

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



دانشکده علوم ریاضی

رشته آمار، گرایش آمار ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد

مدل رگرسیون خطی فازی استوار بر اساس روش حداقل میانہ مربعات

نگارنده: نسرين فلاحتي نژاد

استاد راهنما

دکتر محمدرضا ربیعی

شهریور ۱۳۹۸

شماره:
تاریخ:

باسمه تعالی



مدیریت تحصیلات تکمیلی

فرم شماره (۳) صورتجلسه نهایی دفاع از پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

با نام و یاد خداوند متعال، ارزیابی جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم / آقای نسرین فلاحتی نژاد با شماره دانشجویی ۹۵۳۴۹۲۴ رشته آمار گرایش آمار ریاضی تحت عنوان مدل رگرسیون خطی فازی استوار بر اساس روش حداقل میانگین مربعات که در تاریخ ۱۳۹۸/۰۶/۱۲ با حضور هیأت محترم داوران در دانشگاه صنعتی شاهرود برگزار گردید به شرح ذیل اعلام می گردد:

☐ مردود ☒ قبول (با درجه: عالی)			
☐ عملی ☒ نظری			
عضو هیأت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱- استانداره نمای اول	دکتر محمدرضا ربیعی	استادیار	
۲- استادراهنمای دوم			
۳- استاد مشاور			
۴- نماینده تحصیلات تکمیلی	دکتر داود شاهسونی	دانشیار	
۵- استاد ممتحن اول	دکتر محمد آرشی	دانشیار	
۶- استاد ممتحن دوم	دکتر حسین باغیشنی	استادیار	

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی
تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:

تبصره در صورتی که کسی مردود شود حداکثر یکبار دیگر (در مدت مجاز تحصیل) می تواند از پایان نامه خود دفاع نماید (دفاع مجدد نباید زودتر از ۴ ماه برگزار شود).

تقدیم به محضر از زشمند پرومادر عزیزتر از جانم؛
که در سایه وجود پر مهرشان آسوده و در دوران مختلف زندگی ام بامهربانی، درس انسانیت
و چگونه زیستن را به من آموخته اند و نفس خیرشان، همواره بدرقه تمامی خطاتم بوده است.

تقدیم به برادر عزیزم،
که با محبت های بی دریغش همیشه همراهم است.

تقدیم به مهربانانی که با حضورشان باعث دلگرمی ام بودند.

اکنون که مراحل پژوهش، تدوین و نگارش پایان نامه به پایان رسیده است نمی توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر بر زبانم جاری سازم و سپاس خود را در وصف پدر و مادر عزیزم که وجودم جز هدیه وجودشان نیست آشکار نمایم. از خانواده عزیزتر از جانم متشکرم که درطول زندگی و دوران تحصیل همراه و مشوقم بودند و با ایثار و از خودگذشتگی و تحمل زحمات این راه یاری ام نمودند. از استاد فرهیخته و با اخلاق جناب آقای دکتر محمدرضا ربیعی که با صبوری من را در راه کسب علم و اخلاق و معرفت یاری نمودند و همواره راهنما و راهگشای اینجانب در اتمام پایان نامه بوده اند تقدیر و تشکر می نمایم. هم چنین از جناب آقای دکتر محمد آرشی و جناب آقای دکتر حسین باغیشنی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده دارند کمال تشکر را دارم. در نهایت از همدلی و یاری دوستان و همکلاسی های عزیزم میترا خراباتی، سیما ملکی و مهسا بهرامیان سپاس گزارم.

نسرين فلاحتي نژاد

شهریور ۱۳۹۸

تعهد نامه

اینجانب **نسرین فلاحتی نژاد** دانشجوی کارشناسی ارشد رشته آمار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده پایان نامه با عنوان **مدل رگرسیون خطی فازی استوار بر اساس روش حداقل میانه مربعات**، تحت راهنمایی **محمدرضا ربیعی** متعهد می شوم:

- تحقیقات در این پایان نامه توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش های دیگر پژوهش گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این پایان نامه، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به دست آوردن نتایج اصلی پایان نامه تاثیرگذار بوده اند، در مقالات مستخرج از پایان نامه رعایت می گردد.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این پایان نامه، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

نسرین فلاحتی نژاد

شهریور ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه های رایانه ای، نرم افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این پایان نامه بدون ذکر منبع مجاز نمی باشد.

چکیده

در آمار، تحلیل رگرسیون یک روش پرکاربرد برای بررسی روابط بین یک یا چند متغیر پاسخ و یک مجموعه از متغیرهای توضیحی است. روش کمترین توان‌های دوم یکی از رایج‌ترین روش‌های کاربردی در برآورد ضرایب رگرسیون می‌باشد. اگر تمامی پذیره‌های این روش برای یک مجموعه داده برقرار باشد، این روش بهترین روش برآوردیابی می‌باشد اما زمانی که در مشاهدات، داده‌های دورافتاده حضور داشته باشند این روش پیش‌بینی مناسبی ندارد. در این شرایط روش‌های رگرسیون استوار به‌عنوان جایگزین روش‌های کلاسیک معرفی می‌شوند. علاوه بر این اگر مشاهدات نیز نادقیق باشند، استفاده از روش‌های رگرسیون استوار فازی پیشنهاد می‌شود. رگرسیون فازی شامل دو رویکرد امکانی و کمترین توان‌های دوم فازی می‌باشد. این روش‌ها به وجود داده‌های دورافتاده حساس هستند. در این پایان‌نامه، فرض می‌کنیم مشاهدات شامل داده‌های دورافتاده باشند، متغیرهای توضیحی، دقیق و متغیر پاسخ اعداد فازی هستند. با مفروضات فوق، یک مدل رگرسیون خطی فازی استوار را ارائه نموده که براساس روش کمترین میانه توان‌های دوم می‌باشد. سپس این روش را برای بهبود برآورد با روش کمترین توان‌های دوم موزون ترکیب می‌کنیم. نتایج حاصل از مثال‌ها بیان‌گر خنثی یا کم شدن اثر داده‌های دورافتاده می‌باشد.

کلمات کلیدی: داده‌های دورافتاده، رگرسیون استوار، رگرسیون فازی، کمترین توان‌های دوم، کمترین میانه توان‌های دوم، کمترین توان‌های دوم موزون.

فهرست مقالات مستخرج از پایان نامه

۱. ربیعی م.ر.، فلاحتی نژاد ن.و کرباسی د.(۱۳۹۸)، روش چند هدفه در برآورد ضرایب مدل رگرسیون خطی با ورودی- خروجی فازی LR، نهمین سمینار ملی آمار و احتمال فازی، بابلسر، مازندران.

فهرست مطالب

ق فهرست تصاویر

ش فهرست جداول

۱	رگرسیون کمترین میانه توان های دوم کلاسیک
۱	۱.۱ رگرسیون کمترین توان های دوم کلاسیک
۲	۲.۱ نواقص برآوردگر کمترین توان های دوم
۳	۱.۲.۱ مشاهدات نامتعارف
۶	۳.۱ برآوردگرهای رگرسیونی استوار
۷	۴.۱ روش کمترین توان های دوم موزون
۸	۵.۱ روش کمترین میانه ی توان های دوم
۹	۶.۱ ویژگی های روش کمترین میانه توان های دوم
۱۱	۲ مروری بر رگرسیون فازی
۱۱	۱.۲ مقدمه
۱۳	۲.۲ مجموعه های فازی
۱۶	۳.۲ اعداد فازی
۱۸	۴.۲ حساب اعداد فازی
۱۹	۱.۴.۲ فاصله بین دو عدد فازی
۲۱	۵.۲ رگرسیون فازی
۲۱	۱.۵.۲ تاریخچه
۲۲	۲.۵.۲ رگرسیون امکانی
۲۵	۳.۵.۲ رگرسیون کمترین مجموع فاصله ها
۲۷	۳ برآورد کمترین توان های دوم رگرسیون فازی به روش کپی و همکاران
۲۸	۱.۳ مدل رگرسیون خطی برای متغیرهای پاسخ فازی
۲۸	۱.۱.۳ معرفی داده ها

۲۸	۲.۱.۳	مساله رگرسیون در زمینه فازی: مرور کلی
۲۹	۳.۱.۳	مدل رگرسیون خطی پیشنهادی با پاسخ‌های فازی LR
۳۰	۲.۳	روش برآورد
۳۰	۱.۲.۳	فاصله و تابع هدف
۳۱	۲.۲.۳	حل کمترین توان‌های دوم تکراری
۳۲	۳.۲.۳	ویژگی‌های جواب LS برای مدل پیشنهادی
۳۴	۴.۲.۳	جنبه‌های خاص مدل
۳۷	۳.۳	بررسی مدل مناسب
۳۹	۴.۳	انتخاب مدل
۳۹	۱.۴.۳	رده مدل‌های پارامتری
۳۹	۲.۴.۳	ضریب تعیین چندگانه برای مدل رگرسیون خطی با پاسخ فازی LR
۴۲	۵.۳	الگوریتم انتخاب متغیر به شیوه پیشرو
۴۲	۶.۳	مثال کاربردی
۴۲	۷.۳	روش چند هدفه در برآورد ضرایب مدل رگرسیون خطی با ورودی- خروجی
۴۹		فازی LR
۴۹	۱.۷.۳	مدل رگرسیون خطی برای متغیرهای فازی
۵۰	۲.۷.۳	برنامه‌ریزی چند هدفه
۵۲	۸.۳	مثال کاربردی
۵۵	۴	تحلیل رگرسیون فازی استوار با استفاده از روش کمترین میانه توان‌های دوم
۵۵	۱.۴	مفاهیم کلی
۵۷	۱.۱.۴	ضوابط شناسایی داده‌های دورافتاده
۵۸	۲.۴	تحلیل رگرسیون فازی استوار
۵۸	۱.۲.۴	روش برآورد: روش‌های کمترین میانه توان‌های دوم (LMS) و کمترین توان‌های دوم وزن‌دار (WLS)
۶۰	۲.۲.۴	مراحل روش برآورد $WLS-LMS$
۶۱	۳.۲.۴	نکات
۶۳	۳.۴	میزان انطباق مدل رگرسیون فازی استوار
۶۴	۴.۴	مثال‌های کاربردی و مطالعات شبیه‌سازی
۶۴	۱.۴.۴	مثال ۱
۶۸	۲.۴.۴	مثال ۲
۷۱	۳.۴.۴	مثال ۳
۷۵	۴.۴.۴	مثال ۴
۷۶	۵.۴.۴	مطالعه شبیه‌سازی

۷۹	نتیجه‌گیری و پیشنهادات
۸۱	مراجع
۹۳	آ برنامه‌های نوشته شده در ممتیکا
۱۰۹	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۱۱	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۳	۱.۱	نمایش مشاهدات نامتعارف (الف) و (ب)
۵	۲.۱	خطوط رگرسیون کمترین توان‌های دوم با حضور مشاهدات نامتعارف . .
	۱.۲	پروفسور زاده، دانشمند ایرانی تبار و پدر نظریه فازی (تولد: ۱۵ بهمن ماه ۱۲۹۹ – وفات: ۱۶ شهریور ماه ۱۳۹۶)
۱۳	۲.۲	مثال‌های توابع عضویت برای متغیرهای فازی LR
۱۷	۳.۲	α – برش‌های دو عدد فازی
۲۰	۱.۳	مثال‌های متغیر خروجی فازی با انواع مختلف تابع عضویت (متغیر خروجی فازی LR)
۳۶	۲.۳	الگوریتم انتخاب متغیر به شیوه پیشرو
۴۴	۳.۳	نمودار حسابی فازی
۴۸	۱.۴	مثالی از تاثیر تنها یک داده دورافتاده در مدل LS
۵۶	۲.۴	مثال‌هایی از پراکندگی‌های فازی با انواع مختلف داده‌های دورافتاده فازی
۵۷	۳.۴	مجموعه داده شبیه‌سازی شده
۶۵	۴.۴	مدل‌های برآوردشده روی مجموعه داده اصلی با $LS(a)$ و $WLS-LMS(b)$
۶۵	۵.۴	مدل‌های برآوردشده و عملکرد انطباق با $LS(a)$ و $WLS-LMS(b)$ بعد از آلوده کردن تنها یک مقدار از X
۶۵	۶.۴	مدل‌های برآوردشده و عملکرد انطباق با $LS(a)$ و $WLS-LMS(b)$ بعد از آلوده کردن چندین مقدار از X
۶۶	۷.۴	مدل‌های برآوردشده و عملکرد انطباق با $LS(a)$ و $WLS-LMS(b)$ بعد از آلوده کردن چندین مقدار از m
۶۶	۸.۴	مدل‌های برآوردشده و عملکرد انطباق با $LS(a)$ و $WLS-LMS(b)$ بعد از آلوده کردن در X و m
۶۶	۹.۴	مدل‌های برآوردشده و عملکرد انطباق با $LS(a)$ و $WLS-LMS(b)$ بعد از آلوده کردن در پهنای l و u
۶۷		

۱۰.۴	مدل‌های برآوردشده و عملکرد انطباق با $LS(a)$ و $WLS-LMS(b)$ بعد از
۶۷	آلوده کردن در X, m, l و u
۷۱	۱۱.۴ نمودارهای تیلور برای مدل‌های مراکز
۷۲	۱۲.۴ نمودارهای تیلور برای مدل‌های کران پایین (مراکز منهای پهناهای چپ)
۷۲	۱۳.۴ نمودارهای تیلور برای مدل‌های کران بالا (مراکز بعلاوه پهناهای راست) .
۷۴	۱۴.۴ مقایسه مدل‌های تقریبی
۷۶	۱۵.۴ نمودار پراکندگی مراکز غلظت CO_2 و میانگین دما
۷۷	۱۶.۴ تولید مجموعه داده برای مطالعه شبیه‌سازی

فهرست جداول

۴۵	متغیرهای توضیحی	۱.۳
۴۶	متغیر پاسخ	۲.۳
۴۷	روند انتخاب متغیر	۳.۳
۵۳	داده‌های ارزیابی خسارت [۱۱۴]	۴.۳
	ضرایب برآورد شده از مدل‌های رگرسیون استوار در موارد آلوده نشده و	۱.۴
۶۸	آلوده شده	
۷۰	نتایج داده‌های اصلی	۲.۴
۷۳		۳.۴
۷۶	مقایسه مدل رگرسیون $LMS - WLS$ با سایر مدل‌ها	۴.۴
۷۷	نتایج شبیه سازی	۵.۴

فصل ۱

رگرسیون کمترین میانه توان‌های دوم کلاسیک

در این فصل برخی از مفاهیم ضروری که در فصل‌های آینده به آن نیاز داریم را بیان می‌کنیم. در ابتدا اشاره‌ای به مفاهیم مرتبط با رگرسیون کمترین توان‌های دوم خواهیم داشت و سپس خواهیم دید زمانی که مشاهدات ناهمگون باشند این روش عملکرد خوبی نخواهد داشت. در نهایت برآوردگر کمترین میانه توان‌های دوم را معرفی می‌کنیم که یکی از روش‌های استوار مورد استفاده در حضور داده‌های پرت در مجموعه داده‌ها می‌باشد.

۱.۱ رگرسیون کمترین توان‌های دوم کلاسیک

مطالعه رابطه بین پدیده‌های طبیعی جهان، یکی از اهداف اساسی علوم است و نقشی اساسی در تصمیمات روزمره دارد. تحلیل رگرسیون آماری، یک ابزار قدرتمند در این حیطه است که رابطه آماری بین یک متغیر پاسخ^۱ (Y) و یک مجموعه از متغیرهای توضیحی^۲ یا پیشگو^۳ یعنی $X_1, \dots, X_p$ را بر اساس مجموعه‌ای از مشاهدات در رفتار مشترک این متغیرها مورد

^۱Response variable

^۲Explanatory variable

^۳Predictive

تحلیل و بررسی قرار می‌دهد.

مدل خطی کلاسیک به صورت $y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i$ ($i = 1, \dots, n$) داده شده است که در آن خطای ϵ_i معمولاً با توزیع نرمال، میانگین صفر و انحراف معیار σ در نظر گرفته می‌شود. هدف رگرسیون برآورد $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)'$ از داده‌های $(x_{i1}, \dots, x_{ip}, y_i)$ ، $i = 1, \dots, n$ ، است. اگر مدل فوق شامل عرض از مبدا باشد در این صورت $x_{i1} = 1$. معروف‌ترین روش برآورد $\hat{\beta}$ مربوط به گاوس یا لژندر است که به صورت زیر می‌باشد (برای اطلاع از مطالب اخیر به [۱۰۶] رجوع کنید):

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^n r_i^2 \quad (1.1)$$

که در آن باقیمانده‌های r_i برابر با $y_i - \hat{\beta}_1 x_{i1} - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \dots - \hat{\beta}_p x_{ip}$ است. لژندر آن را روش کمترین توان‌های دوم^۴ (LS) نامید که مبنایی برای علم آمار شد. اساس رگرسیون کلاسیک، رگرسیون کمترین توان‌های دوم می‌باشد. برآوردگر کمترین توان‌های دوم β ، معادل برآوردگر ماکزیمم درست‌نمایی برای β است که تابع زیر را نسبت به β ماکزیمم می‌کند

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\epsilon_i^2}{2\sigma^2}\right) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(y_i - x_i'\beta)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.1)$$

که معادل با ماکزیمم کردن لگاریتم (۲.۱) نسبت به β به صورت

$$\ln L(\beta) = \sum_{i=1}^n \left(-\frac{1}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{\epsilon_i^2}{2\sigma^2} \right)$$

است. از آنجاییکه σ ثابت است، ماکزیمم کردن عبارت فوق با مینیم کردن $\sum_{i=1}^n \epsilon_i^2$ معادل است. بنابراین برآوردگر کمترین توان‌های دوم، $\hat{\beta}$ است.

۲.۱ نواقص برآوردگر کمترین توان‌های دوم

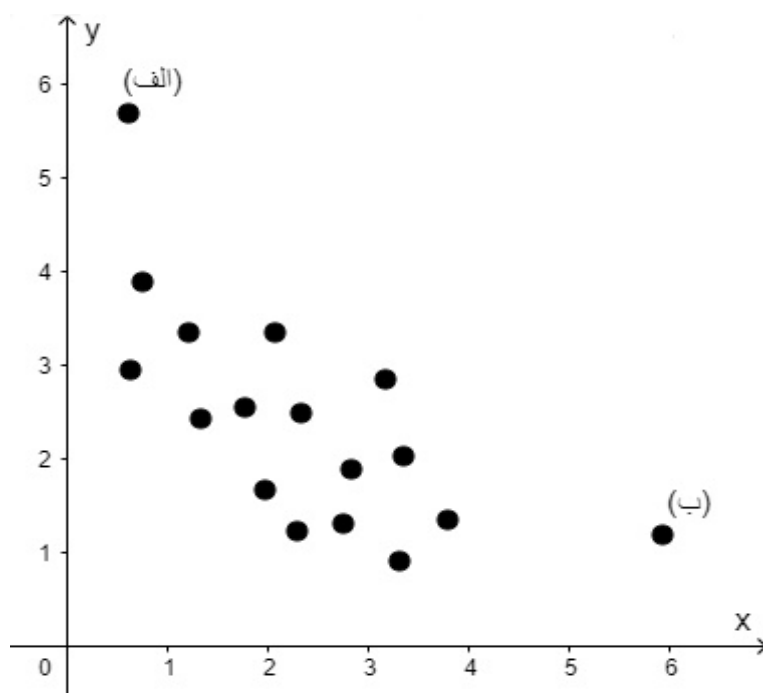
صرف نظر از جذابیت ریاضی برآوردگر کمترین توان‌های دوم و سادگی محاسبات، این برآوردگر به علت ضعیف بودن چشمگیر آن بسیار مورد انتقاد قرار می‌گیرد. برای به کارگیری از رگرسیون کمترین توان‌های دوم پذیره‌های به خصوصی مطرح شده‌اند که یکی از آن‌ها نرمال بودن توزیع ϵ_i ها می‌باشد. در عمل ممکن است همیشه این فرض برقرار نباشد. اگر در تحلیل رگرسیون با این مسئله مواجه شدیم که خطاها توزیع غیر نرمال دارند، به ویژه در شرایطی که توزیع خطاها دم‌های پهن‌تری نسبت به توزیع نرمال داشته باشند، یعنی از احتمال‌های بیشتری در دم‌ها نسبت به توزیع نرمال برخوردار باشند، رگرسیون کمترین توان‌های دوم به درستی عمل نخواهد کرد. به عنوان مثال ممکن است در مجموعه داده‌ها مشاهداتی باشند که از

^۴Least squares

بخش اصلی مجموعه داده‌ها دور هستند. در این شرایط روش پیشنهادی لژندر عملکرد خوبی نخواهد داشت. روش کمترین توان‌های دوم برای برآورد کردن پارامترها به تمام مشاهدات وزن برابر اختصاص می‌دهد. بنابراین، تنها یک داده دور از اکثریت داده‌ها می‌تواند تاثیر زیادی روی برآورد داشته باشد. این مشاهدات، مشاهدات نامتعارف هستند که در بخش ۱.۲.۱ به معرفی آن‌ها پرداخته‌ایم.

۱.۲.۱ مشاهدات نامتعارف

در عمل گاهی با داده‌هایی روبرو می‌شویم که ممکن است نتایج تحلیل‌ها را دچار تغییر کنند. مخصوصاً در برازش کمترین توان‌های دوم حضور این داده‌ها نقش بسیار مهمی دارد و شیب خط برازش را تحت تاثیر قرار می‌دهند. شیب خط در برازش کمترین توان‌های دوم وابستگی شدیدی به حضور دو نقطه (الف) و (ب) دارد. حذف این دو داده باعث ایجاد تغییر در روند برازش می‌شود.



شکل ۱.۱: نمایش مشاهدات نامتعارف (الف) و (ب)

در هنگام حضور چنین مشاهداتی، به روش‌های مناسبی برای برآورد پارامترها نیاز داریم. مشاهدات نامتعارف به دو صورت داده‌های دورافتاده^۵ و نقاط نافذ^۶ در میان داده‌ها حضور پیدا می‌کنند.

^۵Outliers

^۶Leverage point

داده‌های دورافتاده

داده دور افتاده در رگرسیون^۷ داده‌ایست که از خطی که $n-1$ داده دیگر برازش می‌شود فاصله زیادی داشته باشد. تغییرات این نوع از داده‌ها در راستای محور متغیر پاسخ می‌باشد. یک داده دور افتاده از سایر داده‌ها جدا نیست و باید مورد بررسی قرار بگیرد تا علت وجود آن در بین بقیه داده‌ها مشخص شود. این گونه داده‌ها به دلایل مختلفی به وجود می‌آیند:

۱- ابزار اندازه‌گیری نادرست. ۲- خطاهای انسانی از قبیل خطا در نوشتن داده‌ها یا وارد کردن اشتباه داده‌ها. ۳- جمع‌آوری داده‌ها در جوامع مختلف. ۴- وجود مشاهدات غیر معمول در جامعه. با توجه به اینکه حضور داده‌های دور افتاده در مجموعه داده‌ها درست نیست اما گاهی این داده‌ها حاوی اطلاعاتی هستند که نقاط دیگر بیانگر آن‌ها نیستند، بنابراین حذف داده‌های دورافتاده روش صحیحی نیست و تنها زمانی امکان‌پذیر است که به علت خطا در ثبت مشاهدات یا ابزار و وسایل اندازه‌گیری پدید آمده باشند.

نقاط نافذ

نوع دیگری از داده‌های دور افتاده وجود دارند که «نقاط نافذ» نامیده می‌شوند. در این داده‌ها تعدادی از مشاهدات متغیرهای توضیحی در مقایسه با سایر داده‌ها، دورافتاده هستند. به عبارت دیگر داده‌ای که در راستای محور متغیرهای توضیحی تفاوت چشمگیری با سایر داده‌ها دارد نقطه نافذ می‌باشد. اگر نقاط نافذ دور از میانگین‌های متغیرهای توضیحی قرار گیرند روی شیب رگرسیونی نفوذ بالایی دارند زیرا پیرو مابقی داده‌ها نیستند و باعث ایجاد اثر نامطلوبی در مدل می‌شوند. اگر این نقطه را از بین داده‌ها حذف کنیم، برآورد رگرسیونی به طور چشم‌گیری دچار تغییر می‌شود. اگر یک نقطه نافذ خط رگرسیون کمترین توان‌های دوم را تحت تاثیر زیادی قرار دهد، به آن نقطه، یک نقطه نافذ بد گفته می‌شود. در مقابل نقطه‌ای که الگوی اصلی داده‌ها را پیروی کند و یک دورافتاده در رگرسیون نباشد نقطه نافذ خوب^۸ می‌باشد.

در شکل ۲.۱ مثال‌هایی از مشاهدات نامتعارف را نشان می‌دهد. در شکل ۲.۱ (آ) رابطه خطی قوی بین مشاهدات دیده می‌شود. در این شکل هیچ باقی‌مانده بزرگی وجود ندارد. در شکل ۲.۱ (ب) مشاهده ۲ مشاهده نامتعارف می‌باشد که بر روی خط رگرسیونی کمترین توان‌های دوم تاثیر گذاشته‌است، پس یک داده دورافتاده رگرسیونی می‌باشد. در شکل ۲.۱ (ج) و (د) تاثیرات نقاط نافذ خوب و نقاط نافذ بد مشاهده می‌شود. در قسمت (ج)، مشاهده ۶ نقطه نافذی است که بر خط برازش تاثیر زیادی نمی‌گذارد و از الگوی قسمت عمده مشاهدات تبعیت می‌کند اما طبق تصویر (د) مشاهده ۱ روند برآورد را به شدت تحت تاثیر قرار داده است که در این حالت برآورد رگرسیون کمترین توان‌های دوم بیانگر روند کلی بخش عمده‌ای از

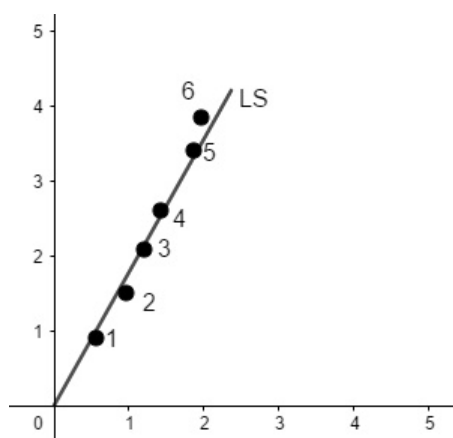
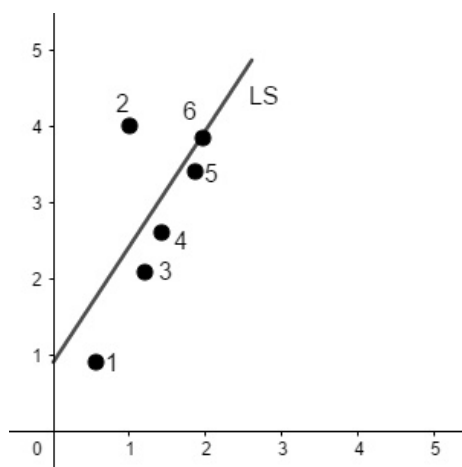
^۷Regression outlier

^۸Good leverage point

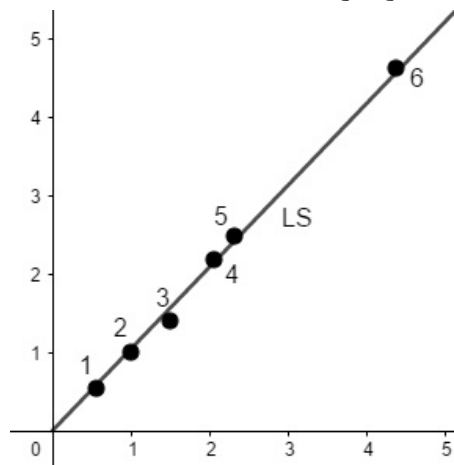
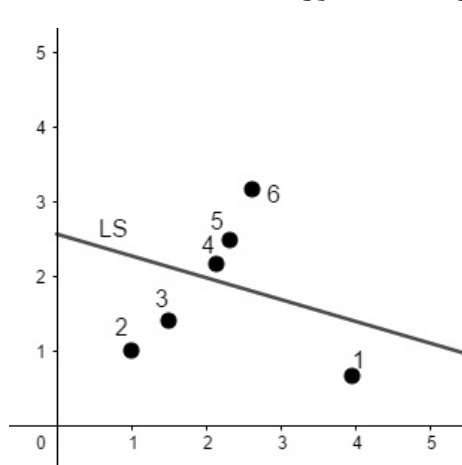
۵ نواقص برآوردگر کمترین توان‌های دوم

مشاهدات نمی‌باشد. این مشاهده یک نقطه نافذ بد است.

همانطور که اشاره شد با توجه به عدم توانایی رگرسیون کمترین توان‌های دوم در برازش مناسب مدل تحت حضور مشاهدات نامتعارف که یکی از نواقص این روش می‌باشد، در چنین شرایطی برای برآورد پارامترها نیاز به روش‌های دیگری از جمله روش‌های رگرسیون استوار^۹ داریم که در ادامه به بحث و بررسی آن می‌پردازیم.



(آ) مشاهدات رابطه خطی قوی با (ب) وجود مشاهده نامتعارف در راستای محور y یکدیگر دارند.



(ج) یک داده با یک مشاهده نامتعارف (نقطه نافذ بد) در راستای محور x جایگزین می‌شود. (د) یک داده با مشاهده نامتعارف (نقطه نافذ بد) در راستای محور x جایگزین می‌شود.

شکل ۲.۱: خطوط رگرسیون کمترین توان‌های دوم با حضور مشاهدات نامتعارف

^۹Robust

۳.۱ برآوردگرهای رگرسیونی استوار

اگر در مجموعه داده‌ها مشاهدات نامتعارف حضور داشته باشند، برای یک مدل رگرسیونی برآوردگرهای کلاسیک مانند میانگین، واریانس، کواریانس و برازش کمترین توان‌های دوم به شدت تحت تاثیر قرار می‌گیرند. در این شرایط روش‌های کلاسیک موجود، قادر به برازش مناسب مدل نیستند. برای حل این مشکل برآوردگرهای استواری وجود دارند که حتی در حضور مشاهدات نامتعارف برازش بسیار مناسبی برای مجموعه داده‌ها ارائه می‌کنند. هدف این برآوردگرها برازش مدلی است که تمامی مشاهدات را به خوبی توصیف می‌کند. استواری این برآوردگر به این صورت است که وزن‌های متفاوتی را به داده‌ها اختصاص می‌دهد، به‌طوری‌که داده‌های دور وزن کوچک‌تری می‌گیرند. بنابراین مشاهدات نامتعارف تاثیر کمتری روی برآورد رگرسیون می‌گذارند، در حالی‌که در رگرسیون کمترین توان‌های دوم به تمام مشاهدات وزن برابر اختصاص داده می‌شد. چندین روش برآورد استوار نسبت به حضور مشاهدات نامتعارف وجود دارد که در ادامه بدون بیان جزئیات به معرفی آن‌ها می‌پردازیم.

الف. کمترین قدر مطلق انحرافات^{۱۰} (LAD) [۳۹]

بردار برآورد ضرایب رگرسیون β ، به منظور مینیمم‌سازی مجموع قدر مطلق باقی‌مانده‌ها، r_i ، به جای مجموع توان‌های دوم باقی‌مانده‌ها انتخاب می‌شود.

ب. M-برآوردگرها^{۱۱} [۵۶]

تابع هدف $\sum_{i=1}^n \rho(r_i)$ نسبت به β مینیمم می‌شود که در آن تابع $\rho(\cdot)$ برای ایجاد یک رفتار مناسب انتخاب می‌شود؛ حتی زمانی که داده‌ها از مدلی تولید می‌شوند که از توزیع مفروض انحراف دارند.

ج. M-برآوردگرهای تعمیم یافته^{۱۲} [۷۴]

M-برآوردگرها به منظور معرفی تابع وزنی مناسب در مسئله مینیمم سازی، تعمیم یافته‌اند.

د. کمترین میانه‌ی توان‌های دوم^{۱۳} [۸۹، ۹۷]

این روش برای تعیین برآوردهای بردار β است که میانه‌ی توان‌های دوم باقی‌مانده‌ها را مینیمم می‌کند، یعنی $\min_{\beta} \text{med}_i(r_i^2)$.

^{۱۰}Least absolute deviations

^{۱۱}M-estimators

^{۱۲}Generalized M-estimators

^{۱۳}Least median squares

ه. کمترین توان‌های دوم پیراسته^{۱۴} [۹۷]

در این روش مجموع h توان دوم باقی‌مانده‌های پیراسته اول به صورت $\sum_{i=1}^h (r_i^2)_{i:n}$ بر حسب β مینیمم می‌شود که در آن $h < n$ و $(r_i^2)_{1:n} \leq \dots \leq (r_i^2)_{h:n}$ ، h باقی‌مانده اول هستند.

ر. کمترین توان‌های دوم موزون^{۱۵} (WLS)

هنگامی که پذیره ثابت بودن واریانس خطا برقرار نباشد از این روش استفاده می‌شود. این روش به هر مشاهده وزن متفاوتی اختصاص می‌دهد. وزن هر مشاهده بیانگر میزان اثرگذاری آن مشاهده در برآورد نهایی است. برآورد کمترین توان‌های دوم موزون به صورت

$$\hat{\beta}_{WLS} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^n w_i \epsilon_i^2$$

است که در ادامه به معرفی آن می‌پردازیم.

کمترین میانه تکراری [۱۰۵]، R-برآوردگرها [۵۷]، S-برآوردگرها [۹۸]، M-برآورگرهای یک مرحله‌ای [۴۸] و MM-برآوردگرها [۱۲۲] از دیگر روش‌های برجسته برآورد استوار در تحلیل رگرسیون هستند.

۴.۱ روش کمترین توان‌های دوم موزون

در روش کمترین توان‌های دوم کلاسیک، واریانس خطاها ثابت فرض می‌شوند. زمانی که فرض ثابت بودن واریانس خطا برقرار نباشد، می‌توان از روش WLS استفاده کرد. فرض کنید در مدل $(i = 1, \dots, n)$ $y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \epsilon_i$ ها دارای واریانس σ_i باشند با در نظر گرفتن وزن‌های $w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}$ ، $(i = 1, \dots, n)$ برآورد کمترین توان‌های دوم موزون به صورت زیر می‌باشد

$$\hat{\beta}_{WLS} = \arg \min_{\beta} \sum_{i=1}^n w_i \epsilon_i^2 \quad (3.1)$$

این روش نیز مشابه روش LS کلاسیک، مقادیر مجموع توان‌های دوم انحرافات بین مقادیر مشاهده شده و مقادیر برآورد شده را مینیمم می‌کند با این تفاوت که در روش کمترین توان‌های دوم موزون هر جمله وزن بخصوصی دارد که مشخص می‌کند هر مشاهده در مجموعه داده‌ها چه تاثیری بر برآورد پارامترها دارند.

^{۱۴} Least trimmed squares

^{۱۵} Weighted least squares

۵.۱ روش کمترین میانه‌ی توان‌های دوم

رگرسیون کمترین توان‌های دوم شامل مینیمم‌سازی مجموع توان‌های دوم باقی‌مانده‌ها است. محققان زیادی مدل‌های استوار و متنوعی را از این برآوردگر با جایگزینی موارد دیگر از جمله مقدار قدرمطلق به جای توان‌های دوم ارائه دادند (رجوع کنید به بخش ۳.۱). در این بخش روشی متفاوت معرفی می‌شود که در آن میانه توان‌های دوم جایگزین مجموع توان‌های دوم باقی‌مانده‌ها می‌شود.

صرف نظر از جذابیت ریاضی روش کمترین توان‌های دوم و سادگی محاسبات، این برآوردگر به علت ضعف چشمگیر آن در برآورد پارامتر بسیار مورد انتقاد قرار می‌گیرد. به عبارت دیگر تنها یک داده دورافتاده می‌تواند تاثیر زیادی روی برآورد داشته باشد. در این رابطه همپل [۴۷]، مفهوم نقطه فروریزش^{۱۶} ϵ^* را معرفی کرد که تعمیمی از تعریف هاجز [۵۲] بود. نقطه فروریزش کمترین درصد ناخالصی داده است که می‌تواند انحراف بسیار بزرگی را برای برآوردگر ایجاد کند. در کمترین توان‌های دوم $\epsilon^* = 0$ است. اولین گام برای معرفی یک برآوردگر استوار رگرسیونی از جانب اجورس [۴۰] برداشته شد که پیشنهاد بوسکویچ را بهبود بخشید. معیار L_1 که منتسب به اوست، عبارت است از:

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^n |r_i|. \quad (4.1)$$

اگرچه L_1 در برابر داده‌های دورافتاده به خوبی عمل می‌کند، اما نمی‌تواند از عهده نقاط نافذ برآید و بنابراین $\epsilon^* = 0$ را نتیجه می‌دهد. برآوردگرهای استوار متفاوتی توسط سیل [۱۱۰]، برون و مود [۱۱]، سن [۱۰۲]، جیکل [۶۰] و اندریز [۵] پیشنهاد شدند، اما هیچکدام به نقطه فروریزش قابل قبولی دست نیافتند. اما این سوال وجود دارد که آیا رگرسیون استوار با یک نقطه فروریزش بزرگ امکان‌پذیر است یا خیر؟ سیگل [۱۰۵] به این سوال پاسخ مثبت داد. او میانه تکرار شده با نقطه فروریزش ۵٪ را پیشنهاد داده بود. در حقیقت ۵٪ بهترین مقداری است که می‌توان انتظار داشت. برآوردگر سیگل به این صورت تعریف می‌شود:

برای p مشاهده $(x_{i_1}, y_{i_1}), \dots, (x_{i_p}, y_{i_p})$ که یک بردار پارامتری منحصر بفرد را تعیین می‌کند، $\beta_j(i_1, \dots, i_p)$ نشان داده می‌شود. میانه تکرار شده نیز به طور مختصاتی به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$\hat{\beta}_j = \text{med}_{i_1}(\dots(\text{med}_{i_{p-1}}(\text{med}_{i_p}\beta_j(i_1, \dots, i_p)))\dots). \quad (5.1)$$

به عبارت دیگر p دسته مشاهدات $(x_{i_1}, y_{i_1}), \dots, (x_{i_p}, y_{i_p})$ که به صورت تصادفی با جایگذاری از بین تمامی مشاهدات انتخاب می‌شوند، هر بار $\beta_j(i_1, \dots, i_p)$ محاسبه می‌شود و میانه آن با میانه مقادیر برآورد شده قبلی بدست می‌آید. این کار تا p بار نمونه‌گیری p تایی، تکرار شده و

^{۱۶} Breakdown point

با میانه گیری مکرر ادامه پیدا می‌کند. این برآوردگر می‌تواند دقیق محاسبه شود اما برآوردگر تبدیلات خطی X_i نیست. سیگل و بنسان [۱۰۴] آن را برای مسائل بیولوژیکی بکار گرفتند. حال به رابطه (۱.۱) بازمی‌گردیم. نام کامل روش LS کمترین مجموع توان‌های دوم است، اما افراد کمی به حذف کلمه «مجموع» اشاره می‌کنند زیرا تنها کار منطقی که می‌توان برای n عدد مثبت انجام داد، جمع کردن آن‌هاست. شاید به عنوان نتیجه‌ای از این نام، اکثرا تلاش شده که این برآوردگر را به واسطه جابه‌جایی توان‌های دوم با چیزی دیگر و نه با اشاره به علامت جمع، استوار کنند. به عنوان جایگزین مناسبی به جای جمع می‌توان از میانه که در مقابل داده‌های دورافتاده استوارتر است استفاده کرد. از این برآوردگر، کمترین میانه توان‌های دوم LMS نتیجه می‌شود که به صورت زیر است،

$$\min_{\beta} \text{med}_i r_i^2 \quad (6.1)$$

حال به بحث درباره ویژگی‌های نقطه فروریزش روش LMS می‌پردازیم. در بخش بعدی نشان داده می‌شود که در روش LMS، $\epsilon^* = 0.5$ می‌باشد.

۶.۱ ویژگی‌های روش کمترین میانه توان‌های دوم

تعریف ۱.۶.۱ (نقطه فروریزش [۴۷]). نمونه تصادفی $\mathbf{X}$ شامل n مشاهده (x_i, y_i) و برآوردگر رگرسیون T را در نظر بگیرید. فرض کنید $\beta(m; T, \mathbf{X})$ سوپریم $\|T(\mathbf{X}^*) - T(\mathbf{X})\|$ برای همه نمونه‌های آلوده $\mathbf{X}^*$ باشد که در آن هر m مشاهده از داده‌های اصلی با مقادیر دلخواه جایگزین می‌شود. آن‌گاه نقطه فروریزش T در $\mathbf{X}$ بصورت زیر است،

$$\epsilon^*(T, \mathbf{X}) = \min\left\{\frac{m}{n}, \beta(m; T, \mathbf{X})\right\} \quad (7.1)$$

به عبارت دیگر، ϵ^* کمترین مقدار ناخالصی است که می‌تواند منجر به انتخاب مقادیر دور از $T(\mathbf{X})$ توسط برآوردگر شود. توجه داشته باشید که این تعریف شامل هیچ توزیع احتمالی نیست. برای کمترین توان‌های دوم $\epsilon^*(T, \mathbf{X}) = \frac{1}{n}$ زیرا یک مشاهده «بد» می‌تواند موجب فروریزش شود. در کمترین میانه توان‌های دوم، چنین حالتی وجود ندارد.

قضیه ۱.۶.۱ ([۹۷]). اگر $p > 1$ مشاهدات در حالت معمول باشند، آن‌گاه نقطه فروریزش روش LMS برابر با $\frac{(\lfloor \frac{n}{p} \rfloor - p + 2)}{n}$ است.

توجه کنید که نقطه فروریزش به n وابسته است. برای داشتن تنها یک مقدار، معمولاً $n \rightarrow \infty$ (با p ثابت) در نظر گرفته می‌شود. پس می‌توان گفت که LS یک نقطه فروریزش ∞ دارد درحالی که نقطه فروریزش در روش LMS به بزرگی 5% است که بهترین حالت مورد انتظار است. نتیجه زیر حالت خاصی را بررسی می‌کند که پایداری زیاد روش LMS را نشان می‌دهد.

نتیجه ۱.۶.۱ ([۹۷]). اگر $p > 1$ و تعدادی θ باشد که حداقل $n - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + p - 1$ از مشاهدات دقیقاً در $y_i = x_i \theta$ صدق کند و در حالت معمول باشند. آن‌گاه جواب روش LMS، بدون توجه به دیگر مشاهدات، برابر با θ است.

ملاحظه ۱.۶.۱ ([۹۷]). نقطه فروریزش در قضیه ۱.۶.۱ کوچک‌تر از نقطه فروریزش در میانه تکرار شده است هرچند که هردو برآوردگر فروریزش ۵۰٪ دارند. به‌جای گرفتن میانه از توان‌های دوم باقیمانده‌های مرتب شده، k -امین آماره مرتب $(r^2)_{k:n}$ را در نظر بگیرید که در آن

$$k = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{(p+1)}{2} \rfloor$$

را مینیمم کنید. از این نتیجه می‌شود که تغییر LMS دارای نقطه فروریزش $\frac{(\lfloor \frac{(n-p)}{p} \rfloor + 1)}{n}$ است که دقیقاً همان مقدار بدست آمده در روش میانه تکرار شده سیگل است. در ضمیمه نشان داده شده است که این مقدار، بیشترین مقدار برای همه برآوردگرهای رگرسیونی هم‌پایا است. (بنا بر هم‌وردایی رگرسیون، این ویژگی را برای هر بردار v در نظر میگیریم:

$$T(\{(x_i, y_i + x_i v); \quad i = 1, \dots, n\}) = T(\{(x_i, y_i); \quad i = 1, \dots, n\}) + v$$

هرگاه اکیدا بیش از $\frac{1}{p}(n + p - 1)$ مشاهده در یک وضعیت مناسب باشند، نتیجه ۱.۶.۱ برقرار است که مطابق با روش میانه تکرار شده است.

قضیه ۲.۶.۱ ([۹۷]). فرض کنید $p = 1$ و $x_i = 1$ بنابراین نمونه به $(y_i)_{i=1, \dots, n}$ تبدیل می‌شود. اگر $med_i r_i^2 = med_i (y_i - T)^2$: m_T^2 برابر با $min_{\theta} med_i (y_i - \theta)^2$ باشد، آنگاه $T + m_T$ و $T - m_T$ مشاهدات در این نمونه هستند.

در مواجهه با یک ابزار کاربردی، اجرای هر دو رگرسیون LMS و LS ایده خوبی به نظر می‌رسد. اگر دو روش، مطابقت نزدیکی داشته باشند، نتیجه LS قابل قبول است. در غیر این‌صورت، تفاوت قابل توجهی وجود دارد و لذا با بررسی باقی‌مانده‌های LMS متوجه خواهیم شد که کدام مشاهدات معتبر هستند.

فصل ۲

مروری بر رگرسیون فازی

در این فصل مروری بر مفاهیم اساسی مجموعه‌های فازی و رگرسیون فازی خواهیم داشت.

۱.۲ مقدمه

در فصل‌های پیشین بیان شد که رگرسیون ابزار قدرتمندی در تحلیل روابط بین متغیر پاسخ و مجموعه‌ای از متغیرهای توضیحی می‌باشد. منابع متعددی از عدم قطعیت می‌تواند روی این مطالعات تاثیرگذار باشند از جمله:

- (الف) تاثیرات نمونه‌گیری ناشی از انتخاب مجموعه‌ای خاص از واحدهای آماری که بر روی آن‌ها تحلیل و بررسی انجام می‌شود.
- (ب) عدم اطلاع از نوع مدل که رابطه وابستگی Y را روی X_j ($j = 1, \dots, p$) بیان می‌کند.
- (ج) عدم اطلاع از مدلی خاص که در رده‌ای از مدل‌های رگرسیون داده شده انتخاب می‌شود.
- (د) عدم دقت در سازوکار حاکم بر رابطه وابستگی بدون توجه به نوع مدل مورد نظر.
- (ه) عدم دقت یا ابهام در اطلاعات مشاهده شده.

در مطالعات پیشین، عدم قطعیت ناشی از منابع (الف) و (ج) به طور گسترده بررسی شده است. نظریه کلاسیک مدل‌های خطی (به عنوان مثال [۴۶، ۸۸]) مناسب‌ترین بخش‌های روش‌شناسی در این رابطه را ارائه می‌کند. پیشرفت‌های اخیر، دامنه روش‌های قدیمی را به روش‌های ناپارامتری و تکنیک‌های دانش آماری گسترش داده‌اند (برای مثال، [۵۱]). برای یک تعمیم قطعی، عدم قطعیت نوع (ب) به حالت آخر نیز مرتبط است. تحلیل بیزی دیدگاه متفاوتی را در برخورد با عدم قطعیت نوع (الف)، (ب) و (ج) مطرح کرد که موجب استفاده کامل از احتمال در مدیریت تصادفی‌سازی داده‌ها و نیز عدم قطعیت مدل‌ها و پارامترهای آن‌ها شد (به عنوان مثال رجوع کنید به [۴۴]). در حالت آخر، معرفی توزیع احتمال‌های پیشین روی مجموعه‌ای از پارامترهای رگرسیون، روشی را برای برخورد با عدم قطعیت در سازوکار رگرسیون (منبع (د)) نشان می‌دهد.

اگرچه در گذشته، عدم قطعیت نوع (ه) پیش‌بینی نشده است، داده‌ها به عنوان داده‌های تجربی قطعی در فرآیند استدلال آماری بکار می‌رود که تنها می‌تواند از سایر منابع عدم قطعیت تاثیرپذیر باشد.

در این فصل به معرفی و گسترش یک مدل رگرسیون آماری می‌پردازیم که ما را قادر می‌سازد داده‌های تجربی (فازی) را با توجه ویژه به متغیر پاسخ، که در اینجا با $\tilde{Y}$ نشان داده خواهد شد، مدیریت کنیم. فازی بودن $\tilde{Y}$ می‌تواند ناشی از منابع متفاوتی باشد:

(۱) عدم دقت در اندازه‌گیری پیشامدهای تجربی که با Y نشان داده می‌شود.

(۲) ابهام در Y هرگاه با عبارات زبانی بیان شود.

(۳) عدم اطلاع جزئی یا کلی از مقادیر Y روی نمونه‌های مشاهده‌ای خاص.

(۴) دسته‌بندی کردن^۱ متغیر Y با توجه به روشی که در تحلیل، تعریف و استفاده می‌شود (به عنوان مثال سن یک فرد را می‌توان در بازه‌های پنج ساله یا با واژه‌های جوان، میانسال و پیر بیان کرد. برای هر یک از این‌ها مقدار متفاوتی از عدم قطعیت وجود دارد، رجوع کنید به [۱۲۵]).

در موارد اشاره شده، فازی‌سازی مناسب Y می‌تواند اطلاعات در دسترس را به جای تبدیل به یک مقدار (یک عدد یا رده)، در روشی کامل‌تر و کارآمدتر بکار گیرد.

روش‌های متعددی از تحلیل رگرسیون برای داده‌های فازی ارائه شده‌اند که با کارهای نوین تاناکا و همکاران [۱۰۷] بر مبنای احتمال و کلمینس [۱۴] و دیاموند [۳۳] بر مبنای اصول کمترین توان‌های دوم آغاز شد. در قسمت ۲.۱.۳ نگاهی کوتاه به روش‌های پیشنهادی در این حیطه خواهیم داشت.

^۱Granularity

۲.۲ مجموعه‌های فازی

پروفسور لطفی عسگرزاده، دانشمند ایرانی تبار، نظریه مجموعه‌های فازی را در سال ۱۹۶۵ ارائه کرد [۱۲۳]. این نظریه مورد توجه و بحث بسیاری از محققان و پژوهشگران در علوم نظری و کاربردی قرار گرفت و از آن زمان تا کنون به طور قابل توجهی گسترش یافته‌است. در نظریه مجموعه‌ها، مجموعه‌ی شامل تمام عناصر مورد نظر را مجموعه مرجع نامیده و با X نمایش می‌دهند. گاهی یک مجموعه معمولی مانند A با یک ویژگی کاملاً دقیق و معین مشخص می‌شود. بدین معنا که اگر یک عضو از مجموعه مرجع، آن ویژگی را داشته باشد، عضو مجموعه‌ی مورد نظر است و اگر فاقد آن ویژگی باشد در مجموعه نیست. به عنوان مثال ویژگی زوج بودن اعداد طبیعی، یک ویژگی خوش تعریف است. به عبارتی برای هر عدد طبیعی می‌توان گفت که آیا زوج هست یا زوج نیست. یک روش برای تعریف یک مجموعه، استفاده از تابع نشانگر است. فرض کنید A زیرمجموعه‌ای از مجموعه مرجع با یک ویژگی کاملاً دقیق باشد. تابع نشانگر A به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$



شکل ۱.۲: پروفسور زاده، دانشمند ایرانی تبار و پدر نظریه فازی (تولد: ۱۵ بهمن ماه ۱۲۹۹ – وفات: ۱۶ شهریور ماه ۱۳۹۶)

دامنه تابع نشانگر، مجموعه مرجع، و برد آن مجموعه دو عضوی $\{0, 1\}$ است. اما نکته قابل توجه آن است که تمام مفاهیمی که در زندگی روزمره خود از آن استفاده می‌کنیم، مفاهیم کاملاً دقیق و خوش تعریفی نیستند؛ مثلاً هوای خیلی گرم، طول عمر زیاد لوازم برقی، افراد

کوتاه قد و فشار خون بالا از این نوع مفاهیم هستند. نظریه مجموعه‌های فازی این گونه مفاهیم و ویژگی‌ها را تحلیل می‌کند. برای روشن شدن مفهوم مجموعه‌های فازی به یک مثال می‌پردازیم. فرض کنید می‌خواهیم مجموعه اعداد کوچک را تعریف کنیم. واضح است که کوچک بودن یک ویژگی خوش تعریف نیست. فرض می‌کنیم هر عنصر که در مجموعه اعداد حقیقی وجود دارد، به اندازه یک مقدار بین صفر و یک، عضو مجموعه اعداد کوچک باشد، یعنی هرچه آن عنصر کوچک‌تر باشد، عضویت آن در مجموعه اعداد کوچک بزرگ‌تر است و به یک نزدیک‌تر می‌شود و برعکس هرچه آن عنصر بزرگ‌تر باشد، عضویت آن به مجموعه اعداد کوچک به صفر نزدیک‌تر می‌شود. در این حالت به جای بیان اینکه یک عدد حقیقی کوچک است یا کوچک نیست، می‌گویند این عدد به اندازه مثلاً $0/8$ عضو مجموعه اعداد کوچک است. بنابراین مجموعه‌های فازی براساس تابع عضویت تعریف می‌شود که برد آن مجموعه $[0, 1]$ است.

تعریف ۱.۲.۲. یک زیر مجموعه فازی $\tilde{B}$ از مجموعه مرجع توسط یک تابع $\mu_B(x) : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ به عنوان تابع عضویت مشخص می‌شود که در آن برای هر x متعلق به مجموعه مرجع $\mu_B(x)$ میزان عضویت x را در مجموعه فازی $\tilde{B}$ نشان می‌دهد. $\mu_B(x)$ مجموعه فازی $\tilde{B}$ می‌باشد.

دقت کنید که اگر x به طور کامل در مجموعه فازی $\tilde{B}$ عضو باشد، $\mu_B(x) = 1$ و اگر اصلاً عضویتی در $\tilde{B}$ نداشته باشد، $\mu_B(x) = 0$. بنابراین می‌توان گفت مجموعه‌های معمولی حالت خاصی از مجموعه‌های فازی و توابع نشانگر آن‌ها حالت خاصی از توابع عضویت مجموعه‌های فازی هستند.

مثال ۱.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. می‌خواهیم یک مجموعه فازی تعریف کنیم که اعضای آن ویژگی نادقیق بزرگ را داشته باشند. برای مدل‌سازی این مجموعه تابع عضویت مجموعه فازی را مشخص می‌کنیم. تعیین این تابع توسط شخص تصمیم‌گیرنده انجام می‌پذیرد. مثلاً یک تابع عضویت ممکن است به صورت زیر تعریف شود:

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1 & x = 7 \\ 0/9 & x = 6 \\ 0/7 & x = 5 \\ 0/5 & x = 4 \\ 0/3 & x = 3 \\ 0/1 & x = 2 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

بنابراین مجموعه فازی $\tilde{B}$ را به صورت زیر نمایش می‌دهند:

$$\tilde{B} = \{(7, 1), (6, 0/9), (5, 0/7), (4, 0/5), (3, 0/3), (2, 0/1), (1, 0)\}$$

یا

$$\tilde{B} = \left\{ \frac{1}{7}, \frac{0/9}{6}, \frac{0/7}{5}, \frac{0/5}{4}, \frac{0/3}{3}, \frac{0/1}{2}, \frac{0}{1} \right\}$$

مثلاً $\mu_B(3) = 0/3$ بدین معناست که از نظر متخصص عدد ۳ به اندازه $0/3$ به مجموعه فازی اعداد بزرگ متعلق است. به عبارت دیگر از نظر ایشان «گزاره ۳ عددی بزرگ است» به اندازه $0/3$ صحیح است. توجه شود که تابع عضویت یک مجموعه فازی بسته به نظر شخص تصمیم گیرنده می‌تواند به صورت‌های مختلفی تعریف شود که گاهی جنبه ذهنی و شخصی دارد.

تعریف ۲.۲.۲. مجموعه معمولی عناصری از $\mathcal{X}$ که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی $\tilde{B}$ حداقل به بزرگی α باشد، $-\alpha$ برش $\tilde{B}$ (مجموعه تراز α وابسته به $\tilde{B}$) نام دارد و با $\tilde{B}_\alpha$ نشان داده می‌شود، یعنی

$$\tilde{B}_\alpha = \{x \in \mathcal{X} \mid \mu_B(x) \geq \alpha\}$$

مثال ۲.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{X} = \{0, 1, 2, \dots\}$ مجموعه مقادیر یک متغیر تصادفی پواسن مربوط به تعداد تصادفات یک شبانه روز در یک ناحیه باشد و فرض کنید مجموعه فازی $\tilde{B}$ بیان‌گر تعداد تصادفات کم با تابع عضویت زیر تعریف شود،

$$\tilde{B} = \{(0, 1), (1, 0/8), (2, 0/6), (3, 0/4), (4, 0/2)\}$$

چند $-\alpha$ برش $\tilde{B}$ عبارتند از:

$$\tilde{B}_{0/2} = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad \tilde{B}_{0/5} = \{0, 1, 2\} \quad \tilde{B}_{0/6} = \{0, 1, 2\} \quad \tilde{B}_{0/8} = \{0\}.$$

می‌توان نوشت:

$$\tilde{B}_\alpha = \begin{cases} \{0, 1, 2, 3, 4\} & 0 < \alpha \leq 0/2 \\ \{0, 1, 2, 3\} & 0/2 < \alpha \leq 0/4 \\ \{0, 1, 2\} & 0/4 < \alpha \leq 0/6 \\ \{0, 1\} & 0/6 < \alpha \leq 0/8 \\ \{0\} & 0/8 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

قضیه ۱.۲.۲ (اتحاد تجزیه^۲). [۱۲۴] مجموعه فازی $\tilde{B}$ از مجموعه مرجع $\mathcal{X}$ به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$\tilde{B}(x) = \sup_{\alpha \in (0, 1]} \alpha I_{\tilde{B}_\alpha}(x), \quad \forall x \in X$$

که در آن $I_{\tilde{B}_\alpha}$ تابع نشان‌گر $-\alpha$ برش $\tilde{B}$ است.

^۲Decomposition identity

تعریف ۳.۲.۲ (اصل توسیع^۳). [۴] فرض کنید $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ ، n مجموعه مرجع و $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_n$ حاصلضرب دکارتی آن‌ها باشد به طوری که

$$\mathcal{X} = \{(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in \mathcal{X}_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}_n\}.$$

همچنین $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n$ ، n مجموعه فازی به ترتیب از $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ باشند. به علاوه $y = f(x_1, \dots, x_n)$ یک نگاشت از $\mathcal{X}$ به y باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n$ به صورت مجموعه فازی $\tilde{A}$ از y با تابع عضویت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{A}(y) = f(\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_n)(y) = \begin{cases} \sup_{y=f(x_1, \dots, x_n)} \min \{\tilde{B}_1(x_1), \dots, \tilde{B}_n(x_n)\} & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \emptyset & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

که در آن $f^{-1}(y)$ نگاشت معکوس y تحت f می باشد.

مثال ۳.۲.۲. فرض کنید $\mathcal{X}_1$ و $\mathcal{X}_2$ مجموعه اعداد طبیعی، $\tilde{B}_1$ مجموعه فازی تقریباً ۳ و $\tilde{B}_2$ مجموعه فازی تقریباً ۴ به صورت زیر باشند:

$$\tilde{B}_1 = \left\{ \frac{0/3}{1}, \frac{0/7}{2}, \frac{1}{3}, \frac{0/7}{4}, \frac{0/3}{5} \right\} \quad \tilde{B}_2 = \left\{ \frac{0/6}{3}, \frac{1}{4}, \frac{0/6}{5} \right\}$$

آن‌گاه بر اساس اصل توسیع، حاصل جمع دو مجموعه فازی $\tilde{B}_1$ و $\tilde{B}_2$ به صورت مجموعه فازی زیر می باشد:

$$\left\{ \frac{0/3}{4}, \frac{0/6}{5}, \frac{0/7}{6}, \frac{1}{7}, \frac{0/7}{8}, \frac{0/6}{9}, \frac{0/3}{10} \right\}$$

۳.۲ اعداد فازی

اعداد فازی که زیرمجموعه‌های فازی خاصی از مجموعه اعداد حقیقی هستند، در بیشتر مسائل کاربردی استفاده می شوند. در این بخش طبق مراجع [۲]، [۴] و [۳۶] به معرفی اعداد فازی و نوع ویژه‌ای از آن‌ها به نام اعداد فازی LR می پردازیم.

تعریف ۱.۳.۲. [۴] مجموعه فازی $\tilde{B}$ از $\mathbb{R}$ یک عدد فازی گفته می شود، اگر

$$1. \quad \tilde{B}(x_0) = 1 \text{ یعنی } 1 \text{ به تک نمایی باشد،}$$

$$2. \quad \alpha - \text{برش‌های } \tilde{B}, \text{ به ازای هر } \alpha \in (0, 1], \text{ به صورت بازه‌های بسته باشند.}$$

قرارداد ۱.۳.۲. در ادامه به منظور سادگی تابع عضویت مجموعه فازی $\tilde{B}$ را به جای $\mu_B(x)$ به صورت $\tilde{B}(x)$ نشان می دهیم.

^۳Extention principle

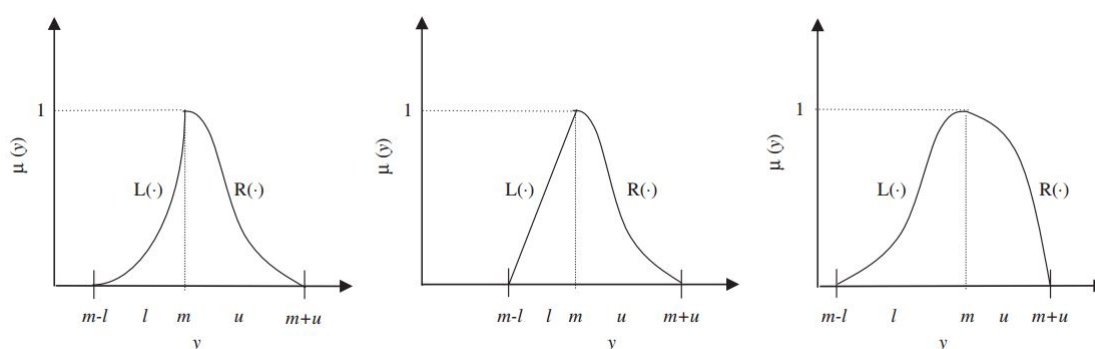
تعریف ۲.۳.۲. [۴] عدد فازی $\tilde{B}$ را مثبت (منفی) می‌گویند و با نماد $\tilde{B} > \circ$ ($\tilde{B} < \circ$) نمایش می‌دهیم، اگر برای هر $x \leq \circ$ ($x \geq \circ$)، $\tilde{B}(x) = \circ$. عدد فازی $\tilde{B}$ را نامنفی (نامثبت) می‌گویند اگر برای هر $x < \circ$ ($x > \circ$)، $\tilde{B}(x) = \circ$.

نوع خاصی از اعداد فازی، اعداد فازی LR هستند که دارای ساختار ویژه‌ای هستند و هم چنین اعمال حسابی بر آنها نیز دارای قواعد خاصی می‌باشد. به علت وجود این قواعد در کاربردها عموماً از این نوع اعداد فازی استفاده شود.

تعریف ۳.۳.۲. (عدد فازی LR) [۴] عدد فازی $\tilde{A}$ دارای تابع عضویتی با ساختار

$$\mu(y) = \begin{cases} L(\frac{m-y}{\alpha}) & y \leq m \\ R(\frac{y-m}{\beta}) & y > m \end{cases}$$

است که در آن L و R ، توابع غیر صعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[0, 1]$ هستند و $L(\circ) = R(\circ) = 1$ ، آن‌گاه $\tilde{A}$ یک عدد فازی LR است و با نماد $\tilde{A} = (m, l, u)_{LR}$ نشان داده می‌شود. عدد m را مقدار نما (یا مرکز) و اعداد مثبت l و u را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست $\tilde{A}$ می‌نامند.



شکل ۲.۲: مثال‌های توابع عضویت برای متغیرهای فازی LR

در صورتی که $L = R$ و $l = u$ ، آن‌گاه عدد فازی را متقارن نامیده و با $\tilde{A} = (m, l)_L$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۳.۲. فرض کنید $\tilde{A} = (m, l, u)_{LR}$ ، و $L = R$. در این صورت

(الف) $\tilde{A}$ را یک عدد فازی مثلثی^۴ نامیده و با $\tilde{A} = (m, l, u)_T$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x) = \max\{\circ, 1 - |x|\}.$$

تابع عضویت $\tilde{A}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{m-x}{\alpha} & m - \alpha \leq x \leq m \\ 1 - \frac{x-m}{\beta} & m < x \leq m + \beta \end{cases} \quad (۱.۲)$$

^۴Triangular

در صورتی که $\alpha = \beta = s$ باشد $\tilde{A}$ عدد مثلثی متقارن به صورت $\tilde{A} = (m, s)_T$ باشد، تابع عضویت $\tilde{A}$ به صورت زیر نمایش داده خواهد شد

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} 1 - \frac{m-x}{s} & m-s \leq x \leq m \\ 1 - \frac{x-m}{s} & m < x \leq m+s \end{cases} \quad (2.2)$$

ب) $\tilde{A}$ را یک عدد فازی نرمال^۵ نامیده و با $\tilde{A} = (m, l, u)_N$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x) = e^{-x^2}$$

پ) $\tilde{A}$ را یک عدد فازی سهموی^۶ نامیده و با $\tilde{A} = (m, l, u)_P$ نشان می‌دهیم اگر

$$L(x) = \max\{0, 1 - x^2\}.$$

۴.۲ حساب اعداد فازی

تعریف ۱.۴.۲. فرض کنید $\tilde{E}$ و $\tilde{F}$ دو عدد فازی و $\ast: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشد. اگر تعمیم عملگر $\ast$ را برای اعداد فازی با $\circledast$ نشان دهیم، با استفاده از اصل توسیع، حاصل $\tilde{E} \circledast \tilde{F}$ به صورت یک مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(\tilde{E} \circledast \tilde{F})(z) = \sup_{z=x \ast y} \min[\tilde{E}(x), \tilde{F}(y)]$$

در حالت خاص برای چهار عمل اصلی، تعریف بالا به صورت‌های زیر می‌باشد

$$(\tilde{E} \oplus \tilde{F})(z) = \sup_{z=x+y} \min[\tilde{E}(x), \tilde{F}(y)]$$

$$(\tilde{E} \ominus \tilde{F})(z) = \sup_{z=x-y} \min[\tilde{E}(x), \tilde{F}(y)]$$

$$(\tilde{E} \otimes \tilde{F})(z) = \sup_{z=x \times y} \min[\tilde{E}(x), \tilde{F}(y)]$$

$$(\tilde{E} \oslash \tilde{F})(z) = \sup_{z=x/y} \min[\tilde{E}(x), \tilde{F}(y)]$$

اعمال جبری با اعداد فازی محاسبات پیچیده‌ای دارند. اما اعداد فازی LR دارای این ویژگی هستند که برخی اعمال جبری بر آن‌ها بسیار ساده است و از الگوهای مشخصی پیروی می‌کند. برخی روابط مهم در حساب اعداد فازی LR در این قسمت بیان می‌شود.

^۵Normal

^۶Elliptic

قرارداد ۱.۴.۲. در این پایان نامه به جای علامت های $\oplus, \ominus, \otimes, \odot$ از $+, -, \times, /$ استفاده می کنیم.

قضیه ۱.۴.۲. [۳۶] اگر $\tilde{E} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{F} = (n, \delta, \gamma)_{LR}$ ، آن گاه $\tilde{E} + \tilde{F}$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$\tilde{E} + \tilde{F} = (m + n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$$

قضیه ۲.۴.۲. [۳۶] اگر $\tilde{E} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{F} = (n, \gamma, \alpha)_{RL}$ ، آن گاه $\tilde{E} - \tilde{F}$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$\tilde{E} - \tilde{F} = (m - n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$$

قضیه ۳.۴.۲. [۳۶] اگر $\tilde{E} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ آن گاه

$$\lambda \cdot \tilde{E} = \begin{cases} (\lambda m, \lambda \alpha, \lambda \beta)_{LR} & \lambda > 0 \\ (\lambda m, -\lambda \beta, -\lambda \alpha)_{RL} & \lambda < 0 \end{cases}$$

قضیه ۴.۴.۲ (روابط تقریبی برای ضرب). [۳۶] اگر $\tilde{E} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{F} = (n, \delta, \gamma)_{LR}$ ، آن گاه

$$(\tilde{E} \times \tilde{F}) \simeq \begin{cases} (mn, m\delta + n\alpha, m\gamma + n\beta)_{LR} & \tilde{E} > 0, \tilde{F} > 0 \\ (mn, m\delta - n\beta, m\gamma - n\alpha)_{RL} & \tilde{E} > 0, \tilde{F} < 0 \\ (mn, -n\beta - m\gamma, -n\alpha - m\delta)_{RL} & \tilde{E} < 0, \tilde{F} < 0 \end{cases}$$

قضیه ۵.۴.۲ (روابط تقریبی برای تقسیم). [۳۶] اگر $\tilde{E} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ یک عدد فازی مثبت باشد آن گاه

$$\tilde{E}^{-1} \simeq (m^{-1}, \beta m^{-2}, \alpha m^{-2})_{RL}$$

اگر $\tilde{E} = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\tilde{F} = (n, \delta, \gamma)_{LR}$ دو عدد فازی مثبت باشند آن گاه

$$(\tilde{E}/\tilde{F}) \simeq \left(\frac{m}{n}, \frac{\gamma m + \alpha n}{n^2}, \frac{\delta m + \beta n}{n^2} \right)_{LR}$$

هرچه پهناهای اعداد فازی $\tilde{E}$ و $\tilde{F}$ نسبت به مقادیر مرکز آن ها کوچک تر باشند، روابط تقریبی فوق دقیق تر هستند و این روابط در همسایگی مقادیر مرکز دقت بیشتری دارند.

۱.۴.۲ فاصله بین دو عدد فازی

در رگرسیون فازی پارامترهای مدل را برآورد می کنیم. برای تخمین پارامترهای مدل در روش کمترین توان های دوم فازی به خطا یا فاصله بین دو مقدار مشاهده شده و برازش شده فازی نیاز داریم. در این بخش به معرفی فاصله ژو و لی و فاصله کپی و دورسو می پردازیم.

فاصله ژو و لی [۱۱۹]

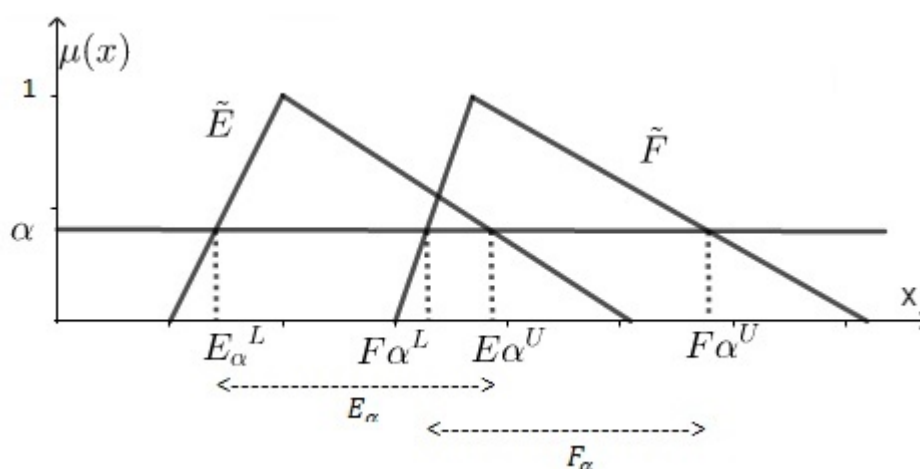
تعریف ۲.۴.۲. فرض کنید $\tilde{E}$ و $\tilde{F}$ دو عدد فازی باشند، فاصله ژو و لی بین این دو عدد فازی به صورت زیر می باشد:

$$d_1(\tilde{E}, \tilde{F}) = \left[\int_0^1 f(\alpha) d^2(\tilde{E}_\alpha, \tilde{F}_\alpha) d\alpha \right]^{\frac{1}{2}}$$

که در آن $\tilde{E}_\alpha$ و $\tilde{F}_\alpha$ ، α -برش های دو عدد فازی هستند، و

$$d^2(\tilde{E}_\alpha, \tilde{F}_\alpha) = [\tilde{E}_\alpha^L - \tilde{F}_\alpha^L]^2 + [\tilde{E}_\alpha^U - \tilde{F}_\alpha^U]^2$$

به طوری که $\tilde{E}_\alpha^L$ ، $\tilde{E}_\alpha^U$ ، $\tilde{F}_\alpha^L$ و $\tilde{F}_\alpha^U$ کران های بالا و پایین α -برش $\tilde{E}$ و $\tilde{F}$ هستند. $f(\alpha)$ یک تابع صعودی روی بازه $[0, 1]$ است و $f(0) = 0$ و $\int_0^1 f(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}$ می باشد. تابع $f(\alpha)$ را می توان به عنوان وزن $d^2(\tilde{E}_\alpha, \tilde{F}_\alpha)$ تعبیر کرد. ویژگی صعودی بودن $f(\alpha)$ منجر می شود که درجات عضویت بالاتر، اهمیت بیشتری در تعیین فاصله ی بین دو عدد فازی $\tilde{E}$ و $\tilde{F}$ داشته باشند. شرط های $f(0) = 0$ و $\int_0^1 f(\alpha) d\alpha = \frac{1}{2}$ نیز تضمین کننده آن هستند که فاصله فوق، یک تعمیم معمولی از فاصله ی بین دو عدد حقیقی است.



شکل ۳.۲: α -برش های دو عدد فازی

قضیه ۶.۴.۲. [۱۱۹] فرض کنید مفروضات تعریف ۲.۴.۲ برقرار باشند و $\tilde{E} = (m_E, l_E, r_E)_T$ و $\tilde{F} = (m_F, l_F, r_F)_T$ ، آنگاه بر پایه ی تابع وزنی $f(\alpha) = \alpha$ داریم

$$\begin{aligned} d_1(\tilde{E}, \tilde{F}) &= (m_E - m_F)^2 \\ &+ \frac{1}{3} (m_E - m_F) [(r_E - r_F) - (l_E - l_F)] \\ &+ \frac{1}{12} [(l_E - l_F)^2 + (r_E - r_F)^2] \end{aligned} \quad (3.2)$$

نتیجه ۱.۴.۲. اگر $\tilde{E}$ و $\tilde{F}$ اعداد فازی مثلثی متقارن باشند، رابطه (۳.۲) به صورت زیر به دست می آید

$$d_1^2(\tilde{E}, \tilde{F}) = (m_E - m_F)^2 + \frac{1}{6}(l_E - l_F)^2 \quad (۴.۲)$$

با استفاده از تعریف ۲.۴.۲ نرم عدد فازی $\tilde{E}$ به صورت $\|E\|$ نمایش داده می شود و به شکل زیر محاسبه می گردد

$$\|E\| = d_1(\tilde{E}, \tilde{E})$$

تعریف ۳.۴.۲. [۷] اگر $\mathbf{W} = (W_1, W_2, \dots, W_n)'$ یک بردار فازی باشد به طوری که به ازای W_i ، $i = 1, \dots, n$ ها عدد فازی باشند آن گاه نرم بردار فازی $\mathbf{W}$ به صورت زیر تعریف می شود

$$\|\mathbf{W}\|^2 = \sum_{i=1}^n \|W_i\|^2 \quad (۵.۲)$$

فاصله کپی و دورسو

تعریف ۴.۴.۲. دو عدد فازی $\tilde{E} = (m_E, l_E, u_E)_{LR}$ و $\tilde{F} = (m_F, l_F, u_F)_{LR}$ را در نظر بگیرید. فاصله کپی و دورسو این دو عدد فازی که تعمیمی از متر ارائه شده توسط یانگ و کو [۱۲۰] برای اعداد فازی LR است به صورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} d_K^2(\tilde{E}, \tilde{F}) &= d_K^2((m_E, l_E, u_E)_{LR}, (m_F, l_F, u_F)_{LR}) \\ &= \Delta_{LR}^2 = \|m_E - m_F\|^2 + \|m_E - \lambda l_E - (m_F - \lambda l_F)\|^2 \\ &\quad + \|(m_E + \rho u_E) - (m_F + \rho u_F)\|^2 \\ &= 3(m_E - m_F)'(m_E - m_F) - 2\lambda(m_E - m_F)'(l_E - l_F) + \lambda^2(l_E - l_F)'(l_E - l_F) \\ &\quad + 2\rho(m_E - m_F)'(u_E - u_F) + \rho^2(u_E - u_F)'(u_E - u_F), \end{aligned} \quad (۶.۲)$$

که در آن $\lambda = \int_0^1 L^{-1}(\omega) d\omega$ و $\rho = \int_0^1 R^{-1}(\omega) d\omega$.

از دیگر فواصل بین دو عدد فازی می توان به فاصله دونسو [۳۵]، فاصله دیاموند [۳۳]، فاصله همینگ [۵۹] و فاصله حسن پور [۴۹] اشاره کرد.

۵.۲ رگرسیون فازی

۱.۵.۲ تاریخچه

بحث رگرسیون فازی در ابتدای سال ۱۹۸۰ و تقریباً هجده سال بعد از معرفی نظریه مجموعه های فازی مورد بحث قرار گرفت. در بین مطالعات انجام شده در رابطه با نظریه و مجموعه های

فازی، بیشترین پژوهش‌ها در زمینه رگرسیون فازی انجام پذیرفته‌است. محققان روش‌های متعددی را تحت عنوان رگرسیون فازی ارائه نموده‌اند. در بخش بعدی به معرفی برخی از این روش‌ها می‌پردازیم. در بسیاری از مواقع ممکن است در یک بررسی، مشاهدات مربوط به یک یا چند متغیر نادقیق باشند (یا نادقیق گزارش شده باشند). همچنین ممکن است متغیرهای مورد مطالعه در یک بررسی، دارای ارتباطی نادقیق و تقریبی باشند. در این موارد باید شیوه‌های جدیدی را جایگزین شیوه‌های کلاسیک کرد. این روش جایگزین استفاده از رگرسیون فازی می‌باشد. در یک تقسیم بندی کلی، انواع رگرسیون فازی را می‌توان به سه حالت زیر دسته‌بندی نمود:

- رگرسیون فازی زمانی که ضرایب مدل رگرسیونی، فازی باشند.
- رگرسیون فازی زمانی که متغیرها نادقیق و فازی باشند.
- رگرسیون فازی زمانی که هم متغیرها و هم ضرایب مدل، فازی باشند.

در مبحث رگرسیون فازی دو رویکرد اساسی وجود دارد: رویکرد مبتنی بر کمترین مجموع فاصله‌ها (شامل دو روش: کمترین مجموع توان‌های دوم و کمترین مجموع انحرافات) و رویکرد امکانی (رویکرد کمترین ابهام کل تحت برخی قیود). علاوه بر این دو رویکرد اصلی، روش‌های ابتکاری زیادی در زمینه رگرسیون فازی پیشنهاد شده‌اند. برخی از این روش‌ها بر پایه ترکیب دو رویکرد بالا هستند. برخی از روش‌های ابتکاری بر اساس الگوریتم‌های محاسباتی خاص هستند. برخی روش‌ها بر مبنای خوشه‌بندی می‌باشند [۳]. در این فصل به معرفی رگرسیون امکانی و بعضی از روش‌های ابتکاری در رگرسیون فازی می‌پردازیم. سپس رگرسیون کمترین مجموع فاصله‌ها و به طور خاص رگرسیون کمترین توان‌های دوم فازی را در حالتی که ضرایب مدل رگرسیون خطی فازی باشند، مورد تحلیل قرار می‌دهیم.

۲.۵.۲ رگرسیون امکانی

این مدل رگرسیونی را نخستین بار تاناکا و همکاران [۱۰۷] در سال ۱۹۸۲ معرفی کردند. در این مدل رگرسیونی، متغیرهای مدل اعداد دقیق^۷ و ضرایب مدل اعداد فازی هستند. برآورد پارامترهای مدل که اعداد فازی مثلی در نظر گرفته می‌شود به کمک حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی بدست می‌آید. در مساله مورد نظر، تابع هدفی که باید مینیمم شود، مجموع پهناهای ضرایب است و قیود مربوط طوری در نظر گرفته می‌شوند که مقدار مشاهده شده متغیر پاسخ با یک درجه خاص عضو مجموعه فازی برآورد شده باشد. چون تابع عضویت مجموعه‌های فازی اغلب به عنوان توزیع‌های امکانی توزیع می‌شوند، لذا این رویکرد را رگرسیون امکانی می‌نامند. پیشنهاد اولیه تاناکا و همکاران مورد بحث و بررسی بسیار قرار گرفت و با اصلاحات و گسترش محققان، اساس مطالعات زیادی در حوزه رگرسیون فازی شد.

^۷Crisp

مدل رگرسیون خطی امکانی

صورت کلی مدلی که معرفی می شود به صورت زیر است

$$\tilde{Y} = f(\mathbf{x}, A) = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \tilde{A}_2 x_2 + \cdots + \tilde{A}_p x_p \quad (7.2)$$

که در آن $\tilde{Y}$ متغیر وابسته یا خروجی فازی است. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)'$ بردار متغیرهای مستقل یا بردار ورودی و $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_p$ اعداد فازی هستند. می خواهیم پارامترهای فازی $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_p$ را به گونه ای تعیین کنیم که مدل (7.2) بهترین برازش را داشته باشد. در ادامه از اعداد مثلثی برای ضرایب مدل استفاده می کنیم. اکنون تابع عضویت خروجی فازی مدل (7.2) یعنی $\tilde{Y}$ را معرفی می کنیم.

مدل با ضرایب متقارن

اگر $\tilde{A}_j = (a_j, \alpha_j)$ ($j = 0, 1, \dots, p$) اعداد فازی مثلثی متقارن و x_i ها اعداد حقیقی و مثبت باشند آنگاه $\tilde{Y}$ یک عدد فازی مثلثی متقارن به صورت $\tilde{Y} = (f^c(\mathbf{x}), f^s(\mathbf{x}))_T$ می باشد که در آن $f^c(\mathbf{x})$ مرکز و $f^s(\mathbf{x})$ پهنای $\tilde{Y}$ است و به صورت زیر بدست می آیند:

$$f^c(\mathbf{x}) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p$$

$$f^s(\mathbf{x}) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p$$

به عبارتی تابع عضویت خروجی فازی $\tilde{Y}$ عبارتند از

$$\tilde{Y}(y) = \begin{cases} 1 - \frac{f^c(\mathbf{x}) - y}{f^s(\mathbf{x})} & f^c(\mathbf{x}) - f^s(\mathbf{x}) \leq y \leq f^c(\mathbf{x}) \\ 1 - \frac{y - f^c(\mathbf{x})}{f^s(\mathbf{x})} & f^c(\mathbf{x}) < y \leq f^c(\mathbf{x}) + f^s(\mathbf{x}) \end{cases}$$

مدل با ضرایب نامتقارن

اگر $\tilde{A}$ ها اعداد فازی نامتقارن و x_i ها اعداد حقیقی و مثبت باشند آنگاه $\tilde{Y}$ یک عدد فازی مثلثی نامتقارن به صورت $\tilde{Y} = (f^c(\mathbf{x}), f^l(\mathbf{x}), f^u(\mathbf{x}))_T$ می باشد که در آن $f^c(\mathbf{x})$ نما و $f^l(\mathbf{x})$ پهنای چپ و $f^u(\mathbf{x})$ پهنای راست $\tilde{Y}$ هستند و اینگونه تعریف شده اند

$$f^c(\mathbf{x}) = a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_p x_p$$

$$f^l(\mathbf{x}) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p$$

$$f^u(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_p x_p$$

و تابع عضویت $\tilde{Y}$ عبارت است از

$$\tilde{Y}(y) = \begin{cases} 1 - \frac{f^c(\mathbf{x}) - y}{f^l(\mathbf{x})} & f^c(\mathbf{x}) - f^l(\mathbf{x}) \leq y \leq f^c(\mathbf{x}) \\ 1 - \frac{y - f^c(\mathbf{x})}{f^u(\mathbf{x})} & f^c(\mathbf{x}) < y \leq f^c(\mathbf{x}) + f^u(\mathbf{x}) \end{cases}$$

مثال ۱.۵.۲. مدل فازی $\tilde{Y} = \tilde{A}_0 + \tilde{A}_1 x_1 + \tilde{A}_2 x_2$ را در نظر بگیرید. فرض کنید $\tilde{A}_0 = (3, 2, 1)_T$ و $\tilde{A}_1 = (-1, 1, 2)_T$ و $\tilde{A}_2 = (2, 4, 1)_T$ و هم چنین $\mathbf{x} = (2, 4)$ بردار مشاهدات باشد. $\tilde{Y}$ یک عدد فازی مثلثی به صورت زیر خواهد بود

$$f^c(\mathbf{x}) = 3 - (1 \times 2) + (2 \times 4) = 9$$

$$f^l(\mathbf{x}) = 2 + (1 \times 2) + (4 \times 4) = 20$$

$$f^u(\mathbf{x}) = 1 + (2 \times 2) + (1 \times 4) = 9$$

مشاهده می‌کنیم که $\tilde{Y} = (9, 20, 9)_T$ یک عدد فازی مثلثی نامتقارن خواهد بود که توصیفی از تقریباً ۹ می‌باشد.

برآورد پارامترهای مدل

برای این که پارامترهای مدل رگرسیون فازی را برآورد کنیم، باید معیارهای زیر را در نظر داشته باشیم

۱. $\tilde{Y}$ برای تمام مقادیر $\tilde{Y}_i$ درجه عضویتی حداقل به بزرگی h داشته باشد، یعنی

$$\tilde{Y}_i(y_i) \geq h, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8.2)$$

۲. ضرایب فازی $\tilde{A}_j$ ($j = 0, 1, 2, \dots, p$) به گونه‌ای باشند که ابهام خروجی فازی مینیمم گردد. هرچه پهنای یک عدد فازی مثلثی بیشتر باشد، ابهام آن نیز بیشتر است. بنابراین برای دستیابی به این معیار مجموع پهنای خروجی‌های فازی $\tilde{Y}_i$ مرتبط به هم می‌رسانیم.

مجموع پهنای خروجی فازی $\tilde{Y}$ برای همه‌ی داده‌ها کمیت Z است که آن را تابع هدف می‌نامیم و برای حالت متقارن به صورت

$$Z = 2ns_0 + 2 \sum_{i=1}^n [s_i \sum_{j=1}^p x_{ji}]$$

و در حالت نامتقارن به صورت

$$Z = n(\alpha_0 + \beta_0) + \sum_{i=1}^n [(\alpha_i + \beta_i) \sum_{j=1}^p x_{ji}]$$

می‌باشد. روش کار به کمینه کردن تابع هدف تحت محدودیت (۸.۲) برای دو حالت متقارن و نامتقارن می‌باشد.

برای بررسی بیشتر در ارتباط با رگرسیون امکانی میرزایی یگانه و ارقامی [۳]، طاهری و ماشین چی [۴]، حسن‌پور و همکاران [۴۹] و حسین زاده و همکاران [۵۴] را مطالعه کنید.

۳.۵.۲ رگرسیون کمترین مجموع فاصله‌ها

رویکرد دیگر رگرسیون فازی، کمترین مجموع فاصله‌ها می‌باشد که این رویکرد شامل دو روش کمترین مجموع توان‌های دوم و کمترین مجموع انحرافات می‌باشد. روش کمترین توان‌های دوم فازی اولین بار توسط کلیمنس [۱۳] و دیاموند [۳۳] در سال‌های ۱۹۸۷ و ۱۹۸۸ معرفی شد که تعمیم روش کمترین توان‌های دوم کلاسیک است که بر پایه تعمیم مفهوم فاصله بین اعداد حقیقی به مفهوم فاصله بین اعداد فازی است. مقالات کیم و همکاران [۶۴] و لی و همکاران [۶۹] از جدیدترین پژوهش‌ها در این زمینه هستند. باید این نکته را بیان نمود که مشابه رگرسیون کمترین توان‌های دوم کلاسیک، رگرسیون کمترین توان‌های دوم فازی نیز به حضور داده‌های پرت حساس هستند. برای برطرف کردن این مشکل، مدل رگرسیون مبتنی بر قدرمطلق انحرافات معرفی شده است (برای اطلاعات بیشتر مقالات کلکین‌نما و طاهری [۶۱] و نامداری و همکاران [۸۰] مطالعه کنید). رگرسیون کمترین مجموع انحرافات، در واقع در رده رگرسیون استوار قرار می‌گیرد. در سال‌های اخیر پژوهش‌هایی در زمینه رگرسیون استوار فازی انجام شده‌اند که در فصل چهارم به آن خواهیم پرداخت.

معرفی سایر روش‌های ابتکاری در رگرسیون فازی

۱. روش‌های تلفیقی

در بعضی از تحقیقات ابتکاری پیشنهاد شده‌است که در یک بخش از مدل‌سازی از رگرسیون امکانی و در بخش دیگر از رگرسیون کمترین توان‌های دوم استفاده شود. در این روش دو مرحله‌ای، ابتدا مراکز ضرایب مدل با استفاده از روش کمترین توان‌های دوم برآورد می‌شوند و سپس پهنای ضرایب از روش امکانی محاسبه می‌شوند [۱۲].

۲. مدل با پهنای متغیر

مشکلی که در بعضی از مدل‌های رگرسیونی وجود دارد، مساله پهنای متغیر است. به این معنا که پهنای داده‌های فازی ثابت نیست و از یک روند خاص پیروی نمی‌کند. برای حل این مساله روش‌های ابتکاری معرفی شده‌اند [۲۲، ۷۲].

۳. روش‌های مبتنی بر خوشه‌بندی

هنگامی که داده‌های ناهمگن در مجموعه داده‌ها حضور دارند، برای مدل‌سازی بهتر داده‌ها، بهتر است ابتدا داده‌ها خوشه‌بندی شوند و سپس از یک مدل رگرسیونی مناسب

برای مدلسازی استفاده شود [۱۲۱].

از جمله سایر روش‌های ابتکاری در رگرسیون فازی می‌توان موارد زیر را نام برد:

۴. روش‌های الگوریتمی [۷۵]

۵. روش‌های ناپارامتری [۵۳]

۶. رگرسیون لوجستیک در محیط فازی [۷۶، ۹۱]

فصل ۳

برآورد کمترین توان‌های دوم رگرسیون فازی به روش کپی و همکاران

در فصل حاضر، حالتی مد نظر است که متغیر پاسخ به صورت فازی است و متغیرهای توضیحی، مقادیر قطعی هستند و به یک مدل رگرسیون خطی کلی می‌پردازیم با این فرض که تابع عضویت متغیر پاسخ متعلق به خانواده LR باشد. این مطلب در بخش ۳.۱.۳ ارائه می‌شود. در بخش سوم، روش تقریب تشریح می‌شود که بر اساس اصل کمترین توان‌های دوم (LS) است. در این رابطه، یک تابع فاصله مناسب برای متغیرهای فازی LR معرفی و تابع هدف LS مربوطه تعریف می‌شود (بخش ۱.۲.۳). در بخش ۲.۲.۳، جواب تکراری LS ارائه و در بخش ۳.۲.۳ برخی از ویژگی‌های این جواب اثبات می‌شود. همچنین در بخش ۴.۲.۳ جنبه‌های خاص روش شناختی مربوط به روش برآورد مورد بحث واقع می‌شود. در بخش چهارم، روشی برای ارزیابی عدم دقت در تقریب ضرایب رگرسیون با مدل پیشنهادی ارائه می‌شود که شامل استفاده از مدل رگرسیون فازی ضمنی با ضرایب فازی LR است و پارامترهای آن (مراکز و پهناها) با معادلات LS مستقل برآورد می‌شود. داده ورودی آن از تقریب‌های بدست آمده بر اساس مدل رگرسیون (روابط حسابی فازی مورد استفاده) حاصل می‌شود.

در بخش پنجم، با مساله انتخاب مدل مواجه می‌شویم. در بخش ۲.۴.۳، یک ابزار انتخابی بر مبنای تجزیه درست مجموع توان‌های دوم متغیر پاسخ و ساختار ضریب تعیین چندگانه پیشنهاد می‌شود. از این ابزار در ایجاد یک روش انتخابی مناسب در رده پارامتری فوق استفاده

می‌شود. در بخش ششم، از داده‌های واقعی گردآوری شده در چارچوب یک مطالعه میدانی، برای اثبات توانمندی اطلاعاتی روش پیشنهادی تحلیل رگرسیون استفاده می‌شود.

۱.۳ مدل رگرسیون خطی برای متغیرهای پاسخ فازی

۱.۱.۳ معرفی داده‌ها

فرض کنید p متغیر توضیحی کمی قطعی $X_p, \dots, X_1$ و یک متغیر پاسخ فازی $\tilde{Y}$ روی n واحد آماری مشاهده می‌کنیم. مشاهدات را با $(\tilde{y}_i, \mathbf{x}_i), i = 1, \dots, n$ نمایش می‌دهیم که در آن $\mathbf{x}'_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ یا به شکل فشرده با $(\tilde{\mathbf{y}}, \mathbf{X})$ نشان می‌دهیم که در آن $\mathbf{X}$ ماتریس متغیرهای توضیحی با بعد $n \times p$ است.

تمرکز ما بر روی خانواده‌ای از متغیرهای فازی LR به صورت زیر است:

$$\tilde{Y} \equiv (m, l, u)_{LR}$$

که در تعریف ۳.۳.۲ آمده است.

برای هر واحد آماری i ، می‌توان فضای مشاهده آن را با توجه به متغیر پاسخ به صورت مجموعه‌ای از اعداد فازی LR، $\mathcal{J}_{LR}(\mathbb{R})$ ، تعریف کرد:

$$\tilde{y}_i \equiv (m_i, l_i, u_i)_{LR} \in \mathcal{J}_{LR}(\mathbb{R})$$

فضای مشاهده برای بردار $\tilde{\mathbf{y}}$ ، $\mathcal{J}_{LR}^n(\mathbb{R})$ است و می‌توان نوشت

$$\tilde{\mathbf{y}} \equiv (\mathbf{m}, \mathbf{l}, \mathbf{u})_{LR} \in \mathcal{J}_{LR}^n(\mathbb{R})$$

که در آن $\mathbf{m}$ ، $\mathbf{l}$ و $\mathbf{u}$ بردارهای مرکز، پهنای چپ و پهنای راست از متغیر پاسخ است. در حالت کلی، فضای مشاهده برای داده‌های ما به صورت $[\mathcal{J}_{LR}^n(\mathbb{R}), \mathbb{R}^{n \times p}]$ است.

۲.۱.۳ مساله رگرسیون در زمینه فازی: مرور کلی

برای معرفی مدل رگرسیون فازی باید مقادیر مورد انتظار $\tilde{\mathbf{y}}$ را از نظر مدل خطی شامل «تاثیرات رگرسیون» در متغیرهای توضیحی $X_j (j = 1, \dots, p)$ پارامترسازی کنیم. بخشی از این خط فکری در این فصل قابل بررسی است (به عنوان مثال به [۶۵، ۸۵، ۱۱۸، ۶۶] مراجعه کنید). بنابراین در بین دسته‌ای از مدل‌های خطی (که رابطه بین $\tilde{Y}$ و X_j ‌ها را بیان می‌کنند) به دنبال بهترین مدل خطی هستیم. در این رابطه، دو روش اصلی در این فصل موجود است. یکی از آن‌ها روش امکانی و روش دیگر، روش کمترین توان‌های دوم بنا بر تعمیم‌های مناسب از شرایط کمترین توان‌های دوم کلاسیک می‌باشد. مقالات زیادی در این زمینه منتشر شده‌اند (به عنوان مثال، [۱۹، ۳۴، ۶۲، ۱۰۸]).

از اهداف دیگر تحقیقات، پیدا کردن مدل خطی است که داده‌های مشاهده‌شده را در فضای متری داده شده به بهترین نحو برآورد کند. ضابطه کمترین توان‌های دوم با توجه به متر انتخابی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش در دو دهه اخیر مورد توجه محققان زیادی بوده است (به عنوان مثال، [۱۴، ۳۳، ۱۸، ۷۳، ۱۱۷]). با این حال، طرح‌های پیشنهادی ارائه شده مقالات در ارتباط با این موضوع، بسیار ناهمگن هستند. ویژگی‌های اصلی، که پیشنهادات متفاوت را مشخص می‌کنند، از طرفی بنا بر تعریف مدل رگرسیون خطی و از طرف دیگر بنا بر فضای متریک خاص معرفی شده برای بکارگیری ضوابط LS، ارائه می‌شود. با توجه به دیدگاه‌های قبلی، ما به گسترش مدل رگرسیون خطی می‌پردازیم که برگرفته از روش پیشنهادی در کارهای اخیر دورسو است ([۲۷، ۲۸، ۲۵، ۲۹، ۳۰]). در این رابطه، مدل را به صورت مناسبی به حالت نامتقارن LR تعمیم می‌دهیم.

۳.۱.۳ مدل رگرسیون خطی پیشنهادی با پاسخ‌های فازی LR

ایده اصلی شامل مدلسازی همزمان مراکز متغیر پاسخ LR با استفاده از مدل رگرسیون کلاسیک و پهناهای چپ و راست پاسخ در رگرسیون خطی ساده در مراکز برآوردشده خود است. این ایده را می‌توان به صورت زیر بیان کرد. ابتدا مراکز مشاهده شده و کران‌های پایین و بالای متغیرهای پاسخ را به صورت مجموع مقادیر نظری نامشخص و باقی‌مانده نسبی آن‌ها مدلسازی می‌کنیم:

$$m = m^* + e$$

$$m - l = (m^* - l^*) + e_L$$

$$m + u = (m^* + u^*) + e_U$$

که در آن e ، e_L و e_U بردارهای باقیمانده‌ها و m^* ، l^* و u^* بردارهای مقادیر نظری مربوط به مراکز و پهناهای متغیر پاسخ با بعدهای $n \times 1$ هستند. این مقادیر از نظر مدل رگرسیون پارامترسازی می‌شود:

$$m^* = Fa$$

$$l^* = bm^* + d \quad (1.3)$$

$$u^* = gm^* + h$$

که در آن F ماتریس طرح با بعد $n \times (p+1)$ است و سطر عمومی آن $f'_i = [f_1(x_i), \dots, f_p(x_i)]$ صورت رگرسیون مشاهده i را از نظر مناسب بودن توابع انتخابی بردار مشاهده شده از متغیرهای توضیحی قطعی x_i نشان می‌دهد. پارامترهای a با بعد $1 \times (p+1)$ و (b, g, d, h) به ترتیب ضرایب رابطه خطی بین مراکز و توابع X_j و رابطه خطی بین پهناهای مشاهده شده و مراکز برآوردشده هستند. در نهایت، 1 نشان دهنده بردار $(n \times 1)$ از یک‌ها است.

روند برآورد پارامترهای فوق بر مبنای روش LS شامل مینیمم‌سازی فاصله بین مقادیر مشاهده شده برای متغیر پاسخ $\tilde{y}_i = (m_i, l_i, u_i)_{LR}$ ($i = 1, \dots, n$) و مقدار برآورد شده آن $\hat{y}_i = (m_i^*, l_i^*, u_i^*)_{LR}$ ($i = 1, \dots, n$) که در آن m_i^* ، l_i^* و u_i^* از رابطه (۱.۳) بدست می‌آیند.

۲.۳ روش برآورد

۱.۲.۳ فاصله و تابع هدف

بنا بر ضابطه LS، پارامترهای مدل (۱.۳) را باید با مینیمم‌سازی مجذور فاصله بین مقادیر مشاهده شده متغیر پاسخ، $\tilde{y}$ و مقادیر برآورد شده متناظر آن‌ها، $\hat{y}$ که در مدل (۱.۳) تعریف شد، برآورد کرد. با استفاده از فاصله اقلیدسی معرفی شده در تعریف ۴.۴.۲ داریم:

$$\begin{aligned} \Delta_{LR}^2 &= \|\mathbf{m} - \mathbf{m}^*\|^2 + \|(\mathbf{m} - \lambda \mathbf{l}) - (\mathbf{m}^* - \lambda \mathbf{l}^*)\|^2 + \|(\mathbf{m} + \rho \mathbf{u}) - (\mathbf{m}^* + \rho \mathbf{u}^*)\|^2 \\ &= (\mathbf{m} - \mathbf{m}^*)'(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*) + ((\mathbf{m} - \mathbf{m}^*) - \lambda(\mathbf{l} - \mathbf{l}^*))'((\mathbf{m} - \mathbf{m}^*) - \lambda(\mathbf{l} - \mathbf{l}^*)) \\ &\quad + ((\mathbf{m} - \mathbf{m}^*) + \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*))'((\mathbf{m} - \mathbf{m}^*) + \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)) \\ &= (\mathbf{m} - \mathbf{m}^*)'(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*) \\ &\quad + (\mathbf{m} - \mathbf{m}^*)'(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*) - \lambda(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*)'(\mathbf{l} - \mathbf{l}^*) - \lambda(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*)(\mathbf{l} - \mathbf{l}^*)' \\ &\quad + \lambda^2(\mathbf{l} - \mathbf{l}^*)'(\mathbf{l} - \mathbf{l}^*) + (\mathbf{m} - \mathbf{m}^*)'(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*) + \rho(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*)'(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\ &\quad + \rho(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)' + \rho^2(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)'(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \\ &= 3(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*)'(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*) - 2\lambda(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*)'(\mathbf{l} - \mathbf{l}^*) + \lambda^2(\mathbf{l} - \mathbf{l}^*)'(\mathbf{l} - \mathbf{l}^*) \\ &\quad + 2\rho(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*)'(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) + \rho^2(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)'(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*) \end{aligned} \quad (2.3)$$

که در آن پارامترهای λ و ρ به صورت $\lambda = \int_0^1 L^{-1}(\omega) d\omega$ و $\rho = \int_0^1 R^{-1}(\omega) d\omega$ تعریف می‌شوند. با توجه به عبارت آخر (۶.۲)، فاصله دورسو، مراکز و پهناها را با λ و ρ وزن‌دار می‌کند. این وزن معمولاً کمتر از یک است مگر هنگامی که تابع عضویت اهمیت نسبتاً بیشتری برای نقاط دور از مرکز قائل باشد. البته وزن‌های مراکز بزرگ‌تر از وزن‌های متعلق به پهناها است. بنابراین بوسیله λ و ρ در برآورد LS پارامترهای رگرسیون، یک ضابطه هدف تعریف می‌کنیم تا به مراکز و پهناهای متغیر فازی، وزن‌های مناسب نسبت دهیم. بویژه اینکه توجه به شکل خاص تابع عضویت که هر داده فازی را مشخص می‌کند، وزن‌ها از قبل برای روش برآورد، محاسبه می‌شود.

بنا بر فاصله (۲.۳) می‌توان تابع هدف LS را برحسب پارامترهای a, b, g, d و h در مدل

(۱.۳) قرار دهیم:

$$\begin{aligned}
 & \min_{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{h}} \Delta_{LR}^{\gamma}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{h}) \\
 &= \gamma (\mathbf{m} - \mathbf{F}\mathbf{a})' (\mathbf{m} - \mathbf{F}\mathbf{a}) - \gamma \lambda (\mathbf{m} - \mathbf{F}\mathbf{a})' (\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{I}\mathbf{d}) \\
 &\quad + \lambda^{\gamma} (\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{I}\mathbf{d})' (\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{I}\mathbf{d}) \\
 &\quad + \gamma \rho (\mathbf{m} - \mathbf{F}\mathbf{a})' (\mathbf{u} - \mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{g} - \mathbf{I}\mathbf{h}) + \rho^{\gamma} (\mathbf{u} - \mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{g} - \mathbf{I}\mathbf{h})' (\mathbf{u} - \mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{g} - \mathbf{I}\mathbf{h}) \\
 &= \gamma (\mathbf{m}'\mathbf{m} - \gamma \mathbf{m}'\mathbf{F}\mathbf{a} + \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a}) - \gamma \lambda (\mathbf{m}'\mathbf{I} - \mathbf{m}'\mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{m}'\mathbf{I}\mathbf{d} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I} + \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{d}) \\
 &\quad + \lambda^{\gamma} (\mathbf{I}'\mathbf{I} - \gamma \mathbf{I}'\mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{b} - \gamma \mathbf{I}'\mathbf{I}\mathbf{d} + \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{b}^{\gamma} + \gamma \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{b}\mathbf{d} + n\mathbf{d}^{\gamma}) \\
 &\quad + \gamma \rho (\mathbf{m}'\mathbf{u} - \mathbf{m}'\mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{g} - \mathbf{m}'\mathbf{I}\mathbf{h} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{u} + \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{g} + \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{h}) \\
 &\quad + \rho^{\gamma} (\mathbf{u}'\mathbf{u} - \gamma \mathbf{u}'\mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{g} - \gamma \mathbf{u}'\mathbf{I}\mathbf{h} + \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{g}^{\gamma} + \gamma \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{g}\mathbf{h} + n\mathbf{h}^{\gamma}) \quad (۳.۳)
 \end{aligned}$$

۲.۲.۳ حل کمترین توان‌های دوم تکراری

برای حل مساله (۳.۳)، مشتقات جزئی Δ_{LR}^{γ} با توجه به پارامترهای $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}, \mathbf{d}$ و $\mathbf{h}$ برابر با صفر قرار داده و سیستم زیر از معادلات را بدست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \Delta_{LR}^{\gamma}}{\partial \mathbf{b}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{m} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a} - \lambda(\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{b} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{d}) = 0 \quad (۴.۳)$$

$$\frac{\partial \Delta_{LR}^{\gamma}}{\partial \mathbf{g}} = 0 \Leftrightarrow -\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{m} + \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a} - \rho(\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{u} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{g} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{h}) = 0 \quad (۵.۳)$$

$$\frac{\partial \Delta_{LR}^{\gamma}}{\partial \mathbf{d}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I} - \mathbf{m}'\mathbf{I} + \lambda(\mathbf{I}'\mathbf{I} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{b} - n\mathbf{d}) = 0 \quad (۶.۳)$$

$$\frac{\partial \Delta_{LR}^{\gamma}}{\partial \mathbf{h}} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I} - \mathbf{m}'\mathbf{I} - \rho(\mathbf{u}'\mathbf{I} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{g} - n\mathbf{h}) = 0 \quad (۷.۳)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Delta_{LR}^{\gamma}}{\partial \mathbf{a}} = 0 \Leftrightarrow & \mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a}'(\gamma - \gamma \lambda \mathbf{b} + \lambda^{\gamma} \mathbf{b}^{\gamma} + \gamma \rho \mathbf{g} + \rho^{\gamma} \mathbf{g}^{\gamma}) = \gamma \mathbf{F}'\mathbf{m} \\
 & - \lambda(\mathbf{F}'\mathbf{m}\mathbf{b} + \mathbf{F}'\mathbf{I} - \mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{d}) + \lambda^{\gamma}(\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{b} - \mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{b}\mathbf{d}) \\
 & + \rho(\mathbf{F}'\mathbf{m}\mathbf{g} + \mathbf{F}'\mathbf{u} - \mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{h}) + \rho^{\gamma}(\mathbf{F}'\mathbf{u}\mathbf{g} - \mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{g}\mathbf{h}) \quad (۸.۳)
 \end{aligned}$$

یک جواب تکراری از سیستم فوق، می‌تواند بر مبنای مجموعه معادلات زیر باشد که با فرض نامنفرد بودن $\mathbf{F}$ ، به ترتیب از معادلات (۴.۳) - (۸.۳) بدست آمده است:

$$\mathbf{b} = \lambda^{-1}(\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a})^{-1} [\lambda(\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{d}) - (\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{m} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a})] \quad (۹.۳)$$

$$\mathbf{g} = \rho^{-1}(\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a})^{-1} [\rho(\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{u} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{I}\mathbf{h}) + (\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{m} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{F}\mathbf{a})] \quad (۱۰.۳)$$

$$d = (n\lambda)^{-1} [\lambda \mathbf{1}' (\mathbf{I} - \mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{b}) - \mathbf{1}' (\mathbf{m} - \mathbf{F}\mathbf{a})] \quad (11.3)$$

$$h = (n\rho)^{-1} [\rho \mathbf{1}' (\mathbf{u} - \mathbf{F}\mathbf{a}\mathbf{g}) + \mathbf{1}' (\mathbf{m} - \mathbf{F}\mathbf{a})] \quad (12.3)$$

$$\mathbf{a} = [\mathbf{3} - \lambda b(\mathbf{3} - \lambda b) + \rho g(\mathbf{3} + \rho g)]^{-1} (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}' \\ \times [\mathbf{3}\mathbf{m} - \lambda(\mathbf{m}b + \mathbf{1} - \mathbf{1}d) + \lambda^2(\mathbf{1}b - \mathbf{1}bd) + \rho(\mathbf{m}g + \mathbf{u} - \mathbf{1}h) + \rho^2(\mathbf{u}g - \mathbf{1}gh)] \quad (13.3)$$

باید توجه داشت که در مقایسه با دیگر الگوریتم‌های تقریب تکراری، روش بهینه‌سازی مبنی بر سیستم معادلات تکراری (۹.۳) - (۱۳.۳)، رسیدن به مینیمم سراسری را تضمین نمی‌کند اما مینیمم موضعی مشخص خواهد شد. به همین دلیل، پیشنهاد می‌شود که الگوریتم تکراری را با چندین نقطه اولیه مقدار دهی کنید تا پایداری جواب بررسی شود. در نهایت خواهیم دید که هرگاه متغیر پاسخ قطعی باشد (شامل $\mathbf{1} = \mathbf{u} = \mathbf{0}$ ، $\lambda = \rho = \mathbf{0}$ ، $b = g = d = h = \mathbf{0}$) برآورد $\mathbf{a}$ مطابق با برآورد LS معمولی $(\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}'\mathbf{m}$ است. بنابراین مدل معرفی شده می‌تواند تعمیم مناسبی از مدل رگرسیون خطی کلاسیک باشد که متغیر پاسخ آن مبهم و غیردقیق است.

۳.۲.۳ ویژگی‌های جواب LS برای مدل پیشنهادی

در این بخش به اثبات گزاره‌هایی می‌پردازیم که ویژگی‌های کاربردی جواب LS در بخش ۲.۲.۳ را نشان می‌دهد.

گزاره ۱.۲.۳. برای مدل (۱.۳) و برآوردهای کمترین توان‌های تکراری نسبی (۹.۳) - (۱۳.۳) که در پایان با “^” نشان داده شد داریم،

$$\mathbf{1}'(\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}^*) = \mathbf{0} \quad (14.3)$$

$$\mathbf{1}'(\mathbf{I} - \hat{\mathbf{I}}^*) = \mathbf{0} \quad (15.3)$$

$$\mathbf{1}'(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^*) = \mathbf{0} \quad (16.3)$$

برهان. رابطه (۶.۲) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم،

$$\Delta_{LR}^2 = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}^* \\ (\mathbf{m} - \lambda \mathbf{1}) - (\hat{\mathbf{m}}^* - \lambda \hat{\mathbf{1}}^*) \\ (\mathbf{m} + \rho \mathbf{u}) - (\hat{\mathbf{m}}^* + \rho \hat{\mathbf{u}}^*) \end{pmatrix} \right\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{m} - \mathbf{F}\hat{\mathbf{a}} \\ (\mathbf{m} - \lambda \mathbf{1}) - (\mathbf{F}\hat{\mathbf{a}} - \lambda \mathbf{F}\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}} - \lambda \mathbf{1}\hat{d}) \\ (\mathbf{m} + \rho \mathbf{u}) - (\mathbf{F}\hat{\mathbf{a}} + \rho \mathbf{F}\hat{\mathbf{a}}\hat{g} + \rho \mathbf{1}\hat{h}) \end{pmatrix} \right\|^2 \\ = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{m} - \lambda \mathbf{1} + \lambda \mathbf{1}\hat{d} \\ \mathbf{m} + \rho \mathbf{u} - \rho \mathbf{1}\hat{h} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{F} - \lambda \mathbf{F}\hat{\mathbf{b}} \\ \mathbf{F} + \rho \mathbf{F}\hat{g} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{a}} \right\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{Z}\hat{\mathbf{a}}\|^2 \quad (17.3)$$

که در آن $\mathbf{y}$ و $\mathbf{Z}$ به طور ضمنی در (۱۷.۳) تعریف شده‌اند. در رابطه (۱۷.۳) مساله رگرسیون برای متغیرهای وابسته فازی را به مساله رگرسیون معمولی بین $\mathbf{y}$ (بردار متغیر وابسته) و $\mathbf{Z}$

(ماتریس متغیرهای توضیحی) تبدیل کردیم. برای بردار بهینه $\hat{a}$ داریم،

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Z}'\hat{a} \quad (۱۸.۳)$$

با قرار دادن $\mathbf{y}$ و $\mathbf{Z}$ در رابطه (۱۸.۳) داریم

$$\begin{aligned} & \mathbf{y}'\mathbf{m} + \mathbf{y}'\mathbf{m} - \mathbf{y}'\lambda\mathbf{l} + \mathbf{y}'\lambda\mathbf{l}\hat{d} + \mathbf{y}'\mathbf{m} + \mathbf{y}'\rho\mathbf{u} - \mathbf{y}'\rho\mathbf{l}\hat{h} \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{F}\hat{a} + \mathbf{y}'\mathbf{F}\hat{a} - \mathbf{y}'\lambda\mathbf{F}\hat{a}\hat{b} + \mathbf{y}'\mathbf{F}\hat{a} + \mathbf{y}'\rho\mathbf{F}\hat{a}\hat{g} \\ \Leftrightarrow \circ &= \mathbf{y}'\mathbf{m} - \mathbf{y}'\hat{m}^* + \mathbf{y}'\mathbf{m} - \mathbf{y}'\hat{m}^* + \mathbf{y}'\mathbf{m} - \mathbf{y}'\hat{m}^* - \mathbf{y}'\lambda\mathbf{l} \\ &+ \lambda\mathbf{y}'(\hat{m}^*\hat{b} + \mathbf{l}\hat{d}) + \mathbf{y}'\rho\mathbf{u} - \rho\mathbf{y}'(\hat{m}^*\hat{g} + \mathbf{l}\hat{h}) \\ \Leftrightarrow \circ &= \mathbf{y}'[\mathbf{m} - \hat{m}^*] - \lambda[\mathbf{y}'(1 - \hat{I}^*)] + \rho[\mathbf{y}'(\mathbf{u} - \hat{u}^*)] \end{aligned} \quad (۱۹.۳)$$

با توجه به روابط (۶.۳) و (۷.۳) روابط زیر بدست می‌آید،

$$[\mathbf{y}'(\mathbf{m} - \hat{m}^*)] = \lambda[\mathbf{y}'(1 - \hat{I}^*)] \quad (۲۰.۳)$$

$$[\mathbf{y}'(\mathbf{m} - \hat{m}^*)] = -\rho[\mathbf{y}'(\mathbf{u} - \hat{u}^*)] \quad (۲۱.۳)$$

در نهایت با قراردادن (۲۰.۳) و (۲۱.۳) در رابطه (۱۹.۳) $\circ = \mathbf{y}'(\mathbf{m} - \hat{m}^*)$ بدست می‌آید که اثبات (۱۴.۳) را نتیجه می‌دهد. بعلاوه با قرار دادن (۱۴.۳) در روابط (۲۰.۳) و (۲۱.۳) به ترتیب روابط (۱۵.۳) و (۱۶.۳) اثبات می‌شوند. $\square$

گزاره ۲.۲.۳. باقیمانده‌های $(\mathbf{m} - \hat{m}^*)$ با مراکز تقریبی $\hat{m}^*$ ناهمبسته. به عبارت دیگر

$$(\mathbf{m} - \hat{m}^*)' \hat{m}^* = \circ \quad (۲۲.۳)$$

برهان. از رابطه (۸.۳) داریم

$$\begin{aligned} & \mathbf{F}' \left\{ -\mathbf{y}'(\mathbf{m} - \hat{m}^*) + \lambda(\hat{b}(\mathbf{m} - \hat{m}^*) + (1 - \hat{I}^*)) \right. \\ & \left. - \lambda\hat{b}(1 - \hat{I}^*) - \rho(\hat{g}(\mathbf{m} - \hat{m}^*) + (\mathbf{u} - \hat{u}^*)) - \rho\hat{g}(\mathbf{u} - \hat{u}^*) \right\} = \circ \end{aligned} \quad (۲۳.۳)$$

از روابط (۴.۳) و (۵.۳) به ترتیب به روابط زیر می‌رسیم،

$$\hat{m}^{*'} \left((\mathbf{m} - \hat{m}^*) - \lambda(1 - \hat{I}^*) \right) = \circ \quad (۲۴.۳)$$

$$\hat{m}^{*'} ((\mathbf{m} - \hat{m}^*) + \rho(\mathbf{u} - \hat{u}^*)) = \circ \quad (۲۵.۳)$$

با شروع از (۲۳.۳) داریم

$$\begin{aligned} & \hat{m}^{*'} \left\{ -(\mathbf{m} - \hat{m}^*) - [(\mathbf{m} - \hat{m}^*) - \lambda(1 - \hat{I}^*)] - [(\mathbf{m} - \hat{m}^*) + \rho(\mathbf{u} - \hat{u}^*)] \right. \\ & \left. + \lambda\hat{b}[(\mathbf{m} - \hat{m}^*) - \lambda(1 - \hat{I}^*)] - \rho\hat{g}[(\mathbf{m} - \hat{m}^*) + \rho(\mathbf{u} - \hat{u}^*)] \right\} = \circ \end{aligned} \quad (۲۶.۳)$$

و با قرار دادن (۲۴.۳) و (۲۵.۳) در (۲۶.۳)، $\hat{m}^{*'}(\mathbf{m} - \hat{m}^*) = \circ$ و لذا (۲۲.۳) نتیجه می‌شود. $\square$

گزاره ۳.۲.۳. باقیمانده‌های $(1 - \hat{I}^*)$ و $(u - \hat{u}^*)$ به ترتیب با پهنای تقریبی چپ $\hat{I}^*$ و پهنای تقریبی راست $\hat{u}^*$ ناهمبسته هستند. به عبارت دیگر

$$(1 - \hat{I}^*)' \hat{I}^* = 0$$

$$(u - \hat{u}^*)' \hat{u}^* = 0$$

برهان. در گزاره‌های ۱.۲.۳ و ۲.۲.۳ ثابت شد

$$(1 - \hat{I}^*)' \mathbf{F}\hat{a} = 0 \Leftrightarrow (1 - \hat{I}^*)' \mathbf{F}\hat{a}\hat{b} = 0$$

با قراردادن (۲۲.۳) در (۲۴.۳) و

$$(u - \hat{u}^*)' \mathbf{F}\hat{a} = 0 \Leftrightarrow (u - \hat{u}^*)' \mathbf{F}\hat{a}\hat{g} = 0$$

(با قرار دادن (۲۲.۳) در (۲۵.۳))،

$$(1 - \hat{I}^*)' \mathbf{1} = 0 \Leftrightarrow (1 - \hat{I}^*)' (\mathbf{1}\hat{d}) = 0$$

و

$$(u - \hat{I}^*)' \mathbf{1} = 0 \Leftrightarrow (u - \hat{u}^*)' (\mathbf{1}\hat{h}) = 0$$

لذا عبارت‌های

$$(1 - \hat{I}^*)' \hat{I}^* = (1 - \hat{I}^*)' (\mathbf{F}\hat{a}\hat{b} + \mathbf{1}\hat{d})$$

و

$$(u - \hat{u}^*)' \hat{u}^* = (u - \hat{u}^*)' (\mathbf{F}\hat{a}\hat{g} + \mathbf{1}\hat{h})$$

□

صفر هستند.

۴.۲.۳ جنبه‌های خاص مدل

نکات زیر به برخی ویژگی‌های خاص مرتبط با کاربرد مدل (۱.۳) در شرایط دنیای واقعی تاکید دارند.

نکته ۱.۲.۳ (نامنفی بودن پهنای تقریبی). می‌توان دید که جواب‌های تکراری (۹.۳) – (۱۳.۳) معمولاً نامنفی بودن پهنای تقریبی $\hat{I}^*$ و $\hat{u}^*$ را بطور خودکار تضمین نمی‌کند. برای حل این مساله، راهکارهای مختلفی را می‌توان بکار گرفت [۲۹]. یک روش نامقید شامل مولفه از بردار $n \times 1$ پهنای چپ و راست، تنها مقادیر مثبت را در نظر می‌گیریم و بجای مقادیر منفی ممکن، صفر قرار می‌دهیم. این جواب بر مبنای تفسیر مفهومی پهنای نامنفی است. در واقع، از آن‌جا که پهنای تابع عضویت یک عدد فازی، اندازه‌ای از عدم قطعیت یا فازی بودن

مربوط به عدد است، پهنای $\leq$ برابر با نبود عدم قطعیت است و در اهداف کاربردی می‌توان آن را برابر صفر قرار داد [۲۹]. روش مقید برای حل مساله پهنای منفی [۲۹] بنا بر روش مینیمم‌سازی مقید با محدودیت‌های نامساوی است که در زیر ارائه شده است: این روش شامل (۳.۳) است به طوری که

$$\hat{\mathbf{l}}^* = \hat{\mathbf{m}}^* \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{l} \hat{\mathbf{d}} \geq \mathbf{o}_n$$

$$\hat{\mathbf{u}}^* = \hat{\mathbf{m}}^* \hat{\mathbf{g}} + \mathbf{l} \hat{\mathbf{h}} \geq \mathbf{o}_n$$

می‌توان آن را به صورت یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم در چارچوب مساله کان-تاکر نوشت که با درنظر گرفتن الگوریتم‌های متفاوت و مناسب بهینه‌سازی قابل حل است ([۴۲، ۷۰، ۴۳]).

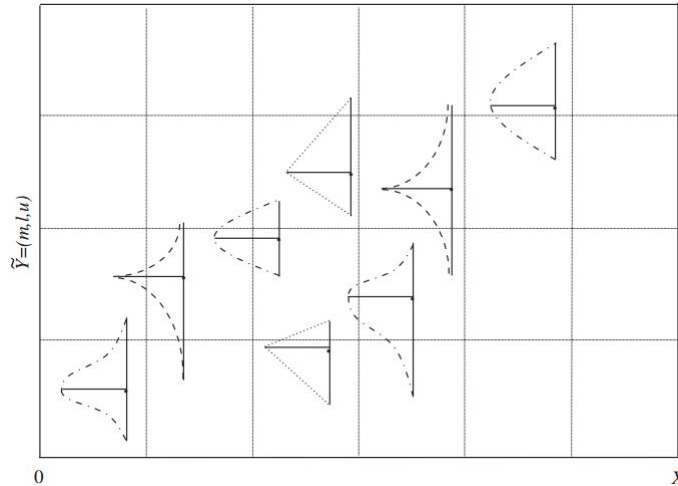
نکته ۲.۲.۳ (حالت متقارن LL). در حالت متقارن ($L = R, l = u$) که متغیر خروجی فازی LL ، با دو مولفه m (مرکز) و l (پهنا) مشخص می‌شود، $\tilde{Y} = (m, l)_{L=R}$ ، فاصله در (۶.۲) بصورت زیر می‌شود

$$\begin{aligned} \Delta_{LL}^2 &= \|\mathbf{m} - \mathbf{m}^*\|^2 + \|(\mathbf{m} - \lambda \mathbf{l}) - (\mathbf{m}^* - \lambda \mathbf{l}^*)\|^2 + \|(\mathbf{m} + \lambda \mathbf{l}) - (\mathbf{m}^* + \lambda \mathbf{l}^*)\|^2 \\ &= 3(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*)'(\mathbf{m} - \mathbf{m}^*) + 2\lambda^2(1 - \mathbf{l}^*)'(1 - \mathbf{l}^*) \end{aligned}$$

بنابراین با قرار دادن $L = R, d = h, b = g, \lambda = \rho$ و $l = u$ در روشی که در بخش ۲.۲.۳ توضیح داده شد، جواب‌های کمترین توان‌های دوم تکراری متقارن به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} b &= (\mathbf{a}' \mathbf{F}' \mathbf{F} \mathbf{a})^{-1} \mathbf{a}' \mathbf{F}' (\mathbf{l} - \mathbf{l} d) \\ d &= n^{-1} \mathbf{l}' (\mathbf{l} - \mathbf{F} \mathbf{a} b) \\ \mathbf{a} &= \left[3 + 2\lambda^2 b^2 \right]^{-1} (\mathbf{F}' \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}' \left[3\mathbf{m} + 2\lambda^2 (\mathbf{l} b - \mathbf{l} b d) \right] \end{aligned}$$

نکته ۳.۲.۳ (مشاهدات با توابع عضویت متفاوت). در برخی موارد، مانند شکل ۱.۳، توابع عضویت متغیر وابسته روی واحدهای مشاهداتی تغییر می‌کند. این تغییر زمانی اتفاق می‌افتد که سطوح مختلفی را برای عدم قطعیت مرتبط با هر پاسخ درنظر بگیریم. به عنوان مثال، ممکن است فردی در باره نظر و عقیده‌اش کاملاً مطمئن باشد اما دیگری تا این حد مطمئن نباشد. این سطوح از عدم قطعیت می‌تواند به ترتیب مربوط به ریشه دوم و توابع عضویت سهمی‌گون باشد. تابع عضویت مثلی را می‌توان به عنوان تابعی درنظر گرفت که سطح متوسطی از عدم قطعیت را نشان می‌دهد.



شکل ۱.۳: مثال‌های متغیر خروجی فازی با انواع مختلف تابع عضویت (متغیر خروجی فازی LR)

بنابراین با در نظر گرفتن (۳.۳) مساله رگرسیون شامل مینیمم‌سازی رابطه زیر است که در آن l^*, m^*, u^* در (۱.۳) تعریف شده است

(۲۷.۳)

$$\Delta_{LR}^*(\Lambda, P) = \|m - m^*\|^2 + \|(m - \Lambda l) - (m^* - \Lambda l^*)\|^2 + \|(m + Pu) - (m^* + Pu^*)\|^2$$

بعلاوه Λ و P مترهای متعامد از مرتبه n هستند که مولفه‌های متعامد آن‌ها به صورت $\lambda_i = \int_0^1 L_i^{-1}(\omega) d\omega$ و $\rho_i = \int_0^1 R_i^{-1}(\omega) d\omega$ و $i = 1, \dots, n$ هستند بویژه مولفه‌های از قبل تعریف شده، که اطلاعات تابع عضویت را ترکیب می‌کنند. تابع زیان در (۲۷.۳) را می‌توان نسبت به a, b, g, d و h مینیمم کرد. با بسط (۲۷.۳) و استفاده از روش مشابه در معادلات (۴.۳) - (۸.۳)، جواب‌های تکراری زیر بدست می‌آیند:

$$b = (a' F' \Lambda' F a)^{-1} [a' F' \Lambda (-m + Fa + \Lambda l - \Lambda l d)] \quad (28.3)$$

$$g = (a' F' P' F a)^{-1} [a' F' P (m - Fa + Pu - P l h)] \quad (29.3)$$

$$d = [tr(\Lambda')]^{-1} [\Lambda' l - \Lambda' F a b - \Lambda' m + \Lambda' F a] \quad (30.3)$$

$$h = [tr(P')]^{-1} [\Lambda' P u - \Lambda' P F a g + \Lambda' P m - \Lambda' P F a] \quad (31.3)$$

$$a = [\Lambda' (F' F) - \Lambda' F' \Lambda F b + F' \Lambda' F b' + \Lambda' F' P F g + F' P' F g']^{-1} \\ + F' [\Lambda' m - \Lambda' (m b + l - l d) + \Lambda' (l b - l b d) + P' (m g + u - l h) + P' (u g - l g h)] \quad (32.3)$$

به طور مشابه جواب‌های تکراری حالت متقارن نیز به راحتی بدست می‌آیند:

$$b = (a'F'\Lambda'Fa)^{-1} a'F'\Lambda'(1 - Id) \quad (33.3)$$

$$d = [tr(\Lambda')]^{-1} 1'\Lambda'(1 - Fab) \quad (34.3)$$

$$a = [3(F'F) + 2(F'\Lambda'F)b']^{-1} F' [3m + 2\Lambda'(1b - Id)] \quad (35.3)$$

توجه داشته باشید که اگر همه واحدهای مشاهده شده با توابع عضویت یکسان مشخص شوند، آن‌گاه $I = \rho I$ و $\Lambda = \lambda I$ و روابط (۲۸.۳) - (۳۲.۳) به (۹.۳) - (۱۳.۳) تبدیل می‌شوند که I ماتریس همانی $n \times n$ است.

نکته ۴.۲.۳ (هم‌خطی چندگانه). این اصطلاح موقعیت‌هایی را نشان می‌دهد که در آن‌ها میان متغیرهای ورودی (یا متغیرهای توضیحی)، همبستگی بالایی وجود دارد. بویژه در تحلیل رگرسیون خطی (قطعی) کلاسیک، هرگاه حداقل یک مقادیر ویژه ماتریس $F'F$ به صفر نزدیک باشد (به جواب کمترین توان‌های تکراری LR در بخش ۲.۲.۳ مراجعه کنید) با مساله هم‌خطی چندگانه مواجه می‌شویم. مشابه تحلیل رگرسیون خطی چندگانه قطعی، روش‌های متفاوتی را می‌توان برای تنظیم مناسب چندخطی بودن در رگرسیون فازی بکار برد. یک روش ممکن برای حل مساله مرتبط با چندخطی در رگرسیون خطی چندگانه با خروجی فازی و ورودی قطعی، استفاده از تحلیل مولفه‌های اصلی است. بویژه می‌توان متغیرهای قطعی اصلی m را با مجموعه‌ای حداقل از m متغیر مصنوعی (متعامد) جابجا کرد. (مولفه‌های اصلی) بوضوح مولفه‌های اصلی انتخاب شده باید از قبل توصیف شوند.

۳.۳ بررسی مدل مناسب

روش برآورد مدل (۱.۳) که در بخش قبل به آن پرداختیم یک ارزیابی قطعی از ضرایب رگرسیون عرضه می‌کند که مراکز فرضی متغیر پاسخ را به X_j ‌ها مرتبط می‌سازد. از آن‌جا که متغیر پاسخ فازی و متغیر توضیحی قطعی است، مدل (۱.۳) به طور ضمنی شامل یک مدل رگرسیون فازی است که برحسب ضرایب رگرسیون فازی بیان می‌شود و می‌تواند به شیوه زیر نوشته شود:

$$\hat{y}_i = \tilde{\beta}_1 f_1(x_i) + \dots + \tilde{\beta}_p f_p(x_i), \quad i = 1, \dots, n \quad (36.3)$$

فرض می‌کنیم $\tilde{\beta}_k$ اعداد فازی LR هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$\tilde{\beta}_k \equiv (\beta_k, \sigma_{L_k}, \sigma_{U_k})_{LR}, \quad k = 1, \dots, p \quad (37.3)$$

که در آن، β_k ، σ_{L_k} و σ_{U_k} به ترتیب مرکز، پهنای چپ و پهنای راست k امین ضریب هستند.

به عنوان نتیجه‌ای از مدل (۳۶.۳)، رابطه بین مولفه‌های پاسخ‌های $\tilde{y}_i$ ($i = 1, \dots, n$) و مولفه‌های ضرایب فازی در (۳۷.۳) را می‌توان با حساب فازی به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} m_i^* &= \beta_1 f_{i1} + \dots + \beta_p f_{ip} \\ l_i^* &= \sigma_{L1} |f_{i1}| + \dots + \sigma_{Lp} |f_{ip}| \quad i = 1, \dots, n \\ u_i^* &= \sigma_{U1} |f_{i1}| + \dots + \sigma_{Up} |f_{ip}| \end{aligned}$$

یا به صورت فشرده بنویسیم

$$\begin{aligned} \mathbf{m}^* &= \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{l}^* &= |\mathbf{F}|\boldsymbol{\sigma}_L \\ \mathbf{u}^* &= |\mathbf{F}|\boldsymbol{\sigma}_U \end{aligned} \quad (38.3)$$

که در آن $|\mathbf{F}|$ ماتریس قدرمطلق‌های $|f_{ik}|$ را نشان می‌دهد. بوضوح ممکن است سیستم (۳۸.۳) را نتوان با برآوردهای m_i^* ، l^* و u^* بررسی کرد که با استفاده از روش LS توصیف شده در بخش قبلی برای مدل (۱.۳) بدست آمده است. اگرچه می‌توانیم روابط (۳۸.۳) را برای دستیابی به برآورد $\boldsymbol{\beta}$ ، σ_L و σ_U بکار گرفت که با برآوردهای $\hat{\mathbf{m}}^*$ ، $\hat{\mathbf{l}}^*$ و $\hat{\mathbf{u}}^*$ سازگار هستند. برای این منظور، فرض کنیم برآوردهای اخیر، روابط حسابی فازی را که با معادلات (۳۸.۳) نشان داده شده (تا مقدار باقیمانده) به شیوه زیر تقریب بزنند:

$$\hat{\mathbf{m}}^* = \mathbf{F}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\tau} \quad (39.3)$$

$$\hat{\mathbf{l}}^* = |\mathbf{F}|\boldsymbol{\sigma}_L + \boldsymbol{\tau}_L \quad (40.3)$$

$$\hat{\mathbf{u}}^* = |\mathbf{F}|\boldsymbol{\sigma}_U + \boldsymbol{\tau}_U \quad (41.3)$$

که در آن $\boldsymbol{\tau}$ ، $\boldsymbol{\tau}_L$ و $\boldsymbol{\tau}_U$ بردارهای باقیمانده‌ها هستند. حال، اصطلاح «سازگاری» را می‌توان برحسب تقریب‌های کمترین توان‌های دوم معمولی OLS در معادلات (۳۹.۳) – (۴۱.۳) بیان کرد. تقریب OLS برای $\boldsymbol{\beta}$ به صورت زیر است

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}'\hat{\mathbf{m}}^* = (\mathbf{F}'\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}'\mathbf{F}\hat{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}}$$

که در آن $\hat{\mathbf{a}}$ تقریب LS از $\mathbf{a}$ است که از مدل (۱.۳) بدست آمده است. برای برآورد پهنای σ_L و σ_U از نرم افزار MATEMATICA استفاده کردیم. بنا بر نتایج فوق می‌توان نتیجه گرفت که برآورد $\hat{\mathbf{m}}^*$ بدست آمده در بخش ۲.۳، برآورد خوبی از مراکز پارامترهای پاسخ فازی $\tilde{\beta}_k$ است. بعلاوه با توجه به $\hat{\sigma}_L$ و $\hat{\sigma}_U$ ، می‌توان برآورد منطقی از پهنای $\tilde{\beta}_k$ ‌ها داشته باشیم.

روی هم رفته مدل پیشنهادی رگرسیون خطی این امکان را به ما می‌دهد که جنبه‌های مختلف عدم قطعیت مرتبط با این تحلیل را مدیریت کنیم. از یک طرف، مدل (۱.۳) با توجه

به فرم x داده شده از متغیرهای توضیحی، مرکز ضرایب رگرسیون و محاسبه مقادیر فازی (مراکز و پهنای) متغیرهای جواب را برآورد می‌کند. از طرف دیگر، بواسطه تقریب LS روابط (۴۰.۳) و (۴۱.۳)، تقریبی منطقی از پهنای ضرایب رگرسیون خواهیم داشت که به ما کمک می‌کند اعتمادی که می‌توان به مقادیر مرکزی این ضرایب $\hat{a}$ داشت ارزیابی کنیم. با توجه به عدم قطعیت مربوط به روش تولید داده، باید به نکته اشاره کنیم:

(۱) روش تحلیل رگرسیون ما در زمینه فعلی، شرطی است بویژه مطالعه وابستگی $\tilde{y}$ روی X_j ها مشروط بر مقادیر مشاهده شده متغیرهای توضیحی، که متغیرهای تصادفی نیستند (مطابق با فرضیات معمول در مدل رگرسیون قطعی کلاسیک).

(۲) به هرحال، حتی تحت شرط (۱) مدل ما روش تصادفی ممکن را که منجر به تولید جواب‌های فازی $\tilde{y}_i (i = 1, \dots, n)$ می‌شود، در نظر نمی‌گیرد. دلایلی برای این انتخاب وجود دارد که قبلاً مطرح شده است.

۴.۳ انتخاب مدل

۱.۴.۳ رده مدل‌های پارامتری

یک منبع عدم قطعیت در تحلیل رگرسیون پارامتری مربوط به انتخاب ماتریس طرح F است. با داشتن p متغیر توضیحی کمی روی n واحد آماری، ساده‌ترین مدل رگرسیون خطی با ماتریس طرح $F = \{f_{ik}\}_{n \times (p+1)}$ مشخص می‌شود که سطر عمومی آن به صورت زیر است:

$$f'_j = [1, x_{j1}, \dots, x_{ji}, \dots, x_{jn}], \quad j = 1, \dots, p. \quad (42.3)$$

در تحلیل رگرسیون قطعی کلاسیک، یک شاخص برای مقایسه مدل‌های رگرسیون مختلف که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد، شاخص ضریب تعیین R^2 یا نسخه تعدیل یافته^۱ آن است که لزوماً بر پایه تجزیه مجموع کل توان‌های دوم متغیر پاسخ (قطعی) است. در این بخش شاخص مناسب R^2 را برای استفاده در حالت رگرسیون فازی تعریف می‌کنیم.

۲.۴.۳ ضریب تعیین چندگانه برای مدل رگرسیون خطی با پاسخ

فازی LR

در این زیربخش، به منظور اندازه‌گیری نیکویی برازش مدل رگرسیون چندگانه با متغیر خروجی فازی LR به معرفی ضریب تعیین (R^2) و ضریب تعیین تعدیل یافته آن ($\bar{R}^2$) می‌پردازیم.

^۱ Adjusted

تجزیه مجموع توان‌های دوم متغیر پاسخ فازی LR

قبل از تمرکز روی نیکویی برازش یک مدل رگرسیون فازی، برخی از نتایج نظری را معرفی می‌کنیم که در تعریف شاخص‌های انطباق کاربرد دارند.

تعریف ۱.۴.۳. برای متغیر خروجی فازی LR با تابع عضویت داده شده در تعریف ۳.۳.۲ می‌توان تعریف کرد:

- مجموع کل توان‌های دوم (SST) متغیر وابسته فازی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} SST &= \|\mathbf{m} - \mathbf{1}\bar{m}\|^2 + \|(\mathbf{m} - \lambda\mathbf{l}) - (\mathbf{1}\bar{m} - \lambda\mathbf{1}\bar{l})\|^2 + \|(\mathbf{m} + \rho\mathbf{u}) - (\mathbf{1}\bar{m} + \rho\mathbf{1}\bar{u})\|^2 \\ &= 3(\mathbf{m} - \mathbf{1}\bar{m})'(\mathbf{m} - \mathbf{1}\bar{m}) - 2\lambda(\mathbf{m} - \mathbf{1}\bar{m})'(1 - \mathbf{1}\bar{l}) + \lambda^2(1 - \mathbf{1}\bar{l})'(1 - \mathbf{1}\bar{l}) \\ &\quad + 2\rho(\mathbf{m} - \mathbf{1}\bar{m})'(\mathbf{u} - \mathbf{1}\bar{u}) + \rho^2(\mathbf{u} - \mathbf{1}\bar{u})'(\mathbf{u} - \mathbf{1}\bar{u}) \end{aligned} \quad (43.3)$$

که در آن $\rho = \int_0^1 R^{-1}(\omega)d\omega$ و $\lambda = \int_0^1 L^{-1}(\omega)d\omega$. توجه داشته باشید که این رابطه برابر با فاصله اقلیدسی تعریف شده بین یک زوج از متغیرهای برداری فازی LR از بردارهای $\tilde{\mathbf{y}} = (\mathbf{m}, \mathbf{l}, \mathbf{u})_{LR}$ و $\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{1}\bar{m}, \mathbf{1}\bar{l}, \mathbf{1}\bar{u})_{LR}$ است که در آن $\bar{m}$ ، $\bar{l}$ و $\bar{u}$ به ترتیب مقدار میانگین m_i ، l_i و u_i ($i = 1, \dots, n$) هستند.

- مجموع رگرسیونی توان‌های دوم SSR، یعنی اختلاف محاسبه شده توسط مدل، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} SSR &= \|(\hat{\mathbf{m}}^* - \mathbf{1}\bar{m})\|^2 + \|(\hat{\mathbf{m}}^* - \lambda\hat{\mathbf{l}}^*) - (\mathbf{1}\bar{m} - \lambda\mathbf{1}\bar{l})\|^2 + \|(\hat{\mathbf{m}}^* + \rho\hat{\mathbf{u}}^*) - (\mathbf{1}\bar{m} + \rho\mathbf{1}\bar{u})\|^2 \end{aligned} \quad (44.3)$$

- باقیمانده مجموع توان‌های دوم یا مجموع خطای توان‌های دوم SSE، یعنی اختلاف محاسبه نشده توسط مدل به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{aligned} SSE &= \|(\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}^*)\|^2 + \|(\mathbf{m} - \lambda\mathbf{l}) - (\hat{\mathbf{m}}^* - \lambda\hat{\mathbf{l}}^*)\|^2 + \|(\mathbf{m} + \rho\mathbf{u}) - (\hat{\mathbf{m}}^* + \rho\hat{\mathbf{u}}^*)\|^2 \\ &= 3(\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}^*)'(\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}^*) - 2\lambda(\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}^*)'(1 - \hat{\mathbf{l}}^*) + \lambda^2(1 - \hat{\mathbf{l}}^*)'(1 - \hat{\mathbf{l}}^*) \\ &\quad + 2\rho(\mathbf{m} - \hat{\mathbf{m}}^*)'(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^*) + \rho^2(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^*)'(\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}^*) \end{aligned} \quad (45.3)$$

- معیار میانگین توان‌های دوم خطای پیشگویی که بر اساس SSE است را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

$$MSPE = \frac{SSE}{n}$$

در گزاره زیر، رابطه بین SST، SSR و SSE را بررسی می‌کنیم.

گزاره ۱.۴.۳. مجموع کل توان‌های دوم، SST، برابر با جمع دو مجموع رگرسیونی توان‌های دوم، SSR، و مجموع خطای توان‌های دوم، SSE است:

$$SST = SSR + SSE \quad (۴۶.۳)$$

برهان. عبارت مربوط به SST را می‌توان با اضافه و کم کردن $\hat{m}^*$ ، $(\hat{m}^* - \lambda \hat{l}^*)$ و $(\hat{m}^* + \rho \hat{u}^*)$ به ترتیب به سه نرم مجذور شده بسط داد. باین کار می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} SST = & SSE + SSR + \mathbf{y}' (\mathbf{m} - \hat{m}^*)' (\hat{m}^* - \mathbf{1}\bar{m}) \\ & + \mathbf{y}' [(\mathbf{m} - \lambda \mathbf{l}) - (\hat{m}^* - \lambda \hat{l}^*)]' [(\hat{m}^* - \lambda \hat{l}^*) - (\mathbf{1}\bar{m} - \lambda \mathbf{1}\bar{l})] \\ & + \mathbf{y}' [(\mathbf{m} + \rho \mathbf{u}) - (\hat{m}^* + \rho \hat{u}^*)]' [(\hat{m}^* + \rho \hat{u}^*) - (\mathbf{1}\bar{m} + \rho \mathbf{1}\bar{u})] \end{aligned}$$

برای اثبات تجزیه (۴۶.۳) باید نشان دهیم عبارت زیر برابر صفر است:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{m} - \hat{m}^*)' (\hat{m}^* - \mathbf{1}\bar{m}) + [(\mathbf{m} - \lambda \mathbf{l}) - (\hat{m}^* - \lambda \hat{l}^*)]' [(\hat{m}^* - \lambda \hat{l}^*) - \mathbf{1}\bar{m} - \lambda \mathbf{1}\bar{l}] \\ & + [(\mathbf{m} + \rho \mathbf{u}) - (\hat{m}^* + \rho \hat{u}^*)]' [(\hat{m}^* + \rho \hat{u}^*) - (\mathbf{1}\bar{m} + \rho \mathbf{1}\bar{u})] \end{aligned} \quad (۴۷.۳)$$

بعد از محاسبات جبری، (۴۷.۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & \mathbf{y}' [(\mathbf{m} - \hat{m}^*)' \hat{m}^* - (\mathbf{m} - \hat{m}^*)' \mathbf{1}\bar{m}] \\ & - \lambda [(\mathbf{m} - \hat{m}^*)' \hat{l}^* + (\mathbf{m} - \hat{m}^*)' \mathbf{1}\bar{l}] - \lambda [(1 - \hat{l}^*)' \hat{m}^* - (1 - \hat{l}^*)' \mathbf{1}\bar{m}] \\ & + \lambda^2 [(1 - \hat{l}^*)' \hat{l}^* - (1 - \hat{l}^*)' \mathbf{1}\bar{l}] + \rho [(\mathbf{m} - \hat{m}^*)' \hat{u}^* - (\mathbf{m} - \hat{m}^*)' \mathbf{1}\bar{u}] \\ & + \rho [(u - \hat{u}^*)' \hat{m}^* - (u - \hat{u}^*)' \mathbf{1}\bar{m}] + \rho^2 [(u - \hat{u}^*)' \hat{u}^* - (u - \hat{u}^*)' \mathbf{1}\bar{u}], \end{aligned}$$

□

که با توجه به گزاره‌های ۱.۲.۳ - ۳.۲.۳ برابر صفر است.

شاخص‌های نیکویی برازش

دورسو [۲۶] تعریف زیر را با توجه به ضریب تعیین چندگانه R^2 و ضریب تعیین تعدیل یافته چندگانه $\bar{R}^2$ تعمیم داد.

تعریف ۲.۴.۳ (ضریب تعیین چندگانه R^2). ضریب تعیین چندگانه برای مدل (۱.۳) به صورت زیر است:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} \quad (۴۸.۳)$$

این رابطه نسبت بین اختلاف متغیر خروجی فازی LR محاسبه شده توسط مدل رگرسیون و اختلاف کلی متغیر خروجی فازی LR را نشان می‌دهد. بنابر گزاره ۱.۴.۳، می‌توان دید این

اختلاف در محدوده $[0, 1]$ است هرگاه مدل درباره تغییر متغیر پاسخ فازی LR توضیحی نداده باشد. در این حالت، به عنوان مثال اگر $p = 1$ یعنی اگر یک مدل رگرسیون خطی ساده فازی را در نظر بگیریم، خطوط رگرسیون فازی افقی خواهند بود. خط مرکز و خطوط پهناهای چپ و راست نیز افقی هستند. در حالی که اگر $R^2 = 1$ ، انطباق کامل خواهیم داشت یعنی مدل همه مشاهدات را به طور کامل درونیایی و سپس تغییر کلی متغیر خروجی فازی LR را محاسبه می‌کند. در نتیجه می‌توان گفت هرگاه $R^2 \approx 1$ این مدل از نظر انطباق با داده‌های مشاهده شده رضایت بخش است. به علت عدم محاسبه تعداد متغیرهای ورودی p در (۴۸.۳) و در نتیجه تعداد پارامترهای مدل (۱.۳) و اینکه R^2 را یک تابع غیر نزولی از p در نظر می‌گیریم، می‌توان استدلال کرد که در استفاده از $\max R^2$ ، این شاخص نمی‌تواند بهترین مدل را مشخص کند. برای حل این مشکل، صورت تعدیل یافته R^2 تعریف می‌شود.

تعریف ۳.۴.۳ (ضریب تعیین تعدیل یافته چندگانه $\bar{R}^2$). ضریب تعیین تعدیل یافته چندگانه را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\bar{R}^2 = 1 - \left(1 - R^2\right) \frac{n-1}{n-p-4}. \quad (49.3)$$

این شاخص شامل یک عامل تعدیل یافته بر مبنای تعداد (p) ضرایب رگرسیون در مدل مرکزی، دو ضریب در مدل پهناهای چپ و دو ضریب در مدل پهناهای راست است.

۵.۳ الگوریتم انتخاب متغیر به شیوه پیشرو

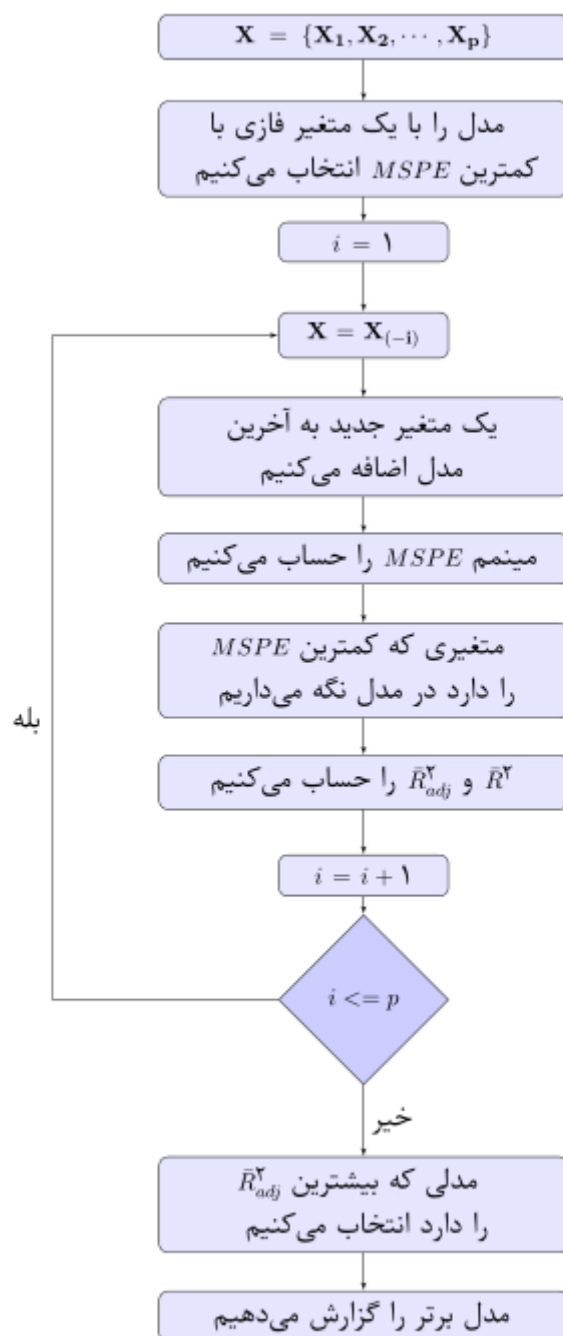
برای انتخاب مدل مناسب ابتدا مدل‌های تک متغیره می‌سازیم، از بین آنها مدلی که کمترین MSPE را داشته باشد انتخاب کرده و متغیر وارد شده در مدل را حفظ می‌کنیم. با حفظ این متغیر در مدل، از سایر متغیرهایی که در مدل باقی ماندند، متغیر دیگری به مدل اضافه کرده و MSPE هریک از آن‌ها را محاسبه نموده و مجدداً هرکدام که دارای کمترین میزان MSPE باشد انتخاب می‌شود.

به این ترتیب دو متغیر در مدل انتخاب می‌شوند. این کار را تا جایی ادامه می‌دهیم که همه متغیرها وارد مدل شده باشند. در هر مرحله بعد از انتخاب مدل با کمترین MSPE، مقدار R^2 و $\bar{R}^2$ انتخاب می‌کنیم. زمانی که همه متغیرها وارد مدل شدند، از میان مدل‌های با کمترین MSPE، مدلی را به عنوان مدل مناسب انتخاب می‌کنیم که بیشترین مقدار $\bar{R}^2$ را داشته باشد (شکل ۲.۳).

۶.۳ مثال کاربردی

در این مثال به تحلیل رابطه وابستگی غلظت جوی کربن مونوکسید (CO) روی مجموعه‌ای از متغیرهای هواسنجی می‌پردازیم و از داده‌های گردآوری شده از ۵ اکتبر ۱۹۹۲ تا ۲۵ اکتبر این

سال در رم استفاده می‌کنیم. در این ۲۱ روز، غلظت CO (mg/m^3) در هر ساعت مشاهده شد. سپس در مدت مشابه متغیرهای هواسنجی (توضیحی) به طور روزانه ثبت شدند: X_1 (°C) دما (T), X_2 (%) رطوبت نسبی (RH), X_3 (mbar) فشار جوی (AP), X_4 (mm) بارش (R), X_5 (mW/cm^2) تابش (Rad) و X_6 (m/s) سرعت باد (WS). با در نظر گرفتن «روز» به عنوان واحد مشاهدات، باید ۲۴ مشاهده CO را که روزانه ثبت شده، خلاصه کرد. راه معقول برای انجام این کار و جلوگیری از اتلاف اطلاعات مرتبط، با انتخاب یک مقدار خاص (مثلا میانه مشاهدات) که اطلاعات بدست آمده از ۲۴ مقدار در یک روز را خلاصه کرده و مقدار آن را روی تابع عضویت عدد فازی متناظر انتقال می‌دهیم، اگر خانواده LR را در نظر بگیریم، می‌توان مراکز را به عنوان مقادیر میانه مشاهدات روزانه ثبت شده تعریف کرد. پهنای چپ به عنوان متوسط انحراف معیارها از میانه برای مقادیر کمتر از میانه هستند. پهنای راست به عنوان متوسط انحراف معیارها از میانه برای مقادیر بیشتر از میانه هستند. بعلاوه فرض می‌کنیم که شکل تابع عضویت LR مثلثی است (در نتیجه $\lambda = \rho = \frac{1}{3}$). داده‌های مشاهده شده در جدول‌های ۱.۳ و ۲.۳ ارائه شده‌اند.



شکل ۲.۳: الگوریتم انتخاب متغیر به شیوه پیشرو

جدول ۱.۳: متغیرهای توضیحی

X_6	X_5	X_4	X_3	X_2	X_1
$WS(m/s)$	$Rad(mW/cm^2)$	$R(mm)$	$AP(mbar)$	$RH(\%)$	$T(^{\circ}C)$
۲/۸۷	۰/۱۵	۰/۹۰	۱۰۰۹/۹	۸۲/۲۷	۱۹/۰۴
۱/۱۲	۰/۱۶	۰/۹۰	۱۰۱۷/۵	۸۸/۷۰	۱۷/۶۶
۰/۸۵	۰/۱۴	۰/۰۲	۱۰۲۵/۶	۸۲/۵۱	۱۸/۱۵
۰/۴۵	۰/۱۶	۰/۰۰	۱۰۳۲/۱	۷۹/۴۶	۱۸/۴۳
۰/۹۱	۰/۲۲	۰/۰۰	۱۰۲۷/۱	۶۸/۸۵	۲۰/۶۷
۱/۰۷	۰/۲۹	۰/۰۲	۱۰۲۰/۰	۷۹/۳۹	۲۱/۶۴
۰/۶۹	۰/۲۴	۱/۳۰	۱۰۱۸/۲	۸۸/۸۷	۱۸/۸۵
۰/۴۰	۰/۱۶	۰/۰۹	۱۰۲۰/۹	۸۸/۹۲	۱۶/۱۶
۰/۸۳	۰/۱۳	۰/۰۰	۱۰۲۸/۰	۸۳/۵۲	۱۷/۰۲
۲/۰۹	۰/۰۴	۰/۰۵	۱۰۲۵/۳	۸۷/۵۱	۱۴/۷۲
۰/۹۰	۰/۰۴	۰/۰۴	۱۰۱۸/۵	۸۶/۰۴	۱۵/۸۹
۱/۲۲	۰/۰۶	۰/۹۳	۱۰۱۵/۶	۹۱/۷۷	۱۷/۸۳
۳/۰۰	۰/۱۳	۰/۰۲	۱۰۱۲/۳	۸۳/۶۲	۲۰/۹۶
۱/۷۵	۰/۱۳	۰/۰۲	۱۰۲۰/۴	۷۳/۱۰	۱۷/۰۷
۰/۷۳	۰/۰۱	۰/۰۹	۱۰۲۸/۶	۸۰/۳۸	۱۴/۷۱
۱/۸۷	۰/۱۱	۰/۲۴	۱۰۲۶/۴	۸۷/۹۸	۲۰/۴۱
۲/۳۹	۰/۱۷	۰/۰۲	۱۰۲۳/۱	۹۰/۱۳	۲۰/۱۳
۱/۲۵	۰/۰۸	۰/۰۰	۱۰۲۲/۴	۶۴/۹۵	۱۵/۶۴
۱/۰۲	۰/۰۰	۰/۰۱	۱۰۲۱/۶	۸۰/۱۶	۱۳/۲۲
۰/۷۰	۰/۰۰	۰/۴۴	۱۰۲۳/۴	۸۶/۱۴	۱۲/۹۸
۱/۱۷	۰/۰۰	۰/۰۱	۱۰۲۸/۶	۸۹/۱۲	۱۳/۱۰

جدول ۲.۳: متغیر پاسخ

$\tilde{Y} = (m, l, u)_{LR}$		
(CO) (mg/m^3)		
مرکز m	پهنای چپ l	پهنای راست u
۱/۱۵	۰/۸۴	۰/۶۰
۲/۹۸	۲/۸۳	۲/۰۲
۳/۹۲	۱/۹۷	۱/۹۷
۴/۶۵	۱/۸۹	۲/۲۴
۳/۹۸	۲/۱۳	۲/۱۳
۳/۳۵	۲/۶۳	۱/۵۸
۳/۱۳	۲/۳۹	۱/۷۱
۴/۱۵	۲/۴۱	۲/۴۱
۳/۹۶	۲/۴۸	۲/۱۰
۴/۰۷	۲/۰۱	۲/۳۸
۳/۳۰	۲/۱۶	۱/۸۳
۴/۰۲	۲/۳۵	۲/۷۸
۲/۰۶	۳/۱۹	۱/۵۹
۱/۳۷	۰/۶۶	۰/۶۶
۳/۳۵	۱/۷۳	۱/۷۳
۱/۴۵	۱/۱۵	۰/۹۷
۲/۷۴	۱/۴۱	۱/۴۱
۲/۴۴	۱/۹۵	۱/۳۹
۲/۷۹	۲/۲۳	۱/۵۹
۳/۳۱	۱/۷۳	۱/۲۴
۴/۰۲	۲/۹۶	۲/۱۱

جدول ۳.۳: روند انتخاب متغیر

$SST = ۶۶/۱۵۴۲$				
متغیرهای توضیحی	$\max \bar{R}^2$	$\max R^2$	$\min MSPE$	k
$X_۶$	۰/۲۳۶۹	۰/۴۲۷۷	۱/۸۰۲۸	۱
$X_۳, X_۶$	۰/۲۶۰۶	۰/۴۸۲۴	۱/۶۳۰۴	۲
$X_۲, X_۳, X_۶$	۰/۳۱۳۵	۰/۵۵۳۸	۱/۴۰۵۵	۳
$X_۲, X_۳, X_۴, X_۶$	۰/۲۸۱۲	۰/۵۶۸۷	۱/۳۵۸۴	۴
$X_۲, X_۳, X_۴, X_۵, X_۶$	۰/۲۱۹۴	۰/۵۷۰۶	۱/۳۵۲۴	۵
$X_۱, X_۲, X_۳, X_۴, X_۵, X_۶$	۰/۱۳۶۵	۰/۵۶۸۲	۱/۳۵۹۹	۶

در این مثال ابتدا تمامی متغیرها را وارد مدل کردیم. در بین تمام متغیرها، متغیر $X_۶$ دارای کمترین مقدار $MSPE$ است. این متغیر را حفظ نموده و سپس در بین سایر متغیرها، مجدداً مشاهده کردیم متغیر $X_۳$ شامل کمترین مقدار $MSPE$ می‌باشد. این روند را ادامه دادیم تا جایی تمام متغیرها وارد مدل شدند. در نهایت با محاسبه مقدار R^2 و $\bar{R}^2$ مشاهده کردیم بهترین مدل دارای متغیرهای توضیحی (RH) ، $X_۲$ ، (AP) ، $X_۳$ و (WS) ، $X_۶$ است. توجه داشته باشید که مقدار R^2 بزرگ نیست یعنی متغیرهای ورودی مدنظر تنها بخشی از تغییرات متغیر خروجی را توصیف می‌کنند. پارامترهای برآوردشده از مدل انتخابی به صورت زیر است:

$$\hat{a} = (-۰/۶۲, ۰/۰۳, ۰/۰۶, -۰/۷۰); \quad \hat{b} = ۳۸۳/۱۲۲;$$

$$\hat{g} = -۵۴۸/۸۸۸; \quad \hat{d} = -۴/۲۴۸; \quad \hat{h} = ۳۶۷۴.$$

برای پهنای برآورد شده نتایج زیر را داریم:

$$\hat{\sigma}_{L1} = ۰/۳۶, \quad \hat{\sigma}_{L2} = ۰/۰۱۶, \quad \hat{\sigma}_{L3} = ۰, \quad \hat{\sigma}_{L4} = ۰;$$

$$\hat{\sigma}_{U1} = ۰/۲۵, \quad \hat{\sigma}_{U2} = ۰/۱۴, \quad \hat{\sigma}_{U3} = ۰, \quad \hat{\sigma}_{U4} = ۰.$$

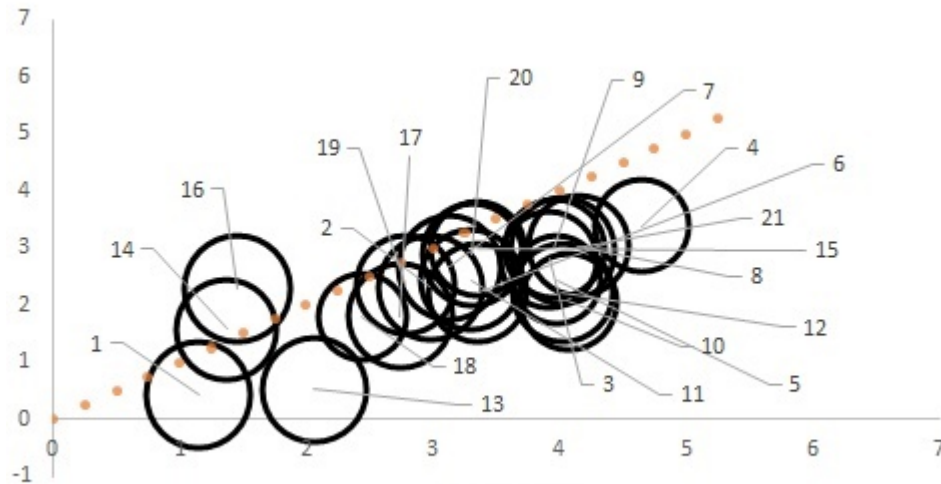
پهنای برآوردشده در مورد ضرایب رگرسیون فشار جوی و سرعت باد صفر هستند، به این معنی که بر مبنای این مجموعه از داده‌ها و با توجه به مدل انتخاب شده، عدم دقت و نادرستی در این ضرایب دیده نمی‌شود. اما نمی‌توان قطعیت این مقادیر را از آن نتیجه گرفت. مدل رگرسیونی بدست آمده به صورت زیر است:

$$\hat{y}_i = (-۰/۶۲, ۰/۳۶, ۰/۲۵)\tilde{x}_{i1} + (۰/۰۳, ۰/۰۱۶, ۰/۱۴)\tilde{x}_{i2}$$

$$+ (۰/۰۶, ۰, ۰)\tilde{x}_{i3} + (-۰/۷, ۰, ۰)\tilde{x}_{i4}$$

دقت کنید که ضرایب رگرسیون برآوردشده، یک رابطه معکوس بین سرعت باد (X_6) و $CO(\tilde{Y})$ را نشان می‌دهد.

برای مشاهده چگونگی انطباق مدل بر داده‌های فازی مشاهده شده به صورت بصری، نمودار حبابی فازی را پیشنهاد می‌کنیم (شکل ۳.۳) (رجوع کنید به [۲۶]).



شکل ۳.۳: نمودار حبابی فازی

مراکز مشاهده و برآورد شده به ترتیب روی محور x و محور y مشخص شده‌اند. برای هر واحد مشاهداتی i که $(i = 1, \dots, n)$ ، یک دایره با مرکز $(m_i, \hat{m}_i^*)$ و قطری به اندازه مجموع اختلافات (مقدار دقیق) بین پهنای چپ و راست مشاهده و برآورد شده $(|l_i - \hat{l}_i^*| + |u - \hat{u}_i^*|)$ ، رسم می‌کنیم. نزدیکی دایره‌ها به نیمساز صفحه مربوط به مدلی است که مراکز داده فازی را به درستی برآورد کرده است. همچنین کوچکترین قطر دایره مربوط به مدلی است که پهنای اطلاعات فازی را به درستی برآورد کرده است. نمودار حبابی فازی نشان می‌دهد که بعضی از مشاهدات به خوبی بر مدل انتخاب شده منطبق نیستند (بویژه ۱، ۱۰ و ۱۳).

۷.۳ روش چند هدفه در برآورد ضرایب مدل رگرسیون خطی با ورودی- خروجی فازی LR

ربيعی و همکاران [۱] مدل رگرسیون خطی برای مطالعه وابستگی متغیر پاسخ فازی LR بر روی یک مجموعه از متغیرهای توضیحی فازی LR به کمک روش چند هدفه فازی را معرفی کردند. مزیت مهم این روش آن است که دو مدل دیگر رگرسیون فازی یعنی زمانی که فقط ضرایب فازی LR و یا زمانی که فقط متغیر توضیحی فازی LR باشند را در برمی گیرد. با معیار نیکویی برازش مناسب مدل فوق ارزیابی می شود.

۱.۷.۳ مدل رگرسیون خطی برای متغیرهای فازی

فرض کنید تمامی مفروضات بخش های قبل برقرار باشند و همچنین متغیرهای توضیحی $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_p$ نیز اعداد فازی LR به صورت $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}, \gamma_{L_{ij}}, \gamma_{U_{ij}})_{LR}$ باشند. مدل مورد نظر به صورت زیر است:

$$\hat{y}_i = \tilde{\beta}_1 \tilde{x}_{i1} + \dots + \tilde{\beta}_2 \tilde{x}_{i2} + \tilde{\beta}_p \tilde{x}_{ip} \quad (50.3)$$

از آن جا که در مدل (50.3) ضرب دو عدد فازی صورت می گیرد و برای ضرب LR یک رابطه تقریبی مطرح شده است که به علامت اعداد فازی LR برمی گردد، بدون کاسته شدن از کلیت مساله $\tilde{x}_{ij}$ را می توان اعداد فازی مثبت فرض کرد (در صورت منفی بودن با اضافه کردن مقداری مثبت به مرکز آن ها می توان آن ها را به صورت اعداد فازی مثبت در نظر گرفت).

از طرفی به دلیل مجهول بودن ضرایب مدل، تعیین علامت $\tilde{\beta}_j$ ها مقدور نیست. برای رفع این مشکل می توان $\tilde{\beta}_j$ را به صورت $\tilde{\beta}_j = \tilde{\beta}_j' + \tilde{\beta}_j''$ نوشت که در آن $\tilde{\beta}_j' = (\beta_j', \sigma_{L_j}', \sigma_{U_j}')$ و $\tilde{\beta}_j'' = (-\beta_j'', \sigma_{L_j}'', \sigma_{U_j}'')$ برای $j = 1, \dots, p$

(51.3)

$$0 \leq \sigma_{L_j}' \leq \beta_j', \quad 0 \leq \sigma_{U_j}'' \leq \beta_j'', \quad \sigma_{U_j}' \geq 0, \quad \sigma_{L_j}'' \geq 0, \quad x_{i1} = 1, \quad \gamma_{L_{i1}} = 0, \quad \gamma_{U_{i1}} = 0$$

همچنین از آن جایی که به ازای هر سه عدد فازی LR، $\tilde{A}$ ، $\tilde{B}$ و $\tilde{C}$ داریم [50]

$$(\tilde{A} + \tilde{B}).\tilde{C} \subseteq \tilde{A}\tilde{C} + \tilde{B}\tilde{C}$$

رابطه (۵۰.۳) را می‌توان به صورت زیر بسط داد:

$$\begin{aligned}\hat{y}_i &= \sum_{j=1}^p (\tilde{\beta}'_j + \tilde{\beta}''_j) \tilde{x}_{ij} \\ &\subseteq \sum_{j=1}^p (\tilde{\beta}'_j \tilde{x}_{ij} + \tilde{\beta}''_j \tilde{x}_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^p [(\beta'_j, \sigma'_{L_j}, \sigma'_{U_j})_{LR}(x_{ij}, \gamma_{L_{ij}}, \gamma_{U_{ij}})_{LR} - (\beta''_j, \sigma''_{U_j}, \sigma''_{L_j})_{LR}(x_{ij}, \gamma_{L_{ij}}, \gamma_{U_{ij}})_{LR}] \\ &\simeq \sum_{j=1}^p (\beta'_p x_{ij} - \beta''_j x_{ij}, \beta'_j \gamma_{L_{ij}} + x_{ij} \sigma'_{L_j} + \beta''_j \gamma_{U_{ij}} + x_{ij} \sigma''_{L_j} \\ &\quad, \beta'_j \gamma_{U_{ij}} + x_{ij} \sigma'_{U_j} + \beta''_j \gamma_{L_{ij}} + x_{ij} \sigma''_{U_j})_{LR}\end{aligned}$$

روابط زیر بین پارامترهای متغیر پاسخ $\tilde{Y}_i$ و متغیرهای توضیحی $\tilde{x}_{ip}, \dots, \tilde{x}_{i1}$ و ضرایب فازی برقرار است:

$$m_i^* = \sum_{j=1}^p (\beta'_j x_{ij} - \beta''_j x_{ij}) \quad (52.3)$$

$$l^* = \sum_{j=1}^p (\beta'_j \gamma_{L_{ij}} + x_{ij} \sigma'_{L_j} + \beta''_j \gamma_{U_{ij}} + x_{ij} \sigma''_{L_j}) \quad (53.3)$$

$$u^* = \sum_{j=1}^p (\beta'_j \gamma_{U_{ij}} + x_{ij} \sigma'_{U_j} + \beta''_j \gamma_{L_{ij}} + x_{ij} \sigma''_{U_j}) \quad (54.3)$$

برای رسیدن به ضرایب مدل رگرسیونی کفایت توابع هدف زیر را به طور هم‌زمان تحت قیود مشخص (۵۱.۳) مینیمم کرد یعنی:

$$\min Q_1 = \sum_{i=1}^n (m_i^* - m_i)^2 \quad (55.3)$$

$$\min Q_2 = \sum_{i=1}^n (l^* - l_i)^2 \quad (56.3)$$

$$\min Q_3 = \sum_{i=1}^n (u^* - u_i)^2 \quad (57.3)$$

برای رسیدن به این مهم، می‌توان از روش برنامه‌ریزی چند هدفه استفاده کرد که در ادامه به آن اشاره می‌شود [۱۰۱].

۲.۷.۳ برنامه‌ریزی چند هدفه

روش‌های حل مسایل برنامه‌ریزی ریاضی یک هدفی، در شصت سال گذشته بسیار مطالعه شده‌است. از آن‌جا که بسیاری از مسایل مهم در جهان واقعی بیشتر از یک هدف دارند، لذا

تصمیم گیرنده‌ها دریافتند که باید جواب‌هایی را با توجه به معیارها محاسبه کنند. مسئله برنامه‌ریزی چند هدفی MOP^۲ به صورت زیر مطرح شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \{z_1(\mathbf{x}) = f_1(\mathbf{x})\} \\ \min \quad & \{z_2(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})\} \\ & \vdots \\ \min \quad & \{z_k(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x})\} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}. \end{aligned} \quad (58.3)$$

کان و تاکر [۶۷] ابتدا این مساله را فرمول‌بندی کردند. آن‌ها همچنین شرایط بهینگی را برای وجود جواب‌ها بیان نمودند. آرو و همکاران [۶] شرایط بهینگی دیگری را معرفی کردند. باد [۹] پایه برنامه‌ریزی خطی چند هدفی MOLP^۳ و آن‌چه که امروز به عنوان روش سیمپلکس چند هدفی مطرح می‌شود را بنا نهاد. از آن زمان تاکنون، برنامه‌ریزی چند هدفی در جهات مختلفی با کاربردهایی موفق، توسعه یافته است. به وضوح یک مسئله برنامه‌ریزی چند هدفی مانند یک مسئله برنامه‌ریزی یک هدفی است، با این تفاوت که به جای فقط یک تابع هدف، چند تابع هدف وجود دارد.

مساله (58.3) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{z}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}. \end{aligned} \quad (59.3)$$

که در آن $\mathbf{C}_j \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{C} = (C_1, \dots, C_k)' \in \mathbb{R}^{k \times n}$ ، $\mathbf{z}(\mathbf{x}) = (z_1(\mathbf{x}), \dots, z_k(\mathbf{x}))' = \mathbf{C}(\mathbf{x})$ و $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ و $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ، $j = 1, \dots, k$.

روش‌های محاسباتی مختلفی برای تعیین جواب‌های بهینه یک مسئله برنامه‌ریزی چند هدفی وجود دارد. از میان این روش‌ها می‌توان روش وزنی، روش قیدی و روش ماکس-مین وزنی را نام برد. در این مقاله از روش وزنی استفاده شده است که به شرح زیر است:

روش وزنی

در این روش به هر تابع هدف z_j عدد $w_i \in \mathbb{R}^+$ به عنوان وزن یا اهمیت آن تابع، توسط تصمیم گیرنده، نسبت داده و سپس مساله زیر حل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^k w_i z_i(\mathbf{x}) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in S \end{aligned} \quad (60.3)$$

که در آن $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k)'$ بردار مضارب وزنی است و برای $i = 1, \dots, k$ روابط $w_i \geq 0$ و $\sum_{i=1}^k w_i = 1$ برقرار است. قضایا و تعاریف مرتبط با این موضوع در [۱۰۱] بیان و اثبات شده‌اند.

^۲ Multiple optimization programming

^۳ Multiple optimization linear programming

در این قسمت با استفاده از روش وزنی بیان شده در قسمت قبل و روابط (۵۵.۳) – (۵۷.۳) به مساله برنامه‌ریزی زیر می‌رسیم:

$$\min_{\beta} \sum_{i=1}^3 w_i Q_i \quad (61.3)$$

پس به طور کلی مدل پیشنهادی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} \min \quad & w_1(m_i^* - m_i)^2 + w_2(l^* - l_i)^2 + w_3(u^* - u_i)^2 \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq \sigma'_{L_j} \leq \beta'_{j'}, \quad 0 \leq \sigma''_{U_j} \leq \beta''_{j'}, \quad \sigma'_{U_j} \geq 0, \quad \sigma''_{L_j} \geq 0, \quad x_{i1} = 1, \quad \gamma_{Li1} = 0, \quad \gamma_{Ui1} = 0 \end{aligned} \quad (62.3)$$

این مساله یک مساله برنامه‌ریزی بهینه‌سازی مقید است که روش‌های مختلفی برای حل آن وجود دارد. در این مقاله تمام محاسبات با استفاده از نرم افزار LINGO17.0 انجام پذیرفته است. در رگرسیون فازی یک موضوع مهم، توان تشریح مدل می‌باشد. در این بخش میانگین توان دوم خطای پیشگویی (MSPE) را به عنوان معیاری برای اندازه‌گیری برازش یک مدل رگرسیونی به کار می‌بریم.

۸.۳ مثال کاربردی

برای نشان دادن عملکرد مدل از یک مثال کاربردی در مورد ارزیابی خسارت در یک ساختار استفاده می‌کنیم [۱۱۴]. برای ارزیابی واقعی خسارت در ساختارهای موجود ما باید قسمت‌های مختلفی از ساختار را برای تشخیص نقض‌های مختلف اعم از ساختاری و غیر ساختاری بررسی کنیم. در اینجا یک بخش کوچک از یک ساختار، مثلاً یک تیغه در نظر گرفته شده است و از ما خواسته شده تا کل خسارت این بخش از ساختار را ارزیابی کنیم. برای این منظور، عوامل فیزیکی مانند: ترک خوردگی، زنگ زدگی و شرایط محیطی به عنوان معیارهایی از خسارت کلی و ۱۶ داده آزمایشی برای ارزیابی خسارت کلی در نظر گرفته می‌شود. (جدول ۴.۳)

جدول ۴.۳: داده‌های ارزیابی خسارت [۱۱۴]

نمونه آموزشی	خواص			ارزیابی کلی		d
	ترک خوردگی X_1	زنگ زدگی X_2	شرایط محیطی X_3	$\bar{Y}$	$\hat{Y}$	
۱	(۰,۰۰۰/۱۵)	(۰,۰۰۰/۱۵)	(۰,۰۰۰/۴)	(۱,۰/۴,۰)	(۰/۵۵,۰/۱,۰/۱۶)	۰/۴۳۴۶
۲	(۰/۶,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۸,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰,۰۰۰/۴)	(۱,۰/۴,۰)	(۱/۲,۰/۴,۰/۱۶)	۰/۱۹۰۲
۳	(۰/۸,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۸,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰,۰۰۰)	(۱,۰/۴,۰)	(۱/۲۴,۰/۴,۰/۱۶)	۰/۲۴۰۲
۴	(۰/۸,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۲,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰,۰۰۰)	(۰/۵,۰/۲,۰/۲)	(۰/۸۱,۰/۲۷,۰/۱۶)	۰/۲۴۹۵
۵	(۰/۴,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰,۰۰۰/۱۵)	(۰,۰۰۰/۴)	(۰,۰۰۰/۴)	(۰/۶۱,۰/۱۲,۰/۱۶)	۰/۶۷۷۴
۶	(۰/۴,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۶,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۵,۰/۲,۰/۲)	(۱,۰/۴,۰)	(۱/۰۶,۰/۳۷,۰/۱۴)	۰/۰۶۲۱
۷	(۰/۶,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۸,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۵,۰/۲,۰/۲)	(۱,۰/۴,۰)	(۱/۲۴,۰/۴۲,۰/۱۴)	۰/۲۴۱۶
۸	(۰/۸,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۴,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۵,۰/۲,۰/۲)	(۱,۰/۴,۰)	(۰/۹۹,۰/۳۳,۰/۱۴)	۰/۰۴۰۱
۹	(۰/۶,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۲,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۵,۰/۲,۰/۲)	(۰/۵,۰/۲,۰/۲)	(۰/۸۲,۰/۲۹,۰/۱۴)	۰/۲۵۰۸
۱۰	(۰/۸,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۲,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۵,۰/۲,۰/۲)	(۰/۵,۰/۲,۰/۲)	(۰/۸۵,۰/۲۹,۰/۱۴)	۰/۳۰۵۲
۱۱	(۰,۰۰۰/۱۵)	(۰/۶,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۱,۰/۴,۰)	(۱,۰/۴,۰)	(۱/۰۳,۰/۳۶,۰/۱۳)	۰/۰۴۲۵
۱۲	(۰/۲,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۶,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۱,۰/۴,۰)	(۱,۰/۴,۰)	(۱/۰۷,۰/۳۹,۰/۱۳)	۰/۰۶۲۷
۱۳	(۰/۴,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۸,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۱,۰/۴,۰)	(۱,۰/۴,۰)	(۱/۲۴,۰/۴۳,۰/۱۳)	۰/۲۴۳۰
۱۴	(۰/۸,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۴,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۱,۰/۴,۰)	(۱,۰/۴,۰)	(۱/۰۲,۰/۳۴,۰/۱۳)	۰/۰۵۴۸
۱۵	(۰/۲,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۴,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۱,۰/۴,۰)	(۱,۰/۴,۰)	(۰/۹۲,۰/۳۴,۰/۱۳)	۰/۰۲۹۹
۱۶	(۰/۲,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۰/۲,۰/۱۵,۰/۱۵)	(۱,۰/۴,۰)	(۰/۵,۰/۲,۰/۲)	(۰/۷۸,۰/۳۰,۰/۱۳)	۰/۲۰۳۸
MPE						۰/۲۰۸۰

در این مطالعه مدل رگرسیونی به صورت زیر است:

$$\hat{y}_i = \beta_1 \tilde{x}_{i1} + \beta_2 \tilde{x}_{i2} + \beta_3 \tilde{x}_{i3} + \beta_4 \tilde{x}_{i4} \quad (۶۳.۳)$$

با استفاده از (۶۱.۳) برای بدست آوردن یک مدل بهینه، با فرض $w_2 = ۰/۲$ ، $w_1 = ۰/۶$ و $w_3 = ۰/۲$ مدل رگرسیونی برابر است با:

$$\hat{y}_i = (۰/۵۴۶۷, ۰/۱۰۰۵, ۰) \tilde{x}_{i1} + (۰/۱۵۹۸, ۰, ۰) \tilde{x}_{i2} + (۰/۷۰۱۳, ۰/۲۱۵۹, ۰) \tilde{x}_{i3} + (۰/۰۶۵۶, ۰, ۰) \tilde{x}_{i4}$$

برای بررسی کارایی مدل با استفاده از رابطه (؟؟) شاخص (MPE) محاسبه شده و برابر با $۰/۲۰۸۰$ می‌باشد که کوچک بودن آن نشان‌دهنده مناسب بودن مدل پیشنهادی است.

فصل ۴

تحلیل رگرسیون فازی استوار با استفاده از روش کمترین میانه توان‌های دوم

در این فصل با استفاده از روش کمترین میانه توان‌های دوم و روش کمترین توان‌های دوم فازی، یک روش رگرسیون چندگانه خطی فازی استوار با متغیر پاسخ فازی و متغیرهای توضیحی غیر فازی ارائه می‌دهیم.

۱.۴ مفاهیم کلی

متغیر پاسخ فازی $\tilde{y}$ و p متغیر توضیحی کمی غیر فازی $X = \{X_1, \dots, X_p\}$ را در نظر بگیرید که روی n واحد مشاهده شده است. داده‌ها با $(\tilde{y}_i, \mathbf{x}_i)$ ، $i = 1, \dots, n$ نشان داده می‌شود که در آن $\mathbf{x}'_i = (x_{i1}, \dots, x_{ip})$ یا به اختصار به صورت $(\tilde{y}, \mathbf{x})$ است. فرض می‌کنیم $\tilde{y}$ اعداد فازی LR به صورت $\tilde{y} \equiv (m, l, u)_{LR}$ است که m ، l و u به ترتیب بردارهایی از مراکز، پهنای چپ و پهنای راست باشند. همان‌طور که در بخش ۱.۳ دیدیم مراکز و پهنای متغیر پاسخ LR را

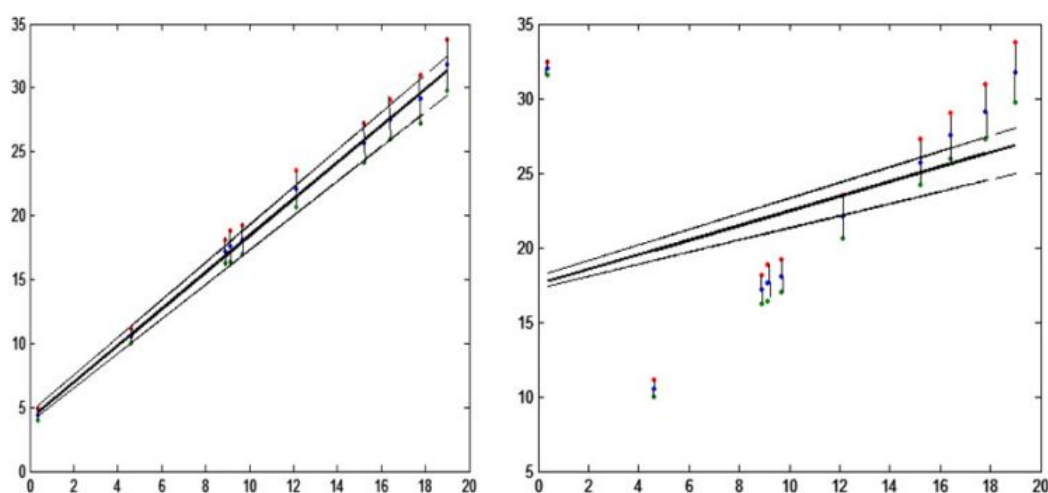
با سه مدل رگرسیون خطی، به طور همزمان مدلسازی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \mathbf{m} = \mathbf{m}^* + \mathbf{e}, & \mathbf{m}^* = \mathbf{F}\mathbf{a} \\ \mathbf{m} - \mathbf{l} = (\mathbf{m}^* - \mathbf{l}^*) + \mathbf{e}_L, & \mathbf{l}^* = \mathbf{b}\mathbf{m}^* + \mathbf{d}\mathbf{l} \\ \mathbf{m} + \mathbf{u} = (\mathbf{m}^* + \mathbf{u}^*) + \mathbf{e}_U, & \mathbf{u}^* = \mathbf{g}\mathbf{m}^* + \mathbf{h}\mathbf{l} \end{cases} \quad (1.4)$$

برآورد LS با مینیمم‌سازی مجذور فاصله (۶.۲) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tilde{\Delta}^2 = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}^*\|^2 + \|(\mathbf{m} - \lambda\mathbf{l}) - (\mathbf{m}^* - \lambda\mathbf{l}^*)\|^2 + \|(\mathbf{m} + \rho\mathbf{u}) - (\mathbf{m}^* + \rho\mathbf{u}^*)\|^2 \quad (2.4)$$

برآورد LS به داده‌های دورافتاده حساس هستند. شکل ۱.۴ تاثیر یک داده دورافتاده را روی برآوردهای پارامتری و روی مدل مناسب داده‌ها نشان می‌دهد.



شکل ۱.۴: مثالی از تاثیر تنها یک داده دورافتاده در مدل LS

می‌توان انواع مختلف داده‌های دورافتاده را با توجه به موارد زیر داشت:

- یک یا بیش از یک متغیر توضیحی غیرفازی
- مراکز یا پهنای فازی وابسته به متغیر $\tilde{Y}$
- مدل رگرسیون فازی
- ترکیبی از موارد فوق

شکل ۲.۴ انواع مختلف داده‌های دورافتاده را با توجه به موارد زیر نشان می‌دهد:

(a) X ،

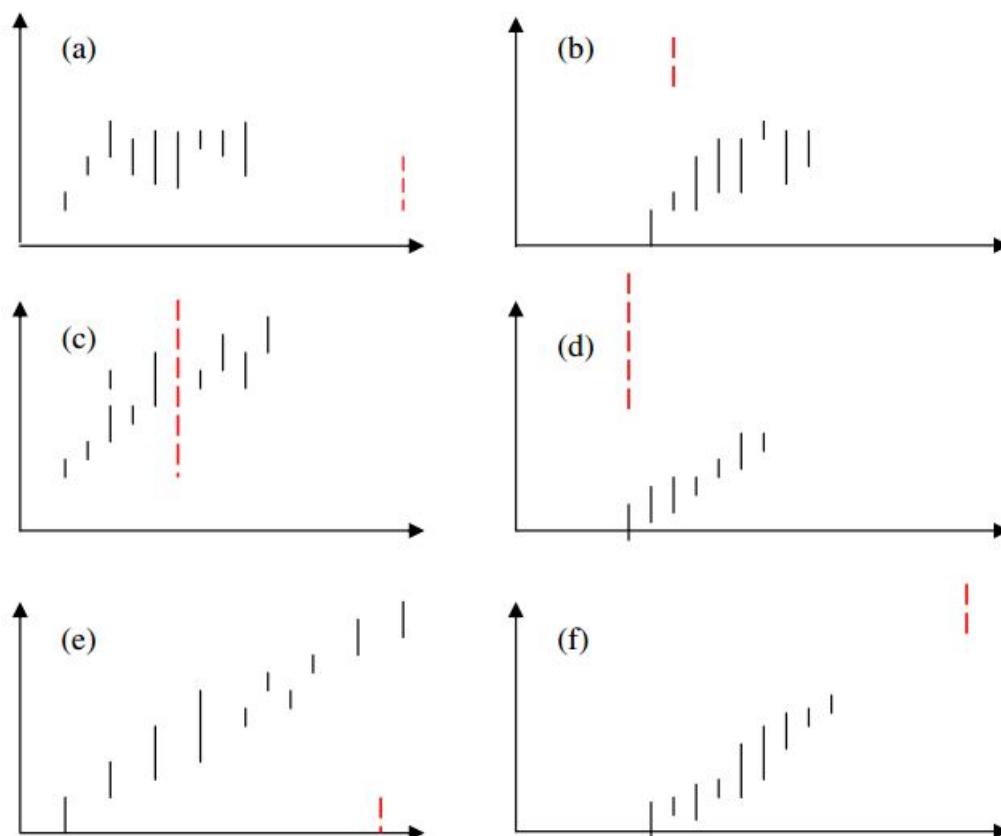
(b) مرکز $\tilde{y}$ ،

(c) پهنای $\tilde{y}$

(d) مراکز و پهنای $\tilde{y}$

(e) مدل رگرسیون (بدون توجه به X و $\tilde{y}$)

(f) X و مراکز $\tilde{y}$ (بدون توجه به مدل).



شکل ۲.۴: مثال‌هایی از پراکندگی‌های فازی با انواع مختلف داده‌های دورافتاده فازی

۱.۱.۴ ضوابط شناسایی داده‌های دورافتاده

روش‌های متعددی برای شناسایی وجود داده‌های دورافتاده بر مبنای نمایش گرافیکی یا فرایندهای تحلیلی ارائه شده‌اند.

در تحلیل گرافیکی، با کمبود ابزار برای دستیابی به مساله داده‌های دورافتاده در محیط فازی مواجه هستیم. با این حال ابزارهای استاندارد را می‌توان به راحتی در محدوده فازی تعمیم داد. نمودار جعبه‌ای یا نمودار جعبه و خطوط عمودی، ویژگی‌های اصلی داده‌ها را از طریق پنج وضعیت توصیف می‌کنند: کوچکترین مشاهده، چارک پایینی (Q_1)، میانه (Q_2)، چارک بالایی (Q_3) و بزرگترین مشاهده (ماکزیمم نمونه). همچنین با نمودار جعبه‌ای می‌توان

نشان داد که در صورت وجود، کدام مشاهدات را می‌توان به عنوان داده دورافتاده در نظر گرفت. معمولاً داده‌های دورافتاده در ۱/۵ برابری دامنه میان چارکی قرار دارند [۴۱، ۱۱۲]. در محیط فازی، می‌توان نمودارهای جعبه‌ای را به منظور شناسایی داده‌های دورافتاده در توزیع‌های مراکز، پهنای و متغیرهای ورودی کنار هم رسم کرد. همان‌طور که در فصل قبل بیان شد، در مورد داده‌های فازی LL (مقارن) می‌توان یک نمودار حبابی رسم کرد که در آن متغیر ورودی روی محور x ، مرکز متغیر پاسخ فازی روی محور y و با حباب‌هایی متناسب با پهنای آنها باشد. با توجه به نماهای ترسیم یا محل‌های دوایر روند کلی، مشخص می‌کنیم کدام مشاهدات نسبت به متغیر ورودی، مرکز، پهنای متغیر پاسخ یا احتمالاً ترکیبی از سه مولفه $(\tilde{y}_i, x_i)$ ، غیر عادی هستند. کپی و همکارانش [۲۶] برای بررسی تناسب مدل رگرسیون فازی با خروجی فازی LR و ورودی عددی، از نمودار حبابی استفاده کردند.

۲.۴ تحلیل رگرسیون فازی استوار

۱.۲.۴ روش برآورد: روش‌های کمترین میانه توان‌های دوم (LMS) و کمترین توان‌های دوم وزن دار (WLS)

تقریب‌های LS پارامترهای a, b, g, d و h در مدل (۱.۴) با مینیمم‌سازی (۲.۴) بدست می‌آید که می‌توان آن را به صورت مجموع توان دوم باقی‌مانده‌ها به صورت زیر نوشت:

$$\tilde{\Delta}^2 = \sum_{i=1}^n \left[(m_i - m_i^*)^2 + ((m_i - \lambda l_i) - (m_i^* - \lambda l_i^*))^2 + ((m_i - \rho u_i) - (m_i^* - \rho u_i^*))^2 \right] \quad (3.4)$$

بنا بر روش کمترین میانه توان‌های دوم که در قالب رگرسیون استاندارد توسط روسو [۹۷] معرفی شد، مدل رگرسیون فازی استوار با مینیمم‌سازی کمیت زیر، یعنی میانه توان‌های دوم باقی‌مانده‌ها انجام می‌شود:

$$\tilde{\Delta}_{\text{med}}^2 = \text{med}_i [(m_i - m_i^*)^2 + ((m_i - \lambda l_i) - (m_i^* - \lambda l_i^*))^2 + ((m_i - \rho u_i) - (m_i^* - \rho u_i^*))^2] \quad (4.4)$$

روش برآورد را می‌توان به صورت زیر شرح داد:

ابتدا یک روش باز نمونه‌گیری تصادفی [۹۹] را بکار می‌گیریم که در آن چندین زیرمجموعه از $(p+5)$ مشاهده را در نظر می‌گیریم که $(p+5)$ تعداد پارامترهای نامشخص مدل (۱.۴) است. با افزایش عدد زیرمجموعه‌ها، احتمال دستیابی به حداقل یک زیرمجموعه بدون داده‌های دورافتاده افزایش می‌یابد.

فرض کنید F_s یک ماتریس $((p+5) \times (p+5))$ از سطرها F است که مرتبط با مشاهدات انتخابی و m_s, l_s و u_s به ترتیب زیربردارهای مربوطه $((p+5) \times 1)$ از m, l و u هستند. برای هر

زیرمجموعه، همانطور که در فصل قبل بیان شد ضرایب رگرسیون با روش LS برآورد می‌شوند. روش تکراری به صورت زیر است:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{\Psi} - \lambda b(\mathbf{\Psi} - \lambda b) + \rho g(\mathbf{\Psi} + \rho g)]^{-1} (\mathbf{F}'_s \mathbf{F}_s)^{-1} \mathbf{F}'_s \{ \mathbf{\Psi} \mathbf{m}_s - \lambda(\mathbf{m}_s b + \mathbf{l}_s - \mathbf{l}d) + \lambda^2(\mathbf{l}_s b - \mathbf{l}bd) + \rho(\mathbf{m}_s g + \mathbf{u}_s - \mathbf{l}h) + \rho^2(\mathbf{u}_s g - \mathbf{l}gh) \} \quad (۵.۴)$$

$$b = \lambda^{-1} (\mathbf{a}' \mathbf{F}'_s \mathbf{F}_s \mathbf{a})^{-1} \mathbf{a}' \mathbf{F}'_s [\lambda(\mathbf{l}_s - \mathbf{l}d) - (\mathbf{m}_s - \mathbf{F}_s \mathbf{a})] \quad (۶.۴)$$

$$g = \rho^{-1} (\mathbf{a}' \mathbf{F}'_s \mathbf{F}_s \mathbf{a})^{-1} \mathbf{a}' \mathbf{F}'_s [\rho(\mathbf{u}_s - \mathbf{l}h) + (\mathbf{m}_s - \mathbf{F}_s \mathbf{a})] \quad (۷.۴)$$

$$d = ((p + \delta)\lambda)^{-1} \mathbf{l}' [\lambda(\mathbf{l}_s - \mathbf{F}_s \mathbf{a}b) - (\mathbf{m}_s - \mathbf{F}_s \mathbf{a})] \quad (۸.۴)$$

$$h = ((p + \delta)\rho)^{-1} \mathbf{l}' [\rho(\mathbf{u}_s - \mathbf{F}_s \mathbf{a}g) + (\mathbf{m}_s - \mathbf{F}_s \mathbf{a})] \quad (۹.۴)$$

مشابه با فصل سوم پارامترهای رگرسیون با استفاده از روش‌های عددی برآورد می‌شوند. جواب بهینه LMS تنها یک زیرمجموعه از مشاهدات، احتمالاً زیرمجموعه‌ای بدون داده‌های دورافتاده، را بکار می‌گیرد؛ اگرچه احتمال آن می‌رود که مقدار قابل توجهی از مشاهدات شامل باقیمانده داده‌های دورافتاده نباشند. برای بهبود برآوردها، بررسی این مشاهدات نیز موثر خواهد بود. بنابراین، LMS را با روش کمترین توان‌های دوم وزن‌دار (WLS) ترکیب می‌کنیم. در عمل، وزن‌های کمتر را به داده‌هایی اختصاص می‌دهیم که به عنوان داده‌های دورافتاده مشخص شده‌اند. تشخیص این مشاهدات بر مبنای باقیمانده‌های استوار حاصل از LMS است. یک روش ساده برای وزن‌دار کردن مشاهدات بر مبنای باقیمانده‌ها عبارت است از:

$$w_i = \begin{cases} 1 & |r_i^2 / \hat{\sigma}| \leq c \\ 0 & |r_i^2 / \hat{\sigma}| > c \end{cases} \quad (۱۰.۴)$$

که در آن r_i^2 ، i -مین باقیمانده (توان دوم) بدست آمده از LMS به صورت زیر است:

$$r_i^2 = \left[(m_i - m_i^*)^2 + ((m_i - \lambda l_i) - (m_i^* - \lambda l_i^*))^2 + ((m_i + \rho u_i) - (m_i^* + \rho u_i^*))^2 \right] \quad (۱۱.۴)$$

یک برآورد استوار از σ را می‌توان به صورت $\hat{\sigma} = \sqrt{\text{med}(r_i^2)}$ ارایه کرد. همچنین $r_i^2 / \hat{\sigma}$ ، باقیمانده‌های استاندارد شده و c یک ثابت مثبت (معمولاً $c = 2/5$) است. در متون رگرسیون استوار فازی، توابع وزنی مختلفی مطرح شده‌اند که از آن جمله می‌توان به دو مورد زیر اشاره کرد:

$$w_i = \begin{cases} 1, & |r_i^2 / \hat{\sigma}| \leq c_1 \\ \left(c_1 - |r_i^2 / \hat{\sigma}| \right) / (c_1 - c_2), & c_1 < |r_i^2 / \hat{\sigma}| \leq c_2 \\ 0, & \text{سایر نقاط} \end{cases}$$

$$w_i = \begin{cases} 1, & |r_i^2/\hat{\sigma}| \leq c_1 \\ \circ/\Delta, & c_1 < |r_i^2/\hat{\sigma}| \leq c_2 \\ \circ, & |r_i^2/\hat{\sigma}| > c_2 \end{cases} \quad (12.4)$$

که در آن c_1 ، c_2 و c_3 ثابت هستند.

با تعیین وزن‌ها، درون‌یابی با LMS نیازمند مینیمم‌سازی تابع هدف زیر است:

$$\tilde{\Delta}^2 = \|\mathbf{m} - \mathbf{m}^*\|_W^2 + \|(\mathbf{m} - \lambda \mathbf{l}) - (\mathbf{m}^* - \lambda \mathbf{l}^*)\|_W^2 + \|(\mathbf{m} + \rho \mathbf{u}) - (\mathbf{m}^* + \rho \mathbf{u}^*)\|_W^2 \quad (13.4)$$

که در آن $\|\cdot\|_W$ نرم وزن‌دار و $\mathbf{W}$ ماتریس قطری است که مولفه‌های آن وزن‌های w_i است. برای مینیمم‌سازی (۱۳.۴)، مشتقات جزئی $\tilde{\Delta}^2$ را نسبت به پارامترهای a, b, d, g و h برابر صفر قرار داده و دستگاه حاصل از معادلات را حل می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Delta}^2}{\partial a} = 0 &\iff \mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{a}'(\lambda - \lambda b + \lambda^2 b^2 + \lambda^2 \rho g + \rho^2 g^2)\mathbf{a} \\ &= \lambda \mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{m} - \lambda(\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{m}b + \mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{l} - \mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{l}d) + \lambda^2(\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{l}b - \mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{l}bd) \\ &\quad + \rho(\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{m}g + \mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{u} - \mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{l}h) + \rho^2(\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{u}g - \mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{l}gh) \\ \frac{\partial \tilde{\Delta}^2}{\partial b} = 0 &\iff \lambda \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{a}b = -(\mathbf{m}'\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{a} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{a}) + \lambda(\mathbf{l}'\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{a} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{l}d) \\ \frac{\partial \tilde{\Delta}^2}{\partial g} = 0 &\iff \rho \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{a}g = (\mathbf{m}'\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{a} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{a}) + \rho(\mathbf{u}'\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{a} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{l}h) \\ \frac{\partial \tilde{\Delta}^2}{\partial d} = 0 &\iff \lambda \mathbf{l}'\mathbf{W}\mathbf{l}d = (-\mathbf{m}'\mathbf{W}\mathbf{l} + \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{l}) + \lambda(\mathbf{l}'\mathbf{W}\mathbf{l} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{l}b) \\ \frac{\partial \tilde{\Delta}^2}{\partial h} = 0 &\iff \rho \mathbf{l}'\mathbf{W}\mathbf{l}h = (\mathbf{m}'\mathbf{W}\mathbf{l} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{l}) + \rho(\mathbf{u}'\mathbf{W}\mathbf{l} - \mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{l}g) \end{aligned}$$

با فرض نامنفرد بودن $\mathbf{F}$ ، جواب تکراری دستگاه فوق برابر است با

$$\mathbf{a} = [\lambda - \lambda b(\lambda - \lambda b) + \rho g(\lambda + \rho g)]^{-1}(\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{F})^{-1}\mathbf{F}'\mathbf{W} \cdot [\lambda \mathbf{m} - \lambda(\mathbf{m}b + \mathbf{l} - \mathbf{l}d) + \lambda^2(\mathbf{l}b - \mathbf{l}bd) + \rho(\mathbf{m}g + \mathbf{u} - \mathbf{l}h) + \rho^2(\mathbf{u}g - \mathbf{l}gh)] \quad (14.4)$$

$$b = \lambda^{-1}(\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{a})^{-1}\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}[\lambda(\mathbf{l} - \mathbf{l}d) - (\mathbf{m} - \mathbf{F}\mathbf{a})] \quad (15.4)$$

$$g = \rho^{-1}(\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}\mathbf{F}\mathbf{a})^{-1}\mathbf{a}'\mathbf{F}'\mathbf{W}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{l}h) + (\mathbf{m} - \mathbf{F}\mathbf{a})] \quad (16.4)$$

$$d = (\mathbf{l}'\mathbf{W}\mathbf{l}\lambda)^{-1}\mathbf{l}'\mathbf{W}[\lambda(\mathbf{l} - \mathbf{F}\mathbf{a}b) - (\mathbf{m} - \mathbf{F}\mathbf{a})] \quad (17.4)$$

$$h = (\mathbf{l}'\mathbf{W}\mathbf{l}\rho)^{-1}\mathbf{l}'\mathbf{W}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{F}\mathbf{a}g) + (\mathbf{m} - \mathbf{F}\mathbf{a})] \quad (18.4)$$

۲.۲.۴ مراحل روش برآورد WLS-LMS

در این بخش، مراحل روش برآورد استوار پیشنهاد شده توسط دورسو و همکاران [۳۲] را توضیح می‌دهیم:

۱. n مشاهده از یک متغیر وابسته LR فازی و p متغیر مستقل غیرفازی داده شده‌اند. بطور تصادفی زیر نمونه‌ای از $(p + 5)$ مشاهده انتخاب می‌کنیم.

۲. پارامترهای a_1, b_1, d_1, g_1 و h_1 بر مبنای زیرنمونه انتخاب شده با استفاده از روابط (۵.۴) – (۹.۴) برآورد می‌شوند.

۳. در مرحله اول، برآوردهای $a_1^*, b_1^*, d_1^*, g_1^*$ و h_1^* برای محاسبه مقادیر برآورده شده l, m و u به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} m_1^* &= Fa_1^* \\ l_1^* &= m_1^* b_1^* + l d_1^* \\ u_1^* &= m_1^* g_1^* + l h_1^* \end{aligned}$$

و سپس باقیمانده‌های توان دوم به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$r_{i1}^2 = [(m_i - m_{i1}^*)^2 + ((m_i - l_{i1}) - (m_{i1}^* - l_{i1}^*))^2 + ((m_i + \rho u_i) - (m_{i1}^* + \rho u_{i1}^*))^2]$$

۴. در آخر، میانه باقیمانده‌های توان دوم برآورد شده، یعنی $\text{med}_i(r_{i1}^2)$ محاسبه می‌شوند.

مراحل ۱-۴ تا رسیدن به همگرایی تکرار می‌شوند. در k -امین تکرار، $a_k^*, b_k^*, d_k^*, g_k^*$ و h_k^* مقادیر برآورد شده مربوطه m_k^*, l_k^* و u_k^* ، باقیمانده‌های توان دوم r_{ik}^2 و $\text{med}_i(r_{ik}^2)$ بدست می‌آیند. اگر میانه باقیمانده‌های توان دوم برآورد شده در k مین تکرار، کوچک‌تر از مقادیر حاصل در تکرار (λ^{-1}) باشد، مقادیر $a_k^*, b_k^*, d_k^*, g_k^*$ و h_k^* را به عنوان برآوردهای پارامتری بهینه در نظر می‌گیریم.

برای بهبود این برآوردها، با اختصاص یک وزن به هر مشاهده، از روش WLS استفاده می‌کنیم. این روش به چندین تکرار از جواب (۱۴.۴) – (۱۸.۴) نیاز دارد. برای مقداردهی اولیه جواب بازگشتی، از برآوردهای بهینه حاصل از LMS استفاده می‌کنیم.

۳.۲.۴ نکات

نکته ۱.۲.۴. مشابه مدل رگرسیون فازی معمولی، وزن‌های ρ و λ پهنای کوچک‌تر از وزن مراکز هستند. لذا وزن‌های پهنای دورافتاده کمتر از وزن مراکز دورافتاده هستند.

نکته ۲.۲.۴. برآوردهای WLS با نسبت دادن وزن صفر یا وزن کوچک به مشاهداتی که باقیمانده آن‌ها از LMS بیشتر از حد تعیین شده است، همه مشاهدات را در نظر می‌گیرد. اگر داده دورافتاده وجود نداشته باشد، به تمام مشاهدات وزن‌های واحد اختصاص می‌دهیم که برآورد LS و سپس مدل رگرسیون خطی استوار پیشنهادی همزمان با مدل رگرسیون فازی پیشنهاد شده توسط کپی [۲۶] حاصل می‌شود.

نکته ۳.۲.۴. توجه داشته باشید هنگامی که مدل رگرسیون خطی استوار پیشنهاد شده این فصل با مدل رگرسیون فازی پیشنهاد شده توسط کپی [۲۶] یکی می‌شود و متغیر پاسخ به صورت عددی است، برآورد a متناظر با برآورد LS استاندارد $(F'F)^{-1}F'm$ است. بنابراین اگر متغیر پاسخ متأثر از عدم دقت باشد، مدل ما می‌تواند به عنوان تعمیم مناسبی از مدل رگرسیون خطی استاندارد در نظر گرفته شود.

نکته ۴.۲.۴. به راحتی می‌توان از مدل رگرسیون فازی استوار و جواب‌های تکراری مربوطه، مدل متناظری را برای حالت متقارن ($l = R, l = u$) با متغیر ورودی فازی LL بدست آورد.

نکته ۵.۲.۴. در مقایسه با دیگر روش‌های برآورد تکراری، روش بهینه‌سازی مبنی بر سیستم معادلات تکراری (۵.۴)–(۹.۴) و (۱۵.۴)–(۱۸.۴)، دستیابی به مینیمم سراسری را تضمین نمی‌کند و تنها مینیمم موضعی بدست می‌آید. به همین دلیل، به منظور بررسی پایداری جواب، ترجیح داده می‌شود چندین نقطه آغازین را برای مقداردهی اولیه روش تکراری در نظر بگیریم.

نکته ۶.۲.۴. گاهی لازم است همه فرآیند را بیش از یک بار اجرا کرد، زیرا نمی‌توان همه ترکیبات ممکن از $(p + 5)$ مشاهده را در نظر گرفت. اگرچه می‌توان تنها زیرنمونه‌هایی با داده‌های تکراری را در نظر گرفت. این وضعیت موجب پیچیدگی در روند تعیین مدل می‌شود. در این حالت، بهتر است از مدل مربوط به مقدار مینیمم تابع هدف (۴.۴) استفاده کنیم.

نکته ۷.۲.۴. توجه داشته باشید که جواب‌های تکراری (۵.۴)–(۹.۴) و (۱۵.۴)–(۱۸.۴) همیشه نامنفی بودن پهناهای برآوردشده را تضمین نمی‌کند. برای حل این مساله می‌توان روش‌های «نامقید» و «مقید» را اختیارکرد (جزئیات بیشتر در [۲۶، ۲۹]).

نکته ۸.۲.۴. هم‌خطی چندگانه داشتن همبستگی بالای دو متغیر ورودی یا بیشتر را در مدل رگرسیون چندگانه نشان می‌دهد. برای برخورد با این هم‌خطی، می‌توان این مدل را به مدل رگرسیون فازی استوار تعمیم داد [۲۶].

نکته ۹.۲.۴. برای تعیین حضور داده‌های پرت در مجموعه داده‌ها، می‌توان از تعمیم مناسبی از روش تعیین داده دورافتاده استفاده کرد که توسط هانگ و یانگ [۵۸] پیشنهاد شده است.

توجه داشته باشید که مدل رگرسیون فازی استوار پیشنهاد شده در این فصل توسط یک روش برآورد هندسی برآورد می‌شود، یعنی روش برآورد WLS–LMS که یک تکنیک تقریبی استوار و یکپارچه را در قالب رگرسیون غیر فازی نشان می‌دهد. از نظر تئوری، این مدل ویژگی‌های استواری و عملکرد مطلوب را از WLS–LMS به ارث می‌برد. بویژه، این مدل در حضور داده‌های دورافتاده در مجموعه داده‌ها، استوار است زیرا روش برآورد اتخاذ شده به طور مناسبی تأثیرات منفی داده‌های دورافتاده را در روند درونیابی خنثی و تنظیم می‌کند. بنابراین این مدل در ویژگی‌های کلی استواری ارائه شده در [۵۷] صدق می‌کند.

۳.۴ میزان انطباق مدل رگرسیون فازی استوار

گزاره ۱.۳.۴. [۳۲] تحت متر W ، باقیمانده‌های $(m - m^*)$ با مراکز برآورد شده m^* همبسته نیستند. به عبارت دیگر

$$(m - m^*)' W m^* = 0 \quad (19.4)$$

گزاره ۲.۳.۴. [۳۲] تحت متر W ، مجموع وزن دار باقیمانده مراکز $(m - m^*)$ ، پهنای چپ $(1 - 1^*)$ و پهنای راست $(u - u^*)$ برابر صفر هستند. یعنی:

$$1' W (m - m^*) = 0 \quad (20.4)$$

$$1' W (1 - 1^*) = 0 \quad (21.4)$$

$$1' W (u - u^*) = 0 \quad (22.4)$$

گزاره ۳.۳.۴. [۳۲] تحت متر W ، باقیمانده‌های $(1 - 1^*)$ و $(u - u^*)$ به ترتیب با پهنای چپ برآورد شده 1^* و پهنای راست برآورد شده u^* ناهمبسته هستند:

$$(1 - 1^*) W 1^* = 0 \quad (23.4)$$

$$(u - u^*) W u^* = 0 \quad (24.4)$$

این گزاره‌ها از ویژگی‌های استاندارد WLS تعمیم داده شده به مجموعه‌های فازی اثبات می‌شوند.

تعریف ۱.۳.۴. شاخص انطباق برای مدل (۱.۴) که توسط WLS-LMS برآورد شده، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = \frac{SSR}{SST} \quad (25.4)$$

که در آن SST، SSR و SSE به ترتیب از روابط (۴۳.۳)، (۴۴.۳) و (۴۵.۳) بدست می‌آیند. هرگاه $R^2 = 0$ ، مدل تغییرپذیری هیچ یک از متغیرهای پاسخ فازی را توضیح نمی‌دهد. به عکس هرگاه مدل همه مشاهدات را به طور کامل درونیابی کند، $R^2 = 1$. بنابراین، هرگاه $R^2 \approx 1$ ، مدل برآورد شده از نظر انطباق با داده‌های مشاهده شده قابل قبول است.

هنگام انتخاب مدل، R^2 این مشکل را دارد که نسبت به افزایش تعداد متغیرهای توضیحی در مدل ضعیف عمل می‌کند. به عبارت دیگر، اگر متغیر ورودی جدیدی را اضافه کنیم، مقدار R^2 کاهش نمی‌یابد. در واقع، اگر متغیر مساله‌داری را به مدل اضافه کنیم، انطباق مدل روی داده‌ها با هزینه کاهش کارایی تقریب‌ها، افزایش کمی دارد. بنابراین به عنوان معیاری برای انتخاب مدل، R^2 تعدیل شده را در نظر می‌گیریم که شامل این کاستی نیست (رجوع کنید به تعریف ۲.۴.۳). R^2 تعدیل شده می‌تواند منفی باشد و مقدار آن همیشه کمتر یا مساوی R^2 است.

۴.۴ مثال‌های کاربردی و مطالعات شبیه‌سازی

به منظور بررسی مدل پیشنهادی، چند مثال کاربردی ارائه می‌دهیم که در آن‌ها داده ورودی فازی را با تابع عضویت مثلثی و $\lambda = \rho = 0.5$ در نظر می‌گیریم. مشابه WLS در روند برآورد، وزن‌های (۱۲.۴) به داده‌ها تخصیص می‌یابد که $c_1 = 2/5$ و $c_2 = 3/5$. تابع $f(\cdot)$ خطی است و لذا ماتریس طرح F ترکیبی از ستون یک‌ه و متغیرهای توضیحی غیرفازی X است.

۱.۴.۴ مثال ۱

روی یک نمونه ۲۵ واحدی، متغیر خروجی فازی و متغیر ورودی غیرفازی $(\tilde{y}_i, x_i)$ را شبیه‌سازی می‌کنیم. مجموعه داده شبیه‌سازی شده در شکل ۳.۴ نشان داده شده است. به طور متوالی یک یا بیش از یک داده دورافتاده را در متغیر ورودی یا در مراکز و پهناهای متغیر پاسخ فازی به مجموعه داده منتقل می‌کنیم. وضعیت‌های مختلف در شکل‌های ۴.۴-۱۰.۴ نمایش داده شده‌اند و برآوردهای پارامتری مربوطه نیز در جدول ۱.۴ گزارش شده‌اند.

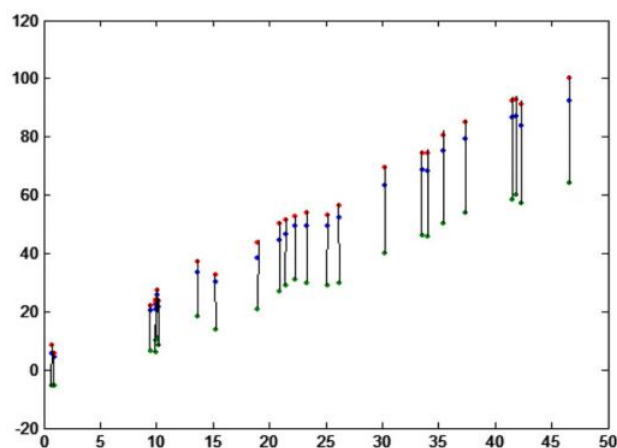
شکل ۴.۴ نتایج مدل رگرسیون فازی بدست آمده با مجموعه داده اصلی را به ترتیب با LS (شکل (a)) و $WLS-LMS$ (شکل (b)) نشان می‌دهد. همانطور که می‌توان مقدار R^2 و نیز $\bar{R}^2$ را در شکل ۴.۴ و برآوردهای پارامتری را در سطر اول جدول ۱.۴ دید، نتایج بسیار شبیه هستند.

این نتیجه دور از ذهن نیست زیرا همانطور که قبلاً دیدیم (نکته ۳.۲.۴ در بخش ۳.۲.۴) مدل رگرسیون فازی استوار شامل مدل رگرسیون فازی پیشنهادشده توسط کپی و همکاران [۲۶] است. بنابراین، در غیاب داده‌های دورافتاده، نتیجه مورد انتظار اتفاق می‌افتد.

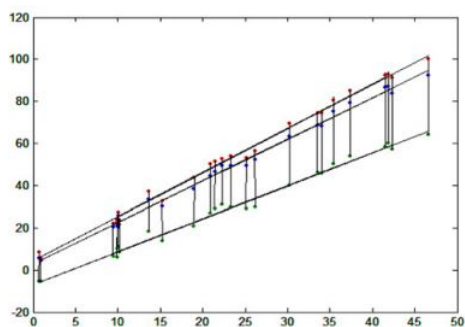
توجه داشته باشید که حضور هر نوع از داده‌های دورافتاده، همانطور که در شکل ۵.۴-۱۰.۴ و جدول ۱.۴ می‌توان دید روی برآوردهای $WLS-LMS$ تاثیرگذار نیست.

در مقابل، داده‌های دورافتاده برآوردهای LS را بسیار تغییر می‌دهد. به عنوان مثال، در شکل ۵.۴ (a) می‌بینیم که حضور یک داده دورافتاده تنها در X تاثیر انحرافی روی انطباق مدل روی داده دارد و بی‌نظمی زیادی را روی برآوردهای پارامتری مدل در مراکز ایجاد می‌کند. در واقع، در مقایسه با مقادیر $2/88$ و $1/97$ در حالت غیرانتقالی، برآوردهای تقاطع و شیب به ترتیب $31/98$ و 0.62 است (جدول ۱.۴، ردیف اول و دوم). با این حال برآوردهای پارامتری مدل‌های پهناها تاثیرپذیری کمی دارد.

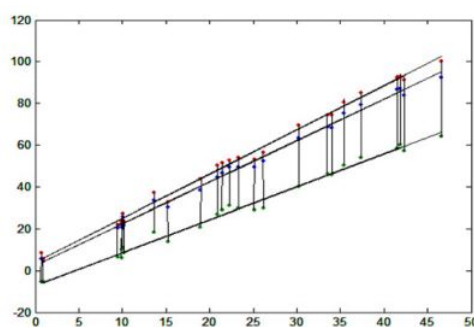
الگوی کلی نتایج حتی در مواردی که چندین داده دورافتاده در متغیر ورودی (شکل ۶.۴ (a)) و در مراکز m (شکل ۷.۴ (a)) وجود دارند، مشابه است. با این حال هنگامی که داده‌ها را به داده‌های دورافتاده در هر دو مرکز و متغیر ورودی (شکل ۸.۴ (a)) آلوده می‌کنیم، تقریب‌های LS نیز به علت رابطه خطی بین پهناها و مراکز، برای مدل‌های پهنا منحرف می‌شود.



شکل ۳.۴: مجموعه داده شبیه‌سازی شده

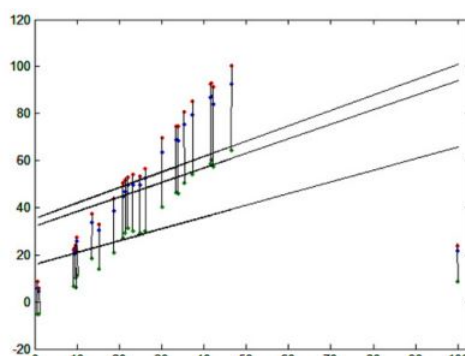


(a)
 $R^2 = 0.99$; $\bar{R}^2 = 0.99$

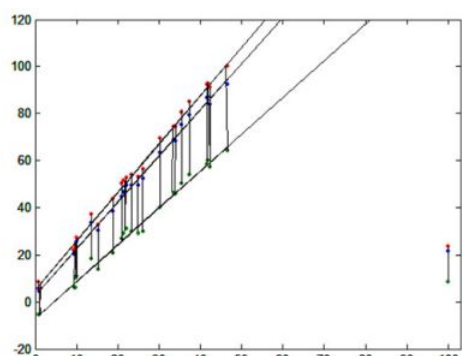


(b)
 $R^2 = 0.99$; $\bar{R}^2 = 0.99$

شکل ۴.۴: مدل‌های برآورد شده روی مجموعه داده اصلی با LS (a) و $WLS-LMS$ (b)

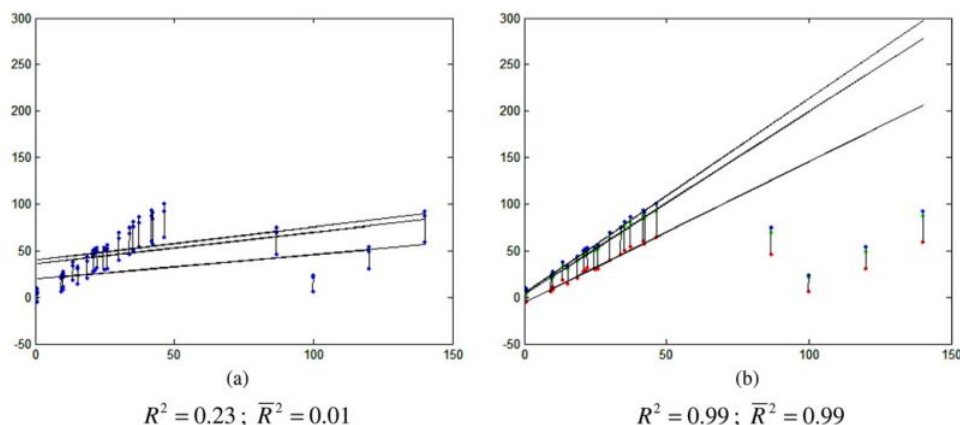


(a)
 $R^2 = 0.22$; $\bar{R}^2 = 0.02$

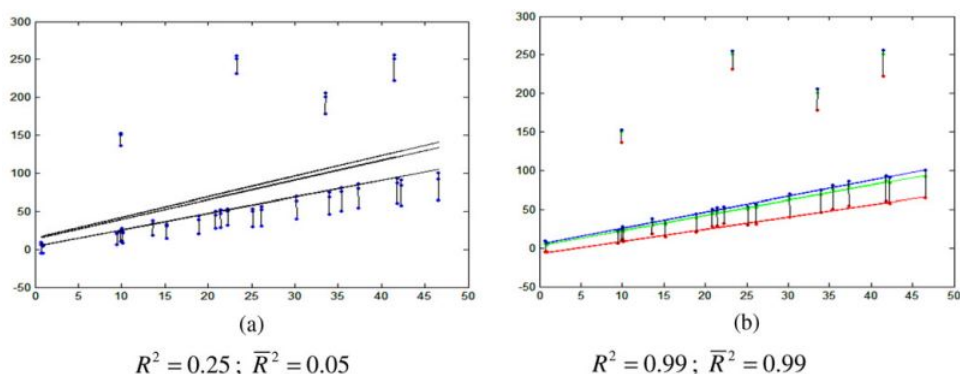


(b)
 $R^2 = 0.99$; $\bar{R}^2 = 0.99$

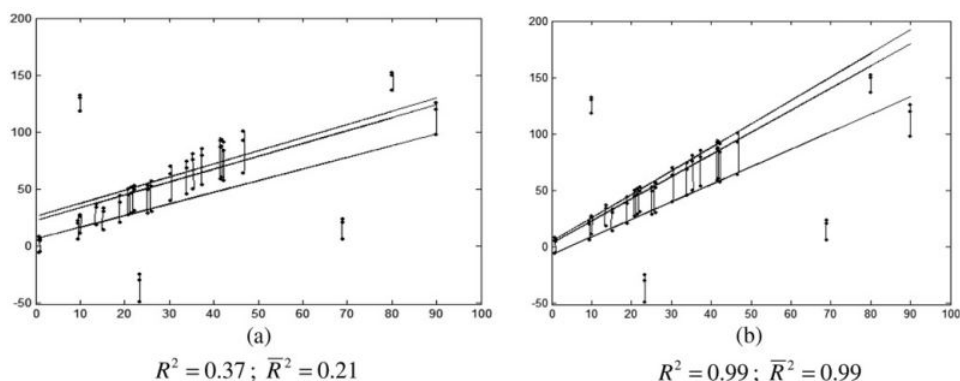
شکل ۵.۴: مدل‌های برآورد شده و عملکرد انطباق با LS (a) و $WLS-LMS$ (b) بعد از آلوده کردن تنها یک مقدار از X



شکل ۶.۴: مدل‌های برآوردشده و عملکرد انطباق با LS (a) و $WLS-LMS$ (b) بعد از آلوده کردن چندین مقدار از X



شکل ۷.۴: مدل‌های برآوردشده و عملکرد انطباق با LS (a) و $WLS-LMS$ (b) بعد از آلوده کردن چندین مقدار از m

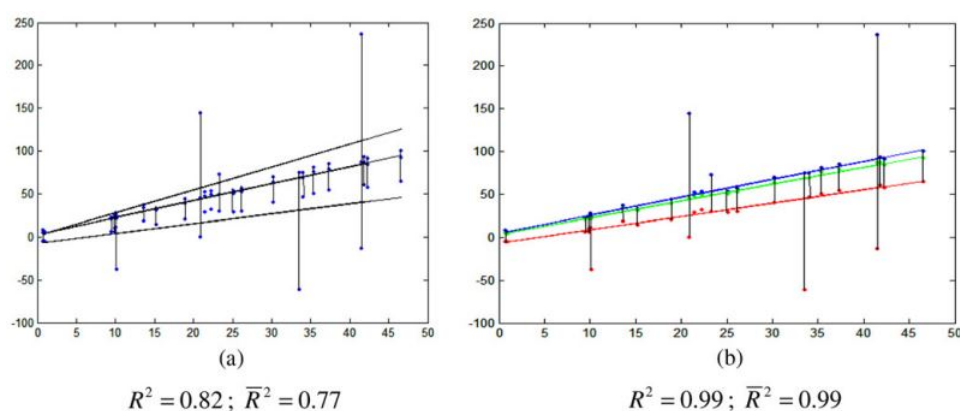


شکل ۸.۴: مدل‌های برآوردشده و عملکرد انطباق با LS (a) و $WLS-LMS$ (b) بعد از آلوده کردن در X و m

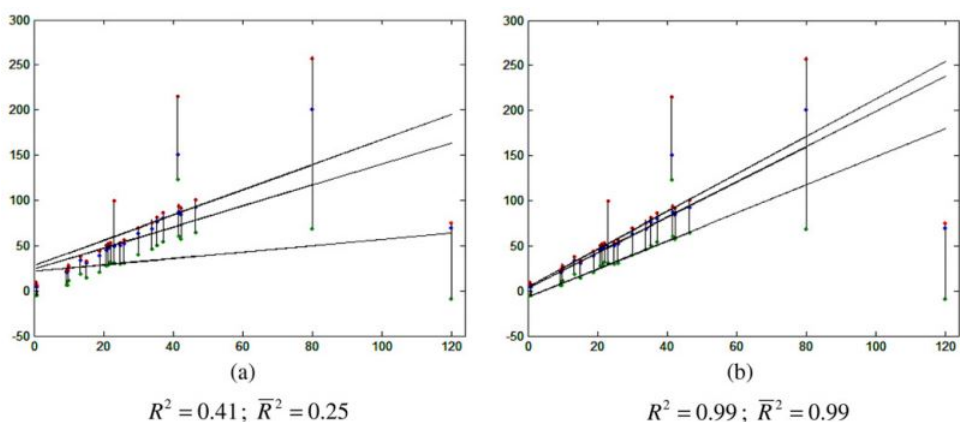
شکل ۹.۴ (a) نشان می‌دهد که حضور چندین داده دورافتاده در هر دو پهنا چپ و راست از

متغیر پاسخ فازی، تنها روی برآوردهای LS برای مدل‌های پهنا بویژه مدل‌های روی پهناهای راست، اثر می‌گذارد (جدول ۱.۴، سطر ششم)، در حالی که برآوردهای پارامتری برای مراکز بی‌تأثیر است. توجه کنید که مدل منطبق روی داده، به تعمیم کمتری نسبت به موقعیت‌های قبلی تبدیل می‌شود زیرا در محاسبه R^2 و $\bar{R}^2$ ، وزن‌های پهناها که به صورت $\lambda = \rho = 0.5$ داده شده، کمتر از وزن مراکز با مقدار ۱ است.

در آخر، در شکل ۱۰.۴ وضعیت کلی‌تری را در نظر می‌گیریم که شامل همه حالت‌های قبل است. همانطور که انتظار می‌رفت، برآوردهای LS نسبت به برآوردهای بدست آمده از مجموعه داده اصلی، به شدت تغییر می‌کند. در نتیجه عملکرد انطباق مدل نیز ضعیف است.



شکل ۹.۴: مدل‌های برآورده و عملکرد انطباق با LS (a) و WLS-LMS (b) بعد از آلوده کردن در پهناهای l و u



شکل ۱۰.۴: مدل‌های برآورده و عملکرد انطباق با LS (a) و WLS-LMS (b) بعد از آلوده کردن در X ، m ، l و u .

جدول ۱.۴: ضرایب برآورد شده از مدل‌های رگرسیون استوار در موارد آلوده نشده و آلوده شده

مدل $WLS-LMS$					مدل LS					
h	g	d	b	a	h	g	d	b	a	
۱/۱۸	۰/۰۶	۹/۲۱	۰/۲۱	[۲/۶۹, ۱/۹۷]'	۱/۱۹	۰/۰۶	۹/۱۷	۰/۲۱	[۲/۸۸, ۱/۹۷]'	داده‌ها قبل از آلودگی
۱/۹۹	۰/۰۵	۹/۳۴	۰/۲۱	[۲/۹۲, ۱/۹۷]'	۱/۶۹	۰/۰۵	۹/۴۶	۰/۲۰	[۳/۹۸, ۰/۶۲]'	یک داده دورافتاده X
۱/۰۴	۰/۰۷	۸/۳۱	۰/۲۳	[۳/۰۷, ۱/۹۶]'	۱/۶۰	۰/۰۶	۸/۶۰	۰/۲۲	[۳۶/۲۷, ۰/۳۴]'	چندین داده دورافتاده X
۱/۷۹	۰/۰۵	۹/۸۰	۰/۱۹	[۳/۱۷, ۱/۹۶]'	۰/۷۱	۰/۰۵	۷/۶۱	۰/۱۶	[۱۳/۵۸, ۲/۵۸]'	چندین داده دورافتاده m
۱/۴۲	۰/۰۶	۹/۲۹	۰/۲۱	[۳/۳۱, ۱/۹۶]'	۲/۹۹	۰/۰۲	۱۴/۱۳	۰/۰۹	[۲۲/۴۵, ۱/۱۳]'	چندین داده دورافتاده در X و m
۱/۴۹	۰/۰۷	۹/۳۱	۰/۲۱	[۳/۱۱, ۱/۹۶]'	۲/۴۸	۰/۳۵	۹/۲۳	۰/۴۲	[۲/۸۸, ۱/۹۷]'	چندین داده دورافتاده در l و m
۱/۱۷	۰/۰۷	۹/۲۶	۰/۲۱	[۳/۱۳, ۱/۹۶]'	۱/۰۴	۰/۲۰	۱۴/۴۸	۰/۷۰	[۲۴/۱۹, ۱/۱۶]'	داده‌های دورافتاده در X ، l و u

همانطور که قبلاً بیان شد، جدول ۱.۴ برآوردهای پارامتری را برای همه حالت‌ها ارائه می‌دهد که هر دو مدل LS و $WLS-LMS$ در نظر گرفته شده‌اند. برای راحتی در مطالعه جدول، برآوردها با بیشترین تغییر را به صورت پررنگ درآورده‌ایم.

۲.۴.۴ مثال ۲

در این مثال یک مدل رگرسیون خطی چندگانه فازی را در نظر می‌گیریم. به طور تصادفی به متغیر X_1 ، X_2 و X_3 را به ترتیب از سه توزیع یکنواخت تعریف شده روی بازه‌های $[0, 10]$ ، $[0, 50]$ و $[0, 100]$ تولید کرده‌ایم. متغیر پاسخ فازی به صورت زیر تولید می‌شود:

$$m = Xa + N_{3 \times 1}(0, 5)$$

$$l = Xab + l_{3 \times 1}d + N_{3 \times 1}(0, 1)$$

$$r = Xag + l_{3 \times 1}h + N_{3 \times 1}(0, 1)$$

که در آن $a = [10 \quad 2 \quad -1 \quad 1/5]'$ ، $b = 0/02$ ، $d = 5$ ، $g = 0/015$ و $h = 2$. در جدول ۲.۴، برآوردهای LS و $WLS-LMS$ به ترتیب در ستون اول و دوم ارائه شده‌اند که مطابق با سناریوهای مختلف از داده‌های دورافتاده مجموعه داده بدست آمده است. مشابه مثال قبل، برآوردهای $WLS-LMS$ صرف‌نظر از حضور یا عدم حضور داده‌های دورافتاده، به طور محسوسی تغییر نمی‌کند. بنابراین اثبات کارایی روند برآورد پیشنهاد شد.

اگر به بردار پهنای چپ (جدول ۲.۴ (b)) یا پهنای راست (جدول ۲.۴ (c)) یک داده دورافتاده منتقل کنیم، LS به ترتیب برآوردهای تغییر یافته برای b ، d ، g و h ایجاد می‌کند، درحالی که در مثال گزارش شده در بخش قبل، مقدار R^2 برای مدل رگرسیون فازی خطی قابل قبول است، در اینجا با توجه به مقدار داده‌های دورافتاده، مدل انطباق خیلی بدی را روی داده‌ها نشان می‌دهد.

اگر یک داده دورافتاده در مراکز وجود داشته باشد، عملکرد روش LS بدتر خواهد شد. در واقع، برآورد LS برای بردار ضرایب a به شدت تغییر می‌کند و در نتیجه میزان انطباق نسبتاً کم است. هرگاه داده‌ای دورافتاده در یکی از متغیرهای توضیحی (جدول ۲.۴ (e)) یا در حالت کلی‌تر (جدول ۲.۴ (f)) وجود داشته باشد، نتیجه‌ای مشابه بدست می‌آید.

مدل رگرسیون فازی ما شامل سه مدل رگرسیون مجزا است که همزمان برآورد می‌شود. پس دقت یا عدم دقت مدل لزوماً به علت رگرسیون روی مراکز، روی کران‌های پایین، روی کران‌های بالا یا ترکیبی از هر سه مدل است.

R^2 اندازه سراسری انطباق مدل روی داده است و به سختی می‌توان سهم مشارکت هر مدل را تمیز داد. برای درک بهتر از تاثیر هر مدل روی عملکرد کلی رگرسیون فازی، از یک تحلیل گرافیکی استفاده می‌کنیم که به طور مجزا روی سه مدل بکار گرفته می‌شود.

این تحلیل بر اساس نمودارهای تیلور [۱۰۹] است که اطلاعات مربوط به تشابه الگو را بین برآوردها و داده‌ها منتقل می‌کند. این تشابه از نظر همبستگی بین برآوردها و داده، اختلاف جذر میانه توان دوم (Rm_s) مرکزی و انحراف معیار آن‌ها بیان می‌شود. این نمودار در بررسی جنبه‌های چندگانه مدل‌های پیچیده مناسب است. بعلاوه، می‌توان عملکرد مربوط را بین مدل‌های مختلف مقایسه کرد.

مجموعه داده مشاهده شده با یک نقطه روی محور x نشان داده می‌شود. برآوردها بنا بر سه آماره قرار می‌گیرند: فاصله شعاعی از مرکز نمودار نسبت به انحراف معیار هر مجموعه داده، اختلاف Rm_s بین داده و برآوردها نسبت به فاصله آن‌ها، همبستگی آن‌ها که با توجه به موقعیت سمتی برآوردها، یعنی زاویه آن‌ها از محور x داده شده است.

هرگاه فاصله از نقطه نشان دهنده داده نسبتاً کوتاه باشد، سازگاری مطلوبی بین تقریب‌ها و داده‌ها وجود دارد.

همانطور که در شکل ۱۱.۴ نشان داده شده است، برآوردهای بدست آمده در غیاب داده‌های دورافتاده، به صورت مثلی نشان داده شده که در نزدیکی مجموعه داده مولد هر دو برآوردهای LS (شکل چپ) و WLS-LMS (شکل راست) قرار دارد. این نتیجه برای اولین انتقال نیز برقرار است که با علامت + نشان داده شده است.

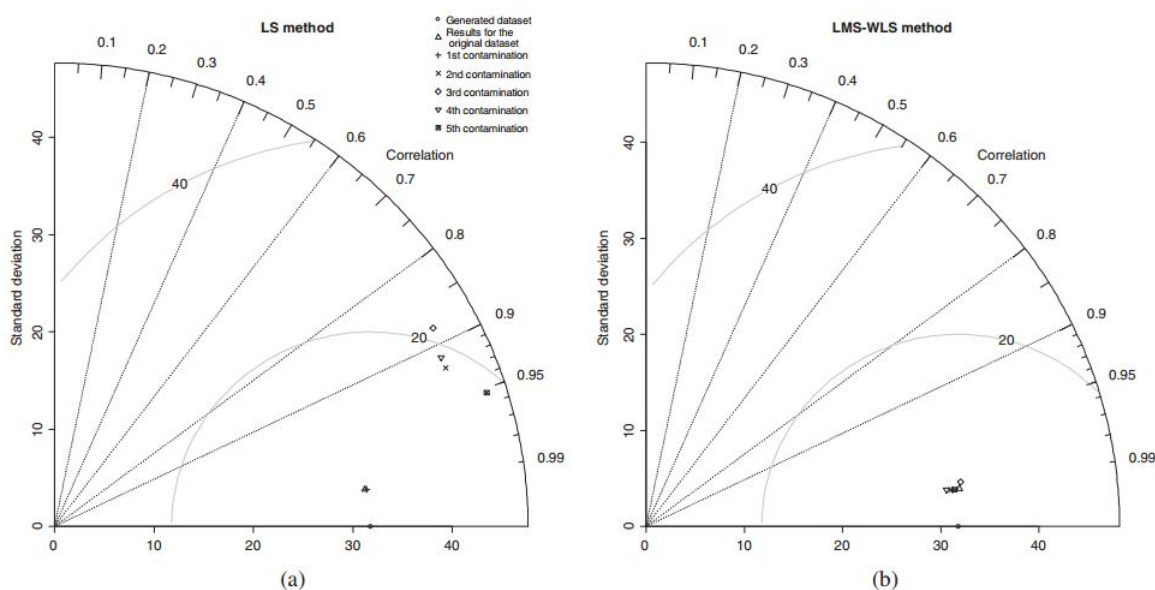
در بقیه حالت‌ها، انطباق LS به سرعت کاهش می‌یابد. در مقابل، میزان انطباق مدل‌های برآورد شده با WLS-LMS تحت تاثیر سناریوهای مختلف داده‌های دورافتاده قرار نمی‌گیرد. نتایج مشابهی برای مدل‌های کران پایین (شکل ۱۲.۴) و کران‌های بالا (شکل ۱۳.۴) بدست می‌آید. پس، روش برآورد WLS-LMS نسبت به روش LS در هر سه مدل رگرسیون نتیجه بهتری دارد.

جدول ۲.۴: نتایج داده‌های اصلی

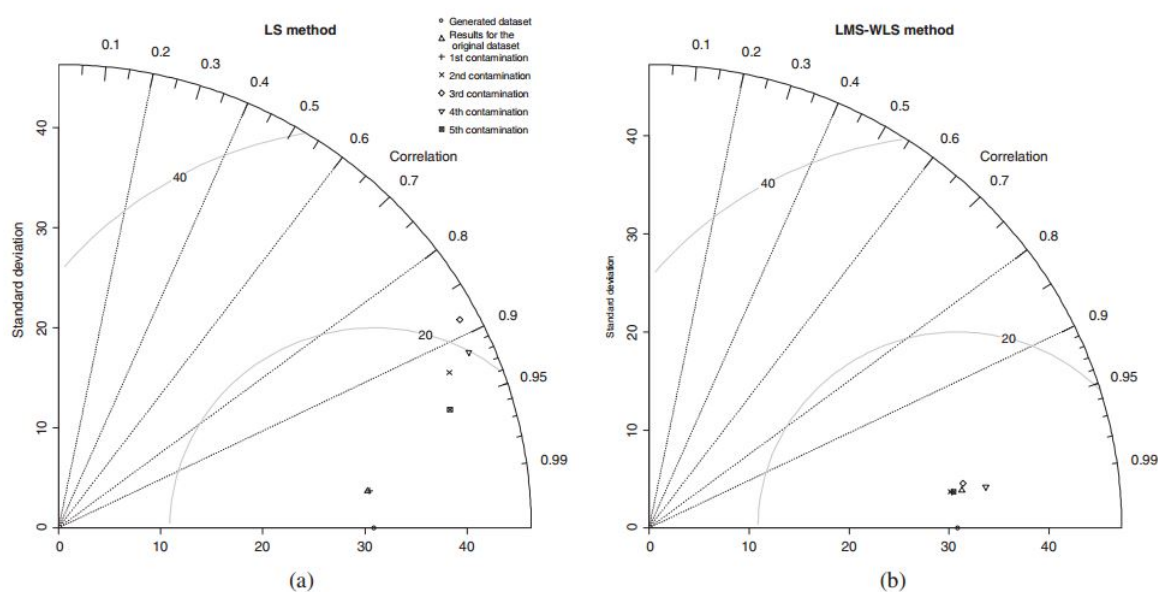
<i>WLS-LMS</i>	<i>LS</i>
(a) نتایج داده‌های اصلی	
$R^{\sim} = 0/99; \bar{R}^{\sim} = 0/99$	$\bar{R}^{\sim} = 0/98; R^{\sim} = 0/99$
$a = [16/91 \quad 1/08 \quad -1/00 \quad 1/42]'$	$a = [15/53 \quad 1/12 \quad -0/97 \quad 1/43]'$
$b = 0/02$	$b = 0/03$
$d = 5/03$	$d = 4/95$
$g = 0/02$	$g = 0/02$
$h = 1/78$	$h = 1/93$
(b) اولین آلودگی: $I_{10} = 45$	
$R^{\sim} = 0/98; \bar{R}^{\sim} = 0/98$	$R^{\sim} = 0/98; \bar{R}^{\sim} = 0/97$
$a = [15/38 \quad 1/12 \quad -0/97 \quad 1/43]'$	$a = [16/19 \quad 1/10 \quad -0/98 \quad 1/41]'$
$b = 0/03$	$b = -0/03$
$d = 4/90$	$d = 6/88$
$g = 0/02$	$g = 0/0$
$h = 1/91$	$h = 1/93$
(c) دومین آلودگی: $r_{15} = 120$	
$R^{\sim} = 0/99; \bar{R}^{\sim} = 0/99$	$R^{\sim} = 0/39; \bar{R}^{\sim} = 0/19$
$a = [15/78 \quad 1/01 \quad -0/97 \quad 1/40]'$	$a = [69/05 \quad -0/07 \quad -1/41 \quad 0/81]'$
$b = 0/03$	$b = -0/03$
$d = 4/80$	$d = 7/31$
$g = 0/02$	$g = 0/14$
$h = 1/77$	$h = 2/88$
(d) سومین آلودگی: $m_3 = 350$	
$R^{\sim} = 0/99; \bar{R}^{\sim} = 0/99$	$R^{\sim} = 0/39; \bar{R}^{\sim} = 0/19$
$a = [22/62 \quad 0/26 \quad -1/01 \quad 1/40]'$	$a = [85/67 \quad -3/33 \quad -1/38 \quad 0/75]'$
$b = 0/02$	$b = -0/03$
$d = 4/75$	$d = 7/30$
$g = 0/01$	$g = 0/01$
$h = 1/64$	$h = 1/87$
(e) چهارمین آلودگی: $X_{4,1} = 300$ (چهارمین مشاهده روی X_1)	
$R^{\sim} = 0/98; \bar{R}^{\sim} = 0/97$	$R^{\sim} = 0/38; \bar{R}^{\sim} = 0/18$
$a = [17/69 \quad 0/88 \quad -0/96 \quad 1/36]'$	$a = [71/37 \quad -0/07 \quad -1/41 \quad 0/71]'$
$b = -0/10$	$b = -0/03$
$d = 8/74$	$d = 7/33$
$g = 0/04$	$g = 0/01$
$h = 0/49$	$h = 1/88$
(f) پنجمین آلودگی: $X_{17,3} = 450, m_{17} = 500, I_{17} = 80$	
$R^{\sim} = 0/99; \bar{R}^{\sim} = 0/98$	$R^{\sim} = 0/75; \bar{R}^{\sim} = 0/66$
$a = [22/10 \quad 1/01 \quad -0/98 \quad 1/42]'$	$a = [63/56 \quad -0/07 \quad -1/50 \quad 1/21]'$
$b = 0/03$	$b = 0/12$
$d = 4/80$	$d = 4/54$
$g = 0/01$	$g = 0/02$
$h = 1/82$	$h = 5/10$

۳.۴.۴ مثال ۳

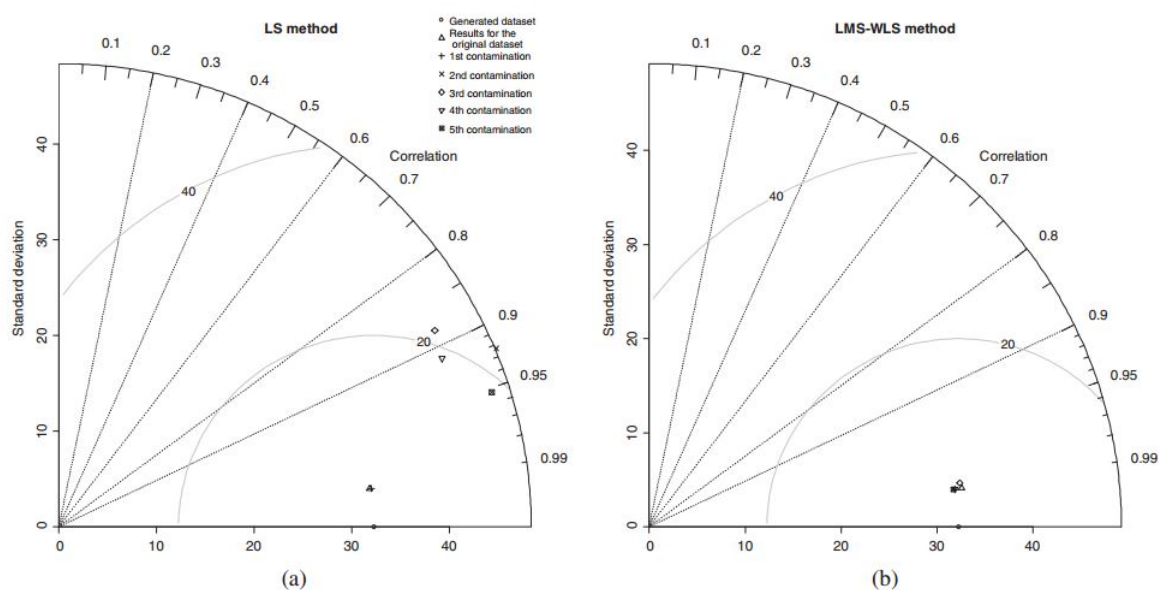
حال به مقایسه این روش با دیگر مدل‌های رگرسیون خطی فازی ارائه شده در متن می‌پردازیم. ساکاو و یانو [۱۰۰] یک مدل رگرسیون خطی فازی برآورد شده بوسیله مساله برنامه‌ریزی چند هدفه معرفی می‌کنند که نسبت به داده‌های دورافتاده بسیار حساس هستند [۹۶]. در همین زمینه، نصرآبادی و همکاران [۸۴] یک مدل رگرسیون خطی فازی چند هدفه پیشنهاد کردند که اثبات می‌شود حساسیت کمتری نسبت به وجود داده‌های غیرعادی دارد. براساس مثال ارائه شده توسط نصرآبادی و همکاران [۸۴]، روش برآورد شده WLS-LMS پیشنهاد شده در این مقاله را با مدل [۱۰۰] (که از این پس با $P1$ نشان داده می‌شود) و با مدل رگرسیون خطی فازی چندهدفه (MOFLR) پیشنهاد شده توسط نصرآبادی و همکاران [۸۴] مقایسه می‌کنیم. متغیر وابسته فازی متقارن و متغیر ورودی غیر فازی است. پنج مشاهده برای متغیر ورودی و متغیر وابسته فازی در سه ستون اول جدول ۳.۴ گزارش شده‌اند. در ستون‌های چهارم تا نهم، برآوردها بر مبنای سه مدل ارائه شده‌اند.



شکل ۱۱.۴: نمودارهای تیلور برای مدل‌های مراکز



شکل ۱۲.۴: نمودارهای تیلور برای مدل‌های کران پایین (مراکز منهای پهنای چپ)



شکل ۱۳.۴: نمودارهای تیلور برای مدل‌های کران بالا (مراکز بعلاوه پهنای راست)

جدول ۳.۴

$Lm_s - WLS$		MOFRL		$P1$		l_i	m_i	x_i
l_i	m_i	l_i	m_i	l_i	m_i			
۲/۰۱	۶/۳۹	۲/۰۸	۷/۷۴	۱/۱۳	۷/۹۷	۲/۲	۶/۴	۱
۲/۱۳	۸/۰۶	۲/۲	۹/۴۱	۲/۲۶	۱۰/۴۴	۱/۸	۸/۰	۲
۲/۲۵	۹/۷۳	۲/۳۲	۱۱/۰۸	۳/۳۹	۱۲/۹	۲/۶	۱۶/۵	۳
۲/۳۷	۱۱/۳۹	۲/۴۴	۱۲/۷۵	۴/۵۳	۱۵/۳۷	۲/۶	۱۱/۵	۴
۲/۴۹	۱۳/۰۶	۲/۵۶	۱۴/۴۲	۵/۶۶	۱۷/۸۳	۲/۴	۱۳/۰	۵
	۰/۴۷		۲۲/۵۴		۲۱۱/۷۲			E_1
	۰/۴۷		۲۲/۵۴		۱۷۱/۵۹			E_2
	۱/۹۲		۱۶/۲۶		۳۸/۱۳			E_3

برای ارزیابی عملکرد مدل، مجذور باقیمانده‌ها را برای هر مشاهده محاسبه می‌کنیم:

$$r_i^2 = [(m_i - m_i^*)^2 + ((m_i - l_i) - (m_i^* - l_i^*))^2 + ((m_i + l_i) - (m_i^* + l_i^*))^2]$$

باقیمانده‌های مطلق را نیز محاسبه می‌کنیم:

$$r_i = [|m_i - m_i^*| + |(m_i - l_i) - (m_i^* - l_i^*)| + |(m_i + l_i) - (m_i^* + l_i^*)|]$$

سپس سه اندازه خطای کلی مختلف را بدست می‌آوریم:

$$E_1 = \sum_{i=1}^n w_i r_i^2$$

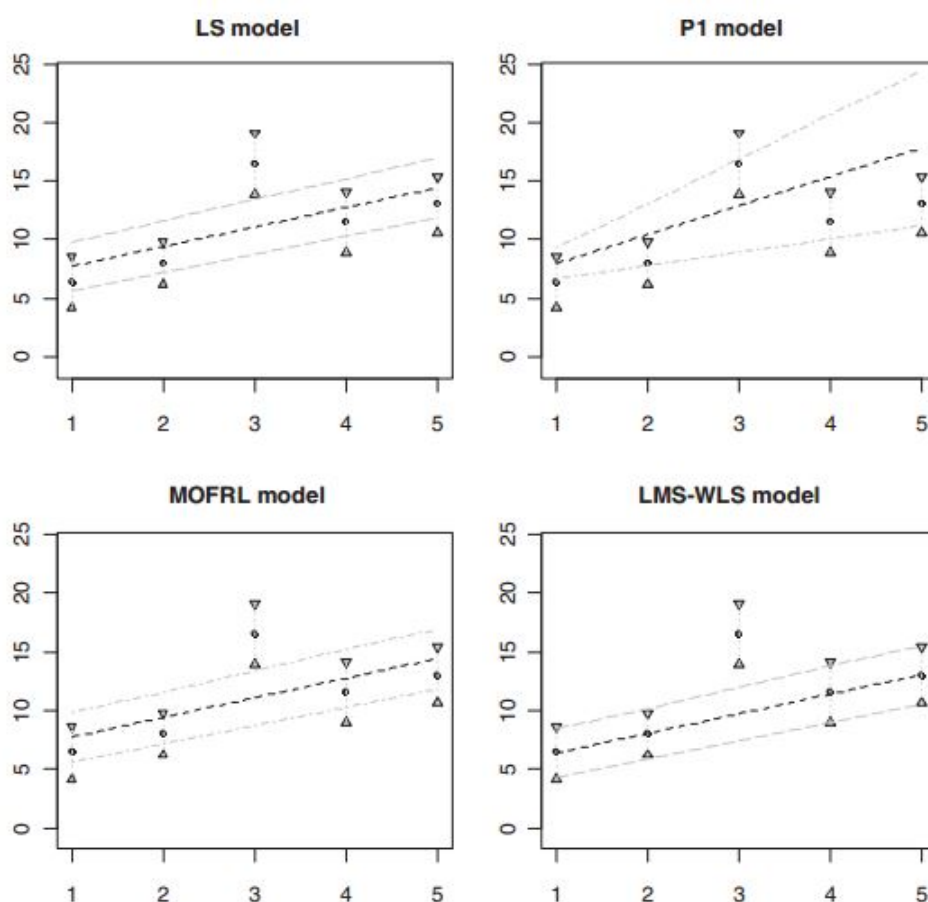
$$E_2 = \sum_{i \notin \Omega} r_i^2$$

$$E_3 = \sum_{i \notin \Omega} r_i$$

که در آن Ω مجموعه‌ای از داده‌های دورافتاده است و w_i مشابه (۱۲.۴) تعریف می‌شود:

$$w_i = \begin{cases} 1 & |r_i^2 / \hat{\sigma}| \leq 2/5 \\ 0/5 & 2/5 \leq |r_i^2 / \hat{\sigma}| \leq 3/5 \\ 0 & |r_i^2 / \hat{\sigma}| \geq 3/5 \end{cases}$$

بنابراین، E_1 شامل همه مشاهدات است و به خوبی داده دورافتاده را وزن‌دار می‌کند در حالی که E_2 و E_3 روی زیرمجموعه‌ای از داده‌هایی که دورافتاده نیستند، محاسبه می‌شود. مقادیر کوچکتر این معیارها بیانگر انطباق مدل روی داده‌ها می‌باشند. تابع وزن (۱۲.۴) داده شده است، در محاسبه E_1 ، داده‌های دورافتاده به طور خودکار مشخص می‌شوند اگر باقیمانده‌های مربوطه از حد مشخص شده تجاوز کند، در حالی که برای E_2 و E_3 ، داده‌های دورافتاده از راه قیاسی مشخص می‌شوند. در نتیجه، E_1 و E_2 نتیجه مشابه یا حتی یکسان خواهند داشت اگر مدل بتواند حضور داده‌های دورافتاده را کنترل کند. مقادیر سه شاخص برای هر مدل در جدول ۳.۴ آمده‌اند.



شکل ۱۴.۴: مقایسه مدل‌های تقریبی

خطاهای کلی مدل‌های مختلف نشان می‌دهند بهترین عملکرد از نظر انطباق با داده‌ها توسط مدل WLS-LMS ارائه می‌شود. توجه کنید که تساوی $E_1 = E_2$ برای مدل‌های MOFRL و WLS-LMS نشان می‌دهد که مطابق انتظار، این دو مدل داده‌های دورافتاده را بهتر کنترل می‌کنند.

نتایج جدول ۳.۴، با شکل ۱۴.۴ نیز تایید می‌شود که در آن داده‌های مشاهده شده و خطوط درونیایی برای هر سه مدل و نیز برای مدل LS پیشنهاد شده توسط کپی و همکاران [۲۶] ارائه

شده است. برآوردهای P_1 بسیار تغییرمی‌کنند. بویژه تقاطع مراکز و پهنا و شیب پهناها غیر دقیق هستند. همچنین برآوردهای MOFRL تغییرات کمی دارند. مدل WLS-LMS به خوبی بر داده‌های مشاهده شده منطبق است. در آخر، باید به این نکته نیز توجه کرد که مدل LS نسبت به مدل P_1 تاثیر پذیری کمتری از حضور یک داده دورافتاده دارد.

۴.۴.۴ مثال ۴

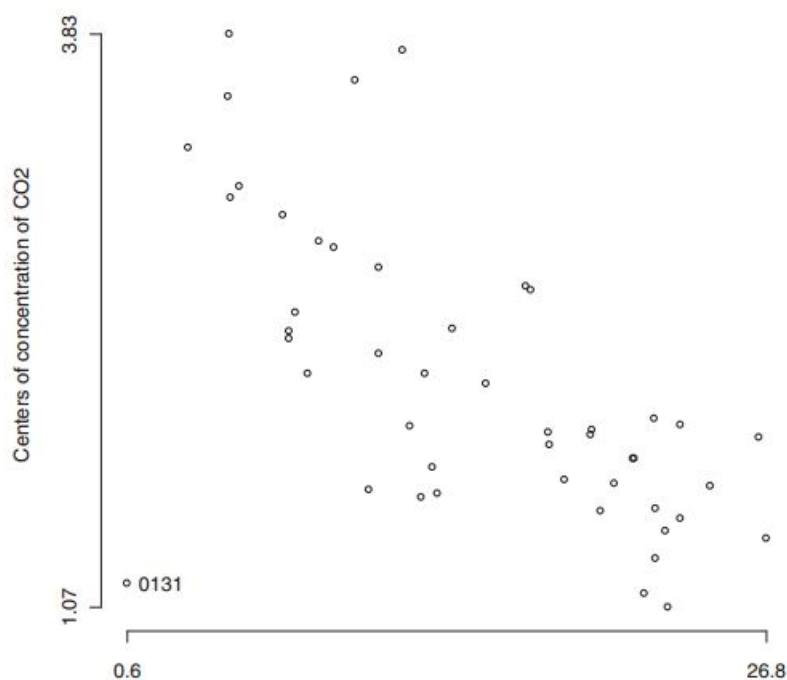
در این مثال به مطالعه رابطه بین غلظت جوی کربن مونوکسید (CO) و مجموعه‌ای از متغیرهای مربوط به هواشنجی از جمله دما با اندازه درجه سلسیوس ($TEMP$)، رطوبت مربوطه (UMR)، اشعه (UV) و انرژی خورشیدی (RAD) می‌پردازیم که این اطلاعات بر مبنای داده‌های جمع‌آوری شده در رم در طول سال ۱۹۹۹ است. مجموعه داده اصلی مقادیر ساعتی CO و اندازه‌های روزانه متغیرهای توضیحی را ارائه می‌دهد. بنابراین میانگین غلظت روزانه کربن مونوکسید را محاسبه می‌کنیم.

در مثال کاربردی بخش ۶.۳، کپی و همکاران [۲۶] به منظور حل مشکل عدم اطلاعات کافی به علت تبدیل ساعتی داده‌ها روی غلظت CO به یک مقدار برای هر روز، متغیر پاسخ را به صورت فازی و با تابع عضویت LR در نظر گرفتند. مقادیر میانه روزانه CO مراکز متغیر وابسته فازی را نشان می‌دهد در حالیکه پهناهای چپ (راست) با میانگین انحراف ساعتی مقادیر کمتر (بیشتر) از میانه بدست می‌آید.

در طول زمان بررسی، حرکت خودرو به علت غلظت بالای آلاینده‌ها، محدود یا متوقف شد. حضور داده‌های دورافتاده می‌تواند به علت غلظت کم آلاینده در زمان توقف چرخش خودرو باشد. برای کاهش ناسازگاری و ناراحتی‌های مردم، حرکت خودرو تنها در روز یکشنبه متوقف شد. بنابراین تعداد ۴۷ یکشنبه را از مجموعه داده انتخاب کرده‌ایم.

به طور خاص، انتظار داریم دما رابطه وارونه با غلظت CO داشته باشد زیرا منبع اصلی دیگر آلودگی، گرمایش خانه است. شکل ۱۵.۴ رابطه وارونه بین متغیر وابسته و دما را نشان می‌دهد. اگرچه حداقل در یک یکشنبه از جمله ۳۱ ژانویه، انحراف صریحی را از حجم کلی داده مشاهده می‌کنیم.

برآوردهای مدل بر اساس داده‌های استاندارد شده است. در جدول ۴.۴ خلاصه‌ای از نتایج دو مدل آمده‌اند. R^2 و نیز $\bar{R}^2$ نشان می‌دهد WLS-LMS انطباق بهتری روی داده‌ها ایجاد می‌کند. مدل‌های LS و WLS-LMS نسبت به برآوردهای پارامتری برای مدل روی مراکز تفاوت می‌کنند در حالی که رگرسیون‌های روی پهناها نتایج مشابهی را ارائه می‌دهند.



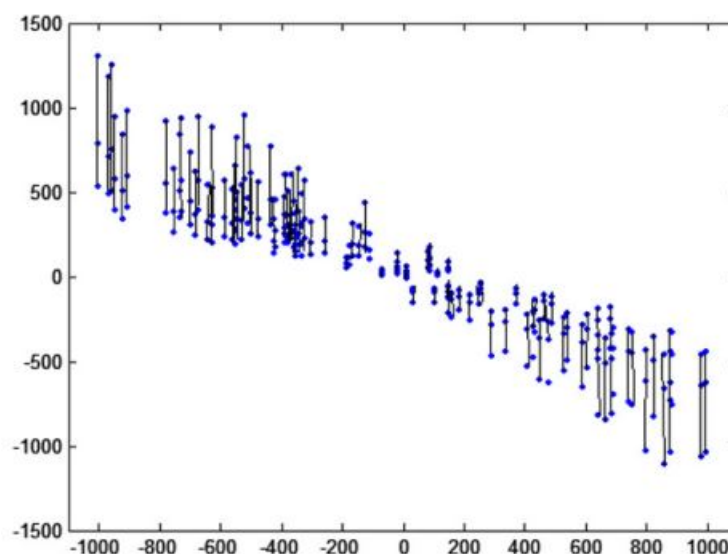
شکل ۱۵.۴: نمودار پراکندگی مراکز غلظت CO_2 و میانگین دما

جدول ۴.۴: مقایسه مدل رگرسیون $LMS - WLS$ با سایر مدل‌ها

مدل $WLS - LMS$				مدل LS			
۰/۴۱	b	-۰/۲۴	Constant	۰/۴۷	b	-۰/۳۲	Constant
۰/۶۰	g	-۰/۴۴	درجه سلسیوس	۰/۵۷	g	-۰/۲۱	درجه سلسیوس
۰/۵۴	d	-۰/۴۷	رطوبت مربوطه	۰/۵۶	d	۰/۲۹	رطوبت مربوطه
۰/۸۳	h	-۰/۴۴	انرژی خورشیدی	۰/۸۲	h	-۰/۰۲	انرژی خورشیدی
۰/۷۶	$\bar{R}$	۰/۸۱	R^2	۰/۴۱	$\bar{R}$	۰/۵۱	R^2

۵.۴.۴ مطالعه شبیه‌سازی

برای توضیح بیشتر درباره عملکرد روش پیشنهادی، مجموعه داده‌ای را با ۱۰۰ مشاهده، خروجی فازی و ورودی غیرفازی تولید می‌کنیم. مجموعه داده در شکل ۱۶.۴ نشان داده شده است. دو رگرسیون با LS و $WLS - LMS$ را اجرا می‌کنیم تا به $R^2 = ۱/۰۰$ در هر دو مورد برسیم.



شکل ۱۶.۴: تولید مجموعه داده برای مطالعه شبیه‌سازی

سپس نسبتی از p داده دورافتاده مثلاً $\{۵\%, ۱۰\%, ۱۵\%\}$ را هم در X و هم در $\tilde{Y}$ (مراکز و پهناها) در مجموعه داده‌ها آلوده می‌کنیم و پارامترها را به ترتیب با روش‌های LS و WLS-LMS برآورد می‌کنیم. این روند آلودگی را برای هر p تا ۱۰۰ مرتبه تکرار می‌کنیم. مقادیر میانه و میانگین R^2 در جدول ۵.۴ آمده‌اند. توجه کنید، هرچه درصد داده‌های دورافتاده افزایش یابد، میانگین انطباق مدل، سریعاً با استفاده از LS کاهش می‌یابد (جدول ۵.۴، ستون دوم).

مقادیر میانه R^2 از رگرسیون استوار نیز با سرعت کمتری کاهش می‌یابد. به عنوان مثال اگر $p = ۵\%$ ، مقدار میانگین R^2 برابر $۰/۹۱$ است هرگاه از روش WLS-LMS استفاده می‌کنیم که کماکان پذیرفته است، با این حال مقدار میانگین $۰/۴۵$ با استفاده از روش LS نشان می‌دهد این روش روی میانگین در انطباق با داده ضعیف است. میانه R^2 که با روش LS بدست آمده، الگوی مشابهی از میانگین R^2 را نتیجه می‌دهد، اگرچه با روش WLS-LMS، میانه R^2 بدون تغییر باقی می‌ماند. حتی با ۱۵ درصد از داده‌های دورافتاده در حداقل نیمی از حالت‌ها، مقدار R^2 با برآوردهای WLS-LMS تقریباً برابر ۱ است که انطباق بسیار خوبی روی داده‌ها دارد.

جدول ۵.۴: نتایج شبیه‌سازی

درصد داده‌های دورافتاده	میانگین R^2 (LS)	میانگین R^2 (WLS-LMS)	میانه R^2 (LS)	میانه R^2 (WLS-LMS)
۵	۰/۴۵	۰/۹۱	۰/۴۱	۱/۰۰
۱۰	۰/۳۱	۰/۷۹	۰/۲۷	۱/۰۰
۱۵	۰/۱۹	۰/۷۰	۰/۱۶	۱/۰۰

نتیجه‌گیری و پیشنهادات

نتیجه‌گیری

هرگاه در بین مجموعه داده‌ها شاهد داده‌های دور افتاده باشیم، روش معمول LS در یک مدل رگرسیونی برآوردهای خوبی از ضرایب رگرسیونی نخواهد داشت. در این شرایط باید از روش‌های دیگری تحت عنوان روش‌های استوار استفاده کرد. همچنین اگر مشاهدات مربوط با متغیرها اعداد دقیق نباشند، روش پیشنهاد شده در حالت فازی جایگزین مناسبی است. در هنگام حضور داده‌های پرت روش‌های رگرسیون استوار فازی برای محاسبه برآورد مدل رگرسیون خطی چندگانه روش مناسبی خواهند بود.

در این پایان‌نامه، یک راهکار تحلیلی برای برآورد و انتخاب مدل رگرسیون ارائه شد، مدلی که بتواند وابستگی یک متغیر فازی را بر روی مجموعه‌ای از متغیرهای توضیحی قطعی بیان کند. مدل رگرسیون فازی معرفی شده بر مبنای روش کمترین میانه توان‌های دوم - کمترین توان‌های دوم موزون می‌باشد. این مدل در حضور مجموعه داده‌ها با یک یا بیش از یک داده پرت، استوار است. به منظور تحلیل کارایی مدل، یک شاخص انطباق مناسب را که در انتخاب مدل موثر است ارائه دادیم. این مدل در مقایسه با مدل‌های رگرسیون با روش LS در حضور انواع داده‌های پرت موفقیت زیادی دارد.

پیشنهادهات

- ارائه مدل‌های رگرسیون خطی و غیرخطی استوار با متغیرهای ورودی و خروجی فازی LR.
- بررسی روش‌های استوار دیگر برای تحلیل رگرسیون فازی.
- استفاده از فواصل و مترهای دیگر برای مینیمم سازی اختلاف بین متغیر پاسخ و مقدار برآورده شده آن.

مراجع

- [۱] ربیعی م.ر.، فلاحتی نژاد ن.و کرباسی د. (۱۳۹۸)، روش چند هدفه در برآورد ضرایب مدل رگرسیون خطی با ورودی- خروجی فازی LR، نهمین سمینار ملی آمار و احتمال فازی، بابلسر، مازندران.
- [۲] طاهری س.م.، (۱۳۷۵)، ”آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی”، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد.
- [۳] میرزایی ی.ش. و ارقامی ش.، (۱۳۸۶)، ”رگرسیون فازی: مروری بر چند رویکرد”، اندیشه آماری، ۲۳، ص ۳۵-۴۷.
- [۴] طاهری س.م. و ماشینچی م.، (۱۳۹۲)، ”مقدمه‌ای بر احتمال و آمار فازی” چاپ دوم، انتشارات دانشگاه شهید باهنر کرمان.
- [5] Andrews D.F. , Bickel P.J., Hampel F.R., Huber P.J., Rogers W.H., and Tukey J.W. (1972), ”Robust Estimates of Location Survey and Advances”, Princeton University Press.
- [6] Arrow K. J., Barankin E. W., and Blackwell D. (1953), ”Admissible points of convex sets”, In: H. W. Kuhn and A. W. Tucker (Eds.), Contributions to the Theory of Games, Princeton University Press, Princeton, 2, pp 87-91. .
- [7] Balasundaram S., Kapil. (2011), ”Weighted fuzzy ridge regression analysis with crisp inputs and triangular fuzzy outputs” **Internatinal Journal of Advanced Intelligence Paradigms**, 3(1), pp 67-81.
- [8] Bisserier A., Boukezzoula R., and Galichet S. (2010), ”A revisited approach to linear fuzzy regression using trapezoidal fuzzy intervals”, **Information Sciences**, 180 (19), pp 3653–3673.
- [9] Bod P. (1963), ”Linear Programming Tobb Egyidejuleg Adott Celfuggreny Szerint”, **Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences**, 8, pp 30-55.

- [10] Bolotin A. (2007), "Fuzzy logic approach to robust regression models of uncertain medical categories", **International Journal of Biological and Medical Sciences**, 2 (4), pp 263–268.
- [11] Brown, G.W., and Mood A.M. (1951), "On median tests for linear hypotheses," **Proceedings of the 2nd Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability**, pp 159–166.
- [12] Cavic D., and Pedrycz D. (1991), "Evaluation of fuzzy regression models", **Fuzzy Sets and Systems**, 39, pp 51–63.
- [13] Celminš A. (1987), "Least squares model fitting to fuzzy vector data", **Fuzzy Sets and Systems**, 22, pp 260–269.
- [14] Celminš, A. (1987), "Multidimensional least-squares fitting of fuzzy models", **Mathematical Modeling**, 9, pp 669–690.
- [15] Chan K.Y., Kwong C.K., Fogarty T.C. (2010), "Modeling manufacturing processes using a genetic programming-based fuzzy regression with detection of outliers", **Information Sciences**, 180 (4), pp 506–518.
- [16] Chang P.T., Lee E.S. (1994), "Fuzzy least absolute deviations regression and the conflicting trends in fuzzy parameters", **Computers & Mathematics with Applications**, 28, pp 89–101.
- [17] Chang P.T., Lee E.S. (1994), "Fuzzy least absolute deviations regression based on the ranking of fuzzy numbers", in: IEEE Conference on Fuzzy Systems at 1994 World Congress on Computational Intelligence, Orlando, FL, June, pp 26–29.
- [18] Chang P.T., and Lee E.S. (1996), "A generalized fuzzy weighted least-squares regression", **Fuzzy Sets and Systems**, 82, pp 289–298.
- [19] Chang Y.H., and Ayyub B.M., (2001), "Fuzzy regression methods—a comparative assessment", **Fuzzy Sets and Systems**, 119, pp 187–203.
- [20] Chang Y.H. (2001), "Hybrid fuzzy least-squares regression analysis and its reliability measures", **Fuzzy Sets and Systems**, 119, pp 225–246.
- [21] Chang Y.H., and Ayyub B.M. (2001), "Fuzzy regression methods – a comparative assessment", **Fuzzy Sets and Systems**, 119, pp 187–203.

- [22] Chen S.P., and Dang J.F. (2008), "A variable spread fuzzy linear regression model with higher explanatory power and forecasting accuracy", **Information Sciences**, 178, pp 3973-3988.
- [23] Chen Y.S. (2001), "Outliers detection and confidence interval modification in fuzzy regression", **Fuzzy Sets and Systems**, 119, pp 259–272.
- [24] Choi S.H., and Buckley J.J. (2008), "Fuzzy regression using least absolute deviation estimators", **Soft Computing – A Fusion of Foundations, Methodologies and Applications**, 12 (3), pp 257–263.
- [25] Coppi R., and D'Urso P., (2003), "Regression analysis with fuzzy informational paradigm: a least-squares approach using membership function information Int", **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, 8 (3), pp 279–306.
- [26] Coppi R., D'Urso P., Giordani P. , Santoro A. (2006), "Least squares estimation of a linear regression model with LR fuzzy response", **Computational Statistics & Data Analysis**, 51, pp 267–286.
- [27] D'Urso P., and Gastaldi T. (2000), "A least-squares approach to fuzzy linear regression analysis", **Computational Statistics & Data Analysis**, 34, pp 427–440.
- [28] D'Urso P., and Gastaldi T. (2002), "An orderwise polynomial regression procedure for fuzzy data", **Fuzzy Sets and Systems**, pp 130, 1–19.
- [29] D'Urso P. (2003), "Linear regression analysis for fuzzy/crisp input and fuzzy/crisp output data", **Computational Statistics & Data Analysis**, 42 (1–2), pp 47–72.
- [30] D'Urso P., and Giordani, P. (2003), "Fitting of fuzzy linear regression models with multivariate response", **International Journal of Pure and Applied Mathematics**, 3 (6), pp 655–664.
- [31] D'Urso P., Massari R., Santoro A. (2010), "A class of fuzzy clusterwise regression models", **Information Sciences**, 180 (24), pp 4737–4762.
- [32] D'Urso P., Massari R., Santoro A. (2011), "Robust fuzzy regression analysis", **Information Sciences**, 181, pp 4154-4174.
- [33] Diamond P. (1988), "Fuzzy least squares", **Information Sciences**, 46, pp 141-157.

-
- [34] Diamond P., and Tanaka H. (1998), "Fuzzy regression analysis". In: Slowinski, R (Ed.), *Fuzzy Sets in Decision Analysis, Operations Research and Statistics*. Kluwer Academic Publishers, USA, MA, pp. 349–387.
- [35] Donoso S., Martin N., and Vila M.A. (2007), "Fuzzy ridge regression with non symmetric membership functions and quadratic models" , In *International Conference on Intelligent Data Engineering and Automated Learning* (pp. 135-144). Springer Berlin Heidelberg.
- [36] Dubois D. Prade H. (1980), "**Fuzzy Sets and Systems: theory and applications**", Vol. 144, Academic press, Toulouse, France.
- [37] Dubois D., Prade H. (1983), "Ranking fuzzy numbers in the setting of possibility theory", **Information Sciences**, 30, pp 183–224.
- [38] Dubois, D., Prade, H. (1988), "Possibility Theory", Plenum Press, New York. Efron, B., Tibshirani, R.J., 1993. *An Introduction to the Bootstrap*. Chapman & Hall, New York.
- [39] Edgeworth F.Y. (1887), "A new method of reducing observations relating to several quantities", **Philosophical Magazine**, 24(5), pp 222–223.
- [40] Edgeworth F.Y. (1887), "On Observations Relating to Several Quantities," **Hermathena**, 6, pp 279-285.
- [41] Emerson J.D., and Strenio J. (1983), "Boxplots and batch comparisons", **Wiley, New York**, in: D.C. Hoaglin, F. Mosteller, J.W. Tukey (Eds.), *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis*, pp 58–96.
- [42] Fletcher R. (1980), "Practical Methods of Optimization", Wiley, New York. Fomby, T., Hill, C., Johnson, S.S., 1980. *Advanced Econometric Methods*. Springer, Needham, MA.
- [43] Fomby T., and Hill C., and Johnson S.S. (1980), "Advanced Econometric Methods", **Springer, Needham, MA**.
- [44] Gelman A., and Carlin J., and Stern H., and Rubin D., (1995), "Bayesian Data Analysis", CRC Press, Boca Raton, FL.
- [45] Gladysz B., Kuchta D. (2007), "Outliers detection in selected fuzzy regression models, **Springer, Camogli, Italy**, pp. 211–218.
- [46] Graybill F.A., (1961), "An Introduction to Linear Statistical Models", vol. 1. Mc-Graw-Hill, New York.

-
- [47] HAMPEL F.R. (1971), "A General Qualitative Definition of Robustness," **Annals of Mathematical Statistics**, 42, pp 1887-1896.
- [48] Hampel F.R. (1978), "Optimally bounding the gross-error-sensitivity and the influence of position in factor space", **Proceedings of the ASA Statistical Computing Section**, ASA, Washington, DC , pp 59–64.
- [49] Hasanpour H., and Maleki H.R., and Yaghoubi M.A. (2010), "Fuzzy linear regression model with crisp coefficients: A goal programming approach", **Iranian Journal of Fuzzy Systems**, 7, pp 19-39.
- [50] Hassanpour H., and Maleki H.R. , and Yaghoobi M.A. (2011), "A goal programming approach to fuzzy linear regression with fuzzy input–output data", **Soft Comput** **15**: 1569, Volume 15, Issue 8, pp 1569–1580
- [51] Hastie T., and Tibshirani R., and Friedman J., (2001), "The Elements of Statistical Learning—Data Mining, Inference, and Prediction", **Springer**, New York.
- [52] Hodges J.L. JR. (1967), "Efficiency in Normal Samples and Tolerance of Extreme Values for Some Estimates of Location," **Proceedings of the 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability**, (Vol. I), pp 163-168.
- [53] Hong D.H., and Hwang C., and Ahn C. (2004), "Ridge estimation for regression models with crisp input and Gaussian fuzzy output", **Fuzzy Sets and Systems**, 142, pp 307-319.
- [54] Hosseinzadeh E., and Hassanpour H. and Arefi M. (2016), "A weighted goal programming approach to estimate the linear regression model in full quasi type-2 fuzzy environment", **International Journal of Fuzzy Systems** 30, pp 1311-1317.
- [55] Hu Y.C. (2009), "Functional-link nets with genetic-algorithm-based learning for robust non-linear interval regression analysis", **Neurocomputing**, 72 (7–9), pp 1808–1816.
- [56] Huber P.J. (1973), "Robust regression: asymptotics, conjectures and Monte Carlo", **Annals of Statistics**, 1, pp 799–821.
- [57] Huber P.J. (1981), "Robust Statistics, Wiley", New York.
- [58] Hung W.L., Yang M.S. (2006), "An omission approach for detecting outliers in fuzzy regressions models", **Fuzzy Sets and Systems**, 157, pp 3109–3122.

- [59] Izdikhah M. (2009), "Using the Hamming distance to extend TOPSIS in a fuzzy environment", **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 231(1), pp 200-207.
- [60] Jaeckel L.A. (1972), "Estimating Regression Coefficients by Minimizing the Dispersion of Residuals", **Annals of Mathematical Statistics**, 5, pp 1449-1458.
- [61] Kelkinnama M., and Taheri S.M. (2012), "Fuzzy least-absolutes regression using shape preserving operations", **Information Sciences**, 214, pp 105-120.
- [62] Kim K.J., and Moskovitz H., and Koksalan M. (1996), "Fuzzy versus statistical linear regression". *Eur. J. Oper. Res.*, pp 92, 417–434.
- [63] Kim H.K., Yoon J.H., Li Y. (2008), "Asymptotic properties of least squares estimation with fuzzy observations", **Information Sciences**, 178 (2), pp 439–445.
- [64] Kim I.K., and Lee W., Yoon J.H., and Choi S.H. (2016), "Fuzzy regression model using trapezoidal fuzzy numbers for re-auction data", **International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems**, 16, pp 72-80.
- [65] Körner R., and Näther W. (1998), "Linear regression with random fuzzy variables: extended classical estimates, best linear estimates, least squares estimates", **Inform. Sci**, 109, pp 95–118.
- [66] Krätschmer V. (2004), "Least squares estimation in linear regression models with vague concepts", In: Lopez-Diaz, M., Gil, M.A., Grzegorzewski, P., Hryniewicz, P., Lawry, J. (Eds.), **Soft Methodology and Random Information Systems. Springer, Heidelberg**, pp 407–414.
- [67] Kuhn H. W., and Tucker A. W. (1951), "Nonlinear Programming", In: J. Neyman Ed., *Proc. of 2nd Berkeley Symp. On Mathematical Statistics and Probabilities*.
- [68] Kula K.Ş., Apaydin A. (2008), "Fuzzy robust regression analysis based on the ranking of fuzzy sets", **International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, 16 (5) pp 663–681.
- [69] Li J., and Zeng W., and Xie J. and Yin Q. (2016), "A new fuzzy regression model based on least absolute deviation", *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 52, pp 54-64.
- [70] Liew C.K. (1976), "Inequality constrained least-squares estimation", **J. Amer. Statist. Assoc**, 71, pp 746–751.

- [71] Lopez-Diaz M., and Gil M.A. (1997), "Constructive definitions of fuzzy random variables", **Statist. Probab. Lett**, 36, pp 135–143.
- [72] Lu J., and Wang R. (2009), "An enhanced fuzzy linear regression model with more flexible spreads", **Fuzzy Sets and Systems**, 160, pp 2505-2523.
- [73] Ma M., and Friedman M., and Kandel A., (1997), "General fuzzy least squares", **Fuzzy Sets and Systems**, 88, pp 107–118.
- [74] Mallows C.L. (1975), "On Some Topics in Robustnes, Unpublished memeorandum", **Bell Telephone Laboratories, Murray Hill, NJ**.
- [75] Mashinchi M.H., and Orgun M.A., aand Mashinchi M., and Pedrycz W. (2011), "A Tabu-harmony search-based approach to fuzzy linear regression", **IEEE Transactions on Fuzzy Systems**, 19, pp 432-448.
- [76] Mirzaei Yeganeh S., and Taheri S.M. (2009), "Possibilistic logistic regression by linear programming approach", Proc. of the 7th Seminar on Probability and Random Processes, Isfahan University of Technology, pp 139-143.
- [77] Modarres M., Nasrabadi E., Nasrabadi M.M. (2004), "Fuzzy linear regression analysis from the point of view risk", **International Journal Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, 12, pp 635–649.
- [78] Modarres M., Nasrabadi E., Nasrabadi M.M. (2005), "Fuzzy linear regression with least squares errors", **Applied Mathematics and Computation**, 163, pp 977–989.
- [79] Montenegro M., and Casals M.R., and Lubiano M.A., and Gil M.A., (2001), "Two-sample hypothesis tests of means of a fuzzy random variable", **Inform. Sci**, 133, pp 89–100.
- [80] Namdari M., and Yoon J.H., and Abadi A., Taheri S.M. and Choi S.H. (2015), "Fuzzy logistic regression with least absolutes deviations estimators", **Soft Computing**, 19, pp 909-917.
- [81] Nasrabadi E., Hashemi S.M., Ghatee M. (2007), "An LP-based approach to outliers detection in fuzzy regression analysis", **International Journal Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems**, 15, pp 441–456.
- [82] Nasrabadi E., Hashemi S.M. (2008), "Robust fuzzy regression analysis using neural networks", **International Journal Uncertainty, Fuzziness and KnowledgeBased Systems**, 16, pp 579–598.

-
- [83] Nasrabadi M.M., Nasrabadi E. (2004), "A mathematical-programming approach to fuzzy linear regression analysis", **Applied Mathematics and Computation**, 155 pp 873–881.
- [84] Nasrabadi M.M., Nasrabadi E., Nasrabadi A.R. (2005), "Fuzzy linear regression analysis: a multi-objective programming approach", **Applied Mathematics and Computation**, 163 (1), pp 245–251.
- [85] Näther W. (2000), "On random fuzzy variables of second order and their application to linear statistical inference with fuzzy data", **Metrika**, 51, pp 201–221.
- [86] Näther W., (2007), "Regression with fuzzy random data", **Comput. Statist. Data Anal.**, in this issue, doi:10.1016/j.csda.2006.02.021.
- [87] Nazarko J., Zalewski W. (1999), "The fuzzy regression approach to peak load estimation in power distribution systems", **IEEE Transactions on Power Systems**, 3 (14), pp 809–814.
- [88] Neter M., and Kutner H., and Nachtsheim C.J., and Wasserman W. (1996), "Applied Linear Statistical Models". Irwin, Chicago.
- [89] Nguyen T.D., and Welsch R. (2010), "Outlier detection and least trimmed squares approximation using semi-definite programming", **Computational Statistics and Data Analysis**, 54(12), pp 3212–3226.
- [90] Özelkan E.C., Duckstein L. (2000), "Multi-objective fuzzy regression: a general framework, Computers and Operations Research", **Special Issue on Artificial Intelligence and Decision Support with Multiple Criteria**, 27 (7–8), pp 635–652.
- [91] Pourahmad S., and Ayatollahi M., and Taheri S.M., and Habib Agahi Z. (2011), "Fuzzy logistic regression based on the least squares approach with application in clinical studies", **Computers and Mathematics with Applications**, 62, pp 3353–3365.
- [92] Peters G. (1994), "Fuzzy linear regression with fuzzy intervals", **Fuzzy Sets and Systems**, 63 (1), pp 45–55.
- [93] Pop H.F., Sarbu C. (1996), "A new fuzzy regression algorithm", **Analytical Chemistry**, 68 (5), pp 771–778.
- [94] Puri M.L., and Ralescu D.A. (1985), "The concept of normalità for fuzzy random variables", **The Ann. Probab**, 13, pp 1373–1379.

- [95] Puri M.L., and Ralescu D.A. (1986), "Fuzzy random variables", **J. Math. Anal. Appl**, 114, pp 409–422.
- [96] Redden D.T., Woodall W.H. (1994), "Properties of certain fuzzy linear regression", **Fuzzy Sets and Systems**, 79, pp 203–211.
- [97] Rousseeuw P.J. (1984), "Least median of squares regression", **Journal of the American Statistical Association**, 79(388), pp 871–880.
- [98] Rousseeuw P.J., and Yohai V.J. (1984), "Robust regression by means of S-estimators", **Robust and Nonlinear Time Series Regression**, Springer Lecture Notes in Statistics, vol. 26, New York, pp 256–272.
- [99] P.J. Rousseeuw, A.M. Leroy, **Robust Regression and Outlier Detection**, John Wiley and Sons, 1987.
- [100] Sakawa M., Yano H. (1992), "Multiobjective fuzzy linear regression analysis for fuzzy input–output data", **Fuzzy Sets and Systems**, 47, pp 173–181.
- [101] Sakawa M., "Fuzzy Sets and Interactive Multiobjective Optimization", Plenum Press, New York, (1993).
- [102] Sen P.K. (1968), "Estimates of the Regression Coefficient Based on Kendall's Tau", **Journal of the American Statistical Association**, 63, pp 1379-1389.
- [103] Shibata K., Watada J., and Yabuuchi Y. (2008), "A fuzzy regression approach for evaluating electric and electronics corporations", **Journal of Japan Industria Management Associations**, 59 (1), pp 58–67.
- [104] Siegel A.F., and Benson R.H. (1982), "A Robust Comparison of Biological Shapes," **Biometrics**, 38, pp 341-350.
- [105] Siegel A.F. (1982), "Robust regression using repeated medians", **Biometrika**, 69, pp 242–244.
- [106] Stigler S.M. (1981), "Gauss and the Invention of Least Squares", **Annals of Statistics**, 9, pp 465-474.
- [107] Tanaka H., and Uejima S., and Asai K. (1982), "Linear regression analysis with fuzzy model", **IEEE Transactions on Systems Man Cybernet**, 12, pp 903-907.

-
- [108] Tanaka H., and Watada J. (1988), "Possibilistic linear systems and their application to the linear regression model", **Fuzzy Sets and Systems**, 27, pp 275–289.
- [109] Taylor K.E. (2001), "Summarizing multiple aspects of model performance in a single diagram", **Journal of Geophysical Research**, 106, pp 7183–7192.
- [110] Theil H. (1950), "A Rank-Invariant Method of Linear and Polynomial Regression Analysis", **Nederlandsche Akademie van Wetenschappen Proceedings, (Parts 1-3)**, Ser. A, 53, pp 386-392; 521-525; 1397-1412.
- [111] Torabi T., Behboodian J. (2007), "Fuzzy least-absolutes estimates in linear models, Communications in Statistics", **Theory and Methods**, 36 (10), pp 1935–1944.
- [112] Tukey J.W., **Exploratory Data Analysis**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.
- [113] Varga S. (2007), "Robust estimations in classical regression models versus robust estimations in fuzzy regression models", **Kybernetika**, 43 (4), pp 503–508.
- [114] Watada J. and Pedrycz W. (2008), "A fuzzy regression approach to acquisition of linguistic rules", **Handbook of Granular Computing**, Wiley Online Library, pp 719-732.
- [115] Watada J., Yabuuchi Y. (1994), "Fuzzy robust regression analysis", **Proceeding of the 3rd IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Florida**, pp 1370–1376.
- [116] Watada J., Yabuuchi Y. (1995), "Fuzzy robust regression analysis based on a hyperelliptic function", in: **Proceedings of the International Joint Conference of the 4th IEEE International Conference on Fuzzy Systems and the 2nd International Fuzzy Engineering Symposium**, Yokohama, pp 1841–1848.
- [117] Wu H.C. (2003), "Fuzzy least squares estimators in linear regression analysis for imprecise input and output data", **Comput. Statist. Data Anal**, 42, pp 203–217.
- [118] Wünsche A., and Näther W. (2002), "Least-squares fuzzy regression with fuzzy random variables", **Fuzzy Sets and Systems**, 130, pp 43–50.
- [119] Xu R., (1991), "A linear regression model in fuzzy environment", **Advances in Modeling, Simulation**, 27, pp 31-140.
- [120] Yang M.S., and Ko, C.H. (1996), "On a class of fuzzy c-numbers clustering procedures for fuzzy data", **Fuzzy Sets and Systems**, 84, pp 49–60.

- [121] Yang M.S., and Ko C.H. (1997), "On cluster-wise fuzzy regression analysis", **IEEE Transactions on Systems Man Cybernet**, 27, pp 1-13.
- [122] Yohai V.J. (1987), "High breakdown-point and high efficiency robust estimates for regression", **The Annals of Statistics**, pp 642–656.
- [123] Zadeh L.A. (1965), "Fuzzy sets" **Information and control**, 8(3), pp 338-353
- [124] Zadeh L.A. (1975), "The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning *I, II and III*" **Information sciences**, 8:pp 199-249, 8:301-357, 9:43-80.
- [125] Zadeh L. (2005), "Toward a generalized theory of uncertainty (GTU)—an outline", **Inform. Sci**, 172, pp 1–40.
- [126] Zimmermann H.J. (2001), "Fuzzy Set Theory and its Applications", Kluwer Academic Press, Dordrecht.

پیوست آ

برنامه‌های نوشته شده در متمتیکا

الف- برنامه‌های متمتیکا مربوط به مثال فصل ۳

```
Dade = Import[
"C:\\Users\\dadepardaz\\Desktop\\New folder\\durso.xlsx", {"Data",
1}];
n = Length[Transpose[Dade][[1]]];
p = Length[Dade[[1]]] - 3;
Y1 = {"MPE", "Beta"};
Y = Dade[[1 ;;, {p + 1, p + 2, p + 3}]];
X = Dade[[1 ;;, Table[i, {i, p}]]];
t = Table[i, {i, 2, p}];
MPE = Array[mpe, p - 1];
R2 = Array[r2, p - 1];
R2adj = Array[r2adj, p - 1];

For[i = 1, i <= p - 1, i++,
X = Dade[[1 ;;, {1, i + 1}]]];
```

```

j = Length[Transpose[X]];
A = Array[\[Beta], j, 0];
A1 = Array[\[Sigma]1, j, 0];
Au = Array[\[Sigma]u, j, 0];
Yhat = Array[z, {n, 3}];
For[h = 1, h <= n, h++,
Yhat[[h, 1]] = X[[h]].A;
Yhat[[h, 2]] = X[[h]].A1;
Yhat[[h, 3]] = X[[h]].Au;
];
d = {};
For[k = 1, k <= j, k++,
d = Join[d, {A1[[k]] >= 0, Au[[k]] >= 0}]
];
B = Join[A, A1, Au];
\[Lambda] = 0.5;
\[Rho] = 0.5;
Q1 = NMinimize[{3*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 1]] -
Yhat[[A11, 1]]) -
2 \[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]).(Y[[A11, 2]] - Yhat[[A11, 2]]) +
2 \[Rho]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]).(Y[[A11, 3]] - Yhat[[A11, 3]]), d}, B];
MPE[[i]] = Q1[[1]]/n;
MPE
a = Min[MPE]
var1 = Which[a == MPE[[1]], t[[1]], a == MPE[[2]], t[[2]],
a == MPE[[3]], t[[3]], a == MPE[[4]], t[[4]], a == MPE[[5]], t[[5]],
a == MPE[[6]], t[[6]]]
Ybar = Mean[Y];
SSE1 = a*n
SST = 3*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 1]] -

```

```
X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]) -  
2*\[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 2]] -  
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -  
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]).(Y[[A11, 2]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) +  
2*\[Rho]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 3]] -  
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]) + \[Rho]^2*(Y[[A11, 3]] -  
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]).(Y[[A11, 3]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[3]])  
R21 = 1 - SSE1/SST  
ss = (n - 1)/(n - j - 4);  
R2adj1 = 1 - (1 - R21)*ss  
  
MPE = Array[mpe, p - 2];  
bb = Delete[t, var1 - 1]  
For[i = 1, i <= p - 2, i++,  
X = Dade[[1 ;;, {1, var1, bb[[i]]}]]];  
j = Length[Transpose[X]];  
A = Array\[Beta], j, 0];  
A1 = Array\[Sigma]1, j, 0];  
Au = Array\[Sigma]u, j, 0];  
Yhat = Array[z, {n, 3}];  
For[h = 1, h <= n, h++,  
Yhat[[h, 1]] = X[[h]].A;  
Yhat[[h, 2]] = X[[h]].A1;  
Yhat[[h, 3]] = X[[h]].Au;  
];  
d = {};  
For[k = 1, k <= j, k++,  
d = Join[d, {A1[[k]] >= 0, Au[[k]] >= 0}]  
];  
B = Join[A, A1, Au];  
\[Lambda] = 0.5;  
\[Rho] = 0.5;  
Q1 = NMinimize[{3*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 1]] -  
Yhat[[A11, 1]]) -
```

```

2 \[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]).(Y[[A11, 2]] - Yhat[[A11, 2]]) +
2 \[Rho]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]).(Y[[A11, 3]] - Yhat[[A11, 3]]), d} , B];
MPE[[i]] = Q1[[1]]/n;
MPE
a = Min[MPE]
var2 = Which[a == MPE[[1]], bb[[1]], a == MPE[[2]], bb[[2]],
a == MPE[[3]], bb[[3]], a == MPE[[4]], bb[[4]], a == MPE[[5]],
bb[[5]]
Ybar = Mean[Y]
SSE2 = a*n
SST = 3*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 1]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]) -
2*\[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]).(Y[[A11, 2]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) +
2*\[Rho]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]) + \[Rho]^2*(Y[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]).(Y[[A11, 3]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[3]])
R22 = 1 - SSE2/SST
ss = (n - 1)/(n - j - 4);
R2adj2 = 1 - (1 - R22)*ss

MPE = Array[mpe, p - 3];
cc = Delete[t, {{var1 - 1}, {var2 - 1}}]
For[i = 1, i <= p - 3, i++,
X = Dade[[1 ;;, {1, var1, var2, cc[[i]]}]];
j = Length[Transpose[X]];
A = Array[\[Beta], j, 0];
A1 = Array[\[Sigma]1, j, 0];
Au = Array[\[Sigma]u, j, 0];

```

```
Yhat = Array[z, {n, 3}];
For[h = 1, h <= n, h++,
Yhat[[h, 1]] = X[[h]].A;
Yhat[[h, 2]] = X[[h]].A1;
Yhat[[h, 3]] = X[[h]].Au;
];
d = {};
For[k = 1, k <= j, k++,
d = Join[d, {A1[[k]] >= 0, Au[[k]] >= 0}]
];
B = Join[A, A1, Au];
\[Lambda] = 0.5;
\[Rho] = 0.5;
Q1 = NMinimize[{3*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 1]] -
Yhat[[A11, 1]]) -
2 \[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]).(Y[[A11, 2]] - Yhat[[A11, 2]]) +
2 \[Rho]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]).(Y[[A11, 3]] - Yhat[[A11, 3]]), d} , B];
MPE[[i]] = Q1[[1]]/n;]
MPE
a = Min[MPE]
var3 = Which[a == MPE[[1]], cc[[1]], a == MPE[[2]], cc[[2]],
a == MPE[[3]], cc[[3]], a == MPE[[4]], cc[[4]]]
Ybar = Mean[Y]
SSE3 = a*n
SST = 3*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 1]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]) -
2*\[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]).(Y[[A11, 2]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) +
2*\[Rho]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 3]] -
```

```

X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]) + \[Rho]^2*(Y[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]).(Y[[A11, 3]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[3]])
R23 = 1 - SSE3/SST
ss = (n - 1)/(n - j - 4);
R2adj3 = 1 - (1 - R23)*ss

MPE = Array[mpe, p - 4];
dd = Delete[t, {{var1 - 1}, {var2 - 1}, {var3 - 1}}]
For[i = 1, i <= p - 4, i++,
X = Dade[[1 ;;, {1, var1, var2, var3, dd[[i]]}]];
j = Length[Transpose[X]];
A = Array[\[Beta], j, 0];
A1 = Array[\[Sigma]1, j, 0];
Au = Array[\[Sigma]u, j, 0];
Yhat = Array[z, {n, 3}];
For[h = 1, h <= n, h++,
Yhat[[h, 1]] = X[[h]].A;
Yhat[[h, 2]] = X[[h]].A1;
Yhat[[h, 3]] = X[[h]].Au;
];
d = {};
For[k = 1, k <= j, k++,
d = Join[d, {A1[[k]] >= 0, Au[[k]] >= 0}]
];
B = Join[A, A1, Au];
\[Lambda] = 0.5;
\[Rho] = 0.5;
Q1 = NMinimize[{3*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 1]] -
Yhat[[A11, 1]]) -
2 \[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]).(Y[[A11, 2]] - Yhat[[A11, 2]]) +
2 \[Rho]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 3]] -

```

```

Yhat[[A11, 3]]).(Y[[A11, 3]] - Yhat[[A11, 3]]), d} , B];
MPE[[i]] = Q1[[1]]/n;
MPE
a = Min[MPE]
var4 = Which[a == MPE[[1]], dd[[1]], a == MPE[[2]], dd[[2]],
a == MPE[[3]], dd[[3]]]
Ybar = Mean[Y]
SSE4 = a*n
SST = 3*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 1]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]) -
2*\[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]).(Y[[A11, 2]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) +
2*\[Rho]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]) + \[Rho]^2*(Y[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]).(Y[[A11, 3]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[3]])
R24 = 1 - SSE4/SST
ss = (n - 1)/(n - j - 4);
R2adj4 = 1 - (1 - R24)*ss

MPE = Array[mpe, p - 5];
ee = Delete[t, {{var1 - 1}, {var2 - 1}, {var3 - 1}, {var4 - 1}}]
For[i = 1, i <= p - 5, i++,
X = Dade[[1 ;;, {1, var1, var2, var3, var4, ee[[i]]}]];
j = Length[Transpose[X]];
A = Array[\[Beta], j, 0];
A1 = Array[\[Sigma]1, j, 0];
Au = Array[\[Sigma]u, j, 0];
Yhat = Array[z, {n, 3}];
For[h = 1, h <= n, h++,
Yhat[[h, 1]] = X[[h]].A;
Yhat[[h, 2]] = X[[h]].A1;
Yhat[[h, 3]] = X[[h]].Au;

```

```

];
d = {};
For[k = 1, k <= j, k++,
d = Join[d, {A1[[k]] >= 0, Au[[k]] >= 0}]
];
B = Join[A, A1, Au];
\[Lambda] = 0.5;
\[Rho] = 0.5;
Q1 = NMinimize[{3*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 1]] -
Yhat[[A11, 1]]) -
2 \[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]).(Y[[A11, 2]] - Yhat[[A11, 2]]) +
2 \[Rho]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]).(Y[[A11, 3]] - Yhat[[A11, 3]]), d} , B];
MPE[[i]] = Q1[[1]]/n;]
MPE
a = Min[MPE]
var5 = Which[a == MPE[[1]], ee[[1]], a == MPE[[2]], ee[[2]]]
Ybar = Mean[Y];
SSE5 = a*n
SST = 3*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 1]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]) -
2*\[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]).(Y[[A11, 2]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) +
2*\[Rho]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]) + \[Rho]^2*(Y[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]).(Y[[A11, 3]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[3]])
R25 = 1 - SSE5/SST
ss = (n - 1)/(n - j - 4);
R2adj5 = 1 - (1 - R25)*ss

```

\o\

```
MPE = Array[mpe, p - 6];
ff = Delete[
t, {{var1 - 1}, {var2 - 1}, {var3 - 1}, {var4 - 1}, {var5 - 1}}]
For[i = 1, i <= p - 6, i++,
X = Dade[[1 ;;, {1, var1, var2, var3, var4, var5, ff[[i]]}]];
j = Length[Transpose[X]];
A = Array\[Beta], j, 0];
A1 = Array\[Sigma]1, j, 0];
Au = Array\[Sigma]u, j, 0];
Yhat = Array[z, {n, 3}];
For[h = 1, h <= n, h++,
Yhat[[h, 1]] = X[[h]].A;
Yhat[[h, 2]] = X[[h]].A1;
Yhat[[h, 3]] = X[[h]].Au;
];
d = {};
For[k = 1, k <= j, k++,
d = Join[d, {A1[[k]] >= 0, Au[[k]] >= 0}]
];
B = Join[A, A1, Au];
\[Lambda] = 0.5;
\[Rho] = 0.5;
Q1 = NMinimize[{3*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 1]] -
Yhat[[A11, 1]]) -
2 \[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]).(Y[[A11, 2]] - Yhat[[A11, 2]]) +
2 \[Rho]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]).(Y[[A11, 3]] - Yhat[[A11, 3]]), d} , B];
MPE[[i]] = Q1[[1]]/n;]
MPE
a = Min[MPE]
var6 = Which[a == MPE[[1]], ff[[1]]]
```

```

Ybar = Mean[Y]
SSE6 = a*n
SST = 3*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]). (Y[[A11, 1]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]) -
2*\[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]). (Y[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]). (Y[[A11, 2]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) +
2*\[Rho]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]). (Y[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]) + \[Rho]^2*(Y[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]). (Y[[A11, 3]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[3]])
R26 = 1 - SSE6/SST
ss = (n - 1)/(n - j - 4);
R2adj6 = 1 - (1 - R26)*ss

SSR = 3*(Yhat[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]). (Yhat[[A11, 1]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]) -
2*\[Lambda]*(Yhat[[A11, 1]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]). (Yhat[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) + \[Lambda]^2*(Yhat[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]). (Yhat[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) +
2*\[Rho]*(Yhat[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]). (Yhat[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]) + \[Rho]^2*(Yhat[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]). (Yhat[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]);

X = Dade[[1 ;;, {1, var1, var2, var3}]];
j = Length[Transpose[X]];
A = Array[\[Beta], j, 0];
A1 = Array[\[Sigma]1, j, 0];
Au = Array[\[Sigma]u, j, 0];
Yhat = Array[z, {n, 3}];
For[h = 1, h <= n, h++,

```

```
Yhat[[h, 1]] = X[[h]].A;
Yhat[[h, 2]] = X[[h]].A1;
Yhat[[h, 3]] = X[[h]].Au;
];
d = {};
For[k = 1, k <= j, k++,
d = Join[d, {A1[[k]] >= 0, Au[[k]] >= 0}]
];
B = Join[A, A1, Au];
\[Lambda] = 0.5;
\[Rho] = 0.5;
Q1 = NMinimize[{3*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 1]] -
Yhat[[A11, 1]]) -
2*\[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
Yhat[[A11, 2]]).(Y[[A11, 2]] - Yhat[[A11, 2]]) +
2*\[Rho]*(Y[[A11, 1]] - Yhat[[A11, 1]]).(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 3]] -
Yhat[[A11, 3]]).(Y[[A11, 3]] - Yhat[[A11, 3]]), d} , B]
SSE = Q1[[1]];
Ybar = Mean[Y]
SST = 3*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 1]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]) -
2*\[Lambda]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) + \[Lambda]^2*(Y[[A11, 2]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]).(Y[[A11, 2]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[2]]) +
2*\[Rho]*(Y[[A11, 1]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[1]]).(Y[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]) + \[Rho]^2*(Y[[A11, 3]] -
X[[A11, 1]]*Ybar[[3]]).(Y[[A11, 3]] - X[[A11, 1]]*Ybar[[3]])
R2 = 1 - SSE/SST
ss = (n - 1)/(n - j - 4);
R2adj = 1 - (1 - R2)*ss
```

```

For[j = 1, j <= 4, j++,
A[[j]] = Q1[[2, j, 2]];
A1[[j]] = Q1[[2, j + 4, 2]];
Au[[j]] = Q1[[2, j + 2*4, 2]];
];
beta = Join[A, A1, Au]
(*AppendTo[Y1,Join[{Q1[[1]]/n},beta]]*)
Join[{Q1[[1]]/n}, beta]

Print[" MPE=", Q1[[1]]/n, " beta=", beta];
For[i = 1, i <= n, i++,
Yhat[[i, 1]] = X[[i]].A;
Yhat[[i, 2]] = X[[i]].A1;
Yhat[[i, 3]] = X[[i]].Au;
];

```

(ب) کدهای نوشته شده در نرم افزار R مرتبط با فصل سوم

```

library(FuzzyNumbers)

y1<-TriangularFuzzyNumber(0.31,1.15,1.75)
y2<-TriangularFuzzyNumber(0.15,2.98,5)
y3<-TriangularFuzzyNumber(1.95,3.92,5.89)
y4<-TriangularFuzzyNumber(2.76,4.65,6.89)
y5<-TriangularFuzzyNumber(1.85,3.98,6.11)
y6<-TriangularFuzzyNumber(0.72,3.35,4.93)
y7<-TriangularFuzzyNumber(0.2,3.13,4.84)
y8<-TriangularFuzzyNumber(1.74,4.15,6.56)
y9<-TriangularFuzzyNumber(1.48,3.96,6.06)
y10<-TriangularFuzzyNumber(2.06,4.07,6.45)
y11<-TriangularFuzzyNumber(1.14,3.30,5.13)
y12<-TriangularFuzzyNumber(1.67,4.02,6.8)

```

```

y13<-TriangularFuzzyNumber(-1.13,2.06,3.65)
y14<-TriangularFuzzyNumber(0.71,1.37,2.03)
y15<-TriangularFuzzyNumber(1.62,3.35,5.08)
y16<-TriangularFuzzyNumber(0.3,1.45,2.42)
y17<-TriangularFuzzyNumber(1.33,2.74,4.15)
y18<-TriangularFuzzyNumber(0.49,2.44,3.83)
y19<-TriangularFuzzyNumber(0.56,2.79,4.38)
y20<-TriangularFuzzyNumber(1.58,3.31,4.55)
y21<-TriangularFuzzyNumber(1.06,4.02,6.13)

```

```

Y=matrix(c(0.31,1.15,1.75, 0.15,2.98,5, 1.95,3.92,5.89, 2.76,4.65,6.89, 1.85,3.98,6.11, 0.72,
1.48,3.96,6.06, 2.06,4.07,6.45, 1.14,3.30,5.13, 1.67,4.02,6.8, -1.13,2.06,3.65,
0.71,1.37,2.03, 1.62,3.35,5.08, 0.3,1.45,2.42, 1.33,2.74,4.15, 0.49,2.44,3.83,
0.56,2.79,4.38, 1.58,3.31,4.55, 1.06,4.02,6.13),nrow=21, ncol=3, byrow=TRUE)
is.matrix(Y)

```

```

dim(Y)
m=Y[,2]
l=Y[,2]-Y[,1]
u=Y[,3]-Y[,2]

```

```

#.....data frame X.....

```

```

n=21

```

```

one=c(rep(1,n))

```

```

Temperature<- c(19.04,17.66,18.15,18.43,20.67,21.64,18.85,16.16,17.02,14.72,
15.89,17.83,20.96,17.07,14.71,20.41,20.13,15.64,13.22,12.98,13.10)
RelativeHumidity<- c(82.27,88.70,82.51,79.46,68.85,79.39,88.87,88.92,83.52,
87.51,86.04,91.77,83.62,73.10,80.38,87.98,90.13,64.95,80.16,86.14,89.12)
AtmosphericPressure<- c(1009.9,1017.5,1025.6,1032.1,1027.1,1020.0,1018.2,
1020.9,1028.0,1025.3,1018.5,1015.6,1012.3,1020.4,1028.6,1026.4,1023.1,
1022.4,1021.6,1023.4,1028.6)

```

```
Rain<- c(0.90,0.90,0.02,0.00,0.00,0.02,1.30,0.09,0.00,0.05,0.04,0.93,0.02,0.02,
0.09,0.24,0.02,0.00,0.01,0.44,0.01)
Radiation<- c(0.15,0.16,0.14,0.16,0.22,0.29,0.24,0.16,0.13,0.04,0.04,0.06,0.13
,0.13,0.01,0.11,0.17,0.08,0.00,0.00,0.00)
WindSpeed<- c(2.87,1.12,0.85,0.45,0.91,1.07,0.69,0.40,0.83,2.09,0.90,1.22,3.00,
1.75,0.73,1.87,2.39,1.25,1.02,0.70,1.17)
```

```
F<-cbind(one, RelativeHumidity,AtmosphericPressure , WindSpeed)
```

```
#.....LS.....
```

```
landa=ro=integrate(function(x) 1-x, 0, 1 )$value
```

```
delta=1
```

```
dim(F)
```

```
etaLnew=0.2978
```

```
etaUnew=0.4433
```

```
kesiLnew=1.1137
```

```
kesiUnew=0.3379
```

```
gammanew=matrix(c(0.3599,0.0501,-0.7310,-0.9145),4,1)
```

```
dim(gammanew)
```

```
i=0
```

```
while (delta>0.05){
```

```
  i=i+1
```

```
  print(i)
```

```
  etaL=etaLnew
```

```
  etaU=etaUnew
```

```
  kesiL=kesiLnew
```

```
  kesiU=kesiUnew
```

```
  gamma=gammanew
```

```
etaLnew=(1/landa)*(1/(t(gamma)**t(F)**F**gamma))*( landa*(t(gamma)**t(F)**1-t(gamm
```



```
delta1=etaLnew-etaL
```

```
etaUnew=(1/ro)*(1/(t(gamma)**t(F)**F**gamma))*(ro*(t(gamma)**t(F)**u-t(gamma)**t(F)**
```

```
delta2=etaUnew-etaU
```

```
kesiLnew=(1/(n*landa)*(landa*t(F[,1])** (1-F**gamma**etaL)-t(F[,1])** (m-F**gamma)))
```

```
delta3=kesiLnew-kesiL
```

```
kesiUnew=(1/(n*ro)*( ro*t(F[,1])** (u-F**gamma**etaU)+t(F[,1])** (m-F**gamma)))
```

```
delta4=kesiUnew-kesiU
```

```
gammanew=(1/(3-landa*etaL*(2-landa*etaL)+ro*etaU*(2+ro*etaU)))*(solve(t(F)**F)**t(F))** (3
```

```
kesiL)+ landa^2*(1*etaL-F[,1]*etaL*kesiL)
```

```
+ro*(m*etaU+u-F[,1]*kesiU)+(ro^2)*(u*etaU-F[,1]*etaU*kesiU))
```

```
delta5=gammanew-gamma
```

```
delta=max(delta1,delta2,delta3,delta4,delta5)
```

```
print(delta)
```

```
}
```

```
print(etaLnew)
```

```
print(etaUnew)
```

```
print(kesiLnew)
```

```
print(kesiUnew)
```

```
print(gammanew)
```


واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Robust	استوار
Extension principle	اصل توسعه
Additivity principle	اصل جمع‌پذیری
Estimate	برآورد
Estimator	برآوردگر
Spread	پهنای
Left Spread	پهنای چپ
Right Spread	پهنای راست
Membership function	تابع عضویت
Objective function	تابع هدف
Outlier	داده دورافتاده
Crisp	دقیق
Fuzzy number	عدد فازی
Least square	کمترین توان‌های دوم
Least median of square	کمترین میانه توان‌های دوم
Weighted least square	کمترین توان‌های دوم موزون
Response variable	متغیر پاسخ
Predictor variable	متغیر پیشگو
Explanatory variable	متغیر توضیحی
Breakdown point	نقطه فروریزش
Goodness of fit	نیکویی برازش
Leverage point	نقاط نافذ

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Additivity principle	اصل جمع‌پذیری
Breakdown point	نقطه فروریزش
Crisp	دقیق
Estimate	برآورد
Estimator	برآوردگر
Extension principle	اصل توسیع
Explanatory variable	متغیر توضیحی
Fuzzy number	عدد فازی
Goodness of fit	نیکویی برازش
Least median of square	کمترین میانه توان‌های دوم
Least square	کمترین توان‌های دوم
Left Spread	پهنای چپ
Leverage point	نقاط نافذ
Membership function	تابع عضویت
Objective function	تابع هدف
Outlier	داده دورافتاده
Predictor variable	متغیر پیشگو
Response variable	متغیر پاسخ
Right Spread	پهنای چپ
Spread	پهنا
Weighted least square	کمترین توان‌های دوم موزون

Abstract

In statistics, the analysis of regression is a practical method for investigating the relationships between one or some of response variables and a set of explanatory variables. The least squares method is one of the most commonly used methods for estimating regression coefficients. If all the assumptions of are true for a dataset, this method is the best estimator. But when it comes to observations of outlier data, this method is not a good prediction. In this case, robust regression methods are introduced as an alternative to classical methods. Furthermore if the observations are inaccurate too, the fuzzy robust regression are suggested. Fuzzy regression consists of two possible approaches and the least median squares. These methods are sensitive to outlier data.

In this dissertation, the observations include outlier data. The exact explanatory variables and the response variables are fuzzy numbers. Based on the above assumptions, a robust fuzzy linear regression model based on the least median of squares is represented. Then this method is combined to improve our estimation with the weighted least squares. The results from the examples show that the effect of the outlier data is neutralized or reduced.

Key words: Fuzzy regression, Least median of squares, Outliers, Robust regression, Weighted least Squares.



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

MSc Thesis in: Statistics

**Robust fuzzy linear regression model based
on the least median of squares**

By: Nasrin Falahatinezhad

Supervisor

Dr. Mohammad Reza Rabiei

September 2019