

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته ریاضی کاربردی، گرایش گراف و ترکیبیات

رساله دکتری

عنوان بررسی ساختارهای کدهای LDPC شبه-دوری یال-یگانه و یال-چندگانه

نگارنده: فرزانه امیرزاده دانا

استادان راهنما

دکتر میثم علیشاهی
دکتر محمدرضا رفسنجانی صادقی

خرداد ۱۳۹۸



فرم شماره 12: صورت جلسه دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

بدینوسیله گواهی می شود خانم فرزانه امیرزاده دانا دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی به شماره دانشجویی 9400105 ورودی مهر ماه سال 1394 در تاریخ 1398/3/1 از رساله خود با عنوان: بررسی ساختارهای کدهای LDPC شبه دوری یال یگانه و یال چندگانه دفاع و با اخذ نمره عالی به درجه دکتری نائل گردید.

☒ الف) درجه عالی: نمره 19-20	☐ ب) درجه بسیار خوب: نمره 18/99 - 17
☐ ج) درجه خوب: نمره 16/99 - 15	☐ د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد
☐ ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد	

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
1	دکتر میثم علیشاهی	استاد راهنمای اول	دانشیار	
2	دکتر محمدرضا رفسنجانی صادقی	استاد راهنمای دوم	دانشیار	
3	دکتر ابراهیم هاشمی	استاد مدعو داخلی	استاد	
4	دکتر عبدالله آل هوز	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
5	دکتر محمد غلامی	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
6	دکتر مهدی قوتمند	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم بعمل آید.

رئیس دانشکده و رئیس هیئت داوران: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء:



تقدیم به:

پدر و مادر عزیزتر از جانم

با سپاس فراوان از:

پدر بزرگوارم

مادر مهربانم

واساتید گرامیم

فرزانه امیرزاده دانا
خرداد ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب فرزانه امیرزاده دانا دانشجوی دکتری رشته ریاضی کاربردی علوم ریاضی دانشگاه شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان
بررسی ساختارهای کدهای LDPC شبه-دوری یال-یگانه و یال-چندگانه، تحت راهنمایی
میثم علیشاهی و محمدرضا رفسنجانی صادقی متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

فرزانه امیرزاده دانا

خرداد ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

کدهای شبه-دوری کم-چگال به دلیل قابلیت بالای پیاده سازی بر روی انواع سخت افزارها و در نتیجهی سرعت بالا در ارسال و دریافت اطلاعات از جمله کدهای پرکاربرد و محبوب در زمینه مخابرات و کدگذاری محسوب می‌شوند. کدهای شبه-دوری کم-چگال از روی یک گراف اولیه ساخته می‌شوند و در واقع اهمیت این نوع از کدها، کوچک بودن گراف اولیه کد و در نتیجه امکان بررسی هرچه بیشتر آن و یا طراحی هرچه دقیق تر کد است. از جمله پارامترهای مهم یک کد شبه-دوری که در کارکرد آن تاثیر بسزایی دارد دارا بودن کمر بالا و طول به نسبت کوچک آن است. هر اندازه طول یک کد شبه-دوری (با فرض ثابت بودن کمر گراف تر نظیر کد) کوتاهتر باشد، هزینه کدگذاری و نیز کدگشایی کمتری دارد. از دیگر موارد تاثیرگذار بر کارایی یک کد وجود یا عدم وجود مجموعه‌های تله‌ای کوچک اولیه در گراف تر نظیر آن کد است. شبیه سازی کامپیوتری از کارایی کدها نشان می‌دهد هر اندازه از وجود این گونه از مجموعه‌های تله‌ای در گراف تر کد اجتناب شود، کارایی کد (در کانال‌های گاوسی و الگوریتم‌های کدگشایی تکراری)، به ویژه در ناحیه کف خطا، به مراتب بهبود می‌یابد. شناخت این مجموعه‌های تله‌ای اولیه و نحوه‌ی اجتناب از آن‌ها از مسائل به روز در زمینه کدگذاری است.

کدهای شبه-دوری با ماتریس بررسی-توازن کم-چگال منظم ساخته شده از روی یک گراف اولیه کامل دوبخشی ساده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. کدهای ساخته شده از روی گراف اولیه ساده کدهای شبه-دوری کم-چگال یال-یگانه نامیده می‌شوند. به منظور ساختن این کدها با کمر مشخص، شرایط لازم و کافی برای ماتریس‌های نمایه را باید بررسی کنیم. هدف ما پیدا کردن تمام ماتریس‌های نمایه‌ی غیر یکرخت با کمترین درجه بسط، کمرهای ۶ تا ۱۲ و توزیع درجه‌ی مشخص می‌باشد. در راستای رسیدن به این هدف ماتریس‌های تفاضل را معرفی می‌کنیم که کمک شایانی در کاهش پیچیدگی محاسباتی برای ساخت ماتریس‌های نمایه می‌کنند. در نهایت، شمار زیادی از کدهای غیر یکرخت جستجو شده (با کمر، توزیع درجه و طول کمینه یکسان) در چندین جدول آورده شده است.

سپس، کدهای کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با کمر ۶ را مورد بررسی قرار می‌دهیم که از گسترش گراف‌های اولیه یال-چندگانه به وجود می‌آیند. شرایط لازم و کافی برای ماتریس‌های نمایه کدها به دست می‌آوریم که بررسی دوره‌های با طول ۴ را در یک ماتریس نمایه ساده می‌کند. همانند کدهای یال-یگانه، ماتریس‌های تفاضل را در این ساختار معرفی می‌کنیم. در نتیجه‌ی این بررسی، یک کران پایین روی درجه بسط به دست می‌آید که برای کدهای کم-چگال شبه-دوری منظم و نامنظم با کمر ۶ می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. به علاوه، ماتریس‌های نمایه‌ای ارائه می‌دهیم که درجه بسط آن‌ها برابر کران پایین به دست آمده است و در مقایسه با کدهای کم-چگال شبه-دوری یال-یگانه، کدهای کم-چگال شبه-

دوری یال-چندگانه‌ی به دست آمده طول کوتاه‌تر دارند. علاوه بر این، روشی برای ساخت کدها ارائه می‌کنیم که اندازه فضای جستجو برای به دست آوردن ماتریس نمایه را کاهش دهد. در پایان، مجموعه‌های تله‌ای اولیه در گراف تنر متناظر با کدهای کم-چگال متغیر-منظم را بررسی می‌کنیم. با استفاده از مفاهیم اساسی در نظریه گراف، پارامترهای این مجموعه‌ها که اندازه‌ی مجموعه تله‌ای اولیه و تعداد رئوس بررسی با درجه یک می‌باشند را بررسی کرده و نتایج به دست آمده در این زمینه را بهبود می‌بخشیم.

کلمات کلیدی: کدهای کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه، کدهای کم-چگال شبه-دوری یال-یگانه، ماتریس بررسی-توازن، کمینه فاصله‌ی کد، گراف تنر، گراف دوبخشی، کمر، مجموعه‌های تله‌ای، مجموعه‌های تله‌ای اولیه.

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. F. Amirzade and M.-R Sadeghi, "Analytical lower bounds on the size of elementary trapping sets of variable-regular LDPC codes with any girth and irregular ones with girth 8," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 66, no. 6, pp. 2313–2321, 2018.
2. F. Amirzade and M.-R Sadeghi, lower bounds on the lifting degree of QC-LDPC codes by difference matrices, *IEEE Access*, vol. 6, pp. 23688–23700, 2018. .
3. M.-R Sadeghi and F. Amirzade, Analytical lower bound on the lifting degree of multiple-edge QC-LDPC codes with girth 6, *IEEE Commun. Lett.*, vol. 6, pp. 23688–23700, 2018.
4. F. Amirzade, M. Alishahi and M.-R. Sadeghi, A reduction in the search space of QC-LDPC codes with girth 8, *Journal of Algebraic Systems*, vol. 7, no. 2, pp 271–280, 2019.
5. F. Amirzade, M. Alishahi and M.-R. Sadeghi, An Algebraic Construction of QC-LDPC Codes Based on Powers of Primitive Elements in a Finite Field and Free of Small ETs, *Algebraic Structures and Their Applications*, vol. 6, no. 1, pp. 127–138, 2019.

فهرست مطالب

ف	فهرست تصاویر
۱	۱ تاریخچه
۷	۲ تعاریف و مقدمات
۷	۱.۲ تعاریف مورد نیاز از نظریه‌ی گراف
۹	۲.۲ تعاریف مورد نیاز از نظریه‌ی کد
	۱.۲.۲ کدهای بررسی-توازن کم-چگال ساخته شده از روی گراف پایه
۱۱	دوبخشی
	۲.۲.۲ کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-یگانه و یال-
۱۳	چندگانه
۱۸	۳.۲ مجموعه‌های تله‌ای اولیه در گراف تنر
۲۱	۳ کران‌های پایین روی درجه بسط کدهای QC-LDPC یال-یگانه
۲۳	۱.۰.۳ بررسی دور با طول ۴ با استفاده از ماتریس‌های تفاضل
۲۳	۲.۰.۳ بررسی دور با طول ۶ با استفاده از ماتریس‌های تفاضل
۲۹	۳.۰.۳ بررسی دور با طول ۸ با استفاده از ماتریس‌های تفاضل
۳۷	۴.۰.۳ بررسی دور با طول ۱۰ با استفاده از ماتریس‌های تفاضل
۴۵	۴ کران‌های پایین روی درجه بسط کدهای QC-LDPC یال-چندگانه
۵۳	۵ کران پایین روی مجموعه تله‌ای مقدماتی کدهای LDPC
۵۴	۱.۰.۵ چند خاصیت مشترک مجموعه‌های تله‌ای مقدماتی
	۲.۰.۵ کران‌های پایین روی اندازه ETS های کدهای بررسی-توازن کم-
۵۶	چگال متغیر-منظم با کمر $g \geq 8$
	۳.۰.۵ کران پایین روی اندازه ETS ها در کدهای بررسی-توازن کم-
۶۰	چگال متغیر-منظم و نامنظم با کمر ۸

۴۰.۵	کران پایین روی اندازه ETS ها در کد بررسی- توازن کم- چگال
۶۵	متغیر- منظم با کمر ۱۰
۷۱	مراجع
۷۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۷۹	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۱۲	گراف پایه و گراف گسترش یافته متناظرش	۱.۲
۱۷	گراف پایه متناظر با ماتریس پایه	۲.۲
۱۹	گراف رأس-متغیر و مجموعه تله‌ای مقدماتی متناظرش	۳.۲
	ETS $(2\gamma-1, \gamma)$ ها در کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر	۱.۵
۶۱	۸ و وزن ستونی $\gamma=3, \gamma=4, \gamma=5$ و $\gamma=6$	
	(e) و (f) یک ETS $(7,5)$ و یک ETS $(7,6)$ به دست آمده از یک ETS	۲.۵
۶۴	(۷,۴) نمایش داده شده در شکل ۱.۵ (b) است.	
	(g) یک ETS $(4,1)$ با $d(v) \in \{2,3\}$ است، (h) یک ETS $(4,2)$ با $d(v) \in$	۳.۵
	$\{2,4\}$ است، (i) یک ETS $(4,3)$ با $d(v) \in \{2,5\}$ است و (j) یک ETS	
۶۵	(۴,۳) با $d(v) \in \{2,3,4\}$ است.	
	(a) یک گراف رأس-متغیر متناظر با یک ETS $(7,5)$ با $\gamma=3$ است، (b)	۴.۵
	یک گراف رأس-متغیر متناظر با یک ETS $(11,1)$ با $\gamma=3$ است و (c) یک	
۶۹	گراف رأس-متغیر متناظر با یک ETS $(13,10)$ با $\gamma=4$ است.	

فصل ۱

تاریخچه

نظریه معروف شانون در سال ۱۹۴۸ در مقاله‌ای با عنوان ”یک نظریه ریاضی در تبادل اطلاعات“ به چاپ رسید [۴۵]. او ثابت کرد که اولاً: ”تمامی منابع ارسال اطلاعات^۱ دارای یک نرخ ارسال اطلاعات هستند و این نرخ را می‌توان با واحد بیت بر ثانیه^۲ اندازه‌گیری کرد“. ثانياً: ”تمامی کانال‌های ارتباط دیجیتال دارای یک حداکثر ظرفیت^۳ هستند که این ظرفیت را نیز می‌توان با همان واحد بیت بر ثانیه اندازه‌گیری نمود“. او در ادامه نشان داد که منابع ارسال اطلاعات می‌توانند اطلاعات ارسالی را با یک احتمال خطا ارسال کنند و این احتمال خطا را می‌توان تا جایی پائین آورد که حجم اطلاعات ارسالی از ظرفیت کانال بالاتر نرود.

اگرچه شانون بطور تئوری محدوده‌ی حداکثری ارسال اطلاعات را در کانال تعیین کرد اما در عمل این نظریه بطور دقیق قابل پیاده‌سازی نیست. می‌توان گفت تلاش‌ها برای پیدا کردن کدهایی با عملکرد و کارایی^۴ نزدیک به ظرفیت کانالی که شانون معرفی نمود از همان ابتدا شروع شد و تا کنون مقالات، کتب و مستندات بسیاری در این زمینه ارائه شده است. اگرچه پیشرفت‌های زیادی در این زمینه حاصل شده است اما مسأله‌ی اصلی هنوز به قوت خود باقی است.

از جمله تلاش‌های صورت گرفته در این زمینه می‌توان به طراحی کدهای تصحیح‌کننده‌ی

^۱Information Sources

^۲Bit Per Second

^۳Capacity

^۴Performance

خطا^۵ اشاره کرد. تکنیک طراحی این نوع از کدها را می‌توان به سه دسته عمده تقسیم کرد. دسته اول شامل آن دسته از کدهایی است که در صورت بروز خطا، بخش کدگشای^۶ آن‌ها بطور متناوب از منبع ارسال اطلاعات، درخواست تکرار ارسال اطلاعات^۷ می‌کند. دسته دوم شامل آن دسته از کدهایی می‌شود که کدگذار^۸ سعی دارد از همان ابتدا و در بخش کدگذاری^۹ با اضافه کردن هوشمندانه بیت‌های اضافه^{۱۰} طوری اطلاعات را کد کند که بخش کدگشا با استفاده از این اطلاعات (در صورت بروز خطا) اطلاعات اصلی را بازیابی کند و نیازی به درخواست مجدد نداشته باشد. این روش کدگذاری را از آنجائی که نیازی به درخواست مجدد ندارد، اصطلاحاً روش تصحیح خطای پیشرو^{۱۱} می‌نامند. دسته سوم ترکیبی از این دو می‌باشد^{۱۲}. از بین این سه قسمت عمده، طراحی کدهای با تصحیح خطای پیشرو به دلیل سرعت بالا و هزینه ارسال اطلاعات کمتر با استقبال بیشتری روبه رو شده است. گولی^{۱۳} در سال ۱۹۴۹ [۱۶]، همینگ^{۱۴} در سال ۱۹۵۰ [۱۸]، سولومون^{۱۵} در سال ۱۹۵۴ [۴۲]، و مولر^{۱۶} در سال ۱۹۵۴ [۳۷] از جمله افراد پیشگام در عرصه طراحی کدهای با تصحیح خطای پیشرو بودند. همچنین کدهای اولیه‌ی طراحی شده توسط آن‌ها از نوع کدهای بلوکی خطی دودویی^{۱۷} بودند. اولین بار گالاگر^{۱۸} در سال ۱۹۶۲ [۱۴]، کدهای بلوکی خطی دودویی با ماتریس بررسی-توازن کم-چگال^{۱۹} را معرفی نمود. در واقع، کار گالاگر طراحی هوشمندانه نوعی الگوریتم کدگشا بود که با در نظر گرفتن کدهایی با ماتریس بررسی-توازن کم-چگال، قادر بود میزان زیادی از خطاها را در یک زمان معقول برطرف کرده و احتمال خطای عمل کدگشایی را بسیار پائین بیاورد. در واقع، با این الگوریتم و با انتخاب یک کد مناسب، نرخ ارسال اطلاعات، بسیار به ظرفیت کانال (حد بیشینه‌ای که شانون تعیین کرده بود) نزدیک می‌شد. علی‌رغم میزان کارایی بالای کدهای کم‌چگال و الگوریتم آن‌ها، کار بر روی این نوع از کدها و توجه به آن‌ها تا اواخر دهه ی ۱۹۹۰ میلادی بی‌ثمر ماند. تنها در سال ۱۹۸۱، تنر^{۲۰} در [۴۷]، به وجود یک رابطه ی تنگاتنگ بین ماتریس بررسی-توازن یک کد کم-چگال و گراف دوبخشی^{۲۱}

⁵Error Correcting Codes

⁶Decoder

⁷Automatic Repeat Requests (ARQ)

⁸Encoder

⁹Encoding

¹⁰Redundancy Bits

¹¹Forward Error Correcting

¹²Hybrid ARQ

¹³Golay

¹⁴Hamming

¹⁵Reed-Solomon

¹⁶Muller

¹⁷Binary Linear Block Codes

¹⁸Gallager

¹⁹Low Density Parity-Check Matrix

²⁰Tanner

²¹Bipartite Graph

نظیر آن اشاره نمود. این گراف دوبخشی به گراف تنر^{۲۲} معروف شد. نگاه گرافی به ماتریس بررسی-توازن کدهای خطی، یک راهنمای بزرگ برای تنر و دیگر افرادی شد که قصد پژوهش بر روی کدهای با ماتریس بررسی-توازن کم-چگال را داشتند. برای مطالعه بیشتر می‌توان به [۳۲، ۳۵] مراجعه کرد.

در اواخر دهه ی ۱۹۹۰ میلادی، افرادی مانند وایبرگ^{۲۳} [۵۴، ۵۳]، نیل^{۲۴} [۳۴] و مک کی^{۲۵} [۳۳، ۳۴] توجه دوباره ی خود را به کار گالاگر و همچنین مقاله ی تنر معطوف کردند. این بار کدهای با ماتریس بررسی-توازن کم-چگال، به نوعی، حیات دوباره پیدا کردند. دانشمندان و محققین به اهمیت آن‌ها با نام خلاصه شده ی LDPC بیش از پیش پی برده و سعی در بهبود دادن عملکرد این نوع از کدها نمودند.

تلاش و اقدامات بعد از دهه ی ۱۹۹۰ در راستای بالا بردن کارایی کدهای کم چگال را می‌توان به چهار بخش کلی تفکیک نمود. بخش نخست مربوط به بهبود روش کد کردن است. و راه معمول برای کد کردن پیام، ضرب بردار پیام^{۲۶} در ماتریس مولد^{۲۷} می‌باشد. عمل کد کردن پیام در کدهای با ماتریس بررسی-توازن کم-چگال را نیز می‌توان از روی ماتریس بررسی-توازن آن‌ها انجام داد [۲۳]. بخش دوم را می‌توان به طراحی یک ماتریس بررسی-توازن خوب برای الگوریتم کدگذاری گالاگر اختصاص داد. در این راستا تعداد زیادی مقاله و کتاب تاکنون به چاپ رسیده است. بخش سوم مربوط می‌شود به تغییر و بهبود روش کدگذاری گالاگر. از این جمله می‌توان به الگوریتم مجموع-حاصل ضرب^{۲۸} بهینه شده ی نیل اشاره نمود. و یا الگوریتم کمترین تجمع^{۲۹} از جمله این تلاش ها می‌باشد. بخش چهارم نیز که نقطه ی عطف دیگری برای نشان دادن کاربرد هرچه بیشتر کدهای بررسی-توازن کم-چگال بود، به طراحی کدهای شبه-دوری با ماتریس بررسی-توازن کم-چگال^{۳۰} برمی‌گردد. اهمیت بسیار زیاد این دسته از کدها، علاوه بر کم چگال بودن آن‌ها، امکان پیاده سازی آن‌ها بر روی بردهای سخت افزاری^{۳۱} می‌باشد. کدهای شبه-دوری، به دلیل ساختار منظم آن‌ها امکان پیاده سازی سخت افزاری را دارند و از این لحاظ در مقایسه با دیگر کدهای بررسی-توازن کم-چگال، عمل کدگذاری و کدگذاری بسیار سریع تر و با دقت بیشتری دارند. از جمله کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری پرکاربرد می‌توان به کدهای شبه-دوری با ماتریس بررسی-توازن کم-چگال ساخته شده از روی گراف اولیه^{۳۲} اشاره کرد. این نوع

²²Tanner Graph

²³Wiberg

²⁴Neal

²⁵MacKay

²⁶Message Vector

²⁷Generator Matrix

²⁸Sum Products

²⁹Min-Sum

³⁰Quasi Cyclic LDPC Codes

³¹Shift-Register

³²Protograph Based QC-LDPC Codes

از کد که توسط تروپ^{۳۳} معرفی شد از روی یک گراف کوچک (این گراف را اصطلاحاً گراف پایه^{۳۴} یا اولیه می نامند) ساخته و بسط داده می شود. دلیل پرکاربرد بودن این نوع از کد، علاوه بر شبه-دوری بودن آن، کوچک بودن گراف اولیه است. به عبارت دقیق تر، به دلیل کوچک بودن گراف اولیه، امکان بررسی و طراحی اکثر پارامترهای تاثیرگذار کد بر روی آن وجود دارد. در نهایت گراف اولیه به گونه ای بسط داده می شود که گراف حاصل (گراف تنر کد) تمامی پارامترهای مورد نظر را داشته باشد. این نظریه نیز مانند نظریه های شانون، الگوریتم کدگذاری گالاگر و گراف تنر، نقطه ای عطفی در رشته ی کدگذاری بود چرا که بعد از آن نظر طیف وسیعی از دانشمندان و نظریه پردازان را در زمینه ی طراحی کد به خود معطوف کرد. از آنجائی که این نظریه برای کدهای با طول بسیار بالا صدق می کند و عملاً بطور دقیق قابل پیاده سازی نیست لذا، مسأله ی اصلی، طراحی کدهای کم-چگال با طول مناسب و توزیع درجه ی مناسب است به طوری که کارایی آن هرچه بیشتر به حد شانون نزدیک شود.

همچنین، نمودار کارایی یک کد، در یک دستگاه xy رسم می شود؛ روی محور x نرخ توان سیگنال به توان نویز^{۳۵}، SNR، و بر روی محور y ، نرخ خطای بیت^{۳۶} (یا خطای بلوک^{۳۷}) را رسم می کنند. در عمل، پیاده سازی کدهای با بعد کمتر سبب بهبود در قسمت آبشاری^{۳۸} نمودار کارایی کد می شود اما از آنجا که این کدها دقیقاً به حد شانون نمی رسند در SNR های بالا و خطاهای پائین دچار پدیده ی کف خطا^{۳۹} می شوند. یعنی، بعد از آن که به بهترین حد خود در قسمت آبشاری نمودار کارایی می رسند، بطور ناگهانی و با یک تغییر شیب، وارد قسمت کف خطا می شوند و بعد از آن هرچه تکرارهای الگوریتم کد گشا را نیز افزایش دهیم و یا SNR را زیاد کنیم، تغییر قابل ملاحظه ای در بهبود روند کدگذاری مشاهده نمی شود.

نشان داده شده است که پدیده ی کف خطا می تواند به دلیل وجود برخی ساختارها در ماتریس بررسی-توازن کد (برخی زیر گراف ها در گراف تنر کد) باشد [۴۲]. از آنجائی که این ساختارها در الگوریتم های تکراری (از جمله الگوریتم مجموع-حاصل ضربی) باعث بوجود آمدن یک حالت تله ای مانند می شوند، یعنی الگوریتم کدگشا درگیر الگوهای (ساختارهای) خطایی می شود که با زیاد شدن تکرارها، این الگوها نه بزرگتر می شوند و نه از بین می روند، به آن ها مجموعه های تله ای^{۴۰} یا تله گذار گویند. مجموعه های تله ای انواع مختلفی را شامل می شوند که بسته به نوع کانال و یا نوع کدگذاری هر کدام می توانند دلیل پدیده ی کف خطا باشند. به عنوان مثال در [۹] به خوبی و بطور تحلیلی نشان داده شد که مجموعه های تله ای از

³³Thrope

³⁴Base Graph

³⁵Signal to Noise Ratio (SNR)

³⁶Bit Error Rate

³⁷Block Error Rate

³⁸Waterfall Region

³⁹Error Floor Phenomenon

⁴⁰Trapping Sets

نوع متوقف کننده^{۴۱} عامل اصلی در پائین بودن نرخ کدگذاری کانال‌های دودویی پاک شونده^{۴۲} می‌باشند. در سال‌های ۲۰۱۲ و ۲۰۱۳، نویان [۳۸] و کریمی [۲۴] بطور جداگانه‌ای به بررسی نقش مجموعه‌های تله گذار اولیه^{۴۳} در کانال گاوسی و کانال دودویی متقارن^{۴۴} و با الگوریتم‌های تغییر بیت و جمع و ضربی پرداخته‌اند. اگرچه هنوز بطور دقیق اثبات نشده است، اما یک حدس بسیار قوی در کانال‌های گاوسی و با الگوریتم کدگذاری مجموع-حاصل ضرب این است که مجموعه‌های تله‌ای اولیه عامل اصلی کف خطا هستند. از دیگر مطالعات انجام شده در این زمینه می‌توان به [۱۱، ۱۰، ۲۵، ۴، ۵۱، ۳۶، ۸] اشاره نمود.

⁴¹Stopping Sets

⁴²Binary Erasure Channels

⁴³Elementary Trapping Sets

⁴⁴Binary Symmetric Channel

فصل ۲

تعاریف و مقدمات

در این فصل، مقدمات مورد نیاز از نظریه گراف و نظریه کد را ارائه می‌دهیم.

۱.۲ تعاریف مورد نیاز از نظریه گراف

تعریف ۱.۱.۲. یک گراف^۱ ساده را با $G = (V, E)$ نشان می‌دهیم که در آن V مجموعه رئوس و E مجموعه یال‌های گراف هستند. گراف G را یک گراف دوبخشی^۲ گوییم هرگاه بتوان V را به دو مجموعه U و W چنان افراز کرد که هر یال از G یک رأس از U را به رأسی از W وصل کند.

تعریف ۲.۱.۲. گراف $G' = (V', E')$ را یک زیرگراف^۳ از گراف G می‌نامیم هرگاه V' و E' به ترتیب زیرمجموعه‌هایی از V و E باشند به طوری که یال (v_i, v_j) در E' است اگر v_i و v_j در V' باشند.

تعریف ۳.۱.۲. گراف $G' = (V', E')$ را یک زیرگراف القایی^۴ از گراف G می‌نامیم هرگاه V' و E' به ترتیب زیرمجموعه‌هایی از V و E باشند به طوری که یال (v_i, v_j) در E' است اگر و تنها اگر v_i و v_j در V' باشند.

¹Graph

²Bipartite Graph

³Subgraph

⁴Induced Subgraph

تعریف ۴.۱.۲. دو یال $e_i, e_j \in E$ را مجاور^۵ گوییم اگر آنها توسط یک رأس به یکدیگر متصل باشند. دو رأس $v_i, v_j \in V$ را مجاور گوییم اگر توسط یک یال به یکدیگر متصل باشند. درجه^۶ رأس v را با $d(v)$ نمایش می‌دهیم که برابر است با تعداد یال‌هایی که در v به هم وصلند. کمترین درجه^۷ و بیشترین درجه^۸ رئوس گراف را، به ترتیب، با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ نمایش می‌دهیم.

قضیه ۱.۱.۲. گراف $G = (V, E)$ را در نظر بگیرید. مجموع درجات رئوس گراف برابر است با:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

تعریف ۵.۱.۲. گراف کامل^۹ گرافی است که در آن هر دو رأس مجزا توسط یک یال به هم وصل باشند. یک گراف کامل روی n رأس با K_n نمایش داده می‌شود.

تعریف ۶.۱.۲. گراف دوبخشی^{۱۰} گرافی است که در آن مجموعه رئوس به دو مجموعه مجزای W و U افراز شود به طوری که هیچ یالی بین مجموعه رئوس U نباشد و هیچ یالی بین مجموعه رئوس W نباشد.

تعریف ۷.۱.۲. یک گراف کامل دوبخشی^{۱۱} یک گراف دوبخشی با مجموعه رئوس U و W می‌باشد، به طوری که هر رأس از U به هر رأس از W وصل باشد. یک گراف کامل دوبخشی با $|U| = m$ و $|W| = n$ با $K_{m,n}$ نمایش داده می‌شود.

تعریف ۸.۱.۲. گراف دوبخشی با مجموعه رئوس U و W را r - منتظم^{۱۲} گوییم هرگاه برای هر رأس v داشته باشیم $d(v) = r$. برای یک گراف دوبخشی r - منتظم داریم: $|U| = |W| \geq r$ ، [۶].

تعریف ۹.۱.۲. گراف $G = (V, E)$ با تعداد رئوس n را در نظر بگیرید. فرض کنید $k \leq n$ و دنباله $v_0 e_1 v_1 \dots v_{k-1} e_k v_k$ یک دنباله از رئوس $v_i \in V$ ($0 \leq i \leq n$) و یال‌های e_i ($0 \leq i \leq n$) باشد. این دنباله را یک مسیر^{۱۳} بین دو رأس v_0 و v_k از گراف G گوییم. دنباله (v_{i-1}, v_i) یک دور^{۱۴} با طول k است اگر $v_0 = v_k$ و رئوس میانی دنباله همگی مجزا باشند. طول کوتاهترین دور در گراف را کمر^{۱۵} گراف گوییم و آن را با g نمایش می‌دهیم.

⁵Adjacent

⁶Degree

⁷Minimum Degree

⁸Maximum Degree

⁹Complete Graph

¹⁰Bipartite Graph

¹¹Complete Bipartite Graph

¹² r -regular

¹³Path

¹⁴Cycle

¹⁵Girth

تعریف ۱۰.۱.۲. گراف بدون مثلث^{۱۶} گرافی است که در آن هیچ سه رأسی یک دور با طول ۳ را تشکیل ندهند. به عبارت دیگر، گراف بدون مثلث شامل K_3 نیست.

۲.۲ تعاریف مورد نیاز از نظریه ی کد

میدان متناهی با q عضو را با $GF(q)$ ، نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱.۲.۲. هر زیرمجموعه از فضای برداری n بعدی روی $GF(q)$ کد بلوکی C نامیده می‌شود. به هر عضو C یک کدکلمه^{۱۷} گفته می‌شود.

تعریف ۲.۲.۲. تعداد مکانهایی که دو عنصر $c_1, c_2 \in GF(q)^n$ با هم تفاوت دارند را فاصله ی همینگ (یا وزن همینگ) گویند و آن را با $d(c_1, c_2)$ نشان می‌دهند. فاصله ی کمینه ی کد C عبارت است از:

$$\min\{d(c_1, c_2); c_1, c_2 \in C, c_1 \neq c_2\}$$

و آن را با d_{min} نمایش می‌دهند.

تعریف ۳.۲.۲. اگر M تعداد عناصر درون C باشد و C دارای فاصله کمینه $d_{min} = d$ باشد، به آن یک $(n, M, d)_q$ کد گفته می‌شود.

تعریف ۴.۲.۲. کد خطی C به طول n ، فاصله کمینه $d_{min} = d$ و بعد k یک زیرفضای k بعدی از $GF(q)^n$ می‌باشد و با $[n, k, d]_q$ نشان داده می‌شود.

فاصله کمینه، معیار مهمی در توانایی آشکار سازی و تصحیح خطای کد است. کد با فاصله کمینه بیشتر، توانایی آشکار سازی و تصحیح خطای بیشتری را دارا می‌باشد.

تعریف ۵.۲.۲. تعداد عناصر غیر صفر یک کد را وزن کد نامیم.

تعریف ۶.۲.۲. کد بلوکی خطی C با فاصله کمینه d_{min} توانایی تصحیح خطاهای با وزن کمتر و یا مساوی $t = \frac{d_{min}-1}{2}$ را دارد. پارامتر t را قابلیت تصحیح خطای کد می‌نامند.

تعریف ۷.۲.۲. کد خطی C به عنوان یک زیرفضای k بعدی به وسیله k کلمه ی مستقل خطی $\{c_1, \dots, c_k\}$ در $GF(q)^n$ تولید می‌شود. اگر c_i ها $(1 \leq i \leq k)$ را به عنوان سطرهای ماتریس G در نظر بگیریم، G از بعد $k \times n$ خواهد بود و آن را ماتریس مولد کد C می‌نامند. فرض کنیم m بردار پیام k تایی باشد. در این صورت

$$C = \{c : c = mG \in GF(q)^n\}.$$

¹⁶Triangle-free Graph

¹⁷Code Word

تعریف ۸.۲.۲. متناظر با کد خطی C ، زیرفضای متعامد آن C^* به صورت زیر تعریف می‌شود؛

$$C^* = \{c^* \in GF(q)^n : \langle c, c^* \rangle = 0, \forall c \in C\}.$$

به طوری که $\langle c, c^* \rangle$ ضرب داخلی معمول در $GF(q)$ است. زیرفضای C^* را دوگان کد C می‌نامند.

ماتریس مولد زیرفضای C^* را با H نمایش می‌دهند که $cH^T = 0$. در این صورت داریم:

$$C = \{c \in GF(q)^n : Hc^T = 0\}.$$

از آنجائی که هدف اصلی ما مطالعه‌ی کدهای دودویی می‌باشد، تعاریف و مثال‌هایی که در ادامه‌ی مطالب خواهد آمد همگی با فرض $q = 2$ خواهد بود.

تعریف ۹.۲.۲. اگر $\{c^*_1, \dots, c^*_k\}$ یک پایه برای کد C^* باشد، در این صورت ماتریس $H = [c^*_1 \dots c^*_{n-k}]^T$ را ماتریس بررسی-توازن کد C می‌نامند.

نشان داده می‌شود که فاصله کمینه کد C ، کمترین تعداد ستون‌های وابسته خطی ماتریس H می‌باشد.

تعریف ۱۰.۲.۲. اگر I_k ماتریس همانی^{۱۸} از بعد k و $G = [I_k | A]$ ماتریس مولد کد $C[n, k, d]_q$ باشد، در این صورت کد C در حالت استاندارد^{۱۹} نامیده می‌شود. در این صورت ماتریس بررسی-توازن C به فرم $[-A^T | I_{n-k}]$ می‌باشد، جاییکه، ماتریس همانی از اندازه $(n-k) \times (n-k)$ می‌باشد. نرخ کد C را نرخ تبدیل بردار k تایی پیام به بردار n تایی ارسالی، توسط ماتریس مولد کد، گوئیم که برابر است با $r = \frac{k}{n}$. از آنجائی که ماتریس بررسی-توازن و ماتریس مولد کد دوگان یکدیگر هستند، لذا اگر ماتریس بررسی-توازن کد از بعد m باشد و طول آن نیز n باشد، داریم $r = \frac{n-m}{n}$.

تعریف ۱۱.۲.۲. فرض کنیم $H_{m \times n}$ ماتریس بررسی-توازن یک کد باشد. گراف تنر، یک گراف دوبخشی است که برای نمایش هندسی یک کد بررسی-توازن کم-چگال به کار می‌رود. به این صورت که معادل با ستون‌های ماتریس بررسی-توازن کد، یک دسته از رئوس گراف (رئوس متغیر^{۲۰} یا رئوس بیتی) و معادل با سطرهای آن، دسته‌ی دیگری از رئوس (رئوس بررسی^{۲۱}) را اختصاص می‌دهیم. رئوس درون هر دسته به یکدیگر وصل نیستند اما رئوس هر دسته را با توجه به عناصر صفر و یک ماتریس بررسی-توازن به رئوس دسته‌ی دیگر وصل می‌کنیم. رأس j -ام از دسته‌ی اول به رأس i -ام از دسته‌ی دوم متصل است اگر و فقط اگر $H(i, j) = 1$ در واقع ماتریس H ماتریس مجاورت^{۲۲} گراف دوبخشی تنر نیز محسوب می‌شود. گراف تنر را منتظم^{۲۳} گوئیم اگر تمامی رأس‌های متغیر دارای درجه‌ی یکسان و نیز تمامی رأس‌های

¹⁸Identity Matrix

¹⁹Systematic

²⁰Variable Nodes

²¹Check Nodes

²²Bi-Adjacency Matrix

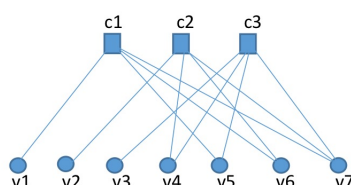
²³Regular

بررسی نیز دارای درجه ی یکسانی باشند. قابل ذکر است که درجه ی یک راس بررسی متفاوت از درجه ی یک راس بیتی است.

مثال ۱.۲.۲. اگر ماتریس

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ماتریس بررسی-توازن کد همینگ $C[7,4,3]$ باشد. آن گاه گراف تنر متناظر با آن به صورت زیر است.



تعریف ۱۲.۲.۲. طول کوچکترین دور موجود در گراف تنر یک کد، کمر کد نامیده می شود.

مثال ۲.۲.۲. کمر گراف تنر مربوط به کد همینگ $C[7,4,3]$ برابر با ۴ است. یال های متصل کننده ی دو رأس بررسی ۱ و ۲ به دو رأس متغیر ۶ و ۷ در گراف تنر این کد، تشکیل دور به طول ۴ می دهند. دور به طول ۴ در گراف های دوبخشی کوچک ترین دور ممکن است.

۱.۲.۲ کدهای بررسی-توازن کم-چگال ساخته شده از روی گراف پایه دوبخشی

کدهای با ماتریس بررسی-توازن کم-چگال ساخته شده از روی گراف پایه دوبخشی (این گراف را گراف اولیه نیز می نامند) اولین بار توسط تروپ^{۲۴} [۵۰] معرفی شد. روش کار به این صورت است که ابتدا یک گراف تنر کوچک را در نظر می گیریم و آن را بسط^{۲۵} می دهیم. برای بسط دادن، تمام رئوس و یال های گراف تنر اولیه را به تعداد N بار کپی می کنیم، یعنی به ازای هر رأس، N رأس جدید و به ازای هر یال، N یال جدید می سازیم. سپس، متناظر با هر یال اولیه یک جایگشت N تایی دلخواه روی تمامی یال هایی که به جای یال اولیه کپی کرده ایم اعمال می کنیم. برای اعمال جایگشت کفایست مراحل زیر را دنبال کنیم.

۱. N رأس بررسی و N رأس متغیر را از ۱ تا N شماره گذاری می کنیم.

²⁴Thrope

²⁵Lift

۲. برای هر $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ یالی که رأس متغیر i - ام را به رأس بررسی i وصل می کند را در نظر می گیریم و با ثابت گرفتن رأس بررسی، رأس متغیر این یال را با توجه با جایگشتی که در نظر گرفته بودیم تغییر می دهیم.

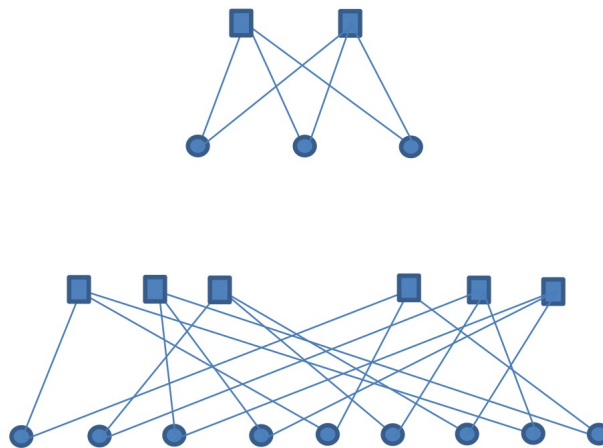
۳. این کار را برای دیگر یالها و رؤوس کپی شده تکرار می کنیم.

تعریف ۱۳.۲.۲. ماتریس مجاورت گراف پایه را ماتریس پایه می نامیم و با W نمایش می دهیم. و ماتریس مجاورت گراف دوبخشی گسترش یافته ماتریس بررسی - توازن کد است

مثال ۳.۲.۲. در شکل ۱.۲، یک گراف پایه با ۵ رأس آمده است. این گراف شامل دو رأس در یک بخش و سه رأس در بخش دیگر است. و ماتریس پایه ی متناظر با این گراف همان ماتریس مجاورت گراف پایه است که به صورت

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1.2)$$

می باشد.



شکل ۱.۲: گراف پایه و گراف گسترش یافته متناظرش

همانطور که ملاحظه می کنیم عناصر ماتریس پایه ی متناظر با گراف ساده اعداد ۰ و ۱ هستند. حال فرض کنید $N = 3$. در نتیجه، گراف گسترش یافته رسم شده در شکل ۱.۲ که دارای شش رأس متغیر و نه رأس بررسی است به صورت زیر ساخته می شود. ابتدا برای سه رأس متغیر متناظر با رأس اول از بخش اول گراف پایه چگونگی اتصال یالها را توضیح می دهیم. در این سه رأس متغیر و سه رأس بررسی متناظر با رأس اول از بخش

دوم از گراف پایه یک جایگشت (123) وجود دارد به این معنا که رأس بیتی اول به رأس بررسی اول وصل می شود. رأس متغیر دوم به رأس بررسی سوم وصل می شود و رأس متغیر سوم به رأس بررسی دوم وصل می شود. به همین ترتیب، برای سه رأس بررسی متناظر با رأس دوم از بخش دوم از گراف پایه یک جایگشت (123) و برای سه رأس بررسی متناظر با رأس سوم از بخش دوم از گراف پایه یک جایگشت (123) وجود دارد. حال برای سه رأس متغیر متناظر با رأس دوم از بخش اول گراف پایه جایگشت های (132) ، (123) ، (213) را در نظر می گیریم. در نتیجه ماتریس بررسی-توازن به صورت زیر می باشد.

$$H = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right]. \quad (2.2)$$

۲.۲.۲ کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-یگانه و یال-چندگانه

تعریف ۱۴.۲.۲. فرض کنیم $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n)$ عضوی از $GF(q)^n$ باشد. در این صورت، بردار $c' = (c_n, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$ را یک انتقال دوری به راست^{۲۶} از بردار c می نامند. کد خطی بلوکی C را یک کد دوری گویند اگر هر انتقال دوری از یک کدکلمه از آن نیز کدکلمه ای در آن باشد.

ثابت شده است که دوگان یک کد دوری، خود یک کد دوری است. بنابراین، هر دو ماتریس مولد و ماتریس بررسی-توازن یک کد دوری را در حالت استاندارد می توان به گونه ای نوشت که هر سطر از ماتریس یک انتقال به راست از سطر ماقبل آن باشد و سطر اول ماتریس نیز یک انتقال به راست از سطر آخر باشد.

ساخت ماتریس بررسی-توازن یک کد دوری را می توان به چندین روش انجام داد. از دو نمونه ی پرکاربرد آن می توان به روش های ترکیبیاتی^{۲۷} (مانند مربعات لاتین^{۲۸} یا ماتریس های جایگشتی^{۲۹}) و روش های هندسه متناهی^{۳۰} (مانند ماتریس های ساخته شده از روی صفحات تصویری^{۳۱}) اشاره نمود. برای مطالعه ی بیشتر می توان به فصل های ۳، ۶، ۱۰، ۱۲ از [۴۳]

²⁶Right Cyclic-Shift

²⁷Combinatorial Design

²⁸Latin Square

²⁹Permutation Matrices

³⁰Finite Geometry

³¹Projective Planes

مراجعه نمود.

تعریف ۱۵.۲.۲. یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری را بطور کلی می توان به صورت

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1} & H_{m2} & \dots & H_{mn} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

در نظر گرفت، به طوری که $m, n \in N$ و هر یک از عناصر H_{ij} در این ماتریس، خود یک ماتریس مربعی دوری از مرتبه N باشد. منظور از دوری بودن ماتریس H_{ij} این است که سطر k -ام این ماتریس از انتقال به راست سطر اول^{۳۲} به اندازه k ($1 \leq k \leq N-1$) واحد به دست آید. در واقع می توان هر یک از عناصر H_{ij} را ماتریس بررسی توازن یک کد بررسی-توازن کم-چگال دوری فرض نمود. ماتریس H ماتریس بررسی-توازن کد شبه-دوری با طول nN می باشد.

تعریف ۱۶.۲.۲. یک ماتریس جایگشت دوری^{۳۳} از بعد $N \in \mathcal{N}$ و اندازه دور $1 \leq k \leq N-1$ به ماتریس مربعی $N \times N$ گفته می شود که سطر اول آن از k تا انتقال به راست سطر اول ماتریس همانی I_N به دست آمده باشد و مابقی سطرهای آن از یک انتقال به راست سطر ماقبل خود بدست آمده باشد. این ماتریس را با I^p نشان می دهیم. واضح است که I° برابر با ماتریس همانی است.

دو نوع کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری ساخته شده از گراف دوبخشی پایه وجود دارد. اگر گراف پایه یال چندگانه نداشته باشد، آن گاه ماتریس پایه تنها عناصر 0 و 1 را شامل می شود. و کد بررسی-توازن کم-چگال ساخته شده شبه-دوری یال-یگانه^{۳۴} نامیده می شود. اگر گراف پایه یال چندگانه داشته باشد، آن گاه ماتریس پایه شامل عناصر بیش از 1 نیز می باشد و کد بررسی-توازن کم-چگال ساخته شده شبه-دوری یال-چندگانه^{۳۵} نامیده می شود. برای ساخت ماتریس بررسی-توازن این نوع کدها به روش زیر عمل می کنیم. فرض کنیم ماتریس پایه کد از بعد $m \times n$ بوده و عناصر آن 0 و 1 باشند. اگر تمام عناصر صفر را با ماتریس مربعی تمام صفر با بعد $N \times N$ جایگزین کنیم و هر عنصر غیر صفر را با یک ماتریس جایگشت دوری $I^{b_{ij}}$ ($0 \leq i \leq m-1, 0 \leq j \leq n-1, 0 \leq b_{ij} \leq N-1$) جایگزین کنیم ماتریس حاصل یک ماتریس بررسی-توازن کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-یگانه است. متناظر با ماتریس بررسی-توازن یک ماتریس نمایه^{۳۶} در نظر میگیریم و با B

³²First Line Shifted to the Right

³³Circulant Permutation Matrix (CPM)

³⁴Single-edge QC-LDPC

³⁵Multiple-edge QC-LDPC

³⁶Exponent Matrix

نمایش می‌دهیم. اگر ij – امین عنصر ماتریس پایه با $I^{b_{ij}}$ جایگزین شود، آن گاه ij – امین عنصر ماتریس نمایه را b_{ij} در نظر می‌گیریم. برای مثال، اگر ماتریس پایه تمام ۱ باشد و ماتریس بررسی – توازن آن به صورت زیر باشد

$$H = \begin{bmatrix} I^{b_{00}} & I^{b_{01}} & \dots & I^{b_{0(n-1)}} \\ I^{b_{10}} & I^{b_{11}} & \dots & I^{b_{1(n-1)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I^{b_{(m-1)0}} & I^{b_{(m-1)1}} & \dots & I^{b_{(m-1)(n-1)}} \end{bmatrix}. \quad (4.2)$$

آن گاه ماتریس نمایه را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$B = \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} & \dots & b_{0(n-1)} \\ b_{10} & b_{11} & \dots & b_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{(m-1)0} & b_{(m-1)1} & \dots & b_{(m-1)(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

در مثال زیر یک ماتریس بررسی – توازن و ماتریس نمایه معادلش را داریم.

مثال ۴.۲.۲. فرض کنید ماتریس بررسی – توازن به صورت زیر باشد:

$$H = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]. \quad (6.2)$$

و درجه بسط برابر با $N = 3$ باشد، آن گاه ماتریس نمایه برابر $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ است.

بسیاری از مشخصات کد ساخته شده با ماتریس بررسی – توازن نشان داده شده را می‌توان تنها با مطالعه‌ی ماتریس توان آن بررسی و تعیین کرد. دلیل اصلی معرفی ماتریس توان، ساده تر شدن این مطالعه می‌باشد.

شرط لازم و کافی برای وجود دور با طول $2k$ در گراف تنریک کد بررسی – توازن کم – چگال شبه – دوری یال – یگانه در [۱۲] داده شده است. این نتیجه ابزار اصلی در به دست آوردن نتایج ما است که در لم زیر می‌آوریم.

لم ۱.۲.۲. فرض کنیم C یک کد بررسی – توازن کم – چگال شبه – دوری با توزیع درجه $m \times n$ ، درجه بسط N و ماتریس نمایه B باشد. شرط لازم و کافی برای وجود دور با طول $2k$ در گراف

تنر این است که درایه‌هایی از B موجود باشد به طوری که

$$\sum_{i=0}^{k-1} (b_{m_i n_i} - b_{m_i n_{i+1}}) = 0 \pmod{N}, \quad (7.2)$$

که در آن $n_k = n_0$, $m_i \neq m_{i+1}$, $n_i \neq n_{i+1}$ همان (m_i, n_i) - امین درایه از B باشد

کمترین درجه‌ی بسط کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با توزیع درجه $m \times n$ ، کمر ۶ و وزن‌های ستونی ۳، ۴، ۵ و وزن‌های سطری $12 \leq n$ در [۱۲] به دست آمده است. در ارتباط با درجه‌های بسط کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با وزن‌های ستونی ۳، ۴ و کمرهای ۶، ۸ می‌توان به مقالات [۱۷]، [۴۱] و [۵۵] نیز اشاره کرد. با بررسی شرایط جبری که منجر به دوره‌های کوتاه در گراف تنر می‌شوند، روش‌هایی برای ساخت کدهای شبه-دوری با کمر بزرگ در [۳۹] مطرح شده است. همچنین، با استفاده از روش‌های جستجوی کارا، مینیمم درجه بسط کدهای شبه-دوری بررسی-توازن کم-چگال با کمرهای ۶، ۸، ۱۰ و ۱۲ به دست آمده است. علاوه بر [۳۹] می‌توان به مقاله‌های [۵۲]، [۷] و [۲۸] و [۴۸] در ارتباط با کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با کمر بزرگ اشاره کرد. در [۴۹] روشی در جهت یافتن کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-یگانه با توزیع درجه و کمر یکسان و مینیمم درجه بسط مطرح شده است. در واقع، در این مقاله تعداد بسیاری از کلاس‌های یکرخت ماتریس توان به دست می‌آید. اگر یک ماتریس توان متعلق به یک کلاس کمر g را نتیجه ندهد، آن‌گاه تمام ماتریس‌های توان متعلق به آن کلاس از رده جستجو حذف می‌شوند. به وضوح این روش، جستجوی جامع برای به دست آوردن ماتریس توان را به یک جستجوی کارا تبدیل می‌کند. برای نشان دادن مزیت این روش، تمام ماتریس‌های غیریکریخت کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-یگانه با وزن ستونی ۳، وزن سطری $12 \leq n$ ، کمر $g \leq 12$ و مینیمم درجه بسط به دست آمده‌اند. کران‌های پایین آنالیز شده روی درجه بسط کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با توزیع درجه $m \times n$ و کمرهای ۶، ۸ و ۱۰، به ترتیب، n ، $(m-1)(n-1)+1$ و $n(n-1)(m-1)+1$ می‌باشند. در مراجع [۱۲] و [۲۶] این کران‌ها به دست آمده‌اند. به علاوه، روش‌های جبری برای ساخت کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-یگانه با کمرهای متفاوت در مقالات [۳۰]، [۳۱] و [۴۶] ارائه شده‌اند.

همانطور که در بالا مطرح شد، اگر گراف پایه داری یال چندگانه باشد آن‌گاه ماتریس بررسی-توازن متناظر آن یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال چندگانه نتیجه می‌دهد. در تعریف زیر ماتریس نمایه یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال چندگانه و طرز ساختن ماتریس بررسی-توازن از روی ماتریس نمایه را شرح می‌دهیم.

تعریف ۱۷.۲.۲. فرض کنید N عددی صحیح باشد. ماتریس $B = [\vec{B}_{ij}]$ ماتریس نمایه یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال چندگانه است، که در آن $|\vec{B}_{ij}| = W_{ij}$ ، $(b_{ij}^1, b_{ij}^2, \dots, b_{ij}^{W_{ij}}) \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ و به ازای هر $l \in \mathbb{N}$ داریم $b_{ij}^l \neq b_{ij}^{l'}$ به طوری که

$$1 \leq r < r' \leq l$$

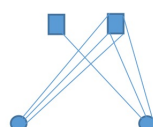
$$B = \begin{bmatrix} \vec{B}_{\circ\circ} & \vec{B}_{\circ 1} & \cdots & \vec{B}_{\circ(n-1)} \\ \vec{B}_{1\circ} & \vec{B}_{11} & \cdots & \vec{B}_{1(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{B}_{(m-1)\circ} & \vec{B}_{(m-1)1} & \cdots & \vec{B}_{(m-1)(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (۸.۲)$$

اگر ij – امین درایه ماتریس B یک بردار باشد، آن گاه توسط ماتریس H_{ij} با بعد $N \times N$ جایگزین می شود که از جمع ماتریس های جایگشتی $I^{b_{ij}^r}$ به صورت زیر به دست می آید.

$$H_{ij} = I^{b_{ij}^1} + I^{b_{ij}^2} + \cdots + I^{b_{ij}^l}.$$

برای مثال در زیر یک ماتریس بررسی – توازن برای یک کد بررسی – توازن کم – چگال شبه – دوری یال چندگانه می سازیم.

مثال ۵.۲.۲. گراف پایه متناظر با ماتریس پایه ی $W = \begin{bmatrix} \circ & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ در شکل ۲.۲ داده شده است:



شکل ۲.۲: گراف پایه متناظر با ماتریس پایه

اگر قرار دهیم $N = 6$ و ماتریس توان را به صورت $B = \begin{bmatrix} (\circ) & (1) \\ (2, 3, 4) & (\circ, 1) \end{bmatrix}$ مشخص کنیم،

آن گاه ماتریس بررسی-توازن به صورت زیر به دست می آید.

$$H = \left[\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]. \quad (9.2)$$

معادله (۷.۲) برای کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال چندگانه به صورت زیر است:

$$\sum_{i=0}^{k'-1} \left(b_{m_i n_i}^{r_i} - b_{m_i n_{i+1}}^{r'_i} \right) = 0 \pmod{N}, \quad (10.2)$$

که در آن، $n_{k'} = n_0$ و اگر $n_i = n_{i+1}$ ، آن گاه $r'_i \neq r_i$ و اگر $m_i = m_{i+1}$ آن گاه $r'_i \neq r_i$. $b_{m_i n_i}^{r_i}$ برابر است با r_i - امین درایه از $\vec{B}_{m_i n_i}$ و $\vec{B}_{m_i n_i}$ برابر است با $(m_i n_i)$ - امین درایه از B . برطبق [۴۰]، [۳۹] و [۵]، اگر ماتریس W شامل عنصر $l \geq 3$ باشد، آن گاه گراف تنر دور با طول ۶ دارد. وجود زیرماتریس هایی از W نظیر [۲۲] و $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ، به ترتیب، وجود دوره هایی با طول ۸ و ۱۰ را تضمین می کنند. این دوره ها، دوره های اجتناب ناپذیر نامیده می شوند که وجود آن ها مستقل از درجه بسط است. زیرماتریس های ماتریس پایه که دوره های اجتناب ناپذیر با طول کمتر یا مساوی ۲۰ را تولید می کنند در [۲۸] بررسی شده اند.

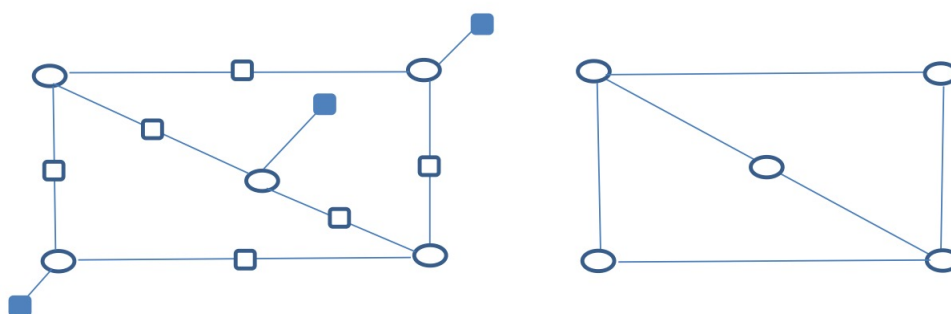
۳.۲ مجموعه های تله ای اولیه در گراف تنر

در این بخش، به معرفی مجموعه های تله ای می پردازیم که تاثیر عمیقی روی اجرای کدهای بررسی-توازن کم-چگال دارند. یک (a, b) مجموعه ی تله ای از اندازه ی a یک زیرگراف القایی از گراف تنر با a رأس متغیر و b رأس بررسی از درجه فرد می باشد. درمیان تمام مجموعه های تله ای موثرترین آن هایی هستند که رأس های بررسی از درجه ی ۱ یا ۲ دارند. این زیرگراف ها

را مجموعه‌های تله‌ای مقدماتی^{۳۷} یا ETS نامیم. به علاوه، مجموعه‌های تله‌ای مقدماتی که نرخ خطای کدگذاری بالایی را موجب می‌شوند آن‌هایی هستند که در نامساوی $\frac{b}{a} < 1$ صدق می‌کنند.

تعریف ۱.۳.۲. در یک (a, b) مجموعه‌ی تله‌ای مقدماتی با حذف رئوس بررسی از درجه‌ی ۱ و جایگزینی هر رأس بررسی از درجه‌ی ۲ با یک یال، یک گراف با a رأس به دست می‌آید که گراف رأس-متغیر^{۳۸} نامیده می‌شود.

با تشخیص این زیرگراف‌ها و حذف آن‌ها از گراف تنر ماتریس بررسی-توازن حاصل اجرای بهتری در کدگذاری خواهد داشت. تاکنون الگوریتم‌های بسیاری برای تشخیص این زیرگراف‌ها داده شده‌اند. از آن میان می‌توان به مقاله‌های [۲۹، ۲۱، ۲۰، ۱۹، ۲۷، ۲۲] اشاره کرد. در شکل زیر دو گراف رأس-متغیر متناظر با مجموعه‌های تله‌ای مقدماتی داده شده است.



شکل ۳.۲: گراف رأس-متغیر و مجموعه تله‌ای مقدماتی متناظرش

همانطور که مشاهده می‌کنیم این شکل شامل یک مجموعه‌ی تله‌ای مقدماتی با پنج رأس متغیر و شش رأس بررسی از درجه‌ی ۲ و سه رأس بررسی از درجه‌ی ۱ است که گراف رأس-متغیر متناظرش شامل دو رأس از درجه‌ی ۳ و سه رأس از درجه‌ی ۲ است.

در [۲۲] ثابت شده است که یک کد بررسی-توازن کم-چگال منظم با توزیع درجه $\gamma \times \lambda$ که گراف تنر آن فاقد دور با طول ۴ است شامل مجموعه تله‌ای با پارامترهای a, b می‌شود که در آن $a \leq \gamma$ و

$\frac{b}{a} < 1$. در [۲۷] کلاسی از ETS ها بر اساس دوره‌های کوتاه گراف تنر برای کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم ارائه شده است. برای وزن‌های ستونی ۳، ۴، ۵ و کمر ۶، ۸ همه‌ی کلاس‌های ETS ها با پارامترهای $a, b \leq 10$ به دست آمده‌اند. تکنیک‌های توسیعی در این زمینه برای به دست آوردن تمام ETS ها مطرح شده‌اند [۲۰] که مزیت‌های زیادی در

³⁷Elementary Trapping Sets (ETS)

³⁸Variable-Node Graph

مقایسه با بقیه روش‌ها دارند. در [۲۱]، کران‌های پایین روی کوچکترین مجموعه‌ی تله‌ای بر مبنای کمر گراف تنر به دست آمده‌اند. هرچند، این کران‌های پایین برای وزن‌های ستونی γ که در رابطه $b \geq 2\gamma - 2$ صدق می‌کنند به کار نمی‌روند. به علاوه این کران‌ها در بسیاری موارد از مینیمم مقدار اصلی خیلی کوچکترند. در واقع، این کران‌ها سخت نیستند. در مقاله [۲۹] مشخصه‌های مجموعه‌های تله‌ای با فرض $a \leq 8$ و $\frac{b}{a} < 1$ برای کدهای بررسی-توازن کم-چگال منظم با وزن ستونی ۳ که از سیستم سه‌تایی اشتاینری به دست می‌آیند مطرح شده‌اند.

فصل ۳

کران‌های پایین روی درجه بسط کدهای QC-LDPC یال-یگانه

در این فصل، به معرفی دو ماتریس تفاضل متناظر با ماتریس نمایه می‌پردازیم و به منظور ساختن کدهای شبه-دوری کم-چگال با کمر مشخص شرایط لازم و کافی برای این ماتریس‌های تفاضل را تعیین می‌کنیم. هدف ما پیدا کردن تمام ماتریس‌های نمایه‌ی غیر یکرخت با کمترین درجه بسط، کمرهای ۶ تا ۱۲ و توزیع درجه‌ی مشخص می‌باشد. در راستای رسیدن به این هدف ماتریس‌های تفاضل را به کار می‌بریم. این ماتریس‌ها کمک شایانی به کاهش پیچیدگی محاسباتی در الگوریتم جستجو برای به دست آوردن ماتریس‌های نمایه می‌کنند، [۲].

تعریف ۱.۰.۳. اگر B یک ماتریس نمایه از مرتبه‌ی $m \times n$ با عناصر $0 \leq j \leq n-1, 0 \leq i \leq m-1$ باشد، یک ماتریس تفاضل D از اندازه‌ی $\binom{m}{2} \times n$ توسط تفاضل هر دو سطر ماتریس B به صورت زیر به دست می‌آید. اگر B_{ij} و $B_{i'j}$ دو عنصر از ماتریس B واقع در سطرهای i, i' ، و ستون j باشند. اگر $i' - i$ - امین سطر B را از i - امین سطر B کم کنیم، آن‌گاه $B_{ij} - B_{i'j}$

یک عنصر از D واقع در l - امین سطر و j - امین ستون می‌باشد، طوری که $0 \leq l \leq \binom{m}{2} - 1$.

$$D = \begin{bmatrix} b_{00} - b_{10} & \dots & b_{0(n-1)} - b_{1(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{00} - b_{(m-1)0} & \dots & b_{0(n-1)} - b_{(m-1)(n-1)} \\ b_{10} - b_{20} & \dots & b_{1(n-1)} - b_{2(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{10} - b_{(m-1)0} & \dots & b_{1(n-1)} - b_{(m-1)(n-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{(m-2)0} - b_{(m-1)0} & \dots & b_{(m-2)(n-1)} - b_{(m-1)(n-1)} \end{bmatrix}. \quad (1.3)$$

اگر $b_{ij} = (\infty)$ یا $b_{i'j} = (\infty)$ آن‌گاه قرار می‌دهیم $b_{ij} - b_{i'j} = (\infty)$.

ماتریس تفاضل دیگر از ماتریس D به دست می‌آید که با DD نمایش داده می‌شود.

تعریف ۲.۰.۳. فرض کنید D یک ماتریس تفاضل از اندازه‌ی $n \times \binom{m}{2}$ باشد که از ماتریس نمایه از اندازه‌ی $m \times n$ به دست آمده باشد. یک ماتریس تفاضل DD از اندازه‌ی $\binom{m}{2} \times \binom{m}{2}$ توسط تفاضل هر دو ستون ماتریس D به صورت زیر به دست می‌آید. فرض کنید D_{ij} و $D_{ij'}$ دو عنصر از ماتریس D واقع در سطر i و ستون‌های متمایز j, j' ، باشند. اگر $j' - j$ - امین ستون D را از j - امین ستون D کم کنیم، آن‌گاه $(D_{ij} - D_{ij'}, D_{ij'} - D_{ij}) \bmod N$ یک عنصر از DD واقع در i - امین سطر و l - امین ستون می‌باشد، طوری که $0 \leq l \leq \binom{n}{2} - 1$.

مثال ۱.۰.۳. فرض کنید B یک ماتریس نمایه از اندازه‌ی 4×3 با درجه بسط $N = 37$ باشد.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 24 \\ 0 & 27 & 7 & 19 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

مطابق با تعاریف، دو ماتریس تفاضل D و DD را به صورت زیر می‌سازیم.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & -24 \\ 0 & -27 & -7 & -19 \\ 0 & -26 & -4 & 5 \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

$$DD = \begin{bmatrix} (1, 36) & (3, 34) & (24, 13) & (2, 35) & (23, 14) & (21, 16) \\ (27, 10) & (7, 30) & (19, 18) & (17, 20) & (29, 8) & (12, 25) \\ (26, 11) & (4, 33) & (32, 5) & (15, 22) & (6, 31) & (28, 9) \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

۱.۰.۳ بررسی دور با طول ۴ با استفاده از ماتریس‌های تفاضل

به منظور بررسی دور با طول ۴، معادله‌ی (۷.۲) برای هر زیرماتریس با بعد 2×2 از ماتریس نمایه باید مورد بررسی قرار گیرد. یک زیرماتریس با بعد 2×2 در سطرهای i_1 و i_2 و ستون‌های j_1 و j_2 از ماتریس نمایه را در نظر بگیرید. اگر این زیرماتریس منجر به دور با طول ۴ در گراف تنر شود، آن‌گاه معادله‌ی به صورت زیر خواهد بود.

$$(b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2}) + (b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_1}) \equiv 0 \pmod{N}.$$

اما به منظور بررسی دور با طول ۴ با استفاده از ماتریس تفاضل D سمت چپ معادله‌ی بالا را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

$$(b_{i_1 j_1} - b_{i_2 j_1}) - (b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2}) \equiv 0 \pmod{N}.$$

گزاره ۱.۰.۳. گراف تنر فاقد دور با طول ۴ است اگر و فقط اگر هر سطر ماتریس تفاضل D فاقد عنصر تکراری باشد.

برهان. فرض کنید $0 \leq i_1, i_2 \leq m-1$ ($i_1 < i_2$) عبارت $(b_{i_1 j_1} - b_{i_2 j_1})$ عنصری از ماتریس D واقع در سطر i -ام و ستون j_1 -ام به طوری که $i = \binom{m}{2} - \binom{m-i_1}{2} + i_2 - i_1$ و عبارت $(b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2})$ عنصر دیگری از D واقع در سطر i -ام و ستون j_2 -ام باشند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که اگر $\square$ $b_{i_1 j_1} - b_{i_2 j_1} \equiv b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2} \pmod{N}$ آن‌گاه گراف تنر شامل دور با طول ۴ است.

نتیجه ۱.۰.۳. گراف تنر فاقد دور با طول ۴ است اگر و فقط اگر ماتریس تفاضل DD شامل عنصر صفر نباشد.

دو کد بررسی-توازن-چگال را غیریکریخت نامیم هرگاه گراف تنر متناظر با آن‌ها غیریکریخت باشند. در [۴۹] تمام کدهای غیر یکریخت بررسی-توازن-چگال شبه-دوری با توزیع درجه‌ی $3 \times n$ با کمر ۶، $4 \leq n \leq 12$ به همراه فاصله کمینه‌ی آن‌ها داده شده است. به منظور توسیع نتایج، ماتریس‌های تفاضل را برای ارائه‌ی تعداد کدهای غیر یکریخت بررسی-توازن-چگال شبه-دوری با توزیع درجه‌ی $4 \times n$ با کمر ۶، $5 \leq n \leq 11$ مورد استفاده قرار می‌دهیم. تعداد این کدها را با NI نمایش می‌دهیم. برای هر فاصله‌ی کمینه‌ی ممکن یک ماتریس نمایه در جدول‌های ۱.۵ و ۲.۵ نمایش داده شده است. سطر اول و ستون اول این ماتریس‌ها تمام صفر هستند.

۲.۰.۳ بررسی دور با طول ۶ با استفاده از ماتریس‌های تفاضل

در این بخش ما ابتدا دورهای با طول ۶ را برای سه ماتریس نمایه با وزن‌های ستونی ۴، ۵ و ۶ مورد بررسی قرار می‌دهیم. جایگزینی برای سمت چپ معادله‌ی (۷.۲) به دست می‌آوریم که

جدول ۱.۳: یکی از ماتریس‌های نمایه‌ی کدهای غیریکریخت بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با توزیع درجه‌ی $n \times 4$ با وزن سطری $n = 5, 6, 7, 8$ برای فاصله‌ی کمینه‌ی ممکن با کمر ۶ و کمترین درجه بسط

وزن سطری	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$
درجه بسط	$N = 5$	$N = 7$	$N = 7$	$N = 10$
NI	۱	۲	۲	۲۹۹۶
$d_{min} = 10$	-	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 2 & 6 & 1 & 9 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 5 \end{matrix}$
$d_{min} = 8$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 9 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & 1 & 8 & 7 & 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 8 & 3 & 9 & 4 \\ 7 & 3 & 6 & 1 & 9 & 8 & 2 \end{matrix}$
$d_{min} = 6$	-	-	-	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 8 & 3 & 9 & 4 \\ 7 & 3 & 6 & 1 & 9 & 8 & 2 \end{matrix}$

جملاتش متعلق به ماتریس تفاضل D باشند. سپس نتایج به دست آمده را به ماتریس‌های نمایه با هر توزیع درجه‌ی $m \times n$ بسط می‌دهیم.

فرض کنید B' یک زیرماتریس با بعد 3×3 از ماتریس نمایه باشد. مطابق با تعریف ۱.۰.۳ یک ماتریس D' که زیرماتریسی از ماتریس تفاضل D باشد به دست می‌آوریم.

$$B' = \begin{bmatrix} b_{i_0 j_0} & b_{i_0 j_1} & b_{i_0 j_2} \\ b_{i_1 j_0} & b_{i_1 j_1} & b_{i_1 j_2} \\ b_{i_2 j_0} & b_{i_2 j_1} & b_{i_2 j_2} \end{bmatrix},$$

$$D' = \begin{bmatrix} b_{i_0 j_0} - b_{i_1 j_0} & b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1} & b_{i_0 j_2} - b_{i_1 j_2} \\ b_{i_0 j_0} - b_{i_2 j_0} & b_{i_0 j_1} - b_{i_2 j_1} & b_{i_0 j_2} - b_{i_2 j_2} \\ b_{i_1 j_0} - b_{i_2 j_0} & b_{i_1 j_1} - b_{i_2 j_1} & b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2} \end{bmatrix}$$

با تغییر ترتیب‌دهی جملات سمت چپ معادله‌ی (۷.۲) برای بررسی دور ۶، که در سمت چپ تساوی‌های زیر قرار دارند، عباراتی به دست می‌آوریم که جملاتشان متعلق به ماتریس

جدول ۲.۳: یکی از ماتریس‌های نمایه‌ی کدهای غیریکریخت بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با توزیع درجه‌ی $4 \times n$ با وزن سطری $9, 10, 11$ برای فاصله‌ی کمینه‌ی ممکن با کمر ۶ و کمترین درجه بسط

وزن سطری	$n = 9$	$n = 10$	$n = 11$
درجه‌ی بسط	$N = 10$	$N = 11$	$N = 11$
NI	۲۹	۲۴	۷
$d_{min} = 10$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 7 & 9 & 4 & 8 & 3 & 6 \\ 5 & 3 & 9 & 6 & 8 & 4 & 2 & 7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 7 & 9 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 3 & 10 & 6 & 2 & 9 & 5 & 1 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \end{matrix}$
$d_{min} = 8$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 6 & 8 & 7 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 5 & 1 & 9 & 4 & 7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 10 \\ 5 & 10 & 4 & 2 & 7 & 9 & 1 & 8 & 6 \\ 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 3 & 7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 4 & 3 & 1 & 10 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 7 & 9 & 8 & 2 & 4 & 6 & 10 & 5 \end{matrix}$
$d_{min} = 6$	$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 9 & 7 & 3 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 9 & 6 & 2 & 4 & 8 & 3 \end{matrix}$	-	-

تفاضل ۱.۰.۳ باشد. این عبارات را در سمت راست تساوی‌های زیر مشاهده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}
 b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2} + b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_0} &= (b_{i_0 j_0} - b_{i_2 j_0}) - (b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1}) - (b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2}) \\
 b_{i_0 j_1} - b_{i_0 j_0} + b_{i_1 j_0} - b_{i_1 j_2} + b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_1} &= -(b_{i_0 j_0} - b_{i_1 j_0}) + (b_{i_0 j_1} - b_{i_2 j_1}) - (b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2}) \\
 b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_2} + b_{i_1 j_2} - b_{i_1 j_1} + b_{i_2 j_1} - b_{i_2 j_0} &= (b_{i_0 j_0} - b_{i_2 j_0}) - (b_{i_1 j_1} - b_{i_2 j_1}) - (b_{i_0 j_2} - b_{i_1 j_2}) \\
 b_{i_0 j_2} - b_{i_0 j_0} + b_{i_1 j_0} - b_{i_1 j_1} + b_{i_2 j_1} - b_{i_2 j_2} &= -(b_{i_0 j_0} - b_{i_1 j_0}) - (b_{i_1 j_1} - b_{i_2 j_1}) + (b_{i_0 j_2} - b_{i_2 j_2}) \\
 b_{i_0 j_1} - b_{i_0 j_2} + b_{i_1 j_2} - b_{i_1 j_0} + b_{i_2 j_0} - b_{i_2 j_1} &= -(b_{i_1 j_0} - b_{i_2 j_0}) + (b_{i_0 j_1} - b_{i_2 j_1}) - (b_{i_0 j_2} - b_{i_1 j_2}) \\
 b_{i_0 j_2} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_0} + b_{i_2 j_0} - b_{i_2 j_2} &= -(b_{i_1 j_0} - b_{i_2 j_0}) - (b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1}) + (b_{i_0 j_2} - b_{i_2 j_2}).
 \end{aligned}
 \tag{۵.۳}$$

همانطور که می‌بینیم، هر عبارت در سمت راست تساوی‌های بالا شامل سه عنصر روی یک قطر پراکنده‌ی ماتریس D' هستند. در این عبارات عناصر در سطرها‌ی اول و سوم در یک ۱-ضرب می‌شوند. بنابراین لم زیر را ثابت کردیم.

لم ۱.۰.۳. فرض کنید D ماتریس تفاضل یک ماتریس نمایه B از اندازه‌ی $3 \times n$ باشد. گراف تر فاقد دور ۶ است اگر و فقط اگر برای هر $j_0 \neq j_1, j_0 \neq j_2, j_1 \neq j_2$ داشته باشیم:

$$-D_{0j_0} + D_{1j_1} - D_{2j_2} \not\equiv 0 \pmod{N}.$$

حال دورهای با طول ۶ را در یک ماتریس نمایه با بعد $4 \times n$ بررسی می‌کنیم. در زیر یک زیرماتریس با بعد 4×3 از ماتریس B به همراه ماتریس تفاضلش که زیرماتریسی از D می‌باشد

و با D' نمایش داده می‌شود ارائه شده است.

$$B' = \begin{bmatrix} b_{i_0 j_0} & b_{i_0 j_1} & b_{i_0 j_2} \\ b_{i_1 j_0} & b_{i_1 j_1} & b_{i_1 j_2} \\ b_{i_2 j_0} & b_{i_2 j_1} & b_{i_2 j_2} \\ b_{i_3 j_0} & b_{i_3 j_1} & b_{i_3 j_2} \end{bmatrix},$$

$$D' = \begin{bmatrix} b_{i_0 j_0} - b_{i_1 j_0} & b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1} & b_{i_0 j_2} - b_{i_1 j_2} \\ b_{i_0 j_0} - b_{i_2 j_0} & b_{i_0 j_1} - b_{i_2 j_1} & b_{i_0 j_2} - b_{i_2 j_2} \\ b_{i_0 j_0} - b_{i_3 j_0} & b_{i_0 j_1} - b_{i_3 j_1} & b_{i_0 j_2} - b_{i_3 j_2} \\ b_{i_1 j_0} - b_{i_2 j_0} & b_{i_1 j_1} - b_{i_2 j_1} & b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2} \\ b_{i_1 j_0} - b_{i_3 j_0} & b_{i_1 j_1} - b_{i_3 j_1} & b_{i_1 j_2} - b_{i_3 j_2} \\ b_{i_2 j_0} - b_{i_3 j_0} & b_{i_2 j_1} - b_{i_3 j_1} & b_{i_2 j_2} - b_{i_3 j_2} \end{bmatrix}.$$

ماتریس B' شامل چهار زیرماتریس 3×3 می‌باشد. اگر سه سطر اول D' برای بررسی معادله (۷.۲) به منظور حذف دورهای به طول ۶ انتخاب شوند، آن‌گاه با تغییر ترتیبدهی جمله‌های معادله‌ی (۷.۲) تساوی‌های به دست آمده همان شش تساوی بالا هستند. سمت راست تساوی اول و ماتریس D' تساوی زیر را نتیجه می‌دهد.

$$-(b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1}) + (b_{i_0 j_0} - b_{i_2 j_0}) - (b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2}) = -D'_{0 j_1} + D'_{1 j_0} - D'_{2 j_2}.$$

بررسی چهار زیرماتریس با بعد 3×3 از ماتریس B' لم زیر را نتیجه می‌دهد.

لم ۲.۰.۳. فرض کنید D ماتریس تفاضل یک ماتریس نمایه B از اندازه‌ی $n \times 4$ باشد. گراف تنر فاقد دور ۶ است اگر و فقط اگر برای هر $j_0 \neq j_1, j_0 \neq j_2, j_1 \neq j_2$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} ۱) -D_{0 j_0} + D_{1 j_1} - D_{2 j_2} &\neq 0 & ۲) -D_{0 j_0} + D_{2 j_1} - D_{4 j_2} &\neq 0 \\ ۳) -D_{1 j_0} + D_{2 j_1} - D_{5 j_2} &\neq 0 & ۴) -D_{3 j_0} + D_{4 j_1} - D_{5 j_2} &\neq 0. \end{aligned}$$

تمام محاسبات به پیمانه N می‌باشند.

به طور مشابه، تمام زیرماتریس‌های با بعد 3×3 از ماتریس تفاضل متناظر با یک ماتریس نمایه با بعد $n \times 5$ را بررسی می‌کنیم. نتایج این بررسی در لم زیر آمده است.

لم ۳.۰.۳. فرض کنید D ماتریس تفاضل یک ماتریس نمایه B از اندازه‌ی $n \times 5$ باشد. گراف تنر فاقد دور ۶ است اگر و فقط اگر برای هر $j_0 \neq j_1, j_0 \neq j_2, j_1 \neq j_2$ داشته باشیم:

$j_2, j_1 \neq j_2$ داشته باشیم:

$$\begin{aligned} ۱) -D_{0j_0} + D_{1j_1} - D_{4j_2} &\neq 0 & ۲) -D_{0j_0} + D_{2j_1} - D_{5j_2} &\neq 0 \\ ۳) -D_{0j_0} + D_{3j_1} - D_{6j_2} &\neq 0 & ۴) -D_{1j_0} + D_{2j_1} - D_{7j_2} &\neq 0 \\ ۵) -D_{1j_0} + D_{3j_1} - D_{8j_2} &\neq 0 & ۶) -D_{2j_0} + D_{3j_1} - D_{9j_2} &\neq 0 \\ ۷) -D_{4j_0} + D_{5j_1} - D_{7j_2} &\neq 0 & ۸) -D_{4j_0} + D_{6j_1} - D_{8j_2} &\neq 0 \\ ۹) -D_{5j_0} + D_{6j_1} - D_{9j_2} &\neq 0 & ۱۰) -D_{7j_0} + D_{8j_1} - D_{9j_2} &\neq 0. \end{aligned}$$

تمام محاسبات به پیمانه N می‌باشند.

همانطور که در لم‌های ۱.۰.۳ و ۲.۰.۳ می‌بینیم، در ماتریس نمایه‌ها با بعدهای $۴ \times n$ و $۵ \times n$ اندیس‌های سطری زیرماتریس‌ها با بعد ۳×۳ از ماتریس تفاضل D برای اجتناب از دورها با طول ۶ کاملاً متفاوتند. فرض کنید سه تایی (i, j, k) ($i, j, k \in \{0, 1, \dots, \binom{m}{3} - 1\}$) زیرماتریسی از ماتریس تفاضل D با اندیس‌های سطری i, j, k را مشخص کنند که باید برای اجتناب از دور به طول ۶ مورد بررسی قرار گیرند. برای مثال همانطور که در لم‌های ۱.۰.۳ و ۲.۰.۳ ذکر شد، سه‌تایی‌ها برای ماتریس نمایه با چهار سطر $(0, 1, 3), (0, 2, 4), (1, 2, 5), (3, 4, 5)$ هستند و سه‌تایی‌ها برای ماتریس نمایه با پنج سطر به صورت زیر هستند:

$$(0, 1, 4), (0, 2, 5), (0, 3, 6), (1, 2, 7), (1, 3, 8), (2, 3, 9), (4, 5, 7), (4, 6, 8), (5, 6, 9), (7, 8, 9).$$

به طور کلی، برای به دست آوردن یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با توزیع درجه‌ای $m \times n$ و کمر ۸ با استفاده از ماتریس تفاضل D تمام سه‌تایی‌های (i, j, k) باید تعیین شوند که به ازای هر یک از آن‌ها زیرماتریس‌ها با بعد ۳×۳ از ماتریس تفاضل D با اندیس‌های سطری i, j, k برای اجتناب از دور به طول ۶ باید مورد بررسی قرار گیرند. این سه‌تایی‌ها به صورت زیر مشخص می‌شوند.

فرض کنید D ماتریس تفاضل متناظر با یک ماتریس نمایه B با بعد $m \times n$ باشد. با به کارگیری معادله‌ی (۷.۲) در یک زیرماتریس با بعد ۳×۳ از ماتریس B برای اجتناب از دور با طول ۶ نتیجه می‌گیریم که دو عنصر از هر سطر و دو عنصر از هر ستون از زیرماتریس در سمت چپ معادله (۷.۲) ظاهر می‌شوند. بنابراین، دو عنصر با اندیس سطری i ، دو عنصر با اندیس سطری i' و دو عنصر با اندیس سطری i'' در معادله وجود دارند. فرض کنید یکی از دو جمله‌ی $(b_{ij} - b_{i'j})$ و $-(b_{ij} - b_{i'j})$ و یکی از دو جمله‌ی $(b_{ij'} - b_{i''j'})$ و $-(b_{ij'} - b_{i''j'})$ در معادله‌ی (۷.۲) ظاهر شوند. اگر آن‌ها، به ترتیب، در $i_1 -$ امین سطر و $i_2 -$ امین سطر از ماتریس تفاضل D باشند، آن‌گاه سطر سوم شامل عبارت $(b_{i_1j''} - b_{i_2j''})$ یا $-(b_{i_1j''} - b_{i_2j''})$ می‌شوند. اگر این عبارت در $i_3 -$ امین سطر ماتریس تفاضل D باشد، آن‌گاه سه‌تایی متناظر (i_1, i_2, i_3) می‌شود. معادله (۷.۲) برای اجتناب از دور با طول ۶ به صورت شش نامعادله هست. در [۴۹]، کاربرد معادله (۷.۲) در یک ماتریس نمایه با بعد $۳ \times n$ که سطر اول و ستون اولش تمام صفر هستند برای اجتناب از دور با طول ۶، سه نوع نامعادله مطرح شده است. در لم زیر ثابت

می‌کنیم که با استفاده از ماتریس تفاضل DD بررسی تنها یک نامعادله کافی است. این نوع نامعادله برای هر ماتریس نمایه با بعد $m \times n$ که سطر اول و ستون اولش تمام صفر هستند به کار می‌رود.

لم ۴.۰.۳. فرض کنید DD ماتریس تفاضل متناظر با یک ماتریس نمایه B با بعد $m \times n$ باشد. مؤلفه‌های اول و دوم ij - امین عنصر ماتریس تفاضل DD را به ترتیب DD_{ij} و $N - DD_{ij}$ در نظر بگیرید. اگر گراف تنر فاقد دور با طول ۶ باشد، آن‌گاه زیرماتریسی از DD متناظر با زیرماتریس با بعد 3×3 از B که سطر اول آن تمام صفر است در نامعادله‌های زیر صدق می‌کند.

$$\begin{aligned} ۱) \quad DD_{ij_0} &\neq DD_{i'j_1} & ۲) \quad DD_{ij_0} &\neq N - DD_{i'j_2} \\ ۳) \quad DD_{ij_1} &\neq DD_{i'j_2} & ۴) \quad DD_{ij_1} &\neq DD_{i'j_0} \\ ۵) \quad DD_{ij_2} &\neq N - DD_{i'j_0} & ۶) \quad DD_{ij_2} &\neq DD_{i'j_1}, \end{aligned}$$

که در آن‌ها $i \neq i' \in \{0, \dots, m-2\}$. اندیس‌های ستونی مجزای j_0, j_1 و j_2 از DD متناظر با سه ستون از B هستند.

فرض کنید سطر اول و ستون اول ماتریس نمایه تمام صفر باشند. لم ۴.۰.۳ در هر زیرماتریس با بعد 3×3 از ماتریس تفاضل DD که در آن دو اندیس سطری متعلق به $\{0, \dots, m-2\}$ باشند به کار می‌رود. به عبارت دیگر، این لم برای هر سه‌تایی (i, j, k) که i, j متعلق به $\{0, \dots, m-2\}$ باشند به کار می‌رود. بنابراین، برای یک ماتریس نمایه با بعد $3 \times n$ که سطر اول و ستون اول آن تمام صفر باشند، به جای بررسی معادله‌ی (۷.۲) یا بررسی نامعادله در لم ۱.۰.۳ نامعادله‌های لم ۴.۰.۳ را برای اجتناب از دور با طول ۶ بررسی می‌کنیم. همانطور که در بالا ذکر شد، سه‌تایی‌های (i, j, k) برای اجتناب از دور به طول ۶ در یک ماتریس نمایه با بعد $4 \times n$ عبارت‌اند از $(0, 1, 3), (0, 2, 4), (1, 2, 5), (3, 4, 5)$ که به ترتیب توسط نامعادله‌های ۱, ۲, ۳, ۴ در لم ۲.۰.۳ باید مورد بررسی قرار گیرند. سه سه‌تایی اول شامل دو عضو از مجموعه‌ی $\{0, 1, 2\}$ هستند. بنابراین، برای بررسی دورها با طول ۶ در یک ماتریس نمایه با بعد $4 \times n$ که سطر اول و ستون اول آن تمام صفر باشند لم ۴.۰.۳ را به نامعادله‌های ۱, ۲, ۳ از لم ۲.۰.۳ ترجیح می‌دهیم. در نتیجه، به منظور ساخت یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با توزیع درجه‌ی $4 \times n$ که فاقد دور با طول ۶ باشد دو نوع نامعادله وجود دارند که برای اجتناب از دور با طول ۶ مورد بررسی قرار می‌گیرند. نوع اول، کاربرد لم ۴.۰.۳ در سه‌تایی‌های $(0, 1, 3), (0, 2, 4), (1, 2, 5)$ هستند. نوع دوم، نامعادله‌ی $-D_{\epsilon_{j_1}} + D_{\delta_{j_2}} - D_{\epsilon_{j_3}} \neq 0$ است. به علاوه، برای یک ماتریس نمایه با بعد $5 \times n$ ، نامعادله‌های ۱ تا ۶ در لم ۳.۰.۳ توسط ماتریس تفاضل DD بررسی می‌شوند. بنابراین، تنها چهار نامعادله‌ی آخر در لم ۳.۰.۳ توسط ماتریس تفاضل D بررسی می‌شوند. علاوه بر کاهش پیچیدگی محاسباتی در الگوریتم جستجو، لم ۴.۰.۳ کاربرد مهمی در یافتن ماتریس نمایه با کمر ۱۰ دارد. این مزیت در بخش بعد مطرح می‌شود.

۳.۰.۳ بررسی دور با طول ۸ با استفاده از ماتریس‌های تفاضل

برای به دست آوردن یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۸، نه نوع متفاوت از زیرماتریس‌های ماتریس نمایه باید بررسی شوند. این زیرماتریس‌ها از اندازه‌های زیر هستند.

$$2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4, 3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 2, 4 \times 3, 4 \times 4.$$

با استفاده از دو ماتریس تفاضل D و DD روشی برای به دست آوردن ماتریس نمایه با کمر 10 ارائه می‌دهیم. این روش پیچیدگی الگوریتم جستجو را کاهش می‌دهد به این دلیل که برای اجتناب از دور با طول ۸ با استفاده از این روش معادله (۷.۲) برای زیرماتریس‌های ذکر شده بررسی نمی‌شوند. به علاوه نشان می‌دهیم اگر این روش را برای ساخت ماتریس نمایه استفاده کنیم، آن‌گاه در صورتی که سطر اول و ستون اول ماتریس نمایه تمام صفر باشند گراف تنر فاقد دور با طول ۸ شامل دور با طول ۶ نیز نیست. همچنین، کران پایین روی درجه بسط کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با کمر 10 ارائه می‌دهیم که برابر است با $1 + \binom{m}{2} \binom{n}{2}$. ابزار اصلی ما برای بررسی دور با طول ۸ در لم ۵.۰.۳ مطرح شده است. در واقع، با استفاده از این لم نشان می‌دهیم هر درایه از ماتریس تفاضل DD به صورت یک زیرماتریس مربعی از اندازه ۲ از ماتریس نمایه B در نظر گرفته می‌شود. و عبارت سمت چپ معادله (۷.۲) حاصل تفاضل دو درایه از ماتریس تفاضل DD است.

لم ۵.۰.۳. اگر سمت چپ معادله (۷.۲) برای بررسی دور با طول ۸ شامل بیش از دو عنصر از یک ستون ماتریس نمایه باشد، آن‌گاه جمله‌ها در این معادله می‌توانند به دو زیرماتریس با بعد 2×2 از ماتریس نمایه در نظر گرفته شوند.

برهان. یک نوع از زیرماتریس‌ها را که در شرط صدق می‌کنند بررسی می‌کنیم اثبات بقیه مشابه است. فرض کنید سمت چپ معادله (۷.۲) برای زیرماتریس با بعد 4×3 به صورت زیر باشد.

$$b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2} + b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_1} + b_{i_3 j_1} - b_{i_3 j_0}$$

جملات این عبارت را در زیرماتریسی از ماتریس B به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$\begin{bmatrix} b_{i_0 j_0} & b_{i_0 j_1} & * \\ * & b_{i_1 j_1} & b_{i_1 j_2} \\ * & b_{i_2 j_1} & b_{i_2 j_2} \\ b_{i_3 j_0} & b_{i_3 j_1} & * \end{bmatrix}$$

عناصر این زیرماتریس را می‌توان در دو ماتریس از اندازه 2×2 که با B' و B'' در نظر گرفت.

$$B'' = \begin{bmatrix} b_{i_1 j_1} & b_{i_1 j_2} \\ b_{i_2 j_1} & b_{i_2 j_2} \end{bmatrix}, B' = \begin{bmatrix} b_{i_0 j_0} & b_{i_0 j_1} \\ b_{i_3 j_0} & b_{i_3 j_1} \end{bmatrix}$$

□

با استفاده از لم ۵.۰.۳ معادلی برای معادله‌ی (۷.۲) به دست می‌آوریم که جمله‌های آن متعلق به دو سطر از ماتریس تفاضل D باشند.

در قضیه زیر مزیت استفاده از ماتریس تفاضل را برای به دست آوردن کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۸ را توضیح می‌دهیم.

قضیه ۱.۰.۳. یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری شامل دور با طول ۸ نیست اگر

• (i) ماتریس حاصل از ضرب ماتریس تفاضل DD در ۲ (یا همان ماتریس DD) شامل عنصر صفر نباشد.

• (ii) ماتریس تفاضل DD عنصر تکراری نداشته باشد.

• (iii) معادله (۷.۲) به ازای هر زیرماتریس 4×4 از ماتریس نمایه ناصفر باشد.

برهان. این قضیه در سه مرحله ثابت می‌شود.

مرحله اول: در مرحله اول زیرماتریس‌ها از ماتریس نمایه که شامل دو سطر هستند بررسی می‌شود. فرض کنید زیرماتریس دو سطر از ماتریس نمایه با اندیس‌های سطری i_0 و i_1 را شامل شود.

حالت اول: فرض کنید زیرماتریس با بعد 2×2 باشد و اندیس‌های ستونی j_0 و j_1 باشد. در این صورت سمت چپ معادله (۷.۲) به صورت زیر خواهد بود.

$$b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_0} + b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_0} = 2(b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_0}).$$

با تغییر ترتیب جملات معادله داریم:

$$2((b_{i_0 j_0} - b_{i_1 j_0}) - (b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1})) = 2(D_{i_0 j_0} - D_{i_1 j_0}); (i \in \{0, 1, \dots, \binom{m}{2} - 1\})$$

بنابراین، ماتریس تفاضل کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۸ در عبارت $2(D_{i_0 j_0} - D_{i_1 j_0}) \neq 0$ صدق می‌کنند. از آنجایی که مؤلفه‌ای از یک درایه‌ی ماتریس DD می‌باشد نتیجه می‌گیریم: $2DD \neq 0$. بنابراین شرط اول قضیه ثابت شد. در این حالت اگر معادله (۷.۲) مورد استفاده قرار گیرد، آن‌گاه $\binom{m}{2} \binom{n}{2}$ نامعادله باید برای اجتناب از دور با طول ۸ بررسی شود.

حالت دوم: فرض کنید زیرماتریس با بعد 2×3 باشد و اندیس‌های ستونی j_0, j_1, j_2 باشد. در این صورت سمت چپ معادله (۷.۲) و عبارت متناظرش در ماتریس تفاضل D به صورت زیر است

$$b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2} + b_{i_0 j_2} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_0} = (b_{i_0 j_0} - b_{i_1 j_0}) - (b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1}) + (b_{i_0 j_2} - b_{i_1 j_2}) - (b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1}) = D_{i_0 j_0} - D_{i_1 j_0} + D_{i_0 j_2} - D_{i_1 j_2}.$$

بنابراین، ماتریس تفاضل کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۸ در عبارت $D_{ij_0} - D_{ij_1} + D_{ij_2} - D_{ij_3} \neq 0$ یا $D_{ij_0} - D_{ij_1} \neq D_{ij_2} - D_{ij_3}$ صدق می کنند. برای به دست آوردن این نامعادله دور با طول ۸ با درایه‌ی $b_{i_0j_0}$ از ماتریس نمایه شروع می شود. اگر دور با درایه‌ی $b_{i_0j_1}$ شروع شود، آن گاه یکی از نامعادله‌های $D_{ij_0} - D_{ij_1} \neq -(D_{ij_2} - D_{ij_3})$ یا $D_{ij_0} - D_{ij_1} \neq (D_{ij_2} - D_{ij_3})$ به دست می آید. همانطور که می بینیم دو طرف نامعادله‌ها مؤلفه‌هایی از i - امین عنصر ماتریس تفاضل DD هستند. در این حالت، اگر معادله (۷.۲) مورد استفاده قرار گیرد، آن گاه $\binom{n}{3} \binom{m}{2} \binom{3}{1}$ نامعادله باید برای اجتناب از دور با طول ۸ بررسی شود.

حالت سوم: فرض کنید زیرماتریس با بعد 2×4 باشد و اندیس‌های ستونی j_0, j_1, j_2, j_3 باشد. همانند حالت قبل معادله (۷.۲) و عبارت معادلش در ماتریس تفاضل را بررسی می کنیم که نتیجه می دهد ماتریس تفاضل کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۸ در عبارت $\pm(D_{ij_0} - D_{ij_1}) \neq \pm(D_{ij_2} - D_{ij_3})$ صدق می کنند. در این حالت نیز دو طرف نامعادله‌ها مؤلفه‌هایی از i - امین عنصر ماتریس تفاضل DD هستند. در این حالت، اگر معادله (۷.۲) مورد استفاده قرار گیرد، آن گاه $\binom{n}{4} \binom{m}{2} \binom{4}{2}$ نامعادله باید برای اجتناب از دور با طول ۸ بررسی شود.

از حالت‌های دوم و سوم نتیجه می گیریم که هر سطر از ماتریس تفاضل DD شامل $2 \binom{m}{2}$ عنصر مجزا است. فرض کنید $(D_{ij} - D_{ij'}, D_{ij''} - D_{ij})$ و $(D_{ij} - D_{ij'}, D_{ij'} - D_{ij})$ دو درایه از i - امین سطر ماتریس تفاضل DD باشد. اگر آن‌ها مؤلفه‌ی مشترک داشته باشند، آن گاه یکی از تساوی‌های $D_{ij'} = D_{ij''}$ یا $(D_{ij} - D_{ij'}) + D_{ij} - D_{ij''} = 0$ نتیجه می شود که با فرض قضیه که گراف تر فاقد دور ۸ است متناقض است.

مرحله دوم: در این مرحله زیرماتریس‌ها از ماتریس نمایه که شامل سه سطر هستند بررسی می شود. فرض کنید زیرماتریس سه سطر از ماتریس نمایه با اندیس‌های سطری i_0, i_1, i_2 را شامل شود.

حالت اول: فرض کنید j_0 و j_1 دو اندیس ستونی ماتریس نمایه در زیرماتریس با بعد 3×2 باشد. سمت چپ معادله (۷.۲) و عبارات معادلش از ماتریس تفاضل D به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} I) \quad & b_{i_0j_0} - b_{i_0j_1} + b_{i_1j_1} - b_{i_1j_0} + b_{i_2j_0} - b_{i_2j_1} + b_{i_1j_1} - b_{i_1j_0} = (b_{i_0j_0} - b_{i_1j_0}) \\ & - (b_{i_0j_1} - b_{i_1j_1}) - (b_{i_1j_0} - b_{i_2j_0}) + (b_{i_1j_1} - b_{i_2j_1}) = D_{ij_0} - D_{ij_1} - D_{i'j_0} + D_{i'j_1} \\ II) \quad & b_{i_1j_0} - b_{i_1j_1} + b_{i_0j_1} - b_{i_0j_0} + b_{i_2j_0} - b_{i_2j_1} + b_{i_0j_1} - b_{i_0j_0} = -(b_{i_0j_0} - b_{i_1j_0}) \\ & + (b_{i_0j_1} - b_{i_1j_1}) - (b_{i_1j_0} - b_{i_2j_0}) + (b_{i_0j_1} - b_{i_2j_1}) = -D_{ij_0} + D_{ij_1} - D_{i'j_0} + D_{i'j_1} \\ III) \quad & b_{i_1j_0} - b_{i_1j_1} + b_{i_2j_1} - b_{i_2j_0} + b_{i_0j_0} - b_{i_0j_1} + b_{i_2j_1} - b_{i_2j_0} = (b_{i_0j_0} - b_{i_2j_0}) \\ & - (b_{i_0j_1} - b_{i_2j_1}) + (b_{i_1j_0} - b_{i_2j_0}) - (b_{i_1j_1} - b_{i_2j_1}) = D_{ij_0} - D_{ij_1} + D_{i'j_0} - D_{i'j_1} \end{aligned}$$

بنابراین، با بررسی تمام شرایط بالا نتیجه می گیریم که کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۸ در نامعادله

$$\pm(D_{ij_0} - D_{ij_1}) \neq \pm(D_{i'j_0} - D_{i'j_1}); (i \neq i'; i, i' \in \{0, 1, \dots, \binom{m}{2} - 1\})$$

صدق می‌کنند. بنابراین، هر ستون از ماتریس تفاضل DD عنصر تکراری ندارد. اگر معادله (۷.۲) مورد استفاده قرار گیرد، آن گاه $\binom{m}{2} \binom{n}{2} \binom{3}{1}$ نامعادله باید برای اجتناب از دور با طول ۸ بررسی شود.

حالت دوم: فرض کنید زیرماتریس با بعد 3×3 و اندیس‌های ستونی j_0, j_1, j_2 باشد. مشابه حالت قبل معادله (۷.۲) را که شامل نه مورد است بررسی می‌کنیم. عبارات معادل آن‌ها در ماتریس تفاضل به صورت $\pm(D_{ij_0} - D_{ij_1}) \neq \pm(D_{i'j_1} - D_{i'j_2})$ می‌باشد. اگر معادله (۷.۲) مورد استفاده قرار گیرد، آن گاه $\binom{m}{2} \binom{n}{2} \binom{3}{1} \binom{3}{1}$ نامعادله باید برای اجتناب از دور با طول ۸ بررسی شود.

حالت سوم: زیر ماتریس با بعد 3×4 و اندیس‌های ستونی j_0, j_1, j_2, j_3 از ماتریس نمایه را در نظر بگیرید. سمت چپ معادله (۷.۲) به صورت

$$b_{i_0j_0} - b_{i_0j_1} + b_{i_1j_1} - b_{i_1j_2} + b_{i_2j_2} - b_{i_2j_3} + b_{i_3j_3} - b_{i_3j_0}$$

می‌باشد. با تغییر ترتیب جمله‌ها عبارت زیر از ماتریس تفاضل به دست می‌آید:

$$(b_{i_0j_0} - b_{i_1j_0}) - (b_{i_0j_1} - b_{i_1j_1}) - (b_{i_1j_2} - b_{i_2j_2}) + (b_{i_1j_3} - b_{i_2j_3}) = (D_{ij_0} - D_{ij_1}) - (D_{i'j_2} - D_{i'j_3}).$$

در این مورد، عبارت $(D_{ij_0} - D_{ij_1})$ مؤلفه‌ای در i - امین سطر و عبارت $(D_{i'j_2} - D_{i'j_3})$ مؤلفه‌ای در i' - امین سطر D است. در نتیجه، اگر گراف تنر فاقد دور با طول ۸ باشد، آن گاه برای هر دو سطر و چهار ستون از D داریم: $\pm(D_{ij_0} - D_{ij_1}) \neq \pm(D_{i'j_2} - D_{i'j_3})$. در این حالت، اگر معادله (۷.۲) مورد بررسی قرار گیرد، آن گاه $\binom{m}{2} \binom{n}{2} \binom{4}{2}$ نامعادله باید برای اجتناب از دور با طول ۸ بررسی شود.

مرحله سوم: در این مرحله زیرماتریس‌ها از ماتریس نمایه که شامل چهار سطر هستند بررسی می‌شود. فرض کنید زیرماتریس چهار سطر از ماتریس نمایه با اندیس‌های سطری i_0, i_1, i_2, i_3 را شامل شود.

حالت اول: فرض کنید j_0 و j_1 دو اندیس ستونی ماتریس نمایه در زیرماتریس با بعد 4×2 باشد. سمت چپ معادله (۷.۲) و عبارات معادله از ماتریس تفاضل D به صورت زیر هستند:

$$b_{i_0j_0} - b_{i_0j_1} + b_{i_1j_1} - b_{i_1j_0} + b_{i_2j_0} - b_{i_2j_1} + b_{i_3j_1} - b_{i_3j_0} = D_{ij_0} - D_{ij_1} + D_{i'j_0} - D_{i'j_1}.$$

این مورد مشابه با بررسی زیرماتریس‌ها با بعد 3×2 می‌باشد. با بررسی آن‌ها نتیجه‌ای مشابه حاصل می‌شود. بنابراین، کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۸ در نامعادله زیر صدق می‌کنند:

$$\pm(D_{ij_0} - D_{ij_1}) \neq \pm(D_{i'j_0} - D_{i'j_1}); (i \neq i'; i, i' \in \{0, 1, \dots, \binom{m}{2} - 1\})$$

اگر معادله (۷.۲) مورد بررسی قرار گیرد، آن گاه $\binom{n}{m} \binom{m}{4} 6$ نامعادله باید برای اجتناب از دور با طول ۸ بررسی شود. در صورتی که اگر ماتریس‌های تفاضل را استفاده کنیم، آن گاه از آنجایی که این حالت مشابه با بررسی ماتریس‌های با بعد 2×3 است، نیازی به بررسی دوباره این حالت نیست.

حالت دوم: فرض کنید زیرماتریس با بعد 3×4 و اندیس‌های ستونی j_0, j_1, j_2 باشد. با بررسی معادله (۷.۲) نتیجه می‌گیریم که کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۸ در نامعادله زیر صدق می‌کنند: $\pm(D_{ij_0} - D_{ij_1}) \neq \pm(D_{il_{j_1}} - D_{il_{j_2}})$. از آنجایی که نتیجه این حالت مشابه با بررسی ماتریس‌های با بعد 3×3 است، نیازی به بررسی دوباره این حالت نیست. در صورتی که اگر معادله (۷.۲) مورد بررسی قرار گیرد، آن گاه $\binom{n}{m} \binom{m}{4} \binom{4}{1}$ نامعادله باید برای اجتناب از دور با طول ۸ بررسی شود.

تمام حالت‌ها بجز حالت اول در مرحله اول نتیجه می‌دهند که هر دو سطر از ماتریس تفاضل DD در کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۸ شامل عنصر تکراری نیستند. در نتیجه، شرط دوم قضیه اثبات شد.

□

حالت سوم: واضح است.

مطابق با قضیه ۱.۰.۳ اگر یک ماتریس تفاضل DD را استفاده کنیم، آن گاه نیازی به بررسی تمام زیرماتریس‌ها با بعدهای $2 \times 3, 2 \times 4, 3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 4, 4 \times 2, 4 \times 3$ نیست. در عوض، عدم وجود عناصر تکراری در ماتریس تفاضل DD و عنصر صفر در DD را بررسی می‌کنیم.

مثال ۲.۰.۳. فرض کنید B ماتریس نمایه داده شده در مثال ۱.۰.۳ باشد. از آنجایی که درجه بسط $N = 37$ عددی فرد است، برای ij - امین عنصر $2DD$ داریم: $2DD_{ij} \neq 0 \pmod{N}$. بنابراین، B در شرط اول قضیه ۱.۰.۳ صدق می‌کند. همانطور که می‌بینیم در این مورد هیچ محاسبه‌ای مورد نیاز نیست. با مقایسه هر دو درایه از ماتریس تفاضل DD نتیجه می‌گیریم که عنصر تکراری در DD وجود ندارد. در نتیجه، B در شرط دوم قضیه ۱.۰.۳ صدق می‌کند. به علاوه شرط سوم قضیه در مورد ماتریس‌های نمایه با سه سطر بررسی نمی‌شود. از قضیه ۱.۰.۳ نتیجه می‌گیریم که گراف تنر ماتریس نمایه داده شده دور با طول ۸ ندارد. اگر تمام زیر ماتریس‌ها با بعدهای $2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4, 3 \times 2, 3 \times 3, 3 \times 4$ را بررسی کنیم، آن گاه ۱۶۸ نامعادله برای اجتناب از دور با طول ۸ باید بررسی شود.

در اثبات قضیه ۱.۰.۳ تعداد نامعادله‌های مربوط به معادله (۷.۲) که برای اجتناب از دور با طول ۸ باید بررسی شود را محاسبه کردیم. به علاوه، در جدول ۳.۵ تعداد عملگرها در معادله (۷.۲) و تعداد عملگرها وقتی قضیه ۱.۰.۳ را بررسی می‌کنیم برای یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با توزیع درجه $m \times n$; ($m = 3, 4, 5, 6$) ارائه شده است. در نتیجه‌ی زیر این مقایسه برای تمام مقادیر m و n داده شده است.

جدول ۳.۳: تعداد عملگرهای معادله (۷.۲) برای اجتناب از دور با طول ۸ و تعداد عملگرهای قضیه ۱.۰.۳ برای بررسی دور با طول ۸ در کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با توزیع درجه $m \times n$ و وزن ستونی $m = 3, 4, 5, 6$

معادله (۷.۲) قضیه ۱.۰.۳ با درجه بسط فرد قضیه ۱.۰.۳ با درجه بسط زوج	m
$3n + 15\binom{n}{2} + \binom{3}{2}\binom{n}{2}$	3
$4n + 18\binom{n}{2} + \binom{4}{2}\binom{n}{2}$	4
$5n + 20\binom{n}{2} + \binom{5}{2}\binom{n}{2}$	5
$6n + 21\binom{n}{2} + \binom{6}{2}\binom{n}{2}$	6

نتیجه ۲.۰.۳. فرض کنید B ماتریس نمایه‌ای باشد که گراف تنر آن دور با طول ۴ را شامل نمی‌شود. تعداد عملگرهای مورد نیاز برای به دست آوردن یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۸ وقتی معادله (۷.۲) را بررسی می‌کنیم عبارت است از

$$9\binom{n}{2}\binom{m}{2}((n-2)\binom{2}{2}(m-2) + 3m - 4) + (n-2)\binom{2}{2}(m-2) + 2m - 3 + m).$$

اگر ماتریس تفاضل DD را بررسی کنیم، آن‌گاه تعداد عملگرها وقتی درجه بسط N عددی فرد است برابر است با:

$$n\binom{m}{2} + 3\binom{n}{2}\binom{m}{2} + \binom{n}{2}\binom{m}{2} + 5\binom{n}{4}\binom{m}{4}$$

و اگر درجه بسط عددی زوج باشد برابر است با:

$$n\binom{m}{2} + 5\binom{n}{2}\binom{m}{2} + \binom{n}{2}\binom{m}{2} + 5\binom{n}{4}\binom{m}{4}.$$

توجه کنید که در نتیجه ۲.۰.۳ تعداد عملگرها برای ساخت ماتریس‌های تفاضل D و DD نیز در نظر گرفته شده اند که به ترتیب $n\binom{m}{2}$ و $3\binom{n}{2}\binom{m}{2}$ می باشند. به علاوه، برای اطمینان از عدم وجود عناصر تکراری در ماتریس تفاضل DD کافی است مؤلفه‌ی کوچکتر هر درایه در DD را در نظر بگیریم. اگر آن‌ها زیرمجموعه‌ای از $\{1, 2, \dots, \lfloor \frac{N}{2} \rfloor\}$ با اندازه $\binom{n}{2}\binom{m}{2}$ را ایجاد کنند، آن‌گاه ماتریس نمایه در شرط دوم قضیه ۱.۰.۳ صدق می‌کند. تعداد عملگرها در این مورد $\binom{n}{2}\binom{m}{2}$ می‌باشد. یکی از مزیت‌های مهم ماتریس‌های تفاضل را در ساخت کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری را در نتیجه‌ی زیر مطرح می‌کنیم.

نتیجه ۳.۰.۳. فرض کنید B ماتریس نمایه با بعد $3 \times n$ باشد. اگر سطر اول و ستون اول ماتریس B تمام صفر باشند و ماتریس تفاضل DD در قضیه ۱.۰.۳ صدق کند، آن‌گاه گراف تنر دور ۶ ندارد.

برهان. مطابق با قضیه ۳/۰/۱، ماتریس تفاضل DD عنصر تکراری ندارد. بنابراین، تمام نامساوی‌ها در لم ۳/۰/۴. اتفاق می‌افتد و گراف تنر دور ۶ ندارد. $\square$

با استفاده از مطالب بالا، روشی برای برای ساخت ماتریس‌های نمایه با بعد $3 \times n$ با کمر 10° ارائه می‌دهیم که در آن‌ها سطر اول و ستون اول ماتریس نمایه تمام صفر هستند. در این روش نیازی به بررسی هیچ زیرماتریسی از ماتریس نمایه برای اجتناب از دورها با طول کمتر از 10° نیست. در واقع، به دنبال ماتریس‌های نمایه با کمر و درجه بسط N هستیم که ماتریس تفاضل DD آن شامل عناصر مجزای ناصفر باشد و در نامساوی $2DD \neq 0 \pmod{N}$ صدق کند. اگر ماتریس DD عنصر تکراری نداشته باشد و $2DD \neq 0 \pmod{N}$ ، آن‌گاه مطابق قضیه ۱.۰.۳، گراف تنر دور با طول ۸ ندارد. با استفاده از نتیجه ۴.۰.۳ گراف تنر دور با طول ۶ ندارد و از آنجایی که ماتریس تفاضل DD عنصر صفر ندارد، نتیجه ۱.۰.۳ ثابت می‌کند که گراف تنر دور با طول ۴ ندارد. ما نتیجه را برای هر ماتریس نمایه با بعد $m \times n$ که در آن‌ها سطر اول و ستون اول ماتریس نمایه تمام صفر هستند تعمیم می‌دهیم.

نتیجه ۴.۰.۳. فرض کنید B یک ماتریس نمایه با بعد $m \times n$ باشد. اگر سطر اول و ستون اول B تمام صفر باشد و ماتریس تفاضل DD در شرایط قضیه ۱.۰.۳ صدق کند، آن‌گاه برای اجتناب از دور با طول ۶ نیازی به بررسی معادله (۷.۲) برای هر زیرماتریس با بعد 3×3 از ماتریس نمایه که سطر اول تمام صفر دارد نیست.

در جدول ۴.۵، تعداد عملگرها برای به دست آوردن یک ماتریس نمایه با بعد $m \times n$ ($m \leq 12$) و کمر $3, 4$ و 10° بین دو مورد مقایسه کردیم. در مورد اول، معادله (۷.۲) و برای مورد دوم ماتریس‌های تفاضل D و DD استفاده کردیم.

جدول ۴.۳: مقایسه تعداد عملگرها بین معادله (۷.۲) و ماتریس‌های تفاضل

$n = 12$	$n = 11$	$n = 10$	$n = 9$	$n = 8$	$n = 7$	$n = 6$	$n = 5$	$n = 4$	
۱۷۴۱۷۴	۱۲۲۱۰۰	۸۲۶۶۵	۵۳۶۴۰	۳۳۰۱۲	۱۸۹۸۴	۹۹۷۵	۴۶۲۰	۱۷۷۰	معادله (۷.۲)، $m = 3$
۲۰۷۲۷	۱۴۲۲۳	۹۸۸۵	۶۲۳۷	۴۰۱۴	۲۲۲۶	۱۲۷۸	۵۷۰	۲۷۳	ماتریس‌های تفاضل، $m = 3$
۵۵۸۰۹۶	۳۹۴۶۸۰	۲۶۹۹۱۰	۱۷۷۱۹۲	۱۱۰۵۴۴	۶۴۵۹۶	۳۴۵۹۰	۱۶۳۸۰	-	معادله (۷.۲)، $m = 4$
۸۸۰۱۷	۶۰۹۵۱	۴۱۶۵۵	۲۶۵۶۸	۱۶۶۱۰	۹۳۱۰	۵۰۴۶	۲۲۴۵	-	ماتریس‌های تفاضل، $m = 4$

همانطور که می‌بینیم، تعداد عملگرها وقتی ماتریس‌های تفاضل را استفاده می‌کنیم خیلی کمتر از تعداد عملگرها وقتی معادله (۷.۲) را بررسی می‌کنیم. به علاوه، روش ما دقیقتر و جامعتر به نظر می‌رسد. زیرا تعداد کدهای غیریکریخت بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با کمر 10° و توزیع درجه 3×5 در [۴۹] ۳ است در صورتی که ما نشان می‌دهیم تعداد این کدها ۴ است. این مطلب برای تعداد کدهای غیریکریخت بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با توزیع درجه 3×6 و کمر 10° نیز برقرار است. به علاوه، استفاده از ماتریس‌های تفاضل، یک ماتریس نمایه با بعد 3×7 و یک ماتریس نمایه با بعد 3×8 و کمر 10° با درجه بسط‌های به ترتیب $N = 145$ و $N = 211$ ، را نتیجه می‌دهد. در حالی که کران پایین روی N که در مقاله‌ها گزارش شده‌اند برای این کدها به ترتیب ۱۵۹ و ۲۱۹ می‌باشند.

جدول ۵.۳: تمام کدهای غیریکریخت بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با توزیع درجه $n = 4, 5, 6$; $3 \times n$ و یک ماتریس نمایه با کمر 10 برای $n = 7, 8$. (کدهای غیریکریخت با کدها در [۴۹] به صورت ماتریس نمایش داده شده‌اند.)

n, N	ماتریس نمایه جدید	یکریخت با [۴۹]	یکریخت با [۴۹]	یکریخت با [۴۹]
$n = 4, N = 37$		$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 24 \\ 11 & 33 & 5 \end{bmatrix}$		
$n = 5, N = 61$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 11 & 27 \\ 14 & 56 & 32 & 12 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 21 & 55 \\ 5 & 15 & 44 & 31 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 21 & 55 \\ 14 & 42 & 50 & 38 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 28 & 44 \\ 14 & 56 & 26 & 6 \end{bmatrix}$
$n = 6, N = 91$	$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 28 & 40 & 48 \\ 10 & 60 & 7 & 36 & 25 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 25 & 38 \\ 17 & 51 & 28 & 61 & 9 \end{bmatrix}$		
$n = 7, N = 145$	$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 44 & 71 & 92 & 122 \\ 4 & 20 & 108 & 83 & 123 & 76 \end{bmatrix}$			
$n = 8, N = 211$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 12 & 39 & 56 & 183 & 192 \\ 3 & 13 & 92 & 188 & 106 & 74 & 151 \end{bmatrix}$			

علاوه بر کاهش بعد فضای جستجو، قضیه ۱.۰.۳ یک کران پایین روی درجه بسط کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با کمر 10 را نتیجه می‌دهد. درجه بسط کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با کمر 10 و توزیع درجه $m \times n$ دست کم $1 + \binom{n}{2} \binom{m}{2}$ می‌باشد.

برهان. از آنجایی که گراف تنر کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با کمر 10 و توزیع درجه $m \times n$ دور با طول 8 ندارد، از شرط دوم قضیه ۱.۰.۳ نتیجه می‌گیریم که ماتریس تفاضل DD ، عنصر تکراری ندارد. بنابراین، ماتریس DD شامل $\binom{m}{2}n(n-1)$ عنصر مجزاست. در نتیجه، داریم: $N \geq 1 + \binom{n}{2} \binom{m}{2}$. $\square$

کمترین درجه بسط کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با کمر 10 و توزیع درجه $n = 4, 5, 6$; $3 \times n$ با کران پایین داده شده برابر است. این درجه بسط‌ها به ترتیب $N = 37, 61, 91$ می‌باشند.

به علاوه، وجود و عدم وجود عناصر تکراری در ماتریس تفاضل DD تعیین می‌کند که آیا یک ساختار یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با کمر 10 می‌دهد یا نه. در مثال زیر، نشان می‌دهیم که گراف تنر کدهای بررسی-توازن کم-چگال به دست آمده از روش مقارن در [۴۸] دور با طول 8 دارد.

مثال ۳.۰.۳. در [۴۸] نشان داده شده است که اگر n عددی زوج باشد، آن‌گاه ماتریس نمایه M با بعد $m \times \frac{n}{2}$ با کمر دست کم 8 یک ماتریس نمایه $B = [M \quad -M]$ با بعد $m \times n$ و کمر دست کم 8 می‌دهد. سطر اول B تمام صفر است. اگر b_{ij} و $-b_{ij}$ دو درایه از B باشند، آن‌گاه

$(-b_{ij}, b_{ij})$ و $(b_{ij}, -b_{ij})$ دو درایه از DD هستند. بنابراین، ماتریس DD عنصر تکراری دارد و مطابق با قضیه ۳/۱/۲ گراف تتر ماتریس نمایه B دور با طول ۸ دارد.

۴.۰.۳ بررسی دور با طول ۱۰ با استفاده از ماتریس‌های تفاضل

نه نوع مختلف از زیرماتریس‌های ماتریس نمایه وجود دارد که باید برای به دست آوردن کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۱۰ بررسی شود. این زیرماتریس‌ها شامل دست کم سه سطر و سه ستون هستند. بعدهای این زیرماتریس‌ها عبارت‌اند از

$$3 \times 3, 3 \times 4, 3 \times 5, 4 \times 3, 4 \times 4, 4 \times 5, 5 \times 3, 5 \times 4, 5 \times 5.$$

در این مورد، ماتریس‌های تفاضل D و DD را به جای معادله (۷.۲) استفاده می‌کنیم. ابزار اصلی برای بررسی کد با طول ۱۰ را در لم زیر فراهم می‌کنیم.

لم ۶.۰.۳. اگر عبارت سمت چپ معادله (۷.۲) برای بررسی دور با طول ۱۰ شامل بیش از دو درایه از یک ستون یا یک سطر از ماتریس نمایه باشد، آنگاه عبارت معادلش از ماتریس تفاضل D شامل سه جمله واقع در سه سطر و سه ستون از D می‌باشد.

برهان. لم را برای یک نوع از زیرماتریس‌های ماتریس نمایه ثابت می‌کنیم بقیه موارد به صورت مشابه ثابت می‌شوند. فرض کنید یک زیرماتریس با بعد 3×5 را برای اجتناب از دور با طول ۱۰ بررسی کنیم. برای مثال، فرض کنید سمت چپ معادله به صورت زیر باشد:

$$b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2} + b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_3} + b_{i_1 j_3} - b_{i_1 j_4} + b_{i_2 j_4} - b_{i_2 j_0}$$

که جمله‌هایش در ماتریس زیر قرار می‌گیرند:

$$B' = \begin{bmatrix} b_{i_0 j_0} & b_{i_0 j_1} & * & * & * \\ * & b_{i_1 j_1} & b_{i_1 j_2} & b_{i_1 j_3} & b_{i_1 j_4} \\ b_{i_2 j_0} & * & b_{i_2 j_2} & b_{i_2 j_3} & b_{i_2 j_4} \end{bmatrix}.$$

با تغییر ترتیب جمله‌های این عبارت نتیجه می‌گیریم که ۶ جمله عبارت به سه درایه از D مربوط می‌شوند که واقع در سه سطر و سه ستون از D هستند. این جمله‌ها عبارت‌اند از

$$(b_{i_0 j_0} - b_{i_2 j_0}) = D_{ij_0}, (b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1}) = D_{i'j_1}, (b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2}) = D_{i''j_2}.$$

جمله‌های دیگر $(b_{i_1 j_3} - b_{i_2 j_3})$ و $(b_{i_1 j_4} - b_{i_2 j_4})$ هستند که معادل آن‌ها در ماتریس D به ترتیب $D_{i''j_4}$ و $D_{i''j_3}$ هستند که در یک زیرماتریس از B با بعد 2×2 ظاهر می‌شوند. $\square$

مزیت لم ۶.۰.۳ این است که در عبارت معادل با معادله (۷.۲) که جمله‌هایش از ماتریس تفاضل D هستند، سه جمله‌ای که در سطر و ستون‌های مجزایی از ماتریس تفاضل D ظاهر می‌شوند یکبار در بررسی دورهای با طول ۶ بررسی شده‌اند. بنابراین، محاسبات انجام شده

برای دوره‌های با طول ۶ برای بررسی دور با طول ۱۰ مورد استفاده قرار می‌گیرند. در قضیه ۲.۰.۳ شرایط لازم و کافی برای یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری که گراف تنر آن دور با طول ۱۰ نداشته باشد ارائه می‌شوند.

قضیه ۲.۰.۳. یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری دور با طول ۱۰ ندارد اگر و فقط اگر:

• (i) با انتخاب هر سه سطر از ماتریس نمایه، سطرهای معادل آن در ماتریس DD هیچ عنصر مشترکی با مجموعه متشکل از مقادیر به دست آمده از بررسی دور با طول ۶ در معادله (۷.۲) نداشته باشد.

• (ii) با انتخاب هر سه سطر i, i', i'' و سه ستون j, j', j'' از ماتریس تفاضل D مجموعه X متشکل از عبارات $-D_{ij} + D_{i'j'} - D_{i''j''}$ هیچ عنصر مشترکی با مجموعه متشکل از عناصر واقع در سطرهای ماتریس DD ، که متمایز از سطرهای i, i', i'' هستند، نداشته باشد. به علاوه، هیچ اشتراکی بین مجموعه X و مقادیر به دست آمده از اضافه و کم کردن دو عنصر روی قطرهای پراکنده زیرماتریس‌های با بعد 2×2 از ماتریس D وجود نداشته باشد. (اگر ماتریس تفاضل D را برای دور با طول ۱۰ استفاده کنیم، آن‌گاه هر عبارتی که برای اجتناب از دور با طول ۱۰ بررسی می‌شود پنج جمله را شامل می‌شود. سه جمله در زیرماتریس با بعد 3×3 از ماتریس تفاضل D و دو جمله متعلق با قطر پراکنده زیرماتریس‌ها با بعد 2×2 از D هستند.) و

• (iii) برای هر زیرماتریس با بعد 5×5 از ماتریس نمایه B معادله (۷.۲) مخالف صفر باشد.

برهان. این قضیه در سه مرحله ثابت می‌شود.

مرحله اول: در مرحله اول زیرماتریس‌ها از ماتریس نمایه که شامل سه سطر هستند بررسی می‌شود. فرض کنید زیرماتریس سه سطر از ماتریس نمایه با اندیس‌های سطری i_0, i_1, i_2 را شامل شود.

حالت اول: فرض کنید زیرماتریس با بعد 3×3 و اندیس‌های ستونی j_0, j_1, j_2 باشد. در این صورت زیرماتریس D' از ماتریس تفاضل DD متشکل از سه سطر i, i', i'' و سه ستون j_0, j_1, j_2 می‌باشد. با تغییر ترتیب جمله‌های سمت چپ معادله (۷.۲) عبارتی که جمله‌هایش از ماتریس D و DD باشند به دست می‌آید. برای مثال،

$$\begin{aligned} & b_{i_1 j_0} - b_{i_1 j_2} + b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_1} + b_{i_0 j_1} - b_{i_0 j_2} + b_{i_1 j_2} - b_{i_1 j_1} + b_{i_0 j_1} - b_{i_0 j_0} = \\ & -(b_{i_0 j_0} - b_{i_1 j_0}) + (b_{i_0 j_1} - b_{i_2 j_1}) - (b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2}) + (b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1}) - (b_{i_0 j_2} + b_{i_1 j_2}) = \\ & -D_{i j_0} + D_{i' j_1} - D_{i'' j_2} + D_{i j_1} - D_{i j_2} = -D_{i j_0} + D_{i' j_1} - D_{i'' j_2} + DD_{i j} \end{aligned}$$

که j ستونی از ماتریس DD می‌باشد. همانطور که می‌بینیم، درایه‌های ماتریس نمایه که برای دور با طول ۶ بررسی می‌شوند روی یک قطر پراکنده از D' هستند که سه جمله اول در

سمت راست معادله بالا هستند. برای هر سه عنصر روی قطر پراکنده D' نه زیرماتریس با بعد 2×2 از ماتریس نمایه وجود دارد که معادل با یک عنصر در ماتریس تفاضل DD است. بنابراین، به جای بررسی نه معادله از معادله (۷.۲) برای هر قطر شکسته، که ۵۴ معادله در حالت کلی است، نتایج به دست آمده از بررسی دور با طول ۶ را استفاده می‌کنیم. در این حالت اگر معادله (۷.۲) مورد استفاده قرار گیرد، آن‌گاه $\binom{m}{3} \binom{n}{3}$ ۵۴ نامعادله باید برای اجتناب از دور با طول ۱۰ بررسی شود.

حالت دوم: فرض کنید زیرماتریس با بعد 3×4 باشد و اندیس‌های ستونی j_0, j_1, j_2, j_3 باشد. برای این حالت $216 = 9 \times \binom{4}{3} \times 6$ زیرماتریس با بعد 3×4 برای اجتناب از دور با طول ۱۰ وجود دارد. زیرا، $\binom{4}{3}$ انتخاب برای به دست آوردن زیرماتریس‌های با بعد 3×3 وجود دارد و برای هر کدام از آن‌ها ۶ مورد برای بررسی دور با طول ۶ وجود دارد. تعداد زیرماتریس‌های ذکر شده با بعد 2×2 برابر با $\binom{3}{2} \times \binom{3}{2}$ می‌باشد. سمت چپ معادله (۷.۲) و عبارت متناظرش در ماتریس تفاضل D به صورت زیر است

$$\begin{aligned} & b_{i_1 j_0} - b_{i_1 j_2} + b_{i_0 j_2} - b_{i_0 j_3} + b_{i_1 j_3} - b_{i_1 j_2} + b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_1} + b_{i_0 j_1} - b_{i_0 j_0} = \\ & -(b_{i_0 j_0} - b_{i_1 j_0}) + (b_{i_0 j_1} - b_{i_2 j_1}) - (b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2}) + (b_{i_0 j_2} - b_{i_1 j_2}) - (b_{i_0 j_3} - b_{i_1 j_3}) = \\ & -D_{i j_0} + D_{i' j_1} - D_{i'' j_2} + D_{i j_2} - D_{i j_3}. \end{aligned}$$

به طور کلی اگر $-D_{i j_0} + D_{i' j_1} - D_{i'' j_2} + DD_{i j} = 0$ ، آن‌گاه گراف تنر دور با طول ۱۰ دارد. در این حالت، اگر معادله (۷.۲) مورد استفاده قرار گیرد، آن‌گاه $\binom{m}{3} \binom{n}{4}$ ۴۳۲ نامعادله باید برای اجتناب از دور با طول ۱۰ بررسی شود.

حالت سوم: فرض کنید زیرماتریس با بعد 3×5 باشد و اندیس‌های ستونی j_0, j_1, j_2, j_3, j_4 باشد. در این حالت $\binom{m}{3} \binom{n}{5}$ ۴۳۲ زیرماتریس برای بررسی وجود دارد. زیرا $\binom{5}{3}$ انتخاب برای به دست آوردن زیرماتریس‌های با بعد 3×3 وجود دارد و برای هر کدام از آن‌ها ۶ مورد برای بررسی دور با طول ۶ وجود دارد.

معادله (۷.۲) و عبارت معادلش در ماتریس تفاضل را بررسی می‌کنیم که نتیجه می‌دهد ماتریس تفاضل کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۸ در عبارت $\pm(D_{i j_0} - D_{i j_1}) \neq \pm(D_{i j_2} - D_{i j_3})$ صدق می‌کنند. در این حالت نیز دو طرف نامعادله‌ها مؤلفه‌هایی از i - امین عنصر ماتریس تفاضل DD هستند. در این حالت، اگر معادله (۷.۲) مورد استفاده قرار گیرد، آن‌گاه $\binom{m}{3} \binom{n}{6}$ ۶ نامعادله باید برای اجتناب از دور با طول ۸ بررسی شود.

از حالت‌های دوم و سوم نتیجه می‌گیریم که هر سطر از ماتریس تفاضل DD شامل $\binom{m}{2}$ عنصر مجزا است. فرض کنید $(D_{i j} - D_{i j'}, D_{i j'} - D_{i j})$ و $(D_{i j} - D_{i j''}, D_{i j''} - D_{i j})$ دو درایه از i - امین سطر ماتریس تفاضل DD باشد. اگر آن‌ها مؤلفه‌ی مشترک داشته باشند، آن‌گاه یکی از تساوی‌های $D_{i j'} = D_{i j''}$ یا $(D_{i j} - D_{i j'}) + D_{i j} - D_{i j''} = 0$ نتیجه می‌شود که با فرض قضیه که گراف تنر فاقد دور ۸ است متناقض است.

مرحله دوم: در این مرحله زیرماتریس‌ها از ماتریس نمایه که شامل چهار سطر هستند بررسی می‌شود. فرض کنید زیرماتریس چهار سطر از ماتریس نمایه با اندیس‌های سطری i_0, i_1, i_2, i_3 را شامل شود.

حالت اول: فرض کنید j_1, j_0, j_1, j_2 سه اندیس ستونی ماتریس نمایه در زیرماتریس با بعد 4×3 باشد. سمت چپ معادله (۷.۲) و عبارات معادلش از ماتریس‌های تفاضل D و DD به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} & b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2} + b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_1} + b_{i_3 j_1} - b_{i_3 j_2} + b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_0} = \\ & (b_{i_0 j_0} - b_{i_2 j_0}) - (b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1}) - (b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2}) - (b_{i_2 j_1} - b_{i_3 j_1}) + (b_{i_2 j_2} - b_{i_3 j_2}) = \\ & D_{i' j_0} - D_{i j_1} - D_{i'' j_2} - D_{i''' j_1} + D_{i'''' j_2}. \end{aligned}$$

همانطور که می‌بینیم، سه عنصر از ماتریس D' که روی یک قطر پراکنده از یک زیرماتریس با بعد 3×3 از ماتریس D' قرار دارند، سه جمله اول از سمت راست تساوی بالا می‌باشند. (۴) انتخاب برای زیرماتریس با بعد 3×3 از ماتریس D' وجود دارد. دو جمله در سمت راست تساوی با یک درایه از ماتریس DD معادل است. اگر این درایه در j -امین ستون از DD ظاهر شود، آن‌گاه معادله $-D_{i j_1} + D_{i' j_0} - D_{i'' j_2} - DD_{i''' j} = 0$ دور با طول ۱۰ ایجاد می‌کند. تعداد نامعادله‌ها برای بررسی در این حالت $72 = 6 \times 4 \times 3$ می‌باشد. بنابراین، برای یک ماتریس نمایه با بعد $m \times n$ تعداد نامعادله‌ها برای اجتناب از دور با طول ۱۰ $72 \times \binom{m}{4} \binom{n}{3}$ می‌باشد.

حالت دوم: فرض کنید زیرماتریس B' از ماتریس نمایه با بعد 4×4 و اندیس‌های ستونی j_0, j_1, j_2, j_3 باشد. این زیرماتریس معادل است با یک زیرماتریس D' با بعد 6×4 از ماتریس تفاضل D . ابتدا یک زیرماتریس با بعد 3×3 از ماتریس تفاضل D' انتخاب می‌کنیم که متناظر است با یک زیرماتریس با بعد 3×3 از زیرماتریس B' . زیرماتریس D' سطر و ستونی را شامل می‌شود که متمایز از سطرها و ستون‌های زیرماتریس با بعد 3×3 است. نقطه تقاطع این سطر و ستون در عبارتی ظاهر می‌شوند که عناصر آن متعلق به ماتریس تفاضل D' است. عبارتی که جمله‌های آن از ماتریس تفاضل D' است، جمله‌ای را شامل می‌شود که متعلق به ستونی از D' است که متمایز از ستون مربوط به نقطه تقاطع می‌باشد. برای این درایه ۹ حالت ممکن وجود دارد. بنابراین، برای هر زیرماتریس با بعد 4×4 از ماتریس تفاضل D $864 = 9 \times 6 \times \binom{4}{3} \binom{4}{4}$ معادله برای بررسی وجود دارد. و به طور کلی، تعداد نامعادله‌ها برای اجتناب از دور با طول ۱۰ در این حالت $864 \times \binom{m}{4} \binom{n}{4}$ می‌باشد.

سمت چپ معادله (۷.۲) و عبارات متناظرش از ماتریس D برای دو مورد به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
I) & b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2} + b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_3} + b_{i_3 j_3} - b_{i_3 j_4} + b_{i_4 j_4} - b_{i_4 j_0} = \\
& -(b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1}) + (b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2}) - (b_{i_2 j_3} - b_{i_3 j_3}) + (b_{i_3 j_4} - b_{i_4 j_4}) - (b_{i_4 j_0} - b_{i_0 j_0}) = \\
& -D_{ij_1} + D_{i''j_2} - D_{i'''j_3} + D_{ij_4} - D_{i'j_0}. \\
II) & b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2} + b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_3} + b_{i_3 j_3} - b_{i_3 j_4} + b_{i_4 j_4} - b_{i_4 j_0} = \\
& -(b_{i_0 j_1} - b_{i_1 j_1}) + (b_{i_1 j_2} - b_{i_2 j_2}) - (b_{i_2 j_3} - b_{i_3 j_3}) - (b_{i_3 j_4} - b_{i_4 j_4}) + (b_{i_4 j_0} - b_{i_0 j_0}) = \\
& -D_{i'j_1} + D_{ij_0} - D_{i''j_3} - D_{i'''j_4} + D_{i'''j_0}.
\end{aligned}$$

همانطور که می‌بینیم، در مورد اولی دو جمله آخر در یک سطر ظاهر نمی‌شوند ولی در مورد دومی ظاهر می‌شوند. بنابراین، در مورد دومی این دو جمله توسط یک جمله از ماتریس تفاضل DD جایگزین می‌شود.

حالت سوم: فرض کنید زیرماتریس B' از ماتریس نمایه با بعد 4×5 و اندیس‌های ستونی j_0, j_1, j_2, j_3, j_4 باشد. این زیرماتریس معادل است با یک زیرماتریس D' با بعد 6×5 از ماتریس تفاضل D . ابتدا یک زیرماتریس با بعد 3×3 از ماتریس تفاضل D' انتخاب می‌کنیم که متناظر است با یک زیرماتریس با بعد 3×3 از زیرماتریس B' . زیرماتریس D' یک سطر و دو ستونی را شامل می‌شود که متمایز از سطرها و ستون‌های زیرماتریس انتخاب شده با بعد 3×3 است. دو نقطه در تقاطع این سطر و دو ستون وجود دارد که در عبارتی ظاهر می‌شوند که عناصر آن متعلق به ماتریس تفاضل D' است. برای این دو نقطه تقاطع ۴ حالت ممکن وجود دارد. بنابراین، برای هر زیرماتریس با بعد 4×5 از ماتریس تفاضل D $960 = 5(4)(3) \times 4$ نامعادله برای بررسی وجود دارد. به طور کلی، تعداد نامعادله‌ها برای بررسی دور با طول ۱۰ در این حالت $960 \times \binom{m}{4} \binom{n}{4}$ می‌باشد. سمت چپ یکی از معادله‌ها در معادله (۷.۲) و عبارت معادله از ماتریس D به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
& b_{i_1 j_0} - b_{i_1 j_2} + b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_3} + b_{i_3 j_3} - b_{i_3 j_4} + b_{i_4 j_4} - b_{i_4 j_1} + b_{i_0 j_1} - b_{i_0 j_0} = \\
& -(b_{i_0 j_0} - b_{i_1 j_0}) + (b_{i_1 j_1} - b_{i_2 j_1}) - (b_{i_2 j_2} - b_{i_3 j_2}) + (b_{i_3 j_3} - b_{i_4 j_3}) - (b_{i_4 j_4} - b_{i_0 j_4}) = \\
& -D_{ij_0} + D_{i'j_1} - D_{i''j_2} + D_{i'''j_3} - D_{i'''j_4}.
\end{aligned}$$

همانطور که می‌بینیم، دو جمله آخر درایه‌ای از ماتریس تفاضل DD را می‌سازد. بنابراین، اگر این درایه در $i''' - j$ - امین سطر و j - امین ستون از ماتریس تفاضل DD ظاهر شود، آن‌گاه تساوی $-D_{ij_0} + D_{i'j_1} - D_{i''j_2} + DD_{i'''j} = 0$ دور با طول ۱۰ ایجاد می‌کند.

مرحله سوم: در این مرحله زیرماتریس‌ها از ماتریس نمایه که شامل پنج سطر هستند بررسی می‌شود. فرض کنید زیرماتریس پنج سطر از ماتریس نمایه با اندیس‌های سطری i_0, i_1, i_2, i_3, i_4 را شامل شود.

حالت اول: فرض کنید j_0, j_1, j_2 سه اندیس ستونی ماتریس نمایه در زیرماتریس با بعد 5×3 باشد. برای اینکه نشان دهیم این حالت مشابه با حالت دوم از مرحله دوم است سمت چپ معادله (۷.۲) و عبارات معادله از ماتریس تفاضل D را برای دو مورد به صورت زیر بررسی می‌کنیم،

$$\begin{aligned}
 I) & b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_1} + b_{i_1 j_1} - b_{i_1 j_2} + b_{i_2 j_2} - b_{i_2 j_3} + b_{i_3 j_3} - b_{i_3 j_4} + b_{i_4 j_4} - b_{i_4 j_0} = \\
 & (b_{i_0 j_0} - b_{i_4 j_0}) - (b_{i_0 j_1} - b_{i_2 j_1}) - (b_{i_2 j_2} - b_{i_4 j_2}) + (b_{i_1 j_1} - b_{i_3 j_1}) - (b_{i_3 j_2} - b_{i_1 j_2}) = \\
 & D_{i j_0} - D_{i' j_1} - D_{i'' j_2} - D_{i''' j_3} - D_{i'''' j_4}. \\
 II) & b_{i_0 j_0} - b_{i_0 j_1} + b_{i_2 j_1} - b_{i_2 j_2} + b_{i_3 j_2} - b_{i_3 j_3} + b_{i_4 j_3} - b_{i_4 j_4} + b_{i_1 j_4} - b_{i_1 j_0} = \\
 & (b_{i_0 j_0} - b_{i_1 j_0}) - (b_{i_0 j_1} - b_{i_2 j_1}) - (b_{i_2 j_2} - b_{i_3 j_2}) + (b_{i_1 j_3} - b_{i_4 j_3}) - (b_{i_3 j_4} - b_{i_1 j_4}) = \\
 & D_{i j_0} - D_{i' j_1} - D_{i'' j_2} + D_{i''' j_3} - D_{i'''' j_4}.
 \end{aligned}$$

بنابراین، نیازی به بررسی این حالت برای اجتناب از دور با طول ۱۰ نیست.
 حالت دوم: فرض کنید زیرماتریس با بعد 4×5 و اندیس‌های ستونی j_0, j_1, j_2, j_3 باشد.
 این حالت مشابه با حالت دوم از مرحله دوم است و نیازی به بررسی این حالت برای اجتناب از دور با طول ۱۰ نیست.
 برای اثبات شرط دوم قضیه حالت اول از مورد دوم تا حالت دوم از مورد سوم را باید در نظر بگیریم.

□ حالت سوم: واضح است.

در اثبات قضیه ۲.۰.۳ تعداد نامعادله‌های مربوط به معادله (۷.۲) برای اجتناب از دور با طول ۱۰ داده شده است. تعداد عملگرها ۱۱ برابر تعداد نامعادله‌هاست. همانطور که می‌بینیم، وقتی ماتریس‌های D و DD را استفاده می‌کنیم نیازی به بررسی زیرماتریس‌ها با ابعاد 3×5 و 4×5 نیست.

مثال ۴.۰.۳. فرض کنید $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 13 \\ 0 & 9 & 27 & 44 \end{bmatrix}$ ماتریس نمایه یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با توزیع درجه 4×3 و درجه بسط $N = 73$ باشد. ماتریس‌های تفاضل D و DD به صورت زیر هستند:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & -13 \\ 0 & -9 & -27 & -44 \\ 0 & -8 & -24 & -31 \end{bmatrix},$$

$$DD = \begin{bmatrix} (1, 72) & (3, 70) & (13, 60) & (2, 71) & (12, 61) & (10, 63) \\ (9, 64) & (27, 46) & (44, 29) & (18, 55) & (35, 38) & (17, 56) \\ (8, 65) & (24, 49) & (31, 42) & (16, 57) & (23, 50) & (7, 66) \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

مجموعه A متشکل از مقادیر سمت چپ معادله (۷.۲) وقتی دور با طول ۶ را بررسی می‌کنیم به صورت زیر است

$$A = \{4, 5, 11, 15, 21, 22, 25, 28, 30, 32, 34, 37, 40, 47, 53, 54, 59, 67\}.$$

همه‌ی عناصر ماتریس DD را در مجموعه B به صورت زیر در نظر می‌گیریم.

$$B = \{1, 2, 3, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 17, 18, 23, 24, 27, 29, 31, 35, 38, 42, 44, 46, 49, 50, 55, 56, 57, 60, 61, 63, 64, 65, 66, 70, 71, 72\}.$$

از آنجایی که $A \cap B = \emptyset$ ، شرط اول قضیه ۲.۰.۳ برای ماتریس داده شده برقرار است. بنابراین، به جای بررسی معادله (۷.۲) برای اجتناب از دور با طول ۱۰ در زیرماتریس‌های با ابعاد 3×3 و 3×4 که ۶۴۸ نامعادله برای بررسی هستند، عدم وجود عضو مشترک در دو مجموعه A و B را بررسی می‌کنیم. دو شرط (ii) و (iii) قضیه ۲.۰.۳ در مورد زیرماتریس با چهار سطر و زیرماتریس با پنج سطر بررسی می‌شود. بنابراین، برای ماتریس نمایه با سه سطر فقط شرط (i) بررسی می‌شود. در نتیجه، $A \cap B = \emptyset$ ثابت می‌کند که گراف تنر دور با طول ۱۰ ندارد.

قضیه ۳.۰.۳. فرض کنید A مجموعه متشکل از مقادیر سمت چپ معادله (۷.۲) در بررسی دور با طول ۶ باشد و B مجموعه متشکل از تمام عناصر ماتریس تفاضل DD باشد. اگر گراف تنر یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری فاقد دور با طول ۱۰ باشد، آن‌گاه داریم: $A \cap B = \emptyset$.

برهان. همانطور که در قضیه ۲.۰.۳ می‌بینیم، اگر i, i', i'' سه سطر ماتریس DD متناظر با سه سطر ماتریس نمایه باشند که برای اجتناب از دور با طول ۶ بررسی می‌شوند، آن‌گاه مجموعه متشکل از مقادیر سمت چپ معادله (۷.۲) وقتی دور با طول ۶ را بررسی می‌کنیم هیچ اشتراکی با عناصر سه سطر i, i', i'' از ماتریس DD ندارد. به علاوه، شرط دوم قضیه ۲.۰.۳ نشان می‌دهد که این مقادیر هیچ اشتراکی با سطرهای دیگر ماتریس تفاضل DD ندارند. در نتیجه هیچ عضو مشترکی بین این دو مجموعه نیست. $\square$

نتیجه ۵.۰.۳. کران پایین درجه بسط یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با توزیع درجه $m \times n$ و کمر ۱۰ دست کم $|A| + \binom{m}{2}n(n-1) + 1$ است، که در آن A مجموعه متشکل از مقادیر سمت چپ معادله (۷.۲) در بررسی دور با طول ۶ است.

برای مثال، در مثال ۴.۰.۳ داریم $|A| = 18$ و $\binom{m}{2}n(n-1) + 1 = 37$. بنابراین، $N \geq 55$. نتیجه ۵.۰.۳ ثابت می‌کند که برای به دست آوردن کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری با کمر ۱۰ کران پایین روی درجه بسط از مجموعه A می‌تواند حدس زده شود.

فصل ۴

کران‌های پایین روی درجه بسط کدهای QC-LDPC یال-چندگانه

در این بخش، شرایط لازم و کافی برای ماتریس‌های نمایه‌ی کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با کمر ۶ را به دست می‌آوریم که بررسی دوره‌های با طول ۴ را در یک ماتریس نمایه ساده می‌کند. در نتیجه، یک کران پایین روی درجه بسط به دست می‌آید که برای کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری منظم و نامنظم با کمر ۶ می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. به علاوه، ماتریس‌های نمایه‌ای ارائه می‌دهیم که درجه بسط آن‌ها برابر کران پایین به دست آمده است و در مقایسه با کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-یگانه، کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه‌ی به دست آمده طول کوتاه‌تر دارند. علاوه بر این، روشی برای ساخت کدها ارائه می‌کنیم که اندازه فضای جستجو برای به دست آوردن ماتریس نمایه را کاهش دهد، [۴۴].

تعداد نامعادله‌ها در معادله (۱۰.۲) که باید برای اجتناب از دور با طول $2k'$ ، $(2k' < g)$ ، در کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با کمر g بررسی شوند بیشتر از تعداد نامعادله‌های مربوط به معادله ۷.۲ برای اجتناب از دور با طول $2k$ ، $(2k < g)$ ، است. برای مثال، برای بررسی دور با طول ۴ در یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-یگانه تمام زیرماتریس‌ها با بعد 2×2 از ماتریس نمایه باید بررسی شوند. در صورتی که، برای اجتناب از دور با طول ۴ در یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه

معادله (۱۰.۲) باید برای زیرماتریس‌ها با بعدهای 1×1 ، 1×2 ، 2×1 و 2×2 از ماتریس نمایه بررسی شود. در مورد زیرماتریس‌ها با بعد 1×1 از ماتریس نمایه، فقط آن‌هایی که حداقل شامل ۲ عضو هستند مورد بررسی قرار می‌گیرند. به منظور ساده کردن معادله (۱۰.۲) برای بررسی دور با طول $2^{k'}$ ماتریس‌های تفاضل که با Δ_1 و Δ_2 نمایش داده می‌شوند را معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱.۰.۴. فرض کنید B یک ماتریس نمایه باشد. برای هر عنصر از B نظیر $\vec{B}_{ij}$ بردار $\vec{\Delta}_{ij}$ با بعد $2^{(|\vec{B}_{ij}|)}$ را به عنوان ij -امین درایه از ماتریس تفاضل Δ_1 در نظر می‌گیریم. درایه‌های $\vec{\Delta}_{ij}$ از تفاضل هر دو درایه از $\vec{B}_{ij}$ به دست می‌آیند. اگر $|\vec{B}_{ij}| = 1$ ، آن‌گاه $\vec{\Delta}_{ij} = (-)$ و اگر $\vec{B}_{ij} = (\infty)$ ، آن‌گاه $\vec{\Delta}_{ij} = (\infty)$.

مثال ۱.۰.۴. فرض کنید $N = 13$. ماتریس نمایه زیر برای یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه را در نظر بگیرید.

$$B = \begin{bmatrix} (0, 1, 8) & (\infty) & (0) & (\infty) \\ (\infty) & (8, 12) & (0, 4) & (\infty) \\ (\infty) & (5) & (\infty) & (9, 10) \end{bmatrix}.$$

همانطور که می‌بینیم، $\vec{B}_{11} = (8, 12)$ و از تعریف ۱.۰.۴ داریم $\vec{\Delta}_{11} = (8 - 12, 12 - 8) \bmod 13 = (9, 4)$. با ادامه این روند ماتریس تفاضل Δ_1 را به دست می‌آوریم. تمام محاسبه‌ها به پیمانه ۱۳ می‌باشد.

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} (1, 12, 5, 8, 6, 7) & (\infty) & (-) & (\infty) \\ (\infty) & (9, 4) & (9, 4) & (\infty) \\ (\infty) & (-) & (\infty) & (12, 1) \end{bmatrix}.$$

تعریف ۲.۰.۴. فرض کنید B یک ماتریس نمایه با بعد $m \times n$ باشد. ماتریس تفاضل Δ_2 با بعد $\binom{m}{2} \times n$ به صورت زیر به دست می‌آید. برای هر دو سطر با اندیس‌های سطری i و i' از B ، که در آن $i' < i$ ، سطری در ماتریس Δ_2 با اندیس سطری (ii') در نظر می‌گیریم. فرض کنید $\vec{B}_{ij}$ و $\vec{B}_{i'j}$ دو درایه از j -امین ستون B باشند. آن‌گاه، بردار $\vec{\Delta}_{(ii')j}$ از اندازه $|\vec{B}_{ij}| \times |\vec{B}_{i'j}|$ ، که عناصرش از تفاضل یک درایه از $\vec{B}_{i'j}$ و یک درایه از $\vec{B}_{ij}$ به دست می‌آیند، به عنوان درایه‌ای در (ii') -امین سطر و j -امین ستون ماتریس تفاضل Δ_2 در نظر گرفته می‌شود. اگر $\vec{B}_{ij}$ یا $\vec{B}_{i'j}$ برابر با (∞) باشند، آن‌گاه $\vec{\Delta}_{(ii')j} = (\infty)$.

مثال ۲.۰.۴. فرض کنید B ماتریس نمایه داده شده در مثال ۱.۰.۴ باشد. داریم $\vec{B}_{11} = (8, 12)$ و $\vec{B}_{21} = (5)$ ، بنابراین، $\vec{\Delta}_{(12)1} = (8 - 5, 12 - 5) \bmod 13 = (3, 7)$. به صورت مشابه، $\vec{B}_{12} = (0, 4)$ و $\vec{B}_{22} = (0)$ نتیجه می‌دهند $\vec{\Delta}_{(01)2} = (0 - 0, 0 - 4) \bmod 13 = (0, 9)$. عناصر دیگر Δ_2 برابر (∞) هستند زیرا برای محاسبه $\vec{\Delta}_{(ii')j}$ یکی از $\vec{B}_{ij}$ یا $\vec{B}_{i'j}$ برابر (∞) هستند. ماتریس Δ_2 با اندیس‌های سطری $(12), (02), (01)$ به صورت زیر است:

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} (\infty) & (\infty) & (0, 9) & (\infty) \\ (\infty) & (\infty) & (\infty) & (\infty) \\ (\infty) & (3, 7) & (\infty) & (\infty) \end{bmatrix}.$$

معادله (۱۰.۲) برای هر ماتریس نمایه به کار می‌رود. در این بخش، عبارت معادل با (۱۰.۲) را به دست می‌آوریم که برای هر دو ماتریس تفاضل Δ_1 و Δ_2 به کار رود. برای ساختن کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با کمر ۶، چهار نوع زیرماتریس از ماتریس نمایه B برای اجتناب از دور با طول ۴ باید بررسی شود. نامعادله‌های مربوط به (۱۰.۲) درمورد هریک از زیرماتریس‌ها برای اجتناب از دور با طول ۴ به صورت زیر هستند.

I. به کارگیری معادله (۱۰.۲) در زیرماتریس $\vec{B}_{ij}$ ، که در آن $|\vec{B}_{ij}| \geq 2$ ، نظیر زیرماتریس‌های $[B_{ij}^x, B_{ij}^y, B_{ij}^z]$ یا $[B_{ij}^x, B_{ij}^y, B_{ij}^z]$ ، برای اجتناب از دور با طول ۴ نشان می‌دهد که $\pm(B_{ij}^x - B_{ij}^y)$ ، $\pm(B_{ij}^y - B_{ij}^z)$ و $\pm(B_{ij}^x - B_{ij}^z)$ دو به دو مجزا هستند.

II. فرض کنید $[(B_{ij}^z, B_{ij}^l), (B_{ik}^{z'}, B_{ik}^{l'})]$ یک زیرماتریس با بعد 2×1 از ماتریس نمایه B باشد، که در آن $B_{ij}^z, B_{ij}^l \in \vec{B}_{ij}$ و $B_{ik}^{z'}, B_{ik}^{l'} \in \vec{B}_{ik}$. به کارگیری معادله (۱۰.۲) برای اجتناب از دور با طول ۴ نامعادله $\pm(B_{ij}^z - B_{ij}^l) \pm (B_{ik}^{z'} - B_{ik}^{l'}) \neq 0 \pmod N$ را نتیجه می‌دهد.

III. فرض کنید $\begin{bmatrix} (B_{ij}^z, B_{ij}^l) \\ (B_{kj}^{z'}, B_{kj}^{l'}) \end{bmatrix}$ یک زیرماتریس با بعد 2×1 از ماتریس نمایه B باشد، که در آن $B_{ij}^z, B_{ij}^l \in \vec{B}_{ij}$ و $B_{kj}^{z'}, B_{kj}^{l'} \in \vec{B}_{kj}$. به کارگیری معادله (۱۰.۲) برای اجتناب از دور با طول ۴ نامعادله $\pm(B_{ij}^z - B_{ij}^l) \pm (B_{kj}^{z'} - B_{kj}^{l'}) \neq 0 \pmod N$ را می‌دهد.

IV. فرض کنید $\begin{bmatrix} \vec{B}_{ij} & \vec{B}_{ik} \\ \vec{B}_{i'j} & \vec{B}_{i'k} \end{bmatrix}$ یک زیرماتریس با بعد 2×2 از ماتریس B باشد. این زیرماتریس شامل $(|\vec{B}_{ij}| \times |\vec{B}_{ik}| \times |\vec{B}_{i'j}| \times |\vec{B}_{i'k}|)$ زیرماتریس با بعد 2×2 می‌شود که معادله (۱۰.۲) باید برای اجتناب از دور با طول ۴ در مورد آن‌ها بررسی شود.

با استفاده از تعاریف ۱.۰.۴ و ۲.۰.۴، چهار مورد بالا را برای به دست آوردن شرایط لازم و کافی برای ماتریس‌های تفاضل چنان ساده می‌کنیم که کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با کمر ۶ به سادگی ساخته شوند.

قضیه ۱.۰.۴. فرض کنید ماتریس‌های تفاضل Δ_1 و Δ_2 متناظر با یک ماتریس نمایه B باشند. یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه دور با طول ۴ ندارد اگر و فقط اگر:

- (i) هر سطر و هر ستون از ماتریس تفاضل Δ_1 عنصر تکراری نداشته باشند و
- (ii) هر سطر ماتریس تفاضل Δ_2 بدون عنصر تکراری باشد.

برهان. (i) فرض کنید $B_{ij}^z, B_{ij}^l \in \vec{B}_{ij}$ و $B_{ik}^z, B_{ik}^l \in \vec{B}_{ik}$. از تعریف ۱.۰.۴ داریم $\pm(B_{ij}^z - B_{ij}^l) \in \vec{\Delta}_{ij}$ و $\pm(B_{ik}^z - B_{ik}^l) \in \vec{\Delta}_{ik}$. با استفاده از قسمت‌های I و II ثابت میشود که برای اجتناب از دور با طول ۴، هر عنصر از ماتریس تفاضل Δ_1 نظیر $\vec{\Delta}_{ij} \cap \vec{\Delta}_{ik} = \emptyset$ ندارد و بدون درایه تکراری است. به طور مشابه، از قسمت III نتیجه می‌گیریم که اگر کمر گراف تنر ۶ باشد، آن گاه هر ستون ماتریس تفاضل Δ_1 بدون عنصر تکراری است.

(ii) همانطور که در قسمت IV ذکر شد، برای یک ماتریس نمایه B نظیر $\begin{bmatrix} \vec{B}_{ij} & \vec{B}_{ik} \\ \vec{B}_{i'j} & \vec{B}_{i'k} \end{bmatrix}$ تعداد زیرماتریس‌ها با بعد 2×2 که برای اجتناب از دور با طول ۴ باید بررسی شوند برابر است با $(|\vec{B}_{ij}| \times |\vec{B}_{ik}| \times |\vec{B}_{i'j}| \times |\vec{B}_{i'k}|)$. فرض کنید $B_{ij}^z \in \vec{B}_{ij}$ ، $B_{ik}^l \in \vec{B}_{ik}$ ، $B_{i'j}^z \in \vec{B}_{i'j}$ و $B_{i'k}^l \in \vec{B}_{i'k}$. عناصر زیرماتریس با بعد 2×2 باشند. تساوی‌هایی نظیر $B_{ij}^l - B_{i'j}^z = B_{ik}^l - B_{i'k}^z \pmod N$ یا معادل آن $B_{ij}^l - B_{ik}^l + B_{i'j}^z - B_{i'k}^z = 0 \pmod N$ ایجاد می‌کنند. از آنجایی که $B_{ij}^l - B_{ik}^l$ و $B_{i'j}^z - B_{i'k}^z$ در یک سطر از ماتریس تفاضل Δ_2 ظاهر می‌شوند نتیجه می‌گیریم که عناصر تکراری در یک سطر از ماتریس تفاضل Δ_2 دور با طول ۴ تولید می‌کنند. $\square$

یکی از مزیت‌های دو ماتریس تفاضل Δ_1 و Δ_2 کران پایین روی درجه بسط کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با کمر ۶ است.

قضیه ۲.۰.۴. فرض کنید W یک ماتریس پایه با بعد $m \times n$ از یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه باشد. سه پارامتر زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \max\{2 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{W_{ij}}{2}; i \in \{0, \dots, m-1\}\} \\ \mathcal{Y} &= \max\{2 \sum_{i=0}^{m-1} \binom{W_{ij}}{2}; j \in \{0, \dots, n-1\}\} \\ \mathcal{Z} &= \max\{\sum_{j=0}^{n-1} W_{ij} \times W_{i'j}; i \neq i'; i, i' \in \{0, \dots, m-1\}\} \end{aligned}$$

کران پایین روی درجه بسط کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با کمر ۶ برابر است با

$$N = \max\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}.$$

برهان. فرض کنید W_{ij} برابر ij -امین عنصر W باشد. تعداد درایه‌ها در $\vec{\Delta}_{ij}$ برابر است با $2 \binom{W_{ij}}{2}$. مطابق با قسمت (i) از قضیه ۱.۰.۴، اگر کمر گراف تنر برابر ۶ باشد، آن گاه هر سطر ماتریس تفاضل Δ_1 عناصر تکراری ندارند. بنابراین، تعداد عناصر مجزا در i -امین سطر Δ_1 برابر است با $2 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{W_{ij}}{2}$. فرض کنید $\mathcal{X}$ ماکسیمم تعداد عناصر مجزا در یک سطر از ماتریس تفاضل Δ_1 باشد. به طور مشابه، هر ستون از Δ_1 عنصر تکراری ندارد. بنابراین، تعداد عناصر مجزا در j -امین ستون ماتریس تفاضل Δ_1 برابر است با $2 \sum_{i=0}^{m-1} \binom{W_{ij}}{2}$. ماکسیمم تعداد عناصر مجزا در یک ستون از Δ_1 را $\mathcal{Y}$ در نظر بگیرید.

اگر $\vec{B}_{ij}$ و $\vec{B}_{i'j}$ دو درایه از B باشند، آن گاه تعریف ۲.۰.۴ ثابت می‌کند که $|\vec{\Delta}_2(ii')_j| = |\vec{B}_{ij}| \times |\vec{B}_{i'j}| = W_{ij} \times W_{i'j}$. قسمت (ii) از قضیه ۱.۰.۴ ثابت می‌کند که اگر کمر گراف تنر ۶

باشد، آن گاه هر سطر ماتریس تفاضل Δ_2 بدون عنصر تکراری است. در نتیجه، تعداد عناصر مجزا در (ii') - امین سطر Δ_2 برابر است با $\sum_{j=0}^{n-1} W_{ij} \times W_{i'j}$. فرض کنید ماکسیمم تعداد عناصر مجزا در یک سطر از ماتریس تفاضل Δ_2 با Z نمایش داده شود. از آنجایی که همه محاسبات به پیمانه N است، وجود $\max\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, Z\}$ درایه مجزا در ماتریس‌های تفاضل Δ_1 یا Δ_2 نشان می‌دهد که درجه بسط N دست کم برابر $\max\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, Z\}$ می‌باشد. $\square$

مثال ۳.۰.۴. یک ماتریس پایه با بعد $2 \times n$ که درایه‌هایش ۲ باشند را در نظر بگیرید. ماتریس نمایه متناظرش یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با توزیع درجه $2n \times 4$ را نتیجه می‌دهد. مطابق با تعریف ۱.۰.۴، هر درایه از Δ_1 یک بردار از اندازه ۲ می‌باشد. اگر گراف تنر کمر ۶ داشته باشد، آن گاه $2n$ عنصر در هر سطر از ماتریس تفاضل Δ_1 وجود دارد. در نتیجه، $\mathcal{X} = 2n$. همچنین، تعداد عناصر در هر ستون از ماتریس تفاضل Δ_1 برابر ۴ است. بنابراین، $\mathcal{Y} = 4$. مطابق با تعریف ۲.۰.۴، ماتریس تفاضل Δ_2 یک ماتریس با بعد $1 \times n$ است که شامل n بردار از اندازه ۴ می‌باشد. در نتیجه، $Z = 4n$ و داریم $N \geq \max\{2n, 4, 4n\} = 4n$.

به دست آوردن کمینه درجه بسط یک مسئله چالش برانگیز در کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه است و کران پایین روی درجه بسط در قضیه ۲.۰.۴ کمک شایانی به ایجاد یک جستجوی کارا برای یافتن کمینه درجه بسط می‌کند. برای مثال، زمان مورد نیاز برای یک جستجوی کلی و جامع برای یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با توزیع درجه 8×4 با نرخ 5.0° و درجه بسط $N = 15$ بیشتر از دو ساعت و بیست دقیقه می‌باشد که زمانی طولانی است. به طور مشابه، اگر بخواهیم یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با توزیع درجه 20×4 را بسازیم بنا به مثال ۳.۰.۴ داریم $N \geq 40$. بنابراین، جستجوی کامل و جامع با درجه بسط $N = 39$ که مدت زمان زیادی را نیاز دارد هیچ ماتریس نمایه ای نتیجه نمی‌دهد. در نتیجه، قضیه ۲.۰.۴ کمک قابل توجهی در ساخت ماتریس‌های نمایه با کمینه درجه بسط می‌کند. شایان ذکر است که قضیه ۲.۰.۴ در کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه که ماتریس پایه آن‌ها داده شده باشند به کار می‌آید. اگر هدف ما به دست آوردن کران پایین روی درجه بسط کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با وزن سطری و ستونی مشخص باشد، آن گاه می‌توانیم قضیه ۲.۰.۴ را در تمام ماترس‌های پایه‌ای به کار ببریم که در آن‌ها جمع عناصر هر سطر و جمع عناصر هر ستون برابر با وزن‌های سطری و ستونی داده شده باشند. برای مثال، دو نوع ماتریس پایه برای کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با توزیع درجه 6×4 با کمر ۶ وجود دارد که عبارتند از: $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ، که شامل پنج مورد مشابه است. برای نوع اول، مطابق با مثال ۳.۰.۴ داریم $N \geq 12$. اگر قضیه ۲.۰.۴ را در نوع دوم به کارگیریم، آن گاه $\mathcal{X} = 5$ ، $\mathcal{Y} = 4$ و $Z = 10$ ، و بنابراین، $N \geq 10$. حال توضیح می‌دهیم که چگونه می‌توان اندازه فضای جستجو را تا حد امکان کاهش داد.

اگر درجه بسط برابر با N باشد، آن‌گاه بیشترین عددی که در ماتریس نمایه ظاهر می‌شود $N-1$ است. برای کاهش اندازه فضای جستجو به منظور یافتن ماتریس نمایه B با کمر مشخص و درجه بسط N ، بیشترین عددی که در B ظاهر می‌شود را مینیمم می‌کنیم. فرض کنید که بیشترین مقدار در B با t نمایش داده شود. فایده این روش این است که برای یافتن ماتریس نمایه با درجه بسط N حداکثر $t+1$ مورد به جای N مورد برای جستجوی هر عنصر از B وجود دارد.

گزاره ۱.۰.۴. فرض کنید B یک ماتریس نمایه با بعد $m \times n$ از یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با کمر ۶ باشد. اگر $\mathcal{X}$ ، $\mathcal{Y}$ و $\mathcal{Z}$ همان پارامترهای تعریف شده در قضیه ۲.۰.۴ باشند، آن‌گاه کران پایین روی بیشترین عددی که در ماتریس نمایه ظاهر می‌شود برابر است با

$$t = \max\{\lceil \frac{\mathcal{X}}{4} \rceil, \lceil \frac{\mathcal{Y}}{4} \rceil, \lceil \frac{\mathcal{Z}-1}{4} \rceil\}.$$

برهان. دو ماتریس Δ_1' و Δ_2' را، به ترتیب، به عنوان ماتریس‌های معادل با ماتریس‌های تفاضل Δ_1 و Δ_2 در نظر بگیرید که در آن‌ها هیچ یک از عناصر به پیمانه N نباشند. از آنجایی که هر بردار در ماتریس نمایه عنصر تکراری ندارد، نتیجه می‌گیریم که هر بردار در ماتریس Δ_1' شامل عنصر صفر نیست. بنابراین، اگر t بیشترین عدد در ماتریس نمایه B باشد، آن‌گاه همه عناصر Δ_1' در مجموعه $\{0\} - [-t, t]$ قرار دارند که شامل $2t$ عضو است. در نتیجه، بیشترین تعداد عناصر مجزا در Δ_1' حداکثر $2t$ می‌باشد. به علاوه، همه عناصر در Δ_2' متعلق به $[-t, t]$ می‌باشند که شامل $2t+1$ عنصر است بنابراین، بیشترین تعداد عناصر مجزا در Δ_2' حداکثر $2t+1$ است.

مطابق با قسمت (i) از قضیه ۱.۰.۴، هر سطر از ماتریس تفاضل Δ_1 عنصر تکراری ندارد. بنابراین، هر سطر از Δ_1' شامل عناصر صحیح ناصفر مجزاست. مطابق با قضیه ۲.۰.۴، بیشترین تعداد درایه‌های مجزا در هر سطر از ماتریس تفاضل Δ_1 برابر با $\mathcal{X}$ است. این مطلب در مورد ماتریس Δ_1' نیز صدق می‌کند. بنابراین، داریم $2t \geq \mathcal{X}$ یا $t \geq \lceil \frac{\mathcal{X}}{2} \rceil$. همین مبحث برای عناصر مجزا در یک ستون از ماتریس Δ_1' برقرار است که نتیجه می‌دهد، $t \geq \lceil \frac{\mathcal{Y}}{2} \rceil$. مطابق با قسمت (ii) از قضیه ۱.۰.۴، هر سطر ماتریس تفاضل Δ_2 بدون عنصر تکراری است. بنابراین، ماتریس Δ_2' در هر سطر عناصر مجزا دارد. از آنجایی که بیشترین تعداد عناصر مجزا در هر سطر از Δ_2' برابر با $\mathcal{Z}$ است، نتیجه می‌گیریم که $2t+1 \geq \mathcal{Z}$. بنابراین، داریم $t \geq \lceil \frac{\mathcal{Z}-1}{2} \rceil$. به طور کلی، اگر کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه کمر ۶ داشته باشد، آن‌گاه بیشترین عددی که در ماتریس نمایه ظاهر می‌شود دست کم $\max\{\lceil \frac{\mathcal{X}}{4} \rceil, \lceil \frac{\mathcal{Y}}{4} \rceil, \lceil \frac{\mathcal{Z}-1}{4} \rceil\}$ است. $\square$

برای یافتن بیشترین عددی که در ماتریس نمایه ظاهر می‌شود جستجو را از کران پایین t آغاز می‌کنیم. برای مثال، برای یک کد بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با توزیع درجه 8×4 و کمر ۶، بیشترین عددی که در ماتریس نمایه ظاهر می‌شود را $t = 8, 9$

در نظر می‌گیریم و با مدت زمان اجرای کمتر از ۲ دقیقه هیچ ماتریس نمایه ای یافت نمی‌شود. ماتریس نمایه با $t = 10$ در جدول ۱.۵ داده شده است. به وضوح مدت زمان اجرا برای یافتن بیشترین مقدار t با افزایش وزن ستونی افزایش می‌یابد.

قضیه‌های ۱.۰.۴ و ۲.۰.۴ به علاوه گزاره ۱.۰.۴ را برای یافتن ماتریس نمایه کدهای بررسی-توازن-کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با توزیع درجه‌های $3 \times \frac{3n}{4}$ و $4 \times 2n$ استفاده کردیم. اگر ماتریس‌های پایه با دو سطر که درایه‌های آن ۱ و ۲ باشند را در نظر بگیریم، آن‌گاه درجه بسط، به ترتیب، $N = 2n$ و $N = 4n$ می‌باشند که برابر با کران پایین داده شده در قضیه ۲.۰.۴ هستند. در جدول ۱.۵ ما، همچنین، کمینه درجه بسط و طول کد را بین کدهای بررسی-توازن-کم-چگال شبه-دوری یال-یگانه و یال-چندگانه با توزیع درجه‌های یکسان مقایسه کرده‌ایم. این مقایسه نشان می‌دهد که طول کدهای بررسی-توازن-کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با کمر ۶ و توزیع درجه $4 \times 2n$ خیلی کمتر از رقیبشان در گروه کدهای یال-یگانه است. دو پارامتر N_m و N_s ، به ترتیب، کمینه درجه بسط کدهای بررسی-توازن-کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه و یال-یگانه هستند. به علاوه پارامترهای L_m و L_s ، به ترتیب، طول کدهای بررسی-توازن-کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه و یال-یگانه هستند.

جدول ۱.۴: ماتریس نمایه کدهای بررسی-توازن-کم-چگال شبه-دوری یال-چندگانه با وزن ستونی ۳، کمر ۶ که بیشترین درایه آن‌ها، t ، مینیمم شده است

t	N	B	ماتریس نمایه،	n
۷	۸		$\begin{bmatrix} (0, 1) & (2) & (0, 5) & (6) \\ (0) & (4, 7) & (6) & (1, 2) \end{bmatrix}$	۴
۱۰	۱۲		$\begin{bmatrix} (0, 1) & (2) & (0, 3) & (4) & (0, 5) & (6) \\ (0) & (3, 10) & (6) & (8, 9) & (2) & (1, 4) \end{bmatrix}$	۶
۱۲	۱۶		$\begin{bmatrix} (0, 1) & (2) & (0, 3) & (4) & (0, 6) & (7) & (0, 11) & (12) \\ (0) & (5, 11) & (4) & (6, 9) & (12) & (1, 2) & (8) & (3, 10) \end{bmatrix}$	۸

جدول ۲.۴: مقایسه درجه بسط و طول کد بین کدهای بررسی-توازن کم-چگال شبه-دوری یال-یگانه و یال-چندگانه با توزیع درجه یکسان. بیشترین عدد که در ماتریس نمایه ظاهر می‌شود مینیمم شده است.

n	ماتریس نمایه t					N_m	L_m	N_s	L_s
۲	$\begin{bmatrix} (\circ, 1) & (\circ, 2) \\ (1, 3) & (6, 7) \end{bmatrix}$					۷	۸	۱۶	-
۳	$\begin{bmatrix} (\circ, 1) & (\circ, 3) & (\circ, 7) \\ (\circ, 7) & (1, 5) & (3, 4) \end{bmatrix}$					۷	۱۲	۳۶	۴۲
۴	$\begin{bmatrix} (\circ, 1) & (\circ, 3) & (\circ, 5) & (\circ, 9) \\ (\circ, 10) & (6, 8) & (1, 2) & (4, 7) \end{bmatrix}$					۱۰	۱۶	۶۴	۸۰
۵	$\begin{bmatrix} (\circ, 1) & (\circ, 3) & (\circ, 5) & (\circ, 11) & (\circ, 12) \\ (\circ, 11) & (5, 12) & (1, 3) & (4, 8) & (6, 7) \end{bmatrix}$					۱۲	۲۰	۱۰۰	۱۱۰

فصل ۵

کران پایین روی مجموعه تله‌ای مقدماتی کدهای LDPC

در این بخش، کران پایین روی اندازه ETS (a, b) های کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با وزن ستونی γ ارائه می‌دهیم. بعضی از نتایج در این بخش مستقل از کمر گراف تنر هستند و به متغیرهای a ، b و γ وابسته هستند. برای به دست آوردن کران‌های پایین وابسته به کمر گراف، کران‌های بالا روی تعداد یال‌ها در یک گراف با کمر مشخص در [۱۵] و [۱۳] را استفاده می‌کنیم.

نشان می‌دهیم که گراف تنر یک کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر $g = 2(2k+2)$ و $g = 2(2k+1)$ شامل هیچ ETS (a, b) که، به ترتیب، در نامساوی‌های $b \leq a(\gamma - a^{\frac{1}{k}} - 1)$ و $b \leq a(\gamma - (\frac{a}{\gamma})^{\frac{1}{k}} - 1)$ صدق کنند نمی‌شود. برای هر مقداری از کمر گراف تنر، نتایج را به ETS (a, b) ها با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ تعمیم می‌دهیم. همچنین، برای نشان دادن اکید بودن کران پایین به دست آمده نتایج عددی بسیاری فراهم می‌کنیم و آن‌ها را با نتایج موجود در [۲۱] مقایسه می‌کنیم. این مقایسه‌ها ثابت می‌کنند که کران پایین روی اندازه مجموعه تله‌ای در [۲۱] برای $b \geq 2\gamma - 2$ قابل استفاده نیست و برای بسیاری از مقادیر g و b نظیر $g = 2(2k+2)$ و b فرد، کران اکیدی نیست. در صورتی که کران‌هایی که ما ارائه می‌دهیم برای هر مقداری از b و γ قابل استفاده و در اغلب موارد اکید هستند.

نتایج عددی و آنالیز شده نشان می‌دهند که ماکسیمم تعداد یال‌ها در یک گراف کمک

شایانی در به دست آوردن کران پایین روی هر دو پارامتر a و b برای هر مقدار دلخواهی از کمر گراف تر می‌کند.

برای یافتن کران پایین روی اندازه ETS در گراف تر با کمر ۸ و ۱۰ از گراف‌ها با ماکسیمم تعداد یال و کمر، به ترتیب، ۴ و ۵ استفاده می‌کنیم. از آنجایی که کران‌های بالا روی تعداد یال‌ها در گراف‌ها با کمر ۴ و ۵ اکید هستند، این امکان وجود دارد که کران‌های پایین اکید روی اندازه ETS با کمر ۸ و ۱۰ به دست آوریم. این نتایج در دو زیربخش ارائه می‌شود که در زیر آن‌ها را خلاصه می‌کنیم.

برای کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۸، نشان می‌دهیم که گراف تر شامل هیچ ETS (a, b) ، که $b < a\gamma - \frac{a}{\gamma}$ ، نمی‌شود. برای ETS (a, b) با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ ثابت می‌کنیم $a \geq 2\gamma - 1$. اگر یک ETS در گراف تر با کمر ۸ مینیمم اندازه $a = 2\gamma - 1$ را داشته باشد، آن‌گاه تعداد رؤوس بررسی با درجه ۱ برابر است با $b \geq \gamma$. ما، همچنین، ساختاری برای ETS‌ها با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ در کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۸ ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهد کران‌های پایین به دست آمده برای a و b برای هر مقداری از γ اکید هستند. این کران‌های پایین اکید این امکان را می‌دهند که روشی برای به دست آوردن یک کران پایین اکید روی اندازه ETS‌ها در کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظم ارائه دهیم. ما این روش را در کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظمی اعمال می‌کنیم که وزن‌های ستونی آن‌ها زیرمجموعه‌ای از $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ باشند.

برای گراف‌های تر با کمر ۱۰، نشان می‌دهیم که هیچ ETS (a, b) ، که $b \leq a\gamma - a^{\frac{2}{\gamma}}$ ، وجود ندارد. به علاوه، کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۱۰ شامل هیچ ETS با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ و اندازه $a \leq (\gamma - 1)^2$ نمی‌شوند. ما، همچنین، نتایج عددی بسیاری ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهند کران‌های پایین به دست آمده در این بخش خیلی بهتر از آن‌هایی است که در مقاله‌های دیگر داده شده‌اند.

۱.۰.۵ چند خاصیت مشترک مجموعه‌های تله‌ای مقدماتی

در این زیربخش، تمام نتایج دارای اثبات ریاضی هستند و با نتایج عددی به دست آمده بر مبنای جستجوی جامع مقایسه می‌شوند. در لم زیر تمامی بندها بجز بند (ii) خاصیت‌هایی از ETS (a, b) را ارائه می‌کنند که مستقل از کمر گراف تر هستند. بند (ii) کران پایین روی اندازه ETS‌ها در کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۶ می‌دهد. بندهای (iv) و (v) در [۲۱] نیز ثابت شده‌اند.

لم ۱.۰.۵. یک ETS (a, b) و گراف رأس-متغیر متناظرش از یک کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم در شرایط زیر صدق می‌کنند.

(i) اگر $\frac{b}{a} < 1$ ، آن‌گاه گراف رأس-متغیر دست کم یک رأس از درجه γ دارد.

(ii) اگر $\frac{b}{a} < 1$ ، آن گاه گراف تنر بدون دور با طول ۴ شامل هیچ ETS (a, b) با خاصیت $a \leq \gamma$ نمی شود.

(iii) اگر گراف رأس-متغیر $|E|$ یال داشته باشد آنگاه، $b = a\gamma - 2|E|$.

(iv) اگر a عددی زوج باشد، آن گاه b نیز عددی زوج است.

(v) اگر a عددی فرد باشد، آن گاه پارامترهای γ و b هر دو زوج یا هر دو فرد هستند.

برهان. (i) اگر گراف رأس-متغیر، رأس از درجه γ نداشته باشد، آن گاه برای هر رأس v داریم $d(v) < \gamma$ یا $d(v) \geq 1$. از آنجایی که هر رأس متغیر در گراف تنر از درجه γ است، اگر رأسی مانند v در گراف رأس-متغیر درجه کمتر از γ داشته باشد، آن گاه، تعداد رؤوس بررسی از درجه فرد در ETS متناظر برابر است با $d(v) - \gamma$. بنابراین، $b = \sum_{i=1}^a (\gamma - d(v_i)) \geq a$ نتیجه می دهد $\frac{b}{a} \geq 1$ که با فرض در تناقض است.

(ii) اگر یک گراف ساده شامل n رأس باشد، آن گاه درجه هر رأس حداکثر $n - 1$ است. از آنجایی که گراف تنر دور با طول ۴ ندارد، گراف رأس-متغیر متناظر با یک ETS (a, b) گرافی ساده است که شامل a رأس از درجه حداکثر $a - 1$ است. به علاوه، بند (i) ثابت می کند که گراف رأس-متغیر رأسی از درجه γ دارد. بنابراین، $\gamma \leq a - 1$.
(iii) برطبق فرمول مجموع درجات گراف داریم:

$$b = \sum_{i=1}^a (\gamma - d(v_i)) = a\gamma - \sum_{i=1}^a d(v_i) = a\gamma - 2|E|.$$

(iv) اگر a عددی زوج باشد، آن گاه سمت چپ تساوی $a\gamma = 2|E| + b$ زوج است. بنابراین، b نیز عددی زوج است.

(v) اگر a عددی فرد باشد، آن گاه پارامتر γ تعیین می کند که b زوج یا فرد است. در این مورد، اگر γ فرد باشد، آن گاه سمت چپ تساوی $a\gamma = 2|E| + b$ فرد است. در نتیجه، سمت راست باید عددی فرد باشد که ثابت می کند b فرد است. اگر γ زوج باشد، آن گاه به طور مشابه ثابت می شود که b زوج است. $\square$

نتیجه مستقیم لم ۱.۰.۵ در جدول ۱.۵ برای $\gamma = 3, 4, 5, 6$ داده شده است که نشان می دهد کدام ETS (a, b) ها با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ در کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم موجود نیستند. جدول ۱.۵ دلالت می کند بر اینکه به منظور بررسی عدم وجود بعضی ETS (a, b) ها با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ نیازی به استفاده از الگوریتم های جستجوی جامع در مقاله ها نیست. به علاوه، این جدول بیان می کند که عدم وجود بعضی ETS (a, b) ها مستقل از کمر گراف است. در حالی که در [۲۷] این نتایج با استفاده از الگوریتم های جستجوی جامع برای گراف های تنر با کمر ۶ به دست آمده اند. علامت “-” در جدول ۱.۵ عدم وجود ETS (a, b) ها با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ را نشان می دهد که از بند (ii) لم ۱.۰.۵ نتیجه می شود.

جدول ۱.۵: ETS (a, b) ها با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ که در کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم موجود نیستند.

$\gamma = 6$	$\gamma = 5$	$\gamma = 4$	$\gamma = 3$	
-	-	-	$b = 1, 3$	$a = 4$
-	-	$b = 1, 3$	$b = 0, 2, 4$	$a = 5$
-	$b = 1, 3, 5$	$b = 1, 3, 5$	$b = 1, 3, 5$	$a = 6$
$b = 1, 3, 5$	$b = 0, 2, 4, 6$	$b = 1, 3, 5$	$b = 0, 2, 4, 6$	$a = 7$
$b = 1, 3, 5, 7$	$b = 1, 3, 5, 7$	$b = 1, 3, 5, 7$	$b = 1, 3, 5, 7$	$a = 8$
$b = 1, 3, 5, 7$	$b = 0, 2, 4, 6, 8$	$b = 1, 3, 5, 7$	$b = 0, 2, 4, 6, 8$	$a = 9$

۲.۰.۵ کران‌های پایین روی اندازه ETS های کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر $g \geq 8$

از اینجا به بعد، تمرکز ما روی کران پایین روی اندازه ETS هایی است که وابسته به کمر گراف تنر و تعداد رئوس بررسی با درجه فرد هستند. اگرچه در این زیربخش کران پایین روی اندازه ETS ها در گراف تنر با کمر $g \geq 8$ را بررسی می‌کنیم، کران پایین روی اندازه ETS ها در گراف تنر با کمر ۸ و ۱۰ به صورت مجزا در زیربخش‌های، به ترتیب، ۳.۰.۵ و ۴.۰.۵ بررسی می‌شوند. در واقع، کران‌های اکیدی برای این دو مورد به دست می‌آوریم. کران پایین روی اندازه ETS ها در گراف تنر کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر $g \geq 8$ در دو مرحله با کمک تعاریف زیر ارائه می‌شوند.

تعریف ۱.۰.۵. فرض کنید دور با طول i را با C_i نمایش دهیم. اگر گراف ساده کمر g داشته باشد، آن‌گاه گراف دور با طول i ، که $3 \leq i \leq g-1$ ، ندارد. بیشترین تعداد یال‌های یک گراف با n رأس و کمر g با $ex(n, C_3, C_4, \dots, C_{g-1})$ نمایش داده می‌شود.

در مرحله اول، کران پایین روی اندازه ETS در گراف تنر کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر $g = 2(2k+2)$ ، که $k \geq 1$ ، بررسی می‌شود. بنابراین، گراف رأس-متغیر کمر $g = 2k+2$ دارد و بنا به تعریف ۱.۰.۵ گراف رأس-متغیر شامل دور با طول i به ازای $3 \leq i \leq 2k+1$

نیست. در این مورد، قضیه زیر ابزار اصلی ما برای به دست آوردن نتایج است.

قضیه ۱.۰.۵. [۱۳] ماکسیمم تعداد یال‌های یک گراف با n رأس و کمر $g = 2k+2$ برابر است با:

$$ex(n, C_3, C_4, \dots, C_{2k+1}) < \frac{1}{2^{1+\frac{1}{k}}} n^{1+\frac{1}{k}} + \frac{1}{2} n.$$

قضیه ۲.۰.۵. در یک کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر $g = 2(2k+2)$ داریم:

- (i) پارامترهای a و b در نامساوی $b > a(\gamma - (\frac{a}{\gamma})^{\frac{1}{k}} - 1)$ صدق می کنند.
 - (ii) هیچ ETS (a, b) با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ از اندازه کمتر یا مساوی $2(\gamma - 2)^k$ وجود ندارد.
- برهان. مطابق با لم ۱.۰.۵ بند (iii) داریم $b = a\gamma - 2|E|$ ، که در آن $|E|$ تعداد یال‌ها در گراف رأس-متغیر متناظر با ETS (a, b) است. قضیه ۱.۰.۵ ثابت می کند که در این مورد ماکسیم تعداد یال‌های گراف رأس-متغیر کمتر از $\frac{1}{\gamma}a^{1+\frac{1}{k}} + \frac{a}{\gamma}$ است. در نتیجه، $b = a\gamma - 2|E| > a\gamma - 2(\frac{1}{\gamma}a^{1+\frac{1}{k}} + \frac{a}{\gamma})$ با محاسباتی ساده نتیجه می گیریم که $b > a(\gamma - (\frac{a}{\gamma})^{\frac{1}{k}} - 1)$.
- برای بررسی ETS (a, b) با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ از نامساوی‌های $b > a(\gamma - (\frac{a}{\gamma})^{\frac{1}{k}} - 1)$ و $\frac{b}{a} < 1$ استفاده می کنیم که به ازای آن‌ها نامساوی $1 > \frac{b}{a} > \gamma - (\frac{a}{\gamma})^{\frac{1}{k}} - 1$ نامساوی $\gamma - \frac{a}{\gamma} < 2$ را نتیجه می دهد. به عبارت دیگر، ETS (a, b) با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ از اندازه کمتر یا مساوی با $2(\gamma - 2)^k$ وجود ندارد. $\square$

در مرحله دوم، کران پایین روی اندازه ETS در گراف تنر کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر $g = 2(2k+1)$ ، که $k \geq 2$ ، بررسی می شود. بنابراین، گراف رأس-متغیر کمر $g = 2k+1$ دارد و بنا به تعریف ۱.۰.۵ گراف رأس-متغیر شامل دور با طول i به ازای $3 \leq i \leq 2k$

نیست. در این مورد، قضیه زیر برای به دست آوردن نتایج بسیار مفید است.

قضیه ۳.۰.۵. [۱۳] ماکسیم تعداد یال‌های یک گراف با n رأس و کمر $g = 2k+1$ برابر است با:

$$ex(n, C_3, C_4, \dots, C_{2k}) < \frac{1}{\gamma}n^{1+\frac{1}{k}} + \frac{1}{\gamma}n.$$

قضیه ۴.۰.۵. در یک کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر $g = 2(2k+1)$ داریم:

- (i) پارامترهای a و b در نامساوی $b > a(\gamma - a^{\frac{1}{k}} - 1)$ صدق می کنند.
 - (ii) هیچ ETS (a, b) با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ از اندازه کمتر یا مساوی $(\gamma - 2)^k$ وجود ندارد.
- برهان. گراف رأس-متغیر دارای a رأس و $|E|$ یال است. مطابق با قضیه ۳.۰.۵، بیشترین تعداد یال‌ها کمتر است از $\frac{1}{\gamma}a^{1+\frac{1}{k}} + \frac{a}{\gamma}$. در این مورد، $b = a\gamma - 2|E| > a\gamma - 2(\frac{1}{\gamma}a^{1+\frac{1}{k}} + \frac{a}{\gamma})$ با محاسباتی ساده نتیجه می گیریم که $b > a(\gamma - a^{\frac{1}{k}} - 1)$.
- اگر $\frac{b}{a} < 1$ ، آن گاه داریم $1 > \frac{b}{a} > \gamma - a^{\frac{1}{k}} - 1$ ، که ثابت می کند $a^{\frac{1}{k}} > \gamma - 2$. در نتیجه، ETS (a, b) با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ از اندازه کمتر یا مساوی $(\gamma - 2)^k$ وجود ندارد. $\square$

به منظور مقایسه نتایج در مورد کران‌های پایین روی اندازه ETS که در مقالات مطرح شده اند و آنچه که در این بخش مطرح کردیم، کران پایین در قضیه ۵.۰.۵ از [۲۱] را در زیر

می‌آوریم. همچنین، خاصیت‌های این کران را در گزاره‌های ۱.۰.۵، ۲.۰.۵، ۳.۰.۵ و ۴.۰.۵ بررسی می‌کنیم.

قضیه ۵.۰.۵. یک گراف تنر متغیر-منظم، که با G نمایش می‌دهیم، با درجه رئوس متغیر γ و کمر g را در نظر بگیرید. کران پایین روی اندازه (a, b) - مجموعه تله‌ای در G ، که زیرگراف القایی آن شامل یک رأس بررسی از درجه (≥ 2) است، به صورت زیر می‌باشد:

$$\bullet \text{ اگر } \frac{g}{2} \text{ زوج باشد، آنگاه } (\gamma - 1)^i \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{g}{2} - 2 \rfloor} a \geq l + \beta$$

$$\bullet \text{ اگر } \frac{g}{2} \text{ فرد باشد، آن گاه}$$

$$a \geq l + \beta \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{g}{2} - 2 \rfloor} (\gamma - 1)^i + \max \left\{ \left\lceil \frac{\beta(\gamma - 1)^{\lfloor \frac{g}{2} - 1 \rfloor}}{\gamma} \right\rceil, (\gamma - 1 - \lfloor \frac{b'}{l} \rfloor)(\gamma - 1)^{\lfloor \frac{g}{2} - 1 \rfloor} \right\},$$

که $b' = b - (l \bmod 2)$ ، $\beta = l(\gamma - 1) - b'$ ، و b در نامساوی $(l \bmod 2) + l(\gamma - 1) < b$ صدق می‌کند

قضیه ۵.۰.۵. با $l = 2$ کران پایین روی اندازه ETS را می‌دهد. ما، همچنین، با فرض $l = 2$ به بعضی ساختارها و نکاتی در اثبات قضیه ۵.۰.۵ اشاره می‌کنیم. یک درخت، T ، روی a رأس متغیر که شامل $\frac{g}{2}$ لایه است را در نظر بگیرید. فرض کنید درخت با یک رأس بررسی c_1 با درجه زوج در لایه اول شروع شود. این رأس بررسی به دو رأس متغیر v_1 و v_2 از درجه γ در لایه دوم متصل است. فرض می‌کنیم که b رأس بررسی از درجه فرد در لایه سوم قرار داشته باشند. این درخت شامل دو زیردرخت است که ما آن‌ها را با T_1 و T_2 نمایش می‌دهیم. فرض کنید T_1 با v_1 شروع شود و T_2 با v_2 شروع شود. دو زیردرخت T_1 و T_2 ، به ترتیب، مجموعه‌های X_1 و X_2 را در لایه $\frac{g}{2}$ - ام شامل می‌شوند.

گزاره ۱.۰.۵. اگر $b = 0$ و $\frac{g}{2}$ عددی زوج باشد، گراف تنر با کمر g شامل یک ETS (a, b) می‌شود که $a = 2 + (2\gamma - 2) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{g}{2} - 2 \rfloor} (\gamma - 1)^i$.

برهان. از آنجایی که رئوس بررسی با درجه فرد وجود ندارد، تعداد رئوس بررسی با درجه زوج در لایه سوم برابر $2(\gamma - 1)$ است. بنابراین، $2(\gamma - 1)$ رأس متغیر در لایه چهارم وجود دارد. با ادامه این روند، تعداد رئوس متغیر در لایه $\frac{g}{2}$ - ام برابر است با $2(\gamma - 1)^{\lfloor \frac{g}{2} - 1 \rfloor}$. بنابراین، هر یک از مجموعه‌های X_1 و X_2 شامل $(\gamma - 1)^{\lfloor \frac{g}{2} - 1 \rfloor}$ رأس متغیر است. درخت T یک ETS $(a, 0)$ نیست. برای ساخت ETS $(a, 0)$ از T ، هر دو رأس متغیر در لایه آخر را توسط یک رأس بررسی با درجه زوج وصل می‌کنیم. اگر دو رأس متغیر در X_1 با یک رأس بررسی از درجه زوج وصل شوند، آن گاه T_1 یک دور از طول k دارد که $k < g$ و با فرض در تناقض است. بنابراین، یک رأس متغیر در X_1 باید به یک رأس متغیر در X_2 توسط یک رأس بررسی با درجه زوج وصل شوند. بنابراین، دو مجموعه X_1 و X_2 در گراف رأس - متغیر یک گراف دوبخشی $(\gamma - 1)$ - منظم می‌سازند. در نتیجه، درخت T به یک ETS $(a, 0)$ گسترش یافت. $\square$

مطابق با گزاره ۱.۰.۵، برای $b = 0$ ، $l = 2$ ، اگر $\frac{g}{2}$ عددی زوج باشد، آن گاه کران پایین روی اندازه ETS ها در قضیه ۵.۰.۵ اکید است.

گزاره ۲.۰.۵. اگر b عددی فرد باشد و $\frac{g}{2}$ زوج باشد، آن گاه گراف تنر با کمر g شامل هیچ ETS (a, b) که $a = 2 + (2\gamma - 2 - b) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{g}{2} - 2 \rfloor} (\gamma - 1)^i$ نیست.

برهان. ما گزاره را برای $b = 1$ ثابت می کنیم. بقیه موارد به طور مشابه ثابت می شوند. اگر $b = 1$ ، آن گاه X_1 دارای $\lfloor \frac{g}{2} - 1 \rfloor$ رأس متغیر است و X_2 دارای $\lfloor \frac{g}{2} - 1 \rfloor$ رأس متغیر است. برطبق [۶]، نامساوی $|X_1| \neq |X_2|$ ثابت می کند که این دو مجموعه یک گراف دوبخشی $(\gamma - 1)$ - منتظم نمی سازند که زیرگرافی از گراف رأس-متغیر باشد. بنابراین، هیچ ETS (a, b) که $a = 2 + (2\gamma - 3) \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{g}{2} - 2 \rfloor} (\gamma - 1)^i$ ای وجود ندارد. $\square$

بطور کلی، اگر $l = 2$ ، b عددی فرد باشد و $\frac{g}{2}$ عددی زوج باشد، آن گاه کران پایین روی اندازه ETS ها در قضیه ۵.۰.۵ اکید نیست.

فرض کنید b عددی زوج باشد. بدون کم شدن از کلیت مسئله، فرض کنید $\frac{b}{2}$ رأس بررسی از درجه ۱ به v_1 وصل شوند و رؤس بررسی دیگر با درجه ۱ به v_2 وصل شوند. با این فرض، تساوی $|X_1| = |X_2|$ را داریم که گزاره زیر را نتیجه می دهد.

گزاره ۳.۰.۵. اگر $|X_1| = |X_2| < \gamma - 1$ ، آن گاه درخت T با a رأس متغیر به یک ETS (a, b) تبدیل نمی شود.

برهان. اگر $|X_1| = |X_2| < \gamma - 1$ ، آن گاه دو مجموعه X_1 و X_2 یک گراف دوبخشی $(\gamma - 1)$ - منتظم نمی سازند که ثابت می کند رؤس متغیر بیشتری برای ایجاد یک ETS مورد نیاز است. در نتیجه، درخت T با a رأس متغیر به یک ETS (a, b) تبدیل نمی شود. $\square$

برای مثال، فرض کنید $\gamma = 4$ ، $g = 8$ و $b = 2$ ، آن گاه، $|X_1| = |X_2| = 2 < 3$. از آنجایی که X_1 و X_2 یک گراف دوبخشی ۳- منتظم نمی سازند، یک ETS $(6, 2)$ با کمر ۸ و وزن ستونی ۴ وجود ندارد.

گزاره ۴.۰.۵. کران پایین روی اندازه ETS ها در قضیه ۵.۰.۵ برای مقادیری از b و γ ، که $b \geq 2\gamma - 2$ ، به کار نمی رود. به علاوه، کران ها برای $b = 2\gamma - 3$ اکید نیستند.

برهان. مطابق با قضیه ۵.۰.۵ داریم $b < l(\gamma - 1) + (l \bmod 2)$. برای ETS قرار می دهیم $l = 2$ که نتیجه می دهد $b < 2(\gamma - 1)$. بنابراین، کران پایین روی اندازه ETS ها در قضیه ۵.۰.۵ برای مقادیری از b و γ ، که $b \geq 2\gamma - 2$ ، به کار نمی رود.

درخت T ، $2(\gamma - 1)$ رأس بررسی در لایه سوم دارد. از آنجایی که درخت T دو زیردرخت T_1 و T_2 دارد که، به ترتیب، با v_1 و v_2 شروع می شوند، وجود دست کم دو رأس بررسی با درجه زوج در لایه سوم برای به دست آوردن یک ETS از درخت T الزامی است. بنابراین، تعداد

رئوس بررسی با درجه فرد حداکثر $2 - (\gamma - 1)2$ است. بنابراین، اگر $b = 2\gamma - 3$ ، آن‌گاه از درخت T یک ETS نتیجه نمی‌شود. □

برای مثال، کران پایین روی اندازه ETS ها در قضیه ۵.۰.۵ برای $\gamma = 3$ و $b \geq 4$ به کار نمی‌رود و برای $\gamma = 3$ و $b = 3$ اکید نیست.

۳.۰.۵ کران پایین روی اندازه ETS ها در کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم و نامنظم با کمر ۸

این زیربخش شامل دو قسمت است. در قسمت اول، اندازه و تعداد رئوس بررسی با درجه ۱ را در ETS های کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۸ بررسی می‌کنیم. در قسمت دوم، با استفاده از نتایج به دست آمده در قسمت اول روشی برای تعیین کران پایین روی اندازه ETS ها در کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظم با کمر ۸ ارائه می‌دهیم. نتایج عددی به دست آمده از این روش مربوط به کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظمی است که درجه رئوس متغیر آن‌ها زیرمجموعه‌ای از $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ می‌باشد.

کدهای بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۸

در [۲۷] نتایجی درمورد ETS ها در گراف تنر با کمر ۸ و $\gamma = 3, 4, 5$ وجود دارد. این نتایج عددی بر مبنای جستجوی جامع هستند. برای یافتن کران پایین روی اندازه ETS ها در کدهای بررسی-توازن کم-چگال با کمر ۸ و هر مقداری از γ قضیه معروف توران را درمورد گراف‌های فاقد K_{r+1} در زیر مطرح می‌کنیم. با کمک این قضیه، نتایج به دست آمده آنالیز شده و دارای اثبات ریاضی هستند.

قضیه ۶.۰.۵. [۱] فرض کنید G گرافی روی n رأس باشد، به طوری که G فاقد گراف کامل K_{r+1} باشد. آن‌گاه تعداد یال‌های G حداکثر $\frac{n^2}{r} \times (1 - \frac{1}{r}) = \frac{r-1}{r} \times \frac{n^2}{r}$ است.

گراف رأس-متغیر متناظر با یک ETS در گراف تنر با کمر ۸ یک گراف بدون K_3 است، گزاره زیر درمورد گراف‌های بدون مثلث ابزار اصلی ما برای یافتن بهترین کران پایین روی دو پارامتر a و b در کدهای بررسی-توازن کم-چگال با کمر ۸ است. این گزاره نتیجه ی قضیه ۶.۰.۵ می‌باشد.

گزاره ۵.۰.۵. اگر G گرافی بدون مثلث روی n رأس باشد، آن‌گاه تعداد یال‌ها در G حداکثر $\frac{n^2}{4}$ است.

قضیه ۷.۰.۵. در یک کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۸ داریم:

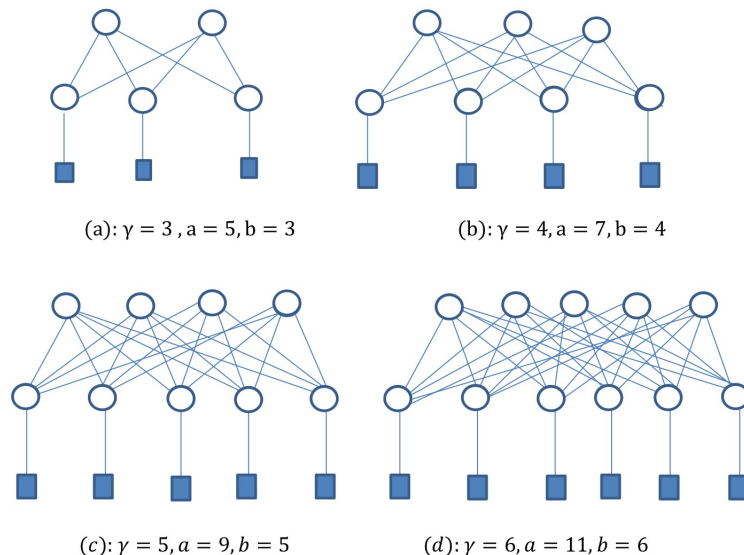
• a و b در نامساوی $b \geq a\gamma - \frac{a^2}{4}$ صدق می‌کنند.

• هیچ ETS (a, b) ای با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ از اندازه کمتر از $2\gamma - 1$ وجود ندارد.

برهان. از آنجایی که گراف تنر دور ۸ دارد، هر ETS فاقد دور با طول ۶ است. در نتیجه، گراف رأس-متغیر متناظر آن بدون مثلث است و طبق گزاره ۵.۰.۵ بیشترین تعداد یال‌های آن برابر $\frac{a^2}{4}$ می‌باشد. در نتیجه، $b = a\gamma - 2|E| \geq a\gamma - 2(\frac{a^2}{4})$. بنابراین، تعداد رئوس بررسی با درجه ۱ دست کم $a\gamma - \frac{a^2}{4}$ است. مشابه با قضیه‌های ۲.۰.۵ و ۴.۰.۵ نشان داده می‌شود که ETS (a, b) ای با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ از اندازه کمتر یا مساوی $2\gamma - 2$ وجود ندارد. $\square$

به آسانی نتیجه می‌شود که اگر یک ETS بیشترین اندازه $a = 2\gamma - 1$ را داشته باشد، آن‌گاه بند (i) از قضیه ۷.۰.۵ ثابت می‌کند که $b \geq \gamma$. حال نشان می‌دهیم که چگونه یک ETS $(2\gamma - 1, \gamma)$ در کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۸ ساخته می‌شود. این ساختار ثابت می‌کند کران‌های پایین به دست آمده روی a و b اکید هستند.

بر طبق گزاره ۵.۰.۵، بیشترین تعداد یال‌ها در گراف رأس-متغیر با $a = 2\gamma - 1$ برابر است با $|E| = \frac{(2\gamma-1)^2}{4} = \gamma^2 - \gamma$. بنابراین، گراف رأس-متغیر متناظر با ETS $(2\gamma - 1, \gamma)$ یک گراف دوبخشی کامل $K_{\gamma-1, \gamma}$ است. در نتیجه، کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۸ و وزن ستونی $\gamma = 3, 4, 5, 6$ شامل ETS‌هایی می‌شود که گراف‌های رأس-متغیر متناظرشان، به ترتیب، $K_{2,3}, K_{3,4}, K_{4,5}$ و $K_{5,6}$ می‌باشند. این ETS‌ها در شکل ۱.۵ نمایش داده شده‌اند که در آن‌ها هر یال بین دو رأس متغیر متناظر است با یک رأس بررسی با درجه ۲.



شکل ۱.۵: ETS $(2\gamma - 1, \gamma)$ ها در کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۸ و وزن ستونی $\gamma = 3, 4, 5, 6$.

کران‌های به دست آمده برای a و b در قضیه ۷.۰.۵ و لم ۱.۰.۵ اطلاعات مفیدی را درمورد وجود تمام ETS ها در یک کد بررسی-توازن کم-چگال با کمر ۸ به ما می‌دهند. برای کسب این اطلاعات نیازی به استفاده از الگوریتم‌های جستجوی جامع نیست. به عنوان مثال، برای یک کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با $\gamma = 6$ و $g = 8$ داریم $a = 6 - \frac{a^2}{4}$ و اگر $\frac{b}{a} < 1$ ، آن‌گاه $a \geq 11$. بنابراین، اگر $a = 11$ ، آن‌گاه کمترین تعداد رئوس بررسی با درجه ۱ برابر ۶ است. با استفاده از لم ۱.۰.۵ نتیجه می‌گیریم که ETS ها با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ در این مورد عبارت‌اند از ETS (۱۱, ۶)، ETS (۱۱, ۸) و ETS (۱۱, ۱۰).

در [۲۱]، کران پایین روی اندازه ETS (a, b) ها در کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۸ برابر $2\gamma - b$ است که در آن $2 - 2\gamma < b$. به منظور مقایسه نتایج میان کران پایین روی اندازه ETS ها که ما به دست آورده‌ایم و آن‌هایی که در [۲۱] مطرح شده‌اند، این دو کران را به همراه مینیمم اندازه ETS ها برای $\gamma = 3, 4, 5, 6$ در جدول‌های ۲.۵ و ۳.۵ جمع آوری کرده‌ایم. در این جدول‌ها، سه عدد برای هر مقداری از b و γ در نظر گرفته شده است. عدد اول (در سطر سوم) مربوط به کران پایین روی اندازه ETS گزارش شده در [۲۱] است. عدد دوم (در سطر چهارم) کران پایینی است که ما به دست آورده‌ایم. مینیمم اندازه‌ها به عنوان اطلاعات سوم (در سطر آخر) قرار دارند.

جدول ۲.۵: مقایسه کران پایین به دست آمده در [۲۱]، کران پایین به دست آمده از قضیه ۷.۰.۵ و لم ۱.۰.۵ و مینیمم اندازه ETS های کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۸ و وزن‌های ستونی ۳ و ۴.

۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۴	۳	۳	۳	۳	۳	۳	۳	$d_c = \gamma$
۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	b
-	None	-	None	۴	None	۷	None	۸	-	-	-	-	۳	۴	۵	۶	در [۲۱]
۴	None	۶	None	۷	None	۸	None	۸	-	-	۴	۳	۴	۵	۶	۷	جدید
۴	None	۶	None	۷	None	۸	None	۸	۴	۳	۴	۳	۴	۵	۶	۷	مینیمم

جدول ۳.۵: مقایسه کران پایین به دست آمده در [۲۱]، کران پایین به دست آمده از قضیه ۷.۰.۵ و لم ۱.۰.۵ و مینیمم اندازه ETS های کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۸ و وزن‌های ستونی ۵ و ۶.

۶	۶	۶	۶	۶	۶	۶	۶	۶	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	۵	$d_c = \gamma$
۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	b
۴	None	۶	None	۸	None	۱۰	None	۱۲	-	-	۴	۵	۶	۷	۸	۹	در [۲۱]
۱۲	None	۱۱	None	۱۲	None	۱۲	None	۱۲	۱۰	۹	۱۰	۹	۱۰	۱۱	۱۰	۱۱	جدید
۱۲	None	۱۱	None	۱۲	None	۱۲	None	۱۲	۱۰	۹	۱۰	۹	۱۰	۱۱	۱۰	۱۳	مینیمم

همانطور که می‌بینیم، کران‌های پایین روی اندازه ETS ها در [۲۱] برای هر مقداری از γ و b بجز $b = 0$ کمتر از مینیمم اندازه هستند. در صورتی که، کران پایین به دست آمده از قضیه ۷.۰.۵ و لم ۱.۰.۵ برابر مینیمم اندازه هستند و برای هر مقداری از γ و b استفاده می‌شوند.

کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظم با کم ۸

تعداد بسیار زیادی از کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظم با درجه رئوس متغیر متفاوت وجود دارند. در نتیجه، بررسی همه انواع ETS ها در کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظم کار آسانی نیست. اگرچه یک الگوریتم جستجو در [۲۵] برای یافتن ETS های یک کد بررسی-توازن کم-چگال نامنظم وجود دارد، اما این الگوریتم جامع نیست. به طور کلی، تحقیق زیادی در رابطه با تعیین انواع ETS ها در این نوع از کدها نشده است. با استفاده از نتایج مطرح شده در قسمت قبل، روشی ارائه می‌دهیم که با استفاده از آن کران پایینی روی اندازه ETS ها در کد بررسی-توازن کم-چگال نامنظم به دست آوریم. ما این روش را در کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظم که درجه رئوس متغیر آن‌ها زیرمجموعه ای از $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ است به کار می‌بریم.

همانطور که در بالا ذکر شد، بررسی همه انواع ETS ها در کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظم کار سختی است. بنابراین، ما تنها ETS (a, b) هایی را بررسی می‌کنیم که در آن‌ها $\frac{b}{a} < 1$ باشد. برای به دست آوردن کران پایین روی اندازه ETS (a, b) ها با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ در یک کد بررسی-توازن کم-چگال نامنظم که درجه رئوس متغیر آن متعلق به مجموعه $\{d_1, \dots, d_l\}$ باشد روند زیر را پیش می‌بریم.

فرض کنید δ مینیمم درجه رئوس متغیر باشد و، بدون کم شدن از کلیت مسئله، فرض کنید که $d_1 = \delta$. از آنجایی که $g = 8$ و ETS ها با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ را بررسی می‌کنیم، قضیه ۷.۰.۵ و نتایج بعدی آن ثابت می‌کنند که یک ETS $(2\delta - 1, \delta)$ در یک کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم وجود دارد. گام اول در این فرآیند این است که یک چنین ETS $(2\delta - 1, \delta)$ ای را در نظر بگیریم. تعداد رئوس بررسی با درجه ۱ که به این ETS باید اضافه شوند تا یک ETS (a, b) با $\{d_1, \dots, d_l\}$ را نتیجه دهد برابر $x = \sum_{i=2}^l (d_i - \delta)$ است. متغیر x به تعیین مینیمم اندازه ETS ها با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ کمک می‌کند. یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد.

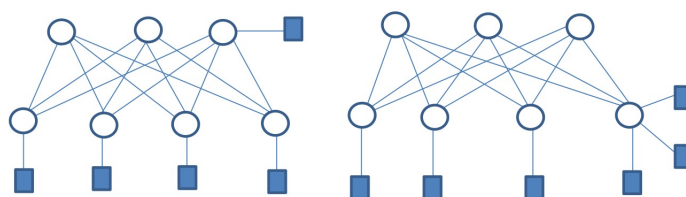
(۱) اگر $x < \delta - 1$ ، آن‌گاه با اضافه کردن x رأس بررسی با درجه ۱ به ETS $(2\delta - 1, \delta)$ یک ETS (a, b) با $\frac{b}{a} = \frac{\delta+x}{2\delta-1} < \frac{2\delta-1}{2\delta-1} = 1$ به دست می‌آوریم. در این مورد، مینیمم اندازه ETS ها با $d(v) \in \{d_1, \dots, d_l\}$ برابر $a = 2\delta - 1$ است.

(۲) اگر $x \geq \delta - 1$ ، آن‌گاه با اضافه کردن x رأس بررسی با درجه ۱ به ETS $(2\delta - 1, \delta)$ یک ETS (a, b) با $\frac{b}{a} \geq 1$ در آن می‌آید که در آن $\frac{b}{a} \geq 1$ است و با فرض در تناقض است. در این مورد، مینیمم اندازه یک ETS با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ دست کم برابر $a = 2\delta$ است.

در جدول ۴.۵ مینیمم اندازه ETS های کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظم با کم ۸ که وزن‌های ستونی آن‌ها در مجموعه $\{2, 3, 4, 5, 6\}$ قرار دارند داده شده است. برای روشن

شدن مطلب در فرآیند داده شده مثال‌های زیر را فراهم می‌کنیم.

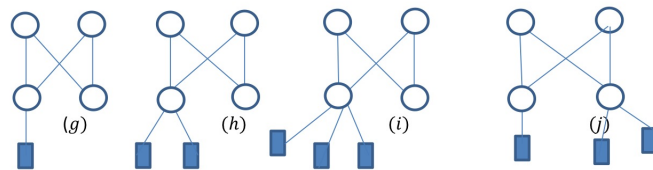
مثال ۱.۰.۵. در این مثال توضیح می‌دهیم که چگونه کران‌های پایین روی اندازه ETS ها را در کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظم با کمر ۸ که وزن‌های ستونی آن‌ها متعلق به یکی از مجموعه‌های $\{4,5\}$ ، $\{4,6\}$ یا $\{4,7\}$ است به دست می‌آوریم. برای هر سه مورد داریم $\delta = 4$. برطبق قضیه ۷.۰.۵، مینیمم اندازه ETS ها در یک کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با درجه ستونی ۴ برابر با ۷ است. ما ابتدا یک ETS $(7,4)$ با $\gamma = 4$ را در نظر می‌گیریم. اگر $d(v) \in \{4,5\}$ یا $d(v) \in \{4,6\}$ باشد، آن‌گاه متغیر x برابر با، به ترتیب، ۱ یا ۲ است که از $3 = \delta - 1$ کمتر است. همانطور که در (۱) توضیح داده شد، برای این دو مورد داریم $a = 7$ که در شکل ۲.۵ نمایش داده شده‌اند. در این شکل‌ها هر یال بین دو رأس متغیر متناظر است با یک رأس بررسی با درجه ۲. اگر $d(v) \in \{4,7\}$ ، آن‌گاه برطبق (۲) داریم $x = \delta - 1$ و اندازه ETS ها دست کم ۸ است.



(e): $d(v) \in \{4,5\}$, $a = 7$, $b = 5$ (f): $d(v) \in \{4,6\}$, $a = 7$, $b = 6$

شکل ۲.۵: (e) و (f) یک ETS $(7,5)$ و یک ETS $(7,6)$ به دست آمده از یک ETS $(7,4)$ نمایش داده شده در شکل ۱.۵ (b) است.

مثال ۲.۰.۵. برای کدهای بررسی-توازن کم-چگال با $d(v) \in \{2,3\}$ داریم $\delta = 2$ و قضیه ۷.۰.۵ ثابت می‌کند که مینیمم اندازه ETS در یک کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با $\gamma = 2$ برابر با ۳ است. از آنجایی که $x = \delta - 1$ ، (۲) نتیجه می‌دهد که $a \geq 4$. زیرا، با اضافه کردن یک رأس بررسی به یک ETS $(3,2)$ ، یک ETS $(3,3)$ به دست می‌آوریم که در آن $\frac{b}{a} = 1$. در شکل ۳.۵، ETS ها با مینیمم اندازه ۴ را برای چهار نوع از کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظم نمایش داده‌ایم. این ETS ها عبارت‌اند از ETS $(4,1)$ با $d(v) \in \{2,3\}$ ، ETS $(4,2)$ با $d(v) \in \{2,4\}$ ، دو ETS $(4,3)$ با $d(v) \in \{2,5\}$ و $d(v) \in \{2,3,4\}$. در این شکل‌ها هر یال بین دو رأس متغیر متناظر است با یک رأس بررسی با درجه ۲.



شکل ۳.۵: (g) یک ETS (۴, ۱) با $d(v) \in \{2, 3\}$ است، (h) یک ETS (۴, ۲) با $d(v) \in \{4, 2\}$ است، (i) یک ETS (۴, ۳) با $d(v) \in \{2, 5\}$ است و (j) یک ETS (۴, ۳) با $d(v) \in \{2, 3, 4\}$ است.

۴.۰.۵ کران پایین روی اندازه ETS ها در کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۱۰

گراف رأس-متغیر متناظر با یک ETS در کدهای بررسی-توازن کم-چگال با کمر ۱۰ فاقد مثلث است و دور با طول ۴ ندارد. بیشترین تعداد یال‌های یک گراف با کمر ۵ در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۸.۰.۵. (قضیه ۲.۲ در [۱۵] را ببینید). بیشترین تعداد یال‌های یک گراف با n رأس و کمر $g = 5$ برابر است با $\frac{1}{4}n^{\frac{3}{2}} < ex(n, C_3, C_4)$.

حال با استفاده از بیشترین تعداد یال‌ها در یک گراف رأس-متغیر با کمر ۵، قضیه زیر را برای گراف تنر با کمر ۱۰ مطرح می‌کنیم.

قضیه ۹.۰.۵. در یک کد بررسی-توازن کم-چگال متغیر-منظم با کمر ۱۰ داریم:

- پارامترهای a و b در نامساوی $b > a\gamma - a^{\frac{3}{2}}$ صدق می‌کنند.
- هیچ ETS (a, b) با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ با اندازه کمتر از $1 + (\gamma - 1)^2$ وجود ندارد. به عبارت دیگر، $a \geq (\gamma - 1)^2 + 1$.

برهان. گراف تنر کمر دست کم ۱۰ دارد. بنابراین، گراف رأس-متغیر متناظر با ETS (a, b) فاقد مثلث است و دور با طول ۴ ندارد. در نتیجه، تعداد یال‌های آن حداکثر $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{4}$ است. مشابه با قضیه‌های ۲.۰.۵، ۴.۰.۵ و ۷.۰.۵، از تساوی $b = a\gamma - 2|E|$ نتیجه می‌گیریم که $b > a\gamma - a^{\frac{3}{2}}$ و برای ETS (a, b) با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ داریم $a \geq (\gamma - 1)^2 + 1$. $\square$

واضح است که، کران بالای اکید روی تعداد یال‌های یک گراف کران پایین اکیدی روی اندازه ETS نتیجه می‌دهد. در [۱۵] مقدار دقیق ماکسیمم تعداد یال‌ها در یک گراف فاقد دورها با طول ۳ و ۴ با n رأس برای $1 \leq n \leq 30$ مشخص شده‌اند که در جدول ۵.۵ داده شده‌اند. این

جدول ۴.۵: مینیمم اندازه ETS کدهای بررسی-توازن کم-چگال نامنظم با کمر ۸ که وزن‌های ستونی آن‌ها زیرمجموعه‌ای از $\{۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$ باشند.

$a = ۴$	ETS $(۴, ۱)$ با $d(v) \in \{۲, ۳\}$ ETS $(۴, ۲)$ با $d(v) \in \{۲, ۴\}$
	ETS $(۴, ۳)$ با $d(v) \in \{۲, ۵\}$ ETS $(۴, ۳)$ با $d(v) \in \{۲, ۳, ۴\}$
$a = ۵$	ETS $(۵, ۴)$ با $d(v) \in \{۲, ۶\}$ ETS $(۵, ۴)$ با $d(v) \in \{۳, ۴\}$
	ETS $(۵, ۲)$ با $d(v) \in \{۲, ۳, ۵\}$ ETS $(۵, ۳)$ با $d(v) \in \{۲, ۳, ۶\}$
	ETS $(۵, ۳)$ با $d(v) \in \{۲, ۴, ۵\}$ ETS $(۵, ۴)$ با $d(v) \in \{۲, ۴, ۶\}$
	ETS $(۵, ۴)$ با $d(v) \in \{۲, ۳, ۴, ۵\}$
$a = ۶$	ETS $(۶, ۲)$ با $d(v) \in \{۳, ۵\}$ ETS $(۶, ۳)$ با $d(v) \in \{۳, ۶\}$
	ETS $(۶, ۳)$ با $d(v) \in \{۲, ۵, ۶\}$ ETS $(۶, ۳)$ با $d(v) \in \{۳, ۴, ۵\}$
	ETS $(۶, ۴)$ با $d(v) \in \{۳, ۴, ۶\}$ ETS $(۶, ۵)$ با $d(v) \in \{۳, ۵, ۶\}$
	ETS $(۶, ۵)$ با $d(v) \in \{۲, ۴, ۵, ۶\}$ ETS $(۶, ۴)$ با $d(v) \in \{۲, ۳, ۵, ۶\}$
$a = ۷$	ETS $(۷, ۵)$ با $d(v) \in \{۴, ۵\}$ ETS $(۷, ۶)$ با $d(v) \in \{۴, ۶\}$
	ETS $(۷, ۳)$ با $d(v) \in \{۳, ۴, ۵, ۶\}$ ETS $(۷, ۴)$ با $d(v) \in \{۲, ۳, ۴, ۵, ۶\}$
$a = ۸$	ETS $(۸, ۳)$ با $d(v) \in \{۴, ۵, ۶\}$
$a = ۹$	ETS $(۹, ۶)$ با $d(v) \in \{۵, ۶\}$

جدول ۵.۵: ماکسیمم تعداد یال‌ها در یک گراف فاقد دورها با طول ۳ و ۴ با n رأس

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵
$ E $	۰	۱	۲	۳	۵	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۵	۱۶	۱۸	۲۱	۲۳	۲۶
n	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰
$ E $	۲۸	۳۱	۳۴	۳۸	۴۱	۴۴	۴۷	۵۰	۵۴	۵۷	۶۱	۶۵	۶۸	۷۲	۷۶

داده‌ها بهترین کران‌های پایین روی اندازه ETS برای هر مقداری از b و γ را نتیجه می‌دهند. بعضی از این کران‌های پایین اکید در جدول‌های ۶.۵ و ۷.۵ داده شده‌اند.

در [۲۱]، مقایسه‌هایی بین مینیمم اندازه ETS ها در گراف تنر با کمر ۱۰ ، که با الگوریتم جستجو به دست آمده‌اند، و کران‌های پایین آنالیز شده روی اندازه ETS ها ارائه شده‌اند. در جدول‌های ۶.۵ و ۷.۵ آن‌ها را با کران‌های پایینی که روی ETS ها به دست آورده‌ایم برای $۵ \geq b \geq ۰$ و $\gamma = ۳, ۴, ۵, ۶$ مقایسه کرده‌ایم. برطبق این مقایسه، کران پایینی که ما به دست آورده‌ایم اکید است. در صورتی که، کران‌های پایین آنالیز شده در [۲۱] روی اندازه ETS های کدهای بررسی-توازن کم-چگال با کمر ۱۰ فقط برای دو مورد $b = ۱, ۰$ ، که در آن $\gamma = ۳$ می‌باشد اکید است.

همانطور که در جدول ۶.۵ می‌بینیم، مینیمم اندازه ETS گزارش شده در [۲۱] با $\gamma = ۳$

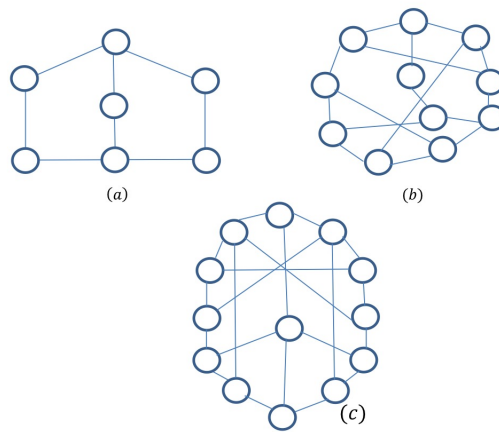
I. همانطور که در لم ۱.۰.۵ بند (i) ذکر شد، در یک ETS (a, b) با $\frac{b}{a} < 1$ گراف رأس-متغیر دست کم یک رأس از درجه γ دارد. فرض کنیم $d(v) = \gamma$. اگر یالی بین دو رأس از همسایه‌های v وجود داشته باشد، آن‌گاه گراف رأس-متغیر یک مثلث دارد. بنابراین، هیچ یالی بین همسایه‌های v نیست.

II. فرض کنیم $z, z' \in N(v)$ ، به عبارت دیگر، z و z' به رأس v وصل هستند. اگر w همسایه‌ای از z باشد، آن‌گاه w به z' وصل نیست. زیرا در غیر این صورت، $z, z' \in N(w)$ و اگر $|N(v) \cap N(w)| \geq 2$ ، آن‌گاه گراف رأس-متغیر دور با طول ۴ دارد. که با فرض این که گراف رأس-متغیر کمر ۵ دارد در تناقض است. در نتیجه، هر رأس خارج مجموعه $v \cup N(v)$ فقط یک همسایه در مجموعه $v \cup N(v)$ دارد.

حال، قضیه ۹.۰.۵ و دو مورد بالا را برای یافتن مینیمم اندازه یک ETS (a, b) با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ و $\gamma = 3, 4$ استفاده می‌کنیم.

برطبق قضیه ۹.۰.۵، اندازه ETS (a, b) با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ در گراف تنر با کمر ۱۰ و $\gamma = 3$ دست کم برابر با ۵ است. با استفاده از موارد I و II نتیجه می‌گیریم که $a \geq 7$. یک گراف رأس-متغیر با ۷ رأس و کمر ۵ در شکل ۴.۵ (a) ترسیم شده است.

ثابت می‌کنیم برای $\gamma = 4$ و $g = 10$ مینیمم اندازه یک ETS (a, b) با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ برابر با ۱۳ است. با استفاده از قضیه ۹.۰.۵ داریم $a \geq 10$. برطبق جدول ۵.۵، بیشترین تعداد یال‌های یک گراف رأس-متغیر با ۱۰ رأس و کمر ۵ برابر با ۱۵ است. مشابه با اثبات قضیه‌های ۲.۰.۵، ۴.۰.۵، ۷.۰.۵ و ۹.۰.۵، در این مورد داریم $10 \times 4 - 2 \times 15 = 10$ که برای آن $\frac{b}{a} \geq 1$. قرار دهیم $a = 11$ ، از آنجایی که بیشترین تعداد یال‌های یک گراف رأس-متغیر با ۱۱ رأس و کمر ۵ در جدول ۵.۵ برابر با ۱۶ است، نتیجه می‌گیریم که $11 \times 4 - 2 \times 16 = 12$ که برای آن $\frac{b}{a} > 1$. همچنین، برای یک ETS $(12, b)$ با کمر ۱۰ داریم $12 \times 4 - 2 \times 18 = 12$ که نتیجه می‌دهد $\frac{b}{a} \geq 1$. نهایتاً، قرار می‌دهیم، $a = 13$. از آنجایی که برای گراف رأس-متغیر با ۱۳ رأس و کمر ۵ داریم $|E| \leq 21$ ، مینیمم تعداد رئوس بررسی با درجه ۱ برابر با ۱۰ است. شکل ۴.۵ (c) یک ETS $(13, 10)$ با خاصیت $\frac{b}{a} < 1$ را نمایش می‌دهد.



شکل ۴.۵: (a) یک گراف رأس-متغیر متناظر با یک ETS $(7, 5)$ با $\gamma = 3$ است،
 (b) یک گراف رأس-متغیر متناظر با یک ETS $(11, 1)$ با $\gamma = 3$ است و (c) یک گراف
 رأس-متغیر متناظر با یک ETS $(13, 10)$ با $\gamma = 4$ است.

مراجع

- [1] M. Aigner, M. G. Ziegler, *Proofs from The Book*, Berlin, New york:, Springer-Verlag, 1998.
- [2] F. Amirzade and M.-R Sadeghi, lower bounds on the lifting degree of QC-LDPC codes by difference matrices, *IEEE Access* , vol. **6**, pp. 23688–23700, 2018.
- [3] F. Amirzade and M.-R Sadeghi, Analytical lower bounds on the size of elementary trapping sets of variable-regular LDPC codes with any girth and irregular ones with girth 8,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. **66**, no. 6, pp. 2313–2321, 2018.
- [4] R. Asvadi, A. H. Banihashemi, and M. Ahmadian-Attari, Lowering the error floor of LDPC codes using cyclic liftings, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **57**, no. 4, pp. 2213–2224, 2011.
- [5] I. E. Bocharova, F. Hug, R. Johannesson, B. D. Kudryashov and R. V. Satyukov, Searching for voltage graph-based LDPC tailbiting codes with large girth, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **58**, no. 4, pp. 2265–2279, 2012.
- [6] J. A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph theories and applications*, Department of combinatorics and optimisation, University of Waterloo (1979).
- [7] I. E. Bocharova, F. Hug, R. Johannesson, B. D. Kudryashov and R. V. Satyukov, Searching for voltage graph-based LDPC tailbiting codes with large girth, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **58**, no. 4, pp. 2265–2279, 2012.
- [8] B. K. Butler, *Error Floors of LDPC Codes and Related Topics*, Thesis, California, 2013.
- [9] C. Di, D. Proietti, I. E. Telatar, T. J. Richardson, and R. L. Urbanke, Finite length analysis of low-density parity-check codes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **48**, no. 6, pp. 1570–1579, 2002.
- [10] L. Dolecek, P. Lee, Z. Zhang, V. Anantharam, B. Nikolic and M. Wainwright, Predicting error floors of LDPC codes: deterministic bounds and estimates, *IEEE J. Selected Areas in Commun.*, vol. **27**, no. 6, pp. 908–917, 2009.

- [11] L. Dolecek, Z. Zhang, V. Anantharam, M. J. Wainwright, and B. Nikolić, Analysis of absorbing sets and fully absorbing sets of array-based LDPC codes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **56**, no. 1, pp. 181–201, 2010.
- [12] M. P. C. Fossorier, Quasi-cyclic low-density parity-check codes from circulant permutation matrices, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **50**, no. 8, pp. 1788–1793, 2004.
- [13] Z. Furedi, M. Simonovits, The history of degenerate (bipartite) external graph problems, *arXiv*, 2013.
- [14] R. G. Gallager, Low-density parity-check codes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, pp. 21–28, 1962.
- [15] D. K. Garnick, Y. H. Harris Kwong, F. Lazebnik, Extremal graphs without three-cycles or four-cycles, *J. graph Theory*, vol. **17**, no. 5, pp. 633–645, 1993.
- [16] M. J. E. Golay, Notes on digital coding, *Proc. IRE (Corresp.)*, vol. **37**, p.657, 1949.
- [17] M. Hagiwara, M. P. C. Fossorier, T. Kitagawa and H. Imai, Smallest size of circulant matrix for $(3, L)$ and $(4, L)$ quasi-cyclic LDPC codes with girth 6, *IEICE Trans. Fundam. Electronics, Commun. Comput. Sci.*, vol. **E92.A**, no. 11, pp. 2891–2894, 2009.
- [18] R.W. Hamming, Error detecting and error correcting codes, *Bell Systems Tech. J.*, vol. **29**, pp. 147–160, 1950.
- [19] Y. Hashemi, A. H. Banihashemi, On characterization and efficient exhaustive search of elementary trapping sets of variable-regular LDPC codes, *IEEE Commun. Lett.*, vol. **19**, no. 3, pp. 323–326, 2015.
- [20] Y. Hashemi, A. H. Banihashemi, New characterization and efficient exhaustive search algorithm for leafless elementary trapping sets of variable-regular LDPC codes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **62**, no. 12, pp. 6713–6736, 2016.
- [21] Y. Hashemi, A. H. Banihashemi, Lower bounds on the size of smallest elementary and non-elementary trapping sets in variable-regular LDPC codes, *IEEE Commun. Lett.*, vol. **21**, no. 9, pp. 1905–1908, 2017.
- [22] Q. Huang, Q. Diao, S. Lin and K. Abdel-Ghaffar, Trapping sets of structured LDPC codes, *IEEE Int. Symp. Inf. Theory (ISIT)*, pp. 1086–1090, 2011.
- [23] S. Johnson, Introducing Low-Density Parity-Check Codes, *Lecture Note, PDF*.

- [24] M. Karimi, *The Analysis of Error Floor and Graphical Structure of LDPC Codes*, Ph.D. Thesis, Carleton UNIV, 2013.
- [25] M. Karimi, A. H. Banihashemi, Efficient algorithm for finding dominant trapping sets of LDPC codes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **58**, no. 11, pp. 6942–6958, 2012.
- [26] M. Karimi, and A. H. Banihashemi, On the girth of quasi-cyclic protograph LDPC codes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **59**, no. 7, pp. 4542–4552, 2013.
- [27] M. Karimi, A. H. Banihashemi, On characterization of elementary trapping sets of variable-regular LDPC codes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **60**, no. 9, pp. 5188–5203, 2014.
- [28] S. Kim, J.-S. No, H. Chung and D.-J. Shin, Quasi-cyclic low-density parity-check codes with girth larger than 12, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **53**, no. 8, pp. 2885–2891, 2007.
- [29] S. Laendner, T. Hehn, O. Milenkovic and J. B. Huber, Characterization of small trapping sets in LDPC codes from Steiner triple systems, in *proc. 6th Int. Symp. Turbo Codes and Iterative Inf. Process.*, Brest, France, Sep. pp. 93–97, 2010.
- [30] J. Li, K. Liu, S. Lin and K. Abdel-Ghaffar, Algebraic quasi-cyclic LDPC codes: Construction, low error-floor, large girth and a reduced-complexity decoding scheme, *IEEE Trans. Commun.*, vol. **62**, no. 8, pp. 2626–2637, 2014.
- [31] J. Li, K. Liu, S. Lin and K. Abdel-Ghaffar, Quasi-cyclic LDPC codes on two arbitrary sets of a finite field, *IEEE Int. Symp. Inf. Theory*, pp. 2454–2458, 2014.
- [32] S. Lin and D. J. Costello, *Error Control Coding*, 2nd ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2004.
- [33] D. J. C. MacKay and M. C. Davey, Evaluation of Gallager codes of short block length and high rate applications, *Proc. IMA International Conference on Mathematics and Its Applications: Codes, Systems and Graphical Models*, New York, Springer-Verlag, pp. 113–130, 2000.
- [34] D. J. MacKay and R. M. Neal, Near Shannon limit performance of low density parity check codes, *IEEE Electron. Lett.*, vol. **32**, no. 18, pp. 1645–1646, 1996.
- [35] F. J. MacWilliams and N. J. A. Sloane, *The Theory of Error-Correcting Codes*, Elsevier/North Holland, Amsterdam, 1977.

- [36] A. McGregor and O. Milenkovic, On the hardness of approximating stopping and trapping sets, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **56**, no. 4, pp. 1640–1650, 2010.
- [37] D. E. Muller, Application of Boolean algebra to switching circuit design and to error detection, *IEEE Trans. Electron. Comput.*, vol. **3**, pp. 6–12, 1954.
- [38] D. V. Nguyen, *Improving the Error Floor Performance of LDPC Codes with Better Codes and Better Decoders*, Ph.D. Thesis, Arizona, 2012.
- [39] M. E. O’Sullivan, Algebraic construction of sparse matrices with large girth, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **52**, no. 2, pp. 718–727, 2006.
- [40] H. Park, S. Hong, J. Seon and D. J. Shin, Design of multiple-edge protographs for QC-LDPC codes avoiding short inevitable cycles, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **59**, no. 7, pp. 4598–4614, 2013.
- [41] S. V. S. Ranganathan, D. Divsalar and R. D. Wesel, On the girth of $(3, L)$ quasi-cyclic LDPC codes based on complete protographs, in *Proc. IEEE Int. Symp. Inf. Theory (ISIT)*, pp. 731–735, 2015.
- [42] I. S. Reed, A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **4**, pp. 38–49, 1954.
- [43] W. Ryan and S. Lin, *Channel Codes: Classical and Modern*, First Edition, 2012.
- [44] M.-R Sadeghi and F. Amirzade, Analytical lower bound on the lifting degree of multiple-edge QC-LDPC codes with girth 6, *IEEE Commun. Lett.*, vol. **6**, pp. 23688–23700, 2018.
- [45] C. E. Shannon, A mathematical theory of communication, *Bell Systems Tech. J.*, vol. **27**, pp. 379–423, 623–656, 1948.
- [46] S. Song, B. Zhou, S. Lin and K. Abdel-Ghaffar, A unified approach to the construction of binary and nonbinary Quasi-cyclic LDPC codes based on finite field, *IEEE Trans. Commun.*, vol. **57**, no. 1, pp. 84–93, 2009.
- [47] R. M. Tanner, A recursive approach to low complexity codes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **27**, pp. 533–547, 1981.
- [48] A. Tasdighi, A. H. Banihashemi and M.-R. Sadeghi, Symmetrical constructions for regular girth-8 QC-LDPC codes, *IEEE Trans. Commun.*, vol. **65**, no. 1, pp. 14–22, 2017.

- [49] A. Tasdighi, A. H. Banihashemi and M.-R. Sadeghi, Efficient search of girth-optimal QC-LDPC codes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **62**, no. 4, pp. 1552–1564, 2016.
- [50] J. Thorpe, Low-density parity-check (LDPC) codes constructed from protograph, *IPN Progr. Rep.*, 42–154, 2003, JPL.
- [51] C. C. Wang, S.R. Kulkarni and H.V. Poor, Finding all small error-prone substructures in LDPC codes, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. **55**, no. 5, pp. 1976–1998, 2009.
- [52] Y. Wang, J. S. Yedidia and S. C. Draper, Construction of high-girth QC-LDPC codes, in *Proc. 5th Int. Symp. Turbo Codes Rel. Topics*, pp. 180–185, 2008.
- [53] N. Wiberg, *Codes and decoding on general graphs*, Ph.D. dissertation, Dept. Elect. Eng., Linköping Univ., Linköping, Sweden, 1996.
- [54] N. Wiberg, H.-A. Loeliger, and R. Kötter, Codes and iterative decoding on general graphs, *Eur. Trans. Telecomm.*, vol. **6**, pp. 513–525, 1995.
- [55] G. Zhang, R. Sun and X. Wang, Explicit construction of girth-eight QC-LDPC codes and its application in CRT methods, *J. Commun.*, vol. **33**, no. 3, pp. 171–176, 2012.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

First Line Shifted to the Right	انتقال به راست سطر اول
Right Cyclic-Shift	انتقال دوری به راست
Message Vector	بردار پیام
Shift-Register	رجیستر تغییر مکان
Lift	بسط
Bit Per Second	بیت بر ثانیه
Redundancy Bits	بیت‌های افزونگی
Error Floor Phenomenon	پدیده‌ی کف خطا
Forward Error Correcting	تصحیح خطای پیشرو
Sum Products	مجموع - حاصلضرب
Degree	درجه
Automatic Repeat Requests (ARQ)	درخواست تکرار ارسال اطلاعات
Systematic	در حالت استاندارد
Bipartite	دوبخشی
Cycle	دور
Capacity	ظرفیت
Check Nodes	رئوس بررسی
Variable Nodes	رئوس متغیر
Combinatorial Design	طرح‌های ترکیبیاتی
Subgraph	زیرگراف
Induced Subgraph	زیرگراف القایی
Projective Planes	صفحات تصویری
Capacity	ظرفیت
Performance	عملکرد و کارایی
Waterfall Region	ناحیه آبشاری
Decoder	کدگشای

Binary Erasure Channels	کانال‌های دودویی پاک کننده
Binary Symmetric Channel	کانال دودویی متقارن
Encoder	کدگذار
Encoding	کدگذاری
Binary Linear Block Codes	کدهای بلوکی خطی دودویی
Error Correcting Codes	کدهای تصحیح کننده‌ی خطا
Quasi Cyclic LDPC Codes	کدهای شبه-دوری با ماتریس بررسی-توازن کم-چگال
Multiple-Edge QC-LDPC Code	کدهای شبه-دوری یال-چندگانه
Single-Edge QC-LDPC Code	کدهای شبه-دوری یال-یگانه
Graph	گراف
Protograph	گراف اولیه
Triangle-Free Graph	گراف بدون مثلث
Base Graph	گراف پایه
Variable-Node Graph	گراف رأس-متغیر
Complete Graph	گراف کامل
Complete Bipartite Graph	گراف کامل دوبخشی
Tanner Graph	گراف تنر
Bipartite Graph	گراف دوبخشی
Low Density Parity-Check Matrix	ماتریس بررسی-توازن کم-چگال
Bi-Adjacency Matrix	ماتریس مجاورت گراف دوبخشی
Generator Matrix	ماتریس مولد
Permutation Matrices	ماتریس‌های جایگشتی
Identity Matrix	ماتریس همانی

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

A Mathematical Theory of Communication	نظریه‌ی ریاضی در تبادل اطلاعات
Adjacent	مجاور
Automatic Repeat Requests (ARQ)	درخواست تکرار ارسال اطلاعات
Base Graph	گراف پایه
Bi-Adjacency Matrix	ماتریس مجاورت گراف دوبخشی
Binary Erasure Channels	کانال‌های دودویی پاک‌کننده
Binary Linear Block Codes	کدهای بلوکی خطی دودویی
Binary Symmetric Channel	کانال دودویی متقارن
Bit Error Rate	نرخ خطای بیت
Bit Per Second	بیت بر ثانیه
Bipartite	دوبخشی
Bipartite Graph	گراف دوبخشی
Block Error Rate	نرخ خطای بلوکی
Capacity	ظرفیت
Check Nodes	رئوس بررسی
Code Word	کدکلمه
Combinatorial Design	روش‌های ترکیبیاتی
Complete Bipartite Graph	گراف کامل دوبخشی
Complete Graph	گراف کامل
Cycle	دور
Decoder	کدگشای
Degree	درجه
Elementary Trapping Sets	مجموعه‌های تله‌گذار اولیه
Encoder	کدگذار
Encoding	کدگذاری
Error Correcting Codes	کدهای تصحیح‌کننده‌ی خطا

Error Floor Phenomenon	پدیده‌ی کف خطا
Exponent Matrix	ماتریس توان
Finite Geometry	هندسه متناهی
First Line Shifted to the Right	انتقال به راست سطر اول
Forward Error Correcting	تصحیح خطای پیشرو
Generator Matrix	ماتریس مولد
Girth	کمر
Graph	گراف
Identity Matrix	ماتریس همانی
Induced Subgraph	زیرگراف القایی
Information Sources	منابع ارسال اطلاعات
Latin Square	مربعات لاتین
Lift	بسط
Low Density Parity-Check Matrix	ماتریس بررسی-توازن کم-چگال
Message Vector	بردار پیام
Maximum Degree	ماکسیمم درجه
Minimum Degree	مینیمم درجه
Multiple-Edge QC-LDPC Code	کدهای شبه-دوری یال-چندگانه
Path	مسیر
Performance	عملکرد و کارایی
Permutation Matrices	ماتریس‌های جایگشتی
Projective Planes	صفحات تصویری
Protograph	گراف پایه یا گراف اولیه
Quasi Cyclic LDPC Codes	کدهای شبه-دوری با ماتریس بررسی-توازن کم-چگال
Redundancy Bits	بیت‌های اضاف
Regular	منظم
Right Cyclic-Shift	انتقال دوری به راست
Shift-Register	بردهای سخت افزاری
Signal to Noise Ratio (SNR)	نرخ قدرت سیگنال به قدرت نویز
Single-Edge QC-LDPC Code	کدهای شبه-دوری یال-یگانه
Stopping Sets	مجموعه‌های تله‌ای از نوع متوقف کننده
Subgraph	زیرگراف
Sum Products	جمع و ضربی
Systematic	در حالت استاندارد

Tanner Graph	گراف تنر
Trapping Sets	مجموعه‌های تله‌ای
Triangle-Free Graph	گراف بدون مثلث
Variable Nodes	رئوس متغیر
Variable-Node Graph	گراف رأس-متغیر
Waterfall Region	قسمت آبشاری

Abstract

As quasi cyclic low density parity check (QC-LDPC) codes are implementable on hardwares, also because of their capability of high speed encoding/decoding, they are of most desired codes in coding theory and telecommunications. Among the variety of methods in constructing QC-LDPC codes, those constructed based on protographs have great importance. In fact, due to small size of their base graphs, one would be able to do further investigations on them to design codes with better parameters and performances. Parameters of QC-LDPC codes that hugely impact on the performance curves are their high girths as well as their low lengths. Indeed, given a fixed girth, the smaller length of a QC-LDPC code, the less complexity of its encoding/decoding is. The other drastic parameter that effects the performance of a QC-LDPC code is existence of small elementary trapping sets (ETSs) in Tanner graph of the code. Simulations reveal that in Gaussian channels and under an iterative decoding algorithm, by avoiding these trapping sets, we encounter with a better performance of the code in the sense of error floor region. Recognizing the most harmful ETS's and preventing them from occurrence in the Tanner graph of QC-LDPC codes are two interesting open problems in the field of coding theory.

In the first part of this thesis, we investigate regular QC-LDPC codes whose base graph are simple. QC-LDPC codes constructed from these simple graphs are single-edge QC-LDPC codes. In order to construct them with a specific girth, we consider the necessary and sufficient conditions for their exponent matrices. Our goal is to obtain all non-isomorphic QC-LDPC codes with a certain degree distribution, girths 6 to 12 and minimum lifting degree. To reach our goal, we introduce difference matrices which have a remarkable contribution to reduce the size of the search space to obtain the exponent matrices. Finally, all non-isomorphic QC-LDPC codes (with the same girth, degree distribution and minimum distance) are provided in Tables.

In the second part of this thesis, we investigate multiple-edge QC-LDPC codes with girth 6 whose base graph are multiple. We obtain the necessary and sufficient conditions for exponent matrices of codes which simplify considering 4-cycles in an exponent matrix. Similar to single-edge QC-LDPC codes, we introduce difference matrices. As a result of this study, an analytical lower bound on the lifting degree is derived which is applicable to both regular and irregular multiple-edge QC-LDPC codes with girth 6. We also provide QC-LDPC codes whose lifting degrees meet our proposed lower bound and in comparison with single-edge QC-LDPC codes, the presented codes with minimum lifting degrees have shorter lengths. In addition, we propose a method to reduce the size of the search space to obtain exponent matrices.

In the third part of this thesis, we consider elementary trapping sets in the Tanner graph of variable-regular LDPC codes. Using substantial concepts in the graph theory, we study the parameters of these sets which are the size of ETSs and the number of odd degree check nodes to improve the results existing in the literature.

Keywords: Multiple edge Quasi LDPC codes, Single-edge Quasi LDPC codes, parity-check matrix, minimum distance of the code, Tanner graph, bipartite graph, girth, trapping sets, elementary trapping sets.



Shahrood University of Technology

Faculty Of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Graphs and Combinatorics

**On the structure of Multiple-edge and
Single-edge protograph based QC-LDPC
codes**

By: Farzane Amirzade Dana

Supervisors

Dr. Meysam Alishahi

Dr. Mohammad-Reza Rafsanjani Sadeghi

May 2019