای هر $u \in V(G)$ داریم $\deg(u) \leq 1$. قرار دهید $M = \{u \in V(G) \mid \deg(u) = 1\}$ و $C = \{u \in V(G) \mid \deg(u) = 0\}$. در این صورت زیرگراف القایی $G[M]$ به صورت مولفه هایی از K_2 می باشد و همچنین زیرگراف القایی $G[C]$ به صورت مولفه هایی تک رأسی است. بنابراین در صورتی که $|M| = m$ و $|C| = c$ باشد، آن گاه $G = mK_2 \cup \bar{K}_c$ و به وضوح $n = 2m + c$. $\square$

با به کار بردن قضیه ۲.۲.۲ برای $m = 1$ و استفاده از قضیه ۱.۲.۲ نتیجه زیر حاصل می شود.

نتیجه ۱.۲.۲. اگر G گرافی از مرتبه $n \geq 3$ باشد بدین صورت که برای هر $\gamma_R^P(G)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ زیرگراف القایی $G[V_2 \cup V_1]$ ، گراف $\bar{K}_{|V_2 \cup V_1|}$ باشد و همچنین $\frac{n-1}{2} \leq \delta(G)$ ، آن گاه $\gamma_R^P(G) = n - \Delta(G) + 1$.

در قضیه بعدی مقدار دقیق $\gamma_R^P(G)$ برای گراف های با قطر دو ارائه می شود.

قضیه ۴.۲.۲. اگر G یک گراف با قطر دو باشد و برای هر $\gamma_R^P(G)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ زیرگراف القایی $G[V_2 \cup V_1]$ ، گراف $\bar{K}_{|V_2 \cup V_1|}$ باشد آن گاه $\gamma_R^P(G) = n - \Delta(G) + 1$.

برهان. فرض کنید $|V_2| \geq 2$ باشد و $\{u, v\} \subseteq V_2$. در این صورت طبق فرض مسأله u و v نمی توانند مجاور باشند. از طرفی چون قطر گراف برابر با ۲ می باشد، پس u و v دارای حداقل یک همسایه مشترک هستند. قرار دهید $x \in N(u) \cap N(v)$. در این صورت طبق فرض مسأله $f(x) = 0$ ، که با $\gamma_R^P(G)$ -تابع بودن f در تناقض است. بنابراین $|V_2| \leq 1$. اگر $|V_2| = 0$ ، آن گاه $\Delta(G) \leq 0$ که نیز با فرض مسأله که قطر گراف ۲ می باشد در تناقض است. بنابراین $|V_2| = 1$. در این صورت نتیجه می گیریم که $\gamma_R^P(G) \leq n + 1 - \Delta(G)$ ، حال از قضیه ۱.۲.۲ نتیجه می شود که $\gamma_R^P(G) = n + 1 - \Delta(G)$. $\square$

در قضیه قبل ما مقدار دقیق $\gamma_R^P(G)$ برای گراف های با قطر دو را پیدا کردیم. در ادامه گراف های با قطر حداقل سه را در نظر می گیریم. ما برای این گراف ها کران بالایی بر اساس مرتبه، مینیمم درجه و قطر گراف ارائه می دهیم.

قضیه ۵.۲.۲. اگر G گرافی همبند با $diam(G) \geq 3$ و $\delta(G) \geq 1$ باشد، آن گاه،

$$\gamma_R^P(G) \leq n - (\delta(G) - 1) \left\lfloor \frac{diam(G) + 3}{3} \right\rfloor.$$

برهان. فرض کنید گراف G دارای قطر d باشد و $x_d \dots x_1 x_0$ مسیر قطری از گراف G باشد. قرار دهید $B = \{x_i \mid i \equiv 0 \pmod{3}\}$. در این صورت اگر $d \equiv 0 \pmod{3}$ ، آن گاه داریم $|B| = \frac{d+3}{3}$ و در صورتی که $d \equiv 1 \pmod{3}$ ، آن گاه $|B| = \frac{d+2}{3}$ و اگر $d \equiv 2 \pmod{3}$ ، آن گاه $|B| = \frac{d+1}{3}$. بنابراین در هر سه حالت $|B| = \left\lfloor \frac{diam(G) + 3}{3} \right\rfloor$.

از طرفی به‌وضوح تابع $f = (N(B), V(G) \setminus N[B], B)$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای گراف G است. با توجه به این که هیچ یک از اعضای مجموعه B دارای همسایه مشترک نیستند، بنابراین داریم $|N[B]| \geq |B|(\delta(G) + 1)$. در این صورت،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(G) &= 2|V_1| + 2|V_2| \\ &= 2|B| + |V(G) \setminus N[B]| \\ &= 2|B| + n - |N[B]| \\ &\leq 2|B| + n - |B|(\delta(G) + 1) \\ &= |B| + n - |B|\delta(G) \\ &= n - |B|(\delta(G) - 1) \\ &= n - \lfloor \frac{\text{diam}(G) + 3}{3} \rfloor (\delta(G) - 1).\end{aligned}$$

□

برای قابل دستیابی بودن کران قضیه ۵.۲.۲ دور C_6 را در نظر بگیرید. در قضیه بعدی کرانی شبیه به کران ارائه شده در قضیه ۵.۲.۲ بر اساس کمر گراف ارائه می‌دهیم.

قضیه ۶.۲.۲. اگر G گرافی همبند با کمر متناهی r و $\delta(G) \geq 1$ باشد، آن‌گاه داریم،

$$\gamma_R^P(G) \leq n - (\delta(G) - 1) \lfloor \frac{r}{3} \rfloor.$$

برهان. فرض کنید گراف G دارای کمر r باشد و $v_1 v_2 \dots v_r v_1$ دور القایی گراف G از طول r باشد. قرار دهید $B = \{v_1, v_4, \dots, v_{\lfloor \frac{r}{3} \rfloor - 2}\}$. در این صورت $|B| = \lfloor \frac{r}{3} \rfloor$. از طرفی به‌وضوح تابع $f = (N(B), V(G) \setminus N[B], B)$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای گراف G است. با توجه به این که هیچ یک از اعضای مجموعه B دارای همسایه مشترک نیستند، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت $|N[B]| \geq |B|(\delta(G) + 1)$. در این صورت داریم،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(G) &\leq 2|B| + |V(G) \setminus N[B]| \\ &= 2|B| + n - |N[B]| \\ &\leq 2|B| + n - |B|(\delta(G) + 1) \\ &= |B| + n - |B|\delta(G) \\ &= n - |B|(\delta(G) - 1) \\ &= n - \lfloor \frac{r}{3} \rfloor (\delta(G) - 1).\end{aligned}$$

□

فرض کنید $G = C_4$ باشد در این صورت $\lfloor \frac{r}{3} \rfloor = 1$ و $\gamma_R^P(G) = 2 = n - (\delta(G) - 1)$. بنابراین کران ارائه شده در قضیه ۶.۲.۲ قابل دستیابی است.

در ادامه ما کران‌های بالا برای **نوردهاس-گادم**^۱ عدد احاطه گر رومی کامل ارائه می‌دهیم.

قضیه ۷.۲.۲. برای هر گراف G از مرتبه n داریم $\gamma_R^P(G) + \gamma_R^P(\bar{G}) \leq n + 3$. همچنین در صورتی که $\gamma_R^P(G) + \gamma_R^P(\bar{G}) = n + 3$ باشد، آن گاه G گرافی منتظم است.

برهان. با استفاده از قضیه ۱.۲.۲ و این حقیقت که $\Delta(\bar{G}) = n - \delta(G) - 1$ نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned} \gamma_R^P(G) + \gamma_R^P(\bar{G}) &\leq (n - \Delta(G) + 1) + (n - \Delta(\bar{G}) + 1) \\ &= (n - \Delta(G) + 1) + (n - (n - \delta(G) - 1) + 1) \\ &= n + 3 - \Delta(G) + \delta(G) \\ &\leq n + 3. \end{aligned}$$

حال فرض کنید $\gamma_R^P(G) + \gamma_R^P(\bar{G}) = n + 3$. در این صورت با توجه به رابطه قبل نتیجه می‌گیریم که $\Delta(G) = \delta(G)$ و لذا G گرافی منتظم است. $\square$

فرض کنید $G = C_5$. در این صورت $\gamma_R^P(G) + \gamma_R^P(\bar{G}) = 8 = n + 3$. بنابراین کران ارائه شده در قضیه ۷.۲.۲ قابل دستیابی است.

۳.۲ پیچیدگی محاسباتی

همان‌طور که در فصل قبل ذکر شد، توابع احاطه گر رومی دارای کاربردهای فراوانی در زمینه‌های مختلف می‌باشند. بنابراین بررسی چگونگی حل این مسائل بسیار مهم می‌باشد. در این بخش، سختی حل این مسائل بررسی می‌شود. نظریه پیچیدگی محاسباتی، شاخه‌ای از نظریه محاسبات در ریاضی و علوم کامپیوتر است که به بررسی دشواری حل مسائل، به صورت الگوریتمی می‌پردازد. بسیاری از این مسائل، مسائل بهینه‌سازی هستند. بررسی سختی حل یک مسئله به طور مستقیم در مسائل بهینه‌سازی به کار نمی‌رود، بلکه در مسائل تصمیم‌گیری که پاسخ آن‌ها، بله یا خیر (به طور رسمی صفر یا یک) است، به کار می‌رود. بنابراین، نشان دادن این که مسئله‌ای سخت است یا خیر، ما را به ناحیه مسائل تصمیم‌گیری محدود می‌کند. معمولاً می‌توان یک مسئله بهینه‌سازی را با محدود کردن مقدار بهینه، به شکل یک مسئله تصمیم‌گیری درآورد. به عنوان مثال در مسئله کدهای شناسایی از اندازه مینیمم، گراف G و مقدار k به عنوان ورودی تعیین می‌شود و مسئله تصمیم‌گیری به این شکل بیان می‌شود: "آیا کد شناسایی در G از اندازه کمتر یا مساوی k وجود دارد؟". به طور کلی، مسائل تصمیم‌گیری با توجه به مرتبه زمانی حل خود، به چهار کلاس تقسیم می‌شوند. دسته‌ای از آن‌ها مسائلی

¹Nordhaus-Gaddum

هستند که برای آن‌ها الگوریتمی با مرتبه زمانی چندجمله‌ای موجود می‌باشد. این مسائل به **کلاس P^1** تعلق دارند. لازم به ذکر است که **الگوریتم زمانی چندجمله‌ای**، الگوریتمی است که در بدترین حالت، پیچیدگی زمانی آن تابع چندجمله‌ای از اندازه ورودی باشد. **کلاس NP^2** مجموعه مسائل تصمیم‌گیری است که توسط الگوریتم‌های زمانی چندجمله‌ای و غیرقطعی قابل حل هستند. بدیهی است که کلاس NP زیرکلاس P است. مهم‌ترین سؤالی که برای این کلاس‌ها در این نظریه وجود دارد این است که آیا $NP = P$. این باور گسترده وجود دارد که این تساوی نمی‌تواند درست باشد. یک **مسئله NP -سخت^۳** است اگر یک الگوریتم زمانی چندجمله‌ای برای این مسئله قابل تبدیل به یک الگوریتم زمانی چندجمله‌ای برای هر یک از مسائل کلاس NP شود. همچنین، یک **مسئله NP -کامل^۴** است اگر متعلق به خانواده NP باشد و در عین حال NP -سخت نیز باشد. کلاس NP -کامل زیرکلاس کلاس‌های NP و NP -سخت است. در واقع کلاس NP -کامل فصل مشترک کلاس‌های NP و NP -سخت را تشکیل می‌دهد.

مسئله NP -کامل اولین بار توسط کوک^۵ در سال ۱۹۷۸ مطرح شد [۸]. در این مقاله کوک ثابت کرد که مسئله صدق پذیری^۶ یک مسئله NP -کامل است. در سال ۱۹۷۲ کارپ^۷ در [۲۰]، بیست و یک مسئله از مسائل ترکیبیاتی را در رده مسائل NP -کامل قرار داد. از جمله این مسائل می‌توان به مسئله توابع احاطه‌گر رومی اشاره کرد. مسئله تابع احاطه‌گر رومی به صورت زیر است:

نمونه: گراف G و عدد صحیح k .

سوال: آیا گراف G دارای تابع احاطه‌گر رومی از اندازه حداکثر k می‌باشد؟

لیو^۸ و چنگ^۹ قضیه زیر را در مورد پیچیدگی مسئله بالا به دست آوردند.

قضیه ۱.۳.۲. [۲۲] مسئله احاطه‌گر رومی برای گراف‌های دوبخشی و گراف‌های وتری یک مسئله NP -سخت است.

در ادامه نشان می‌دهیم که مسئله احاطه‌گر رومی کامل حتی برای گراف‌های دوبخشی نیز NP -کامل می‌باشد. مسئله زیر را در نظر بگیرید.

مسئله تابع احاطه‌گر رومی کامل

نمونه: گراف $G = (V, E)$ و عدد صحیح $k \leq |V|$.

سوال: آیا گراف G دارای تابع احاطه‌گر رومی کامل از اندازه حداکثر k است؟

ما با کاهش این مسئله به مسئله X^3C^{10} نشان می‌دهیم که این مسئله یک مسئله NP -کامل است. مسئله X^3C به صورت زیر می‌باشد.

¹Polynomial

²Non-deterministic Polynomial

³NP-hard

⁴NP-complete

⁵Cook

⁶Satisfiability

⁷Karp

⁸C. -H. Liu

⁹G. J. Chang

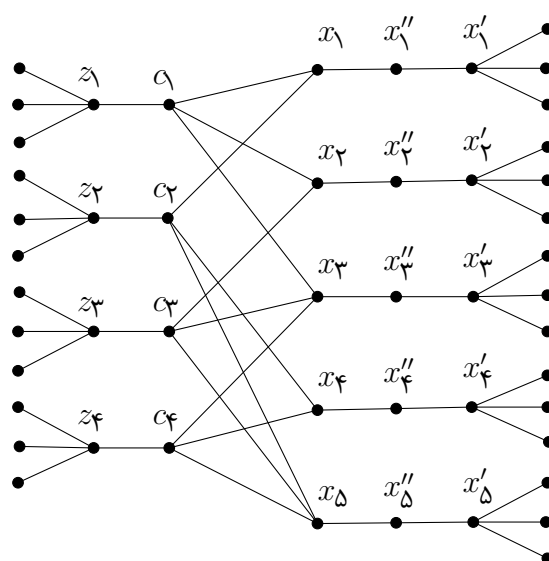
¹⁰Exact 3-Cover

مسئله X^3C :

نمونه: یک مجموعه‌ی متناهی X با $|X| = 3q$ و خانواده‌ی C متشکل از زیرمجموعه‌های ۳-عضوی مجموعه X .

سوال: آیا زیرخانواده C' از C وجود دارد به‌طوری‌که هر عضو مجموعه X دقیقاً عضوی از اعضای خانواده C' باشد؟

با توجه به این‌که مسئله X^3C یک مسئله NP -کامل است [۹]، لذا برای نشان دادن NP -کامل بودن مسئله احاطه‌گر رومی کامل روی گراف‌های دوبخشی کافی است این مسئله را به مسئله X^3C کاهش دهیم.



شکل ۱۰.۲: NP -کامل بودن مسئله تابع احاطه‌گر رومی کامل برای گراف‌های دوبخشی.

قضیه ۲.۳.۲. مسئله تابع احاطه‌گر رومی کامل حتی در گراف‌های دوبخشی نیز NP -کامل است.

برهان. با توجه به این‌که به آسانی می‌توان در یک زمان چندجمله‌ای مشخص کرد که تابع داده شده $f: V \rightarrow \{0, 1, 2\}$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل می‌باشد، لذا مسئله احاطه‌گر رومی کامل یک مسئله NP می‌باشد. حال ما نشان می‌دهیم که چگونه یک نمونه X, C از X^3C را به یک نمونه G از مسئله احاطه‌گر رومی کامل تبدیل می‌کنیم به‌طوری‌که یکی از این مسائل قابل حل است اگر و تنها اگر مسئله دیگر نیز قابل حل باشد. فرض کنید $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$ و $C = \{C_1, C_2, \dots, C_t\}$ یک نمونه دلخواه از X^3C باشد. ما هر رأس $x_i \in X$ به برگ x''_i از ستاره $K_{1,4}$ با مرکز x'_i وصل می‌کنیم. برای هر عضو $C_j \in C$ یک ستاره $K_{1,3}$ با مرکز z_j را در نظر می‌گیریم و یکی از برگ‌های آن را c_j می‌نامیم. حال گراف G ، با اضافه کردن یال $c_j x_i$ در صورتی‌که $x_i \in C_j$ باشد، حاصل می‌شود. شکل ۱۰.۲ مثالی از گراف G می‌باشد. قرار دهید $k = 2t + 8q$.

ابتدا فرض کنید که نمونه X, C از X^3C دارای حل C' باشد. در این صورت ما یک تابع احاطه گر رومی کامل f روی G از وزن k تعریف می کنیم. در صورتی که $C_j \in C'$ ، مقدار ۲ به c_j و در غیر این صورت وزن ۰ به آن، به رئوس z_j و x'_i وزن ۲ و به بقیه رئوس وزن ۰ می دهیم. چون C' وجود دارد و دارای اندازه q می باشد، لذا تعداد c_j ها با وزن ۲ دقیقاً برابر با q می باشد که دارای همسایه های متمایزی در مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$ می باشند. بنابراین به راحتی می توان دید که f یک تابع احاطه گر رومی کامل با وزن k می باشد.

حال فرض کنید که G دارای تابع احاطه گر رومی کامل $g = (V_0, V_1, V_2)$ با وزن حداکثر k باشد. به وضوح مجموع وزن رئوس هر ستاره برابر با حداقل ۲ می باشد و لذا ما می توانیم فرض کنیم که $g(z_j) = g(x'_i) = 2$ است و همچنین برگ های متصل به آن ها دارای وزن ۰ می باشند. از این که $x'_i x''_i \in E(G)$ ، نتیجه می شود که هر رأس x''_i می تواند دارای وزن ۰ باشد. به وضوح اگر رأس i وجود داشته باشد به طوری که $f(x_i) \neq 0$ ، آن گاه $f(x_i) = 1$. فرض کنید $R = \{i : x_i \in V_1\}$ و $|R| = r$. در این صورت برای هر $i \notin R$ رأس c_j که $j = 1, 2, \dots, t$ وجود دارد به طوری که $x_i \in C_j$ و $c_j \in V_2$. همچنین فرض کنید p تعداد c_j ها متعلق به V_2 باشد. در این صورت $2t + 8q \leq 2t + 6q + 2p + r$ و لذا $3p \leq 3q - r$. از طرف دیگر چون هر c_j دارای دقیقاً سه همسایه در $\{x_1, x_2, \dots, x_{3q}\}$ می باشد، نتیجه می گیریم که $3p \geq 3q - r$. بنابراین از این دو رابطه نتیجه می شود که $p = q$ و $r = 0$. لذا $C' = \{C_j : c_j \in S\}$ یک پوشش برای C می باشد. لذا اثبات قضیه کامل است. $\square$

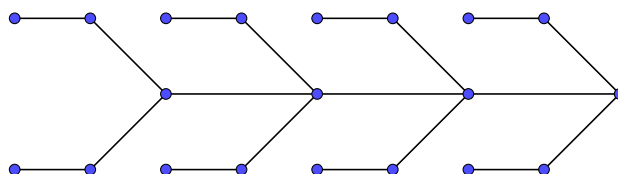
فصل ۳

کران بالای جدید برای عدد احاطه گر رومی کامل در درختان

۱.۳ مقدمه

در این فصل یک کران بالای جدید برای عدد احاطه‌گری رومی کامل یک درخت براساس مرتبه، تعداد برگ‌ها و تعداد رئوس پشتیبان درخت ارائه می‌دهیم. کران جدید به‌دست آمده، کران‌های موجود را بهبود می‌دهد و همچنین با استفاده از کران به‌دست آمده کران ارائه شده برای عدد احاطه‌گر رومی در درختان را نیز بهبود می‌دهیم.

فرض کنید خانواده‌ی T متشکل از درختان T باشد که از تعدادی مسیر P_5 با متصل کردن رئوس مرکزی این مسیرها به یکدیگر، حاصل می‌شود. در شکل ۱.۳ درختی از خانواده‌ی T نشان داده شده است که از چهار مسیر P_5 حاصل شده است.



شکل ۱.۳: مثالی از خانواده‌ی T .

خواص مهمی از درختان خانواده‌ی T در لم زیر آمده است.

لم ۱.۱.۳. [۱۶] اگر درخت T عضوی از خانواده‌ی T از مرتبه n باشد و v یک رأس دلخواه از درخت T باشد، آن گاه شرایط زیر برقرار است:

$$\gamma_R^P(T) \leq \frac{4n}{5} \quad (a)$$

(b) یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع وجود دارد به طوری که به رأس v مقدار ۰ یا ۱ نظیر می‌کند.

(c) یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع وجود دارد به طوری که به رأس v مقدار ۱ یا ۲ نظیر می‌کند.

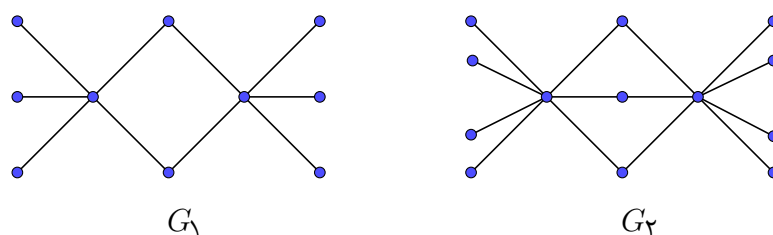
هنینگ و همکاران در [۱۶] کران بالای زیر را برای عدد احاطه‌گری رومی کامل درخت‌ها ارائه داده‌اند.

قضیه ۱.۱.۳. [۱۶] اگر T درختی از مرتبه $n \geq 3$ باشد، آن گاه $\gamma_R^P(T) \leq \frac{4n}{5}$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر T عضوی از خانواده‌ی T باشد.

با توجه به این که هر تابع احاطه‌گر رومی کامل یک تابع احاطه‌گر رومی نیز می‌باشد، بنابراین برای هر گراف G رابطه $\gamma_R(G) \leq \gamma_R^P(G)$ برقرار است. لذا از قضیه فوق قضیه زیر نتیجه می‌شود.

نتیجه ۱.۱.۳. [۴] اگر T درختی از مرتبه $n \geq 3$ باشد، آن گاه $\gamma_R(T) \leq \frac{4n}{5}$ و تساوی برقرار است اگر و فقط اگر T عضوی از خانواده‌ی T باشد.

به وضوح افزودن تعدادی یال به یک درخت ممکن است باعث افزایش عدد احاطه‌گر رومی کامل گراف جدید شود. بنابراین به راحتی نمی‌توان کران به دست آمده روی درختان را به همه گراف‌های همبند توسیع داد. در واقع گراف‌هایی وجود دارند که عدد احاطه‌گر رومی کامل آن‌ها از عدد احاطه‌گر رومی کامل هر زیردرخت فراگیر آن‌ها بیشتر است. به عنوان مثال گراف‌های G_1 و G_2 را در شکل ۲.۳ ببینید.



شکل ۲.۳: گراف‌های G_1 و G_2 .

۲.۳ نتایج اصلی

هنینگ و همکاران در [۱۶] نشان دادند برای یک درخت T از مرتبه $n \geq 3$ داریم، $\gamma_R^P(T) \leq \frac{4n}{5}$. ما این کران را برای همه‌ی درخت‌ها با l برگ و s رأس پشتیبان به‌طوری که $l \geq 2s - 2$ باشد، را بهبود می‌دهیم.

قضیه ۱.۲.۳. اگر T درختی از مرتبه $n \geq 3$ با l برگ و s رأس پشتیبان باشد، آن‌گاه

$$\gamma_R^P(T) \leq (4n - l + 2s - 2)/5.$$

برهان. با استفاده از استقراء روی مرتبه $n = n(T)$ از درخت T عمل می‌کنیم. مرحله اول استقراء برای $n \leq 4$ واضح است. فرض کنید برای هر درخت T' از مرتبه $n' < n$ با l' برگ و s' رأس پشتیبان داشته باشیم، $\gamma_R^P(T') \leq (4n' - l' + 2s' - 2)/5$. حال فرض کنید درخت T از مرتبه $n \geq 5$ با l برگ و s رأس پشتیبان باشد. درخت T را در برگ x_0 از مسیر قطری $x_0 \dots x_{d-1}$ ریشه‌دار می‌کنیم. فرض کنید x_{d-1} دارای درجه ماکسیمم بین همه رئوس با فاصله $d-1$ از رأس x_0 باشد. اگر T یک ستاره یا ستاره دوگانه باشد، آن‌گاه به آسانی می‌توان دید که $\gamma_R^P(T) < (4n - l + 2s - 2)/5$. بنابراین فرض می‌کنیم که $diam(T) \geq 4$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. $\deg(x_{d-1}) = 2$.

در این صورت ما می‌توانیم فرض کنیم که هر فرزند x_{d-2} در T دارای درجه ۱ یا ۲ می‌باشد. فرض کنید t_i تعداد فرزندان از درجه i باشد که در آن $i \in \{1, 2\}$. به‌ویژه t_1 تعداد همسایه‌های برگ x_{d-2} است. علاوه بر این چون x_{d-1} دارای درجه ۲ است، پس $t_2 \geq 1$. ابتدا فرض کنید که $\deg(x_{d-3}) \geq 3$. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$. به‌وضوح $|V(T')| \geq 3$ ، $l' = l - t_2 - t_1$ و $s' = s - t_2 - q$ که در آن اگر $t_1 \neq 0$ ، آن‌گاه $q = 1$ و در غیر این صورت $q = 0$. فرض کنید که f' یک $\gamma_R^P(T')$ -تابع باشد. اگر $f'(x_{d-3}) \neq 0$ ، آن‌گاه می‌توان f' را به یک PRDF تابع f برای T با تخصیص دادن وزن ۰ به هر فرزند x_{d-2} ، وزن ۱ به هر برگ مجاور فرزندان x_{d-2} و وزن ۲ به رأس x_{d-2} توسعه داد. بنابراین $\gamma_R^P(T) \leq \gamma_R^P(T') + t_2 + 2$ و لذا طبق فرض استقراء داریم،

$$\begin{aligned} \gamma_R^P(T) &\leq \gamma_R^P(T') + t_2 + 2 \\ &\leq (4n' - l' + 2s' - 2)/5 + t_2 + 2 \\ &= (4(n - 2t_2 - t_1 - 1) - (l - t_2 - t_1) + 2(s - t_2 - q) - 2)/5 + t_2 + 2 \\ &= (4n - l + 2s - 2)/5 + (-4t_2 - 3t_1 - 2q + 6)/5. \end{aligned}$$

بنابراین اگر $t_1 \geq 1$ یا $t_2 \geq 2$ ، آن‌گاه $\gamma_R^P(T) < (4n - l + 2s - 2)/5$. پس فرض می‌کنیم که $t_1 = 0$ و $t_2 = 1$. اگر $f'(x_{d-3}) = 1$ ، آن‌گاه می‌توانیم f' را به یک تابع احاطه‌گر رومی کامل f

برای T با اختصاص دادن وزن $\circ$ به x_{d-2} و x_d و وزن ۲ به رأس x_{d-1} توسعه داد. همچنین در صورتی که $f'(x_{d-3}) = 2$ ، آن‌گاه می‌توانیم f' را به یک تابع احاطه‌گر رومی کامل f برای T با تخصیص وزن $\circ$ به x_{d-2} و وزن ۱ به رأس x_{d-1} و x_d توسعه داد. بنابراین در هر دو حالت نتیجه می‌گیریم که $2 + \gamma_R^p(T') \leq \gamma_R^p(T)$ و لذا،

$$\begin{aligned}\gamma_R^p(T) &\leq \gamma_R^p(T') + 2 \\ &\leq (4(n-3) - (l-1) + 2(s-1) - 2)/5 + 2 \\ &< (4n - l + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

حال فرض کنید $f'(x_{d-3}) = \circ$ ، در این صورت می‌توانیم تابع f' را به تابع احاطه‌گر رومی کامل f برای T با تغییر وزن رأس x_{d-3} به ۱، عدم تغییر وزن رؤس دیگر درخت T' ، اختصاص وزن $\circ$ به هر فرزند x_{d-2} ، تخصیص وزن ۱ به برگ مجاور با فرزندان x_{d-2} و وزن ۲ به رأس x_{d-2} توسعه دهیم. بنابراین $3 + t_2 + \gamma_R^p(T') \leq \gamma_R^p(T)$ و لذا طبق فرض استقراء،

$$\begin{aligned}\gamma_R^p(T) &\leq \gamma_R^p(T') + t_2 + 3 \\ &\leq (4(n - 2t_2 - t_1 - 1) - (l - t_2 - t_1) + 2(s - t_2 - q) - 2)/5 + t_2 + 3 \\ &= (4n - l + 2s - 2)/5 + (-4t_2 - 3t_1 - 2q + 11)/5.\end{aligned}$$

اگر $t_1 \geq 2$ یا $t_2 \geq 3$ یا $t_1 \geq 1$ و $t_2 \geq 2$ ، آن‌گاه $(4n - l + 2s - 2)/5 < \gamma_R^p(T)$. بنابراین فرض می‌کنیم که $t_1 = 1$ یا $t_1 = 0$ و $t_2 \in \{1, 2\}$.

اگر $t_1 = t_2 = 1$ ، می‌توانیم f' را به تابع احاطه‌گر رومی کامل f برای T با اختصاص دادن وزن $\circ$ به همسایه‌های x_{d-1} ، وزن ۲ به رأس x_{d-1} و وزن ۱ به برگ مجاور x_{d-2} توسعه دهیم. بنابراین داریم،

$$\begin{aligned}\gamma_R^p(T) &\leq \gamma_R^p(T') + 3 \\ &\leq (4(n-4) - (l-2) + 2(s-2) - 2)/5 + 3 \\ &< (4n - l + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

اگر $t_1 = 0$ و $t_2 = 1$ ، آن‌گاه می‌توانیم f' را به تابع احاطه‌گر رومی کامل f از T با تخصیص دادن وزن $\circ$ به x_d و x_{d-2} و وزن ۲ به x_{d-1} توسعه داد. بنابراین داریم،

$$\begin{aligned}\gamma_R^p(T) &\leq \gamma_R^p(T') + 2 \\ &\leq (4(n-3) - (l-1) + 2(s-1) - 2)/5 + 2 \\ &< (4n - l + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

حال فرض کنید که $t_1 = 0$ و $t_2 = 2$. در این صورت می‌توانیم f' را به تابع احاطه‌گر رومی کامل f از T با تخصیص دادن وزن $\circ$ به همسایه‌های x_{d-1} ، وزن ۲ به x_{d-1} و وزن ۱ به دیگر رؤس

درخت $T_{x_{d-2}}$ توسیع دهیم. در این صورت،

$$\begin{aligned}\gamma_R^p(T) &\leq \gamma_R^p(T') + 4 \\ &\leq (4(n-5) - (l-2) + 2(s-2) - 2)/5 + 4 \\ &< (4n - l + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که $\deg(x_{d-3}) = 2$.

قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-3}}$ و f' یک $\gamma_R^p(T')$ -تابع باشد. اگر $|V(T')| = 1$ ، آن‌گاه T از ستاره $K_{\setminus, m}$ ($m \geq 2$) با تقسیم کردن $r \geq 2$ یال به دست می‌آید. در این صورت به وضوح داریم،

$$\begin{aligned}\gamma_R^p(T) &= r + 2 \\ &\leq (4(r+m+1) - m + 2r - 2)/5 \\ &< (4n - l + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

حال فرض کنید که $|V(T')| \geq 3$. اگر x_{d-2} رأسی پشتیبان باشد، آن‌گاه $s - t_2 - 1 \leq s' \leq s - t_2$ و $\ell - t_2 - t_3 \leq \ell' \leq \ell - t_2 - t_3 + 1$ همچنین برای $q \in \{0, 1\}$ ، اگر $\ell' = \ell - t_2 - t_3 + q$ ، در این صورت می‌توانیم f' را به تابع احاطه‌گر رومی کامل f از T با اختصاص دادن وزن 0 به هر فرزند x_{d-2} ، وزن 1 به برگ مجاور فرزندان x_{d-2} و رأس x_{d-3} و وزن 2 به رأس x_{d-2} توسیع دهیم. بنابراین،

$$\begin{aligned}\gamma_R^p(T) &\leq \gamma_R^p(T') + t_2 + 3 \\ &\leq (4(n - 2t_2 - t_3 - 2) - (l - t_2 - t_3 + q) + 2(s - t_2 + q - 1) - 2)/5 + t_2 + 3 \\ &= (4n - l + 2s - 2)/5 + (-4t_2 - 3t_3 + q + 5)/5 \\ &< (4n - l + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

بنابراین فرض کنید که x_{d-2} رأس پشتیبان نباشد. در این صورت $s - t_2 \leq s' \leq s - t_2 + 1$ و $\ell - t_2 \leq \ell' \leq \ell - t_2 + 1$ همچنین برای $q \in \{0, 1\}$ ، اگر $\ell' = \ell - t_2 + q$ ، آن‌گاه $s' \leq s - t_2 + q$. ما می‌توانیم f' به تابع احاطه‌گر رومی کامل f از T با تخصیص دادن وزن 0 به هر فرزند x_{d-2} ، وزن 1 به برگ مجاور با فرزندان x_{d-2} و رأس x_{d-3} و وزن 2 به رأس x_{d-2} توسیع دهیم. بنابراین داریم،

$$\begin{aligned}\gamma_R^p(T) &\leq \gamma_R^p(T') + t_2 + 3 \\ &\leq (4(n - 2t_2 - 2) - (l - t_2 + q) + 2(s - t_2 + q) - 2)/5 + t_2 + 3 \\ &= (4n - l + 2s - 2)/5 + (-4t_2 + q + 7)/5.\end{aligned}$$

اگر $t_2 \geq 2$ ، آن‌گاه $\gamma_R^p(T) < (4n - l + 2s - 2)/5$. حال فرض کنید که $t_2 = 1$ ، در این صورت می‌توانیم f' را به تابع احاطه‌گر رومی کامل f از T با اختصاص دادن وزن 0 به x_d و x_{d-2} ، وزن

۱ به رأس x_{d-3} و وزن ۲ به رأس x_{d-1} توسیع دهیم. در این صورت،

$$\begin{aligned}\gamma_R^p(T) &\leq \gamma_R^p(T') + 3 \\ &\leq (4(n-4) - (l-1+q) + 2(s-1+q) - 2)/5 + 3 \\ &= (4n-l+2s-2)/5 + (-2+q)/5 \\ &< (4n-l+2s-2)/5.\end{aligned}$$

حالت ۲: $\deg(x_{d-1}) \geq 3$.

فرض کنید $\deg(x_{d-1}) = t$ ، قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-1}}$. در این صورت $s-1 \leq s' \leq s$ و $\ell-t+1 \leq \ell' \leq \ell-t+2$. همچنین برای $q \in \{0,1\}$ ، اگر $q=0$ ، $\ell' = \ell-t+1+q$ ، آن‌گاه $s' \leq s-1+q$. فرض کنید f' یک $\gamma_R^p(T')$ -تابع باشد. اگر $f'(x_{d-2}) \neq 0$ ، آن‌گاه می‌توانیم f' را به تابع احاطه‌گر رومی کامل f از T با دادن وزن ۲ به رأس x_{d-1} و وزن ۰ به فرزندان x_{d-1} توسیع دهیم. بنابراین از فرض استقراء نتیجه می‌شود که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^p(T) &\leq w(f') + 2 \\ &= \gamma_R^p(T') + 2 \\ &\leq (4(n-t) - (l-t+1+q) + 2(s-1+q) - 2)/5 + 2 \\ &\leq (4n-l+2s-2)/5 + (-3t+7+q)/5 \\ &< (4n-l+2s-2)/5.\end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که $f'(x_{d-2}) = 0$. در این صورت فرض کنید f تابعی باشد که از تابع f' با تغییر وزن x_{d-2} به ۱ عدم تغییر وزن بقیه رئوس درخت T' ، دادن وزن ۲ به رأس x_{d-1} و وزن ۰ به فرزندان x_{d-1} به‌دست می‌آید. در این صورت طبق فرض استقراء نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^p(T) &\leq w(f') + 3 \\ &= \gamma_R^p(T') + 3 \\ &\leq (4(n-t) - (l-t+1+q) + 2(s-1+q) - 2)/5 + 3 \\ &= (4n-l+2s-2)/5 + (-3t+q+12)/5.\end{aligned}$$

اگر $t \geq 5$ یا $t=4$ و $q=0$ ، آن‌گاه $\gamma_R^p(T) \leq (4n-l+2s-2)/5$. بنابراین فرض می‌کنیم که $t=4$ و $q=1$ یا $t=3$. اگر $t=4$ و $q=1$ ، آن‌گاه $\deg(x_{d-2}) = 2$. قرار دهید $T'' = T - T_{x_{d-2}}$. فرض کنید f'' یک $\gamma_R^p(T'')$ -تابع باشد. در این صورت می‌توانیم f'' را به تابع احاطه‌گر رومی کامل f از T با اختصاص دادن وزن ۱ به رأس x_{d-2} ، وزن ۰ به برگ‌های مجاور به رأس x_{d-1} و

وزن ۲ به رأس x_{d-1} توسیع دهیم. از فرض استقراء نتیجه می شود که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(T) &\leq w(f'') + 3 \\ &= \gamma_R^P(T') + 3 \\ &\leq (4(n-t-1) - (l-t+1+q) + 2(s-1+q) - 2)/5 + 3 \\ &= (4n-l+2s-2)/5 + (-3t+q+8)/5 \\ &< (4n-l+2s-2)/5.\end{aligned}$$

در ادامه فرض کنید که $t=3$.

از قبل می دانیم که هر فرزند x_{d-2} در T دارای درجه حداکثر ۳ می باشد. برای $i \in \{1, 2, 3\}$ فرض کنید t_i تعداد فرزندان x_{d-2} از درجه i باشد. به ویژه، t_1 تعداد برگ های مجاور به x_{d-2} می باشد. با توجه به این که x_{d-1} دارای درجه ۳ می باشد، نتیجه می شود که $t_3 \geq 1$. بنابراین $\deg(x_{d-2}) = t_1 + t_2 + t_3 + 1$.

زیر حالت ۱.۲: $\deg(x_{d-3}) \geq 3$

قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$. فرض کنید f' یک $\gamma_R^P(T')$ -تابع باشد. ابتدا فرض می کنیم که $t_2 \neq 0$. در این صورت می توان با دادن وزن $\circ$ فرزندان x_{d-2} ، وزن ۱ به برگ های مجاور فرزندان x_{d-2} ، وزن ۲ به x_{d-2} و اگر $f'(x_{d-3}) = \circ$ آن گاه با تخصیص دادن وزن x_{d-3} وزن ۱ تابع f' را به تابع احاطه گر رومی کامل f از T توسیع داد. قرار دهید $q = \circ$ اگر و فقط اگر $t_1 = \circ$ و در غیر این صورت $q = 1$. از فرض استقراء نتیجه می شود که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(T) &\leq w(f') + 2t_3 + t_2 + 3 \\ &= \gamma_R^P(T') + 2t_3 + t_2 + 3 \\ &\leq (4(n-3t_3-2t_2-t_1-1) - (l-2t_3-t_2-t_1) \\ &\quad + 2(s-t_3-t_2-q) - 2)/5 + 2t_3 + t_2 + 3 \\ &= (4n-l+2s-2)/5 + (-2t_3-4t_2-3t_1-2q+11)/5.\end{aligned}$$

به وضوح اگر $t_2 \geq 3$ یا $t_1 \geq 1$ آن گاه $\gamma_R^P(T) \leq (4n-l+2s-2)/5$. بنابراین فرض می کنیم که $t_1 = \circ$ و $1 \leq t_2 \leq 2$. حال فرض کنید که $t_2 = 2$. اگر $t_3 > 1$ یا $f'(x_{d-3}) \neq \circ$ آن گاه مثل قبل نتیجه می گیریم که $\gamma_R^P(T) \leq (4n-l+2s-2)/5$.

بنابراین فرض کنید که $t_3 = 1$ و $f'(x_{d-3}) = \circ$. در این صورت می توانیم تابع f' را به تابع احاطه گر رومی کامل f از T با اختصاص دادن وزن ۲ به رأس x_{d-1} ، وزن $\circ$ به همسایه های x_{d-1} ، وزن ۱ به رئوس دیگر از درخت $T_{x_{d-2}}$ توسیع داد. در این صورت طبق فرض استقراء

نتیجه می گیریم که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(T) &\leq w(f') + 6 \\ &= \gamma_R^P(T') + 6 \\ &\leq (4(n-8) - (l-4) + 2(s-3) - 2)/5 + 6 \\ &< (4n - l + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

در ادامه فرض می کنیم که $t_2 = 1$. در این صورت می توان تابع f' را به تابع احاطه گر رومی کامل f از T با تخصیص دادن وزن ۲ به فرزندان پشتیبان قوی رأس x_{d-2} ، وزن ۰ به برگ های مجاور فرزندان x_{d-2} که پشتیبان قوی هستند، وزن ۱ به دیگر رئوس درخت $T_{x_{d-2}}$ توسیع داد. لذا از فرض استقراء نتیجه می شود که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(T) &\leq w(f') + 2t_2 + 3 \\ &= \gamma_R^P(T') + 2t_2 + 3 \\ &\leq (4(n - 3t_2 - 3) - (l - 2t_2 - 1) + 2(s - t_2 - 1) - 2)/5 + 2t_2 + 3 \\ &= (4n - l + 2s - 2)/5 + (-2t_2 + 2)/5 \\ &\leq (4n - l + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

در ادامه فرض کنید $t_2 = 0$. ابتدا فرض می کنیم که $t_1 \leq 1$. در این صورت می توانیم تابع f' را به یک تابع احاطه گر رومی کامل f از T با تخصیص دادن وزن ۲ به هر فرزند از درجه ۳ رأس x_{d-2} ، وزن ۱ به رأس x_{d-2} و در صورتی که $t_1 = 1$ دادن وزن ۱ به برگ مجاور رأس x_{d-2} و وزن ۰ به برگ مجاور فرزندان x_{d-2} توسیع دهیم. طبق فرض استقراء نتیجه می شود که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(T) &\leq w(f') + 2t_2 + t_1 + 1 \\ &= \gamma_R^P(T') + 2t_2 + t_1 + 1 \\ &\leq (4(n - 3t_2 - t_1 - 1) - (l - 2t_2 - t_1) + 2(s - t_2 - t_1) - 2)/5 + 2t_2 + t_1 + 1 \\ &\leq (4n - l + 2s - 2)/5 + (-2t_2 + 1)/5 \\ &< (4n - l + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

بنابراین فرض می کنیم که $t_1 \geq 2$.

در این صورت می توان f' را به تابع احاطه گر رومی کامل f از T با نظیر کردن وزن ۰ به هر فرزند از درجه ۳ رأس x_{d-2} و برگ های مجاور x_{d-2} ، وزن ۱ به برگ های مجاور به فرزندان x_{d-2} و تغییر وزن x_{d-3} به ۱ در صورتی که $f'(x_{d-3}) = 0$ باشد و اختصاص وزن ۲ به x_{d-2} توسیع

داد. با استفاده از فرض استقراء نتیجه می گیریم که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(T) &\leq w(f') + 2t_3 + 3 \\ &= \gamma_R^P(T') + 2t_3 + 3 \\ &\leq (4(n - 3t_3 - t_1 - 1) - (l - 2t_3 - t_1) + 2(s - t_3 - 1) - 2)/5 + 2t_3 + 3 \\ &= (4n - l + 2s - 2)/5 + (-2t_3 - 3t_1 + 9)/5.\end{aligned}$$

به وضوح اگر $t_1 \geq 3$ یا $t_3 \geq 2$ ، آن گاه $\gamma_R^P(T) < (4n - l + 2s - 2)/5$. بنابراین فرض می کنیم که $t_1 = 2$ و $t_3 = 1$. اگر $f'(x_{d-3}) \neq \circ$ ، آن گاه می توان تابع f' را به تابع احاطه گر رومی کامل f از T با اختصاص دادن وزن $\circ$ به همسایه های x_{d-2} ، وزن ۱ به برگ های مجاور با x_{d-1} و وزن ۲ به رأس x_{d-2} توسعه داد. همچنین اگر $f'(x_{d-3}) = \circ$ ، آن گاه می توان تابع f' را به تابع احاطه گر رومی کامل f از T با تخصیص دادن وزن $\circ$ به هر همسایه از x_{d-1} ، وزن ۱ به برگ های مجاور با x_{d-2} و وزن ۲ به رأس x_{d-1} توسعه داد. بنابراین در هر دو حالت $\gamma_R^P(T) \leq \gamma_R^P(T') + 4$. بنابراین از فرض استقراء نتیجه می شود که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(T) &\leq \gamma_R^P(T') + 4 \\ &\leq (4(n - 6) - (l - 4) + 2(s - 2) - 2)/5 + 4 \\ &< (4n - l + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

زیر حالت ۲.۲: $\deg(x_{d-3}) = 2$

قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-3}}$. فرض کنید f' یک $\gamma_R^P(T')$ -تابع باشد. قرار دهید $r = 1$ در صورتی که $t_1 \neq \circ$ و در غیر این صورت قرار دهید $r = \circ$. لذا داریم $s - t_3 - t_2 - r \leq s' \leq s - t_3 - t_2 - r + 1$ ، $\ell - 2t_3 - t_2 - t_1 \leq \ell' \leq \ell - 2t_3 - t_2 - t_1 + 1$ و برای $q \in \{\circ, 1\}$ در صورتی که $\ell' = \ell - 2t_3 - t_2 - t_1 + q$ ، آن گاه $s' \leq s - t_3 - t_2 - r + q$. در این صورت می توان f' را به یک تابع احاطه گر رومی کامل f از T با اختصاص دادن وزن ۲ به فرزندان پشتیبان قوی x_{d-2} و خودش، وزن ۱ به رأس x_{d-3} و برگ های مجاور به فرزندان پشتیبان ضعیف x_{d-2} و نیز اختصاص وزن $\circ$ به رئوس دیگر درخت $T_{x_{d-3}}$ توسعه داد. از فرض استقراء نتیجه می شود که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(T) &\leq w(f') + 2t_3 + t_2 + 3 \\ &= \gamma_R^P(T') + 2t_3 + t_2 + 3 \\ &\leq (4(n - 3t_3 - 2t_2 - t_1 - 2) - (l - 2t_3 - t_2 - t_1 + q) \\ &\quad + 2(s - t_3 - t_2 - r + q) - 2)/5 + 2t_3 + t_2 + 3 \\ &= (4n - l + 2s - 2)/5 + (-2t_3 - 4t_2 - 3t_1 - 2r + q + 7)/5.\end{aligned}$$

به وضوح در صورتی که $t_1 > 1$ یا $t_2 > 1$ ، آن گاه $\gamma_R^P(T) < (4n - l + 2s - 2)/5$. بنابراین فرض می کنیم که $t_1 \leq 1$ و $t_2 \leq 1$. ابتدا فرض می کنیم که $t_1 = 1$. اگر $t_3 \geq 2$ یا $t_2 \neq \circ$ ، آن گاه

$\gamma_R^P(T) < (4n - l + 2s - 2)/5$. بنابراین فرض می‌کنیم که $t_3 = 1$ و $t_2 = 0$. در این صورت می‌توان تابع f' را به تابع احاطه‌گر رومی کامل f برای T با نظیر کردن وزن ۲ به رأس x_{d-1} ، وزن ۱ به رأس x_{d-3} و برگ مجاور x_{d-2} و وزن ۰ به رأس x_{d-2} و برگ‌های مجاور به رأس x_{d-1} توسعه داد. با استفاده از فرض استقراء نتیجه می‌گیریم که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(T) &\leq w(f') + 4 \\ &= \gamma_R^P(T') + 4 \\ &\leq (4(n-6) - (\ell - 3 + q) + 2(s - 2 + q) - 2)/5 + 4 \\ &< (4n - \ell + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

بنابراین فرض می‌کنیم که $t_1 = 0$.

حال فرض کنید که $t_2 = 1$. اگر $t_3 \geq 3$ ، آن‌گاه $\gamma_R^P(T) < (4n - l + 2s - 2)/5$. بنابراین فرض می‌کنیم که $t_3 \leq 2$. اگر $t_3 = 2$ باشد، آن‌گاه می‌توانیم تابع f' را به تابع احاطه‌گر رومی کامل f از T با تخصیص وزن ۰ به هر فرزند x_{d-2} و وزن ۲ به خودش، وزن ۱ به x_{d-3} و وزن ۱ به برگ‌های مجاور به فرزندان x_{d-2} توسعه دهیم. از فرض استقراء نتیجه می‌شود که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(T) &\leq w(f') + 8 \\ &= \gamma_R^P(T') + 8 \\ &\leq (4(n-10) - (\ell - 5 + q) + 2(s - 3 + q) - 2)/5 + 8 \\ &\leq (4n - \ell + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

در ادامه فرض می‌کنیم که $t_3 = 1$. در این صورت می‌توان تابع f' را به تابع احاطه‌گر رومی کامل f از T با اختصاص دادن وزن ۲ به رأس x_{d-1} ، وزن ۰ به همسایه‌های x_{d-1} و وزن ۱ به دیگر رئوس درخت $T_{x_{d-1}}$ توسعه داد. با توجه به فرض استقراء نتیجه می‌شود که،

$$\begin{aligned}\gamma_R^P(T) &\leq w(f') + 5 \\ &= \gamma_R^P(T') + 5 \\ &\leq (4(n-7) - (\ell - 3 + q) + 2(s - 2 + q) - 2)/5 + 5 \\ &= (4n - \ell + 2s - 2)/5 + (-4 + q)/5 \\ &< (4n - \ell + 2s - 2)/5.\end{aligned}$$

حال فرض کنید که $t_1 = t_2 = 0$. در این صورت می‌توان تابع f' را به تابع احاطه‌گری رومی کامل f از T با در نظر گرفتن وزن ۲ برای فرزند پشتیبان قوی رأس x_{d-2} ، اختصاص وزن ۱ به رأس x_{d-3} و x_{d-2} و وزن ۰ به رئوس دیگر درخت $T_{x_{d-2}}$ توسعه داد. طبق فرض استقراء نتیجه

می‌گیریم که،

$$\begin{aligned}
 \gamma_R^P(T) &\leq w(f') + 2t_3 + 2 \\
 &= \gamma_R^P(T') + 2t_3 + 2 \\
 &\leq (4(n - 3t_3 - 2) - (l - 2t_3 + q) + 2(s - t_3 + q) - 2)/5 + 2t_3 + 2 \\
 &= (4n - l + 2s - 2)/5 + (-2t_3 + 2 + q)/5.
 \end{aligned}$$

در این صورت اگر $t_3 > 1$ ، آن‌گاه $\gamma_R^P(T) < (4n - l + 2s - 2)/5$. بنابراین فرض می‌کنیم که $t_3 = 1$. در این صورت می‌توان تابع f' را به تابع احاطه‌گر رومی کامل f از T با اختصاص دادن وزن ۲ به رأس x_{d-1} ، وزن ۱ به رأس x_{d-3} و وزن ۰ رئوس دیگر درخت $T_{x_{d-3}}$ توسیع داد. لذا از فرض استقراء نتیجه می‌شود که،

$$\begin{aligned}
 \gamma_R^P(T) &\leq w(f') + 3 \\
 &= \gamma_R^P(T') + 3 \\
 &\leq (4(n - 5) - (l - 2 + q) + 2(s - 1 + q) - 2)/5 + 3 \\
 &= (4n - l + 2s - 2)/5 + (-5 + q)/5 \\
 &< (4n - l + 2s - 2)/5.
 \end{aligned}$$

□

با توجه به این‌که برای هر گراف G داریم $\gamma_R^P(G) \geq \gamma_R(G)$ ، بنابراین نتیجه زیر از قضیه ۱.۱.۳ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱.۲.۳. اگر T درختی از مرتبه $n \geq 3$ با l برگ و s رأس پشتیبان باشد، آن‌گاه:

$$\gamma_R(T) \leq (4n - l + 2s - 2)/5$$

ملاحظه می‌شود که اگر $\ell \geq 2s - 2$ آن‌گاه قضیه ۱.۲.۳ قضیه ۱.۱.۳ را بهبود می‌دهد و همچنین نتیجه ۱.۲.۳ نتیجه ۱.۱.۳ را بهبود می‌بخشد. به‌علاوه، با در نظر گرفتن مسیر سه رأسی می‌توان دید که کران ارائه شده در قضیه ۱.۲.۳ قابل دستیابی است.

فصل ۴

گراف‌های احاطه‌گر رومی کامل یال بحرانی

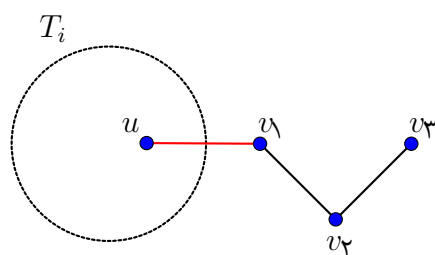
۱.۴ مقدمه

یکی از سؤالات اساسی برای تعداد زیادی از پارامترهای گراف، بحرانی بودن آن پارامتر است. این مسأله که یک پارامتر از گراف با حذف یا افزودن رأس یا یال، افزایش یا کاهش پیدا می‌کند، برای تعداد زیادی از پارامترهای گراف بررسی شده است. این مفهوم را بحرانی می‌نامند. بحرانی بودن بسیاری از پارامترهای وابسته به احاطه‌گری مثل احاطه‌گری، احاطه‌گری کلی، احاطه‌گری رومی، احاطه‌گری مکانی کلی بررسی شده است. برای مطالعه بیشتر در زمینه بحرانی بودن پارامترها به مراجع [۱۹، ۱۸، ۱۱، ۱۰] رجوع شود.

تعریف ۱.۱.۴. یک گراف را **گراف احاطه‌گر رومی کامل پایدار**^۱ گویند هرگاه با حذف هر رأس از آن عدد احاطه‌گر رومی کامل آن بدون تغییر باقی بماند.

فرض کنید $\mathcal{T}$ خانواده‌ای از درختان T باشد که از دنباله‌ای از درختان $T_1, T_2, \dots, T_k$ به دست آید، به طوری که $T_k = T$ ، $T_1 = P_3$ و همچنین T_{i+1} از T_i با عملگر زیر به دست آید. **عملگر $\mathcal{C}$:** فرض کنید $W(T_i)$ مجموعه همه رأس‌های $u \in V(T_i)$ باشد به طوری که به ازای هر $\gamma_R^P(T_i) -$ تابع f ، $f(u) = \circ$. اگر $u \in W(T_i)$ آن‌گاه درخت T_{i+1} با اضافه نمودن مسیر

¹Perfect Roman domination stable graph



شکل ۱.۴: عملگر $\mathcal{C}$.

$P_3 : v_1 v_2 v_3$ به درخت T_i با افزودن یال uv_1 به‌دست می‌آید. شکل ۱.۴ را مشاهده نمایید. وانگ^۱ و همکاران در [۲۸] قضیه زیر را به‌دست آوردند.

قضیه ۱.۱.۴. [۲۸] فرض کنید T درختی از مرتبه $n \geq 3$ باشد. در این صورت T درختی احاطه‌گر رومی کامل پایدار است اگر و تنها اگر $T \in \mathcal{T}$.

در این فصل گراف‌هایی که با اضافه شدن یال جدیدی، عدد احاطه‌گری رومی کامل آن‌ها کاهش پیدا می‌کند، بررسی می‌شوند.

تعریف ۲.۱.۴. گراف G را احاطه‌گر رومی کامل یال بحرانی یا به اختصار γ_R^P -یال بحرانی گوئیم، هرگاه برای هر یال $e \in E(\bar{G})$ داشته باشیم $\gamma_R^P(G + e) < \gamma_R^P(G)$. در بخش بعد همه‌ی درختان γ_R^P -یال بحرانی را مشخص می‌کنیم.

۲.۴ خواص گراف‌های γ_R^P -یال بحرانی

در این بخش بعضی از خواص گراف‌های γ_R^P -یال بحرانی بیان می‌شوند.

لم ۱.۲.۴. فرض کنید G گرافی غیربدیهی باشد. در این صورت برای هر یال $e = xy$ در گراف $\bar{G}$ داریم $\gamma_R^P(G) - 1 \leq \gamma_R^P(G + e)$.

برهان. فرض کنید $e = xy \in E(\bar{G})$ و $f = (V_0, V_1, V_2)$ یک $\gamma_R^P(G + e)$ -تابع باشد. اگر $V_2 \cap \{x, y\} = \emptyset$ یا $V_2 \cup V_1 \ni \{x, y\}$ ، آن‌گاه f یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای گراف G می‌باشد و لذا حکم برقرار است. بنابراین فرض می‌کنیم که $x \in V_2$ و $y \in V_0$. در این صورت تابع g با ضابطه $g(y) = 1$ و برای $u \in V - \{y\}$ $g(u) = f(u)$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای گراف G است و بنابراین $\gamma_R^P(G) \leq \gamma_R^P(G + e) + 1$. $\square$

نتیجه زیر به آسانی از لم ۱.۲.۴ به‌دست می‌آید.

نتیجه ۱.۲.۴. اگر G گرافی γ_R^P -یال بحرانی و $e \in E(\bar{G})$ باشد، آن‌گاه داریم،

$$\gamma_R^P(G + e) + 1 = \gamma_R^P(G).$$

¹Wang

قضیه ۱.۲.۴ که در ادامه بیان می‌شود، برای مشخص کردن γ_R^P - یال بحرانی بودن یک گراف دلخواه بسیار مفید می‌باشد.

قضیه ۱.۲.۴. فرض کنید G گرافی از مرتبه حداقل دو باشد. در این صورت G گرافی γ_R^P - یال بحرانی می‌باشد اگر و فقط اگر برای هر دو رأس غیر مجاور u و v ، $\gamma_R^P(G) - 1$ تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود داشته باشد به طوری که $\{f(u), f(v)\} = \{1, 2\}$ و همچنین اگر رأس $x \in \{u, v\}$ وجود داشته باشد به طوری که $f(x) = 1$ ، آن گاه برای هر رأس $y \in N(x)$ ، $f(y) \neq 2$.

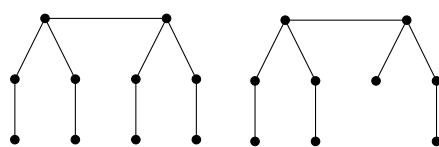
برهان. فرض کنید G گرافی از مرتبه حداقل ۲ باشد و $e = uv \in E(\bar{G})$ باشد. ابتدا فرض کنید γ_R^P - تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به طوری که برای هر دو رأس غیر مجاور u و v داشته باشیم $\{f(u), f(v)\} = \{1, 2\}$ و همچنین اگر رأس $x \in \{u, v\}$ وجود داشته باشد که $f(x) = 1$ ، آن گاه برای هر رأس $y \in N(x)$ ، $f(y) \neq 2$. فرض کنید $f(u) = 1$ و $f(v) = 2$ است. در این صورت تابع $g : V(G+uv) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ با ضابطه $g(u) = 0$ و برای $u \neq z$ ، $g(z) = f(z)$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای گراف $G+uv$ می‌باشد و در نتیجه $\gamma_R^P(G+uv) \leq \gamma_R^P(G) - 1$. بنابراین G گرافی γ_R^P - یال بحرانی است.

برای طرف عکس قضیه فرض کنید G گرافی γ_R^P - یال بحرانی است. با توجه به نتیجه ۱.۲.۴، داریم $\gamma_R^P(G+uv) = \gamma_R^P(G) - 1$. فرض کنید $g = (V_0, V_1, V_2)$ یک γ_R^P - تابع باشد. اگر $\{g(u), g(v)\} \neq \{0, 2\}$ ، آن گاه g یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای گراف G می‌باشد و لذا نتیجه می‌شود که $\gamma_R^P(G) \leq \gamma_R^P(G+uv) = \gamma_R^P(G) - 1$ که به وضوح یک تناقض است. بنابراین $\{g(u), g(v)\} = \{0, 2\}$. فرض کنید $g(u) = 0$ در این صورت برای هر رأس با توجه به این که g یک تابع احاطه‌گر رومی کامل است برای هر $w \in N_{G+uv}(u) - \{v\}$ داریم $g(w) \neq 2$. تابع $h : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ را با ضابطه $h(u) = 1$ و برای $u \neq z$ ، $h(z) = g(z)$ باشد تعریف می‌کنیم. در این صورت h یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای گراف G با وزن $\gamma_R^P(G+uv) + 1$ می‌باشد که در آن برای هر رأس $w \in N_G(u)$ ، $h(w) \neq 2$ می‌باشد. از طرف دیگر با توجه به اینکه $\gamma_R^P(G) = \gamma_R^P(G+uv) + 1$ است، نتیجه می‌گیریم که h یک γ_R^P - تابع می‌باشد و لذا حکم برقرار است. $\square$

۳.۴ درختان γ_R^P - یال بحرانی

در این بخش همه درختانی که γ_R^P - یال بحرانی هستند را مشخص می‌کنیم. فرض کنید T_1 درختی باشد که از دو مسیر P_5 با وصل کردن رئوس مرکزی آن‌ها و همچنین T_2 درختی باشد که از یک مسیر P_5 با رأس مرکزی u و یک مسیر P_4 با رأس پشتیبان v با وصل کردن u به v به دست آیند. درخت T_1 و درخت T_2 به ترتیب در شکل ۲.۴ (a) و ۲.۴ (b) نمایش داده شده‌اند.

قضیه ۱.۳.۴. درخت T یک درخت γ_R^P - یال بحرانی است اگر و فقط اگر $T \in \{T_1, T_2\}$.



(a) T_1 . (b) T_2 .
شکل ۲.۴: درختان T_1 و T_2 .

برهان. فرض کنید T درختی γ_R^P -یال بحرانی باشد. اگر $diam(T) \in \{2, 3\}$ باشد، آن‌گاه T یک ستاره یا یک ستاره دوگانه است. به راحتی می‌توان دید که T درختی γ_R^P -یال بحرانی نیست. بنابراین فرض می‌کنیم که $diam(T) \geq 4$. درخت T را در برگ x_0 از مسیر قطری $x_0, x_1, \dots, x_d$ ریشه‌دار می‌کنیم. بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توانیم فرض کنیم برای $i \in \{2, d-2\}$ اگر u فرزند پشتیبانی از رأس x_i باشد، آن‌گاه داریم $\deg(x_{i-1}) \geq \deg(u)$.
ادعا ۱. درخت T دارای رأس پشتیبان قوی با درجه حداقل ۴ و دقیقاً یک همسایه غیربرگی نمی‌باشد.

اثبات ادعای ۱. فرض کنید u رأس پشتیبان قوی از درخت T با درجه حداقل ۴ باشد به‌طوری‌که $\deg(u) = \ell_u + 1$. فرض کنید w و z دو برگ مجاور u و نیز x همسایه غیربرگی u باشد. از قضیه ۱.۲.۴ نتیجه می‌شود که $\gamma_R^P(T)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{f(w), f(z)\} = \{1, 2\}$ و $f(u) \neq 2$. به‌وضوح برای هر برگ v مجاور u داریم $f(v) \geq 1$ و همچنین $f(u) = 0$. از طرفی چون f یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع می‌باشد پس $(N(u) - \{w, z\}) \cap V_2 = \emptyset$. در این صورت تابع $g : V(T) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ با ضابطه $g(u) = 2$ ، $g(v) = 0$ در صورتی‌که $v \in L(u)$ و $g(x) = \max\{f(x), 1\}$ و در صورتی‌که $v \notin L(u) \cup \{u, x\}$ داشته باشیم $g(v) = f(v)$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای درخت T با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ می‌باشد که یک تناقض است.

از ادعای ۱ نتیجه گرفته می‌شود که $\max\{\deg(x_1), \deg(x_{d-1})\} \leq 3$.

ادعا ۲. درخت T دارای دو رأس پشتیبان قوی u و v با شرط $|N(u) \cup N(v)| = \ell_u + \ell_v + 1$ نمی‌باشد.

اثبات ادعای ۲. فرض کنید u و v دو رأس پشتیبان قوی از درخت T باشند به‌طوری‌که $|N(u) \cup N(v)| = \ell_u + \ell_v + 1$ و $N(u) \cap N(v) = \{w\}$. با توجه به ادعای ۱ داریم $\ell_u = \ell_v = 2$. فرض کنید $L(u) = \{u_1, u_2\}$ و $L(v) = \{v_1, v_2\}$. لذا از قضیه ۱.۲.۴ نتیجه می‌شود که $\gamma_R^P(T)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{f(u_1), f(v_1)\} = \{1, 2\}$. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم که $u_1 \in V_1$ و $v_1 \in V_2$ و $f(u) \neq 2$ ، در این صورت $f(v_2) = 1$ و $f(v) = 0$. چون f یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع است، پس $f(w) \neq 2$ و لذا $f(u) + f(u_2) \geq 2$. در این صورت تابع $g : V(T) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ با ضابطه $g(u) = 2$ ، $g(v) = 2$ ، $g(u_1) = g(u_2) = g(v_1) = g(v_2) = 0$ و اگر $z \notin N[u] \cup N[v]$ آن‌گاه $g(z) = f(z)$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای درخت T با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ می‌باشد که یک تناقض است.

با توجه به ادعای ۲ اگر x_8 یک رأس پشتیبان قوی باشد، آن گاه هر رأس از $N(x_7) - \{x_3\}$ یک رأس پشتیبان ضعیف یا یک برگ است.

حال فرض کنید که $diam(T) = 4$ باشد. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم که $\deg(x_8) \geq \deg(x_7)$. طبق ادعای ۱ داریم $\deg(x_7) \leq \deg(x_8) \leq 3$. ابتدا فرض می‌کنیم که $\deg(x_8) = 3$. در این صورت از ادعای ۲ نتیجه می‌شود که هر همسایه x_7 یک برگ یا یک رأس پشتیبان است و لذا $\deg(x_7) = 2$. قرار دهید $L(x_8) = \{x_0, x'_1\}$. از قضیه ۱.۲.۴ نتیجه می‌شود که $\gamma_R^P(T) -$ تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به طوری که $\{f(x_0), f(x'_1)\} = \{1, 2\}$. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم که $x_0 \in V_1$ و $x'_1 \in V_2$ باشد. در این صورت داریم $f(x_7) + f(x_4) = 2$ و $f(x_7) \neq 2, f(x_8) = 0$. پس تابع $g : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ با ضابطه $g(x_8) = 2, g(x_7) = 0, g(x'_1) = g(x_0) = g(x_7) = 0$ و $g(z) = 1$ در صورتی که $z \notin \{x_0, x_8, x_7, x'_1\}$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای T با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ می‌باشد که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $\deg(x_7) = \deg(x_8) = 2$ و همچنین هر همسایه‌ای از x_7 یک برگ یا یک رأس پشتیبان ضعیف است. اگر $\deg(x_7) = 2$ باشد، آن گاه $T = P_5$ و به وضوح T یک درخت γ_R^P - یال بحرانی نیست. بنابراین فرض می‌کنیم که $\deg(x_7) \geq 3$. از قضیه ۱.۲.۴ نتیجه می‌شود که یک $\gamma_R^P(T) -$ تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به طوری که $\{f(x_0), f(x_4)\} = \{1, 2\}$. بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $x_0 \in V_1$ و $x_4 \in V_2$. در این صورت داریم $f(x_7) = 0, f(x_7) \neq 2$ و $f(x_8) = 1$ است. بنابراین در صورتی که $u \in L(x_7)$ باشد، آن گاه $f(u) = 1$ و همچنین اگر $v \in N(x_7)$ رأسی پشتیبان با همسایه برگی v' باشد، آن گاه $f(v) + f(v') = 2$ است. بنابراین $f(v) = 2 \deg(x_7) - \ell_{x_7} + f(x_7) \geq 2 \deg(x_7) - \ell_{x_7}$. لذا تابع $g = (N(x_7), L(T) - L(x_7), \{x_7\})$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای درخت T با وزن $2 + \deg(x_7) - \ell_{x_7}$ می‌باشد و بنابراین $w(g) < \gamma_R^P(T)$ که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $diam(T) \geq 5$.

ادعای ۳. $diam(T) = 5$.

اثبات ادعای ۳. فرض کنید که $diam(T) \geq 6$. در این صورت $x_7 \notin N[x_{d-2}]$ و لذا از قضیه ۱.۲.۴، $\gamma_R^P(T) -$ تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به طوری که $\{f(x_7), f(x_{d-2})\} = \{1, 2\}$. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم که $x_7 \in V_1$ و $x_{d-2} \in V_2$. طبق قضیه ۱.۲.۴ برای هر $u \in N(x_7)$ داریم $f(u) \neq 2$ و لذا $f(x_7) \neq 2$. چون $f(x_7) = 1$ نتیجه می‌گیریم که $f(N[x_7]) \geq 3$. در این صورت با تغییر وزن هر همسایه x_7 به ۰ و دادن وزن ۲ به x_8 یک تابع احاطه‌گر رومی کامل با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ حاصل می‌شود که یک تناقض است. بنابراین $diam(T) = 5$.

بنابراین از ادعای ۱ نتیجه می‌شود که $\deg(x_8) \leq 3$ و $\deg(x_4) \leq 3$. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم که $\deg(x_4) \leq \deg(x_8)$ است. و لذا حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت ۱. $\deg(x_8) = \deg(x_4) = 3$.

$$\begin{aligned} w(g) &= \ell_{x_{\mathfrak{V}}} + \mathfrak{V}|K_{\mathfrak{V}}| + \mathfrak{V}|K_{\mathfrak{V}}| + \ell_{x_{\mathfrak{V}}} + \mathfrak{V} \\ &< \ell_{x_{\mathfrak{V}}} + \mathfrak{V}|K_{\mathfrak{V}}| + |K_{\mathfrak{V}}| + \mathfrak{V} \\ &= \gamma_R^P(T). \end{aligned}$$

که یک تناقض است.

حالت ۲. $\deg(x_4) = 2$ و $\deg(x_8) = 3$.

بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم که هر فرزند x_3 پشتیبان ضعیف یا یک برگ است. ابتدا فرض می‌کنیم که $\deg(x_2) \geq 4$ است. در این صورت هر همسایه x_2 غیر از x_8 و x_3 یک برگ یا یک رأس پشتیبان ضعیف است. طبق قضیه ۱.۲.۴، یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به طوری که $\{f(x_8), f(x_3)\} = \{1, 2\}$. اگر $x_3 \in V_1$ و $x_8 \in V_2$ ، آن‌گاه از قضیه ۱.۲.۴ نتیجه می‌شود که $f(x_2) \neq 2$. در این صورت به وضوح $f(x_0) = f(x'_1) = 0$ ، $f(x_2) + f(x_4) = 2$ ، $f(v) = 1$ ، $v \in L(x_3)$ در این صورت با تغییر وزن x_5 و x_3 به صفر، تغییر وزن x_4 به ۲ و تغییر وزن هر رأس x_3 و $u \in N(u) - \{x_3\}$ به ۱ و عدم تغییر وزن دیگر رئوس یک تابع احاطه‌گر رومی کامل از $\gamma_R^P(T)$ حاصل می‌شود که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $f(x_8) = 1$ ، $f(x_3) = 2$ و $f(x_2) \neq 2$. قرار دهید $T' = T - T_{x_3}$. در این صورت با تغییر وزن x_2 به ۲، تغییر وزن $u \in N(x_2) - \{x_3\}$ به ۰ و تغییر وزن هر رأس دیگر T' به ۱ و عدم تغییر وزن دیگر رئوس یک تابع احاطه‌گر رومی کامل با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ حاصل می‌شود که یک تناقض است. بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که $\deg(x_2) \leq 3$.

فرض کنید $\deg(x_2) = 3$ و $N(x_2) = \{x_8, x_3, x'_1\}$. در این صورت از ادعای ۲ نتیجه می‌شود که x'_1 برگ یا یک رأس پشتیبان ضعیف است. طبق قضیه ۱.۲.۴ ابتدا فرض می‌کنیم که x_2 یک رأس پشتیبان باشد، یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به طوری که $\{f(x_2), f(x_4)\} = \{1, 2\}$. ابتدا فرض می‌کنیم که $f(x_2) = 2$ و $f(x_4) = 1$ و لذا $f(x_3) \neq 2$. به وضوح $f(x_0) = 1$ ، $f(x'_1) = 0$ و $f(x_8) + f(x_1) + f(x'_1) = 2$. در این صورت می‌توانیم فرض کنیم $f(x_0) = f(x'_1) = 0$ و $f(x_8) = 2$. اگر $f(x_3) = 1$ ، آن‌گاه با تغییر وزن x_2 به ۰، تغییر وزن x'_1 به ۱ و عدم تغییر وزن دیگر رئوس یک تابع احاطه‌گر رومی کامل با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ حاصل می‌شود که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $f(x_3) = 0$. در این صورت برای $u \in N(x_3) - \{x_2\}$ با توجه به اینکه $f(x_2) = 2$ و f یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع است، نتیجه می‌گیریم که $f(u) \neq 2$. لذا با تغییر وزن x_5 و x_2 به ۰، تغییر وزن x'_1 به ۱، تغییر وزن x_4 به ۲ و عدم تغییر وزن دیگر رئوس یک تابع احاطه‌گر رومی کامل با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ حاصل می‌شود که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $f(x_2) = 1$ و $f(x_4) = 2$ و لذا $f(x_8) \neq 2$. در این صورت $f(x_8) + f(x'_1) + f(x_0) = 3$ و بنابراین با تغییر وزن x_8 به ۲، تغییر وزن x'_1 و x_0 به ۰ و عدم تغییر وزن دیگر رئوس یک تابع احاطه‌گر رومی کامل با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ به دست می‌آید که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که x'_1 یک رأس پشتیبان ضعیف است. فرض کنید x''_1 برگ مجاور x'_1 باشد. در این صورت طبق قضیه ۱.۲.۴ یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به طوری که $\{f(x_0), f(x_4)\} = \{1, 2\}$. ابتدا فرض می‌کنیم که $f(x_0) = 2$ و $f(x_4) = 1$. به وضوح $f(x'_1) = 1$ ، $f(x_8) = 0$ ، $f(x_3) \neq 2$ و لذا می‌توانیم فرض کنیم که $f(x'_1) = 2$ و $f(x''_1) = f(x_2) = 0$. در این صورت با تغییر وزن x_8 به ۲، تغییر وزن x'_1 و x_0 به ۰، تغییر

وزن x'_4 و x''_4 به ۱ و عدم تغییر وزن رئوس دیگر یک تابع احاطه‌گر رومی کامل با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ به دست می‌آید که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $f(x_0) = 1$ و $f(x_4) = 2$. به وضوح $f(x_0) + f(x_4) + f(x'_4) = 3$ در این صورت $f(x_4) \neq 2$, $f(x_3) \neq 2$, $f(x_5) = 0$ و $f(x'_4) = 0$ در این صورت با تغییر وزن x_4 به ۲، تغییر وزن x'_4 و x_0 به ۰، تغییر وزن x'_4 و x''_4 به ۱ و عدم تغییر وزن رئوس دیگر یک تابع احاطه‌گر رومی کامل جدید با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ حاصل می‌شود که یک تناقض است.

حالت ۳. $\deg(x_4) = 2$ و $\deg(x_5) = 2$.

فرض کنید که $\deg(x_4) = 2$. در نتیجه طبق قضیه ۱.۲.۴ یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به طوری که $\{f(x_0), f(x_4)\} = \{1, 2\}$. ابتدا در نظر می‌گیریم که $f(x_0) = 2$ و $f(x_4) = 1$. به وضوح $f(x_4) \neq 2$ و $f(x_5) = 0$. در این صورت با تغییر وزن x_4 به ۲، تغییر وزن x_0 و x_4 به ۰ و عدم تغییر وزن بقیه رئوس یک تابع احاطه‌گر رومی کامل جدید با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ به دست می‌آید که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $f(x_0) = 1$ و $f(x_4) = 2$. اگر $f(x_4) \neq 2$ ، با تغییر وزن x_4 به ۲، تغییر وزن x_0 و x_4 به ۰ و عدم تغییر وزن رئوس دیگر یک تابع احاطه‌گر رومی کامل جدید با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ حاصل می‌شود که یک تناقض است. حال فرض کنید که $f(x_4) = 2$. در این صورت با تغییر وزن x_0 و x_4 به ۱، تغییر وزن x_4 به ۰ و عدم تغییر وزن رئوس دیگر یک تابع احاطه‌گر رومی کامل جدید با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ حاصل می‌شود که یک تناقض است. بنابراین $\deg(x_4) \geq 3$ و به طریق مشابه می‌توان نشان داد که $\deg(x_5) \geq 3$.

در نظر بگیرید که $\deg(x_4) \geq 4$ باشد. در این صورت می‌توان فرض کرد که هر رأس از مجموعه $N(x_4) - \{x_3\}$ یک برگ یا یک رأس پشتیبان ضعیف است. ابتدا فرض می‌کنیم که x_4 یک رأس پشتیبان قوی است. قرار دهید $\{x'_4, x''_4\} \subseteq L(x_4)$. از قضیه ۱.۲.۴ نتیجه می‌شود که $\gamma_R^P(T)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به طوری که $f(x'_4) = 1$ و نیز $f(x''_4) = 2$. به وضوح $f(x_4) = 0$ و $f(x_3) \neq 2$.

همچنین می‌توانیم فرض کنیم که برای هر رأس $u \in N(x_4) - (L(x_4) \cup \{x_3\})$ داریم $f(u) + f(u') = 2$ که در آن u' همسایه برگ u می‌باشد. در این صورت با تغییر وزن x_4 به ۲، تغییر وزن $u \in N(x_4) - \{x_3\}$ به ۰، تغییر وزن هر برگ از درخت $T - T_{x_4}$ به ۱، تغییر وزن x_3 به $\max\{1, f(x_3)\}$ و عدم تغییر وزن رئوس دیگر یک تابع احاطه‌گر رومی کامل جدید با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ حاصل می‌شود که یک تناقض است. در ادامه فرض کنید که x_4 رأس پشتیبان قوی نباشد. در این صورت رأس $x'_4 \in N(x_4) - \{x_5, x_3\}$ وجود دارد که یک رأس پشتیبان ضعیف می‌باشد. فرض کنید x''_4 برگ مجاور x'_4 باشد. در این صورت طبق قضیه ۱.۲.۴ یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به طوری که $\{f(x_0), f(x''_4)\} = \{1, 2\}$. بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم که $x_0 \in V_2$ و $x''_4 \in V_1$. به وضوح $f(x_4) \neq 2$, $f(x_5) = 0$ و $f(x_3) \neq 2$. بنابراین برای هر برگ u مجاور x_4 ، $f(u) \geq 1$ و برای هر رأس پشتیبان $u \in N(x_4) - \{x_3\}$ ، $f(u) + f(u') = 2$ که در آن u' برگ مجاور u می‌باشد. اگر $f(x_3) = 0$ ، آن‌گاه برای هر برگ

v مجاور با x_3 ، $f(v) \geq 1$ و برای هر رأس پشتیبان $v \in N(x_3) - \{x_2\}$ ، $f(v) + f(v') = 2$ که v' برگ مجاور با v می‌باشد. بنابراین $w(f) \geq 2|K_2| + 2|K_3| + \ell_{x_2} + \ell_{x_3}$. در این صورت تابع $g = (N(x_2), V(T) - N[x_2], x_2)$ یک تابع احاطه گر رومی کامل با وزن $2|K_2| + |K_3| + \ell_{x_2} + 2$ می‌باشد. بنابراین،

$$\begin{aligned} w(g) &= \ell_{x_{\mathfrak{F}}} + \mathfrak{Y}|K_{\mathfrak{F}}| + |K_{\mathfrak{F}}| + \mathfrak{Y} \\ &< \mathfrak{Y}|K_{\mathfrak{F}}| + \mathfrak{Y}|K_{\mathfrak{F}}| + \ell_{x_{\mathfrak{F}}} + \ell_{x_{\mathfrak{F}}} \\ &= w(f) \\ &= \gamma_R^P(T). \end{aligned}$$

که یک تناقض است.

در ادامه فرض کنید که $f(x_3) \neq \circ$. قرار دهید $T' = T - T_{x_3}$. در این صورت با تغییر وزن x_2 به ۲، تغییر وزن $u \in N(x_2) - \{x_3\}$ به $\circ$ ، تغییر وزن هر برگ از درخت T' به ۱ و عدم تغییر وزن رئوس دیگر یک تابع احاطه گر رومی کامل جدید با وزن کمتر از $\gamma_R^P(T)$ حاصل می شود که یک تناقض است. بنابراین $\deg(x_2) = 3$ و به طریق مشابه نتیجه می شود که $\deg(x_3) = 3$. قرار دهید $N(x_2) = \{x'_2, x_4, x_3\}$ و $N(x_3) = \{x'_3, x_4, x_2\}$.

ابتدا فرض می‌کنیم که x'_1 یک برگ باشد. اگر x_3 یک رأس پشتیبان باشد، آن‌گاه طبق قضیه ۱.۲.۴ یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع $f = (V_0, V_1, V_2)$ وجود دارد به‌طوری‌که $\{f(x'_1), f(x'_2)\} = \{1, 2\}$. بدون از دست دادن کلیت فرض می‌کنیم که $f(x'_1) = 2$ و $f(x'_2) = 1$. به‌وضوح $f(x_2) = 0$ ، $f(x_3) \neq 2$ ، $f(x_4) + f(x_5) = 2$ و لذا $\gamma_R^P(T) = 6 > w(f) \geq 7$ که یک تناقض است. بنابراین x'_1 یک رأس پشتیبان ضعیف است و لذا $T = T_1$. حال فرض کنید که x'_1 یک رأس پشتیبان باشد، آن‌گاه $T \in \{T_1, T_2\}$. طرف عکس واضح است. $\square$

فصل ۵

تابع احاطه‌گری رومی کامل و ضعیف

فرض کنید G یک گراف و $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ تابعی باشد که به هر رأس G مقدار ۰، ۱ یا ۲ نظیر کند. رأس u با $f(u) = 0$ را نسبت به تابع f بی‌دفاع گویند، هرگاه دارای رأس مجاور با وزن مثبت نباشد. تابع $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ را یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف گویند، هرگاه هر رأس u با $f(u) = 0$ مجاور رأس v باشد، به‌طوری‌که $f(v) > 0$ و تابع $f' : V(G) \rightarrow \{0, 1, 2\}$ با ضابطه‌ی $f'(u) = 1$ ، $f'(v) = f(v) - 1$ و برای $w \in V(G) - \{u, v\}$ ، $f'(w) = f(w)$ ، دارای رأس بی‌دفاع نباشد. وزن f برابر $\sum_{v \in V(G)} f(v)$ می‌باشد و با نماد $w(f)$ نمایش داده می‌شود. عدد احاطه‌گری رومی ضعیف گراف G ، کمترین وزن بین همه‌ی توابع احاطه‌گر رومی ضعیف گراف G می‌باشد و با نماد $\gamma_r(G)$ نمایش داده می‌شود.

با توجه به تعریف تابع احاطه‌گر رومی ضعیف، هر تابع احاطه‌گر رومی کامل نیز یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف می‌باشد. ولی لزوماً هر تابع احاطه‌گر رومی ضعیف یک تابع احاطه‌گر رومی کامل نیست. به‌عنوان مثال مسیر P_3 را در نظر بگیرید. در مسیر P_3 تابعی که به برگ‌ها وزن ۱ و به رأس پشتیبان وزن ۰ می‌دهد یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف می‌باشد که به‌وضوح تابع احاطه‌گر رومی کامل نیست. می‌گوییم که در گراف G عدد احاطه‌گر رومی کامل با عدد احاطه‌گر رومی ضعیف قویاً برابر هستند و با نماد $\gamma_r(G) \equiv \gamma_R^P(G)$ نمایش می‌دهیم، در صورتی‌که داشته باشیم $\gamma_r(G) = \gamma_R^P(G)$ و هر تابع احاطه‌گر رومی ضعیف یک تابع احاطه‌گر رومی کامل باشد. موضوع قویاً برابر بین پارامترهای مختلف بررسی شده است که برای مطالعه بیشتر می‌توان به مراجع [۸، ۶، ۱۳، ۲۵] رجوع کرد. در این فصل ما همه‌ی درختان T با

خاصیت $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ را مشخص می‌کنیم.

۱.۵ درختان T با خاصیت $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$

در این بخش همه‌ی درختان T با خاصیت $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ را مشخص می‌کنیم. ابتدا خواص مهمی از این درختان را بیان می‌کنیم.

لم ۱.۱.۵. فرض کنید T یک درخت باشد به‌طوری‌که $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ باشد. در این صورت درخت T دارای رأس پشتیبان ضعیف با درجه ۲ نیست.

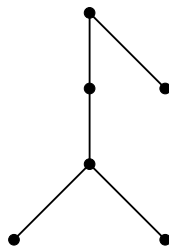
برهان. فرض کنید T درختی باشد که $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ و u یک رأس پشتیبان ضعیف آن از درجه ۲ باشد. فرض کنید v همسایه برگ‌ی رأس u باشد. همچنین فرض کنید که f یک $\gamma_r(T)$ -تابع باشد. قرار دهید $N(u) - \{v\} = \{w\}$. اگر $f(w) = 2$ ، آن‌گاه به‌وضوح $f(u) + f(v) = 1$. در این صورت تابع g با ضابطه $g(u) = 1$ ، $g(v) = 0$ و برای $w \in V - \{u, v\}$ $g(w) = f(w)$ یک $\gamma_r(T)$ -تابع می‌باشد که تابع احاطه‌گر رومی کامل نیست، که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $f(w) \neq 2$. ابتدا فرض می‌کنیم که $f(w) = 1$. در این صورت می‌توان فرض کرد که $f(u) = 1$ ، $f(v) = 0$ یا $f(v) = 1$ و $f(u) = 0$. بنابراین f تابعی احاطه‌گر رومی کامل نیست که یک تناقض است.

حال فرض کنید که $f(w) = 0$. در این صورت $1 \leq f(u) + f(v) \leq 2$. اگر $f(u) + f(v) = 1$ ، آن‌گاه $f(u) = 0$ ، $f(v) = 1$ یا $f(v) = 0$ و $f(u) = 1$. بنابراین f احاطه‌گر رومی کامل نیست که یک تناقض است. بنابراین $f(u) + f(v) = 2$. در این صورت تابع f' با ضابطه $f'(w) = f'(v) = 1$ و $f'(u) = 0$ برای $x \notin \{w, v, u\}$ $f'(x) = f(x)$ یک $\gamma_r(T)$ -تابع است که احاطه‌گر رومی کامل نیست که یک تناقض است. بنابراین درخت T دارای رأس پشتیبان ضعیف با درجه ۲ نمی‌باشد. $\square$

لم ۲.۱.۵. فرض کنید T درختی با خاصیت $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ باشد و u رأس پشتیبان قوی از آن باشد به‌طوری‌که $\ell_u = 2$. اگر f یک $\gamma_r(T)$ -تابع باشد، آن‌گاه $f(u) = 2$ است. به‌علاوه در صورتی‌که $\deg(u) = 3$ باشد، همسایه غیربرگی آن دارای وزن ۰ می‌باشد.

برهان. قرار دهید $L(u) = \{x, y\}$. ابتدا فرض کنید که $f(u) = 1$. با توجه به این که f یک تابع احاطه‌گر رومی کامل می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که $f(x) = f(y) = 1$. در این صورت با تغییر وزن u به ۲ و تغییر وزن x و y به ۰ یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف از اندازه کمتر از $\gamma_r(T)$ به‌دست می‌آید که یک تناقض است. حال فرض کنید $f(u) = 0$. در این صورت $f(x) = f(y) = 1$. اگر برای هر رأس $v \in N(u)$ داشته باشیم $f(v) \neq 0$ ، آن‌گاه با تغییر وزن رأس u به ۱ و تغییر وزن x به ۰ یک $\gamma_r(T)$ -تابع جدید حاصل می‌شود که احاطه‌گر رومی کامل نیست که یک تناقض است.

بنابراین فرض می‌کنیم که $w \in N(u)$ و $f(w) = \circ$. با توجه به این که f یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع می‌باشد نتیجه می‌گیریم که رأس $u \neq z$ وجود دارد به‌طوری‌که $z \in N(w)$ و $f(z) = 2$. در این صورت با تغییر وزن رأس u به ۲ و تغییر وزن رؤس x و y به $\circ$ یک $\gamma_r(T)$ -تابع جدید به‌دست می‌آید که تابع احاطه‌گر رومی کامل نیست که یک تناقض است. بنابراین $f(u) = 2$. حال فرض کنید که $\deg(u) = 3$ و $N(u) = \{x, y, w\}$. اگر $f(w) \neq \circ$ ، آن‌گاه با تغییر وزن رأس u و x به ۱، آن‌گاه یک $\gamma_r(T)$ -تابع جدید به‌دست می‌آید که احاطه‌گر رومی کامل نیست که یک تناقض است. بنابراین $f(w) = \circ$. $\square$



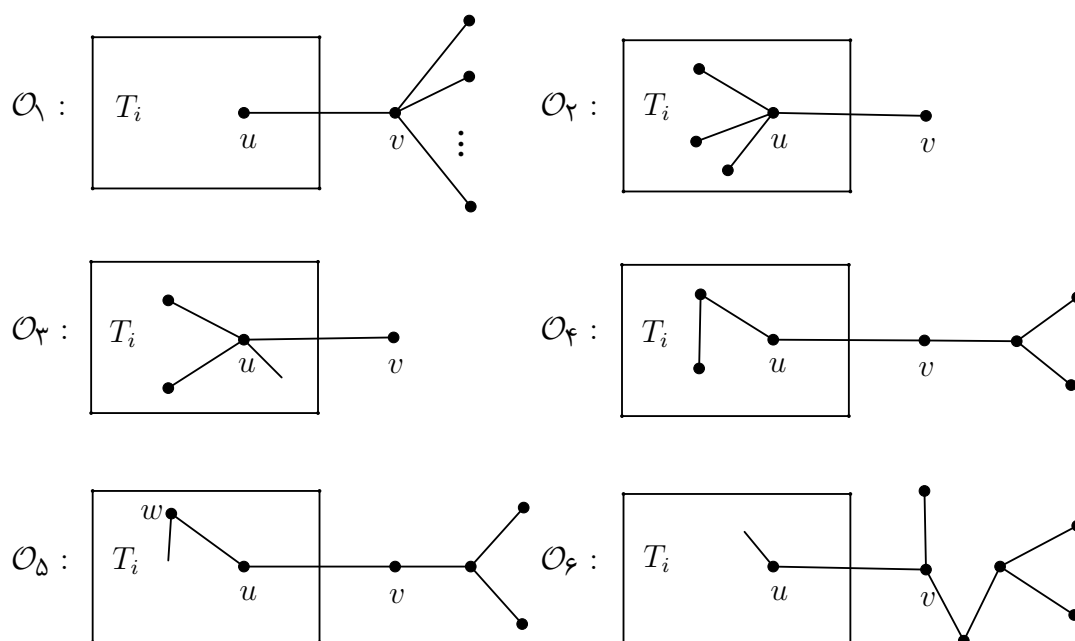
شکل ۱.۵: درخت F .

برای این که تمامی درختان T با خاصیت $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ را مشخص کنیم. ابتدا خانواده‌ای از درختان را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

فرض کنید F درختی باشد که در شکل ۱.۵ نمایش داده شده است، و خانواده‌ی $\mathcal{T}$ مجموعه تمامی درختان T باشد که از دنباله‌ای از درختان $T_1, T_2, \dots, T_k$ ($k \geq 1$) به‌دست می‌آید، به‌طوری‌که T_1 یک ستاره $K_{1,t}$ با $t \geq 3$ می‌باشد و T_{i+1} از درخت T_i با یکی از شش عملگر $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_5$ که در زیر تعریف شده‌اند و در شکل ۲.۵ نمایش داده شده‌اند، حاصل می‌شود:

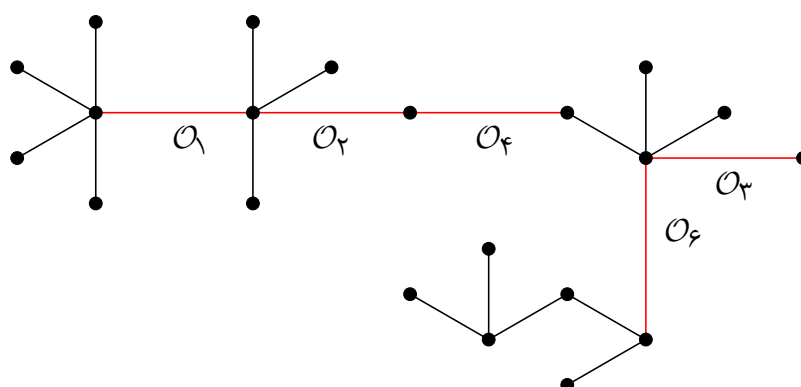
- **عملگر $\mathcal{O}_1$:** یک ستاره $K_{1,t}$ با $(t \geq 3)$ رأس مرکزی v را به درخت T_i با وصل کردن رأس v به رأس u از درخت T_i که برای آن $\gamma_r(T_i - u) > \gamma_r(T_i)$ می‌باشد، اضافه می‌کنیم.
- **عملگر $\mathcal{O}_2$:** فرض کنید u رأس پشتیبان قوی از درخت T_i با حداقل سه همسایه برگی باشد. رأس جدید v را به درخت T_i با وصل کردن آن به رأس u اضافه می‌کنیم.
- **عملگر $\mathcal{O}_3$:** فرض کنید u رأس پشتیبان قوی از درخت T_i با درجه ۳ باشد. رأس جدید v را به درخت T_i با متصل کردن آن به رأس u اضافه می‌کنیم.
- **عملگر $\mathcal{O}_4$:** فرض کنید u برگ مجاور یک رأس پشتیبان قوی از درخت T_i باشد. ستاره $K_{1,3}$ را به درخت T_i با وصل کردن برگ v از ستاره به رأس u اضافه می‌کنیم.
- **عملگر $\mathcal{O}_5$:** فرض کنید u رأسی از درخت T_i باشد به‌طوری‌که هر $\gamma_r(T_i) - 1$ تابع به آن وزن صفر تخصیص دهد. ستاره $K_{1,3}$ را به درخت T_i با متصل کردن برگی از ستاره به رأس u اضافه می‌کنیم.

- **عملگر $\mathcal{O}_6$:** فرض کنید u رأسی از درخت T_i باشد، به‌طوری‌که $\deg(u) \geq 2$ و نیز هر $\gamma_r(T_i) - 2$ تابع به آن وزن ۲ نظیر کند. درخت F را به درخت T_i با متصل کردن رأس پشتیبان با درجه ۲ درخت F به رأس u اضافه کنید.



شکل ۲.۵: عملگرهای $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots, \mathcal{O}_6$.

یک مثال از خانواده $\mathcal{T}$ در شکل ۳.۵ نمایش داده شده است. در ادامه ما نشان می‌دهیم که برای هر درخت از خانواده $T \in \mathcal{T}$ عدد احاطه‌گری رومی ضعیف با عدد احاطه‌گری رومی کامل آن قویاً برابر است، یعنی برای هر $T \in \mathcal{T}$ داریم $\gamma_R^p(T) \equiv \gamma_r(T)$.



شکل ۳.۵: درخت T از خانواده $\mathcal{T}$ که از درخت $K_{1,4}$ با عملگرهای $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_4, \mathcal{O}_3$ و $\mathcal{O}_6$ به‌دست می‌آید.

لم ۳.۱.۵. فرض کنید که درخت T از خانواده $\mathcal{T}$ باشد. در این صورت $\gamma_R^P(T) \equiv \gamma_r(T)$.

برهان. با استقراء روی مرتبه $n \geq 4$ از درخت $T \in \mathcal{T}$ عمل می‌کنیم. اگر $n = 4$ باشد، آن‌گاه $T = K_{\setminus 3}$. به‌وضوح دیده می‌شود که $\gamma_R^P(T) \equiv \gamma_r(T)$. فرض کنید $n \geq 5$ و برای هر درخت $T' \in \mathcal{T}$ با مرتبه n' که $5 \leq n' < n$ ، فرض کنید که $T' \in \mathcal{T}$ دارای مرتبه n باشد. بنابراین T می‌تواند از دنباله‌ای از درختان $T_k, \dots, T_1$ به‌دست آید که $T_k = K_{\setminus 3}$ و $T = T_k$. برای هر $i \leq k-1$ ، درخت T_i از درخت T_{i-1} با یکی از عملگرهای $\mathcal{O}_6, \mathcal{O}_7, \dots, \mathcal{O}_1$ به‌دست می‌آید.

قرار دهید $T' = T_{k-1}$. با توجه به این که تعداد رئوس درخت $T' \in \mathcal{T}$ کمتر از n می‌باشد، از فرضیات استقراء نتیجه می‌شود که $\gamma_R^P(T') \equiv \gamma_r(T')$. فرض کنید که f یک $-\gamma_r$ -تابع از T باشد که مجموع همه‌ی وزن‌هایی که به برگ‌ها می‌دهد کمترین حالت ممکن باشد. تحديد تابع f به درخت T' را با f' نشان می‌دهیم. برای هر رأس $w \in V(T')$ داریم $f'(w) = f(w)$. شش حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. T از T' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_1$ به‌دست آمده باشد:

فرض کنید T از درخت T' با اضافه کردن ستاره $K_{\setminus 3}$ ، با رأس مرکزی v و برگ‌های x, y و z و اتصال رأس v به رأس u از درخت T' ، به‌طوری که $\gamma_r(T' - u) > \gamma_r(T')$ باشد، به‌دست آید. در این‌صورت هیچ $-\gamma_r(T')$ -تابعی به u وزن صفر نمی‌دهد. بنابراین هر تابع احاطه‌گر رومی کامل روی درخت T' با تخصیص وزن ۲ به v و وزن صفر به همسایه‌های v به یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای T توسیع داده می‌شود. لذا از فرض استقراء نتیجه می‌گیریم که،

$$\gamma_r(T) \leq \gamma_R^P(T) \leq \gamma_R^P(T') + 2 = \gamma_r(T') + 2. \quad (۱.۵)$$

از طرفی چون v یک رأس پشتیبان قوی می‌باشد، می‌توانیم فرض کنیم که $f(v) = 2$ و نیز $f(x) = f(y) = f(z) = 0$. اگر $f(u) = 0$ ، آن‌گاه $f|_{T'-u}$ یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف برای $T' - u$ می‌باشد و بنابراین

$$\gamma_r(T') < \gamma_r(T' - u) \leq w(f|_{T'-u}) = w(f) - 2 = \gamma_r(T) - 2. \quad (۲.۵)$$

حال فرض کنید که $f(u) \neq 0$. در این‌صورت $f|_{T'}$ یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف برای درخت T' می‌باشد. بنابراین

$$\gamma_r(T') \leq w(f|_{T'}) = w(f) - 2 = \gamma_r(T) - 2. \quad (۳.۵)$$

بنابراین از رابطه (۱.۶) نتیجه می‌شود که $\gamma_r(T) = \gamma_R^P(T)$.

حال فرض کنید که $\gamma_r(T) \neq \gamma_R^P(T)$. در این‌صورت $-\gamma_r(T)$ -تابع g وجود دارد به‌طوری که g تابعی احاطه‌گر رومی کامل نیست. با توجه به این که v یک رأس پشتیبان قوی است، نتیجه می‌شود که $g(v) = 2$. اگر $g(u) \neq 0$ ، آن‌گاه $g|_{T'}$ یک $-\gamma_r(T')$ -تابع می‌باشد که تابع

احاطه‌گر رومی کامل نیست، که یک تناقض است. همچنین اگر $g(u) = \circ$ در این صورت تابع $g|_{T'-u}$ برای $T' - u$ یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف است و لذا

$$\gamma_r(T') < \gamma_r(T' - u) = w(g|_{T'-u}) = w(g) - 2 = \gamma_r(T) - 2 = \gamma_r(T').$$

که یک تناقض است. بنابراین $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$.

حالت ۲. T از T' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_2$ به‌دست آمده باشد.

فرض کنید که f' یک $\gamma_R^P(T')$ -تابع باشد. در این صورت $f'(u) = 2$ و لذا می‌توان تابع f' را با دادن وزن $\circ$ به رأس v به یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای درخت T توسیع داد. بنابراین از فرض استقراء نتیجه می‌شود که

$$\gamma_r(T) \leq \gamma_R^P(T) \leq \gamma_R^P(T') = \gamma_r(T'). \quad (4.5)$$

از طرفی u یک رأس پشتیبان قوی از درخت T می‌باشد و لذا می‌توان دید که $f(u) = 2$ و $f(v) = \circ$. بنابراین f' یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف روی درخت T' می‌باشد و بنابراین $\gamma_r(T') \leq w(f') = w(f) = \gamma_r(T)$.

لذا از رابطه (۴.۵) نتیجه می‌گیریم که $\gamma_r(T) = \gamma_R^P(T)$. فرض کنید $\gamma_r(T) \neq \gamma_R^P(T)$. بنابراین $\gamma_r(T) - \gamma_r(T)$ -تابع g وجود دارد به‌طوری‌که g احاطه‌گر رومی کامل نیست. چون u یک رأس پشتیبان قوی می‌باشد، $g(u) = 2$ و $g(v) = \circ$. بنابراین تابع $g|_{T'}$ یک $\gamma_r(T')$ -تابع می‌باشد که احاطه‌گر رومی کامل نیست، که یک تناقض است. بنابراین $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$.

حالت ۳. T از T' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_3$ به‌دست آمده باشد.

فرض کنید که f' یک $\gamma_R^P(T')$ -تابع باشد و $L(u) = \{x, y\}$ با توجه به این که u رأس پشتیبان قوی از T' می‌باشد، بنابراین فرض می‌کنیم که $f'(u) = 2$ و $f'(x) = f'(y) = \circ$. در این صورت تابع f' را می‌توان با اختصاص وزن $\circ$ به v به یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای درخت T توسیع داد. بنابراین از فرض استقراء نتیجه می‌شود که،

$$\gamma_r(T) \leq \gamma_R^P(T) \leq \gamma_R^P(T') = \gamma_r(T'). \quad (5.5)$$

با توجه به این که رأس u در درخت T یک رأس پشتیبان قوی می‌باشد و لذا می‌توان دید که $f(u) = 2$ و $f(v) = \circ$ است. بنابراین f' یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف برای درخت T' می‌باشد و لذا $\gamma_r(T') \leq w(f') = w(f) = \gamma_r(T)$.

بنابراین از رابطه (۵.۵) نتیجه می‌گیریم که $\gamma_r(T) = \gamma_R^P(T)$. فرض کنید که $\gamma_r(T) \neq \gamma_R^P(T)$. بنابراین $\gamma_r(T) - \gamma_r(T)$ -تابع g وجود دارد به‌طوری‌که g تابع احاطه‌گر رومی کامل نیست. چون u یک رأس پشتیبان قوی است، نتیجه می‌شود که $g(u) = 2$ و $g(v) = \circ$. لذا تابع $g|_{T'}$ یک $\gamma_r(T')$ -تابع می‌باشد که احاطه‌گر رومی کامل نیست، که یک تناقض است. بنابراین $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$.

حالت ۴. T از درخت T' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_4$ به‌دست آمده باشد.

فرض کنید T از درخت T' با اضافه کردن ستاره $K_{3,3}$ با یال uv به‌دست آمده باشد که x رأس مرکزی ستاره و y و z برگ‌های ستاره و u برگ مجاور یک رأس پشتیبان قوی w از درخت

T' باشد. فرض کنید که f' یک $-\gamma_r(T')$ تابع باشد. با توجه به این که w یک رأس پشتیبان قوی می باشد می توان فرض کرد که $f'(w) = 2$ و $f'(u) = 0$ است. طبق فرض استقرار f' یک $-\gamma_R^P(T')$ تابع است. در این صورت می توان با اختصاص وزن ۲ به x و وزن ۰ به رؤوس v, y و z تابع f' را به یک تابع احاطه گر رومی کامل از درخت T توسیع داد. بنابراین از فرض استقرار نتیجه می شود که،

$$\gamma_r(T) \leq \gamma_R^P(T) \leq \gamma_R^P(T') + 2 = \gamma_r(T') + 2. \quad (6.5)$$

از طرفی با توجه به این که x رأس پشتیبان قوی در درخت T می باشد، می توان فرض کرد که $f(x) = 2$ و $f(v) = f(y) = f(z) = 0$. بنابراین تابع f' یک تابع احاطه گر رومی ضعیف برای درخت T' است و لذا نتیجه می شود که،

$$\gamma_r(T') \leq w(f') = w(f) - 2 = \gamma_r(T) - 2. \quad (7.5)$$

در این صورت از رابطه (۶.۵) نتیجه می گیریم که $\gamma_r(T) = \gamma_R^P(T)$. حال فرض کنید که $\gamma_r(T) \neq \gamma_R^P(T)$. در این صورت $-\gamma_r(T)$ تابع g وجود دارد به طوری که g یک تابع احاطه گر رومی کامل نیست. چون x یک رأس پشتیبان قوی می باشد، می توان نتیجه گرفت که $g(x) = 2$ و $g(v) = 0$. در این صورت تابع $g|_{T'}$ یک $-\gamma_r(T')$ تابع است که احاطه گر رومی کامل نیست، که یک تناقض است. بنابراین $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$. **حالت ۵.** T از T' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_5$ به دست آمده باشد.

فرض کنید T از درخت T' با اضافه کردن ستاره $K_{3,3}$ با رأس مرکزی x و برگ های v, y و z و نیز وصل کردن برگ v از ستاره به رأس u از درخت T' به دست آمده باشد، به طوری که هر $-\gamma_r(T')$ تابع به رأس u مقدار ۰ نظیر کند. فرض کنید که g' یک $-\gamma_r(T')$ تابع باشد. طبق فرض $g'(u) = 0$. از طرف دیگر با توجه به این که $\gamma_r(T') \equiv \gamma_R^P(T')$ نتیجه می گیریم که g' یک $-\gamma_R^P(T')$ تابع است. بنابراین g' را می توان به یک تابع احاطه گر رومی کامل T با اختصاص دادن وزن ۲ به x و وزن ۰ به v, y و z توسیع داد. بنابراین با توجه به موارد ذکر شده و فرض استقرار نتیجه می گیریم که،

$$\gamma_r(T) \leq \gamma_R^P(T) \leq \gamma_R^P(T') + 2 = \gamma_r(T') + 2. \quad (8.5)$$

از طرفی x یک رأس پشتیبان قوی از درخت T می باشد و لذا می توان دید که $f(x) = 2$ و $f(v) = f(y) = f(z) = 0$. بنابراین f' یک تابع احاطه گر رومی ضعیف روی درخت T' می باشد و لذا داریم،

$$\gamma_r(T') \leq w(f') = w(f) - 2 = \gamma_r(T) - 2. \quad (9.5)$$

در این صورت از رابطه (۸.۵) نتیجه می گیریم که $\gamma_r(T) = \gamma_R^P(T)$. فرض کنید که $\gamma_r(T) \neq \gamma_R^P(T)$. در این صورت $-\gamma_r(T)$ تابع g وجود دارد به طوری که g یک تابع احاطه گر رومی کامل نیست. چون x یک رأس پشتیبان قوی هست، می توان فرض کرد

که $g(x) = 2$ و $g(v) = 0$. در این صورت تابع $g|_{T'}$ یک $\gamma_r(T')$ -تابع روی درخت T' می‌باشد و لذا $g(u) = 0$. چون g یک تابع احاطه‌گر رومی کامل نیست، لذا $g|_{T'}$ نیز تابع احاطه‌گر رومی کامل نمی‌باشد که یک تناقض است. بنابراین $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$.

حالت ۶. T از T' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_\epsilon$ به‌دست آمده باشد.

فرض کنید که T از درخت T' با اضافه کردن درخت F و وصل کردن رأس پشتیبان با درجه ۲ درخت به نام v به رأس u از درخت T' به‌دست آمده باشد به‌طوری‌که $\deg(u) \geq 2$ و هر $\gamma_r(T')$ -تابع به رأس u وزن ۲ اختصاص می‌دهد. قرار دهید $N(v) = \{u, x, w\}$ ، $L(v) = \{w\}$ ، $N(x) = \{v, r\}$ و $L(r) = \{y, z\}$.

فرض کنید که g' یک $\gamma_R^P(T')$ -تابع است. در این صورت $g'(u) = 2$. لذا می‌توان تابع g' را با اختصاص وزن ۰ به v, z ، y و x و وزن ۱ به w و نیز وزن ۲ به r به یک تابع احاطه‌گر رومی کامل از T توسعه داد. بنابراین از فرض استقراء نتیجه می‌گیریم که

$$\gamma_r(T) \leq \gamma_R^P(T) \leq \gamma_R^P(T') + 3 = \gamma_r(T') + 3. \quad (۱۰.۵)$$

از طرفی r یک رأس پشتیبان قوی از درخت T می‌باشد و لذا می‌توان فرض کرد که $f(r) = 2$ و $f(x) = f(y) = f(z) = 0$. بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که $f(v) = 0$ یا $f(v) = 2$ است.

اگر $f(v) = 0$ ، آن‌گاه $f(w) \geq 1$ و همچنین f' یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف برای درخت T' است و لذا

$$\gamma_r(T') \leq w(f') \leq w(f) - 3 = \gamma_r(T) - 3.$$

حال فرض کنید که $f(v) = 2$ ، آن‌گاه $f(w) = 0$ و می‌توانیم فرض کنیم که $f(u) \neq 2$. در این صورت تابع g' با ضابطه $g'(u) = \max\{f(u), 1\}$ و برای $u \neq w$ $g'(w) = f(w)$ یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف روی درخت T' می‌باشد و لذا

$$\gamma_r(T') \leq w(g') \leq w(f) - 3 = \gamma_r(T) - 3.$$

در این صورت از رابطه (۱۰.۵) نتیجه می‌شود که $\gamma_r(T) = \gamma_R^P(T)$.

حال فرض کنید که $\gamma_r(T) \neq \gamma_R^P(T)$. در این صورت $\gamma_r(T)$ -تابع g وجود دارد به‌طوری‌که g یک تابع احاطه‌گر رومی کامل نیست. چون r یک رأس پشتیبان قوی می‌باشد، می‌توانیم فرض کنیم که $g(r) = 2$ و $g(x) = g(y) = g(z) = 0$. اگر $g(v) = 0$ ، آن‌گاه می‌توان فرض کرد که $g(w) = 1$. در این صورت $g|_{T'}$ یک $\gamma_r(T')$ -تابع می‌باشد که احاطه‌گر رومی کامل نیست که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $g(v) \neq 0$. در این صورت می‌توان فرض کرد که $g(v) = 2$ و $g(w) = 0$. اگر $g(u) \neq 0$ ، آن‌گاه $g|_{T'}$ یک $\gamma_r(T')$ -تابع با وزن $\gamma_r(T') - 1$ و $\gamma_r(T) - 4$ می‌باشد، که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $g(u) = 0$. لذا تابع g' با $g'(u) = 1$ و $g'(a) = g(a)$ برای $u \neq a$ یک $\gamma_r(T')$ -تابع می‌باشد که $g'(u) \neq 2$ ، که یک تناقض است.

□

بنابراین $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$.

در ادامه نتیجه اصلی این فصل را بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۱.۵. فرض کنید T یک درخت باشد. در این صورت $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ اگر و فقط اگر $T \in \mathcal{F}$ یا $T = K_\setminus$.

برهان. فرض کنید که T درختی از مرتبه n باشد و $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$. اگر $n = 1$ ، آن‌گاه $T = K_\setminus$. بنابراین فرض می‌کنیم که T درختی از مرتبه $n \geq 2$ باشد. با استقراء روی مرتبه n از درخت T عمل می‌کنیم. با توجه به این که مسیر P_4 دارای یک $\gamma_r(P_4) -$ تابع می‌باشد که احاطه‌گر رومی کامل نیست، فرض می‌کنیم که $n \geq 3$. اگر $n = 3$ ، آن‌گاه $T = P_3$ و به‌وضوح $\gamma_r(T) \not\equiv \gamma_R^P(T)$. بنابراین در نظر می‌گیریم که $n \geq 4$ باشد. فرض کنید هر درخت T' از مرتبه $n' < n$ با $4 \leq n'$ خاصیت $\gamma_r(T') \equiv \gamma_R^P(T')$ عضوی از خانواده $\mathcal{F}$ باشد. فرض کنید که T از مرتبه n باشد و $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ باشد. و همچنین f یک $\gamma_r(T) -$ تابع باشد. با توجه به این که هر ستاره با حداقل چهار رأس عضوی از خانواده $\mathcal{F}$ می‌باشد، می‌توان فرض کرد که قطر درخت T حداقل سه می‌باشد. اگر $diam(T) = 3$ ، آن‌گاه T یک ستاره دوگانه $S_{a,b}$ می‌باشد. بدون کاسته شدن از کلیت فرض کنید که $a \leq b$. اگر $b = 1$ ، آن‌گاه $T = P_4$ و به‌وضوح $\gamma_r(T) \not\equiv \gamma_R^P(T)$ که یک تناقض است. همچنین اگر $b = 2$ و $a = \{1, 2\}$ نیز $\gamma_r(T) \not\equiv \gamma_R^P(T)$ است که تناقض می‌باشد. بنابراین فرض می‌کنیم که $b \geq 3$. اگر $a = 2$ ، آن‌گاه T دارای یک $\gamma_r(T) -$ تابع است که احاطه‌گر رومی کامل نیست که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $a \geq 3$. در این صورت درخت T از ستاره $K_{\setminus, b}$ با عملگر $\mathcal{O}_1$ به‌دست می‌آید و لذا $T \in \mathcal{F}$. بنابراین فرض می‌کنیم که $diam(T) \geq 4$. فرض کنید T دارای یک رأس پشتیبان قوی u با $\ell_u \geq 4$ باشد.

قرار دهید $T' = T - v$ ، $v \in L(u)$ و همچنین فرض کنید که f یک $\gamma_R^P(T) -$ تابع باشد. در این صورت $f(u) = 2$ و $f|_{T'}$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای درخت T' می‌باشد. بنابراین $\gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T') \leq \gamma_R^P(T) = \gamma_r(T)$. حال فرض کنید که g' یک $\gamma_r(T') -$ تابع باشد، در این صورت g' را می‌توان به یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف برای درخت T با تخصیص دادن وزن $\circ$ به رأس v ، توسعه داد و لذا $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T')$. در نتیجه $\gamma_r(T) = \gamma_r(T')$. از طرف دیگر $\gamma_R^P(T) = \gamma_r(T) = \gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T')$ و لذا $\gamma_R^P(T) = \gamma_R^P(T')$. بنابراین $\gamma_r(T') = \gamma_R^P(T')$. اگر $\gamma_r(T') < \gamma_R^P(T')$ قویاً برابر نباشد، آن‌گاه هر $\gamma_r(T') -$ تابعی که احاطه‌گر رومی کامل نیست را می‌توان با تخصیص وزن $\circ$ به v به یک $\gamma_r(T) -$ تابع توسعه داد که احاطه‌گر رومی کامل نیست، که با $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ یک تناقض است. بنابراین $\gamma_r(T') \equiv \gamma_R^P(T')$ و لذا طبق فرض استقراء نتیجه می‌شود که $T' \in \mathcal{F}$. در این صورت $T \in \mathcal{F}$ زیرا از درخت T' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_2$ به‌دست می‌آید. بنابراین می‌توانیم فرض می‌کنیم که حقیقت زیر برقرار است.

حقیقت ۱. اگر u یک رأس پشتیبان قوی از درخت T باشد، آن‌گاه $\ell_u \leq 3$.

درخت T را در برگ x_0 از مسیر قطری $x_d \dots x_{\setminus}, x_0$ ریشه‌دار می‌کنیم. در این صورت از لم ۱.۱.۵ و حقیقت ۱ نتیجه می‌گیریم که $3 \leq \deg(x_{d-\setminus}) \leq 4$ می‌باشد. فرض کنید بین همه‌ی

$\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ -توابع، f بیشترین وزن ممکن را به رأس x_{d-1} می‌هد. با توجه به این که $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ نتیجه می‌گیریم که f یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع نیز می‌باشد. دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت ۱. $\deg(x_{d-1}) = 4$.

فرض کنید $T' = T - x_d$. به‌وضوح $f(x_{d-1}) = 2$ و $f|_{T'}$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای T' است. بنابراین $\gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T') \leq w(f|_{T'}) = \gamma_R^P(T) = \gamma_r(T)$. فرض کنید که g یک $\gamma_r(T')$ -تابع می‌باشد. در این صورت می‌توان تابع g را به یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف برای درخت T با اختصاص دادن وزن $\circ$ به x_d توسعه داد و لذا $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T')$. در نتیجه داریم $\gamma_r(T) = \gamma_r(T')$. بنابراین $\gamma_r(T) = \gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T') = \gamma_R^P(T)$ و لذا $\gamma_R^P(T) = \gamma_R^P(T')$. بنابراین $\gamma_r(T') = \gamma_R^P(T')$. اگر $\gamma_r(T')$ و $\gamma_R^P(T')$ قویاً برابر نباشند، آن‌گاه هر $\gamma_r(T')$ -تابعی که احاطه‌گر رومی کامل نمی‌باشد را می‌توان به یک $\gamma_r(T)$ -تابع با تخصیص دادن وزن $\circ$ به x_d توسعه داد که احاطه‌گر رومی کامل نیست که با $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ در تناقض است. بنابراین $\gamma_r(T') \equiv \gamma_R^P(T')$ و طبق فرض استقراء $T' \in \mathcal{F}$. از طرفی چون T از T' با عملگر $\mathcal{O}_3$ به‌دست می‌آید، نتیجه می‌گیریم که $T \in \mathcal{F}$.

حالت ۲. $\deg(x_{d-1}) = 3$.

در این صورت از لم ۲.۱.۵ نتیجه می‌شود که $f(x_{d-1}) = 2$. اگر $f(x_{d-2}) \neq \circ$ باشد، آن‌گاه با تغییر وزن رئوس x_d و x_{d-1} به وزن ۱، یک $\gamma_r(T)$ -تابع جدید حاصل می‌شود که یک تناقض است. بنابراین $f(x_{d-2}) = \circ$. اگر $u \neq x_{d-1}$ یک فرزند پشتیبان قوی از رأس x_{d-2} باشد، آن‌گاه می‌توانیم فرض کنیم که $f(u) = 2$ و لذا f یک تابع احاطه‌گر رومی کامل نیست که یک تناقض است. همچنین از لم ۱.۱.۵ نتیجه می‌گیریم که x_{d-2} فرزند پشتیبان ضعیف ندارد. بنابراین هر فرزند $u \neq x_{d-1}$ از x_{d-2} یک برگ می‌باشد. با توجه به این که $f(x_{d-2}) = \circ$ ، $f(x_{d-2})$ یک رأس پشتیبان قوی نیست. فرض کنید که x_{d-2} یک رأس پشتیبان ضعیف باشد. قرار دهید $L(x_{d-2}) = \{x\}$ و $L(x_{d-1}) = \{x_d, z\}$. بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض می‌کنیم که $f(x) = 1$. در این صورت با تغییر وزن رئوس x_d و z به وزن ۱ و رأس x_{d-1} به وزن $\circ$ یک $\gamma_r(T)$ -تابع جدید حاصل می‌شود که احاطه‌گر رومی کامل نیست، که یک تناقض است بنابراین فرض می‌کنیم که $\deg(x_{d-2}) = 2$. در این صورت از لم ۲.۱.۵ نتیجه می‌شود که $f(x_{d-1}) = 2$ و $f(x_d) = f(z) = f(x_{d-2}) = \circ$. با توجه به این که f یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع می‌باشد، نتیجه می‌شود که $f(x_{d-3}) \neq 2$. فرض کنید که $f(x_{d-3}) = 1$. چون f یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع می‌باشد هر رأس با وزن $\circ$ مجاور حداقل یک رأس با وزن ۲ می‌باشد و لذا با اختصاص وزن $\circ$ به x_{d-3} و وزن ۱ به رأس x_{d-2} یک $\gamma_r(T)$ -تابع جدید به‌دست می‌آید که با لم ۲.۱.۵ در تناقض است. بنابراین $f(x_{d-3}) = \circ$ و لذا $f(x_{d-4}) = 2$. دو زیرحالت زیر را در نظر بگیرید:

زیرحالت ۱.۲: $\deg(x_{d-3}) \geq 3$.

ابتدا فرض می‌کنیم که x_{d-3} یک رأس پشتیبان هست. با توجه به این که $f(x_{d-3}) = \circ$ می‌باشد، پس x_{d-3} پشتیبان قوی نیست و لذا یک رأس پشتیبان ضعیف است. فرض کنید $L(x_{d-3}) = x'$ باشد. چون $f(x_{d-3}) = \circ$ ، بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان فرض

کرد که $f(x') = 1$. اگر دارای فرزند پشتیبان قوی u باشد، آن گاه می توان فرض کرد که $f(u) = 2$ ، که با $\gamma_R^P(T)$ تابع بودن f در تناقض است. بنابراین x_{d-3} فرزند پشتیبان قوی ندارد. از طرف دیگر از لم ۱.۱.۵ نتیجه می شود که x_{d-3} دارای فرزند پشتیبان ضعیف نیست. بنابراین هر فرزند x_{d-3} به جز x' نقشی شبیه به x_{d-2} بازی می کند. فرض کنید که $\deg(x_{d-3}) \geq 4$ و u فرزند x_{d-3} غیر از x' و x_{d-2} باشد. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$. با توجه به این که f یک $\gamma_R^P(T)$ تابع می باشد و $f(x_{d-2}) = 0$ ، نتیجه می گیریم که $f|_{T'}$ یک تابع احاطه گر رومی کامل روی درخت T' است و لذا $\gamma_r(T) - 2 = \gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T') \leq \gamma_R^P(T) - 2 = \gamma_r(T)$. فرض کنید که f' یک $\gamma_r(T')$ تابع باشد. قرار دهید $N(u) = \{x_{d-3}, x\}$ و $N(x) = \{u, y, z\}$. در این صورت می توان فرض کرد که $f'(x) = 2$ و $f'(y) = f'(z) = f'(u) = 0$. اگر $f'(x_{d-3}) \neq 1$ ، آن گاه می توان تابع f' را به یک تابع احاطه گر رومی ضعیف برای درخت T با تخصیص وزن ۲ به x_{d-1} و وزن ۰ سه همسایه آن توسعه داد. بنابراین $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2$. حال فرض کنید که $f'(x_{d-3}) = 1$. چون $f'(u) = 0$ ، برای هر رأس $w \in N(x_{d-3}) \setminus \{u\}$ که $f'(w) = 0$ حداقل یک رأس $\{x_{d-3}\} \setminus N(w)$ وجود دارد به طوری که $f'(w') \neq 0$. بنابراین می توان تابع f' را به تابع احاطه گر رومی ضعیف برای درخت T با اختصاص وزن ۲ به x_{d-1} و وزن ۰ سه همسایه آن توسعه داد. بنابراین $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2$. بنابراین در هر دو حالت نتیجه می شود که $\gamma_r(T') = \gamma_r(T) - 2$. لذا $\gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T') - 2 = \gamma_r(T) - 2 = \gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T')$ و بنابراین $\gamma_r(T') = \gamma_R^P(T')$.

اگر $\gamma_r(T')$ و $\gamma_R^P(T')$ قویاً برابر نباشند، آن گاه هر $\gamma_r(T')$ تابعی که احاطه گر رومی کامل نیست را می توان به یک $\gamma_r(T)$ تابع با تخصیص وزن ۲ به رأس x_{d-1} و وزن ۰ به سه همسایه آن توسعه داد که احاطه گر رومی کامل نیست، که با $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ در تناقض است. بنابراین $\gamma_r(T') \equiv \gamma_R^P(T')$ و طبق فرض استقراء نتیجه می شود که $T' \in \mathcal{F}$. در این صورت $T \in \mathcal{F}$ زیرا از درخت T' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}_5$ به دست می آید.

بنابراین فرض می کنیم $\deg(x_{d-3}) = 3$ و نیز رأس پشتیبان باشد. اگر $\deg(x_{d-4}) = 2$ ، آن گاه به وضوح $f(x_{d-5}) = 0$ و لذا با تغییر وزن رئوس x_{d-3} و x_{d-5} به ۱ و تغییر وزن رأس x_{d-4} به ۰ یک $\gamma_r(T)$ تابع جدید به دست می آید که احاطه گر رومی کامل نمی باشد، که یک تناقض است. بنابراین فرض می کنیم که $\deg(x_{d-4}) \geq 3$. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-3}}$. با توجه به این که f یک $\gamma_R^P(T)$ تابع می باشد و همچنین $f(x_{d-3}) = 0$ ، نتیجه می گیریم که $f|_{T'}$ یک تابع احاطه گر رومی کامل برای T' است و لذا $\gamma_r(T) - 3 = \gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T') \leq \gamma_R^P(T) - 3 = \gamma_r(T)$. فرض کنید که f' یک $\gamma_r(T')$ تابع باشد. اگر $f'(x_{d-4}) \neq 1$ ، آن گاه می توان تابع f' را با دادن وزن ۲ به رأس x_{d-1} و وزن ۱ به x' و وزن ۰ دیگر رئوس باقی مانده از درخت T به یک تابع احاطه گر رومی ضعیف برای درخت T با وزن $\gamma_r(T') + 3$ توسعه داد و لذا $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 3$.

در ادامه فرض کنید که $f'(x_{d-4}) = 1$. اگر برای هر رأس $u \in N(x_{d-4})$ با $f'(u) = 0$ حداقل یک رأس $w \in N(u)$ با $f'(w) > 0$ وجود داشته باشد، آن گاه می توان تابع f' را با دادن وزن ۲ به x_{d-1} و وزن ۱ به x' و وزن ۰ به دیگر رئوس باقی مانده از T به یک تابع احاطه گر رومی ضعیف برای درخت

T با وزن $\gamma_r(T') + 3$ توسیع داد و لذا $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 3$. فرض می‌کنیم که رأس $u \in N(x_{d-4})$ با $f'(u) = 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $w \in N(u) - x_{d-4}$ داشته باشیم $f'(w) = 0$. در این صورت چون f' یک $\gamma_r(T')$ -تابع است برای هر $y \in N(x_{d-4}) - \{u\}$ داشته باشیم $f'(y) \neq 0$. با توجه به این‌که $\deg(x_{d-4}) \geq 3$ ، رأس $y \in N(x_{d-4})$ وجود دارد به‌طوری‌که $f'(y) \neq 0$. در این صورت با تغییر وزن رئوس x_{d-4} به صفر و u به ۸، یک $\gamma_r(T)$ -تابع جدید g' حاصل می‌شود. در نتیجه، $\gamma_r(T') = \gamma_r(T) - 3$. بنابراین $\gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T') = \gamma_r(T) - 3 = \gamma_R^P(T) - 3 = \gamma_R^P(T')$ و لذا $\gamma_r(T') = \gamma_R^P(T')$.

حال فرض کنید که g' یک $\gamma_r(T')$ -تابع می‌باشد. ابتدا فرض می‌کنیم که $g'(x_{d-4}) = 0$. در این صورت می‌توانیم g' را با دادن وزن ۲ به x_{d-4} ، وزن ۱ به x' و وزن ۰ به رئوس باقی‌مانده از درخت T به یک $\gamma_r(T)$ -تابع توسیع داد. با توجه به این‌که هر $\gamma_r(T)$ -تابعی به x_{d-4} وزن ۲ می‌دهد به تناقض می‌رسیم. در ادامه فرض کنید که $g'(x_{d-4}) = 1$. اگر برای هر رأس $u \in N(x_{d-4})$ با $g'(u) = 0$ حداقل یک رأس $w \in N(u)$ با $g'(w) > 0$ وجود داشته باشد، آن‌گاه می‌توان g' را به یک $\gamma_r(T)$ -تابع با دادن وزن ۲ به x_{d-4} ، وزن ۱ به x' و وزن ۰ دیگر رئوس باقی‌مانده از T توسیع داد. چون هر $\gamma_r(T)$ -تابع به رأس x_{d-4} وزن ۲ می‌دهد، به تناقض می‌رسیم. بنابراین می‌توان فرض کرد که هر $\gamma_r(T')$ -تابع به x_{d-4} وزن ۲ می‌دهد.

همچنین در صورتی‌که $\gamma_r(T')$ و $\gamma_R^P(T')$ قویاً برابر نباشند، آن‌گاه هر $\gamma_r(T')$ -تابع که احاطه‌گر رومی کامل نیست را می‌توان با اختصاص وزن ۲ به رأس x_{d-4} ، وزن ۱ به x' و وزن ۰ دیگر رئوس باقی‌مانده از درخت به یک T ، $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ به یک $\gamma_r(T)$ -تابع توسیع داد که با $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ در تناقض است. بنابراین $\gamma_r(T') \equiv \gamma_R^P(T')$ و لذا طبق فرض استقرای، $T' \in \mathcal{F}$. از طرفی با توجه به این‌که درخت T از T' با استفاده از عملگر $\mathcal{O}$ به‌دست می‌آید، نتیجه می‌گیریم که $T \in \mathcal{F}$.

حال فرض کنید که x_{d-3} رأس پشتیبان قوی نباشد. در این صورت هر فرزند از x_{d-3} نقشی شبیه به x_{d-2} دارد. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$. با توجه به این‌که f یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع می‌باشد و $f(x_{d-2}) = 0$ ، در نتیجه تابع $f|_{T'}$ تابع احاطه‌گر رومی کامل روی T' است و لذا داریم $\gamma_r(T) - 2 = \gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T') \leq \gamma_R^P(T) - 2 = \gamma_r(T) - 2$. فرض کنید که f' یک $\gamma_r(T')$ -تابع است. قرار دهید $N(u) = \{x_{d-3}, x\}$ و $N(x) = \{u, y, z\}$. در این صورت به‌وضوح می‌توان فرض کرد که $f'(x) = 2$ و $f'(y) = f'(z) = f'(u) = 0$. اگر $f'(x_{d-3}) \neq 1$ ، آن‌گاه می‌توان تابع f' را به تابع احاطه‌گر رومی ضعیف برای درخت T با تخصیص وزن ۲ به x_{d-4} و وزن ۰ سه همسایه آن توسیع داد. بنابراین $\gamma_r(T) \equiv \gamma_r(T') + 2$. در ادامه فرض کنید که $f'(x_{d-3}) = 1$. با توجه به این‌که $f'(u) = 0$ می‌باشد برای هر رأس $w \in N(x_{d-3}) - \{u\}$ که $f(w) = 0$ ، حداقل یک رأس $w' \in N(w) - \{x_{d-3}\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $f'(w') \neq 0$. بنابراین می‌توان تابع f' را به یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف برای درخت T با دادن وزن ۲ به x_{d-4} و وزن ۰ سه همسایه آن توسیع داد. بنابراین $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2$. در نتیجه در هر دو حالت $\gamma_r(T') = \gamma_r(T) - 2$. لذا $\gamma_r(T') = \gamma_R^P(T') = \gamma_r(T) - 2 = \gamma_R^P(T) - 2 = \gamma_R^P(T')$ و بنابراین $\gamma_r(T') = \gamma_R^P(T')$. فرض کنید که g' یک $\gamma_r(T')$ -تابع دلخواه باشد. در این صورت می‌توانیم فرض کنیم که $g'(u) = 0$.

بنابراین مشابه قبل می‌توان g' را به یک $-\gamma_r(T)$ -تابع g با اختصاص دادن وزن ۲ به x_{d-1} و وزن ۰ سه همسایه آن توسیع داد. با توجه به این که $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ ، نتیجه می‌شود که g یک $-\gamma_R^P(T)$ -تابع است و لذا g' یک $-\gamma_R^P(T')$ -تابع است. بنابراین $\gamma_r(T') \equiv \gamma_R^P(T')$ و لذا طبق فرض استقرای $T' \in \mathcal{F}$ از طرفی T از T' با عملگر $\mathcal{O}_5$ حاصل می‌شود و لذا $T \in \mathcal{F}$.

زیر حالت ۲.۲: ۲ = $\deg(x_{d-3})$.

اگر $\deg(x_{d-4}) = 2$ ، آن‌گاه با تغییر وزن x_{d-4} به ۰، تغییر وزن x_{d-3} به ۱ و تغییر وزن x_{d-5} به $\max\{f(x_{d-5}), 1\}$ ، یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف g با وزن حداکثر $\gamma_r(T)$ حاصل می‌شود که $g(x_{d-3}) \neq 0$ ، که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $g(x_{d-4}) \geq 3$. ابتدا فرض کنید که x_{d-4} یک رأس پشتیبان باشد. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-4}}$. چون $f(x_{d-4}) = 0$ است، بنابراین $f|_{T'}$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای درخت T' است و لذا $\gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T') \leq \gamma_R^P(T) - 2 = \gamma_r(T) - 2$. حال فرض کنید که g' یک $-\gamma_r(T')$ -تابع باشد. چون x_{d-4} در درخت T' یک رأس پشتیبان قوی می‌باشد. می‌توانیم فرض کنیم $g'(x_{d-4}) = 2$. در این صورت تابع g' را به یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف برای درخت T با دادن وزن ۲ به x_{d-1} و وزن ۰ سه همسایه آن توسیع داد. بنابراین $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2$. در نتیجه در هر دو حالت داریم $\gamma_r(T') = \gamma_r(T) - 2 = \gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T')$ لذا $\gamma_r(T') \equiv \gamma_R^P(T')$ و بنابراین $\gamma_r(T') = \gamma_R^P(T')$.

از طرفی فرض کنید که g' یک $-\gamma_r(T')$ -تابع دلخواه باشد. در این صورت می‌توانیم فرض کنیم که $g'(x_{d-4}) = 2$ و $g'(x_{d-3}) = 0$ باشد. بنابراین مشابه قبل می‌توان تابع g' را به یک $-\gamma_r(T)$ -تابع g با دادن وزن ۲ به x_{d-1} و وزن ۰ سه همسایه آن توسیع داد. با توجه به این که $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ ، نتیجه می‌گیریم که g یک $-\gamma_R^P(T)$ -تابع می‌باشد و لذا g' یک $-\gamma_R^P(T')$ -تابع است. بنابراین $\gamma_r(T') \equiv \gamma_R^P(T')$ و لذا طبق فرض استقرای $T' \in \mathcal{F}$. همچنین چون T از T' با عملگر $\mathcal{O}_4$ حاصل می‌شود، نتیجه می‌گیریم که $T \in \mathcal{F}$.

حال فرض کنید که x_{d-4} رأس پشتیبان نباشد. از لم ۱.۱.۵ نتیجه می‌شود که رأس x_{d-4} فرزند پشتیبان ضعیف ندارد. همچنین طبق لم ۲.۱.۵، رأس x_{d-4} فرزند پشتیبان قوی با درجه سه ندارد. فرض کنید x_{d-4} دارای فرزند پشتیبان قوی v باشد به طوری که $\ell_v = \deg(v) - 1 \geq 3$. قرار دهید $T' = T - T_v$. در این صورت به وضوح $f(v) = 2$ و $f|_{T'}$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای درخت T' می‌باشد. بنابراین $\gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T') \leq \gamma_R^P(T) - 2 = \gamma_r(T) - 2$. فرض کنید که g' یک $-\gamma_r(T')$ -تابع باشد. در این صورت تابع g' می‌تواند به یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف روی درخت T با دادن وزن ۲ به v و وزن ۰ سه همسایه آن توسیع داده شود. بنابراین $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2$. در نتیجه در هر دو حالت $\gamma_r(T') = \gamma_r(T) - 2$. بنابراین داریم $\gamma_r(T') = \gamma_R^P(T')$ و لذا $\gamma_R^P(T') \leq \gamma_R^P(T) - 2 = \gamma_r(T) - 2 = \gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T')$.

حال فرض کنید که g' یک $-\gamma_r(T')$ -تابع دلخواه باشد. در این صورت g' می‌تواند به یک $-\gamma_r(T)$ -تابع g با اختصاص دادن وزن ۲ به v و وزن ۰ همسایه‌های برگی آن توسیع داده شود. با توجه به این که $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که g یک $-\gamma_R^P(T)$ -تابع است و لذا g' نیز

یک $\gamma_R^P(T')$ -تابع می‌باشد. بنابراین $\gamma_r(T') \equiv \gamma_R^P(T')$ و لذا طبق فرض استقراء $T', T \in \mathcal{F}$ از T' با عملگر از طرفی چون $\mathcal{O}$ به‌دست می‌آید، نتیجه می‌شود که $T \in \mathcal{F}$.

در ادامه فرض می‌کنیم که برای هر فرزند پشتیبان v از x_{d-4} داشته باشیم $\ell_v < \deg(v) - 1$. قرار دهید $N(x_{d-1}) = \{x_d, y, x_{d-2}\}$. فرض کنید که y یک برگ از درخت $T_{x_{d-4}}$ غیر از x_d باشد و همچنین y در فاصله ماکسیمم از رأس x_{d-4} است. فرض کنید $x_{d-4}y_t \dots y_1 y_0$ کوتاه‌ترین مسیر از y_0 به x_{d-4} باشد. به‌وضوح $t \leq 3$. با توجه به قبل می‌دانیم که $t \notin \{0, 1\}$.

ابتدا فرض کنید $t = 2$. در این‌صورت از لم ۱.۱.۵ نتیجه می‌شود که $\deg(y_1) \geq 3$ و بنابراین y_1 یک رأس پشتیبان قوی می‌باشد. با توجه به این که f یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع می‌باشد و $f(x_{d-4}) = 2$ ، ما می‌توانیم فرض کنیم که $f(y_1) = 2$ و لذا $f(y_2) \neq 0$. بنابراین $\deg(y_2) \geq 3$. اگر y_2 رأس پشتیبان نباشد، آن‌گاه از لم ۱.۱.۵ نتیجه می‌شود که فرزند u از y_2 یک رأس پشتیبان قوی است و لذا می‌توانیم فرض کنیم که $f(u) = 2$. در این‌صورت با تغییر وزن رأس y_2 به 0 یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف با وزن کمتر از $\gamma_r(T)$ به‌دست می‌آید که یک تناقض است. حال فرض کنید که y_2 یک رأس پشتیبان ضعیف باشد. قرار دهید $L(y_2) = \{y'_2\}$. بدون از دست دادن کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که $f(y_2) = 1$ و $f(y'_2) = 0$ در این‌صورت با تغییر وزن y_2 به 0 و رأس y'_2 به 1 ، یک $\gamma_r(T)$ -تابع جدید حاصل می‌شود که احاطه‌گر رومی کامل نیست، که یک تناقض قوی می‌باشد. اگر $\ell_{y_2} = 2$ و $L(y_2) = \{y'_2, y''_2\}$ ، آن‌گاه می‌توانیم فرض کنیم که $f(y_2) = 2$ و $f(y'_2) = f(y''_2) = 0$. در این‌صورت با تغییر وزن رأس y_2 به 0 و تغییر وزن رأس y'_2 و y''_2 به 1 ، یک $\gamma_r(T)$ -تابع جدید به‌دست می‌آید که احاطه‌گر رومی کامل نیست، که یک تناقض است. بنابراین فرض می‌کنیم که $\ell_{y_2} \geq 3$ و لذا $f(y_2) = 2$. در این‌صورت از لم ۲.۱.۵ نتیجه می‌شود که $\deg(y_1) \geq 4$. قرار دهید $T' = T - T_{y_1}$. در این‌صورت به‌وضوح $f(y_1) = 2$ و $f|_{T'}$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای T' می‌باشد و لذا $\gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T') \leq \gamma_R^P(T) - 2 = \gamma_r(T) - 2$. فرض کنید که g' یک $\gamma_r(T')$ -تابع باشد. در این‌صورت می‌توان تابع g' را به یک تابع احاطه‌گر رومی ضعیف برای درخت T با دادن وزن 2 به y_1 و وزن 0 همه همسایه‌های برگ آن توسیع داد. بنابراین $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2$. در نتیجه در هر دو حالت $\gamma_r(T') = \gamma_r(T) - 2$. بنابراین $\gamma_r(T') = \gamma_R^P(T')$ و لذا $\gamma_R^P(T') \leq \gamma_R^P(T) - 2 = \gamma_r(T) - 2 = \gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T')$. حال فرض کنید که g' یک $\gamma_r(T')$ -تابع دلخواه باشد. لذا می‌توان g' را به یک $\gamma_r(T)$ -تابع g با دادن وزن 2 به y_1 و وزن 0 همه همسایه‌های برگ آن توسیع داد. با توجه به این که $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ ، نتیجه می‌گیریم که g یک $\gamma_R^P(T)$ -تابع می‌باشد و لذا g' نیز یک $\gamma_R^P(T')$ -تابع می‌باشد. بنابراین $\gamma_r(T') \equiv \gamma_R^P(T')$ و لذا $T' \in \mathcal{F}$. از طرفی چون T از T' با عملگر $\mathcal{O}$ حاصل می‌شود، نتیجه می‌گیریم که $T \in \mathcal{F}$.

فرض کنید که $t = 3$. با توجه به این که y_0 نقش یکسانی با x_d دارد می‌توانیم فرض کنیم که $\deg(y_2) = \deg(y_3) = 2$ و y_1 یک رأس پشتیبان قوی از درجه سه می‌باشد. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$ و $L(y_1) = \{y'_0, y'_1\}$. در این‌صورت $f|_{T'}$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای

درخت T' است و لذا $\gamma_r(T) - 2 = \gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T') \leq \gamma_R^P(T) - 2 = \gamma_r(T) - 2$. حال فرض کنید که g' یک $-\gamma_r(T')$ تابع باشد. اگر $g'(x_{d-3}) \neq 1$ باشد، آن گاه g' می تواند به یک تابع احاطه گر رومی ضعیف برای درخت T با دادن وزن ۲ به x_d و وزن ۰ به همه ی همسایه های آن توسیع داد. بنابراین $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2$. فرض کنید که $g'(x_{d-3}) = 1$. در این صورت می توان فرض کرد که $g(y_8) = 2$ ، $g(y_2) = 0$ ، $g'(y'_2) = g'(y'_0) = g'(y_0) = 2$ و $g'(x_{d-4}) \neq 2$. اگر $g'(x_{d-4}) = 1$ ، آن گاه می توان g' را به یک $-\gamma_r(T)$ تابع g با تغییر وزن رأس x_{d-4} به ۲ و تغییر وزن x_{d-3} به ۰ و دادن وزن ۲ به x_{d-1} و وزن ۰ به همه همسایه های آن توسیع داد و لذا $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2$. فرض کنید که $g'(x_{d-4}) = 0$. در این صورت می توانیم فرض کنیم که $g'(y_3) = 1$. در این صورت می توان تابع g' را به یک $-\gamma_r(T)$ تابع g با تغییر وزن رأس x_{d-4} به ۲ و تغییر وزن رئوس x_{d-3} و y_3 به ۰ و با دادن وزن ۲ به رأس x_{d-1} و وزن ۰ به همه ی همسایه های آن توسیع داد و لذا $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2$. در نتیجه در همه ی حالات $\gamma_r(T) \leq \gamma_r(T') + 2$. بنابراین $\gamma_r(T') \leq \gamma_r(T) - 2$ و لذا $\gamma_R^P(T') \leq \gamma_R^P(T) - 2 = \gamma_r(T) - 2 = \gamma_r(T') \leq \gamma_R^P(T')$. حالا فرض کنید که g' یک $-\gamma_r(T')$ تابع دلخواه باشد. در این صورت مشابه قبل تابع g' را می توان به یک $-\gamma_r(T)$ تابع g تغییر وزن رأس x_{d-4} به ۲، تغییر وزن x_{d-3} و y_3 به ۰، دادن وزن ۲ به x_{d-1} و دادن وزن ۰ به همه ی همسایه های آن توسیع داد. با توجه به این که $\gamma_r(T) \equiv \gamma_R^P(T)$ ، نتیجه می گیریم که g یک $-\gamma_R^P(T)$ تابع می باشد و لذا g' یک $-\gamma_R^P(T')$ تابع است. بنابراین $\gamma_r(T') \equiv \gamma_R^P(T')$ و لذا طبق فرض استقراء $T' \in \mathcal{F}$. از طرفی T از T' با عملگر $\mathcal{O}_5$ به دست می آید، بنابراین $T \in \mathcal{F}$. $\square$

فصل ۶

پیشنهادهایی برای برخی کارهای آتی

در این فصل پیشنهادهایی برای کارهای آینده ارائه می‌دهیم. در فصل ۲ بخش ۴ نشان دادیم که مساله احاطه‌گری رومی کامل حتی برای گراف‌های دوبخشی نیز NP کامل است، اما این مساله در مورد انواع دیگر گراف‌ها هنوز بررسی نشده است و لذا می‌توان مساله زیر را درآینده مورد بررسی قرار داد.

• **مساله ۱** پیچیدگی مساله احاطه‌گر رومی کامل را در گراف‌های زیر بررسی کنید.

(a) گراف‌های وتری

(b) گراف‌های مسطح

(c) گراف‌های با ماکسیمم درجه ۳

(d) گراف‌های تک دور

در فصل ۳، ما کران قبلی ارائه شده برای عدد احاطه‌گر رومی کامل درختان که توسط هنینگ و همکاران ارائه شده بود را برای درختان با $l \geq 2s - 2$ بهبود دادیم، هم‌چنین در فصل ۲ ما کران‌های قبلی ارائه شده برای عدد احاطه‌گر رومی کامل برای گراف‌ها و تعدادی کران‌های جدید برای این پارامتر بیان کردیم. سوال‌های پیشنهادی ما به شرح زیر می‌باشد:

• **مساله ۲** آیا کران‌های ارائه شده در این رساله را می‌توان در حالت‌های خاص یا به صورت کلی بهبود داد؟

همان‌طور که در فصل ۴ بیان کردیم، یکی از مسائل اساسی در مورد توابع احاطه‌گر رومی کامل بررسی بحرانی بودن این پارامتر است که تاثیر حذف و اضافه کردن رأس یا یال بر روی عدد احاطه‌گر رومی کامل یک گراف است. وانگ و همکاران در [۲۸] تمام درختانی که با حذف رأس عدد احاطه‌گر رومی کامل آن‌ها تغییر نمی‌کند را مشخص کرد و این درختان را احاطه‌گر رومی کامل پایدار نامیدند. همچنین همه‌ی درختان یال بحرانی (درختانی که با افزودن یال عدد احاطه‌گر رومی کامل آن‌ها کاهش پیدا می‌کند) را مشخص کردیم، سوالات بسیاری در این زمینه هنوز مورد بررسی قرار نگرفته‌اند، به چند نمونه از این مسائل اشاره می‌کنیم:

فرض کنید G دور C_4 باشد، در این صورت به‌وضوح $\gamma_R^P(G) = 3$. فرض کنید G' گرافی باشد که با افزایش یک یال جدید دلخواه از دور C_4 حاصل شود در این صورت به‌وضوح $\gamma_R^P(G) = 2$. لذا طبق تعریف G' یک گراف γ_R^P -یال بحرانی می‌باشد. حال سؤالی که پیش می‌آید مشخص کردن همه‌ی گراف‌های γ_R^P -یال بحرانی است که به صورت زیر مطرح می‌شود.

- **مسئله ۳** همه‌ی گراف‌های یال بحرانی را مشخص کنید.
- **مسئله ۴** گراف‌هایی که با حذف هر رأس از آن‌ها عدد احاطه‌گر رومی کامل آن‌ها افزایش پیدا می‌کند را مشخص کنید.
- اکنون فرض کنید $G = P_4$ باشد در این صورت $\gamma_R^P(G) = 2$ است. همچنین با حذف هر رأس از P_4 یک گراف تک رأس حاصل می‌شود و لذا عدد احاطه‌گری رومی کامل آن برابر یک می‌شود، در نتیجه این عدد کاهش می‌یابد. حال سؤالی که پیش می‌آید این است که گراف‌هایی که با حذف هر رأس از آن عدد احاطه‌گری رومی کامل آن‌ها کاهش پیدا می‌کند، دارای چه خواصی می‌باشند و در این صورت در حالت کلی سؤال زیر مطرح می‌شود.
- **مسئله ۵** گراف‌هایی که با حذف هر رأس از آن‌ها عدد احاطه‌گر رومی کامل آن‌ها کاهش پیدا می‌کند را تعیین کنید.
- فرض کنید G یک گراف دلخواه و e یالی بین دو رأس x و y باشد. همچنین در نظر بگیرید f یک $\gamma_R^P(G) - 1$ تابع است و نیز فرض کنید $G - e$ گراف حاصل از G با حذف یال e باشد. در این صورت اگر $\{f(x), f(y)\} \neq \{0, 2\}$ آن‌گاه $f|_{G-e}$ یک تابع احاطه‌گر رومی کامل برای گراف $G - e$ می‌باشد، در این صورت داریم،

$$\gamma_R^P(G - e) \leq w(f|_{G-e}) = w(f) = \gamma_R^P(G). \quad (1.6)$$

حال فرض کنید $\{f(x), f(y)\} = \{0, 2\}$ بدون کاسته شدن از کلیت مسئله فرض کنید $f(x) = 0$ و $f(y) = 2$ در این صورت تابع g با ضابطه $g(x) = 1$ و برای $w \neq x$ داشته

باشیم $g(w) = f(w)$ ، یک تابع احاطه‌گری رومی کامل برای گراف $G - e$ می‌باشد و در نتیجه داریم،

$$\gamma_R^P(G - e) \leq w(g) = w(f) + 1 = \gamma_R^P(G) + 1. \quad (2.6)$$

بنابراین از روابط (۱.۶) و (۲.۶) نتیجه می‌شود که،

$$\gamma_R^P(G - e) - 1 \leq \gamma_R^P(G).$$

از طرفی برای گراف $G = K_{1,2}$ داریم، $\gamma_R^P(G) = 2$. فرض کنید G' گرافی باشد که با حذف هر یال از G بدست می‌آید، در این صورت $\gamma_R^P(G') = 3$. همچنین اگر $G = P_2$ باشد، آن‌گاه $\gamma_R^P(G') = 2$ و با حذف تک یال از گراف، عدد احاطه‌گر رومی کامل آن تغییری نمی‌کند و لذا سؤال زیر مطرح می‌شود.

• **مسئله ۶** تاثیر حذف یک یال از گراف بر روی عدد احاطه‌گر رومی کامل آن را بررسی کنید.

اکنون فرض کنید $G = K_{1,2}$ در این صورت $\gamma_R^P(G) = 2$ است، همچنین افزودن تک یال $e \in \bar{G}$ به G دور C_3 حاصل می‌شود که عدد احاطه‌گر رومی کامل آن نیز ۲ می‌باشد و لذا این عدد تغییر نمی‌کند و بنابراین سؤال زیر را می‌توان پیشنهاد داد.

• **مسئله ۷** تمام گراف‌هایی که با اضافه کردن هر یال $e \in \bar{G}$ عدد احاطه‌گر رومی کامل آن‌ها بدون تغییر باقی می‌ماند را مشخص کنید.

در فصل ۵ در مورد رابطه عدد احاطه‌گر رومی کامل و عدد احاطه‌گری رومی ضعیف صحبت کردیم و تمام درختانی که عدد احاطه‌گری رومی کامل و عدد احاطه‌گر رومی ضعیف آن‌ها قویاً برابر هستند را تعیین کردیم. اکنون اگر فرض کنید $G = C_3$ در این صورت $\gamma_R(G) = \gamma_R^P(G) = 2$ و همچنین به‌وضوح $\gamma_R(G) \equiv \gamma_R^P(G)$. بنابراین می‌توان مسئله زیر را پیشنهاد داد.

• **مسئله ۸** همه‌ی گراف‌هایی که عدد احاطه‌گر رومی کامل و عدد احاطه‌گر رومی آن‌ها قویاً برابر است را مشخص کنید.

مراجع

- [1] J. D. Alvarado, S. Dantas and D. Rautenbach, Strong equality of Roman and weak Roman domination in trees, *Discrete Appl. Math*, **208** (2016), 19-26.
- [2] R. A. Beeler, T. W. Haynes and S. T. Hedetniemi, Double Roman domination, *Discrete Applied Math*, (2016), 2-8.
- [3] S. Bermudo, H. Fernau and J. M. Sigarreta, The differential and the Roman domination number of a graph. *Appl. Anal. Discret. Math*, **8** (2014), 155-171.
- [4] E. W. Chambers, B. Kinnersley, N. Prince and D.B. West, Extremal problems for Roman domination, *SIAM J. Discrete Math*, **23** (2009), 1575-1586.
- [5] M. Chellali, T. Haynes, S. T. Hedetniemi and A. McRae, Roman 2-domination, *Discrete Appl. Math*, **204** (2016), 22-28.
- [6] M. Chellali, N. J. Rad, Strong equality between the Roman domination and independent Roman domination numbers in trees, *Discuss. Math. Graph Theory*, **33** (2013), 337-346.
- [7] E. J. Cockayne, P. A. Dreyer, S. M. Hedetniemi and S. T. Hedetniemi, Roman domination in graphs, *Discrete Math*, **278** (2004), 11-22.
- [8] S. A. Cook. *The complexity of theorem-proving procedures*, In *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*, (1971), 151-158.
- [9] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.
- [10] A. Hansberg, N. Jafari Rad and L. Volkmann, Characterization of Roman domination critical unicyclic graphs, *Utilitas Math*, **86** (2011), 129-146.

-
- [11] A. Hansberg, N. Jafari Rad and L. Volkmann, Vertex and edge critical Roman domination in graphs, *Utilitas Math*, **92** (2013), 73-88.
 - [12] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi and P. J. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, Marcel Dekker, Inc, New York, 1998.
 - [13] T. W. Haynes, M. A. Henning and P. J. Slater, Strong equality of domination parameters in trees, *Discrete Math*, **260** (2003), 77-87.
 - [14] M. A. Henning and W. F. Klostermeyer, Perfect Roman domination in regular graphs, *Appl. Anal. Discrete Math*, **12** (2018), 143-152.
 - [15] M. A. Henning and W. F. Klostermeyer, Italian domination in trees, *Discrete Appl. Math*, **217** (2017), 557-564.
 - [16] M.A. Henning, W.F. Klostermeyer, G.M. Gillivray c, Perfect Roman domination in trees, *Discrete Appl. Math*, **236** (2018), 235-245.
 - [17] M. A. Henning and L. Volkmann, Signed Roman k-domination in graphs, *Graphs and Combinatoric*, (2015), 1536-3.
 - [18] N. Jafari Rad, Critical concept for 2-rainbow domination in graphs, *Australas. J. Combin*, **51** (2012), 49-60.
 - [19] N. Jafari Rad, Roman domination critical graphs upon edge subdivision, *J. Combin. Math. Combin. Comput*, **93** (2015), 227-245.
 - [20] R. M. Karp, *Reducibility among combinatorial problems*, Springer, (1972).
 - [21] K. Klammerlin and L. Volkmann, Roman k-domination in graphs, *J. Korean Math. Soc*, **46** (2009), 1309-1318.
 - [22] C. -H. Liu and G. J. Chang, Roman domination on strongly chordal graphs, *Journal of Combinatorial Optimization*, **26** (2013), 608-619.
 - [23] M. Valveny, H. Pérez-Rosés and J.A. Rodriguez-Velázquez, On the weak Roman domination number of lexicographic product graphs. *Discrete Appl. Math*, **263** (2019), 257-270.
 - [24] R. Pushpam and P. Sampath, Restrained Roman domination in graphs, *Trans. Comb*, **4** (2015), 1-17.

- [25] N. J. Rad and C. -H. Liu, Trees with strong equality between the Roman domination number and the unique response Roman domination number, *Australas. J. Combin.*, **54** (2012), 133-140.
- [26] ReVelle and K. E. Rosing, Defendens imperium romanum: a classical problem in military strategy, *Amer. Math. Monthly*, **107** (7) (2000), 585-594.
- [27] I. Stewart, Defend the Roman Empire!, *Sci. Amer*, **281** (6) (1999), 136-139.
- [28] Z. Li, Z. Shao, Y. Rao, P. Wu and S. Wang, The characterization of perfect Roman domination stable trees, to appear.
- [29] W. W. R. Ball, Mathematical recreation and problems of past and present times, *Mack Millan*, (1982).

پیوست آ

جدول ۱.۰: نمادها

نماد	نام
G	گراف
T	درخت
V	مجموعه رأس‌ها
E	مجموعه یال‌ها
K_n	گراف کامل
C_n	دور n رأسی
$K_{n,m}$	گراف دوبخشی کامل
$N_G(v)$	همسایگی باز رأس v در G
$N_G[v]$	همسایگی بسته رأس v در G
$\deg_G(v)$	درجه رأس v در G
$\Delta(G)$	ماکسیمم درجه گراف G
$\delta(G)$	مینیمم درجه گراف G
$G[s]$	زیرگراف القایی تولید شده توسط s در G
$\bar{G}$	مکمل گراف G
P_n	مسیر n رأسی
$d_G(u, v)$	فاصله بین دو رأس u و v
$\text{diam}(G)$	قطر گراف G
$g(G)$	کمر گراف G
T_v	زیردرخت ریشه‌دار شده در رأس v
$W(f)$	وزن تابع f
$f(x)$	وزن رأس x تحت تابع f
$\gamma(G)$	عدد احاطه‌گر گراف G
$\gamma_P(G)$	عدد احاطه‌گری کامل گراف G
$\gamma_R(G)$	عدد احاطه‌گری رومی گراف G
$\gamma_R^P(G)$	عدد احاطه‌گری رومی کامل گراف G
$\gamma_r(G)$	عدد احاطه‌گری رومی ضعیف گراف G

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Polynomial-time algorithm	الگوریتم زمان-چندجمله‌ای
Size	اندازه
Leaf	برگ
Maximum degree	بیشترین درجه
Father	پدر
Complexity	پیچیدگی
Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی
Weak Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی ضعیف
Perfect Roman domination function	تابع احاطه‌گر رومی کامل
Degree	درجه
Tree	درخت
Rooted tree	درخت ریشه‌دار
Cycle	دور
Vertex	رأس
Pendant degree	رأس آویخته
Support degree	رأس پشتیبان
Strong support vertex	رأس پشتیبان قوی
Central vertex	رأس مرکزی
Isolated vertex	رأس منفرد
Root	ریشه
Subdivision	زیرتقسیم
Subtree	زیردرخت
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Star	ستاره
Double star	ستاره دوگانه

Loop	طوقه
Distance	فاصله
Domination number	عدد احاطه‌گر
Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی
Weak Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی ضعیف
Perfect Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی کامل
Perfect domination number	عدد احاطه‌گر کامل
Child	فرزند
Diameter	قطر
Girth	کمر
Minimum degree	کمترین درجه
Graph	گراف
Perfect Roman domination stable graph	گراف احاطه‌گر رومی کامل پایدار
Trivial graph	گراف بدیهی
Bipartite graph	گراف دو بخشی
Complete bipartite graph	گراف دو بخشی کامل
Simple graph	گراف ساده
Complete graph	گراف کامل
Finite graph	گراف متناهی
Complement graph	گراف مکمل
Regular graph	گراف منتظم
Chordal graph	گراف وتری
Weighted graph	گراف وزن‌دار
Connected graph	گراف همبند
Walk	گشت
Adjacent	مجاور
Dominating set	مجموعه احاطه‌گر
Perfect dominating set	مجموعه احاطه‌گر کامل
Order	مرتبه
Path	مسیر
NP-complete problem	مسئله NP-کامل
Open neighborhood	همسایه باز

Closed neighborhood	همسایه بسته
Edge	یال
Parallel edges	یال موازی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Adjacent	مجاور
Bipartite graph	گراف دو بخشی
Central vertex	رأس مرکزی
Child	فرزند
Chordal graph	گراف وتری
Closed neighborhood	همسایه بسته
Complete graph	گراف کامل
Complete bipartite graph	گراف دو بخشی کامل
Complement graph	گراف مکمل
Complexity	پیچیدگی
Connected graph	گراف همبند
Cycle	دور
Degree	درجه
Diameter	قطر
Distance	فاصله
Dominating set	مجموعه احاطه‌گر
Domination number	عدد احاطه‌گر
Double star	ستاره دو گانه
Edge	یال
Father	پدر
Finite graph	گراف متناهی
Girth	کمر
Graph	گراف
Induced subgraph	زیرگراف القایی
Isolated vertex	رأس منفرد

Leaf	برگ
Loop	طوقه
Maximum degree	بیشترین درجه
Minimum degree	کمترین درجه
NP-complete problem	مسأله NP - کامل
Open neighborhood	همسایه باز
Order	مرتبه
Parallel edges	یال‌های موازی
Path	مسیر
Pendant vertex	رأس آویخته
Perfect dominating set	مجموعه احاطه‌گر کامل
Perfect domination number	عدد احاطه‌گر کامل
Perfect Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی کامل
Perfect Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی کامل
Perfect Roman domination stable graph	گراف احاطه‌گر رومی کامل پایدار
Polynomial-time algorithm	الگوریتم زمان - چندجمله‌ای
Regular graph	گراف منتظم
Roman dominating function	تابع احاطه‌گر رومی
Roman domination number	عدد احاطه‌گر رومی
Root	ریشه
Rooted tree	درخت ریشه‌دار
Simple graph	گراف ساده
Size	اندازه
Star	ستاره
Strong support vertex	رأس پشتیبان قوی
Subdivision	زیر تقسیم
Subtree	زیردرخت
Support vertex	رأس پشتیبان
Tree	درخت
Trivial graph	گراف بدیهی
Vertex	رأس
Walk	گشت

Weak Roman dominating function.....	تابع احاطه‌گر رومی ضعیف.....
Weak Roman domination number.....	عدد احاطه‌گر رومی ضعیف.....
Weighted graph.....	گراف وزن‌دار.....

نمایه

عدد احاطه گر رومی، ۵	الگوریتم زمانی چندجمله‌ای، ۱۷
عدد احاطه گری، ۴	مسأله NP - کامل، ۱۷
عدد احاطه گری رومی ضعیف، ۶	پشتیبان قوی، ۲
عدد احاطه گری رومی کامل، ۵	گراف احاطه گر رومی کامل پایدار، ۳۳
فاصله، ۳	اندازه، ۲
فرزند، ۴	برگ، ۲
قطر، ۳	تابع احاطه گر رومی، ۵
ماکسیمم درجه، ۲	تابع احاطه گر رومی ضعیف، ۶
مجموعه احاطه گر کامل، ۴	تابع احاطه گر رومی کامل، ۵
مجموعه احاطه گر، ۴	درجه، ۲
مرتبه، ۲	درخت، ۳
مسأله NP - سخت، ۱۷	درخت ریشه دار، ۴
مسیر، ۳	دور، ۳
مینیمم درجه، ۲	رأس، ۲
نوردهوس - گدوم، ۱۶	رأس آویزان، ۲
همسایگی باز، ۲	رأس منفرد، ۲
همسایگی بسته، ۲	رأس پشتیبان، ۲
پدر، ۴	ریشه درخت، ۴
کمر، ۳	زیر تقسیم، ۲
گراف، ۲	زیرگراف القایی، ۲
گراف وتری، ۳	زیردرخت، ۴
گراف دوبخشی، ۳	ستاره مضاعف، ۴
گراف دوبخشی کامل، ۳	صدق پذیری، ۱۷
گراف ساده، ۲	طوقه، ۲
گراف غیربدیهی، ۳	عدد احاطه گر کامل، ۴

گراف متناهی، ۲

گراف منتظم، ۳

گراف مکمل، ۳

گراف همبند، ۳

گراف وزن دار، ۴

گراف کامل، ۳

گشت، ۳

یال، ۲

یال های موازی، ۲

Abstract

A perfect Roman dominating function on a graph G is a function $f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$ satisfying the condition that every vertex u with $f(u) = 0$ is adjacent to exactly one vertex v for which $f(v) = 2$. The weight of a perfect Roman dominating function f is the sum of the weights of the vertices. The perfect Roman domination number of G , denoted $\gamma_R^P(G)$, is the minimum weight of a perfect Roman dominating function in G . In this thesis, we study this parameter and present some new bounds for it. Then, we show that the PERFECT ROM-DOM problem is NP-complete, even when restricted to bipartite graphs. Also, we will improve some of previous given bounds and especially we present a new upper bound for the class of trees. Moreover, we characterize the class of perfect Roman domination edge critical trees. Finally, we provide a constructive characterization of the trees for which the perfect Roman domination number strongly equals the weak Roman domination number.

Keywords:

Domination number, Roman domination number, Perfect Roman domination number, Weak Roman domination number, Graph, Tree.



Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in Applied Mathematics-Graph Theory

On the perfect Roman domination number in some classes of graphs

By: Mahsa Darkooti

Supervisors:

Dr. Sadegh Rahimi Sherbaf

Dr. Abdollah Alhevaz

Advisor:

Dr. Hadi Rahbani

January 2020