**دانشکده علوم**
**گروه ریاضی کاربردی**

**پایان نامه کارشناسی ارشد**

# قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی فاقد گشتاور

منیژه شکری

**استاد راهنما:**

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

**استاد مشاور:**

آقای سید رضا موسوی

تیر ۱۳۹۰


بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم
گروه ریاضی کاربردی

# قضایای حدی برای متغیرهای تصادفی فاقد گشتاور

**دانشجو:** منیژه شکری

**استاد راهنما:**

دکتر احمد نزاکتی رضازاده

**استاد مشاور:**

آقای سید رضا موسوی

**پایان نامه ارشد جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد**

تیر ۱۳۹۰

# تقدیم به پدر بزرگوارم کرم علی و مادر عزیزم مریم

خدای را بسی شاکرم که از روی کرم پدر و مادری فداکار نصیبم ساخته تا در سایه درخت پربار وجودشان بیاسایم و از ریشه آنها شاخ و برگ گیرم و از سایه وجودشان در راه کسب علم و دانش تلاش کنم. والدینی که بودنشان تاج افتخاری است بر سرم و نامشان دلیلی است بر بودنم چراکه این دو وجود پس از پروردگار مایه هستی ام بوده اند. دستم را گرفتند و راه رفتن را در این وادی زندگی پر فراز به من آموختند. عزیزانی که برایم زندگی بودن و انسان بودن را معنا کردند.

حال این برگ سبزی است تحفه درویش تقدیم آنان...

دوستتان دارم

# تشکر و قدردانی


الهی ادای شکر تو را هیچ زبانی نیست و دریای فضل تو را هیچ کرانی نیست و سر حقیقت تو بر هیچ کس عیان نیست، هدایت کن بر ما رهی که بهتر از آن نیست .

پدرعزیز که همواره حمایتم نمودی و مادر مهربانم که عاشقانه پرورش و تربیتم نمودی به خاطر تک تک زحماتتان بر دستان پر مهرتان بوسه می زنم.

در طول این مدت راهنمایی های ارزشمند استادی گرانقدر همواره چراغ راهم بود که بی تردید بدون راهنمایی های ارزنده و حمایت های بی دریغ ایشان، کار پایان نامه به اتمام نمی رسید. هرچند که من حق شاگردی ام را ادا نکردم اما ایشان حق استادی را به طور تمام و کمال و حتی فراتر از آن ادا نموده اند. بر خود لازم می دانم پیرامون جمله "من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق" خالصانه از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر احمد نزاکتی رضازاده تشکر نمایم.

از خواهران عزیزم خدیجه، مهدیه، حدیث و از برادران دلسوزم هیبت، فرضی و امیر، هم چنین از همه دوستان گلم تشکر می کنم.

در پایان از استاد مشاورم جناب آقای رضا موسوی و اعضای کمیته داوران سرکار خانم دکتر الهه ظهوریان ، جناب آقای دکتر کامران شریفی، جناب آقای دکتر ناظمی صمیمانه تشکر می کنم.

با آرزوی توفیق روزافزون

# چکیده

مهمترین نتایج نظری در نظریه احتمال، قضایای حدی هستند که مهمترین آنها عبارتند از قضایایی که با عنوان قانون اعداد بزرگ یا قضایای حد مرکزی طبقه بندی شده اند. قضایایی که با عنوان قانون اعداد بزرگ مطرح می شوند در ارتباط با بیان شرایطی است که تحت آن شرایط میانگین دنباله ای از متغیرهای تصادفی به متوسط امید ریاضی خود همگرا باشند. ( با این فرض که حداقل دارای گشتاور مرتبه اول متناهی باشند) محققان زیادی در جهت بهبود قانون اعداد بزرگ تحقیقاتی انجام دادند در نهایت توانستند این مطالعات را به دو شکل از قانون اعداد بزرگ نمایش دهند که با عنوان قانون " قوی " و قانون " ضعیف "معروف شده اند. در این رساله قانون قوی اعداد بزرگ را در حالتی که متغیرها هم توزیع و فاقد گشتاورند، بدست می آوریم.

این رساله شامل ۳ فصل می باشد. مطالب هر فصل بطور مختصر عبارتست از:

- در فصل ۱، مقدمات، مروری بر تاریخچه موضوع مورد بررسی و تعاریف اولیه و لم ها و قضایای اساسی آورده شده اند.
- در فصل ۲، قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع جزئی از متغیرهای تصادفی هم توزیع و فاقد گشتاور آورده شده است.
- در فصل ۳، قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع وزنی از متغیرهای تصادفی آورده شده است و در ادامه فصل، بحث و نتیجه گیری و مراجع مطرح شده اند.



**واژه های کلیدی**: قانون قوی اعداد بزرگ، همگرایی تقریباً حتمی، مجموع جزیی متغیرهای تصادفی، مجموع وزنی متغیرهای تصادفی

# لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. "**ON THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR IDENTICALLY DISTRIBUTED RANDOM VARIABLES IRRESPECTIVE OF THEIR JOINT DISTRIBUTIONS".** Manizhe Shokri, Ahmad Nezakati, S.Reza Musawi. Submitted in 6th National Conference on Statistics in Ahvaz.

2. "**THE CONVERGENCE RATE FOR IDENTICALLY DISTRIBUTED RANDOM VARIABLES".** M. Shokri, A. Nezakati, S.R. Musawi. Submitted in 1th Regional Conference on Mathematics and Statistics in Lorestan.

3. **"THE STRONG LAW OF LARGE NUMBERS FOR WEIGHTED SUMS OF IDENTICALLY DISTRIBUTED RANDOM VARIABLES**". M. Shokri, A. Nezakati, S.R. Musawi. Submitted in 8th Seminar probability and random processes in Guilan.

# پیش گفتار

مهمترین نتایج نظری در نظریه احتمال، قضایای حدی هستند که مهمترین آنها عبارتند از قضایایی که با عنوان قانون اعداد بزرگ یا قضایای حد مرکزی طبقه بندی شده اند. قضایایی که با عنوان قانون اعداد بزرگ مطرح می شوند در ارتباط با بیان شرایطی است که تحت آن شرایط میانگین دنباله ای از متغیرهای تصادفی به متوسط امید ریاضی خود همگرا باشند. (با این فرض که حداقل دارای گشتاور مرتبه اول متناهی باشند) قانون اعداد بزرگ اولین بار توسط ریاضیدان سوئیسی یاکوب برنولی[۱] (۱۷۱۳) برای محاسبه احتمال در تئوری بازی ها و در واقع بازی با سکه ارائه شد و سپس در سال ۱۸۳۵ مورد توجه ریاضی دانان دیگر از جمله پاسکال[۲] و پواسن [۳] قرار گرفت. پس از برنولی و پواسون ریاضیدانان دیگری نیز از جمله چبیشف[۴] ، کانتلی[۵] و... در جهت بهبود قانون اعداد بزرگ تحقیقاتی انجام دادند. در نهایت توانستند این مطالعات را به دو شکل از قانون اعداد بزرگ نمایش دهند. که با عنوان قانون " قوی " و قانون " ضعیف "معروف شده اند.

در سال ۱۹۳۷، مارسینکوویچ[۶] و زیگموند[۷] قانون قوی اعداد بزرگ (SLLN)[۸] را برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع (i.i.d.) [۹] ارائه نمودند. بعداً محققان زیادی از جمله سیور[۱۰]

---

[۱] Bernoulli

[۲] Pascal

[۳] Poisson

[۴] Chebyshev

[۵] Cantelli

[۶] Marcinkiewicz

[۷] zygmund

[۸] Strong Law Large Numbers

[۹] Identically independevt distribution

[۱۰] Sawyer

(۱۹۶۶)، چترجی[۱۱] (۱۹۷۰) و رسالسکی [۱۲]و استویکا[۱۳](۲۰۱۰) قانون قوی را در حالتی که متغیرهای تصادفی هم توزیع هستند (بدون شرط استقلال) ارائه دادند. در این رساله پس از معرفی و بحث در خصوص قانون قوی اعداد بزرگ علاقه مندیم همین قانون را در حالتی که متغیرها دارای گشتاور نباشند، تحت شرایط مختلفی (هم توزیعی، مستقل بودن، ایستا بودن و...) مورد بررسی قرار دهیم.

این رساله شامل ۳ فصل می باشد. مطالب هر فصل بطور مختصر عبارتست از:

- در فصل ۱، مقدمات، مروری بر تاریخچه موضوع مورد بررسی و تعاریف اولیه آورده شده اند. هم چنین برخی توابع ریاضی، لم های اساسی که در این رساله استفاده شده است نیز آمده است.
- در فصل ۲، قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع جزئی از متغیرهای تصادفی هم توزیع و فاقد گشتاور آورده شده است. در این خصوص بعضی قضایای اساسی رسالسکی و استویکا (۲۰۱۰) با جزئیات اثبات آورده شده است.
- در فصل ۳، قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع وزنی از متغیرهای تصادفی آورده شده است و در ادامه فصل، بحث و نتیجه گیری و مراجع مطرح شده اند.

در پایان لازم می‌دانم این مطلب را خاطر نشان کنم، قضایا و مثال هایی که توسط (❋❋) مشخص شده‌اند هم صورت قضیه و هم اثبات آن توسط اینجانب انجام شده است.

[۱۱] Chatterji
[۱۲] Rosalsky
[۱۳] Stoica

# فهرست مندرجات

**عنوان** | **صفحه**

# فصل اول

## مقدمه و دورنما

## ۱–۱ مقدمه و تاریخچه

نظریه احتمال ما را قادر می سازد که با دقت هر آنچه را که اذهان منطقی با کمک غریزه ادارک می کنند، در یابیم با این تفاوت که غالباً نمی توانیم چگونگی آنها را توضیح دهیم. این علم در آغاز برای بررسی بازیهای شانس ابداع شد، سپس از ابتدای قرن حاضر شروع به گسترش کرد و به تدریج به نظام گسترده ای تبدیل شد که با بسیاری از شاخه های ریاضی در ارتباط است. در خلال این گسترش، نظریه احتمال نقش اساسی در قالب سازی ریاضی برای علوم کاربردی گوناگون، مانند آمار، تحقیق در عملیات، زیست شناسی، اقتصاد، روانشناسی و... داشته است. بازتاب این پیشرفتها، تغییر متن بسیاری از کتابهای احتمال محدود به بازیهای تصادفی و نظریه خطاها بود که به بخش های احتمال ختم می شد. این دوره با پدیدار شدن رساله کلاسیک فلر[۱۴] در سال ۱۹۵۰ میلادی پایان یافت و این نظریه به صورت نظام ریاضی ضروری برای مطالعه بسیاری از زمینه های علوم در آمد. مهمترین نتایج نظری در نظریه احتمال، قضایای حدی هستند. از این میان مهمترین آنها عبارتند از قضایایی که با عنوان قانون اعداد بزرگ یا قضایای حد مرکزی طبقه بندی شده اند. قضایایی که با عنوان قانون اعداد بزرگ مطرح می شوند در ارتباط با بیان شرایطی است که تحت آن شرایط میانگین دنباله ای از متغیرهای تصادفی به متوسط امید ریاضی خود همگرا باشند.( با این فرض که حداقل دارای گشتاور مرتبه اول متناهی باشند) قانون اعداد بزرگ اولین بار توسط ریاضیدان سوئیسی یاکوب برنولی (۱۷۱۳) برای محاسبه احتمال در تئوری بازی ها و در واقع بازی با سکه ارائه شد و سپس مورد توجه ریاضی دانان دیگر از جمله پاسکال و پواسن در

[۱۴] Feller

سال ۱۸۳۵ قرار گرفت. پس از برنولی و پواسون ریاضیدانان دیگری نیز از جمله چبیشف، کانتلی، مارکوف[15]، بورل[16] ، کولموگروف [17]، خین چین[18] تلاش های زیادی در جهت بهبود قانون اعداد بزرگ انجام دادند. در نهایت توانستند این مطالعات را به دو شکل از قانون اعداد بزرگ نمایش دهند. که با عنوان قانون " قوی " و قانون " ضعیف "معروف شده اند.

در سال ۱۹۳۷، مارسینکوویچ و زیگموند قانون قوی اعداد بزرگ (SLLN) را برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع (i.i.d.) ارائه نمودند. پس از آن همین نتیجه توسط فلر در سال ۱۹۴۶ بدست آمد. بعداً محققان زیادی از جمله سیور (۱۹۶۶)، چتترجی (۱۹۷۰) و هم چنین رسالسکی و استویکا (۲۰۱۰) قانون قوی را در حالتی که متغیرهای تصادفی هم توزیع هستند (بدون شرط استقلال) ثابت کردند. در سال ۱۹۸۷ رسالسکی برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی ایستا SLLN را ثابت کرد. لازم است یادآوری کنیم که قانون ضعیف اعداد بزرگ هم مورد بررسی قرار گرفت. در واقع همین قانون توسط مالر[19] در سال ۱۹۸۰ برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی ایستا بهبود بخشیده شد. البته رسالسکی (۱۹۹۳) با مطالعه بر روی تحقیقات مالر مشخص کرد که دنباله های ایستا مورد استفاده قرار نمی گیرند و متغیرهای تصادفی فقط به شرط هم توزیعی نیاز دارند. نزاکتی (۲۰۰۵) قانون قوی را برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی دارای همبستگی منفی (NA)[20] مورد بررسی قرار داد. قانون قوی اعداد بزرگ کاربردهای زیادی دارد. بعنوان مثال بیمه گران از این قانون برای پیش بینی خسارت در پذیرش ریسکهایی با تعداد زیاد و تقریباً همگن (بیمه های بدنه خودرو) استفاده می کنند. اما برای پذیرش ریسک واحد های بزرگ صنعتی نظیر خودرو سازان و پالایشگاهها استفاده از این قانون امکان

[15] markove
[16] Borel
[17] kolmogoroff
[18] Khinchin
[19] Maller
[20] Negatively associated

پذیر نمی باشد. در این رساله پس از معرفی و بحث در خصوص قانون قوی اعداد بزرگ علاقه مندیم همین قانون را در حالتی که متغیرها دارای گشتاور نباشند تحت شرایط مختلفی (هم توزیعی، مستقل بودن، ایستا بودن و...) مورد بررسی قرار دهیم.

## ۱-۲ تعاریف و لم ها

در این بخش چند تعریف پایه که در طول این رساله از آن ها استفاده می شود، آورده شده است. هم چنین در انتها لم ها و قضایای اساسی که از آن ها در فصل های بعدی استفاده می شود نیز مطرح شده است .

### ۱-۲-۱ تعاریف

**تعریف ۱.۱** فضای اندازه

اندازه $\mu$ تابعی است که بر روی سیگما جبر $\delta$ بر مجموعه $\Omega$ تعریف می شود و مقادیر بین $[0,\infty]$، می پذیرد و دارای خصوصیات زیر است:

a) $\mu(\phi)=0$

b) $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$

در اینجا $\phi$ مجموعه تهی و $E_1, E_2, E_3, \ldots$ تعدادی شمارا از مجموعه ها در $\delta$ هستند، که اشتراک هر کدام از آنها با دیگری تهی است. در این حالت به $(\Omega, \delta, \mu)$ فضای اندازه و به اعضای $\delta$، مجموعه های اندازه پذیر گفته می شود.

## **تعریف ۲.۱** فضای احتمال

فرض کنید $\Omega$ یک مجموعه دلخواه و $\delta$ یک سیگما جبر از زیرمجموعه های $\Omega$ باشد. یک تابع مجموعه ای $P$ بنام تابع احتمال را که دامنه آن $\delta$ و برد آن مجموعه اعداد حقیقی است در نظر می گیریم. اگر اصل های زیر در مورد $P$ صادق باشند آنگاه سه تایی $(\Omega, \delta, P)$ را یک فضای احتمال می نامند:

a. $P(\Omega) = 1$،

b. برای هر $E$ که به $\delta$ تعلق داشته باشد $P(E) \geq 0$،

c. اگر دنباله $E_1, E_2, E_3, \ldots$ به $\delta$ تعلق داشته باشد و دو به دو مجزا باشند، آنگاه

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

## **تعریف ۳.۱** تابع با تغییرات آهسته[۲۱]

تابع $L:(0,\infty) \to (0,\infty)$ را تابع با تغییرات آهسته گویند اگر برای همه $a > 0$، داشته باشیم

$$\lim_{x \to \infty} \frac{L(ax)}{L(x)} = 1$$

[۲۱] Slowly varying function

**مثال ۱.۱** فرض کنید به ازای $\beta \in \mathbb{R}$، $L(x)=(\log x)^{\beta}$ باشد. در اینصورت $L$ یک تابع با تغییرات آهسته است.

**تعریف ۴.۱** تابع محدب

تعریف اول: تابع حقیقی دوبار مشتق پذیر $f(x)$ را محدب گوییم اگر برای همه $x$ها، $f''(x) \geq 0$، بطور مشابه تابع مقعر گفته می شود اگر برای همه $x$ها، $f''(x) \leq 0$.

تعریف دوم: تابع $g$ را با مقادیر حقیقی محدب گویند اگر و فقط اگر برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in [0,1]$ داشته باشیم:

$$g(\alpha x+(1-\alpha)y) \leq \alpha g(x)+(1-\alpha)g(y)$$

**تعریف ۵.۱** تابع اندیکاتور[۲۲]

تابع اندیکاتور از زیرمجموعه $A$ به یک مجموعه $X$ را با $I_A : X \to \{0,1\}$ نمایش می دهند و بصورت زیر تعریف می کنند:

$$I_A(x)=\begin{cases} 1 & if\ x \in A, \\ 0 & if\ x \notin A. \end{cases}$$

**تعریف ۶.۱** نماد $O$ بزرگ

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی از اعداد حقیقی مثبت باشند آنگاه برای $x \to \infty$ رابطه زیر برقرار است:

[۲۲] Indicator

$$f(x)=O\big(g(x)\big)$$

اگر و تنها اگر مقدار ثابت مثبت $C$ و عدد حقیقی $x_0$ موجود باشد به طوری که برای همه $x>x_0$ داشته باشیم :

$$f(x)\le C\,g(x)$$

### تعریف ۷.۱ نماد $o$ کوچک

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ توابعی از اعداد حقیقی مثبت باشند آنگاه برای $x\to\infty$ رابطه زیر برقرار است:

$$f(x)=o\big(g(x)\big)$$

اگر و تنها اگر

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

### تعریف ۸.۱ همگرایی تقریباً حتمی (a.s.)[۲۳]

فرض کنید $X$ و $\{X_n, n\ge 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی باشند که روی یک فضای نمونه ی $S$ تعریف شده اند. فرض کنید $K$ مجموعه همه نقاط $w$ در $S$ باشدکه برای آنها $X_n(w)$ به $X(w)$ همگراست. یعنی:

$$K=\left\{w\in S:\lim_{n\to\infty}X_n(w)=X(w)\right\}$$

[۲۳] almost surely

که آن را پیشامد همگرایی دنباله تصادفی $\{X_n, n \geq 1\}$ می نامیم. می گوییم $\{X_n, n \geq 1\}$ دارای خاصیت همگرایی تقریباً حتمی (a.s.) است، هرگاه $K \neq S$ اما $P(K)=1$. این نوع همگرایی را با $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ نشان داده و می نویسیم:

$$P\left( \lim_{x \to \infty} X_n \to X \right) = 1$$

## تعریف ۹.۱ همگرایی کامل

فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی باشند در این صورت می گوییم به مقدار ثابت $\mu$ همگرایی کامل دارد اگر برای تمامی $\varepsilon > 0$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left( |X_n - \mu| > \varepsilon \right) < \infty$$

## تعریف ۱۰.۱ همگرایی در احتمال

. فرض کنید $\{X_n\}$ دنباله متغیرهای تصادفی باشد. گوییم دنباله $\{X_n\}$ در احتمال همگرا به متغیر تصادفی $X$ است اگر برای هر $\varepsilon > 0$،

$$\lim_{n \to \infty} P\left( |X_n - X| > \varepsilon \right) = 0$$

این نوع همگرایی را با نماد $X_n \xrightarrow{P} X$ نمایش می دهیم.

## تعریف ۱۱.۱ متغیر تصادفی محدود شده[۲۴]

[۲۴] Stochastically dominated random variable

فرض کنید $\{X_n, n \ge 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی باشند در این صورت می گوییم این دنباله به متغیر تصادفی $X$ محدود شده است اگر مقدار ثابت $C$ وجود داشته باشد بطوری که به ازای هر $x > 0$ و $n \ge 1$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$P\left(\left|X_n\right| > x\right) \le CP\left(\left|X\right| > x\right)$$

**تعریف ۱۲.۱** دنباله های ایستا[۲۵]

دنباله $\{X_n, n \ge 1\}$ از متغیرهای تصادفی را ایستا می گویند اگر توزیع احتمالی آن نسبت به زمان ثابت باشد یعنی:

$$\forall n, \forall N, \forall k: F_{X_{n}, X_{n+1}, \dots, X_{n+N}}\left(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+N}\right) = F_{X_{n+k}, X_{n+k+1}, \dots, X_{n+k+N}}\left(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+N}\right)$$

که $F$ تابع توزیع تجمعی متغیرهای تصادفی می باشند.

## ۱-۲-۲ لم ها و قضایای اساسی

**قضیه ۱.۱** ( قانون قوی اعداد بزرگ (SLLN) ) فرض کنید $\{X_n, n \ge 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی i.i.d. با میانگین متناهی $\mu = E\left[X_i\right]$ باشند، آنگاه :

$$P\left(\lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} = \mu\right) = 1$$

برای اثبات قضیه فوق مراجعه کنید به کتاب مبانی احتمال از شلدون راس[۲۶] (۱۹۹۱).

[۲۵] Stationary sequence

[۲۶] Ross

**قضیه ۲.۱** ( قانون ضعیف اعداد بزرگ[۲۷](WLLN)) فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی .i.i.d با میانگین متناهی $\mu = E[X_i]$ باشند. در اینصورت این دنباله از قانون ضعیف اعداد بزرگ تبعیت می کند، اگر برای هر $\varepsilon > 0$، داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

اثبات قضیه فوق را نیز می توان در کتاب مبانی احتمال از شلدون راس دید.

**لم ۱.۱** (کرونکر[۲۸]) فرض کنید که $\{a_n, n \geq 1\}$ و $\{b_n, n \geq 1\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی باشند بطوری که $b_n \uparrow \infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$، همگرا باشند. در اینصورت برای $n \to \infty$، رابطه زیر برقرار است:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k a_k \to 0 \tag{۱.۱}$$

**اثبات:**

فرض کنید مجموع جزیی جملات یعنی، $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ باشد. چون سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست می توان گفت: $S_n \to S$ از طرفی $a_k = S_k - S_{k-1}$ و $S_0 = 0$، بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k a_k = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} b_k\left(S_k - S_{k-1}\right)$$

$$= \frac{1}{b_n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k S_k - \sum_{k=1}^{n} b_k S_{k-1}\right)$$

---

۲۷ Weak Law Large Numbers

۲۸ kroneckers

$$=\frac{1}{b_n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k S_k - \sum_{k=1}^{n-1} b_{k+1} S_k\right)$$

$$=\frac{1}{b_n}\left(b_n S_n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k - b_{k+1}\right) S_k\right)$$

$$=S_n + \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k - b_{k+1}\right) S_k \to S - S = 0$$

در واقع برای اثبات رابطه (۱.۱) بایستی ثابت کنیم که جمله دوم عبارت فوق همگرا به $-S$ است. به همین خاطر جمله دوم را می توان بصورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k - b_{k+1}\right)\left(S_k - S + S\right)$$

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k - b_{k+1}\right)\left(S_k - S\right) + \frac{S}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k - b_{k+1}\right) \qquad (۲.۱)$$

از طرفی از جمله دوم رابطه (۲.۱) برای $b_n \uparrow \infty$ داریم

$$\frac{S}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k - b_{k+1}\right) = \frac{S}{b_n}\left(b_1 - b_n\right) \to -S$$

و جمله اول رابطه (۲.۱) برای $n \to \infty$ بسمت صفر می رود. چون با استفاده از تعریف زیر داریم:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \;\; s.t. \; \forall n > n_0 : \left|S_n - S\right| < \varepsilon$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k - b_{k+1}\right)\left(S_k - S\right)\right|$$

$$=\frac{1}{b_n}\left|\sum_{k=1}^{n_0}\left(b_k - b_{k+1}\right)\left(S_k - S\right)\right| + \frac{1}{b_n}\left|\sum_{k=n_0+1}^{n-1}\left(b_k - b_{k+1}\right)\left(S_k - S\right)\right|$$

به ازای $n > n_0$،

$$\le \varepsilon + \frac{b_{n_0+1} - b_n}{b_n}\varepsilon \le 2\varepsilon$$

بنابراین می توان گفت:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n-1}\left(b_k-b_{k+1}\right)\left(S_k-S\right)\to 0$$

واثبات قضیه کامل گردید. □

**لم ۲.۱** (بورل-کانتلی[۲۹]) فرض کنید $(\Omega,\delta,P)$ یک فضای احتمال باشد و به ازای $n\geq 1$، $A_n\in\delta$ اگر $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(A_n\right)<\infty$، آنگاه رابطه زیر برقرار است:

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=P\left(A_n \text{ infinitely often}\right)=P\left(A_n\, i.o.\right)==0$$

**اثبات:**

چون $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(A_n\right)<\infty$، می توان گفت که به ازای $n\geq n_0\left(\varepsilon\right)$، $\sum_{k=n}^{\infty}P\left(A_k\right)<\varepsilon$ می باشد. بنابراین:

$$P\left(A_n\, i.o.\right)=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=\lim_{n\to\infty}P\left[\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right]$$

فرض کنید $B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k$ باشد. ازطرفی با استفاده از قضیه پیوستگی اندازه احتمال دنباله های $B_n$ نزولی می باشند. بنابراین برای هر $\varepsilon>0$ داریم:

$$.P\left(A_n\, i.o.\right)\leq\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}P\left(A_k\right)\leq\varepsilon\Rightarrow P\left(A_n\, i.o.\right)=0$$

بنابراین اثبات کامل شد. □

[۲۹] Borel-Cantelli

**قضیه ۳.۱** (نامساوی جنسن[۳۰]) اگر $f(x)$ تابعی محدب باشد آنگاه:

$$E\left[f(x)\right] \geq f\left(E[X]\right)$$

بشرط آنکه امیدها وجود داشته و متناهی باشند.

**اثبات:**

با بسط تیلور تابع $f(x)$ حول $\mu = E[X]$ نتیجه می شود:

$$f(x) = f(\mu) + f'(\mu)(x-\mu) + \frac{f''(\xi)(x-\xi)^2}{2}$$

که $\xi$ مقداری بین $x$ و $\mu$ است. چون $f''(\xi) \geq 0$ ، داریم:

$$f(x) \geq f(\mu) + f'(\mu)(x-\mu)$$

بنابراین

$$f(X) \geq f(\mu) + f'(\mu)(X-\mu)$$

با گرفتن امید ریاضی از طرفین رابطه فوق و قرار دادن $\mu = E[X]$ داریم:

$$E\left[f(X)\right] \geq f(\mu) + f'(\mu)E[X-\mu] = f(\mu)$$

و اثبات نامساوی کامل می شود. □

**قضیه ۴.۱** (نامساوی مارکف) اگر $X$ یک متغیرتصادفی نامنفی باشد آنگاه برای هر $a \geq 0$، داریم:

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E[X]}{a}$$

**اثبات:**

[۳۰] Jensen

چون که $X$ یک متغیر تصادفی نامنفی است امید ریاضی آن را می توان بصورت زیر نوشت:

$$E[X]=\int_0^\infty xf(x)dx$$

به ازای $a\geq 0$، برای عبارت فوق داریم:

$$E[X]=\int_0^\infty xf(x)dx=\int_0^a xf(x)dx+\int_a^\infty xf(x)dx$$

$$\geq\int_a^\infty xf(x)dx$$

از طرفی برای $x\geq a$، از رابطه فوق خواهیم داشت :

$$\geq a\int_a^\infty f(x)dx=aP\{X\geq a\}$$

بنابراین،

$$\frac{E[X]}{a}\geq P\{X\geq a\}$$

بنابراین اثبات کامل شد. □

**قضیه ۵.۱** فرض کنید که $r>0$، و هم چنین $x,y>0$ آنگاه:

$$(x+y)^r\leq\begin{cases}2^r\left(x^r+y^r\right), & for\quad r>0\\ x^r+y^r, & for\ \ 0<r\leq 1\\ 2^{r-1}\left(x^r+y^r\right), & for\quad r\geq 1\end{cases}$$

**اثبات:**

ابتدا برای $r>0$، خواهیم داشت:

$$(x+y)^r\leq\left(2\max\{x,y\}\right)^r=2^r\left(\max\{x,y\}\right)^r\leq 2^r\left(x^r+y^r\right)$$

در مرحله بعدی برای $0<r\le 1$ رابطه، $x^{\frac{1}{r}} \le x$ به ازای هر $0<x<1$، صحیح می باشد. بر این اساس عبارت زیر را نتیجه می دهد:

$$\left(\frac{x^r}{x^r+y^r}\right)^{1/r}+\left(\frac{y^r}{x^r+y^r}\right)^{1/r}$$

$$\le \frac{x^r}{x^r+y^r}+\frac{y^r}{x^r+y^r}=1$$

بنابراین،

$$x+y\le\left(x^r+y^r\right)^{1/r}$$

اگر طرفین را به توان $r$ برسانیم، دومین نامساوی به ازای $0<r\le 1$ حاصل می شود.

توجه کنید که برای $r\ge 1$ از این حقیقت که تابع $|x|^r$ محدب می باشد استفاده می کنیم. بنابراین با قرار دادن $\alpha=\frac{1}{2}$ و $g(x)=|x|^r$ در تعریف ۵.۱ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^r\le\frac{1}{2}x^r+\frac{1}{2}y^r$$

که سومین نامساوی را نتیجه می دهد و قضیه ثابت گردید. □

**قضیه ۶.۱** (نامساوی r امین گشتاور( $c_r$ ) ) فرض کنید که $r>0$ و $E|X|^r<\infty$ و $E|Y|^r<\infty$ باشند.

آنگاه :

$$E|X+Y|^r\le c_r\left(E|X|^r+E|Y|^r\right) \tag{۳.۱}$$

که برای $r\le 1$، $c_r=1$ و برای $r\ge 1$، $c_r=2^{r-1}$ می باشد.

**اثبات:**

فرض کنید که برای $\omega \in \Omega$، $x = X(\omega)$ و $y = Y(\omega)$ باشند. با استفاده از نامساوی مثلث و نامساوی دوم از قضیه ۵.۱ داریم:

$$E|X+Y|^r \le E\left(|X|+|Y|\right)^r \le E|X|^r + E|Y|^r$$

اگر در رابطه (۳.۱)، $c_r = 1$ قرار دهیم به صورت رابطه بالا در می آید. بنابراین به ازای $0 < r \le 1$ نامساوی را ثابت کردیم. برای $r \ge 1$ به صورت فوق عمل می کنیم، با این تفاوت که بجای نامساوی دوم قضیه ۵.۱ از نامساوی سوم استفاده می کنیم یعنی:

$$E|X+Y|^r \le E\left(|X|+|Y|\right)^r \le 2^{r-1}\left(E|X|^r + E|Y|^r\right)$$

رابطه فوق به ازای $r \ge 1$ و $c_r = 2^{r-1}$ نمایش رابطه (۳.۱) می باشد و قضیه ثابت گردید. □

**لم ۳.۱** اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا از اعداد حقیقی باشد بطوری که دنباله $\{a_n, n \ge 1\}$ کاهشی باشد. آنگاه $a_n = o(1)$ و $n = o\left(\frac{1}{a_n}\right)$.

برای اثبات به کناپ [۳۱] ۱۹۵۱مراجعه کنید.

[۳۱] knopp

# فصل دوم

## قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع جزئی از متغیرهای تصادفی فاقد گشتاور

## ۲–۱ مقدمه

فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند با مجموع جزئی $S_n=\sum_{i=1}^{n} X_i$ و $\{b_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت باشد که به سمت بی نهایت میل می کند $(b_n \uparrow \infty)$ در این فصل می خواهیم ثابت کنیم در حالتی که متغیرهای تصادفی فاقد گشتاور هستند، یعنی $E|X|=\infty$، تحت شرایطی که بعداً بیان می شود قانون قوی اعداد بزرگ (SLLN) برای مجموع جزئی از متغیرهای تصادفی برقرار است. یعنی:

$$\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0 \qquad (۱.۲)$$

البته به خوبی می دانیم که اگر $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی i.i.d. باشند آنگاه رابطه (۱.۲) برقرار است ( برای نمونه به کولموگروف (۱۹۳۰) و مارسینکوویچ و زیگموند (۱۹۳۷ ) و فلر (۱۹۴۶) مراجعه کنید).

در این بخش برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی قضایایی را بیان خواهیم کرد. سپس در بخش بعدی به بیان قضایای اصلی خواهیم پرداخت. قبل از بیان قضایا در این فصل لازم است یادآوری کنیم نماد C، که $0<C<\infty$ می باشد به یک ثابت نوعی یا کلی اشاره می کند که لازم نیست در هر نوع نمایش یکسان باشد.

**لم ۱.۲** اگر $\{a_n\}$ ها دنباله ای از اعداد نامنفی باشند و $A_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ ، $A_n \uparrow \infty$ . آنگاه برای هر تابع مثبت ناکاهشی $\psi(x)$ سری $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n / A_n \psi\left(A_n\right)\right)$ همگرا خواهد بود.

برای اثبات به پترو ۱۹۶۹ مراجعه کنید.

**لم ۲.۲** فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی باشد و برای بعضی مقادیر $0 < p \leq 1$ سری $\sum_{n=1}^{\infty} E|X_n|^p$ همگرا باشد. آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|$ همگراست.

اثبات لم فوق را در لوی[۳۲] ۱۹۵۱ می توان دید.

**قضیه ۱.۲** (پترو ۱۹۷۳) فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی باشند و برای $n \geq 1$ و بعضی مقادیر $0 < p \leq 1$، داشته باشیم:

$$E|X_n|^p < \infty \tag{۲.۲}$$

هم چنین فرض کنید $A_n = \sum_{k=1}^{n} E|X_k|^p$، باشد. اگر

$$A_n \to \infty \tag{۳.۲}$$

آنگاه رابطه (۱.۲) به ازای هر تابع $\psi(x) \in \Psi_c$ که در آن $\Psi_c$ مجموعه توابع پیوسته می باشد و $b_n = \left(A_n \psi(A_n)\right)^{1/p}$ برقرار است.

ابتدا تبصره زیر را بیان می کنیم که در اثبات قضیه مفید می باشد.

**تبصره ۱.۲** (پترو ۱۹۷۳) فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی باشد و $\{b_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از اعداد باشد بطوری که $b_n \uparrow \infty$. اگر برای بعضی مقادیر $0 < p \leq 1$، رابطه زیر را داشته باشیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E|X_n|^p}{b_n^p} < \infty$$

[۳۲] leove

آنگاه بر اساس لم ۲.۲ می توان گفت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|X_n|}{b_n}<\infty$$

رابطه فوق بنا بر لم ۱.۱ بصورت زیر در می آید:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}|X_k|\xrightarrow{a.s.}0$$

بنابراین رابطه (۱.۲) برقرار است و اثبات کامل گردید. □

**اثبات قضیه ۱.۲:**

اگر $\{X_n, n\geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی باشد که در رابطه (۲.۲) و (۳.۲) صدق کنند، آنگاه به ازای هر $\psi\in\Psi_c$ و بکار بردن لم۱.۲ خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E|X_n|^p}{A_n\psi(A_n)}<\infty$$

با قرار دادن $b_n=\left(A_n\psi(A_n)\right)^{1/p}$، که $b_n\uparrow\infty$، در عبارت فوق و با استفاده از تبصره ۱.۲ قضیه ثابت گردید. □

**قضیه ۲.۲** فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی i.i.d. باشد و $\{b_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت باشند. اگر برای بعضی مقادیر $0<p<2$، $E|X|^p<\infty$ و برای $p\geq 1$، $EX_1=0$ باشد. در اینصورت رابطه (۱.۲) به ازای $b_n=n^{1/p}$ و $n\geq 1$ برقرار است.

اثبات این قضیه را می توان در مارسینکوویچ-زیگموند (۱۹۳۷) دید.

**قضیه ۳.۲** فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی .i.i.d باشد و $\{b_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت باشد بطوری که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|X_1\right| > b_n\right) < \infty \qquad (۴.۲)$$

و هم چنین:

$$0 < \frac{b_n}{n} \uparrow \infty \qquad (۵.۲)$$

در اینصورت رابطه (۱.۲) برقرار است.

برای اثبات به فلر (۱۹۴۶) مراجعه کنید.

**قضیه ۴.۲** فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی ایستا باشد و $\{b_n, n \geq 1\}$ یک دنباله ناکاهشی از اعداد حقیقی مثبت باشد بطوری که:

$$\frac{b_n}{n} \to \infty \quad \text{و} \quad \frac{b_n}{n} = O\left(\inf_{j \geq n} \frac{b_j}{j}\right) \qquad (۶.۲)$$

در اینصورت اگر رابطه (۴.۲) برقرار باشد آنگاه رابطه (۱.۲) برقرار است..

برای اثبات به روسالسکی( ۱۹۸۷) مراجعه کنید.

## ۲-۲ قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع جزئی از دنباله متغیرهای هم توزیع و فاقد گشتاور

در این بخش قضایایی را بیان خواهیم کرد که در آن رابطه (۱.۲) برای متغیرهای تصادفی که فقط شرط هم توزیعی دارند و فاقد گشتاور می باشند برقرار است. در ادامه آن مثال هایی را بیان خواهیم کرد.
در سال ۱۹۴۶ فلر رابطه ۱.۲ را برای یک دنباله از متغیرهای تصادفی i.i.d. ( در قضیه ۳.۲ بیان شد ) ثابت کرد. بعداً رسالسکی تحت همان شرایط رابطه ۱.۲ را برای دنباله متغیرهای تصادفی هم توزیع ثابت نمود که در قضیه زیر آن را بیان می کنیم.

**قضیه ۵.۲** فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند و $\{b_n, n\geq 1\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت باشند که در رابطه (۴.۲) و رابطه (۵.۲) صدق می کنند. در اینصورت رابطه (۱.۲) برقرار است.

اثبات این قضیه را در رسالسکی (۱۹۹۳) ببینید.

**قضیه ۶.۲** فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند که برای بعضی مقادیر $0 < p \leq 1$، $E|X_1|^p < \infty$ باشد و $\{b_n, n\geq 1\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت ناکاهشی با

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n^p} < \infty \qquad (۷.۲)$$

باشند، آنگاه رابطه (۱.۲) برقرار است.

برای اثبات به پترو ۱۹۷۳ مراجعه کنید.

**نتیجه ۱.۲** اگر $\{b_n, n\geq 1\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت ناکاهشی باشد بطوری که $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{b_n}^p}<\infty$، آنگاه بر اساس لم ۳.۱ می توان گفت که دنباله های $\{b_n, n\geq 1\}$ در قضیه ۶.۲ لزوماً $n=o\left({b_n}^p\right)$، را ایجاب می کند.

**قضیه ۷.۲** (مارتینکین و پترو ۱۹۸۰) فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند و $\{b_n, n\geq 1\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت ناکاهشی با

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{b_j}=O\left(\frac{n}{b_n}\right) \qquad (۸.۲)$$

باشد. اگر رابطه (۴.۲) برقرار باشد. آنگاه رابطه (۱.۲) برقرار است.

**تبصره ۲.۲** قبل از اثبات قضیه فوق لازم است یادآوری کنیم که برای سری داده شده در رابطه (۴.۲) نامعادله زیر برقرار است :

$$(۴.۲) \quad : \quad \sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|X_1\right|>b_n\right)<\infty$$

برای نشان دادن رابطه بالا داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}nP\left(b_{n-1}<\left|X_1\right|\leq b_n\right)$$
$$=P\left(b_0<\left|X_1\right|\leq b_1\right)+2P\left(b_1<\left|X_1\right|\leq b_2\right)+3P\left(b_2<\left|X_1\right|\leq b_3\right)+4P\left(b_3<\left|X_1\right|\leq b_4\right)+\ldots$$

$$= \underbrace{P\left(b_0 < |X_1| \le b_1\right) + P\left(b_1 < |X_1| \le b_2\right) + P\left(b_2 < |X_1| \le b_3\right) + \ldots}_{P(|X_1|>b_0)}$$

$$= \underbrace{P\left(b_1 < |X_1| \le b_2\right) + P\left(b_2 < |X_1| \le b_3\right) + P\left(b_3 < |X_1| \le b_4\right) + \ldots}_{P(|X_1|>b_1)}$$

$$+ \underbrace{P\left(b_2 < |X_1| \le b_3\right) + P\left(b_3 < |X_1| \le b_4\right) + \ldots}_{P(|X_1|>b_2)}$$

$$+ \underbrace{P\left(b_3 < |X_1| \le b_4\right) + P\left(b_4 < |X_1| \le b_5\right) + \ldots}_{P(|X_1|>b_3)}$$

$$= P\left(|X_1| > b_0\right) + P\left(|X_1| > b_1\right) + P\left(|X_1| > b_2\right) + P\left(|X_1| > b_3\right) + \ldots. = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(|X_1| > b_n\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_1| > b_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} nP\left(b_{n-1} < |X_1| \le b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(|X_1| > b_n\right) \qquad \square$$

**اثبات قضیه ۷.۲:**

توجه کنید که تساوی بدیهی زیر را داریم:

$$(۹.۲) \qquad (۱.۲) : \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} |X_n| I\left(|X_i| > b_i\right) + \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} |X_n| I\left(|X_i| \le b_i\right)$$

بنابراین برای اثبات رابطه (۱.۲) کافی است جمله اول و جمله دوم عبارت سمت راست رابطه فوق به صفر میل کند. بدین منظور برای جمله اول دقت کنید که بنا بر رابطه (۴.۲) و لم ۲.۱ می توان گفت که رابطه زیر بطور .a.s برقرار است:

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n I\left(|X_n| > b_n\right) < \infty$$

بنابراین

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} |X_i| I\left(|X_i| > b_i\right) \xrightarrow{a.s.} 0$$

اکنون باید ثابت کنیم که جمله دوم رابطه (۹.۲) بسمت صفر می رود. یعنی:

$$\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}|X_n|I\left(|X_i|\le b_i\right)\xrightarrow{a.s.}0$$

برای اثبات رابطه فوق با استفاده از لم ۱.۱ کافی است نشان دهیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}|X_n|I\left(|X_n|\le b_n\right)<\infty$$

اثبات رابطه فوق معادل است با اینکه رابطه زیر را ثابت کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}E\left(|X_n|I\left(|X_n|\le b_n\right)\right)<\infty \qquad (۱۰.۲)$$

بنابراین برای اثبات قضیه کافی است رابطه (۱۰.۲) را ثابت کنیم. توجه کنید که :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}\left(E|X_n|I\left(|X_n|<b_n\right)\right)$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}\left(E|X_n|I\left(b_{j-1}<|X_1|\le b_j\right)\right)$$

$$\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}b_jP\left(b_{j-1}<|X_1|\le b_j\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}b_jP\left(b_{j-1}<|X_1|\le b_j\right)\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{b_n}$$

با استفاده از رابطه (۸.۲) عبارت فوق به این صورت در می آید:

$$\le C\sum_{j=1}^{\infty}jP\left(b_{j-1}<|X_1|\le b_j\right)$$

بر اساس تبصره ۲.۲ برای عبارت فوق داریم:

$$=C\sum_{j=0}^{\infty}P\left(|X_1|>b_j\right)<\infty$$

عبارت فوق بنا بر رابطه (۴.۲) حاصل شده است. بنابراین رابطه (۱۰.۲) برقرار است و قضیه ثابت

گردید. □

**قضیه ۸.۲** (رسالسکی ۲۰۱۰ ) فرض کنید $n \ge 1$ و $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ که در آن $\{X_n, n \ge 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع می باشند هم چنین فرض کنید $\{b_n, n \ge 1\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت ناکاهشی باشد با

$$\frac{b_n}{nL(n)} \to \infty \qquad \text{و} \qquad \frac{b_n}{nL(n)} = O\left( \inf_{j \ge n} \frac{b_j}{jL(j)} \right) \tag{۱۱.۲}$$

که در آن $L:[1,\infty) \to (0,\infty)$ تابع با تغییرات آهسته ناکاهشی است. اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} nL(n) \left( \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{jL(j)} \right) P\left( b_{n-1} < |X_1| \le b_n \right) < \infty \tag{۱۲.۲}$$

آنگاه رابطه (۱.۲) برقرار است.

**تبصره ۳.۲** قبل از اثبات قضیه فوق لازم است یادآوری کنیم که اگر رابطه (۱۲.۲) برقرار باشد آنگاه رابطه (۴.۲) از قضیه ۷.۲ حفظ می شود. زیرا به ازای $n = 1$ در رابطه (۱۲.۲) رابطه زیر را بسهولت می توان نتیجه گرفت :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{jL(j)} < \infty \tag{۱۳.۲}$$

با استفاده از رابطه (۱۳.۲) و فلر (۱۹۷۱) و اینکه L یک تابع با تغییرات آهسته است. می توان نتیجه گرفت:

$$\lim_{n \to \infty} L(n) \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{jL(j)} = \infty$$

با توجه به رابطه فوق و رابطه (۱۲.۲) داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP\left(b_{n-1} < \left|X_1\right| \le b_n\right) < \infty$$

با بکار بردن تبصره ۲.۲ برای عبارت فوق می توان رابطه (۴.۲) را نتیجه گرفت. □

**اثبات قضیه ۸.۲:**

مشابه قضیه۷.۲ عمل می کنیم که بدلیل تکراری بودن قسمت اول از آن صرف نظر می کنیم. بنابراین برای اثبات قضیه کافی است که رابطه زیر را ثابت کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} E\left(\left|X_n\right| I\left(\left|X_n\right| \le b_n\right)\right) < \infty \qquad (۱۴.۲)$$

به همین خاطر داریم:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} E\left(\left|X_n\right| I\left(\left|X_n\right| \le b_n\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} E\left(\left|X_1\right| I\left(b_{j-1} < \left|X_1\right| \le b_j\right)\right) \\
&\le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{j=1}^{n} b_j P\left(b_{j-1} < \left|X_1\right| \le b_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} b_j P\left(b_{j-1} < \left|X_1\right| \le b_j\right) \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{b_n}
\end{aligned} \qquad (۱۵.۲)$$

اکنون از رابطه (۱۱.۲) و برای بعضی مقادیر $0 < C < \infty$ و تمامی $j \ge 1$ و $n \ge j$ خواهیم داشت:

$$\frac{b_j}{jL(j)} \le C \frac{b_n}{nL(n)}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{b_n} \le C \frac{jL(j)}{b_j} \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{nL(n)} \qquad (۱۶.۲)$$

با جایگزین کردن رابطه (۱۶.۲) در رابطه (۱۵.۲) داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}E\left(|X_n|I\left(|X_n|\le b_n\right)\right)$$

$$\le\sum_{j=1}^{\infty}b_jP\left(b_{j-1}<|X_1|\le b_j\right)\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{b_n}$$

$$\le C\sum_{j=1}^{\infty}jL(j)\left(\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{nL(n)}\right)P\left(b_{j-1}<|X_1|\le b_j\right)<\infty$$

رابطه فوق بنابر رابطه (۱۲.۲) حاصل شده است. بنابراین رابطه (۱۴.۲) برقرار است و اثبات قضیه کامل گردید. □

**قضیه ۹.۲** (رسالسکی ۲۰۱۰ ) فرض کنید که $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ و $\{X_n,n\ge1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند. هم چنین فرض کنید $\{b_n,n\ge1\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی ناکاهشی باشند که در رابطه (۴.۲) صدق می کند و برای بعضی مقادیر $0<p<1$، $E|X_1|^p<\infty$ باشد. اگر

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{b_j}=O\left(\frac{1}{b_n^{1-p}}\right)\qquad(۱۷.۲)$$

آنگاه رابطه (۱.۲) برقرار است.

**اثبات :**

توجه کنید که رابطه (۱۷.۲) منجر می گردد که $b_n\uparrow\infty$. مشابه قضیه ۷.۲ عمل می کنیم که از قسمت اول صرف نظر می کنیم. بنابراین برای اثبات قضیه کافی است که رابطه زیر را ثابت کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}E\left(|X_n|I\left(|X_n|\le b_n\right)\right)<\infty$$

به همین منظور داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}E\left(\left|X_n\right|I\left(\left|X_n\right|\le b_n\right)\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{n}E\left(\left|X_1\right|I\left(b_{j-1}<\left|X_1\right|<b_j\right)\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}E\left(\left|X_1\right|I\left(b_{j-1}<\left|X_1\right|\le b_j\right)\right)\sum_{n=j}^{\infty}\frac{1}{b_n}$$

با استفاده از رابطه (۱۷.۲) برای عبارت فوق داریم :

$$\le C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_j^{1-p}}E\left(\left|X_1\right|^p\left|X_1\right|^{1-p}I\left(b_{j-1}<\left|X_1\right|\le b_j\right)\right)$$

$$\le C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_j^{1-p}}b_j^{1-p}E\left(\left|X_1\right|^p I\left(b_{j-1}<\left|X_1\right|\le b_j\right)\right)$$

$$\le C\sum_{j=1}^{\infty}E\left(\left|X_1\right|^p I\left(b_{j-1}<\left|X_1\right|\le b_j\right)\right)$$

$$=CE\left|X_1\right|^p<\infty$$

بنابراین رابطه (۷.۲) برقرار است و قضیه ثابت گردید. □

اکنون برای تفهیم بیشتر دو مثال زیر را بیان می کنیم که در مثال اولی فرض های قضیه ۸.۲ برقرار است اما فرض های قضیه ۶.۲ و ۷.۲ و۹.۲ برقرار نیست.

**مثال ۱.۲** فرض کنید که $1<\alpha<\beta<\infty$ و $\{X_n,n\ge1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند با :

$$P\left(X_1=k\left(\log k\right)^{\beta}\right)=\frac{C_\beta}{k^2\left(\log k\right)^{\beta+1}},k\ge3$$

که در آن $C_\beta=\left(\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k^2\left(\log k\right)^{\beta+1}}\right)^{-1}$.

هم چنین فرض کنید که $b_0=0$ و $b_1=b_2=1$ و به ازای $n\geq 3$، $b_n=n(\log n)^{\beta}$ باشد. و $L(.)$ یک تابع با تغییرات آهسته باشد که بصورت زیر تعریف شده است:

$$L(x)=\begin{cases}1, & 1\leq x<e\\ (\log x)^{\alpha}, & x\geq e\end{cases}$$

آنگاه رابطه (۱۱.۲) برای $\beta>\alpha$ به صورت زیر می شود:

$$\frac{b_n}{nL(n)}=(\log n)^{\beta-\alpha}=\infty$$

هم چنین برای $\alpha>1$ داریم

$$.\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{jL(j)}\approx\frac{1}{(\alpha-1)(\log n)^{\alpha-1}}$$

رابطه فوق برقرار است. زیرا برای $\alpha>1$ ، خواهیم داشت:

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{jL(j)}\approx\int_{n}^{\infty}\frac{1}{xL(x)}dx=\int_{n}^{\infty}\frac{1}{x(\log x)^{\alpha}}dx=\frac{1}{(\alpha-1)(\log n)^{\alpha-1}}$$

در اینصورت به ازای $\beta>1$ برای رابطه (۱۲.۲) داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}nL(n)\left(\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{jL(j)}\right)P\left(b_{n-1}<|X_1|\leq b_n\right)$$

$$\leq C\sum_{n=3}^{\infty}n(\log n)^{\alpha}\frac{1}{(\log n)^{\alpha-1}}\frac{1}{n^2(\log n)^{\beta+1}}$$

$$=C\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^{\beta}}<\infty$$

همه موارد فوق در شرایط قضیه (۸.۲) صدق می کنند. در حالی که

$$E|X_1|=\sum_{k=3}^{\infty}k(\log k)^{\beta}\frac{C_{\beta}}{k^2(\log k)^{\beta+1}}=C_{\beta}\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{k\log k}=\infty$$

بنابراین رابطه (۱.۲) برقرار است. برای $0<p<1$، $\beta>1$ داریم:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{{b_n}^{p}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^{p}\left(\log n\right)^{\beta p}}=\infty$$

بنابراین در رابطه (۷.۲) قضیه ۶.۲ صدق نمی کند. علاوه بر این رابطه (۸.۲) نیز برقرار نیست. یعنی:

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{b_j}\neq O\left(\frac{n}{b_n}\right)$$

زیرا برای $\beta>1$ خواهیم داشت :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{b_j}=\lim_{n\to\infty}\left(\log n\right)^{\beta}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j\left(\log j\right)^{\beta}}$$

$$\approx\lim_{n\to\infty}\left(\log n\right)^{\beta}\int_{n}^{\infty}\frac{1}{x\left(\log x\right)^{\beta}}dx$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\log n\right)^{\beta}\frac{1}{\left(\beta-1\right)\left(\log n\right)^{\beta-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{\beta-1}=\infty$$

بنابراین در شرایط قضیه ۷.۲ صدق نمی کند. همچنین رابطه (۱۷.۲) به ازای $0<p<1$، برقرار نیست.

یعنی:

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{b_j}\neq O\left(\frac{1}{b_n^{1-p}}\right)$$

زیرا برای $0<p<1$، داریم:

$$\lim_{n\to\infty}b_n^{1-p}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{b_j}=\lim_{n\to\infty}n^{1-p}\left(\log n\right)^{\beta-p\beta}\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j\left(\log j\right)^{\beta}}$$

$$\approx\lim_{n\to\infty}\frac{n^{1-p}}{\left(\beta-1\right)\left(\log n\right)^{p\beta-1}}=\infty$$

بنابراین شرایط قضیه ۹.۲ نیز برقرار نیست.

مثال بعدی نشان می دهد که فرض های قضیه ۹.۲ برقرار است اما در فرض های قضیه ۶.۲ صدق نمی کند.

**مثال ۲.۲** فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند. و برای $0<p<1$، $E|X_1|^p<\infty$ و برای تمامی $q>p$، $E|X_1|^q=\infty$ باشد. هم چنین فرض کنید که برای $n\geq 1$، $b_n=n^{1/p}$ باشد.

با توجه به مفروضات بالا رابطه (۱۷.۲) برقرار است. یعنی :

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{b_j}=O\left(\frac{1}{b_n^{1-p}}\right)$$

چون برای $0<p<1$، داریم:

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{b_j}=\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j^{1/p}} \approx \int_n^{\infty}\frac{1}{x^{1/p}}dx$$

$$=\frac{1}{\left(\frac{1}{p}-1\right)n^{1/p-1}}=\frac{1}{\left(\frac{1}{p}-1\right)b_n^{1-p}}$$

بنابراین شرایط قضیه ۹.۲ برقرار است. همچنین با استدلالی مشابه فوق رابطه (۸.۲) برقرار و در نتیجه در این مثال خاص شرایط قضیه ۷.۲ نیز برقرار است. اما شرایط قضیه (۶.۲) برقرار نیست. چون با اینکه $E|X_1|^p<\infty$ است، .ولی:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{b_n}^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\infty$$

می باشد. بنابراین رابطه (۷.۲) برقرار نیست. از طرفی اگر فرض کنیم $q>p$ و $0<q\leq 1$ باشد، آنگاه:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{b_n}^q}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q/p}}<\infty$$

عبارت فوق نشان می دهد رابطه (۷.۲) برقرار است، اما چون طبق فرض $E|X_1|^q=\infty$، بنابراین در شرایط قضیه (۶.۲) صدق نمی کند.

## ۲-۳ نتایج جدید قانون قوی برای مجموع جزئی ازمتغیرهای تصادفی هم توزیع و فاقد گشتاور

در این بخش با ایجادکردن شرایط و روابط جدید در نتایج بدست آمده از بخش قبلی، به اثبات رابطه (۱.۲) برای متغیرهای تصادفی فاقد گشتاور که فقط شرط هم توزیعی دارند می پردازیم و در ادامه به مثال هایی در همین راستا خواهیم پرداخت. در این خصوص یک سری قضایای اساسی را ارائه می دهیم و به اثبات آنها می پردازیم .

**قضیه ۱۰.۲** ❋❋ فرض کنید $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$ و $\{X_n,n\ge1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند هم چنین فرض کنید $\{b_n,n\ge1\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت ناکاهشی باشد بطوری که برای هر دنباله اکیداً افزایشی از اعداد صحیح مثبت $\{n_i,i\ge1\}$ داشته باشیم:

$$0<a=\inf_i\, b_{n_i}b_{n_{i+1}}^{-1}\le\sup_i b_{n_i}b_{n_{i+1}}^{-1}=c<1 \qquad (۱۸.۲)$$

اگر

$$\sum_{j=1}^{\infty}n_jP\left(b_{n_{j-1}}<|X_1|\le b_{n_j}\right)<\infty \qquad (۱۹.۲)$$

و

$$\sum_{i=j}^{\infty}n_ic^i=O\left(n_jc^j\right) \qquad (۲۰.۲)$$

آنگاه رابطه (۱.۲) برقرار است.

**تبصره ۴.۲** لازم است یادآوری کنیم که مشابه تبصره ۲.۲ از رابطه (۱۹.۲) می توان نتیجه گرفت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(|X_1| > b_n\right) < \infty$$

**اثبات قضیه ۱۰.۲:**

مشابه قضیه ۷.۲ عمل می کنیم که در اینجا از تکرار قسمت اول آن خودداری می کنیم. بنابراین برای اثبات قضیه کافی است که عبارت زیر را ثابت کنیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} E\left(|X_n| I\left(|X_n| \le b_n\right)\right) < \infty$$

توجه کنید:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} E\left(|X_1| I\left(|X_1| \le b_n\right)\right)$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{b_{n_{i-1}}} E\left(|X_1| I\left(|X_1| \le b_{n_i}\right)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{b_{n_{i-1}}} \sum_{j=1}^{i} E\left(|X_1| I\left(b_{n_{j-1}} < |X_1| \le b_{n_j}\right)\right)$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{b_{n_{i-1}}} \sum_{j=1}^{i} b_{n_j} P\left(b_{n_{j-1}} < |X_1| \le b_{n_j}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} n_i \sum_{j=1}^{i} \frac{b_{n_j}}{b_{n_{i-1}}} P\left(b_{n_{j-1}} < |X_1| \le b_{n_j}\right)$$

چون $b_{n_{i-1}} \ge a b_{n_i}$، از رابطه بالا می توان نتیجه گرفت :

$$\le \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{\infty} n_i \sum_{j=1}^{i} \frac{b_{n_j}}{b_{n_i}} P\left(b_{n_{j-1}} < |X_1| \le b_{n_j}\right) \qquad (۲۱.۲)$$

از رابطه (۱۸.۲) می توان برای تمامی $k \geq j$، رابطه زیر را بدست آورد:

$$\frac{b_{n_j}}{b_{n_i}} = \prod_{k=j}^{i-1} \frac{b_{n_k}}{b_{n_{k+1}}} \leq c^{i-j}$$

با بکار بردن رابطه فوق در قسمتی از رابطه (۲۱.۲) داریم:

$$\sum_{j=1}^{i} \frac{b_{n_j}}{b_{n_i}} P\left(b_{n_{j-1}} < |X_1| \leq b_{n_j}\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{i} c^{i-j} P\left(b_{n_{j-1}} < |X_1| \leq b_{n_j}\right) \qquad (۲۲.۲)$$

بنابراین با استفاده از رابطه (۲۱.۲) و (۲۲.۲) داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} E\left(|X_1| I\left(|X_1| \leq b_n\right)\right)$$

$$\leq \frac{1}{a} \sum_{i=1}^{\infty} n_i c^i \sum_{j=1}^{i} c^{-j} P\left(b_{n_{j-1}} < |X_1| \leq b_{n_j}\right)$$

$$= \frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} c^{-j} P\left(b_{n_{j-1}} < |X_1| \leq b_{n_j}\right) \sum_{i=j}^{\infty} n_i c^i$$

با بکار بردن رابطه (۲۰.۲) برای عبارت فوق داریم:

$$\leq C \sum_{j=1}^{\infty} n_j P\left(b_{n_{j-1}} < |X_1| \leq b_{n_j}\right) < \infty$$

با توجه به اینکه C مقدار ثابتی است، عبارت فوق با استفاده از رابطه (۱۹.۲) درست می باشد. بنابراین رابطه (۱.۲) برقرار و اثبات قضیه کامل گردید. □

اکنون مثالی ارائه می دهیم که شرایط قضیه ۱۰.۲ را دارد. اما در شرایط قضیه ۹.۲ و ۶.۲ صدق نمی کند.

**مثال ۳.۲** ** فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند با

$$f(x)=\frac{k}{x^{1+p}}$$

بطوری که $x>1$ و $0<p<1$ و $k$ یک مقدار ثابت باشد. هم چنین فرض کنید $n_i=2^i$ و برای $\beta>1$ $b_n=\left(n\ln n\left(\ln\ln n\right)^{\beta}\right)^{1/p}$، باشد. در اینصورت برای رابطه (۱۸.۲) خواهیم داشت:

$$\frac{b_{n_i}}{b_{n_{i+1}}}=\frac{2^{i/p}i^{1/p}\left[\ln 2\left(\ln\ln 2^i\right)^{\beta}\right]^{1/p}}{2^{(i+1)/p}\left(i+1\right)^{1/p}\left[\ln 2\left(\ln\ln 2^{i+1}\right)^{\beta}\right]^{1/p}}\leq\frac{1}{2^{1/p}}=c$$

رابطه (۲۰.۲) نیز برقرار است. یعنی:

$$\sum_{i=j}^{\infty}n_i c^i=O\left(\frac{1}{2^{j\left(\frac{1}{p}-1\right)}}\right)$$

زیرا

$$\sum_{i=j}^{\infty}n_i c^i=\sum_{i=j}^{\infty}2^{i\left(1-\frac{1}{p}\right)}\approx\int_j^{\infty}2^{x\left(1-\frac{1}{p}\right)}dx$$

$$=\frac{\ln 2}{\left(\frac{1}{p}-1\right)}\frac{1}{2^{j\left(\frac{1}{p}-1\right)}}$$

برای سری ذکر شده در رابطه (۱۹.۲) داریم:

$$\sum_{j=1}^{\infty}n_j P\left(b_{n_{j-1}}<\left|X_1\right|\leq b_{n_j}\right)$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}2^j\,P\left[\left(2^{j-1}\left(j-1\right)\ln 2\left(\ln\ln 2^{j-1}\right)^{\beta}\right)^{1/p}<\left|X_1\right|\leq\left(2^j\,j\ln 2\left(\ln\ln 2^j\right)^{\beta}\right)^{1/p}\right]$$

$$<C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2^j}{2^j\,j\ln 2\left(\ln\ln 2^j\right)^{\beta}}$$

$$< C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j(\ln j)^{\beta}} < \infty$$

بنابراین مثال ذکر شده درتمامی شرایط موجود در قضیه ۱۰.۲ صدق می کند. در حالی که:

$$E|X_1|^p = \int_1^{\infty}\frac{kx^p}{x^{p+1}}dx = \infty$$

با توجه به مفروضات بالا شرایط قضیه ۶.۲ برقرار نیست. چون به ازای $\beta > 1$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{b_n}^p} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(\ln\ln n)^{\beta}} < \infty$$

اما $E|X_1|^p = \infty$ می باشد. بنابراین. شرایط موجود در قضیه ۶.۲ را دارا نمی باشد. می دانیم که برای $q < p$، $E|X_1|^q < \infty$ می باشد. اما برای بعضی مقادیر $0 < q \le 1$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{{b_n}^q} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{q/p}\left(\ln n(\ln\ln n)^{\beta}\right)^{q/p}} = \infty$$

بنابراین رابطه (۷.۲) برقرار نیست. در نتیجه قضیه ۶.۲ برقرار نمی باشد. از طرفی رابطه (۱۷.۲) برقرار نیست. یعنی:

$$\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{b_j} \ne O\left(\frac{1}{b_n^{1-q}}\right)$$

استدلال رابطه فوق مشابه مثال ۱.۲ می باشد. بنابراین شرایط قضیه ۹.۲ نیز برقرار نمی باشد.

**قضیه ۱۱.۲**** فرض کنید $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ و $\{X_n, n \ge 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند. هم چنین فرض کنید که $\{b_n, n \ge 1\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت ناکاهشی باشند بطوری که برای هر دنباله اکیداً افزایشی از اعداد صحیح مثبت $\{n_i, i \ge 1\}$ داشته باشیم:

$$\sum_{i=j}^{\infty}\frac{n_i}{b_{n_{i-1}}}=O(\frac{n_j\ln(n_j)}{b_{n_j}}) \tag{۲۳.۲}$$

و

$$\sum_{j=1}^{\infty}n_j\ln(n_j)P(b_{n_{j-1}}<|X_1|\le b_{n_j})<\infty \tag{۲۴.۲}$$

آنگاه رابطه (۱.۲) برقرار است.

**تبصره ۵.۲** قبل از اثبات قضیه توجه کنید که $\ln(n_j)$ یک تابع افزایشی می باشد. می توان گفت:

$$\lim_{j\to\infty}\ln\left(n_j\right)=\infty$$

بنابراین از رابطه (۲۴.۲) می توان نتیجه گرفت:

$$\sum_{j=1}^{\infty}n_jP(b_{n_{j-1}}<|X_1|\le b_{n_j})<\infty$$

با استدلالی مشابه تبصره ۲.۲، می توان از عبارت فوق نتیجه گرفت که:

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(|X_1|>b_n\right)<\infty$$

**اثبات قضیه ۱۱.۲:**

مشابه روش اثبات قضیه ۷.۲ کافی است که رابطه زیر را ثابت کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}E\left(|X_n|I\left(|X_n|\le b_n\right)\right)<\infty$$

دقت کنید که:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}E(|X_1|I(|X_1|\le b_n))$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{b_{n_{i-1}}} E(|X_1| I(|X_1| \leq b_{n_i}))$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{b_{n_{i-1}}} \sum_{j=1}^{i} E(|X_1| I(b_{n_{j-1}} < |X_1| \leq b_{n_j}))$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{n_i}{b_{n_{i-1}}} \sum_{j=1}^{i} b_{n_j} P(b_{n_{j-1}} < |X_1| \leq b_{n_j})$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} b_{n_j} P(b_{n_{j-1}} < |X_1| \leq b_{n_j}) \sum_{i=j}^{\infty} \frac{n_i}{b_{n_{i-1}}}$$

با بکار بردن رابطه (۲۳.۲) عبارت فوق بصورت زير مي شود:

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} n_j \ln(n_j) P(b_{n_{j-1}} < |X_1| \leq b_{n_j}) < \infty$$

عبارت فوق با استفاده از رابطه (۲۴.۲) حاصل شده است. بنابراين رابطه (۱.۲) برقرار و قضيه ثابت گرديد. □

اکنون مثالی را ارائه می دهیم که تمامی شرايط موجود در قضيه ۱۱.۲ را داراست.

**مثال ۴.۲** ❋❋ فرض کنيد $\{X_n, n \geq 1\}$ يک دنباله از متغيرهای تصادفی هم توزيع باشند با:

$$P(X_1 = k(\log k)^{\beta}) = (\frac{C_{\beta}}{k^2 (logk)^2 (\log\log k)^{\beta}})$$

و $k \geq 20$ باشد، که در آن

$$C_{\beta} = (\sum_{k=20}^{\infty} \frac{1}{k^2 (logk)^2 (\log\log k)^{\beta}})^{-1}.$$

هم چنين فرض کنيد که $b_n = n(\ln n)^{\beta}$ و $n_i = 2^i$ باشد. در اينصورت رابطه (۲۳.۲) برقرار است. يعنی:

$$\sum_{i=j}^{\infty} \frac{n_i}{b_{n_{i-1}}} = O\left(\frac{1}{(j\ln 2)^{\beta-1}}\right)$$

زیرا برای $\beta > 1$ داریم:

$$\sum_{i=j}^{\infty} \frac{n_i}{b_{n_{i-1}}} = \sum_{i=j}^{\infty} \frac{2}{\left((i-1)\ln 2\right)^{\beta}}$$

$$\approx \frac{2}{\ln 2\left(j \ln 2\right)^{\beta-1}}$$

برای سری مفروض شده در رابطه (۲۴.۲) داریم:

$$\sum_{j=1}^{\infty} n_j \ln(n_j) P(b_{n_{j-1}} < |X_1| \le b_{n_j})$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j \ 2^j \ln\left(2\right) P\left[2^{j-1}((j-1)\ln 2)^{\beta} < |X_1| \le 2^j (j \ln 2)^{\beta}\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} j \ 2^j \ln\left(2\right) \sum_{k=2^{j-1}((j-1)\ln 2)^{\beta}}^{2^j (j \ln 2)^{\beta}} \frac{1}{k^2 (logk)^2 (\log\log k)^{\beta}}$$

$$\le C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j 2^{2j}}{2^{2j}\left(j \log 2\right)^2 \left(\log\log 2^j\right)^{\beta}}$$

$$\le C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(\log j)^{\beta}} < \infty$$

عبارت فوق برای تمامی $\beta > 1$ متناهی است. بنابراین صحت شرایط موجود در قضیه ۱۱.۲ را بررسی کردیم. بر این اساس می توان گفت که رابطه (۱.۲) برقرار است. البته بایستی دقت کنید:

$$E|X_1| = \sum_{K=20}^{\infty} k(\log k)^{\beta} \frac{C_{\beta}}{k^2 (logk)^2 (\log\log k)^{\beta}}$$

$$= C_{\beta} \sum_{K=20}^{\infty} \frac{(\log k)^{\beta-1}}{k(logk)(\log\log k)^{\beta}} = \infty$$

.

# فصل سوم

## قانون قوی اعداد بزرگ برای

## مجموع وزنی ازمتغیرهای تصادفی

## ۱-۳ مقدمه

فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند و $\{a_{ni}, 1\leq i\leq n, n\geq 1\}$ یک آرایه از اعداد حقیقی باشد. همگرایی کامل برای مجموع وزنی $\sum_{i=1}^{n} a_{ni}X_i$ بارها مورد مطالعه قرار گرفت. از جمله قضیه زیر که در سال ۲۰۰۰ توسط بای و چنگ[۳۳] بیان شد.

**قضیه ۱.۳** فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی i.i.d. با $EX = 0$، باشند و برای بعضی مقادیر $h > 0$ و $\gamma > 0$، $E\exp\left(h|X|^{\gamma}\right) < \infty$ باشد. هم چنین فرض کنید $\{a_{ni}, 1\leq i\leq n, n\geq 1\}$ یک آرایه از اعداد حقیقی باشند. بطوری که برای بعضی $1 < \alpha < 2$ داشته باشیم:

$$A_{\alpha} = \limsup_{n\to\infty} A_{\alpha,n} < \infty \qquad \text{و} \qquad A_{\alpha,n}^{\alpha} = \sum_{i=1}^{n} |a_{ni}|^{\alpha} \Big/ n$$

و $b_n = n^{1/\alpha}(\log n)^{1/\gamma+\gamma(\alpha-1)/\alpha(1+\gamma)}$ باشد. آنگاه SLLN برای مجموع وزنی از متغیرهای تصادفی یعنی $\sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i / b_n \xrightarrow{a.s.} 0$، برقرار است.

برای اثبات به بای و چنگ (۲۰۰۰) مراجعه کنید.

.

هم چنین سوهاک سونگ[۳۴](۲۰۰۷) همگرایی کامل را برای مجموع وزنی از متغیرهای تصادفی محدود شده بدست آورد که در بخش بعدی به اثبات آنها می پردازیم.

---

[۳۳] Bai and cheng

[۳۴] Soo hak sung

## ۳-۲ همگرایی کامل برای مجموع وزنی از متغیرهای تصادفی دارای گشتاور

فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی باشد و $\{a_{ni}, i\geq 1, n\geq 1\}$ یک آرایه از اعداد حقیقی باشد در اینصورت می خواهیم با ایجاد کردن شرایط مناسب بر روی $\{X_n\}$ و $\{a_{ni}\}$ ها و به ازای تمامی $\varepsilon > 0$ و $p > 0$، رابطه زیر برقرار باشد:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} X_i\right|}{n^{1/p}} > \varepsilon\right) < \infty \tag{۱.۳}$$

اگر $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} X_i$ همگرای .a.s باشد به ازای $t < -1$، رابطه فوق واضح است. زیرا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} X_i\right|}{n^{1/p}} > \varepsilon\right) < \sum_{n=1}^{\infty} n^t < \infty$$

بنابراین شرایط را برای $t \geq -1$ بررسی می کنیم. به همین منظور ابتدا توجه شما را به چند لم جلب می کنیم که ما را در اثبات قضایا یاری می دهد.

**لم ۱.۳** فرض کنید که $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی باشد که به متغیر تصادفی $X$ محدود شده باشد. در اینصورت برای هر $\alpha > 0$ و $b > 0$، عبارات زیر برقرار است:

$$E|X_n|^{\alpha} I(|X_n| \leq b) \leq C\left\{E|X|^{\alpha} I(|X| \leq b) + b^{\alpha} P(|X| > b)\right\} \tag{i}$$

(ii) $E|X_n|^\alpha I(|X_n|>b) \le CE|X|^\alpha I(|X|>b)$

برهان این لم را در سوهاک سونگ (۲۰۰۷) ببینید.

**لم ۲.۳** (سونگ ۲۰۰۷ ) فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی است که برای بعضی مقادیر $r>0$، $E|X|^r<\infty$ باشد. آنگاه به ازای $p>0$ عبارات زیر برقرار اند.

(i) برای هر $\delta>0$، $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^{1+\delta/p}\right)E|X|^{r+\delta} I\left(|X|\le n^{1/p}\right)\le CE|X|^r$.

(ii) برای بعضی مقادیر $\delta>0$ بطوری که $r-\delta>0$ باشد خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^{1-\delta/p}\right)E|X|^{r-\delta} I\left(|X|>n^{1/p}\right)\le CE|X|^r$$

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/n^{1-r/p}\right)P\left(|X|>n^{1/p}\right)\le CE|X|^r$.

**اثبات**:

قسمت (i):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta/p}}E|X|^{r+\delta} I\left(|X|\le n^{1/p}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta/p}}\sum_{i=1}^{n}E|X|^{r+\delta} I\left((i-1)^{1/p}<|X|\le i^{1/p}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}E|X|^{r+\delta} I\left((i-1)^{1/p}<|X|\le i^{1/p}\right)\sum_{n=i}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta/p}} \qquad (۲.۳)$$

از طرفی

$$\sum_{n=i}^{\infty}1/n^{1+\delta/p}=O\left(i^{-\delta/p}\right) \qquad (۳.۳)$$

برقرار است. زیرا:

$$\sum_{n=i}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta/p}} \approx \int_{i}^{\infty}\frac{1}{x^{1+\delta/p}}dx=\frac{p}{\delta}i^{-\delta/p}=O\left(i^{-\delta/p}\right)$$

بنابراین با جایگزین کردن رابطه (۳.۳) در قسمتی از رابطه (۲.۳) داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta/p}}E|X|^{r+\delta}I\left(|X|\le n^{1/p}\right)$$

$$\le C\sum_{i=1}^{\infty}E|X|^{r+\delta}I\left((i-1)^{1/p}<|X|\le i^{1/p}\right)\frac{1}{i^{\delta/p}}$$

$$=C\sum_{i=1}^{\infty}E|X|^{r}I\left((i-1)^{1/p}<|X|\le i^{1/p}\right)E|X|^{\delta}\frac{1}{i^{\delta/p}}$$

$$\le C\sum_{i=1}^{\infty}E|X|^{r}I\left((i-1)^{1/p}<|X|\le i^{1/p}\right)i^{\delta/p}\frac{1}{i^{\delta/p}}$$

$$=C\sum_{i=1}^{\infty}E|X|^{r}I\left((i-1)^{1/p}<|X|\le i^{1/p}\right)=CE|X|^{r}$$

بنابراین قسمت (i) ثابت شد.

قسمت (ii):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\delta/p}}E|X|^{r-\delta}I\left(|X|>n^{1/p}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\delta/p}}\sum_{i=n}^{\infty}E|X|^{r-\delta}I\left(i^{1/p}<|X|\le(i+1)^{1/p}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}E|X|^{r-\delta}I\left(i^{1/p}<|X|\le(i+1)^{1/p}\right)\sum_{n=1}^{i}\frac{1}{n^{1-\delta/p}} \qquad (۴.۳)$$

از طرفی با استدلالی مشابه رابطه (۳.۳) می توان گفت:

$$\sum_{n=1}^{i}1/n^{1-\delta/p}=O\left(i^{\delta/p}\right)$$

با جایگزینی عبارت فوق در قسمتی از رابطه (۴.۳) داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-\delta/p}}E\left|X\right|^{r-\delta} I\left(\left|X\right|>n^{1/p}\right)$$

$$\le C\sum_{i=1}^{\infty}E\left|X\right|^{r-\delta} I\left(i^{1/p}<\left|X\right|\le\left(i+1\right)^{1/p}\right)i^{\delta/p}$$

$$=C\sum_{i=1}^{\infty}E\left|X\right|^{r} I\left(i^{1/p}<\left|X\right|\le\left(i+1\right)^{1/p}\right)E\left|X\right|^{-\delta} i^{\delta/p}$$

$$\le C\sum_{i=1}^{\infty}E\left|X\right|^{r} I\left(i^{1/p}<\left|X\right|\le\left(i+1\right)^{1/p}\right)\frac{1}{i^{\delta/p}}i^{\delta/p}$$

$$\le C\sum_{i=1}^{\infty}E\left|X\right|^{r} I\left(i^{1/p}<\left|X\right|\le\left(i+1\right)^{1/p}\right)$$

$$\le CE\left|X\right|^{r}$$

بنابراين قسمت (ii) نيز ثابت شد.

قسمت (iii):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-r/p}}P\left(\left|X\right|>n^{1/p}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-r/p}}\sum_{i=n}^{\infty}P\left(i^{1/p}<\left|X\right|\le\left(i+1\right)^{1/p}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}P\left(i^{1/p}<\left|X\right|\le\left(i+1\right)^{1/p}\right)\sum_{n=1}^{i}\frac{1}{n^{1-r/p}} \tag{۵.۳}$$

با استدلالی مشابه رابطه (۳.۳) رابطه زیر را خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{i}1/n^{1-r/p}=O\left(i^{r/p}\right)$$

با بکار بردن عبارت فوق در رابطه (۵.۳) خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1-r/p}}P\left(\left|X\right|>n^{1/p}\right)$$

$$\le C\sum_{i=1}^{\infty}P\left(i^{1/p}<\left|X\right|\le\left(i+1\right)^{1/p}\right)i^{r/p}\le CE\left|X\right|^{r}.$$

بنابراین این قسمت نیز ثابت شد و قضیه تکمیل شد. □

**لم ۳. ۳** (سونگ ۲۰۰۷) فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی باشد که به متغیر تصادفی $X$ محدود شده است، بطوری که $p(t+\beta+1)>0$ و $p>0$، $E|X|^{p(t+\beta+1)}<\infty$ باشد.
همچنین فرض کنید $\{a_{ni}, i\geq 1, n\geq 1\}$ یک آرایه از اعداد حقیقی است، بطوری که $|a_{ni}|=O(1)$ باشد.
اگر برای بعضی مقادیر $q<p(t+\beta+1)$ داشته باشیم :

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}|^{q}=O\left(n^{\beta}\right) \tag{۶.۳}$$

آنگاه عبارات زیر برقرار است.

(i) برای تمامی $\delta>0$، داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{t}\sum_{i=1}^{\infty}E\left|n^{-1/p}a_{ni}X_iI\left(|X_i|\leq n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)+\delta}\leq CE|X|^{p(t+\beta+1)}$$

(ii) برای تمامی $\delta>0$ و $p(t+\beta+1)-\delta\geq q$ و $p(t+\beta+1)-\delta>0$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^{t}\sum_{i=1}^{\infty}E\left|n^{-1/p}a_{ni}X_iI\left(|X_i|> n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)-\delta}\leq CE|X|^{p(t+\beta+1)}$$

**اثبات**:

قسمت (i)

ابتدا لازم است یادآوری کنیم که رابطه (۶.۳) بیان می کند که برای هر $\gamma>0$ رابطه زیر،

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}|^{q+\gamma}=O\left(n^{\beta}\right) \tag{۷.۳}$$

برقرار است. به ازای $r=p(t+\beta+1)$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left|n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)+\delta}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left|n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right)\right|^{r+\delta}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^t \frac{1}{n^{(r+\delta)/p}} \sum_{i=1}^{\infty} \left|a_{ni}\right|^{r+\delta} E\left|X_i\right|^{r+\delta} I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right)$$

با استفاده از قسمت (i) لم ۱.۳ برای عبارت فوق داریم:

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^t \frac{1}{n^{(r+\delta)/p}} \sum_{i=1}^{\infty} \left|a_{ni}\right|^{r+\delta} E\left|X\right|^{r+\delta} I\left(\left|X\right| \le n^{1/p}\right)$$

$$+C\sum_{n=1}^{\infty} n^t \frac{1}{n^{(r+\delta)/p}} \sum_{i=1}^{\infty} \left|a_{ni}\right|^{r+\delta} n^{(r+\delta)/p} P\left(\left|X\right| > n^{1/p}\right)$$

بنابراین با جایگزینی رابطه (۷.۳) در عبارات فوق خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left|n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)+\delta}$$

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^t \frac{1}{n^{(r+\delta)/p}} n^{\beta} E\left|X\right|^{r+\delta} I\left(\left|X\right| \le n^{1/p}\right)$$

$$+C\sum_{n=1}^{\infty} n^t \frac{1}{n^{(r+\delta)/p}} n^{\beta} n^{(r+\delta)/p} P\left(\left|X\right| > n^{1/p}\right)$$

$$= C\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\delta/p}} E\left|X\right|^{r+\delta} I\left(\left|X\right| \le n^{1/p}\right) + C\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-r/p}} P\left(\left|X\right| > n^{1/p}\right)$$

عبارت فوق با استفاده از قسمت (i) و (iii) لم ۲.۳ بصورت زیر می آید:

$$\le CE\left|X\right|^r < \infty.$$

رابطه فوق بنا بر فرض لم برقرار است و اثبات این قسمت تکمیل گردید. □

قسمت (ii):

اثبات این قسمت مشابه قسمت قبلی است. با قرار دادن $r = p(t+\beta+1)$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left| n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(|X_i| > n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)-\delta}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left| n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(|X_i| > n^{1/p}\right)\right|^{r-\delta}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n^t \frac{1}{n^{(r-\delta)/p}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ni}|^{r-\delta} E|X_i|^{r-\delta} I\left(|X_i| > n^{1/p}\right)$$

با جایگزین کردن قسمت (ii) لم ۲.۳ برای عبارت فوق و بکار بردن رابطه (۷.۳) به ازای $r-\delta > 0$ داریم:

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^t \frac{1}{n^{(r-\delta)/p}} n^{\beta} E|X|^{r-\delta} I\left(|X| > n^{1/p}\right)$$

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-\delta/p}} E|X|^{r-\delta} I\left(|X| > n^{1/p}\right)$$

$$\le CE|X|^r < \infty.$$

رابطه بالا بنا بر فرض لم برقرار است. بنابراین این قسمت نیز ثابت و اثبات قضیه تکمیل گردید. □

**قضیه ۲.۳** فرض کنید $\{X_{ni}, 1 \le i \le k_n, n \ge 1\}$ یک آرایه از متغیرهای تصادفی دو به دو مستقل و $\{a_n, n \ge 1\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی مثبت باشد. اگر برای هر $\varepsilon > 0$ و بعضی مقادیر $\delta > 0$، شرایط زیر برقرار باشد:

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{i=1}^{k_n} P\left(|X_{ni}| > \varepsilon\right) < \infty$.

(ii) $J \ge 2$ وجود دارد بطوری که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\sum_{i=1}^{k_n} EX^2_{ni} I\left(|X_{ni}| \le \delta\right)\right)^J < \infty$.

(iii) برای $n\to\infty$، $\sum_{i=1}^{k_n} EX_{ni}I\left(\left|X_{ni}\right|\le\delta\right)\to 0$.

آنگاه برای تمامی $\varepsilon>0$ داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n P\left(\left|\sum_{i=1}^{k_n} X_{ni}\right|>\varepsilon\right)<\infty$$

برای اثبات به سونگ و همکارانش (۲۰۰۵) مراجعه کنید.

**قضیه ۳.۳** (سونگ ۲۰۰۷) فرض کنید $\{X_n, n\ge 1\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی است که به متغیر تصادفی $X$ محدود شده باشد، بطوری که برای هر $p(t+\beta+1)>0$ و $p>0$، $E|X|^{p(t+\beta+1)}<\infty$ است. هم چنین اگر $\{a_{ni}, i\ge 1, n\ge 1\}$ یک آرایه کراندار از اعداد حقیقی باشد که برای بعضی مقادیر $q<p(t+\beta+1)$، رابطه (۶.۳) برقرار باشد، در اینصورت:

(i) اگر $0<p(t+\beta+1)<1$، آنگاه رابطه (۱.۳) برقرار است.

(ii) اگر $1\le p(t+\beta+1)<2$ و $\{X_n\}$ دنباله های مستقل با $EX_n=0$ باشند، آنگاه رابطه (۱.۳) برقرار است.

(iii) اگر $p(t+\beta+1)\ge 2$ و $\{X_n\}$ دنباله های مستقل با $EX_n=0$ باشند و برای بعضی مقادیر $\alpha<\frac{2}{p}$ رابطه زیر را داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}^2 = O(n^\alpha) \qquad (۸.۳)$$

آنگاه رابطه (۱.۳) برقرار است.

**اثبات**:

قسمت (i): ابتدا باید یادآوری کنیم که جمله سمت چپ رابطه (۱.۳) را بصورت زیر می توان نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} X_i I\left(|X_i| \le n^{1/p}\right)\right|}{n^{1/p}} > \varepsilon\right) + \sum_{n=1}^{\infty} n^t P\left(\frac{\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} X_i I\left(|X_i| > n^{1/p}\right)\right|}{n^{1/p}} > \varepsilon\right) \qquad (۹.۳)$$

جهت متناهی بودن رابطه (۱.۳) بایستی ثابت کنیم که جمله اول و جمله دوم عبارت بالا متناهی است.

برای جمله اول توجه کنید که برای هر $\delta > 0$ و $p(t+\beta+1)+\delta \le 1$ داریم :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(|X_i| \le n^{1/p}\right)\right| > \varepsilon\right)$$

با استفاده از قضیه ۴.۱ برای عبارت فوق داریم:

$$\le \frac{1}{\varepsilon^{p(t+\beta+1)+\delta}} \sum_{n=1}^{\infty} n^t E\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(|X_i| \le n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)+\delta}$$

عبارت فوق با استفاده از قضیه ۶.۱ بصورت زیر می شود:

$$\le \frac{1}{\varepsilon^{p(t+\beta+1)+\delta}} \sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left|n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(|X_i| \le n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)+\delta}$$

بنا بر قسمت (i) لم ۳.۳ داریم:

$$\le CE|X|^{p(t+\beta+1)} < \infty$$

بنابراین متناهی بودن جمله اول ثابت گردید. برای جمله دوم فرض کنید که $\delta > 0$ بطوری که $p(t+\beta+1)-\delta \ge q$ و $p(t+\beta+1)-\delta > 0$ باشند، در اینصورت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(|X_i| > n^{1/p}\right)\right| > \varepsilon\right)$$

با بکار بردن قضیه ۴.۱ برای عبارت فوق داریم

$$\le \frac{1}{\varepsilon^{p(t+\beta+1)-\delta}} \sum_{n=1}^{\infty} n^t E\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(|X_i| > n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)-\delta}$$

برای عبارت فوق با استفاده از قضیه ۶.۱ داریم:

$$\le \frac{1}{\varepsilon^{p(t+\beta+1)-\delta}} \sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left|n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(\left|X_i\right| > n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)-\delta}$$

بنا بر قسمت (ii) لم ۳.۳ داریم:

$$\le CE\left|X\right|^{p(t+\beta+1)} < \infty$$

با استفاده از رابطه فوق متناهی بودن جمله دوم نیز ثابت شد. بنابراین رابطه (۱.۳) به ازای $0 < p(t+\beta+1) < 1$ برقرار است.

قسمت (ii) اثبات این بخش هم در دو مرحله انجام می گیرد. مرحله اول شامل حالتی است که در آن $1 < p(t+\beta+1) < 2$ است. به همین منظور فرض می کنیم $\delta > 0$، بطوری که $p(t+\beta+1)+\delta \le 2$ باشد.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}\left(X_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right) - EX_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right)\right)\right| \Big/ n^{1/p} > \varepsilon\right) \qquad (۱۰.۳)$$

با استفاده از قضیه ۴.۱ داریم:

$$\le \frac{1}{\varepsilon^{p(t+\beta+1)+\delta}} \sum_{n=1}^{\infty} n^t E\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni}\left(X_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right) - EX_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right)\right)\right|^{p(t+\beta+1)+\delta}$$

بنا بر قضیه ۳.۱،

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left|n^{-1/p} a_{ni}\left(X_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right) - EX_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right)\right)\right|^{p(t+\beta+1)+\delta}$$

با استفاده از قضیه ۶.۱ برای عبارت فوق داریم:

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left|n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)+\delta}$$

$$+\left|En^{-1/p}a_{ni}X_iI\left(|X_i|\le n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)+\delta}$$

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^t\sum_{i=1}^{\infty}E\left|n^{-1/p}a_{ni}X_iI\left(|X_i|\le n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)+\delta}$$

$$\le CE|X|^{p(t+\beta+1)}<\infty$$

با توجه به قسمت (i) لم ۳.۳ عبارت فوق برقرار است. ازطرفی طبق فرض مسئله $EX_n=0$ می باشد، بنابراین از رابطه (۱۰.۳) نتیجه می شود:

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^tP\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty}n^{-1/p}a_{ni}X_iI\left(|X_i|\le n^{1/p}\right)\right|>\varepsilon\right)<\infty$$

عبارت فوق بیان می کند که جمله اول رابطه (۹.۳) متناهی می باشد.

اکنون فرض می کنیم که $\delta>0$ بطوری که $p(t+\beta+1)-\delta\ge q$ و $p(t+\beta+1)-\delta\ge 1$ باشد. آنگاه

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^tP\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}\left(X_iI\left(|X_i|>n^{1/p}\right)-EX_iI\left(|X_i|>n^{1/p}\right)\right)\right|\Big/n^{1/p}>\varepsilon\right) \qquad (۱۱.۳)$$

با استفاده از قضیه ۴.۱ داریم:

$$\le\frac{1}{\varepsilon^{p(t+\beta+1)-\delta}}\sum_{n=1}^{\infty}n^tE\left|\sum_{i=1}^{\infty}n^{-1/p}a_{ni}\left(X_iI\left(|X_i|>n^{1/p}\right)-EX_iI\left(|X_i|>n^{1/p}\right)\right)\right|^{p(t+\beta+1)-\delta}$$

با جایگزین کردن قضیه ۳.۱ برای عبارت فوق داریم:

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^t\sum_{i=1}^{\infty}E\left|n^{-1/p}a_{ni}\left(X_iI\left(|X_i|>n^{1/p}\right)-EX_iI\left(|X_i|>n^{1/p}\right)\right)\right|^{p(t+\beta+1)-\delta}$$

با استفاده از قضیه ۶.۱ برای عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty}n^t\sum_{i=1}^{\infty}E\left|n^{-1/p}a_{ni}X_iI\left(|X_i|>n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)-\delta}$$

$$+\left|En^{-1/p}a_{ni}X_iI\left(|X_i|>n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)-\delta}$$

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left|n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(\left|X_i\right| > n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)-\delta}$$

$$\le CE\left|X\right|^{p(t+\beta+1)} < \infty$$

با توجه به قسمت (ii) لم ۳.۳ عبارت فوق برقرار است. ازطرفی چون $EX_n = 0$ است با جایگزین کردن آن در رابطه (۱۱.۳) داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(\left|X_i\right| > n^{1/p}\right)\right| > \varepsilon\right) < \infty$$

عبارت فوق بیانگر این است که جمله دوم رابطه (۹.۳) متناهی است. بنابراین رابطه (۱.۳) به ازای $1 < p(t+\beta+1) < 2$، برقرار است.

اکنون مرحله دوم را در نظر می گیریم که شامل حالتی است که در آن $p(t+\beta+1) = 1$ می باشد. فرض کنید $\varepsilon > 0$ باشد با استفاده از لم ۱.۳ می توان گفت که برای همه $b > 0$ و $n \ge 1$، مقدار مثبت $D_1 > 0$ وجود دارد بطوری که:

$$E\left|X_n\right| I\left(\left|X_n\right| > b\right) \le D_1 E\left|X\right| I\left(\left|X\right| > b\right) \qquad (۱۲.۳)$$

رابطه (۶.۳) ایجاب می کند که برای همه $n \ge 1$، مقدار مثبت $D_2 > 0$ وجود دارد بطوری که

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left|a_{ni}\right| \le D_2 n^{\beta} \qquad (۱۳.۳)$$

از طرفی

$$E\left|X\right| = E\left|X\right|^{p(t+\beta+1)} < \infty$$

بنابراین یک $M > 0$، وجود دارد بطوری که

$$E\left|X\right| I\left(\left|X\right| > M\right) \le \frac{\varepsilon}{4D_1 D_2} \qquad (۱۴.۳)$$

برای $n^{1/p} \ge M$، با استفاده از رابطه (۱۲.۳) داریم:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni} EX_i I\left(\left|X_i\right| > n^{1/p}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{\infty}\left|n^{-1/p} a_{ni} EX_i I\left(\left|X_i\right| > n^{1/p}\right)\right|$$

$$\leq D_1 n^{-1/p} E\left|X\right| I\left(\left|X\right| > n^{1/p}\right)\sum_{i=1}^{\infty}\left|a_{ni}\right|$$

با بکار بردن رابطه (۱۳.۳)،

$$\leq D_1 D_2 n^{-1/p} n^{\beta} E\left|X\right| I\left(\left|X\right| > n^{1/p}\right)$$

در نهایت با جایگزینی رابطه (۱۴.۳) عبارت فوق بصورت زیر در می آید.

$$\leq n^{\beta-1/p}\frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

به ازای $p\left(t+\beta+1\right)=1$ و $t \geq -1$ می توان گفت که $\beta - 1/p \leq 0$، در نتیجه رابطه فوق برقرار است. بنابراین

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni} EX_i I\left(\left|X_i\right| > n^{1/p}\right)\right| \leq \frac{\varepsilon}{4} \tag{۱۵.۳}$$

اکنون فرض می کنیم که $n_0$ای وجود دارد بطوری که $n_0^{1/p} \geq M$ باشد. بنابراین:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^t P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni} X_i\right| > \varepsilon\right)$$

$$\leq \sum_{n=n_0}^{\infty} n^t P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni}\left(X_i I\left(\left|X_i\right| \leq n^{1/p}\right) - EX_i I\left(\left|X_i\right| \leq n^{1/p}\right)\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$+\sum_{n=n_0}^{\infty} n^t P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni}\left(X_i I\left(\left|X_i\right| > n^{1/p}\right) - EX_i I\left(\left|X_i\right| > n^{1/p}\right)\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

با استفاده از رابطه (۱۵.۳) در عبارت فوق داریم:

$$\leq \sum_{n=n_0}^{\infty} n^t P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni}\left(X_i I\left(\left|X_i\right| \leq n^{1/p}\right) - EX_i I\left(\left|X_i\right| \leq n^{1/p}\right)\right)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$+\sum_{n=n_0}^{\infty} n^t P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(|X_i| > n^{1/p}\right)\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right) =: I + II \ .$$

مشابه اثباتی که برای رابطه (۱۰.۳) بکار بردیم، می توان برای $I$ نیز استفاده کرد. که در اینجا بدلیل تکراری بودن از آن خودداری می کنیم. در نهایت به عبارت

$$I \le CE|X|^{p(t+\beta+1)} < \infty$$

می توان رسید. اکنون برای اینکه ثابت کنیم $II$ متناهی است فرض می کنیم که $\delta > 0$، بطوری که $p(t+\beta+1)-\delta \ge q$ و $p(t+\beta+1)-\delta > 0$ باشد. در اینصورت با استفاده از قسمت (ii) لم ۳.۳ داریم:

$$II \le C\sum_{n=n_0}^{\infty} n^t E\left|\sum_{i=1}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(|X_i| > n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)-\delta}$$

$$\le C\sum_{n=n_0}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left|n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(|X_i| > n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)-\delta}$$

$$\le CE|X|^{p(t+\beta+1)} < \infty$$

بنابراین برای $p(t+\beta+1)=1$، رابطه (۱.۳) ثابت گردید.

قسمت (iii) فرض کنید برای $i \ge 1$ و $n \ge 1$،

$$U_{ni} = n^{-1/p} a_{ni}\left(X_i I\left(|X_i| \le n^{1/p}\right) - EX_i I\left(|X_i| \le n^{1/p}\right)\right),$$

$$V_{ni} = n^{-1/p} a_{ni}\left(X_i I\left(|X_i| > n^{1/p}\right) - EX_i I\left(|X_i| > n^{1/p}\right)\right),$$

باشند. می خواهیم شرایط قضیه ۳. ۲ را برای متغیر تصادفی $U_{ni}$ بررسی می کنیم.

مشابه روش اثبات قسمت (ii) قضیه ۳.۳ عمل می کنیم که در اینجا بدلیل تکراری بودن از آن خودداری می کنیم و در نهایت بر اساس لم ۳.۳ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} P\left(|U_{ni}| > \varepsilon\right)$$

$$\le C\sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left|n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)+\delta}$$

$$\le CE\left|X\right|^{p(t+\beta+1)} < \infty$$

از طرفی چون که $2/p > \alpha$ است، می توان بیان کرد که یک $J \ge 2$ وجود دارد بطوری که برای $J\left(2/p-\alpha\right)-t > 1$ داشته باشیم

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t \left(\sum_{i=1}^{\infty} EU_{ni}^2 I\left(\left|U_{ni}\right| \le 1\right)\right)^J$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^t \left(\sum_{i=1}^{\infty} EU_{ni}^2\right)^J$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^t \left(\sum_{i=1}^{\infty} n^{-2/p} a_{ni}^2 EX_i^{\,2} I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right)\right)^J$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^t \left(\sum_{i=1}^{\infty} n^{-2/p} a_{ni}^2 EX_i^{\,2}\right)^J$$

با جایگزینی رابطه (۸.۳) در عبارت فوق داریم:

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} n^t \left(CEX^2 n^{\alpha-2/p}\right)^J$$

$$= CEX^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{t+J(\alpha-2/p)} < \infty$$

رابطه فوق برقرار است، زیرا که $J\left(\alpha-2/p\right)+t < -1$ می باشد. بنابراین قسمت (ii) قضیه ۲.۳ برقرار است.

برای اثبات قسمت (iii) چون $EU_{ni}=0$، به ازای $2/p > \alpha$ ، داریم :

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty} EU_{ni} I\left(\left|U_{ni}\right| \le 1\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} EU_{ni} I\left(\left|U_{ni}\right| > 1\right)\right|$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} E\left|U_{ni}\right| I\left(\left|U_{ni}\right| > 1\right)$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} E\left|U_{ni}\right|^2 I\left(\left|U_{ni}\right| > 1\right)$$

$$\le \sum_{i=1}^{\infty} E\left|U_{ni}\right|^2 \le \frac{1}{n^{2/p}} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}^2 EX^2{}_i$$

با استفاده از رابطه (۸.۳) برای عبارت فوق داریم:

$$\le C \frac{n^{\alpha}}{n^{2/p}} EX^2 \to 0$$

قسمت (iii) قضیه ۲.۳ نیز برقرار است.

بنابراین با استفاده از قضیه۲.۳ می توان بیان کرد که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t P\left(\left|\sum_{i=}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni} \left(X_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right) - EX_i I\left(\left|X_i\right| \le n^{1/p}\right)\right)\right| > \varepsilon\right) < \infty \qquad (۱۶.۳)$$

اکنون شرایط قضیه ۲.۳ را برای متغیر تصادفی $V_{ni}$ بکار می بریم.

فرض کنید $\delta > 0$، بطوری که $p(t+\beta+1)-\delta \ge q$ و $p(t+\beta+1)-\delta > 0$ باشد.

شیوه اثبات قسمت (i) شبیه قسمت (ii) قضیه ۳.۳ است از تکرار آن اجتناب می کنیم. در نهایت بر اساس لم ۳.۳ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} P\left(\left|V_{ni}\right| > \varepsilon\right)$$

$$\le C \sum_{n=1}^{\infty} n^t \sum_{i=1}^{\infty} E\left|n^{-1/p} a_{ni} X_i I\left(\left|X_i\right| > n^{1/p}\right)\right|^{p(t+\beta+1)-\delta}$$

$$\le CE\left|X\right|^{p(t+\beta+1)} < \infty$$

بنابراین قسمت (i) قضیه ۲.۳ برقرار است. اثبات قسمت (ii) و (iii) قضیه ۲.۳ برای متغیر تصادفی $V_{ni}$ شبیه اثبات متغیر تصادفی $U_{ni}$ است. از اثبات آن صرف نظر می کنیم.

بنابراین طبق قضیه ۲.۳

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^t P\left(\left|\sum_{i=}^{\infty} n^{-1/p} a_{ni}\left(X_i I\left(|X_i|>n^{1/p}\right)-EX_i I\left(|X_i|>n^{1/p}\right)\right)\right|>\varepsilon\right)<\infty \qquad (۱۷.۳)$$

از طرفی چون $EX_n=0$است، رابطه (۱۶.۳) و (۱۷.۳) را می توان بصورت جمله اول و جمله دوم رابطه (۹.۳) در نظر گرفت که متناهی اند. بنابراین رابطه (۱.۳) به ازای $p(t+\beta+1)\geq 2$ برقرار است و اثبات قضیه تکمیل گردید. □

قضیه زیر نشان می دهد که اگر شرط گشتاوری را در قضیه ۳.۳ با شرط قویتر

$E|X|^{p(t+\beta+1)}\log|X|<\infty$، جایگزین کنیم. آنگاه شرط (۶.۳) بر روی وزن ها با شرط ضعیف تر

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}|^{p(t+\beta+1)}=O\left(n^{\beta}\right) \qquad (۱۸.۳)$$

جایگزین می شود.

**قضیه ۴.۳** (سونگ ۲۰۰۷) فرض کنید که $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی باشد که به متغیر تصادفی $X$ محدود شده باشد. به ازای $p(t+\beta+1)>0$ و $p>0$، $E|X|^{p(t+\beta+1)}\log|X|<\infty$ باشد. هم چنین اگر $\{a_{ni}, i\geq 1, n\geq 1\}$ آرایه کراندار از اعداد حقیقی که در رابطه (۱۸.۳) صدق می کند. در اینصورت:

i ) اگر $0<p(t+\beta+1)<1$ باشد، آنگاه رابطه (۱.۳) برقرار است.

ii )اگر $1\leq p(t+\beta+1)<2$ و $\{X_n\}$ دنباله های مستقل با $EX_n=0$ باشند، آنگاه رابطه (۱.۳) برقرار است.

iii) اگر $p(t+\beta+1)\geq 2$ و $\{X_n\}$دنباله های مستقل با $EX_n=0$ باشند و برای بعضی مقادیر $\alpha<\frac{2}{p}$، داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}^2 = O(n^{\alpha})$$

آنگاه رابطه (۱.۳) برقرار است.

اثبات این قضیه مشابه قضیه ۳.۳ می باشد که بدلیل تکراری بودن از اثبات آن صرف نظر می کنیم .

با استفاده از قضایای بالا می توان نتایج معروف زیادی را بیان کرد. از جمله نتیجه ۱.۳ و ۲.۳ که توسط لای [۳۵]و همکارانش (۱۹۹۵) ثابت شده بود.

**نتیجه ۱.۳** (لای ۱۹۹۵) فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی .i.i.d با $EX_1=0$ و $E|X_1|^2\log|X|<\infty$ باشند. اگر $\{a_{ni}, i\geq 1, n\geq 1\}$ آرایه از اعداد حقیقی باشد که در آن

$$\sum_{i=1}^{\infty} a^2{}_{ni} = O(1).$$

آنگاه برای همه $\varepsilon>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}X_i\right| \Big/ n^{1/2} > \varepsilon\right) < \infty$$

**اثبات:**

فرض کنید که $t=0$ و $\beta=0$ و $p=2$ است. در اینصورت $|a_{ni}|=O(1)$.می باشد بنابراین نتیجه با استفاده از قسمت (iii) قضیه ۴.۳ ثابت می شود. □

[۳۵] Li

**نتیجه ۲.۳** (لای ۱۹۹۵) فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی .i.i.d باشند با $EX_1=0$ و برای بعضی مقادیر $p>0$ ، $E|X_1|^p<\infty$ باشد. هم چنین فرض کنید که $\{a_{ni}, i\geq 1, n\geq 1\}$ آرایه از اعداد حقیقی که در رابطه (۸.۳) ذکر شده باشند. اگر برای بعضی مقادیر $2\leq q<p$ ،

$$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}|^q=O(1)$$

باشد. آنگاه برای همه $\varepsilon>0$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}X_i\right|\Big/n^{1/p}>\varepsilon\right)<\infty$$

**اثبات:**

به ازای $\beta=0$ رابطه (۶.۳) بصورت $\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}|^q=O(1)$ می باشد و هم چنین به ازای $t=0$ شرایط فوق در قسمت (iii) قضیه۳.۳ صدق می کند. □

**نتیجه ۳.۳** (سونگ ۲۰۰۷) فرض کنید $\{X_n, n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی .i.i.d باشند. اگر برای $1\leq i\leq n$، $a_{ni}=1$ و برای $i>n$، $a_{ni}=0$ باشد. در اینصورت بر اساس شرط (۶.۳) و (۸.۳)، وزن ها بصورت

$$\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}^2=n \qquad \text{و} \qquad \sum_{i=1}^{\infty}|a_{ni}|^q=n$$

می باشند. از طرفی شرط گشتاوری بر روی $X$، $E|X|^{p(t+2)}<\infty$ است. بنابراین به ازای $\alpha=\beta=1$ رابطه ۱.۳ برقرار است.

**نتیجه ۴.۳** (سونگ ۲۰۰۷) فرض کنید $\{X_n, -\infty < n < \infty\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل با میانگین صفر هستند، که به متغیر تصادفی $X$ محدود شده اند، بطوری که برای بعضی مقادیر $0 < p < 2$ و $p(t+2) > 1$، $E|X|^{p(t+2)} < \infty$ باشد. هم چنین فرض کنید $\{a_n, -\infty < n < \infty\}$ یک دنباله از اعداد حقیقی است، بطوری که $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$ و برای هر $i$ و $n$، $a_{ni} = \sum_{j=i+1}^{i+n} a_j$ باشد. آنگاه برای هر $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left( \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_{ni} X_i \right| \Big/ n^{1/p} > \varepsilon \right) < \infty.$$

**اثبات:**

چون $|a_{ni}| \le \sum_{j=i+1}^{i+n} |a_j| = O(1)$، خواهیم داشت:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ni}| \le \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{i+n} |a_j| \le n \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_j| = O(n)$$

و

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} {a_{ni}}^2 \le C \sum_{i=-\infty}^{\infty} |a_{ni}| = O(n)$$

با قرار دادن $\beta = 1$ و $q = 1$، نتایج فوق از قسمت (ii) و (iii) قضیه ۳.۳ پیروی می کند. □

## ۳-۳ نتایج جدید قانون قوی برای مجموع وزنی ازمتغیرهای تصادفی هم توزیع و فاقد گشتاور

فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع باشند با مجموع وزنی $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i$، باشد که در آن $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq n, n \geq 1\}$ یک آرایه از اعداد حقیقی است. هم چنین فرض کنید $\{b_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت باشند که به سمت بی نهایت میل کند $(b_n \uparrow \infty)$. در این بخش ثابت می کنیم که تحت شرایطی SLLN برای مجموع وزنی از متغیرهای تصادفی هم توزیع و فاقد گشتاور برقرار است. یعنی:

$$\frac{S_n}{b_n} \xrightarrow{a.s.} 0 \tag{۱۹.۳}$$

بدین منظور قضایای زیر را بیان و به اثبات آنها می پردازیم و در ادامه آنها مثال هایی را بیان خواهیم کرد.

**قضیه ۵.۳** ⁕⁕ فرض کنید $n \geq 1$ و $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i$، که در آن $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع اند. هم چنین $\{n_i, i \geq 1\}$ یک دنباله اکیداً افزایشی ازاعداد صحیح مثبت و $\{a_{ki}, n_{j-1} \leq k \leq n_j, 1 \leq i \leq k, j \geq 1\}$ یک آرایه از اعداد حقیقی باشند، با

$$0 < A_k \leq |a_{ki}| \leq B_k \tag{۲۰ .۳}$$

در رابطه فوق $A_k$ و $B_k$ ثابت هایی هستند که به $k$ بستگی دارند. هم چنین فرض کنید $\{b_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت باشند، بطوری که برای هر دنباله اکیداً افزایشی از اعداد صحیح مثبت $\{n_i, i \geq 1\}$، رابطه زیر را داشته باشیم

$$0 < a = \inf_i b_{n_i} b_{n_{i+1}}^{-1} \leq \sup_i b_{n_i} b_{n_{i+1}}^{-1} = c < 1 \qquad (۲۱.۳)$$

اگر

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} n_j P(b_{n_{j-1}} < | a_{ni} X_1 | \leq b_{n_j}) < \infty \qquad (۲۲.۳)$$

و

$$\sum_{s=1}^{\infty} n_s P\left( b_{n_{s-1}} < |X_1| \leq b_{n_s} \right) < \infty \qquad (۲۳.۳)$$

و

$$\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j} kP\left( \frac{b_{n_{s-1}}}{B_k} < |X_1| \leq \frac{b_{n_s}}{A_k} \right) = O\left( n_j P\left( b_{n_{s-1}} < |X_1| \leq b_{n_s} \right) \right) \qquad (۲۴.۳)$$

هم چنین،

$$\sum_{j=s}^{\infty} n_j c^j = O\left( n_s c^s \right) \qquad (۲۵.۳)$$

آنگاه می توان گفت رابطه (۱۹.۳) برقرار است.

**تبصره ۱.۳** با استدلالی مشابه تبصره ۲.۲ می توان از رابطه (۲۲.۳) نتیجه گرفت که:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} P\left( |a_{ni} X_1| > b_n \right)$$

$$< \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} n_j P(b_{n_{j-1}} < | a_{ni} X_1 | \leq b_{n_j}) < \infty$$

بنابراین :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} P\left(\left|a_{ni}X_1\right| > b_n\right) < \infty \tag{۲۶.۳}$$

**اثبات قضیه ۵.۳:**

رابطه (۱۹.۳) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(۱۹.۳)\ :\ \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ni}X_i\right| I\left(\left|a_{ni}X_i\right| > b_i\right) + \frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ni}X_i\right| I\left(\left|a_{ni}X_i\right| \le b_i\right) \xrightarrow{a.s.} 0$$

برای اینکه رابطه (۱۹.۳) برقرار باشد، کافیست ثابت کنیم جمله اول و جمله دوم عبارت سمت راست بالا به صفر میل می کند. بنابراین مشابه استدلالی که برای قضیه ۷.۲ بکار بردیم، برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که رابطه زیر برقرار است.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} E\left|a_{ni}X_1\right| I\left(\left|a_{ni}X_1\right| \le b_n\right) < \infty \tag{۲۷.۳}$$

توجه کنید:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n} E\left|a_{ni}X_1\right| I\left(\left|a_{ni}X_1\right| \le b_n\right)\\
&\le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_{n_{j-1}}}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j}\sum_{i=1}^{k} E\left|a_{ki}X_1\right| I\left(\left|a_{ki}X_1\right| \le b_{n_j}\right)\\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{b_{n_{j-1}}}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j}\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{j} E\left|a_{ki}X_1\right| I\left(b_{n_{s-1}} < \left|a_{ki}X_1\right| \le b_{n_s}\right)\\
&\le \sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_{n_s}}{b_{n_{j-1}}}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j}\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{j} P\left(b_{n_{s-1}} < \left|a_{ki}X_1\right| \le b_{n_s}\right)
\end{aligned}$$

با استفاده از رابطه (۲۱.۳) داریم:

$$\leq \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_{n_s}}{b_{n_j}}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j}\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{j}P\left(b_{n_{s-1}}<\left|a_{ki}X_1\right|\leq b_{n_s}\right) \tag{۲۸.۳}$$

لازم است یادآوری کنیم که از رابطه (۲۱.۳) می توان عبارت زیر را برای تمامی $k \geq s$ بدست آورد:

$$\frac{b_{n_s}}{b_{n_j}}=\prod_{k=s}^{j-1}\frac{b_{n_k}}{b_{n_{k+1}}}\leq c^{j-s}$$

بنابراین با جایگزین کردن عبارت فوق در رابطه (۲۸.۳) داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}\sum_{i=1}^{n}E\left|a_{ni}X_1\right|I\left(\left|a_{ni}X_1\right|\leq b_n\right)$$

$$\leq \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{\infty}c^{j-s}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j}\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{j}P\left(b_{n_{s-1}}<\left|a_{ki}X_1\right|\leq b_{n_s}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{\infty}c^{j}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j}\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{j}c^{-s}P\left(b_{n_{s-1}}<\left|a_{ki}X_1\right|\leq b_{n_s}\right)$$

با بکار بردن رابطه (۲۰.۳) در عبارت فوق خواهیم داشت:

$$=\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{\infty}c^{j}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j}\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{j}c^{-s}P\left(\frac{b_{n_{s-1}}}{B_k}<\left|X_1\right|\leq \frac{b_{n_s}}{A_k}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{\infty}c^{j}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j}k\sum_{s=1}^{j}c^{-s}P\left(\frac{b_{n_{s-1}}}{B_k}<\left|X_1\right|\leq \frac{b_{n_s}}{A_k}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{\infty}c^{j}\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j}k\sum_{s=1}^{j}c^{-s}P\left(\frac{b_{n_{s-1}}}{B_k}<\left|X_1\right|\leq \frac{b_{n_s}}{A_k}\right)$$

با جایگزینی رابطه (۲۴.۳) عبارت بالا بصورت زیر در می آید:

$$\leq \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{\infty}n_j c^{j}\sum_{s=1}^{j}c^{-s}P\left(b_{n_{s-1}}<\left|X_1\right|\leq b_{n_s}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{s=1}^{\infty}c^{-s}P\left(b_{n_{s-1}}<\left|X_1\right|\leq b_{n_s}\right)\sum_{j=s}^{\infty}n_j c^{j}$$

با استفاده رابطه (۲۵.۳) عبارت فوق بصورت زیر می شود:

$$\leq \frac{1}{a}\sum_{s=1}^{\infty} n_s P\left(b_{n_{s-1}} < \left|X_1\right| \leq b_{n_s}\right) < \infty$$

عبارت فوق با استفاده از رابطه (۲۳.۳) حاصل شده است. بنابراین رابطه (۲۷.۳) برقرار و اثبات قضیه کامل شد. □

در همین راستا به ارائه مثالی می پردازیم که تمامی شرایط موجود در قضیه فوق را داراست .

**مثال ۱.۳**** فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع اند با:

$$f(x) = \frac{M}{x^2 \ln x}$$

بطوری که $x > 3$ و $M$ مقدار ثابت باشد. هم چنین فرض کنید که $n_i = 2^i$ و برای $\beta > 1$، $b_n = n^2(\ln n)^\beta$ باشد. در اینصورت برای $\beta > 1$ و $i \geq 1$ تحت رابطه (۲۱.۳) داریم:

$$\frac{b_{n_i}}{b_{n_{i+1}}} = \frac{i^\beta}{4(i+1)^\beta} \leq \frac{1}{4} = c$$

هم چنین رابطه (۲۵.۳) برقرار است. زیرا:

$$\sum_{i=j}^{\infty} n_i c^i = \sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{2^i} \approx \frac{1}{2^j} = O\left(\frac{1}{2^j}\right)$$

فرض کنید $A_k = \frac{1}{k^{3/4}}$ و $B_k = \frac{1}{k^{1/2}}$، بطوری که $\frac{1}{k^{3/4}} \leq |a_{ki}| < \frac{1}{k^{1/2}}$، باشد.

در اینصورت برای $\beta > 1$، سری ذکر شده در رابطه (۲۴.۳) متناهی است. زیرا:

$$\sum_{k=2^{j-1}}^{2^j} kP\left(k^{1/2}2^{2s-2}\left((s-1)\ln 2\right)^\beta < |X_1| \leq k^{3/4}2^{2s}(s\ln 2)^\beta\right)$$

$$\leq C\sum_{k=2^{j-1}}^{2^j} \frac{k}{k^{3/2}2^{4s}(s\ln 2)^{2\beta}\left[\frac{3}{4}\ln k + 2s\ln 2 + \beta\ln(s\ln 2)\right]}$$

$$\le C\sum_{k=2^{j-1}}^{2^j}\frac{1}{k^{1/2}\ln k}<C\frac{\left(2^j\right)^{\frac{1}{2}}}{j\ln 2}$$

$$=O\left(2^j P\left(2^{2s-2}\left((s-1)\ln 2\right)^{\beta}<\left|X_1\right|\le 2^{2s}\left(s\ln 2\right)^{\beta}\right)\right)$$

هم چنين رابطه (۲۳.۳) نيز برقرار است. چون براي $\beta>1$ ، داريم :

$$\sum_{s=1}^{\infty}n_s P\left(b_{n_{s-1}}<\left|X_1\right|\le b_{n_s}\right)$$

$$\sum_{s=1}^{\infty}2^s P\left(2^{2s-2}\left((s-1)\ln 2\right)^{\beta}<\left|X_1\right|\le 2^{2s}\left(s\ln 2\right)^{\beta}\right)$$

$$\le C\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{2^s\left(s\ln 2\right)^{2\beta}\left[2s\ln 2+\beta\ln\left(s\ln 2\right)\right]}$$

$$<C\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s^{\beta}\ln s}<\infty$$

رابطه فوق به ازاي $\beta>1$ يرقرار است، در نهايت رابطه (۲۲.۳) برقرار است.

به ازاي $\beta>1$ ، داريم:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n}n_j P(b_{n_{j-1}}<|a_{ni}X_1|\le b_{n_j})$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}2^j\sum_{i=1}^{n}P\left(n^{1/2}2^{2j-2}\left((j-1)\ln 2\right)^{\beta}<\left|X_1\right|\le n^{3/4}2^{2j}\left(j\ln 2\right)^{\beta}\right)$$

$$\le C\sum_{j=1}^{\infty}2^j\frac{1}{n^{1/2}2^{3j}\left(j\ln 2\right)^{2\beta}\left[\frac{1}{4}\ln k+2j\ln 2+\beta\ln\left(j\ln 2\right)\right]}$$

$$<C\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^{\beta}\ln j}<\infty$$

رابطه فوق به ازاي $\beta>1$ يرقرار است، بنابراين رابطه (۱۹.۳) برقرار است. هرچند كه

$$E\left|X_1\right|=\int_3^{\infty}\frac{M}{x\ln x}dx=\infty$$

می باشد.

**قضیه ۶.۳**** فرض کنید $n \geq 1$ و $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i$ که در آن $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی هم توزیع اند. هم چنین $\{n_i, i \geq 1\}$ یک دنباله اکیداً افزایشی ازاعداد صحیح مثبت و $\{a_{ni}, 1 \leq i \leq k, 1 \leq k \leq n_j, j \geq 1\}$ یک آرایه از اعداد حقیقی باشد، که برای $\beta > \frac{1}{\alpha^2}$ و بعضی مقادیر $0 < \alpha < 1$ داشته باشیم :

$$\sum_{k=n_{j-1}}^{n_j} \sum_{i=1}^{k} |a_{ki}|^{\alpha} = O\left(\left(\log n_j\right)^{\alpha\beta - \frac{1}{\alpha}}\right) \tag{۲۹.۳}$$

فرض کنید $\{b_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی مثبت است، بطوری که به ازای $0 < \alpha < 1$ و بعضی مقادیر $\beta > 0$، $b_n = n^{\frac{1}{\alpha}} (\log n)^{\beta}$ باشد. هم چنین فرض کنید که برای $0 < \alpha < 1$، $E|X_1|^{\alpha} < \infty$ باشد اگر رابطه (۲۲.۳) برقرار باشد، آنگاه رابطه (۱۹.۳) برقرار است.

**اثبات:**

با استدلالی مشابه قضیه قبل عمل می کنیم. از تکرار قسمت اول آن خودداری می کنیم. بنابراین برای اثبات قضیه کافی است که عبارت زیر را ثابت کنیم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|a_{ni} X_i| I\left(|a_{ni} X_1| \leq b_n\right)\right) < \infty \tag{۳۰.۳}$$

توجه کنید که برای $0 < \alpha < 1$ داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n} E\left(|a_{ni} X_1| I\left(|a_{ni} X_1| \leq b_n\right)\right)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{b_{n_{j-1}}} \sum_{k=n_{j-1}}^{n_j} \sum_{i=1}^{k} E\left(|a_{ki} X_1| I\left(|a_{ki} X_1| \leq b_{n_j}\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=n_{j-1}}^{n_j} \sum_{i=1}^{k} E\left|\frac{a_{ki}X_1}{b_{n_{j-1}}}\right| I\left(\left|\frac{a_{ki}X_1}{b_{n_{j-1}}}\right| \le 1\right)$$

$$\le \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=n_{j-1}}^{n_j} \sum_{i=1}^{k} E\left|\frac{a_{ki}X_1}{b_{n_{j-1}}}\right|^{\alpha}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E|X|^{\alpha}}{b_{n_{j-1}}^{\alpha}} \sum_{k=n_{j-1}}^{n_j} \sum_{i=1}^{k} |a_{ki}|^{\alpha}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{E|X|^{\alpha}}{n_j \left(\log n_j\right)^{\alpha\beta}} \sum_{k=n_{j-1}}^{n_j} \sum_{i=1}^{k} |a_{ki}|^{\alpha}$$

با استفاده از رابطه (۲۹.۳) برای عبارت فوق داریم :

$$\le E|X|^{\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n_j \left(\log n_j\right)^{\frac{1}{\alpha}}} < \infty$$

بنابراین رابطه (۳۰.۳) متناهی و اثبات قضیه کامل گردید. □

## ۴-۳ نتیجه گیری

در این رساله با فرض اینکه $\{X_n, n \geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی و دنباله های $\{a_{ni}\}$ وزن های مربوطه باشند، شرایطی را ارائه دادیم که تحت آن شرایط قانون قوی اعداد بزرگ برای مجموع وزنی $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ni} X_i$ و مجموع جزئی $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ از متغیرهای تصادفی برقرار است. البته لازم است، یادآوری کنیم که برای متغیرهای تصادفی فرض نکردیم گشتاور متناهی وجود دارند. هم چنین برقراری این قانون را تحت شرایط مختلفی از متغیرهای تصادفی از جمله هم توزیع بودن، مستقل بودن،... مورد بررسی قرار دادیم. با توجه به نتایج بدست آمده در این رساله و موضوعات مطرح شده می توان بر روی موارد زیر تحقیق کرد.

- ✓ بررسی های انجام شده در تمام این فصل ها را با در نظر گرفتن شرایط دیگری از متغیرهای تصادفی ازجمله ایستا بودن، همبستگی منفی و... می توان مجدداً انجام داد.
- ✓ با توجه به نتایج فصل ۳، در خصوص شرایط وزنی بر روی متغیرهای تصادفی، مسئله را می توان مورد بررسی قرار داد.
- ✓ در نهایت می توان مطالب ارائه شده در فصل های مختلف این مجموعه را از لحاظ برقراری قانون ضعیف اعداد بزرگ، مجدداً بازبینی نمود.

# مراجع

[1]. Bai ZD, Cheng PE., 2000. Marcinkiewicz strong laws for linear statistics. Stat Probab Lett 46: 105-112.

[2]. Chatterji, S.D., 1970. A general strong law. Invent . Math .9, 235-245.

[3]. Feller , W., 1946. A limit theorem for random variables with infinite moments. Amer. J. Math. 68, 257-262.

[4]. Feller, W., 1971. An Introduction to probability Theory and its Applications, Vol. II, 2nd ed. John Wiley, New York.

[5]. Gut, A., 1944. Probability A Graduate course. Springer texs in statistics.

[6]. Jajte, R., 2003. On the strong law of large numbers. Ann. Probab. 31, 409-412.

[7]. Knopp, K., 1951. Theory and Application of Infinit Series, 2nd English ed. Blackie and Son, London.

[8]. Kolmogoroff, A., 1930. Sur la loi forte des grands nombres. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. Math. 191, 910-912.

[9]. Li, D., Rao., M.B., Jiang, T., Wang, X., 1995. Complete convergence and almost sure convergence of weighted sums of  random variables. J. Theoret. Probab. 8, 49-76.

[10]. Loeve, M., 1951. On almost sure convergence, Proc. 2nd Berkeley Symposium on Math. Statist. And  Probab., Univ. Calif. Press, pp. 279-303.

[11]. Maller, R.A., 1980. On the law of large numbers for stationary sequence. Stochastic Process. Appl. 10, 65-73.

[12]. Marcinkiewicz, J., Zygmund, A., 1937. Sur les fonctions independantes. Fund. Math. 29, 60-90.

[13]. Martikainen, A.I., Petrov, V.V., 1980. On a theorem of Feller. Teor. Veroyatnost. I Primenen. 25, 194-197 (in Russian). English translation in Theory Probab. Ppl. 25,191-193.

[14]. Nezakati, A., 2005. A note on the strong law of large numbers for associated sequences. International Mathematics and Mathematical Science 19, 3195-3198.

[15]. Nezakati, A., 2005. A note on the strong law of large numbers for NA sequences. Pak.J.Statist. 21(2), 285-288.

[16]. Petrov, V.V., 1969. On the strong law of large numbers, Theory Probab. Applications, 14, pp. 183-192.

[17]. Petrov, V.V., 1973. The order of growth of dependent random variables. Teor. Veroyatnost. I Primenen. 18, 358-361(in Russian). English translation in Theory Probab. Appl. 18, 348-350.

[18]. Rosalsky, A., 1987. A strong law for a set-indexed partial sum process with applications to exchangeable and stationary sequence. Stochastic Process Appl. 26, 277-287.

[19]. Rosalsky, A., 1993. On the almost certain limiting behavior of normed sums of identically distributed positive random variables. Statist. Probab .Lett. 16, 65-70.4

[20]. Rosalsky, A., Stoica, G., 2010. On the strong law of large numbers for identically distributed random variables. . Stat Probab Lett. 80, 1265-1270.

[21]. Ross,S.M., 1994. A First Course in Probability, 4nd Edition, Macmillan.

[22]. Saywer, S., 1966. Maximal inequalities of weak type. Ann. Of Math. 84, 157-174.

[23]. Sung, S.H., Volodin, A.I., Hu, T.-C., 2005.More on complete convergence for arrays. Statict. Probab. Lett. 71, 303-311.

[24]. Sung, S.H., 2007. Complete convergence for weighted sums of random variable. Statist. Probab. Lett. 77, 303-311.

# Abstract

The most important theoretical results in probability theory, limit theorems, which are the most important cases as the law of large numbers or central limit theorems have been classified. As the law of large numbers of cases are associated with the conditions under which conditions Mean a sequence of random variables converge to their average mathematics have hope. (With the assumption that at least they have a finite first moment). Many researchers have conducted research to improve the law of large numbers. Finally, these studies were able to show two forms of the law of large numbers. As with the "strong" and the "weak" are known. In this thesis, we get the strong law of large numbers in the case of variables with identically distribution and none- moment. This thesis contains three chapters are the contents of each chapter consist of:

- In Chapter 1, Introduction, overview of the history of the subject and the basic definitions and fundamental theorems and lemma are given.
- In Chapter 2, the strong law of large numbers for partial sum of identically distribution of random variables and none- moment is given.
- In Chapter 3, the strong law of large numbers for weighted sum of random variables is given and in the end chapter, Conclusion and references are made.

Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences
M.Sc Thesis

# Limit Theorems For None-moment Random Variables

Manizhe Shokri

Supervisor:
Dr. Ahmad Nezakati Rezazadeh

Advisor:
Mr. Seyed Reza Musawi

July 2011