

الحمد لله
الرحمن الرحيم



دانشکده علوم ریاضی

رشته آمار، گرایش استنباط

رساله دکتری

برآوردگرهای بهبودیافته برخی مشخصه‌های قابلیت اعتماد

نگارنده: علیرضا صفریان

استاد راهنما

دکتر محمد آرشی

استاد مشاور

دکتر رضا عربی بلاغی

شهریور ۱۳۹۸



فرم شماره ۱۲: صورت جلسه نهایی دفاع از رساله دکتری (Ph.D)

(ویژه دانشجویان ورودی های ۹۴ و ما قبل)

بدینوسیله گواهی می شود آقای علیرضا صفریان دانشجوی دکتری رشته آمار - استنباط به شماره دانشجویی ۹۴۰۰۷۰۵ ورودی مهرماه سال ۹۴ در تاریخ ۹۸/۶/۳۰ از رساله نظری / عملی خود با عنوان: برآوردهای بهبود یافته برخی مشخصه های قابلیت اعتماد دفاع و با اخذ نمره ۱۹.۸۹ به درجه: عالی..... نائل گردید.

- الف) درجه عالی: نمره ۱۹-۲۰ ☒ ب) درجه بسیار خوب: نمره ۱۸/۹۹ - ۱۷ ☐
 ج) درجه خوب: نمره ۱۶/۹۹ - ۱۵ ☐ د) غیر قابل قبول و نیاز به دفاع مجدد دارد ☐
 ه) رساله نیاز به اصلاحات دارد ☐

ردیف	هیئت داوران	نام و نام خانوادگی	مرتبه علمی	امضاء
۱	دکتر محمد آرشی	استاد راهنما	دانشیار	
۲	دکتر رضا عربی بلاغی	استاد مشاور	استادیار	
۳	دکتر مهدی روزبه	استاد مدعو خارجی	دانشیار	
۴	دکتر داود شاهسونی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۵	دکتر احمد نزاکنی	استاد مدعو داخلی	دانشیار	
۶	دکتر حسین باغیشنی	سرپرست (نماینده) تحصیلات تکمیلی دانشکده	استادیار	

مدیر محترم تحصیلات تکمیلی دانشگاه:

ضمن تأیید مراتب فوق مقرر فرمائید اقدامات لازم در خصوص انجام مراحل دانش آموختگی آقای علیرضا صفریان بعمل آید.

نام و نام خانوادگی رئیس دانشکده: دکتر ابراهیم هاشمی

تاریخ و امضاء و مهر دانشکده:



تقدیم بہ:

پدرم و مادرم، کہ حضورشان ہمیشہ گرما بخش روح من بودہ است
ہمسرم، کہ سایہ مہربانیش سایہ سار زندگیم می باشد
دخترنامم، امید بخش جانم کہ آسایش او آرامش من است.

سپاس‌گزاری

سپاس ایزد منان را که در تمام مراحل زندگی مرا قوت قلب بود و توفیق را رفیق راهم ساخت تا این رساله را به پایان برسانم. اکنون که با یاری او توانسته‌ام قدمی هرچند ناچیز در راه کسب علم و دانش بردارم، بر خود لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیزم، که همواره بر کوتاهی و درشتی من، قلم عفو کشیده و با عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بوده‌اند، تشکر و قدردانی نمایم. از همسر عزیزم که همواره رفیق راه و مشوق اصلی من در امر تحصیل و تحقیق بوده و موفقیت خود را از آغاز این دوره تحصیلی تاکنون مرهون حمایت‌ها و صبر و شکیبایی بی‌دریغش هستم، بی‌نهایت سپاس‌گزارم.

تقدیر به گونه‌ای رقم خورد که مقطع دکتری را در دانشگاه صنعتی شاهرود به پایان برسانم و از محضر اساتید خوب گروه آمار این دانشگاه بهره‌جویم. سپاس از استاد عزیزم جناب آقای دکتر محمد آرشی، استادی دلسوز و با اخلاق، که درس "استنباط آماری پیشرفته" را با سبکی جذاب و عشق و علاقه‌ای وصف‌ناپذیر تدریس می‌کرد. بی‌شک کلاس درس ایشان از بهترین خاطرات من در این دوره تحصیلی است. کاش می‌شد دوباره دانشجوی ترم اول کارشناسی آمار بودم و آمار را جور دیگری یاد می‌گرفتم، اما افسوس نه راهی برای بازگشت مانده و نه پایی برای رفتن!

بدون شک جایگاه و منزلت معلم، والاتر از آن است که در مقام قدردانی از زحمات بی‌شائبه او، با زبان قاصر و دست ناتوان، چیزی بنگارم، اما بر حسب وظیفه و از باب "مَنْ لَمْ يَشْكُرِ الْمُنْعِمَ مِنَ الْمَخْلُوقِينَ لَمْ يَشْكُرِ اللَّهَ عَزَّ وَ جَلَّ" از اساتید ارجمندم جناب آقای دکتر محمد آرشی که با صبر و تلاش فراوان، از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند و زحمت راهنمایی بنده را در تهیه و تنظیم این رساله بر عهده گرفتند، کمال تشکر و قدردانی را دارم و از درگاه خداوند متعال برای آنها توفیق روزافزون آرزومندم.

سپاس از استاد و بهتر بگویم دوست خوبم جناب آقای دکتر رضا عربی بلاغی، که هنوز اولین روز آشنایی با ایشان در خاطرم هست. از همان دوره کارشناسی هم‌کلاسی بودیم و برای من بسی باعث افتخار بود که از مشاوره‌ها، کمک‌ها و هم‌فکری‌های ایشان بهره‌برم.

از اساتید محترم، جناب آقای دکتر مهدی روزبه (دانشگاه سمنان)، جناب آقای دکتر داوود شاهسونی و جناب آقای دکتر احمد نزاکتی (دانشگاه صنعتی شاهرود)، که زحمت تصحیح و داوری این رساله را متقبل شدند، سپاس‌گزارم.

از استاد و دوست خوبم دکتر محمد جعفری جوزانی و هم‌چنین دکتر برد جانسون^۱، که در طول دوره فرصت مطالعاتی من در دانشگاه منیتوبای کانادا زحمت راهنمایی و میزبانی مرا برعهده گرفتند و از هیچ کمکی به من دریغ نکردند، سپاس گزارم. از مدیر دلسوز و پرتلاش گروه آمار دانشگاه صنعتی شاهرود، جناب آقای دکتر حسین باغیشنی و هم‌چنین جناب آقای دکتر محمدرضا ربیعی (مدیر گروه سابق) به دلیل خدمات، راهنمایی‌ها و زحمات‌شان سپاس گزارم. از دوستان و هم‌کلاسی‌های خوبم که مرا در رسیدن به اهدافم کمک کرده‌اند، تشکر کرده و برایشان آرزوی موفقیت و سربلندی می‌کنم.

در نهایت، از همه عزیزانی که تا بدین جا مرا یاری کرده‌اند، به‌ویژه خانواده مهربانم که همواره پشتیبان من بوده‌اند، سپاس گزارم. امیدوارم بتوانم از عهده ادای حق این عزیزان برآیم.

یقیناً این مجموعه بدون عیب و نقص نیست. لذا از خوانندگان عزیز تقاضا دارم عیب‌ها و کاستی‌های این رساله را از طریق پست الکترونیکی^۲ به اطلاع اینجانب برسانند.

علیرضا صفریان
شهریور ۱۳۹۸

^۱Brad Johnson

^۲safariyan.stat@gmail.com

تعهد نامه

اینجانب علیرضا صفریان دانشجوی دکتری رشته آمار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی شاهرود، نویسنده رساله با عنوان **برآوردگرهای بهبودیافته برخی مشخصه‌های قابلیت اعتماد**، تحت راهنمایی **دکتر محمد آرشی** متعهد می‌شوم:

- تحقیقات در این رساله توسط اینجانب انجام شده است و از صحت و اصالت برخوردار است.
- در استفاده از نتایج پژوهش‌های دیگر پژوهش‌گران، به مرجع مورد استفاده استناد شده است.
- مطالب این رساله، تا کنون توسط خود، یا فرد دیگری برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی در هیچ‌جا ارایه نشده است.
- حقوق معنوی این اثر، به دانشگاه صنعتی شاهرود تعلق دارد، و مقالات مستخرج با نام “دانشگاه صنعتی شاهرود” یا “Shahrood University of Technology” به چاپ خواهد رسید.
- حقوق معنوی تمام افرادی که در به‌دست آوردن نتایج اصلی رساله تاثیرگذار بوده‌اند، در مقالات مستخرج از رساله رعایت می‌گردد.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که از موجود زنده (یا بافت‌های آنها) استفاده شده است، ضوابط و اصول اخلاقی رعایت شده است.
- در تمام مراحل انجام این رساله، در مواردی که به حوزه اطلاعات شخصی افراد دسترسی یافته (یا استفاده شده است)، اصل رازداری و اصول اخلاق انسانی رعایت شده است.

علیرضا صفریان

شهریور ۱۳۹۸

مالکیت نتایج و حق نشر

- تمام حقوق معنوی این اثر و محصولات آن (مقالات مستخرج، کتاب، برنامه‌های رایانه‌ای، نرم‌افزارها و تجهیزات ساخته شده) متعلق به دانشگاه صنعتی شاهرود می‌باشد. این مطلب باید به نحو مقتضی، در تولیدات علمی مربوطه ذکر شود.
- استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در این رساله بدون ذکر منبع مجاز نمی‌باشد.

چکیده

با توجه به این که، مشخصه‌های بقا از جمله تابع بقا و قابلیت اعتماد تنش-مقاومت از اهمیت ویژه‌ای در صنعت و علوم مهندسی و پزشکی برخوردار است، در این رساله می‌خواهیم برآوردهای بهبودیافته از نوع انقباضی براساس انواع نمونه‌گیری‌های مختلف از جمله مشاهدات سانسور شده، نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار و نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی برای این مشخصه‌ها به دست آوریم. همان‌طور که می‌دانیم در بسیاری از موارد با توجه به ماهیت داده‌ها تنها قسمتی از اطلاعات مربوط به نمونه در دست هست یا این که اندازه‌گیری دقیق تمامی اعضای نمونه امکان پذیر نیست، بنابراین شیوه‌ی نمونه‌گیری و کسب اطلاعات از آن‌ها متفاوت خواهد بود. در این رساله از طرح‌های جدید مطرح شده برای جمع‌آوری اطلاعات استفاده شده است که در برخی موارد می‌تواند جایگزین مناسبی برای طرح نمونه‌گیری ساده باشد. از طرفی با به‌کارگیری اطلاعات قبلی در مورد این مشخصه‌ها که معمولاً یا همیشه وجود دارند یا از طرف افراد متخصص ارائه می‌شوند، می‌توان دقت برآوردها را بالاتر برد. کارائی روش‌های ارائه شده با مطالعه‌ی شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های واقعی بررسی شده‌اند. نتایج به دست آمده عملکرد مطلوب برآوردهای بهبودیافته را در مقایسه با برخی روش‌های موجود نشان می‌دهند.

کلمات کلیدی: برآوردهای انقباضی، تابع بقا، پارامتر تنش-مقاومت، نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار، سانسور فزاینده، برآوردهای آزمون اولیه، فاصله اطمینان بوت‌استرپی

لیست مقالات مستخرج از پایان نامه

1. Safariyan, A., Arashi, M. and Arabi Belaghi, R. (2019a). Improved point and interval estimation of the stress–strength reliability based on ranked set sampling. *Statistics*, 53(1), 101-125.
2. Safariyan, A., Arashi, M. and Arabi Belaghi, R. (2019b). Improved estimators for stress-strength reliability using record ranked set sampling scheme. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-22.
3. Safariyan, A., Arashi, M., Arabi Belaghi, R. (2019c). Estimation for the Reliability Characteristics of a Family of Lifetime Distributions under Progressive Censoring. *Statistical Computation and Simulation*, (Under Review)
4. Safariyan, A., Arashi, M., Ahmed, S. E. and Arabi Belaghi, R. (2018a). Reliability Analysis Using Ranked Set Sampling. In International Conference on Management Science and Engineering Management (pp. 711-722). Springer, Cham.
5. Safariyan, A., Arashi, M., Arabi Belaghi, R. (2018b). Estimation for the Reliability Characteristic of a Family of Lifetime Distributions under Progressive Censoring, The 14th Iranian Statistics Conference, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.
6. Safariyan, A., Arashi, M., Arabi Belaghi, R. (2017). Some Asymptotic Results on The Preliminary Test Estimator of Stress-Strength Reliability, The 11th Seminar on Probability and Stochastic Process, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran.

پیشگفتار

قابلیت اعتماد از اهمیت ویژه‌ای در علوم مختلف از جمله علوم مهندسی و پزشکی و همچنین در صنعتی برخوردار است. اگر متغیر تصادفی X بیان‌گر فشار (تنش) وارد شده بر یک مؤلفه و متغیر تصادفی Y نشان دهنده‌ی مقاومت آن در برابر فشار X باشد، در این صورت، اگر $X > Y$ ، آن‌گاه مؤلفه از کار خواهد افتاد و در نتیجه شکست رخ می‌دهد. برعکس، آن مؤلفه تا زمانی که به عملکرد خود ادامه می‌دهد $X < Y$ باشد. در نتیجه، احتمال سالم ماندن مؤلفه یا به عبارت دیگر احتمال عدم شکست را به صورت $R = Pr\{X < Y\}$ قابلیت اعتماد تنش-مقاومت می‌نامند. مدل تنش مقاومت اولین بار توسط بیرن‌باوم^۳ (۱۹۵۶) معرفی شد و بعداً توسط بیرن‌باوم و مک‌کارتی^۴ (۱۹۵۸) گسترش یافت. مقالات بسیاری در رابطه با پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت وجود دارد. مسئله برآورد R به‌طور گسترده‌ای تحت فرضیات توزیعی مختلف روی X و Y برای انواع گوناگونی از داده‌ها مثل داده‌های کامل، داده‌های سانسور شده مورد مطالعه قرار گرفته است. مرور جامعی از موضوعات فوق تا سال ۲۰۰۳ توسط کاتز^۵ و همکاران ارائه شده است.

باتوجه به تعریف قابلیت اعتماد در یک مدل تنش-مقاومت، محقق علاقه‌مند است مقدار قابلیت اعتماد تا حد امکان به یک نزدیک باشد تا طول عمر مفید دستگاه افزایش یابد. برای مثال فرض کنید X متغیر تصادفی بیشترین فشار وارد شده بر پیستون موتور یک موشک و Y متغیر تصادفی مقاومت آن پیستون در برابر فشار وارده است، در اینصورت R احتمال روشن شدن موفقیت آمیز موتور موشک می‌باشد.

به‌عنوان مثال دیگر، فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی طول عمر قطعات الکترونیکی به‌ترتیب A و B باشند، در این صورت R احتمال این است که A زودتر از B خراب شود. به همین ترتیب می‌توان پدیده‌های بسیاری را مثال زد که قابلیت اعتماد تنش-مقاومت گویای احتمال شکست یا پیروزی آن‌ها باشد. یکی دیگر از مشخصه‌های قابلیت اعتماد، احتمال سالم ماندن یک مؤلفه تا زمان تعیین شده‌ی t است که اصطلاحاً تابع بقا نامیده و با $S(t)$ نمایش داده می‌شود. با توجه به اهمیت بالای این پارامتر، میزان دقت بالا در برآورد آن می‌تواند بسیار حیاتی و ارزشمند باشد. دو روش برای افزایش دقت برآورد این پارامتر پیشنهاد داده می‌شود که عبارتند از روش نمونه‌گیری بهینه‌تر یا روش استنباطی. در این رساله از هر دو روش بهینه‌سازی جهت بهبود و بالا بردن کارایی برآوردگر این پارامتر استفاده می‌کنیم. نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار (RSS) یکی از روش‌های نمونه‌گیری است که علاوه بر بالا بردن دقت برآوردگر از لحاظ هزینه نیز باصرفه‌تر است چون از تعداد نمونه‌ی کمتری استفاده می‌کند. همچنین در صورتی که تنها مقادیر رکوردی از این روش نمونه‌گیری در دسترس باشد بنابراین نمونه‌ی مجموعه‌ی

³Birnbaum

⁴McCarty

⁵Kotz

رتبه‌دار رکوردی در اختیار خواهیم داشت. از طرفی گاهی بخاطر شرایط آزمایشی یا درخواست آزمایشگر مجبور باشیم در حین آزمایش اقلامی را از فرآیند آزمایش خارج کنیم. بنابراین در بسیاری از موارد با توجه به ماهیت داده‌ها تنها قسمتی از اطلاعات مربوط به نمونه در دست هستند یا این که اندازه‌گیری دقیق تمامی اعضای نمونه امکان پذیر نیست، بنابراین شیوه‌ی نمونه‌گیری و کسب اطلاعات از آن‌ها متفاوت خواهد بود. اطلاعات مربوط به این اقلام از دست رفته و اصطلاحاً می‌گوییم سانسور رخ داده است. در این شرایط دقت برآوردگر مطمئناً کاهش می‌یابد. در این رساله می‌خواهیم برآوردگرهای بهبودیافته از نوع انقباضی براساس انواع نمونه‌گیری‌های مختلف از جمله مشاهدات سانسور شده، نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار و نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی برای این مشخصه‌های قابلیت اعتماد ارائه دهیم. از طرفی با به‌کارگیری روش استنباطی که در آن اطلاعات قبلی در مورد این مشخصه‌ها که معمولاً یا همیشه وجود دارند یا از طرف افراد متخصص ارائه می‌شوند، می‌توان دقت برآوردگرها را بالاتر برد. بنکرافت^۶ (۱۹۶۴) اولین کسی بود که با به‌کارگیری این اطلاعات در قالب یک آزمون اولیه به برآورد پارامتر مجهول پرداخت و این برآوردگرهای جدید را برآوردگر آزمون اولیه نامید. او نشان داد که برآوردگر آزمون اولیه کارایی بهتری داشته و به‌عبارتی دیگر باعث بوجود آمدن برآوردگرهای بهتری می‌شود. لذا برآوردگر آزمون اولیه مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفت به‌طوری که در بین سال‌های ۱۹۶۸ و ۱۹۷۷ تعداد زیادی مقاله در این زمینه چاپ شد در نتیجه اولین بیبلیوگرافی توسط بنکرافت و هان (۱۹۷۷) در این زمینه به چاپ رسید. مجدداً سرعت و تعداد تحقیقات طوری زیاد شد که ۱۰ سال بعد یعنی در سال ۱۹۸۸ دومین بیبلیوگرافی توسط هان و همکاران منتشر شد. مطالعه این دو اثر نشان می‌دهد که ایده برآوردگر آزمون اولیه، مورد توجه بسیاری از محققین در سرتاسر جهان واقع شده است بطوری که در زمینه‌های گوناگون از جمله نظریه برآوردگرها (پارامتری و ناپارامتری)، علاوه بر این برآوردگر خان و صالح (۲۰۰۱) برآوردگر جدیدی به نام برآوردگر انقباضی نوع استاین را براساس این ایده معرفی کردند که چه بسا دارای ویژگی‌های بهینه تری نیز است. باتوجه به این استراتژی‌ها برآوردگرهای بهبودیافته برای مشخصه‌های قابلیت اعتماد با استفاده از روش‌های نمونه‌گیری مختلف معرفی شده و کارائی روش‌های ارائه شده با مطالعه‌ی شبیه سازی و تحلیل داده‌های واقعی بررسی شده‌اند. نتایج به‌دست آمده عملکرد مطلوب برآوردگرهای بهبودیافته را در مقایسه با برخی روش‌های موجود نشان می‌دهند.

در این رساله به بهبود برآوردگرهای برخی مشخصه‌های قابلیت اعتماد با استفاده از طرح‌های نمونه‌گیری‌های مختلف پرداخت می‌شود. این مجموعه شامل ۴ فصل و ۲ پیوست به صورت زیر است:

- فصل اول، به معرفی و مقدمات مورد نیاز در مشخصه‌های قابلیت اعتماد و همچنین روش‌های نمونه‌گیری استفاده شده در این رساله اختصاص می‌یابد.

^۶Bancroft

- فصل دوم، به بررسی برآوردهای بهبود یافته قابلیت اعتماد تنش – مقاومت در نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار پرداخته می‌شود.
- فصل سوم، به بررسی برآوردهای بهبود یافته قابلیت اعتماد تنش – مقاومت در نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی پرداخته می‌شود.
- فصل چهارم، به بررسی برآوردهای بهبود یافته قابلیت اعتماد تنش – مقاومت و تابع بقا در طرح نمونه‌ی سانسور فزاینده پرداخته می‌شود.
- فصل پنجم، پیشنهادات برای تحقیقات آینده را در بر می‌گیرد.
- پیوست آ، اثبات قضایای بیان شده در فصل‌های ۲، ۳ و ۴ ارائه می‌شوند.
- پیوست ب، شامل گزیده‌ای از برنامه‌های نوشته شده با نرم افزار R است.

فهرست مطالب

ق	فهرست تصاویر
ش	فهرست جداول
ث	فهرست نمادها
ذ	فهرست کلمات اختصاری
۱	۱ پیش‌نیازها و ملزومات
۲	۱.۱ تحلیل بقا و مؤلفه‌های آن
۳	۱.۱.۱ پارامتر تنش-مقاومت
۴	۲.۱ آماره‌های ترتیبی
۵	۳.۱ آماره‌های رکوردی
۵	۴.۱ نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار
۶	۱.۴.۱ تاریخچه‌ی نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار
۸	۵.۱ نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی
۱۱	۶.۱ سانسور فزاینده
۱۳	۷.۱ داده‌های واقعی مورد استفاده در این رساله
۱۳	۱.۷.۱ داده‌های درختان سیب
۱۴	۲.۷.۱ زمان از کارافتادگی مایع عایق بین الکترودها
۱۵	۳.۷.۱ تنش-مقاومت فیبرهای کربنی
۱۷	۲ برآوردهای بهبود یافته با استفاده از نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار
۱۷	۱.۲ مقدمه
۲۰	۲.۲ استراتژی بهبود برآوردها
۲۶	۱.۲.۲ خواص توزیعی جانبی
۲۷	۲.۲.۲ کارائی نسبی جانبی

۳۰	مطالعات عددی	۳.۲
۳۱	۱.۳.۲ فواصل اطمینان بوتاستری	
۳۳	۲.۳.۲ مقایسه‌ی برآوردهای فاصله‌ای بر اساس شبیه‌سازی	
۳۷	۴.۲ تحلیل داده‌های درختان سیب	
۳۹	۵.۲ نتیجه‌گیری	
۴۳	۳ برآوردهای بهبود یافته با استفاده از نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی	
۴۳	۱.۳ مقدمه	
۴۵	۲.۳ استراتژی بهبود برآوردها	
۴۷	۱.۲.۳ خواص مجانبی	
۴۸	۲.۲.۳ مقایسه‌ی برآوردها	
۴۹	۳.۳ مطالعات عددی	
۴۹	۱.۳.۳ فواصل اطمینان بوتاستری	
۵۱	۲.۳.۳ مقایسه‌ی برآوردهای فاصله‌ای بر اساس شبیه‌سازی	
۵۴	۴.۳ مثال عددی	
۵۴	۵.۳ نتیجه‌گیری	
۵۷	۴ برآوردهای بهبود یافته در سانسور فزاینده	
۵۸	۱.۴ مقدمه	
۶۱	۲.۴ برآوردهای انقباضی	
۶۱	۱.۲.۴ برآورد $R(t)$	
۶۲	۲.۲.۴ خواص برآوردها	
۶۴	۳.۲.۴ برآورد P	
۶۷	۴.۲.۴ ویژگی‌های برآوردها	
۶۸	۳.۴ مطالعه‌ی شبیه‌سازی	
۷۵	۴.۴ تحلیل داده‌های واقعی	
۷۵	۱.۴.۴ زمان از کارافتادگی مایع عایق بین الکترودها	
۷۶	۲.۴.۴ تنش-مقاومت فیبرهای کربنی	
۷۷	۵.۴ نتیجه‌گیری	
۷۹	۵ پیشنهادات برای پژوهش‌های آینده	
۸۱	آ اثبات قضایا	
۸۱	۱.آ اثبات قضایای فصل دوم	
۸۷	۲.آ اثبات قضایای فصل سوم	

۹۰	آ.۳ اثبات قضایای فصل چهارم
۹۳	ب گزیده‌ای از برنامه‌های رایانه‌ای
۱۰۷	مراجع
۱۱۵	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۱۱۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

فهرست تصاویر

۱۱	شمایی از سانسور نوع I	۱.۱
۱۳	شمایی از ساختار سانسور فزاینده	۲.۱
۲۹	کارائی مجانبی نسبی برآوردگر آزمون اولیه نسبت به برآوردگر ML پارامتر R	۱.۲
۳۰	کارائی مجانبی نسبی برآوردگر نوع استاین نسبت به برآوردگر ML پارامتر R	۲.۲
۳۳	کارائی مجانبی نسبی برآوردگر انقباضی آزمون اولیه به ازای $\alpha = 0.01, 0.05$	۳.۲
۳۴	مقایسه‌ی MSE برآوردگرهای پیشنهادی برای برخی مقادیر α و η	۴.۲
۳۸	نمودار ECDF برای داده‌های درختان سیب	۵.۲
۳۸	نمودار Q-Q برای داده‌های درختان سیب	۶.۲
۴۰	نمودار P-P برای داده‌های درختان سیب	۷.۲
	کارائی نسبی بوت‌استری برای برآوردگرهای بهبودیافته در داده‌های درختان سیب	۸.۲
۴۱	فواصل اطمینان برای برآوردگرهای بهبودیافته در داده‌های درختان سیب	۹.۲
۵۰	مقایسه‌ی MSE برآوردگرهای پیشنهادی برای برخی مقادیر α و η در RRSS	۱.۳
۵۵	مقایسه میانگین مربعات خطا برای $\alpha = 0.01$ و $\eta = 0.67$ در مثال عددی	۲.۳
۶۵	نمودار کارائی نسبی برآوردگر PT براساس R_o	۱.۴
۶۶	نمودار کارائی نسبی برآوردگر ST براساس R_o	۲.۴
۶۹	کارائی نسبی برآوردگر آزمون اولیه برای $P = 0.05$	۳.۴
۶۹	کارائی نسبی برآوردگر نوع استاین برای $P = 0.05$	۴.۴
۷۴	نمودارهای جعبه‌ای ۱۰۰ نمونه‌ی بوت‌استری برای تکرارهای مختلف شبیه‌سازی شده	۵.۴

فهرست جداول

۱۴	۱.۱ داده‌های RSS برای درختان سیب
۱۶	۲.۱ مجموعه داده ۱ مربوط به مثال فیبرهای کربنی (اندازه طول 20 mm): . .
۱۶	۳.۱ مجموعه داده ۲ مربوط به مثال فیبرهای کربنی (اندازه طول 10 mm): . .
۱۶	۴.۱ داده‌ها و طرح سانسور فزاینده‌ی مربوط به داده‌های فیبرهای کربنی. . . .
	۱.۲ حدود تسلط، مینیمم و ماکسیمم کارائی نسبی تضمین شده توسط برآوردهای
۳۱	آزمون اولیه و نوع استاین
	۲.۲ مینیمم و ماکسیمم کارائی نسبی تضمین شده توسط برآوردهای انقباضی
۳۲	آزمون اولیه.
	۳.۲ میانگین طول فاصله اطمینان (E.L.) و احتمال پوشش (C.P.) برای $\mathcal{R}$ با
۳۶	$\alpha = 0.01, R_o = 0.31$ و $\eta = 0.7$
۳۹	۴.۲ داده‌های تبدیل شده‌ی درختان سیب.
۴۰	۵.۲ آزمون گلموگروف-اسمیرنف یک-نمونه‌ای برای داده‌های درختان سیب.
	۶.۲ برآوردهای $\mathcal{R}$ برای داده‌های درختان سیب به همراه فواصل اطمینان
۴۲	بوت‌استریپی ۹۵ درصد.
۵۱	۱.۳ فواصلی که برآوردهای بهبودیافته در RRSS بهتر عمل کرده‌اند.
	۲.۳ میانگین طول فاصله اطمینان (E.L.) و احتمال پوشش (C.P.) برای
۵۳	$\alpha = 0.01$ و $R_o = 0.3$
۵۴	۳.۳ داده‌های شبیه‌سازی شده
۵۶	۴.۳ برآوردها به ازای مقادیر مختلف R_o
	۱.۴ C.P. و E.L. برای $R(t)$ با $R_o = 0.56$ ، $R = (25, 10, 7, 5, 3, 10, 9, 5, 7)$ ، و
۷۳	$n = 100, 200$
	۲.۴ C.P. و E.L. برای $R(t)$ با $R_o = 0.56$ ، $R = (5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$ ،
۷۳	$n = 50, 100$
۷۵	۳.۴ C.P. و E.L. برای P با $P_o = 0.71$

- ۴.۴ برآوردهای $R(t)$ در داده‌های از کارافتادگی مایع عایق با $\hat{R}_o|_{t=2} = 0.7041$ ۷۶
- ۵.۴ برآوردهای P برای داده‌های الیاف با پیشنهاد قبلی $P_o = 0.1788$. . . ۷۶

فهرست نمادها

T	طول عمر
X	متغیر تنش
Y	متغیر مقاومت
$R(t)$	تابع بقا
$\mathcal{R}$	قابلیت اعتماد
$I(A)$	تابع نشانگر مجموعه A
$\mathbf{A}^T$	ترانهاده ماتریس $\mathbf{A}$
P	احتمال تنش-مقاومت
P_o	پیشنهاد اولیه‌ی احتمال تنش-مقاومت
$\hat{P}$	برآوردگر محدود شده‌ی احتمال تنش-مقاومت
$\hat{P}^{PT}$	برآوردگر آزمون اولیه‌ی احتمال تنش-مقاومت
$\hat{P}^{ST}$	برآوردگر نوع استاین احتمال تنش-مقاومت
$E(.)$	امید ریاضی
$\text{Var}(.)$	واریانس
$\text{Bias}(.)$	اریبی
$\text{MSE}(.)$	میانگین مربعات خطا
$b(.)$	اریبی جانبی
$B(.)$	مربع اریبی جانبی
$M(.)$	میانگین توان دوم خطای جانبی
$\hat{\mathcal{R}}^{PT}$	برآوردگر آزمون اولیه قابلیت اعتماد
$\hat{\mathcal{R}}^{SPT}$	برآوردگر انقباضی آزمون اولیه قابلیت اعتماد
$\hat{\mathcal{R}}^{ST}$	برآوردگر نوع استاین قابلیت اعتماد
$\mathcal{R}_o$	پیشنهاد اولیه‌ی قابلیت اعتماد
$\hat{R}(t)$	برآوردگر ماکسیمم درستنمایی تابع بقا
$\hat{R}^{PT}(t)$	برآوردگر آزمون اولیه تابع بقا
$\hat{R}^{ST}(t)$	برآوردگر نوع استاین تابع بقا

R_o	پیشنهاد اولیه‌ی تابع بقا
$\mathcal{N}(\mu, \sigma)$	توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ
$\mathcal{E}(\mu)$	توزیع نمائی با پارامتر μ
$\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	توزیع گاما با پارامتر α, β
$\mathcal{B}(\alpha, \beta)$	توزیع بتا با پارامتر α, β
$\mathcal{F}(m, n)$	توزیع فیشر با درجات آزادی m و n
$\chi_k^2(\Delta^2)$	توزیع کی-دو غیر مرکزی با پارامتر غیر مرکزی Δ^2 و درجه آزادی k
$H_d(., \Delta^2)$	تابع توزیع کی-دو غیر مرکزی با k درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی Δ^2
$\xrightarrow{D}$	همگرایی در توزیع
$\xrightarrow{P}$	همگرایی در احتمال
max	بیشینه
min	کمینه

فهرست کلمات اختصاری

ADB (Asymptotically Distributional Bias)
ADMSE (Asymptotically Distributional Mean Square Error)
ARE (Asymptotically Relational Efficiency)
CDF (Cumulative Distribution Function)
C.P. (Covering Probability)
E.L. (Expected Length)
ECDF (Empirical Cumulative Distribution Function)
i.i.d (independent identically distribution)
MLE (Maximum likelihood Estimator)
MMLE (Modified Maximum likelihood Estimator)
MMRSS (Modified Maximum likelihood Estimator under Ranked Set Sampling)
MSE (Distributional Mean Square Error)
PTE (Preliminary Test Estimator)
RSS (Ranked Set Sampling)
RRSS (Record Ranked Set Sampling)
REff (Relational Efficiency)
RE (Restricted Estimator)
STE (Stein-Type Estimator)
SPTE (Shrinkage Preliminary Test Estimator)
UE (Unrestricted Estimator)

فصل ۱

پیش‌نیازها و ملزومات

در این فصل به معرفی اجمالی برخی مفاهیم و تعاریف اولیه مورد استفاده در رساله می‌پردازیم. در این رساله نوع از داده‌های ترتیبی مورد توجه قرار گرفته‌اند، که همگی ریشه در داده‌ها و آماره‌های ترتیبی دارند. آماره‌های رکوردی نوعی از داده‌های ترتیبی است که به طور ویژه در فصل سوم استفاده شده است. از آن جا که طرح ارائه شده در این رساله تلفیقی از نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه دار و آماره‌های رکوردی می‌باشد، بنابراین در این فصل مفهوم نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار نیز معرفی خواهد شد. فصل چهارم شامل مشاهدات سانسور شده بویژه سانسور فزاینده است که بنابراین در این فصل اشاره‌ای کوتاه به مفهوم سانسور و انواع آن خواهیم داشت.

با توجه به این که در کل رساله به دنبال برآورد مشخصه‌های قابلیت اعتماد از جمله تابع بقا و مدل تنش-مقاومت هستیم، پس از معرفی این مدل‌ها، تعاریف و الگوریتم‌های مربوط به فواصل اطمینان بوت‌استرپ را بیان خواهیم کرد. تعاریف این فصل اغلب از کتاب تحلیل بقا نوشته‌ی میلر^۱ (۱۹۹۷) و کتاب مدل تنش-مقاومت و تعمیم آن نوشته‌ی کاتز^۲ (۲۰۰۳) گرفته شده است. با این وجود در هر قسمت به‌طور خاص به مراجع مربوطه و حقیقات انجام شده مربوطه اشاره می‌شود.

^۱Miller

^۲Kotz

۱.۱ تحلیل بقا و مؤلفه‌های آن

طول عمر یک موجود (که می‌تواند یک انسان، یک قطعه الکتریکی یا مجموعه‌ای از قطعات باشد) را با T نشان دهید. T یک متغیر تصادفی نامنفی است که می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد. فرض کنیم T یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال f و تابع توزیع F باشد یعنی

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(x)dx, \quad t > 0.$$

تعریف ۱.۱.۱. تابع بقای T که آن را با $S(t)$ نمایش می‌دهند عبارتست از احتمال این که T از مقدار t بیشتر باشد. تابع احتمال بقای T برابر است با

$$S(t) = \bar{F}(t) = P(T > t) = 1 - F(t).$$

در برخی متون آماری تابع بقا را تابع قابلیت اعتماد نیز می‌گویند. در مباحث طول عمر و مطالعات بقا یک سوال اساسی این است که اگر بدانیم طول عمر موجود مورد بررسی بزرگتر یا مساوی زمان t است (یعنی $T \geq t$) چقدر احتمال دارد که در زمانی بلافاصله بعد از t از بین برود. در واقع علاقه‌مندیم کمیت زیر را محاسبه کنیم

$$P(t \leq T < t + \delta | T \geq t), \quad \delta > 0, \quad t \geq 0.$$

این کمیت ارتباط مستقیمی با تابع توزیع F داشته و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$P(t \leq T < t + \delta | T \geq t) = \frac{F(t + \delta) - F(t)}{\bar{F}(t)}.$$

اگر احتمال شرطی فوق را به δ تقسیم کنیم و حد حاصل را هنگامی که $\delta \rightarrow 0$ محاسبه نمائیم کمیتی حاصل می‌شود که نقش اساسی در مباحث قابلیت اعتماد و تحلیل بقا دارد و به تابع نرخ خطر^۳ معروف است.

تعریف ۲.۱.۱. تابع نرخ خطر متغیر تصادفی T که آن را با $h(t)$ نمایش می‌دهیم به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} h(t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(t + \delta) - F(t)}{\delta \bar{F}(t)} \\ &= \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

توجه کنید که تابع نرخ خطر احتمال از کار افتادن نیست (یعنی لزوماً مقداری بین صفر و یک اختیار نمی‌کند). این کمیت نرخ از کار افتادگی را برای موجود زنده در زمان t نشان می‌دهد. طبیعی است که هر چقدر مقدار این کمیت بیشتر باشد انتظار داریم قابلیت اعتماد آن کمتر باشد.

³Hazard Rate

مثال ۱.۱.۱. اگر T دارای توزیع نمائی با میانگین $\frac{1}{\lambda}$ باشد آنگاه

$$h(t) = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda t}} = \lambda$$

یعنی توزیع نمائی دارای نرخ خطر ثابت است.

گزاره ۱.۱.۱. اگر T نشان دهنده طول عمر یک قطعه باشد که تابع نرخ خطر آن h و تابع بقای آن S است آنگاه:

$$S(t) = \exp\left\{-\int_0^t h(x)dx\right\}, t > 0. \quad (2.1)$$

گزاره ۲.۱.۱. کمیت $\int_0^t h(x)dx$ را که با $H(t)$ نمایش می‌دهیم به تابع نرخ خطر تجمعی معروف است. توجه کنید که

$$H(t) = -\ln S(t).$$

۱.۱.۱ پارامتر تنش-مقاومت

اگر متغیر تصادفی X بیان‌گر فشار (تنش) وارد شده بر یک مؤلفه و متغیر تصادفی Y نشان دهنده‌ی مقاومت آن در برابر فشار X باشد، در این صورت، اگر $X > Y$ ، آن‌گاه مؤلفه از کار خواهد افتاد و در نتیجه شکست رخ می‌دهد. برعکس، آن مؤلفه تا زمانی که به عملکرد خود ادامه می‌دهد $X < Y$ باشد. در نتیجه، احتمال سالم ماندن مؤلفه یا به عبارت دیگر احتمال عدم شکست یعنی $R = \Pr\{X < Y\}$ را پارامتر تنش-مقاومت می‌نامند. مدل تنش مقاومت اولین بار توسط بیرن‌باوم^۴ (۱۹۵۶) معرفی شد و بعداً توسط بیرن‌باوم و مک‌کارتی^۵ (۱۹۵۸) گسترش یافت. مقالات بسیاری در رابطه با پارامتر قابلیت اعتماد تنش-مقاومت وجود دارد. مسئله برآورد R به‌طور گسترده‌ای تحت فرضیات توزیعی مختلف روی X و Y برای انواع گوناگونی از داده‌ها مثل داده‌های کامل، داده‌های سانسور شده، مورد مطالعه قرار گرفته است. مرور جامعی از موضوعات فوق تا سال ۲۰۰۳ توسط کاتز و همکاران ارائه شده است.

در سال‌های اخیر، محققان زیادی برآورد پارامتر R را بر مبنای داده‌های ترتیبی در نظر گرفتند. به‌عنوان نمونه، بکلیزی^۶ (۲۰۰۸a, ۲۰۰۸b, ۲۰۱۳) با استفاده از آماره‌های رکوردی معمولی از توزیع‌های نمایی یک پارامتری و دو پارامتری و نمایی تعمیم یافته، سنجری و ریاحی (۱۳۹۲) بر اساس آماره‌های رکوردی معمولی پایین و بالا به ترتیب از الگوی نرخ خطر متناسب معکوس و الگوی نرخ خطر متناسب، موتلاک^۷ و همکاران (۲۰۱۰) با استفاده از RSS

⁴Birnbaum

⁵McCarty

⁶Baklizi

⁷Muttlak

تحت توزیع نمائی، اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۱) با کمک سانسور فزاینده براساس توزیع وایبل، ساراگوگلو^۸ و همکاران (۲۰۱۲) بر اساس سانسور فزاینده‌ی نوع II از توزیع نمایی و بصیرت و همکاران (۲۰۱۳) بر مبنای سانسور پیش رونده تحت مدل نرخ خطر متناسب به مسأله‌ی برآوردیابی پارامتر R پرداختند. صالحی و احمدی (۲۰۱۵) برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم و UMVU را برای پارامتر تنش-مقاومت براساس RRSS بالا از توزیع نمائی یک پارامتری به‌دست آورده و با توجه به مقایسه‌ای که انجام داده و نشان دادند که برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم عملکرد بهتری از UMVU داشته است. مهدی‌زاده و زمان‌زاده (۲۰۱۸a) به برآورد فاصله‌ای این پارامتر با استفاده از نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار پرداختند. هم‌چنین آنها در سال ۲۰۱۸ برآورد هموار تابع قابلیت اعتماد را با استفاده از نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار ارائه کردند.

باتوجه به تعریف قابلیت اعتماد در یک مدل تنش-مقاومت، علاقه‌مندیم مقدار قابلیت اعتماد تا حد امکان به یک نزدیک باشد تا طول عمر مفید دستگاه افزایش یابد. کاربرد عمده قابلیت اعتماد تنش-مقاومت در صنعت، علوم مهندسی و پزشکی می‌باشد. برای مثال فرض کنید X متغیر تصادفی بیشترین فشار وارد شده بر پیستون موتور یک موشک باشد و Y متغیر تصادفی مقاومت آن پیستون در برابر فشار وارده باشد، در این‌صورت R احتمال روشن شدن موفقیت آمیز موتور موشک می‌باشد.

به‌عنوان مثال دیگر، فرض کنید X و Y متغیرهای تصادفی طول عمر قطعات الکترونیکی به‌ترتیب A و B باشند، در این‌صورت R احتمال این است که A زودتر از B خراب شود.

به همین ترتیب می‌توان پدیده‌های بسیاری را مثال زد که قابلیت اعتماد تنش-مقاومت گویای احتمال شکست یا پیروزی آن‌ها باشد.

۲.۱ آماره‌های ترتیبی

متغیرهای تصادفی $(X_1, \dots, X_n)$ را در نظر بگیرید. اگر آن‌ها را به‌صورت صعودی مرتب کرده و با نماد $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n}$ نشان دهیم، آن‌گاه متغیر تصادفی $X_{k:n}$ ، $k = 1, \dots, n$ ، را k امین آماره ترتیبی^۹ در بین آن متغیرهای تصادفی گویند.

بدون شک آماره‌های ترتیبی کاربرد فراوانی دارند که آرنولد^{۱۰} و همکاران (۲۰۰۸)، صفحات ۷-۴) دوازده مورد از آن‌ها را بیان می‌کنند، که یکی از موارد مهم آن عبارت است از:

در مباحث قابلیت اعتماد، آماره‌ی ترتیبی k ام طول عمرهای مؤلفه‌های یک سیستم k از n ، همان طول عمر سیستم است. هم‌چنین در مبحث تحلیل بقا به‌طور ویژه زمانی که با داده‌های سانسور شده مواجه می‌شویم نیز به آماره‌های ترتیبی نیاز داریم.

⁸Saracoglu

⁹Order Statistics

¹⁰Arnold

۳.۱ آماره‌های رکوردی

فرض کنید $X_1, X_2, \dots$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع احتمال $F(\cdot)$ و تابع چگالی احتمال $f(\cdot)$ باشند. در این صورت، مشاهده‌ی X_j را یک رکورد بالا گوییم، هرگاه از تمام مشاهدات ماقبل خود با احتمال یک بزرگ‌تر باشد، به عبارت دیگر برای هر $j < i$ با احتمال یک داشته باشیم $X_j > X_i$ ، و برعکس $X_j < X_i$ را یک رکورد پایین گوییم، اگر برای هر $j < i$ با احتمال یک داشته باشیم $X_j < X_i$. i امین رکورد بالا را با نماد U_i و i امین رکورد پایین را با نماد L_i نشان می‌دهیم و البته قرارداد می‌کنیم $U_1 = L_1 = X_1$.

مثال ۱.۳.۱. داده‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$2/2, 5/1, 2/3, 4, 3, 3/1, 2/8, 3, 2/1, 6, 2/9.$$

در این داده‌ها، مشاهدات $2/2$ و $2/1$ رکوردهای پایین و مشاهدات $5/1$ ، $2/2$ و 6 رکوردهای بالا هستند. اساساً آماره‌های رکوردی در آزمایش‌های دنباله‌ای ظاهر می‌شوند. زیرا در این گونه آزمایش‌ها، مواردی که مقادیر آن‌ها از مشاهدات ماقبل خود بزرگ‌تر یا کوچک‌تر هستند، بیش‌تر مورد توجه قرار می‌گیرند. این نکته سبب پیدایش نظریه‌ی رکوردها توسط چندلر^{۱۱} (۱۹۵۲) شد که برای اولین بار به بررسی ویژگی‌های توزیعی آماره‌های رکوردی پرداخت. از پژوهش‌های استنباطی بر مبنای رکوردها می‌توان به احمدی و ارقامی (۲۰۰۱) و رزمخواه و همکاران (۱۳۸۶) اشاره کرد. آرشی (۱۳۸۴)، عربی بلاغی (۱۳۹۳)، صالحی (۱۳۹۴) و مالوترا^{۱۲} (۲۰۱۷) از جمله رساله‌هایی هستند که در رابطه با نظریه‌ی رکوردها می‌باشند.

۴.۱ نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار

در مبحث نمونه‌گیری، پژوهش‌گر همواره با مسأله‌ی انتخاب روش مناسب برای جمع‌آوری داده‌ها مواجه است، به‌طوری‌که وی به دنبال روش‌هایی است که دقت را برای برآورد ویژگی‌های يك جامعه‌ی آماری افزایش داده و هزینه را کمینه کند. در شرایطی که اندازه‌گیری دقیق واحدهای جامعه‌ی آماری، سخت، پرهزینه یا زمان‌بر باشد، اما بتوان واحدهای جامعه‌ی آماری را به‌سادگی و با کمترین هزینه به‌صورت چشمی یا قضاوتی مرتب کرد، از نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار استفاده می‌شود. کاربرد عمده‌ی این روش نمونه‌گیری در مطالعات زیست محیطی، کشاورزی و آزمایشگاهی است. به‌طور مثال فرض کنید مایل به تخمین میزان جیوهی درون بدن ماهی‌ها هستیم. با توجه به اینکه میزان جیوهی بدن ماهی‌ها بستگی شدیدی به اندازه‌آن‌ها دارد لذا آن‌ها را بر اساس سایش‌شان می‌توان به‌صورت چشمی مرتب کرد. برای

^{۱۱}Chendler

^{۱۲}Malhotra

مثال‌های بیش‌تر به چن^{۱۳} و همکاران (۲۰۰۳) مراجعه کنید. در اغلب موارد، روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار بر نمونه‌گیری تصادفی برتری دارد و برآوردگرهایی که از این روش به‌دست می‌آیند، عملکرد بهتری نسبت به برآوردگرهای حاصل از روش نمونه‌گیری تصادفی دارند.

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید $(X_1, X_2, \dots, X_m)$ یک نمونه‌ی تصادفی ساده (SRS) از توزیعی با تابع توزیع احتمال $F(\cdot)$ و تابع چگال احتمال $f(\cdot)$ باشد. این نمونه را به‌صورت چشمی یا قضاوتی مرتب کرده، سپس کوچک‌ترین آن‌ها یعنی $X_{1:m}$ را انتخاب می‌کنیم و با $X_{1,1}$ نشان می‌دهیم و بقیه را کنار می‌گذاریم. نمونه‌ی تصادفی دیگری به اندازه‌ی m گرفته و پس از مرتب کردن آن به‌صورت چشمی یا قضاوتی، دومین کوچک‌ترین واحد آن را انتخاب می‌کنیم و با $X_{2,2}$ نشان می‌دهیم و سپس بقیه را کنار می‌گذاریم. این کار را m بار انجام می‌دهیم و $X_{m,m}$ را از نمونه‌ی m ام انتخاب می‌کنیم و با $X_{m,m}$ نشان می‌دهیم. در نهایت به $X_{(m)}^{RSS} = (X_{1,1}, X_{2,2}, \dots, X_{m,m})$ یک نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار (RSS) به اندازه‌ی m گفته می‌شود. به عبارت دیگر، چنانچه $X_{(i:m)k}$ نشان‌دهنده‌ی i امین آماره ترتیبی از نمونه‌ی تصادفی K ام باشد، آن‌گاه روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار در دیاگرام زیر خلاصه می‌شود

$$\begin{array}{ccccccc} \text{نمونه‌ی اول} & : & X_{(1:m)1} & X_{(2:m)1} & \dots & X_{(m:m)1} & \rightarrow & X_{1,1} = X_{(1:m)1} \\ \text{نمونه‌ی دوم} & : & X_{(1:m)2} & X_{(2:m)2} & \dots & X_{(m:m)2} & \rightarrow & X_{2,2} = X_{(2:m)2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \text{نمونه‌ی } m\text{ام} & : & X_{(1:m)m} & X_{(2:m)m} & \dots & X_{(m:m)m} & \rightarrow & X_{m,m} = X_{(m:m)m} \end{array} \quad (3.1)$$

در واقع (۳.۱) روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار یک حلقه‌ای را نشان می‌دهد. از تعریف نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار مشخص می‌شود که واحدهای آن مستقل هستند، اما دلیلی ندارد که مرتب باشند. اگر دیاگرام ۳.۱ را r بار تکرار کنیم، یک نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار r —حلقه‌ای به اندازه‌ی نمونه‌ی rm حاصل خواهد شد. به دلیل این که مرتب کردن واحدهای نمونه به‌صورت چشمی یا قضاوتی صورت می‌گیرد، ممکن است به ازای اندازه‌های نمونه‌ی بزرگ، خطای رتبه‌بندی افزایش یابد. بنابراین در عمل m را کم‌تر از ۱۰ در نظر می‌گیرند و با افزایش تعداد حلقه‌ها به اندازه‌ی نمونه‌ی دلخواه می‌رسند.

۱.۴.۱ تاریخچه‌ی نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار

نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار برای نخستین بار توسط مک‌این‌تایر^{۱۴} (۱۹۵۲) پیشنهاد شد. او نشان داد که میانگین نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار ($\bar{X}_{RSS}$)، برآوردگری کاراتر از میانگین نمونه‌ی تصادفی ($\bar{X}_{SRS}$) برای میانگین جامعه‌ی آماری می‌باشد. پس از آن، نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار تا مدتی به فراموشی سپرده شد، تا این که هالز و دل^{۱۵} (۱۹۶۶) برای برآورد وزن شاخ و برگ

¹³Chen

¹⁴McIntyre

¹⁵Halls and Dell

درخت کاج از روش نمونه‌گیری معرفی شده توسط مک‌این‌تایر استفاده کردند و این روش را برای اولین بار نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار نامیدند و به‌طور تجربی و بر اساس یک تحقیق میدانی به برتری این روش نسبت به روش نمونه‌گیری تصادفی پی بردند. اولین پژوهش نظری در رابطه با نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار توسط تاکاشی و واکی‌موتو^{۱۶} (۱۹۶۸) صورت گرفت. آن‌ها دوباره روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار را احیا کردند و نشان دادند که اگر رتبه‌بندی در نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار بدون خطا صورت گیرد - که در اصطلاح به آن رتبه‌بندی کامل گفته می‌شود - آن گاه واریانس برآوردگر ($\bar{X}_{RSS}$) از واریانس برآوردگر ($\bar{X}_{SRS}$) به‌طور اکید کم‌تر است. تاکاشی و واکی‌موتو نیز همانند مک‌این‌تایر اسم خاصی برای این روش نمونه‌گیری قرار ندادند و این روش را برآورد نااریب میانگین جامعه‌ی آماری بر اساس نمونه‌ی طبقه‌بندی شده نامیدند. تاکاشی و واکی‌موتو (۱۹۶۸) نشان دادند در بعضی توزیع‌های تک مدی مثل توزیع نرمال، واریانس ($\bar{X}_{RSS}$) به دست آمده از یک نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار به حجم n ، با واریانس ($\bar{X}_{SRS}$) حاصل از یک نمونه‌ی تصادفی به حجم $2n$ برابر است. تاکاشی در سال ۱۹۷۰، در کنار نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار ارائه شده توسط مک‌این‌تایر، یک روش جدید برای تولید نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار ارائه نمود. چندی بعد، دل و کلاتر^{۱۷} (۱۹۷۲) بدون در نظر گرفتن شرط رتبه‌بندی کامل، به نتایج مشابه تاکاشی و واکی‌موتو (۱۹۶۸) رسیدند. استوکس^{۱۸} (۱۹۸۰) نشان داد که برآوردگر به دست آمده بر اساس نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار برای واریانس جامعه‌ی آماری کاراتر از برآوردگر متناظر آن بر اساس نمونه‌ی تصادفی است. تا قبل از سال ۱۹۸۰، اکثر پژوهش‌های انجام شده در رابطه با نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار در حالت ناپارامتری انجام می‌شدند. بهن^{۱۹} (۱۹۹۶) یک جمع‌آوری از کارهای ناپارامتری انجام شده درباره‌ی نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار ارائه داد. چند سال بعد از ۱۹۸۰، حالت پارامتری نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار مورد توجه قرار گرفت. از جمله آن‌ها می‌توان به استوکس (۱۹۹۵) اشاره کرد که برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم و بهترین برآوردگر خطی نااریب را بر اساس نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار برای خانواده مکان-مقیاس به دست آورد. پاتیل^{۲۰} و همکاران (۱۹۹۹) تاریخچه‌ای از کارهای انجام شده در رابطه با نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار فراهم نمودند. چن در سال ۲۰۰۰ نتایج استوکس در رابطه با اطلاع فیشر را به حالت ناپارامتری تعمیم داد. وی به همراه همکارانش در سال ۲۰۰۳ کتابی در رابطه با نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار به چاپ رساند. ژنگ و الصالح^{۲۱} در سال ۲۰۰۴ به برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم اصلاح شده پرداختند. بهترین برآوردگر خطی نااریب بر اساس نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار توسط افراد زیادی از جمله

¹⁶Takahashi and Wakimoto¹⁷Clutter¹⁸Stoks¹⁹Bohn²⁰Patil²¹Zheng and Al-Saleh

بارنت و مور^{۲۲} (۱۹۹۷) و بارتو^{۲۳} و بارنت^{۲۴} (۱۹۹۹) مورد توجه قرار گرفت. سینها^{۲۵} (۲۰۰۵) یک جمع‌آوری از تحقیقات انجام شده‌ی پارامتری و ناپارامتری در خصوص نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار تا آن زمان را ارائه نمود. جعفری جوزانی و جانسون^{۲۶} (۲۰۱۱) برآوردیابی طرح-محور بر اساس در جوامع متناهی در نظر گرفتند در حالی که دی^{۲۷} و همکاران (۲۰۱۶) برآوردیابی الگو-محور را بر اساس RSS در توزیع رایلی در نظر گرفتند (صالحی، ۱۳۹۰، را ببینید). زمان‌زاده و مهدی‌زاده (۲۰۱۹) ویژگی‌های برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی نسبت جامعه را در نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار با رتبه‌های غایی بررسی کردند. مهدی‌زاده (۱۳۹۰)، زمان‌زاده (۱۳۹۲) و مربی هروی (۱۳۹۴) چند نمونه رساله‌های چاپ شده به زبان فارسی در زمینه‌ی نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار هستند.

۵.۱ نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی

در روش نمونه‌گیری تصادفی رکوردها، اگر تعداد آزمایش‌ها محدود باشد، به‌طور معمول تعداد کمی رکورد ثبت می‌شود و این امر باعث می‌شود که برآوردگرهای حاصل اغلب ناسازگار باشند [برای اطلاعات بیشتر گولاتی و پاجت (۱۹۹۴)، و برگر و گولاتی (۲۰۰۱) را مطالعه کنید]. سامانیگو و وایتاگر^{۲۸} (۱۹۸۶) به این نتیجه رسیدند که اگر تعدادی رکورد تنها از یک دنباله از متغیرهای تصادفی در اختیار باشد، فقط در چارچوب آمار پارامتری به برآوردگری کارا برای تابع توزیع احتمال جامعه بر اساس آن‌ها خواهیم رسید. بدین منظور، آن‌ها در سال ۱۹۸۸ روشی در متون رکوردها پیشنهاد دادند که بر اساس آن، برآوردگر تابع توزیع احتمال جامعه‌ی آماری حتی بر اساس روش نمونه‌گیری تصادفی (نمونه ثابت) رکوردها نیز سازگار است. در واقع، آن‌ها روش نمونه‌گیری تصادفی و معکوس داده‌های رکوردی را (که قبلاً به‌صورت یک نمونه‌ای انجام می‌شد) به‌صورت چند نمونه‌ای تعمیم دادند. به‌طور دقیق‌تر، m دنباله‌ی تصادفی مستقل را در نظر بگیرید و فرض کنید نمونه‌گیری از دنباله‌ی i ام زمانی به اتمام می‌رسد که k_i امین رکورد مشاهده شود. بنابراین در مجموع $n = \sum_{i=1}^m k_i$ رکورد در اختیار داریم. دیاگرام ۴.۱ چگونگی

²²Barnett and Moore

²³Barreto

²⁴Barnet

²⁵Sinha

²⁶Johnson

²⁷Dey

²⁸Samanigo and Whitaker

جمع آوری آماره‌های رکوردی را در این روش نمایش می‌دهد

$$\begin{aligned} 1: & X_{(1)1}, X_{(2)1}, \dots \rightarrow U_{(1)1} \dots \dots \dots U_{(k_1)1} \\ 2: & X_{(1)2}, X_{(2)2}, \dots \rightarrow U_{(1)2} \dots U_{(k_2)2} \\ & \vdots \\ m: & X_{(1)m}, X_{(2)m}, \dots \rightarrow U_{(1)m} \dots \dots U_{(k_m)m} \end{aligned} \quad (4.1)$$

به‌طوری‌که $X_{(i)j}$ بیان‌گر i امین مشاهده از j امین دنباله و $U_{(i)j}$ بیان‌گر i امین رکورد معمولی بالا از آن دنباله می‌باشد. در ادامه محققانی روش چند نمونه‌ای سامانیگو و وایتاگر (۱۹۸۸) را مورد مطالعه و بررسی قرار دادند. بدیهی است که به دلیل مستقل بودن دنباله‌های متغیرهای تصادفی در دیاگرام (۴.۱)، دلیلی ندارد که ترتیبی بین رکوردهای حاصل از دنباله‌های متفاوت وجود داشته باشد. در بخش ۴.۱ مشاهده شد که در روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار، نمونه‌های تصادفی جامعه‌ی مورد مطالعه یا متغیر فرعی آن به‌صورت چشمی یا قضاوتی مرتب می‌شوند و در نهایت متغیرهای انتخاب شده به‌صورت دقیق اندازه‌گیری می‌شوند. از طرفی، همان‌طور که در ساختار نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار در دیاگرام (۳.۱) مشاهده می‌شود، عناصر روی قطر اصلی یعنی $(X_{1,1}, X_{2,2}, \dots, X_{m,m})$ به‌عنوان یک نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار انتخاب می‌شوند. در ادامه، الگوی جمع آوری آماره‌های رکوردی برگرفته از روش چندنمونه‌ای (۴.۱) و نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار معرفی می‌شوند و به همین دلیل آن را «نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی» می‌نامند. روش نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی برای اولین بار در رساله صالحی (۱۳۹۴) مطرح و مورد بررسی قرار گرفته است. قبل از تعریف طرح فوق در آماره‌های رکوردی، موارد زیر را در نظر بگیرید:

(۱) زمانی را در نظر بگیرید که تنها مشاهده‌ی ثبت شده، آخرین رکورد باشد و رکوردهای قبلی به هر دلیلی ثبت نشده باشند. به‌طور مثال در برخی داده‌های ورزشی و داده‌های هواشناسی این اتفاق رخ می‌دهد. مثلاً در طول هر ماه، رکورد دما ممکن است چندین بار شکسته شود، اما ممکن است فقط آخرین رکورد ثبت شود. همین رخداد می‌تواند برای میزان بارندگی ماهانه نیز اتفاق بیفتد. به‌عنوان مثال، دیاگرام زیر نشان دهنده‌ی رکوردهای جمع آوری شده از میزان دمای ماه بهمن در m سال است.

$$\begin{aligned} 1: & \textcircled{\text{NA}} \dots \dots \dots \textcircled{\text{NA}} U_{(k_1)1} \\ 2: & \textcircled{\text{NA}} \dots \textcircled{\text{NA}} U_{(k_2)2} \\ & \vdots \\ m: & \textcircled{\text{NA}} \dots \dots \textcircled{\text{NA}} U_{(k_m)m} \end{aligned} \quad (5.1)$$

همان‌طور که مشخص است، به‌عنوان مثال رکورد دمای ماه بهمن در سال دوم k_2 بار شکسته شده است و تنها آخرین رکورد در دسترس است. رکوردهای جمع آوری شده در دیاگرام بالا مستقل از هم هستند.

(۲) حالتی که اندازه‌گیری دقیق صفت مورد نظر به هر دلیلی مثل گران بودن، از بین رفتن کامل واحدهای تحت آزمایش یا سخت بودن به راحتی امکان پذیر نباشد اما بتوان به صورت چشمی، قضاوتی یا توسط وسیله‌ای رکوردهای صفت مورد نظر را مشخص کرد. به طور دقیق تر، m دنباله‌ی مستقل از متغیرهای تصادفی را در نظر بگیرید. از دنباله‌ی اول، اولین مشاهده را به عنوان اولین رکورد در نظر بگیریم. از دنباله‌ی دوم، به صورت چشمی دومین رکورد را مشخص کنیم و این عمل را تا m امین دنباله انجام می‌دهیم و m امین رکورد را از آن دنباله به صورت چشمی اندازه‌گیری می‌کنیم (دیاگرام (۶.۱) را ببینید). در این صورت m رکورد در اختیار خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} 1: & X_{(1)1}, X_{(2)1}, \dots \longrightarrow U_{(1)1} \\ 2: & X_{(1)2}, X_{(2)2}, \dots \longrightarrow U_{(2)2} \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \ddots \\ m: & X_{(1)m}, X_{(2)m}, \dots \longrightarrow U_{(m)m} \end{aligned} \quad (6.1)$$

(۳) حالتی را در نظر بگیرید که شرایط برقراری هیچ کدام از دو مورد بالا مهیا نباشد. فرض کنید m دنباله‌ی مستقل از متغیرهای تصادفی در اختیار است و نمونه‌گیری در هر دنباله به نحوی است که تنها رکوردها ثبت می‌شوند. هم چنین فرض کنید که i امین نمونه‌گیری دنباله‌ای زمانی متوقف می‌شود که i امین رکورد ثبت شود. از دنباله i ام تنها i امین رکورد را برای استنباط در رابطه با صفت‌های جامعه‌ی آماری حفظ می‌کنیم. از دیدگاهی دیگر، این روش مشابه روش چندنمونه‌ای سامانیگو و وایتاکر (۱۹۸۸) است به شرطی که قرار دهیم $k_i = i$ و فقط i امین رکورد از دنباله i ام را در نظر بگیریم. دیاگرام زیر به طور دقیق‌تر این روش را نشان می‌دهد

$$\begin{aligned} 1: & X_{(1)1}, X_{(2)1}, \dots \longrightarrow U_{(1)1} \\ 2: & X_{(1)2}, X_{(2)2}, \dots \longrightarrow U_{(1)1} \quad U_{(2)2} \\ & \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \ddots \\ m: & X_{(1)m}, X_{(2)m}, \dots \longrightarrow U_{(1)1} \quad U_{(2)2} \quad \dots \quad U_{(m)m} \end{aligned} \quad (7.1)$$

بنابراین در این حالت نیز m رکورد $(U_{(1)1}, \dots, U_{(m)m})$ را در اختیار خواهیم داشت. لازم به ذکر است که در عمل نیز ممکن است تنها آخرین رکورد در هر دنباله در دسترس باشد یا حتی تنها آخرین رکورد برای استنباط درباره‌ی پارامتر مجهول جامعه‌ی آماری کافی باشد. مشاهده می‌شود که ساختار تمامی آن‌ها مشابه نمونه‌گیری مجموعه‌ی رتبه‌دار معرفی شده در دیاگرام (۳.۱) است. اگر قرار دهیم $U_{i,i} = U_{(i)i}$ ، $i = 1, \dots, m$ ، آن‌گاه به بردار $(U_{(1)1}, \dots, U_{(m)m})$ یک نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی (RRSS) به اندازه‌ی m می‌گوییم. $U_{(i)i}$ ها نیز مشابه واحدهای نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار مستقل هستند و این امکان وجود دارد که مرتب نباشند. بنابراین به نظر می‌رسد محاسبات ریاضی با رکوردهای به دست آمده از طرح بالا نسبت به

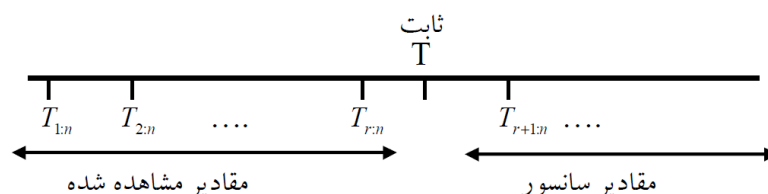
رکوردهای معمولی که به هم وابسته هستند، راحت تر می باشد. کاربرد اصلی نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار زمانی است که بتوان آماره‌های ترتیبی را به صورت چشمی تعیین نمود. صالحی (۱۳۹۴) در رساله خود طرحی جدید برای جمع آوری آماره های رکوردی معرفی کرده و نیز به پیش بینی فاصله ای آماره‌های رکوردی بر اساس طرح معرفی شده و هم چنین بر اساس نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار پرداخته است.

۶.۱ سانسور فزاینده

در آزمایشهای طول عمر و قابلیت اعتماد، موارد زیادی وجود دارد که واحدهای آزمایشی قبل از مشاهده زمان خرابی یا شکست از آزمون حذف یا کنار گذاشته می شوند. این حذف ممکن است به صورت غیر عمدی رخ دهد (توقف آزمایش طول عمر به دلیل شرایط پیش بینی نشده). معمولاً حذف واحدهای آزمایشی، از قبل طراحی شده و عمدی است و به دلایلی همچون صرفه جویی در زمان و هزینه توسط آزمونگر صورت می گیرد. در این حالت گفته می شود که سانسور رخ داده است، یعنی تنها بخشی از داده‌های طول عمر مشاهده می شود. در این حالت نمونه‌ی مشاهده شده را نمونه سانسور شده نامند.

فرض کنید $T_1, T_2, \dots, T_n$ ، متغیرهای مستقل و هم توزیع (i.i.d.) با تابع توزیع F باشند، سانسورهای نوع I و II رایج ترین نوع سانسورها هستند که به صورت زیر بیان می شوند:

- **سانسور نوع I (سانسور زمانی):** فرض کنید برای بررسی طول عمر نوعی قطعه، تعداد n قطعه از آن را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش می کنیم. فرض کنید تا زمان T (ثابت) منتظر می مانیم و سپس آزمایش را خاتمه می دهیم. تا قبل زمان T ممکن است تنها r از کارافتادگی را مشاهده کنیم ($r = 1, \dots, n$) و $n - r$ قطعه طول عمر بیشتر از T داشته باشند (مطابق شکل ۱.۱). اصطلاحاً گوییم $n - r$ قطعه سانسور شده اند. این نوع سانسور را سانسور نوع I (سانسور با مقدار ثابت) گویند. (در اینجا T ثابت و r متغیر تصادفی است) به عبارت دیگر، به جای مشاهده‌ی T_1 تا T_n (متغیرهای مورد توجه)،



شکل ۱.۱: شمایی از سانسور نوع I

فقط متغیرهای $T_{1:n}$ تا $T_{i:n}$ را به شرح زیر مشاهده می‌کنیم:

$$T_{i:n} = \begin{cases} T_i & T_i \leq T \\ T & T_i > T \end{cases}$$

● **سانسور نوع II (سانسور تعداد):** دوباره فرض کنید n قطعه را در زمان $t = 0$ وارد آزمایش کنیم و هنگامی آزمایش را خاتمه دهیم که r زمان شکست $(r = 1, \dots, n)$ را مشاهده کنیم. بنابراین اگر $t_{1:n}, \dots, t_{r:n}$ زمان شکست مشاهده شده این r قطعه باشند اطلاع دقیق در مورد زمان شکست آن‌ها را داریم و در مورد $n - r$ قطعه باقیمانده تنها می‌دانیم که طول عمر آن‌ها از $t_{r:n}$ بیشتر است. اصطلاحاً گوییم $n - r$ قطعه سانسور شده‌اند. این نوع سانسور را سانسور نوع دوم گوییم. در اینجا r ثابت و $t_{r:n}$ مقدار یک متغیر تصادفی است. به عبارت دیگر،

$$\begin{aligned} t_{1:n} &= T_{(1)} \\ t_{2:n} &= T_{(2)} \\ &\vdots \\ t_{r:n} &= T_{(r)} \\ t_{r+1:n} &= T_{(r)} \\ &\vdots \\ t_{n:n} &= T_{(r)} \end{aligned}$$

که در آن $T_{(i)}$ ها آماره‌های مرتب هستند.

از ایرادات وارد بر سانسورهای معمولی نوع I و II، این است که در این سانسورها اجازه حذف واحدهای آزمایش در زمان‌های غیر از زمان خاتمه به آزمایش داده نمی‌شود. اما سانسور فزاینده نوع II، دارای این ایراد نمی‌باشد. این سانسور به صورت زیر تعریف می‌شود:

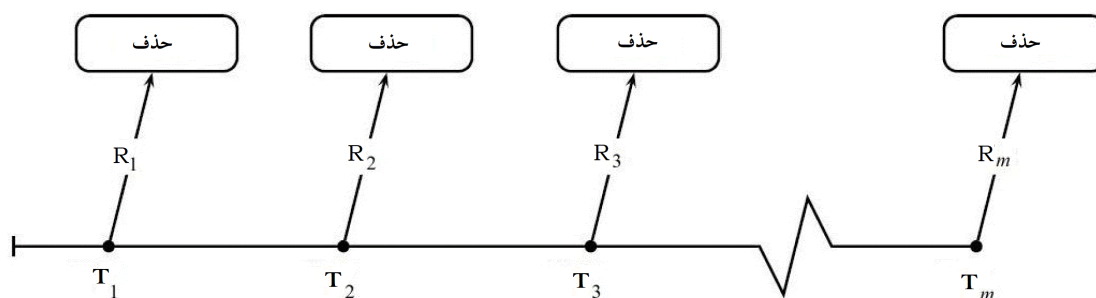
n واحد آزمایش را در زمان صفر، در معرض یک آزمایش طول عمر قرار می‌دهیم. با مشاهده اولین شکست، R_1 واحد از واحدهای سالم باقی‌مانده از روند آزمایش کنار گذاشته می‌شوند. با مشاهده دومین شکست، R_2 واحد از واحدهای سالم باقی‌مانده از آزمایش کنار گذاشته شوند و این کار ادامه پیدا می‌کند تا این که در زمان m مین شکست همه‌ی واحدهای سالم باقی‌مانده یعنی $R_m = n - m - R_1 - \dots - R_{m-1}$ از آزمایش طول عمر خارج می‌شوند. در این نوع سانسور، مقادیر m و $R = (R_1, R_2, \dots, R_m)$ از پیش تعیین می‌شوند. شکل ۲.۱ را ملاحظه کنید.

توجه کنید که اگر

$$R_1 = \dots = R_{m-1} = 0, \quad R_m = n - m,$$

آنگاه طرح سانسور معمولی نوع II به دست می‌آید. همچنین اگر داشته باشیم

$$R_1 = \dots = R_m = 0,$$



شکل ۲.۱: شمایی از ساختار سانسور فزاینده

آنگاه یک طرح بدون سانسور (نمونه کامل) خواهیم داشت. برای مطالعه بیشتر درباره سانسور فزاینده می‌توان به کتاب بالا کریشن و آگراوالا (۲۰۰۰) مراجعه کرد. مقاله‌های نوری اصل و همکاران (۲۰۱۷ و ۲۰۱۸) و عربی بلاغی و همکاران (۲۰۱۶) از جمله مقالاتی هستند که اخیراً در زمینه طرح سانسور فزاینده به چاپ رسیده‌اند.

۷.۱ داده‌های واقعی مورد استفاده در این رساله

در این بخش یک سری داده‌هایی را معرفی می‌کنیم که در تحلیل مطالب نظری که در این رساله توسعه یافته است، مورد استفاده قرار می‌گیرند. داده‌های مثال ۱.۷.۱ در فصل ۲ و داده‌های مثال‌های ۲.۷.۱ و ۳.۷.۱ در فصل ۴ مورد استفاده قرار گرفته‌اند که شرح و جزئیات آن‌ها در زیر آمده است.

۱.۷.۱ داده‌های درختان سیب

موری^{۲۹} و همکاران (۲۰۰۰) آزمایشی انجام دادند که در آن درختان سیب با مواد شیمیایی حاوی ردیاب فلورسنت، TinopalCBS-X، در سطح ۲ درصد در آب اسپری شدند. دو دسته از درختان برای پاشش انتخاب شدند. یک دسته در حجم بالا با استفاده از سمپاش با دهانه‌های درشت به منظور قطرات با اندازه نسبتاً بزرگ و دسته‌ی دیگر در حجم کم با استفاده از سمپاش با دهانه‌های ریز برای دادن قطرات با اندازه نسبتاً کوچک، اسپری شدند. آن‌ها مجموعه‌های پنجاه‌تایی از پنج برگ از پنج درخت مرکزی هر دسته را شناسایی و مورد استفاده قرار دادند تا RSS را با اندازه ۵ و حلقه ۱۰ تنظیم کنند. متغیر مورد علاقه، درصد ناحیه تحت پوشش اسپری بر روی سطح برگ است. اندازه‌گیری دقیق شامل تجزیه شیمیایی از محلول جمع‌آوری شده از سطح برگ‌ها است و به همین ترتیب یک فرایند زمان‌گیر و گران قیمت است. رتبه‌بندی قضاوتی در هر مجموعه براساس ظاهر بصری ته‌نشین‌های اسپری در سطوح

²⁹Murray

برگ در هنگام مشاهده نور ماوراء بنفش است. واضح است که اگر این کار توسط یک ناظر کارشناس انجام شود، این ورش ارزان‌تر و دقیق است. داده‌ها در جدول ۱.۱ آورده شده‌است، طوری که اندازه‌گیری‌های حاصل از رسوب اسپری در حجم بالا (کم)، گروه کنترل (درمان) را تشکیل می‌دهند.

جدول ۱.۱: داده‌های RSS برای درختان سیب

گروه	حلقه	رتبه ۱	رتبه ۲	رتبه ۳	رتبه ۴	رتبه ۵
کنترل	۱	۰/۰۰۳	۰/۰۲۸	۰/۲۴۴	۰/۰۵۷	۰/۱۴۳
	۲	۰/۰۳۹	۰/۱۱۹	۰/۱۲۶	۰/۱۰۵	۰/۵۶۵
	۳	۰/۰۳۴	۰/۱۱۸	۰/۱۳۰	۰/۲۱۸	۰/۲۹۶
	۴	۰/۰۵۱	۰/۱۰۴	۰/۱۹۳	۰/۲۱۰	۰/۱۵۰
	۵	۰/۰۳۲	۰/۱۴۱	۰/۱۳۰	۰/۲۵۰	۰/۲۲۹
	۶	۰/۰۶۹	۰/۰۷۰	۰/۲۶۰	۰/۲۲۵	۰/۲۸۵
	۷	۰/۱۰۰	۰/۰۹۱	۰/۲۴۴	۰/۱۳۰	۰/۳۴۷
	۸	۰/۰۱۲	۰/۰۹۶	۰/۰۶۹	۰/۳۷۳	۰/۱۳۳
	۹	۰/۰۴۶	۰/۱۱۷	۰/۱۲۶	۰/۲۲۳	۰/۲۷۳
	۱۰	۰/۰۲۸	۰/۰۸۳	۰/۱۰۸	۰/۲۱۲	۰/۲۶۱
تیمار	۱	۰/۰۳۶	۰/۱۳۷	۰/۱۸۳	۰/۲۷۰	۴۸۷.۰
	۲	۰/۲۵۰	۰/۱۸۱	۰/۲۹۰	۰/۳۲۸	۰/۷۱۵
	۳	۰/۰۸۹	۰/۰۳۲	۰/۲۶۹	۰/۴۱۹	۰/۳۱۵
	۴	۰/۱۸۰	۰/۱۱۱	۰/۱۳۰	۰/۱۹۴	۰/۷۴۲
	۵	۰/۱۰۰	۰/۰۰۹	۰/۱۸۴	۰/۲۷۷	۰/۱۲۲
	۶	۰/۰۴۲	۰/۰۸۹	۰/۱۹۹	۰/۲۶۹	۰/۳۹۵
	۷	۰/۰۴۴	۰/۰۸۳	۰/۲۲۷	۰/۱۷۷	۰/۷۴۲
	۸	۰/۰۴۴	۰/۱۷۱	۰/۰۶۷	۰/۱۹۲	۰/۳۳۶
	۹	۰/۰۰۹	۰/۰۱۷	۰/۲۱۷	۰/۴۳۸	۰/۵۴۴
	۱۰	۰/۰۷۱	۰/۱۳۲	۰/۳۱۰	۰/۳۴۳	۰/۳۷۹

۲.۷.۱ زمان از کارافتادگی مایع عایق بین الکترودها

مجموعه داده‌های واقعی استفاده شده در کتاب لاولس^{۳۰} (۱۹۸۲) را در نظر بگیرید. این داده‌ها توسط نلسون و سیدنی^{۳۱} (۱۹۸۲) ارائه شده‌اند، که زمان از کارافتادگی مایع عایق بین الکترودها در یک ولتاژ ۳۴ کیلوولت (دقیقه) به صورت سانسور شده می‌باشند. ۱۹ زمان از کار

³⁰Lawless

³¹Nelson and Sidney

افتادگی به صورت زیر هستند،

$$\begin{matrix} 0/96 & 4/15 & 0/19 & 0/78 & 8/01 & 31/75 & 7/35 & 6/50 & 8/27 & 33/91 \\ 32/52 & 3/16 & 4/85 & 2/78 & 4/67 & 1/31 & 12/06 & 36/71 & 72/89. \end{matrix}$$

بنابراین، ۹ مقدار سانسور فزاینده تحت طرح

$$(R_1 = 2, R_2 = 2, R_3 = 0, R_4 = 0, R_5 = 0, R_6 = 0, R_7 = 1, R_8 = 1, R_9 = 4)$$

به صورت زیر مشاهده می‌کنیم

$$0/19 \quad 0/78 \quad 1/31 \quad 2/78 \quad 4/15 \quad 4/67 \quad 4/85 \quad 6/50 \quad 8/01.$$

۳.۷.۱ تنش-مقاومت فیبرهای کربنی

داده‌هایی که توسط بدر و پریست^{۳۲} (۱۹۸۲) گزارش شده‌اند را در جداول ۲.۱ و ۳.۱ در نظر می‌گیریم. این داده‌ها نشان دهنده مقاومت اندازه‌گیری شده در GPA^{۳۳} برای الیاف تک کربن و پنبه فیبر ۱۰۰۰ کربن آغشته شده، می‌باشند. الیاف تک تحت آزمون کشش در اندازه طول‌های 20mm (مجموعه داده ۱) و 10mm (مجموعه داده ۲) به ترتیب با حجم نمونه ۶۹ و ۶۳ قرار گرفتند. این داده‌ها قبلاً توسط کوندو و گوپتا^{۳۴} (۲۰۰۶)، رقب و کوندو^{۳۵} (۲۰۰۹)، اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۱) و چاتورودی و نانچاهال^{۳۶} (۲۰۱۶) استفاده شده‌اند. نمونه‌های سانسور فزاینده‌ی با استفاده از طرح‌های نمونه‌ای مختلف سانسور فزاینده‌ی که توسط اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۱) به کار برده شده است، در جدول ۴.۱ ارائه شده است.

³²Bader and Priest

³³Grade Point Average

³⁴Kundu and Gupta

³⁵Raqab and Kundu

³⁶Chaturvedi and Nandchahal

جدول ۲.۱: مجموعه داده ۱ مربوط به مثال فیبرهای کربنی (اندازه طول 20 mm):

۱/۹۵۸	۱/۹۴۴	۱/۸۶۵	۱/۸۶۱	۱/۸۰۳	۱/۷۰۰	۱/۵۵۲	۱/۴۷۹	۱/۳۱۴	۱/۳۱۲
۲/۱۷۹	۲/۱۴۰	۲/۰۹۸	۲/۰۶۳	۲/۰۵۵	۲/۰۲۷	۲/۰۲۱	۲/۰۰۶	۱/۹۹۷	۱/۹۶۶
۲/۳۸۲	۲/۳۵۹	۲/۳۰۱	۲/۳۰۱	۲/۲۷۴	۲/۲۷۲	۲/۲۷۰	۲/۲۵۳	۲/۲۴۰	۲/۲۲۴
۲/۵۵۴	۲/۵۳۵	۲/۵۱۴	۲/۵۱۱	۲/۴۹۰	۲/۴۷۸	۲/۴۳۵	۲/۴۳۴	۲/۴۲۶	۲/۳۸۲
۲/۷۲۶	۲/۶۹۷	۲/۶۸۴	۲/۶۴۸	۲/۶۴۲	۲/۶۳۳	۲/۶۲۹	۲/۵۸۶	۲/۵۷۰	۲/۵۶۶
۳/۰۱۲	۲/۹۵۴	۲/۸۸۰	۲/۸۴۸	۲/۸۲۱	۲/۸۱۸	۲/۸۰۹	۲/۸۰۰	۲/۷۷۳	۲/۷۷۰
	۳/۵۸۵	۳/۵۸۵	۳/۴۳۳	۳/۲۳۳	۳/۱۲۸	۳/۰۹۶	۳/۰۹۰	۳/۰۸۴	۳/۰۶۷

جدول ۳.۱: مجموعه داده ۲ مربوط به مثال فیبرهای کربنی (اندازه طول 10 mm):

۲/۴۴۵	۲/۳۹۷	۲/۳۹۶	۲/۳۶۱	۲/۳۵۰	۲/۲۵۷	۲/۲۲۸	۲/۲۰۳	۲/۱۳۲	۱/۹۰۱
۲/۶۱۸	۲/۶۱۶	۲/۶۱۴	۲/۵۷۵	۲/۵۳۲	۲/۵۲۵	۲/۵۲۲	۲/۵۱۸	۲/۴۷۴	۲/۴۵۴
۲/۹۳۷	۲/۹۳۷	۲/۹۲۸	۲/۹۱۷	۲/۸۵۶	۲/۷۴۰	۲/۷۳۸	۲/۶۷۵	۲/۶۵۹	۲/۶۲۴
۳/۲۴۳	۳/۲۳۵	۳/۲۲۳	۳/۲۲۰	۳/۱۴۵	۳/۱۳۹	۳/۱۲۵	۳/۰۳۰	۲/۹۹۶	۲/۹۷۷
۳/۵۰۱	۳/۴۹۳	۳/۴۳۵	۳/۴۰۸	۳/۳۷۷	۳/۳۴۶	۳/۳۳۲	۳/۲۹۴	۳/۲۷۲	۳/۲۶۴
۴/۰۲۷	۴/۰۲۴	۳/۹۷۱	۳/۸۸۶	۳/۸۷۱	۳/۸۵۲	۳/۶۲۸	۳/۵۶۲	۳/۵۵۴	۳/۵۳۷
							۵/۰۲۰	۴/۳۹۵	۴/۲۲۵

جدول ۴.۱: داده‌ها و طرح سانسور فزاینده‌ی مربوط به داده‌های فیبرهای کربنی.

۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱	i, j
۲/۰۹۸	۲/۰۵۵	۲/۰۲۷	۱/۹۶۶	۱/۸۵۸	۱/۹۴۴	۱/۸۰۳	۱/۵۵۲	۱/۴۷۹	۱/۳۱۲	x_i
۵۰	۱	۰	۳	۰	۰	۲	۱	۰	۱	R_i
۲/۵۷۵	۲/۵۳۲	۲/۵۲۵	۲/۳۷۳	۲/۴۴۵	۲/۳۹۶	۲/۳۶۱	۲/۲۵۷	۲/۱۳۲	۱/۹۰۱	y_j
۴۴	۰	۰	۲	۱	۱	۰	۱	۲	۰	R'_j

فصل ۲

برآوردگرهای بهبود یافته با استفاده از نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار

در این فصل به برآورد پارامتر تنش-مقاومت با استفاده از داده‌های RSS پرداخته و برآوردگرهای بهبود یافته را برای این پارامتر ارائه می‌کنیم. از این فصل مقاله‌های صفریان، آرشی و عربی بلاغی (۲۰۱۷, ۲۰۱۸a, ۲۰۱۹a) استخراج شده‌اند.

۱.۲ مقدمه

توزیع نمائی نقش خیلی مهمی در مطالعات قابلیت اعتماد و مسائل آزمون بقا، ایفا می‌کند، [برای اطلاعات بیشتر به بالاکریشنان و باسو^۱ (۱۹۹۵) مراجعه کنید]. یادآور می‌شویم متغیر تصادفی Z دارای توزیع نمائی با میانگین $\theta (> 0)$ است $(Z \sim \mathcal{E}(\theta))$ ، اگر تابع توزیع تجمعی آن دارای فرم زیر باشد

$$F(z; \theta) = 1 - e^{-\frac{z}{\theta}}, \quad z > 0. \quad (1.2)$$

در این فصل برآوردگرهای بهبود یافته‌ی پارامتر تنش-مقاومت را با استفاده از برآوردگرهای ارائه شده توسط موتلاک تحت برخی اطلاعات قبلی در توزیع نمائی به‌دست می‌آوریم.

¹Balakrishnan and Basu

اگر چه برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی دز حالت کلی صورت بسته‌ای ندارند اما موتلاک برآوردگری با صورت بسته با استفاده از روش ماهاروتا و ناندا^۲ (۱۹۷۴) به صورت زیر به دست آورد

$$\hat{\lambda}_{\text{MMLE}} = \frac{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (n-i+1) Y_{ij}}{\frac{1}{k} n k (n+3)}. \quad (6.2)$$

وی نشان داد که $\hat{\lambda}_{\text{MMLE}}$ یک برآوردگر نااریب برای λ است، به طور مشابه، μ برای μ عبارت است از

$$\hat{\mu}_{\text{MMLE}} = \frac{\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^m (m-i+1) X_{ij}}{\frac{1}{r} r m (m+3)}, \quad (7.2)$$

که یک برآوردگر نااریب برای μ است. بنابراین برآوردگر ماکسیمم درستنمایی تعدیل یافته تحت نمونه‌ی RSS (MMRSS) برای $\mathcal{R}$ با استفاده (۶.۲) و (۷.۲) به صورت زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} &= \frac{\hat{\lambda}_{\text{MMLE}}}{\hat{\mu}_{\text{MMLE}} + \hat{\lambda}_{\text{MMLE}}} \\ &= \left(1 + \frac{k n (n+3)}{r m (m+3)} \frac{\sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^m (m-i+1) X_{ij}}{\sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (n-i+1) Y_{ij}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

حالتی را در نظر بگیرید که تعداد مقادیر نمونه به اندازه کافی بزرگ باشد. باتوجه به این که مجموعه‌ها به صورت چشمی قضاوت می‌شوند بنابراین تعداد آنها زیاد بزرگ نیست بنابراین با افزایش تعداد حلقه‌ها می‌توان تعداد نمونه را به اندازه کافی بزرگ کرد.

قضیه ۱.۱.۲. فرض کنید $r, k \rightarrow \infty$ ، آن گاه واریانس‌های مجانبی دو برآوردگر $\hat{\lambda}_{\text{MMLE}}$ و $\hat{\mu}_{\text{MMLE}}$ به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\sigma_{\lambda}^2 = \frac{\lambda^2}{\frac{n+3}{k} + 2(n-1)C_n} \quad \text{و} \quad \sigma_{\mu}^2 = \frac{\mu^2}{\frac{m+3}{r} + 2(m-1)C_m}$$

که در آن

$$C_n = \sum_{i=3}^n \sum_{s=0}^{i-3} \frac{\binom{i-3}{s} \binom{n-2}{i-2} (-1)^{i-3-s}}{(n-s)^3}$$

و

$$C_m = \sum_{i=3}^m \sum_{s=0}^{i-3} \frac{\binom{i-3}{s} \binom{m-2}{i-2} (-1)^{i-3-s}}{(m-s)^3}.$$

²Maharota and Nanda

برای اثبات به پیوست ۱.آ مراجعه کنید.

لم ۱.۱.۲. فرض کنید r, k به اندازه کافی بزرگ باشند چنان که $\frac{kn}{rm} \rightarrow p$ که در آن $p \in (0, 1)$ ، اگر $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ نماد همگرایی در توزیع باشد، آن‌گاه خواهیم داشت

$$(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, \omega^2), \quad (9.2)$$

که در آن

$$\omega = \frac{\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2} \sqrt{\frac{1}{rm} \left(\frac{1}{\frac{m+3}{4} + 2(m-1)C_m} + \frac{1}{p(\frac{n+3}{4} + 2(n-1)C_n)} \right)}. \quad (10.2)$$

برای اثبات به پیوست ۱.آ مراجعه کنید.

حال، فرض کنید $\omega = \frac{v}{\sqrt{rm}}$ که در آن

$$v = \frac{\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2} \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{m+3}{4} + 2(m-1)C_m} + \frac{1}{p(\frac{n+3}{4} + 2(n-1)C_n)} \right)}, \quad (11.2)$$

باتوجه به خاصیت پایانی برآوردهای ML، داریم $\hat{\omega} \xrightarrow{\mathcal{P}} \omega$ که در آن

$$\hat{\omega} = \frac{\hat{\mu}_{\text{MMLE}} \hat{\lambda}_{\text{MMLE}}}{(\hat{\mu}_{\text{MMLE}} + \hat{\lambda}_{\text{MMLE}})^2} \sqrt{\frac{1}{rm} \left(\frac{1}{\frac{m+3}{4} + 2(m-1)C_m} + \frac{1}{p(\frac{n+3}{4} + 2(n-1)C_n)} \right)} \quad (12.2)$$

در ادامه می‌خواهیم برآوردهای بهبودیافته را برای پارامتر تنش - مقاومت به‌دست بیاوریم، بنابراین از استراتژی آزمون اولیه^۳ جهت این کار استفاده می‌کنیم.

۲.۲ استراتژی بهبود برآوردها

در استنباط آماری و روش‌های کلاسیک رایج برای برآورد پارامتر مجهول جامعه، از اطلاعاتی که از نمونه‌ی تصادفی به‌دست می‌آید، استفاده می‌شود. با این وجود در بسیاری از موارد، علاوه بر اطلاعاتی که نمونه‌ی تصادفی درباره‌ی پارامتر مجهول جامعه در اختیار ما قرار می‌دهد، اطلاعات مفید دیگری (اطلاعات غیر نمونه‌ای) نیز وجود دارد که می‌تواند در بهبود برآورد پارامتر مجهول به ما کمک کند. این اطلاعات غیرنمونه‌ای معمولاً از طریق دانش قبلی یا نتایج آزمایش‌های قبلی، قابل حصول است. به عنوان مثال یک مهندس کنترل کیفیت با توجه به تجربه‌ی شخصی یا نتایج آزمایش‌های قبلی می‌تواند یک حدس اولیه درباره میانگین

³Preliminary Test

طول عمر قطعه‌ی مورد آزمایش داشته باشد. بر اساس نظر فیشر (صالح (۲۰۰۶) صفحه ۵۸)، این اطلاعات غیرنمونه‌ای را می‌توان در قالب یک آزمون فرض مقدماتی بیان کرد و از آن برای برآورد پارامتر مجهول استفاده کرد. برآوردگری که با توجه به این آزمون مقدماتی به دست می‌آید، برآوردگر آزمون اولیه گفته می‌شود. به عبارتی اگر برآوردگر کلاسیک پارامتر مجهول θ را با $\hat{\theta}$ نمایش دهیم و یک حدس اولیه $\theta = \theta_0$ درباره پارامتر مجهول θ وجود داشته باشد، در این صورت ابتدا آزمون فرض مقدماتی $H_0: \theta = \theta_0$ در مقابل $H_1: \theta \neq \theta_0$ انجام می‌شود. سپس براساس رد یا پذیرش فرض H_0 برآورد آزمون اولیه^۴ (PT) برای پارامتر θ به صورت زیر معرفی می‌شود که H_0 پذیرش می‌شود اگر $\hat{\theta}^{PT} = \theta_0$ و H_0 رد شود اگر $\hat{\theta}^{PT} \neq \theta_0$.

مثال ۱.۲.۲. برآوردگر آزمون اولیه در استنباط نقطه‌ای بنکرافت^۵ ۱۹۶۴.

اغلب اتفاق می‌افتد که آزمایشگر دو نمونه تصادفی مستقل دارد که تحت شرایط مشابه اندازه‌گیری شده‌اند. به عنوان مثال دو نمونه مستقل توسط دو آزمایشگاه متفاوت یا در دو زمان متفاوت از یک جامعه گرفته شده است و محقق علاقه‌مند به برآورد میانگین جامعه مورد نظر است. به وضوح اگر دو نمونه از دو جامعه یکسان باشند آنگاه استفاده از میانگین نمونه ادغامی روش منطقی‌تری است در غیر این صورت ادغام نمونه‌ها کار درستی نیست در عمل، محقق در مورد این که این دو، میانگین یکسانی دارند یا خیر، اغلب اطمینان قطعی ندارد. بنابراین برآوردگر بدست آمده در این حالت به نتیجه آزمون اولیه در مورد تساوی میانگین‌ها بستگی خواهد داشت. به طور خاص اگر $\bar{x}$ میانگین نمونه‌ای به حجم n_1 از جامعه نرمال با میانگین μ_1 و واریانس معلوم σ^2 باشد و $\bar{y}$ میانگین نمونه‌ای به حجم n_2 از جامعه نرمال با میانگین μ_2 و واریانس معلوم σ^2 باشند و این دو نمونه از هم مستقل باشند در این صورت با فرض تساوی واریانس‌ها برآوردگر نقطه‌ای و فاصله‌ای میانگین جامعه اول براساس نتیجه آزمون اولیه در مورد تساوی میانگین‌ها با فرض معلوم و مساوی بودن واریانس‌ها به ترتیب به صورت زیر بدست می‌آید. اگر $\frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \geq z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ آنگاه $\hat{\mu}_1 = \bar{x}$ و برآوردگر فاصله‌ای به صورت $\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} \leq \mu_1 \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$ است در مقابل اگر $\frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} < z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ آنگاه $\hat{\mu} = \hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = \frac{n_1 \bar{x} + n_2 \bar{y}}{n_1 + n_2}$ بوده و برآورد فاصله‌ای به صورت

$$\frac{n_1 \bar{x} + n_2 \bar{y}}{n_1 + n_2} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}} \leq \mu_1 \leq \frac{n_1 \bar{x} + n_2 \bar{y}}{n_1 + n_2} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n_1}}$$

بدست می‌آید. به همین ترتیب در مورد پارامتر σ^2 نیز می‌توان برآوردگرهای نقطه‌ای و فاصله‌ای مناسبی به دست آورد.

با توجه به مثال ۱.۲.۲ انتظار می‌رود که برآوردگر آزمون اولیه کارایی بهتری داشته باشد و به عبارتی دیگر، باعث بوجود آمدن برآوردگرهای بهتری شود. برآوردگر آزمون اولیه مورد توجه

^۴Preliminary Test Estimator

^۵Bancroft

بسیاری از محققین قرار گرفت به‌طوری که در بین سال‌های ۱۹۶۸ و ۱۹۷۷ تعداد زیادی مقاله در این زمینه نشر شد. اولین کتاب‌شناسی توسط بنکرافت و هان (۱۹۷۷) در این زمینه به چاپ رسید. مجدداً سرعت و تعداد تحقیقات طوری زیاد شد که ۱۰ سال بعد یعنی در سال ۱۹۸۸ دومین کتاب‌شناسی توسط هان و همکاران منتشر شد. مطالعه این دو اثر نشان می‌دهد که ایده برآوردهای آزمون اولیه، مورد توجه بسیاری از محققین آمار در سرتاسر جهان واقع شده است به‌طوری که در زمینه‌های گوناگون از جمله نظریه برآوردها (پارامتری و ناپارامتری)، نظریه آزمون فرض، تحلیل واریانس، قابلیت اعتماد و حتی کنترل کیفیت به سرعت کاربرد پیدا کرده است. لذا از آن زمان تاکنون تلاش‌های زیادی در جهت بهبود برآوردهای میانگین توزیع نرمال صورت گرفته است. همچنین با توجه به این که در مدل‌های رگرسیون کلاسیک نیز فرض نرمال بودن خطاها بود و در نتیجه از آنجایی که برآوردهای ضرایب مدل رگرسیونی نیز دارای توزیع نرمال می‌شدند، به سرعت ایده بهبود برآوردها به ضرایب مدل رگرسیونی نیز منتقل شد که بعدها نمونه‌هایی از آن در کارهای جایلز^۶ (۱۹۹۱، ۱۹۹۲) طباطبایی (۱۹۹۵)، صالح و کبیری^۷ (۲۰۱۱)، احمد^۸ (۱۹۹۷)، خان و احمد^۹ (۲۰۱۱، ۲۰۰۶، ۲۰۰۳)، آرشی (۲۰۰۸، ۲۰۱۰)، (۲۰۱۱)، و نوروزی‌راد و آرشی (۲۰۱۶، ۲۰۱۷، ۲۰۱۸)، آمده است و رساله‌های آرشی (۱۳۸۸) و عربی (۱۳۹۳)، نوروزی‌راد (۱۳۹۶) و مالوترا (۲۰۱۷) از جمله رساله‌هایی هستند که اخیراً انجام شده‌اند. در زمینه قابلیت اعتماد، چو^{۱۰} (۱۹۸۷) اولین کسی بود که با استفاده از ایده برآوردهای آزمون اولیه به برآورد تابع قابلیت اعتماد پرداخت و مقادیر بحرانی آزمون اولیه را با استفاده از معیار کمترین تأسف بدست آورد.

بنابراین در ادامه این فصل ابتدا برآوردهای مختلف آزمون اولیه را برای پارامتر تنش-مقاومت معرفی کرده و سپس آریبی و مخاطره‌مجبانی آنها را به دست می‌آوریم. همچنین جداول و نمودارهایی را به منظور مقایسه کارایی نسبی ارائه کرده و در نهایت بحث را با مقایسه برآوردهای آزمون اولیه مختلف پی می‌گیریم.

باتوجه به استراتژی بالا اگر هیچ اطلاعی در خصوص این که پارامتر $\mathcal{R}$ چه مقداری دارد، نداشته باشیم، در این صورت برآوردهای $\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}$ را به کار می‌بریم که به اصطلاح، برآوردهای محدود نشده^{۱۱} (UE) می‌گویند. حال فرض کنید که ما اطلاعات غیرنمونه‌ای غیرقطعی^{۱۲} در مورد پارامتر تنش-مقاومت به صورت $\mathcal{R} = \mathcal{R}_o$ داشته باشیم. لازم به ذکر است این حدس اولیه ممکن است با توجه به نمودار داده‌ها یا طبیعت داده‌های مورد نظر بدست آید. بنابراین می‌توانیم از آزمون

⁶Giles⁷Saleh and Kibria⁸Ahmed⁹Ahmed and Khan¹⁰CHU¹¹Unrestricted Estimator¹²Suspected Non Sample Prior Information

فرضیه زیر برای بررسی صحت این اطلاع در یک سطح خطای مناسب (α) کمک بگیریم.

$$\begin{cases} H_o : \mathcal{R} = \mathcal{R}_o \\ H_a : \mathcal{R} \neq \mathcal{R}_o \end{cases}$$

برای آزمون فرضیه‌ی صفر، با توجه به لم (۱.۱.۲) از آماره‌ی آزمون والد به صورت زیر استفاده می‌کنیم

$$L_r = \frac{\left\{ \sqrt{rm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o) \right\}^2}{\hat{v}^2}, \quad (۱۳.۲)$$

که در آن $\hat{v}$ برآورد v در رابطه ۱۱.۲ بوده و به صورت زیر است

$$\hat{v} = \frac{\hat{\mu}_{\text{MMLE}} \hat{\lambda}_{\text{MMLE}}}{(\hat{\mu}_{\text{MMLE}} + \hat{\lambda}_{\text{MMLE}})^2} \sqrt{\left(\frac{1}{\frac{m+3}{4} + 2(m-1)C_m} + \frac{1}{p(\frac{n+3}{4} + 2(n-1)C_n)} \right)}.$$

لم ۱.۲.۲. تحت فرضیه‌ی صفر اگر $rm \rightarrow \infty$ ، آن گاه $L_r \xrightarrow{D} \chi^2_1$ که در آن χ^2_1 توزیع کی-دو با یک درجه آزادی می‌باشد.

برای اثبات به پیوست ۱.آ مراجعه کنید.

حال برآوردگر آزمون اولیه و نوع استاین $\mathcal{R}$ را بر اساس صالح (۲۰۰۶) معرفی می‌کنیم. به طور معمول برآوردگر $\hat{\mathcal{R}} = \mathcal{R}_o$ به برآوردگر محدود شده‌ی $\mathcal{R}^{13}$ معروف است. بنابراین براساس آزمون فرض کلاسیک، فرضیه H_o رد می‌شود اگر $L_r > c_\alpha$ ، که در آن α سطح معناداری و c_α مقدار بحرانی $\chi^2_{(1)}$ است. با توجه به توضیحات فوق، برآوردگر آزمون اولیه‌ی پارامتر $\mathcal{R}$ به صورت زیر محاسبه می‌گردد

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{PT}} &= \begin{cases} \mathcal{R}_o & ; H_o \text{ پذیرفته شود} \\ \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} & ; H_o \text{ رد شود} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \mathcal{R}_o & ; L_r < c_\alpha \\ \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} & ; L_r \geq c_\alpha \end{cases} \\ &= \mathcal{R}_o I(L_r < c_\alpha) + \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} I(L_r \geq c_\alpha) \\ &= \mathcal{R}_o I(L_r < c_\alpha) + \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} (1 - I(L_r < c_\alpha)) \\ &= \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - (\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o) I(L_r < c_\alpha). \end{aligned}$$

بنابراین برآوردگر PT برای $\mathcal{R}$ براساس MMRSS عبارت است از:

$$\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{PT}} = \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - (\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o) I(A), \quad (۱۴.۲)$$

¹³Restricted Estimator

که در آن $I(A)$ تابع نشانگر مجموعه‌ی A است و

$$A = \{L_r : L_r < c_\alpha\}, \quad c_\alpha = \chi_1^2(\alpha).$$

از آنجایی که برآوردگر PT به α وابستگی زیادی دارد لذا برای کاهش تأثیر α و همچنین بهبود برآوردگر PT، برآوردگر انقباضی آزمون اولیه (SPT) را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{SPT}} = \{\eta \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} + (1 - \eta) \mathcal{R}_o\} I(A) + \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} I(\bar{A}), \quad (15.2)$$

که در آن A ناحیه پذیرش فرضه‌ی صفر و $\bar{A}$ ناحیه‌ی رد آن و همچنین η مقدار ثابت نامنفی متناهی مناسب است که ضریب انقباضی می‌گوییم. باید توجه داشت که برآوردگرهای PT و SPT وابستگی شدیدی به سطح معناداری α دارند. برآوردگرهای نوع استاین همه‌ی مقادیر ممکن بین برآوردگرهای محدود شده و محدود نشده را وابسته به مقادیر نمونه‌ی آماره آزمون که در آزمون اولیه به کار رفت، تولید می‌کنند بطوری که به سمت پارامتر هدف یا برآوردگر آن منقبض می‌کند. بنابراین برآوردگر انقباضی نوع استاین (ST) بر مبنای $\mathcal{R}_o$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{ST}} &= \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - (\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o) d |L_r|^{-\frac{1}{\gamma}} \\ &= \mathcal{R}_o + \left(1 - d \left|L_r^{\frac{1}{\gamma}}\right|^{-1}\right) (\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o) \\ &= \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - (\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o) d \left[\frac{|\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o| \sqrt{mr}}{\hat{v}} \right]^{-1} \\ &= \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \frac{d \hat{v}}{\sqrt{mr}} \frac{(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o)}{|\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o|}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

که در آن d مقداری ثابت نامنفی متناهی مناسب است که آن را ثابت انقباضی می‌نامیم. توجه داشته باشید که دو برآوردگر آزمون اولیه و نوع استاین تقریباً مشابه هم هستند و تفاوت آن‌ها در این است که در برآوردگر آزمون اولیه مقدار $I(L_r < \chi_1^2(\alpha))$ با تابع نزولی $d |L_r|^{-\frac{1}{\gamma}}$ جایگزین شده و برآوردگر انقباضی نوع استاین را بوجود آورده است. به عبارتی برآوردگری که ذاتاً گسسته است به یک برآوردگر پیوسته تبدیل شده است. توجه به این نکته ضروری است که اگرچه هر دو اطلاع موجود در $\mathcal{R}_o$ و $\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}$ در ساخت برآوردگر PT استفاده می‌شود ولی در ساختار گسسته است و تنها به یکی از دو حالت فرین ذکر شده ساده می‌شود اما در برآوردگر ST دو اطلاع باهم ترکیب می‌شوند. این برآوردگر برای اولین بار توسط خان و صالح (۲۰۰۱) معرفی شد.

تحت فرضیه مقابل ثابت

$$A_\delta : \mathcal{R} = \mathcal{R}_o + \delta, \quad (17.2)$$

به آسانی می توان دید

$$\sqrt{rm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o) = \sqrt{mr}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}) + \sqrt{mr}\delta.$$

و تحت فرضیه A_δ

$$\sqrt{rm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o) \sim \mathcal{N}(\sqrt{rm}\delta, v^2).$$

هم چنین اگر $rm \rightarrow \infty$ ، آن گاه $\sqrt{rm}\delta \rightarrow \infty$ ، که ایجاب می کند به طور تقریباً همه جا

$$L_r = \left\{ \sqrt{rm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o) \right\}^2 / \hat{v}^2 \rightarrow \infty.$$

به عنوان یک نتیجه، قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱.۲.۲. تحت فرضیات مقابل ثابت $A_\delta: \mathcal{R} = \mathcal{R}_o + \delta$ ، زمانی که $mr \rightarrow \infty$

$$(i) \quad \sqrt{rm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{PT}} - \mathcal{R}) = \sqrt{rm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}) + o_p(1),$$

$$(ii) \quad \sqrt{mr}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{ST}} - \mathcal{R}) = \sqrt{mr}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}) + o_p(1).$$

برای اثبات به ضمیمه ۱.آ مراجعه کنید.

به وضوح، تحت A_δ ، زمانی که $mr \rightarrow \infty$ ، عبارت های اریبی مجانبی و میانگین توان دوم خطای مجانبی برای $\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{PT}}$ و $\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{ST}}$ با $\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}$ یکسان هستند، یعنی،

$$(i) \quad \lim_{rm \rightarrow \infty} E[\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{PT}} - \mathcal{R}] = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{rm \rightarrow \infty} E[(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{PT}} - \mathcal{R})^2] = v^2,$$

$$(ii) \quad \lim_{rm \rightarrow \infty} E[\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{ST}} - \mathcal{R}] = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{rm \rightarrow \infty} E[(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{ST}} - \mathcal{R})^2] = v^2.$$

برای برطرف کردن این مشکل برابری توزیع های مجانبی برآوردگرهای مختلف در نمونه های بزرگ تحت فرضیات مقابل ثابت، فرضیه مقابل A_δ را طوری تغییر می دهیم که آماره ی آزمون به بی نهایت میل نکند. با توجه به ساختار A_δ و رابطه ی (۱۷.۲) کافیت که δ را به $\frac{\delta}{\sqrt{mr}}$ تغییر دهیم که در این صورت دسته فرضیات مقابل محلی^{۱۴} به صورت زیر حاصل می شوند:

$$K_m: \mathcal{R} = \mathcal{R}_o + \frac{\delta}{\sqrt{mr}}, \quad (18.2)$$

که در آن δ مقداری حقیقی و ثابت است. قضیه زیر، خواص مجانبی آماره ی آزمون مذکور را تحت فرضیات مقابل محلی توصیف می کند.

قضیه ۲.۲.۲. تحت مجموعه ی فرضیات مقابل محلی $\{K_m\}$ ، نتایج زیر را داریم:

$$(i) \quad \sqrt{rm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\delta, v^2)$$

$$(ii) \quad L_r \text{ دارای توزیع مجانبی } \chi^2_1(\Delta^2) \text{ با پارامتر غیر مرکزی } \Delta^2 = \frac{\delta^2}{v^2} \text{ می باشد.}$$

¹⁴Local Alternatives

۱.۲.۲ خواص توزیعی جانبی

در این قسمت اربیی جانبی^{۱۵} (ADB) و میانگین توان دوم خطای جانبی^{۱۶} (ADMSE) برآوردگرهای جدید را بدست می‌آوریم.

تعریف ۱.۲.۲. اگر $\hat{\theta}$ برآوردگر پارامتر θ باشد در این صورت ADB(b) و ADMSE(M) به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$b(\hat{\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)] \quad (۱۹.۲)$$

$$M(\hat{\theta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E[\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)]^2. \quad (۲۰.۲)$$

قضیه ۳.۲.۲. تحت مجموعه فرضیات مقابل محلی (۱۸.۲)، مقادیر ADB برآوردگرهای $\mathcal{R}$ به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} (۱) \quad b_1(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}) &= 0, \\ (۲) \quad b_2(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{PT}}) &= -\delta H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2), \\ (۳) \quad b_3(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{SPT}}) &= -(1-\eta)\delta H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2), \\ (۴) \quad b_4(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{ST}}) &= -dv(2\Phi(\Delta) - 1), \end{aligned}$$

که در آن $H_d(\cdot, \Delta^2)$ نشان‌گر تابع توزیع کی-دو غیر مرکزی با d درجه آزادی و پارامتر غیر مرکزی Δ^2 است.

برای اثبات به ضمیمه ۱.آ مراجعه کنید.

قضیه بعدی مقادیر ADMSE را برای برآوردگرهای فوق ارائه می‌دهد.

قضیه ۴.۲.۲. تحت مجموعه فرضیات مقابل محلی (۱۸.۲)، مقادیر ADMSE برآوردگرهای $\mathcal{R}$ به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} (۱) \quad M_1(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}) &= v^2 \\ (۲) \quad M_2(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{PT}}) &= v^2 \left\{ 1 - H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) \right. \\ &\quad \left. + \Delta^2 [2H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - H_5(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2)] \right\} \\ (۳) \quad M_3(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{SPT}}) &= v^2 \left\{ 1 - (1-\eta)H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) \right. \\ &\quad \left. + (1-\eta)\Delta^2 [2H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - (1+\eta)H_5(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2)] \right\} \\ (۴) \quad M_4(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{ST}}) &= v^2 \left[1 + d^2 - 2d\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{\Delta^2}{2}} \right]. \end{aligned}$$

¹⁵Asymptotically distributional Bias

¹⁶Asymptotically distributional Mean Square Error

برای اثبات به پیوست ۱.۴ مراجعه کنید.

نتیجه ۱.۲.۲. تحت مجموعه فرضیه‌های مقابل محلی $\{K_m\}$ ، عبارات واریانس توزیع جانبی برآوردگرهای $\mathcal{R}$ به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} (i) \quad Var(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}) &= v^2 \\ (ii) \quad Var(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{PT}) &= v^2 \left\{ 1 - H_{\Psi}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) + \Delta^2 [2H_{\Psi}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - \right. \\ &\quad \left. H_{\Psi}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - H_{\Delta}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2)] \right\} \\ (iii) \quad Var(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{SPT}) &= v^2 \left\{ 1 - (1 - \eta^2) H_{\Psi}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) + (1 - \eta) \Delta^2 [2H_{\Psi}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) \right. \\ &\quad \left. - (1 - \eta) H_{\Psi}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - (1 + \eta) H_{\Delta}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2)] \right\} \\ (iv) \quad Var(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{ST}) &= v^2 \left[1 - \frac{2}{\pi} (2e^{-\frac{\Delta^2}{2}} - 1) - d^2 (2\Phi(\Delta) - 1)^2 \right]. \end{aligned}$$

۲.۲.۲ کارائی نسبی جانبی

مقداری از d که $M_{\Psi}(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{ST})$ را مینیمم می‌کند عبارت است از

$$d^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{2}},$$

که به Δ^2 وابسته است. برای این که d^* مستقل از Δ^2 شود، مشابه صالح (۲۰۰۶) مقدار بهینه‌ی d را $d_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ انتخاب می‌کنیم. بنابراین مقدار مینیمم $M_{\Psi}(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{ST})$ به عبارت زیر تقلیل می‌یابد

$$\begin{aligned} M_{\Psi}(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{ST}) &= v^2 + v^2 \frac{2}{\pi} - 2 \frac{2}{\pi} v^2 e^{-\frac{\Delta^2}{2}} \\ &= v^2 \left[1 - \frac{2}{\pi} (2e^{-\frac{\Delta^2}{2}} - 1) \right] \end{aligned}$$

عبارات کارائی نسبی برآوردگرهای $\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{PT}$ و $\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{ST}$ نسبت به $\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}$ عبارتند از

$$ARE(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{PT}, \hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}) = \frac{M_1(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS})}{M_2(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{PT})} = \{1 + g(\Delta^2)\}^{-1},$$

و

$$\begin{aligned} ARE(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{ST}, \hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}) &= \frac{M_1(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS})}{M_{\Psi}(\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{ST})} \\ &= \frac{v^2}{v^2 \left[1 - \frac{2}{\pi} (2e^{-\frac{\Delta^2}{2}} - 1) \right]} \\ &= \left[1 - \frac{2}{\pi} (2e^{-\frac{\Delta^2}{2}} - 1) \right]^{-1}, \end{aligned}$$

که در آن

$$g(\Delta^2) = -H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) + \Delta^2 [2H_3(\chi_{(1)}^2(\alpha), \Delta^2) - H_5(\chi_{(1)}^2(\alpha), \Delta^2)].$$

بنابراین، $\hat{R}_{MMRSS}^{PT}$ از $\hat{R}_{MMRSS}$ بهتر عمل می‌کند، اگر

$$0 \leq \Delta^2 \leq \frac{H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2)}{2H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - H_5(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2)}.$$

در غیر این صورت $\hat{R}_{MMRSS}$ بهتر است. واضح است که برای مقادیر تثبیت شده‌ی α و Δ^2 ، ADMSE برآوردگر $\hat{R}_{MMRSS}^{SPT}$ از $\hat{R}_{MMRSS}^{PT}$ بیش‌تر است. همچنین $\hat{R}_{MMRSS}^{SPT}$ بر $\hat{R}_{MMRSS}$ در ناحیه‌ی زیر برتری دارد

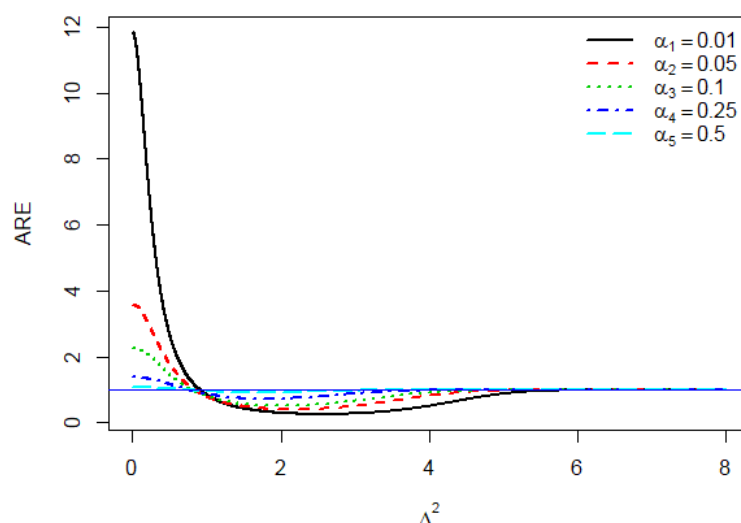
$$0 \leq \Delta^2 \leq \frac{(1+\eta)H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2)}{2H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - (1+\eta)H_5(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2)}.$$

به‌علاوه، می‌توان نتیجه گرفت، اگر $1/38 < \Delta^2 < 1$ باشد، در این صورت $\hat{R}_{MMRSS}^{ST}$ از $\hat{R}_{MMRSS}$ کارایی بیشتری خواهد داشت. همان‌طوری‌که در بالا دیدیم برآوردگرهای مختلفی را می‌توان برای پارامتر تنش-مقاومت براساس RSS، ارائه کرد. اکنون سوالی که در عمل پیش می‌آید این است که برای یک مجموعه از داده‌ها کدام برآوردگر را انتخاب کنیم؟ همچنین اگر با تعداد محدودی جامعه سروکار داشته باشیم، آیا نتایج ارائه شده در بخشهای قبلی معتبر هستند؟ برای پاسخ به سوالات فوق ابتدا روشی برای پیدا کردن یک برآوردگر بهینه ارائه می‌دهیم و در بخش‌های بعدی سوالات را پی می‌گیریم.

شکل ۱.۲ مقادیر ARE برآوردگر آزمون اولیه به ازای مقادیر مختلف α در مقابل Δ را نشان می‌دهند. به‌وضوح مشخص می‌شود که ماکسیمم ARE برآوردگر $\hat{R}_{MMRSS}^{PT}$ به ازای $\Delta = 0$ به‌دست می‌آید که مقدار آن $1 - H_3(\chi_1^2(\alpha), 0)$ است سپس مقدار آن، کاهش یافته و با عبور از خط ۱ کمترین مقدار خود را در نقطه‌ی $\Delta^2 = \Delta_{min}^2$ گرفته و دوباره صعود می‌کند و به‌طور مجانبی در اطراف خط ۱ ادامه پیدا می‌کند. همچنین ماکسیمم ARE با افزایش α ، کمتر شده ولی در مقابل، مینیمم آن با افزایش α بیشتر می‌شود. بنابراین می‌توان مقدار بهینه سطح معنی‌داری α را با حداقل کارایی نسبی تضمین شده‌ی (E_0) با استفاده از معادله زیر یافت:

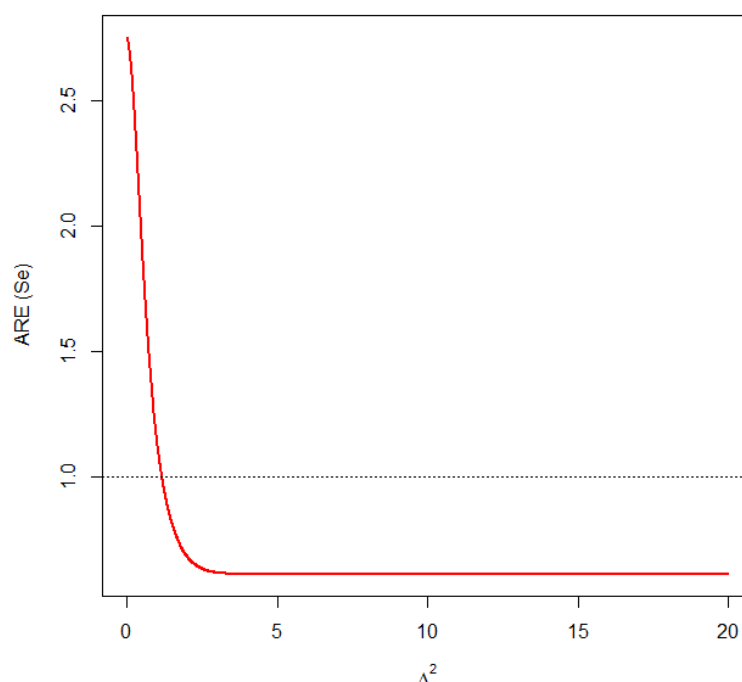
$$\min_{\Delta^2} (ARE(\alpha, \Delta^2)) = E(\alpha, \Delta_{min}^2) = E_0. \quad (21.2)$$

شکل ۲.۲، ARE برآوردگر نوع استاین را نشان می‌دهد. بسادگی ملاحظه می‌شود که همانند برآوردگر آزمون اولیه، برآوردگر نوع استاین نیز ماکسیمم مقدار خود را در $\Delta = 0$ ، اختیار کرده که مقدار آن $2/751938 = (1 - \frac{2}{\pi})^{-1}$ ، است. همچنین با افزایش آن مقدار ARE کاهش یافته و در نهایت به مقدار ثابت ۰/۶۶ میل می‌کند. بنابراین در حالت کلی هیچکدام از برآوردگرهای نوع استاین و آزمون اولیه بر برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی، تسلط ندارد لذا می‌توان بازه‌هایی



شکل ۱.۲: کارایی مجانبی نسبی برآوردگر آزمون اولیه نسبت به برآوردگر ML پارامتر $\mathcal{R}$.

را برای Δ معین کرد که در آن، به ازای آنها حدود تسلط برآوردگرها به همراه مقادیر ماکسیمم و مینیمم ARE مشخص شود. بنابراین در جدول شماره ۱.۲ مقادیر حداقل کارایی نسبی تضمین شده به ازای مقادیر داده شده α به همراه مقادیر $\Delta_{\min}^2$ برای هر دو برآوردگر آزمون اولیه و برآوردگر نوع استاتین آمده است. برای بهتر مشخص شدن نحوه استفاده از این جدول، فرض کنید می‌خواهیم برآوردگر آزمون اولیه را پیدا کنیم که حداقل کارایی تضمین شده آن نسبت به برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی حداقل ۶۰٪ باشد برای این منظور با توجه به جدول، این برآوردگر به ازای $\alpha = 1/15$ ، با ماکسیمم کارایی $1/973$ بدست می‌آید. هم‌چنین به ازای این Δ مقدار مینیمم کارایی نسبی بدست آمده با استفاده از برآوردگر نوع استاتین 0.7222° است. همان‌طور که قبلاً اشاره شد برآوردگر آزمون اولیه وابستگی شدیدی به α دارد لذا برای بهبود این برآوردگر، برآوردگر انقباضی آزمون اولیه (SPT) را معرفی کردیم و مقادیر اریبی و خطای آن را در قضایای قبلی بدست آوردیم. برای توضیح و درک بیشتر این برآوردگر، در جدول ۲.۲ مقادیر ماکسیمم، مینیمم ARE به همراه نقاط متناظر آنها، آمده است. همان‌طوری‌که ملاحظه می‌شود، برخلاف برآوردگر آزمون اولیه، برآوردگر انقباضی آزمون اولیه در نقطه‌ی $\Delta = 0$ همیشه ماکسیمم مقدار را اختیار نمی‌کند. به‌ویژه برای مقادیر کوچک و کاربردی α مانند 0.05° و 0.1° این برآوردگر، همیشه بر برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی تسلط دارد. شکل ۳.۲ بیشتر مؤید این ادعا است، لذا در عمل برآوردگر انقباضی آزمون اولیه، یک برآوردگر محافظه‌کارانه است که علی‌رغم داشتن ماکسیمم کارایی کمتر، یک برآوردگر بطور یکنواخت برتر به برآوردگر ماکسیمم درست‌نمایی است.



شکل ۲.۲: کارائی جانبی نسبی برآوردهای نوع استاتین نسبت به برآوردهای ML پارامتر $\mathcal{R}$.

۳.۲ مطالعات عددی

همان‌طوری که می‌دانیم نظریه‌ها، جداول و نتایج ارائه شده در بخشهای قبلی فقط برای حجم نمونه زیاد معتبر هستند در حالی که ما در عمل با حجم نمونه‌ی متناهی از جوامع سروکار داریم لذا در این قسمت رفتار کوچک نمونه‌ای برآوردهای ارائه شده را با استفاده از شبیه‌سازی مطالعه می‌کنیم. برای این منظور دو نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار را به‌طور مستقل با اندازه‌های $n = m = 3$ و چرخه‌های $k = r = 7$ ، از $\mathcal{E}(\mu = 3)$ و $\mathcal{E}(\lambda = 2)$ شبیه‌سازی کرده و سپس برآوردهای پیشنهادی را (با گمان اولیه‌ی $(\mathcal{R}_o = (0/4, 0/9))$ به کار می‌بریم و کل این فرآیند را برای ۱۰۰۰ مرتبه تکرار می‌کنیم. MSE همه‌ی برآوردهای بدست آمده و در شکل ۴.۲ رسم شده‌اند.

نکات مهم درباره‌ی نتایج شبیه‌سازی بدست آمده:

- (۱) همه‌ی برآوردها در $\Delta = 0$ عملکرد بهتری نسبت به برآوردهای کلاسیک MMRSS دارند و زمانی که Δ افزایش می‌یابد، کارائی نسبی کاهش می‌یابد.

جدول ۱.۲: حدود تسلط، مینیمم و ماکسیمم کارائی نسبی تضمین شده توسط برآوردگرهای آزمون اولیه و نوع استاین

$\min(ARE_{ST})$	$\max(ARE_{PT})$	$\min(ARE_{PT})$	$\Delta_{\min}^2$	$\hat{R}_{MMRSS} \succ \hat{R}_{MMRSS}^{PT}$	$\hat{R}_{MMRSS}^{PT} \succ \hat{R}_{MMRSS}$	α
۰/۶۲۹	۱۱/۸۳۵	۰/۲۶۱	۰/۵۵۳	[۰/۹۰۷, ۷/۵۴۸]	[۰, ۰/۹۰۷]	۰/۰۱
۰/۶۶	۳/۵۸۲	۰/۴۰۵	۲/۱۶۴	[۰/۸۳۶, ۶/۶۸۲]	[۰, ۰/۸۳۶]	۰/۰۵
۰/۶۸۲	۲/۲۲۷	۰/۵۱۲	۱/۹۹۲	[۰/۸۰۰, ۶/۵۰۱]	[۰, ۰/۸۰۰]	۰/۱
۰/۷۰۱	۱/۷۹۳	۰/۵۹۴	۱/۸۹۴	[۰/۷۷۹, ۶/۲۶۰]	[۰, ۰/۷۷۹]	۰/۱۵
۰/۷۱۵	۱/۵۳۸	۰/۶۶۴	۱/۸۲۸	[۰/۷۶۴, ۶/۰۷۱]	[۰, ۰/۷۶۴]	۰/۲
۰/۷۲۴	۱/۳۸۱	۰/۷۲۴	۱/۷۷۹	[۰/۷۵۳, ۵/۹۱۰]	[۰, ۰/۷۵۳]	۰/۲۵
۰/۷۳۷	۱/۲۷۶	۰/۷۷۶	۱/۷۴	[۰/۷۴۵, ۵/۷۶۷]	[۰, ۰/۷۴۵]	۰/۳
۰/۷۴۵	۱/۲۰۲	۰/۸۲۲	۱/۷۱	[۰/۷۳۷, ۵/۶۳۵]	[۰, ۰/۷۳۷]	۰/۳۵
۰/۷۵۲	۱/۱۴	۰/۸۶	۱/۶۸۵	[۰/۷۳۲, ۵/۵۱۱]	[۰, ۰/۷۳۲]	۰/۴
۰/۷۵۸	۱/۱۰۷	۰/۸۹۳	۱/۶۶۴	[۰/۷۲۷, ۵/۳۹۲]	[۰, ۰/۷۲۷]	۰/۴۵
۰/۷۶۴	۱/۰۷۶	۰/۹۲	۱/۶۴۷	[۰/۷۲۳, ۵/۲۴۷]	[۰, ۰/۷۲۳]	۰/۵

(۲) برآوردگر PT حول $\Delta = 0$ کمترین MSE را در مقایسه با برآوردگرهای دیگر دارد، اما به محض رشد کردن Δ مقادیر کارائی نسبی افول می کنند.

(۳) می توان مشاهده کرد که برآوردگرهای نوع استاین در ناحیه ی وسیع تری نسبت به برآوردگر PT بهتر عمل می کنند. در واقع این برآوردگر نسبت به برآوردگر آزمون اولیه محتاط تر عمل می کند.

(۴) برآوردگر SPT محدوده ی وسیع تری نسبت به دیگر برآوردگرهای بهبود یافته در افزایش کارائی نسبی دارد. همچنین این برآوردگر دارای کمترین ماکسیمم MSE و بیشترین مینیموم MSE برای $\eta = 0/9$ و $\eta = 0/67$ می باشد.

۱.۳.۲ فواصل اطمینان بوتاستری

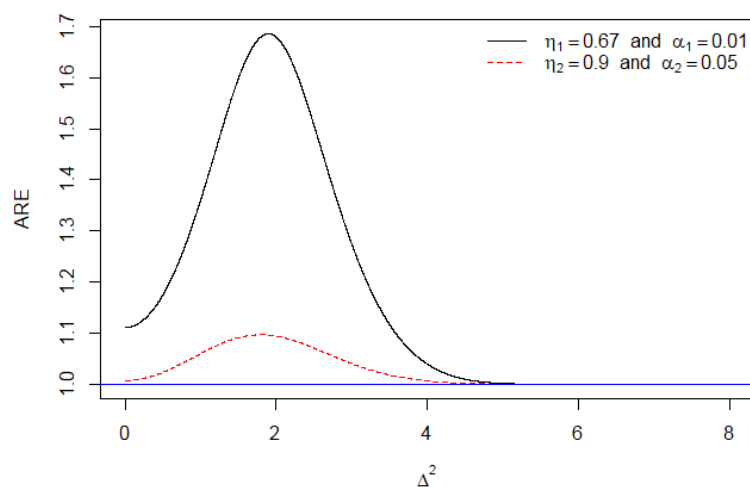
چندین روش برای ساخت فواصل اطمینان بوتاستری وجود دارد، اما فواصل اطمینان صدکی و t -بوتاستری برای پارامتر تنش-مقاومت متداول هستند. برای جزئیات بیشتر در مورد ساخت فواصل اطمینان بوتاستری و همچنین استفاده از نرم افزار R به ترتیب به افرون و تیبشیرانی^{۱۷} (۱۹۹۳) و ریزو^{۱۸} (۲۰۰۸) مراجعه کنید. مدرس و همکاران (۲۰۰۶) سه الگوریتم بوتاسترپ در طرح نمونه گیری RSS پیشنهاد دادند. ما نمونه ی مجموعه رتبه دار

¹⁷Efron and Tibshirani

¹⁸Rizzo

جدول ۲.۲: مینیمم و ماکسیمم کارائی نسبی تضمین شده توسط برآوردهای انقباضی آزمون اولیه.

$\Delta_{\min}^2$	$\min(ARE_{\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{SPT}}})$	$\Delta_{\max}^2$	$\max(ARE_{\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{SPT}}})$	$\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{SPT}} \succ \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}$	α	η
۲/۳۳۰	۰/۳۳۷	۰	۱۰/۶۷۸	[۰, ۰/۹۷۷]	۰/۰۱	۰/۱
۲/۶۴۳	۰/۲۴۳	۰	۸/۲۵۶	[۰, ۱/۰۸۸]	۰/۰۱	۰/۲
۲/۶۵۸	۰/۵۹۱	۰	۵/۹۹۲	[۰, ۱/۲۸۸]	۰/۰۱	۰/۳
۲/۷۱۱	۰/۷۷۷	۰	۴/۳۲۹	[۰, ۱/۷۷۱]	۰/۰۱	۰/۴
۳/۸۹۱	۰/۹۴۱	۱/۱۱۲	۳/۳۰۷	[۰, ۲/۵۹۲]	۰/۰۱	۰/۵
۴/۴۹۵	۰/۹۹۶	۱/۸۹۸	۳/۲۹۶	[۰, ۴/۰۳۳]	۰/۰۱	۰/۶
∞	۰/۹۹۹	۱/۶۴۵	۳/۰۸۴	[۰, ۵/۳۱۵]	۰/۰۱	۰/۷
∞	۱	۱/۹۲۰	۲/۳۱۰	[۰, ∞]	۰/۰۱	۰/۸
∞	۱	۲/۰۵۱	۱/۵۲۷	[۰, ∞]	۰/۰۱	۰/۹
۲/۲۹۲	۰/۴۸۷	۰	۳/۴۹۲	[۰, ۰/۸۷۴]	۰/۰۵	۰/۱
۲/۶۵۳	۰/۵۸۸	۰	۲/۳۱۰	[۰, ۰/۹۳۱]	۰/۰۵	۰/۲
۲/۳۵۸	۰/۷۰۵	۰	۲/۹۰۷	[۰, ۱/۱۱۹۰]	۰/۰۵	۰/۳
۲/۸۵۴	۰/۸۲۹	۰	۲/۵۳۵	[۰, ۱/۷۰۹]	۰/۰۵	۰/۴
۲/۵۴۰	۰/۹۳۶	۰	۲/۱۷۷	[۰, ۲/۱۹۰]	۰/۰۵	۰/۵
۴/۴۹۵	۰/۹۹۱	۰	۱/۸۵۶	[۰, ۲/۴۱۳]	۰/۰۵	۰/۶
۶/۵۵۷	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹	۱/۵۸۵	[۰, ۴/۴۱۸۶]	۰/۰۵	۰/۷
∞	۱	۱/۶۸۱	۱/۳۹۱	[۰, ۷/۶۰۶۰]	۰/۰۵	۰/۸
∞	۱	۱/۷۹۱	۱/۱۹۷	[۰, ∞]	۰/۰۵	۰/۹



شکل ۳.۲: کارایی مجانبی نسبی برآوردگر انقباضی آزمون اولیه به ازای $\alpha = 0.01, 0.05$

بوتاستری^{۱۹} (BRSS)، را به عنوان کاراترین روش به کار می‌بریم. در ادامه الگوریتم ۱ برای فاصله اطمینان t -بوتاسترپ براساس برآوردگر واریانس بوتاستری ارائه می‌کنیم.

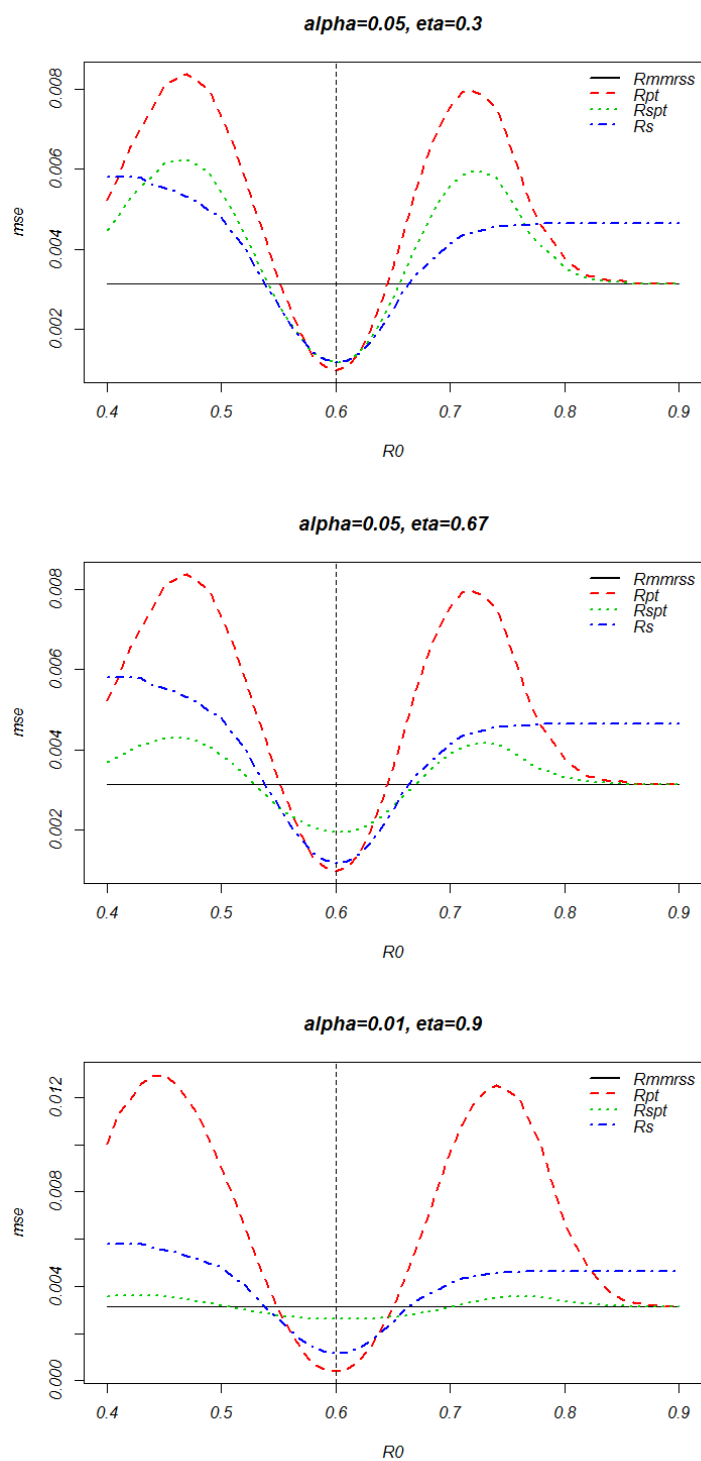
۲.۳.۲ مقایسه‌ی برآوردگرهای فاصله‌ای بر اساس شبیه‌سازی

برای مقایسه کردن فواصل اطمینان مطرح شده در بخش بالا، از شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده کرده و در آن تمام ترکیب‌های متفاوت $n = m = 3, 5$ ، $\mu = 2$ ، $R = \{0.3, 0.35, 0.4, 0.5\}$ ، $\alpha = 0.01$ و $\eta = 0.7$ را در نظر گرفته‌ایم. در هر ترکیب، ۱۰۰۰ نمونه از X و Y به ترتیب از $\mathcal{E}(\mu)$ و $\mathcal{E}(\lambda)$ شبیه‌سازی شده‌اند. لازم به ذکر است که $B = 200$ و با توجه به این که برای برآورد انحراف معیار به روش بوتاسترپ، نیاز به تکرار زیاد نیست $B' = 20$ در نظر گرفته‌ایم. نتایج در جدول ۳.۲ ارائه شده‌اند. منظور از E.L. و C.P. در جدول ۳.۲ به ترتیب میانگین طول فاصله اطمینان و احتمال پوشش آن می‌باشد. به عبارت دیگر، (L, U) یک فاصله اطمینان برای R باشد و (L_i, U_i) ، $i = 1, \dots, 1000$ مشاهدات آن باشند، آنگاه میانگین طول و احتمال پوشش آن به ترتیب برابرند با

$$\text{E.L.} = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} (U_i - L_i), \quad \text{C.P.} = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} I(L_i \leq R \leq U_i),$$

که در آن $I(A)$ تابع نشان‌گر مجموعه‌ی A است. نکاتی که می‌توان از جدول ۳.۲ دریافت عبارتند از:

¹⁹Bootstrap Ranked Set Sampling



شکل ۴.۲: مقایسه‌ی MSE برآوردهای پیشنهادی برای برخی مقادیر α و η .

الگوریتم ۱ الگوریتم t-بوت استرپ

گام ۱. براساس نمونه‌های مشاهده‌شده‌ی مستقل $X_{(i:m)j}, i = 1, \dots, m$ و $j = 1, \dots, r$ و $Y_{(i:m)j}, i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, k$ ، حساب کنید $\hat{\mu}_{\text{MMLE}}, \hat{\lambda}_{\text{MMLE}}, \hat{R}_{\text{MMRSS}}$ و دیگر برآوردگرها به ترتیب (۶.۲)، (۷.۲)، (۸.۲)، (۱۴.۲)، (۱۵.۲) و (۱۶.۲).

گام ۲. تولید کنید $X_{(i:m)j}^* \sim \mathcal{E}(\hat{\mu}_{\text{MMLE}}), i = 1, \dots, m$ و $j = 1, \dots, r$ و $Y_{(i:m)j}^* \sim \mathcal{E}(\hat{\lambda}_{\text{MMLE}}), i = 1, \dots, n$ و $j = 1, \dots, k$. با استفاده از آن‌ها به دست بیاورید $\hat{\mu}_{\text{MMLE}}^*, \hat{R}_{\text{MMRSS}}^*, \hat{R}_{\text{MMRSS}}^{\text{SPT}*}, \hat{R}_{\text{MMRSS}}^{\text{PT}*}$ و $\hat{R}_{\text{MMRSS}}^{\text{ST}*}$.

گام ۳. گام ۲ را برای B بار تکرار کنید و به دست بیاورید $\hat{R}_{(b)\text{MMRSS}}^*, \hat{R}_{(b)\text{MMRSS}}^{\text{PT}*}, \hat{R}_{(b)\text{MMRSS}}^{\text{SPT}*}$ و $\hat{R}_{(b)\text{MMRSS}}^{\text{ST}*}, b = 1, \dots, B$.

گام ۴. برای هر تکرار گام ۳، روند بوت استرپ پارامتری دیگری طراحی کنید تا انحراف معیار $\hat{R}_{(b)\text{MMRSS}}^*$ برآورد شود، که $\hat{\sigma}(\hat{R}_{(b)\text{MMRSS}}^*)$ می‌نامیم، و بقیه به همین صورت. به طور دقیق، گام ۲ الگوریتم را برای $b' = 1, \dots, B'$ با $\hat{\mu}_{(\text{MMLE})}^*$ و $\hat{\lambda}_{(\text{MMLE})}^*$ به جای $\hat{\mu}_{\text{MMLE}}$ و $\hat{\lambda}_{\text{MMLE}}$ به ترتیب تکرار می‌کنیم و سپس به دست می‌آوریم،

$$\hat{\sigma}(\hat{R}_{(b)\text{MMRSS}}^*) = \sqrt{\frac{1}{B' - 1} \sum_{b'=1}^{B'} (\hat{R}_{(b')\text{MMRSS}}^{**} - \bar{R}^{**})^2},$$

که در آن $\bar{R}^{**} = \frac{1}{B'} \sum_{b'=1}^{B'} \hat{R}_{(b')\text{MMRSS}}^{**}$.

گام ۵. فرض کنید $t^* = (t_{(1)}^*, \dots, t_{(B)}^*)^T$ ، که در آن $t_{(b)}^* = \frac{\hat{R}_{(b)\text{MMRSS}}^* - \bar{R}}{\hat{\sigma}(\hat{R}_{(b)\text{MMRSS}}^*)}$ ، $b = 1, \dots, B$.
گام ۶. محاسبه کنید $\% (1 - \alpha) \times 100$ فاصله اطمینان t-بوت استرپی برای زمانی که $(\hat{R} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^* \hat{\sigma}(\hat{R}_{\text{MMRSS}}), \hat{R} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^* \hat{\sigma}(\hat{R}_{\text{MMRSS}}))$ ، که در آن t_{γ}^* چنک γ ام t^* داده شده در گام ۵ و $\hat{\sigma}(\hat{R}_{\text{MMRSS}})$ برآورد بوت استرپی انحراف معیار برآوردگر $\hat{R}_{ML}$ داده شده در نتیجه ۱.۲.۲ می‌باشد. و این فرآیند را برای مابقی برآوردگرها نیز اجرا می‌کنیم.

جدول ۳.۲: میانگین طول فاصله اطمینان (E.L.) و احتمال پوشش (C.P.) برای $\mathcal{R}$ با $\eta = 0/7$ و $\mathcal{R}_o = 0/31$, $\alpha = 0/01$.

$\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{ST}}$		$\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{SPT}}$		$\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{\text{PT}}$		$\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}$		m	n	$\mathcal{R}$	
E.L.	C.P.	E.L.	C.P.	E.L.	C.P.	E.L.	C.P.				
0/645	0/998	0/761	1/000	0/580	0/982	0/905	0/998	3	3	0/30	1
0/518	0/999	0/585	1/000	0/447	0/992	0/744	0/999	5	3	0/30	2
0/569	0/998	0/673	0/998	0/542	0/940	0/819	0/998	3	5	0/30	3
0/385	0/998	0/432	1/000	0/323	0/938	0/585	0/997	5	5	0/30	4
0/677	0/998	0/773	1/000	0/593	0/999	0/917	0/997	3	3	0/35	5
0/572	0/998	0/632	0/999	0/494	0/985	0/786	0/997	5	3	0/35	6
0/592	0/993	0/681	0/995	0/532	0/998	0/840	0/991	3	5	0/35	7
0/435	0/998	0/471	0/999	0/383	0/958	0/612	0/996	5	5	0/35	8
0/719	0/998	0/807	0/999	0/643	0/982	0/929	0/996	3	3	0/40	9
0/644	0/987	0/694	0/997	0/585	0/873	0/815	0/997	5	3	0/40	10
0/622	0/996	0/701	0/997	0/576	0/970	0/843	0/995	3	5	0/40	11
0/496	0/980	0/528	0/998	0/483	0/766	0/633	0/999	5	5	0/40	12
0/789	0/981	0/853	0/996	0/749	0/848	0/935	0/998	3	3	0/50	13
0/774	0/947	0/815	0/992	0/796	0/841	0/844	0/998	5	3	0/50	14
0/701	0/979	0/758	0/999	0/733	0/876	0/829	0/998	3	5	0/50	15
0/635	0/937	0/669	0/978	0/754	0/828	0/647	0/998	5	5	0/50	16

- در همه فواصل اطمینان، می‌بینیم که E.L. زمانی که $\mathcal{R}$ نزدیک به $\mathcal{R}_o$ است، تقریباً صعودی می‌باشد.
- باوجود این که به نظر می‌رسد C.P. برآوردهای PT همیشه بیش‌تر از برآوردهای کلاسیک نیست، اما دارای E.L. کوتاه درمقایسه با دیگر برآوردها است. به علاوه، C.P. آن درواقع خیلی از بقیه متفاوت نیست. این نتیجه با نتایج قضایای دریک راستا است.
- برآوردهای SPT دارای C.P. بیشتری نسبت به دیگر برآوردها می‌باشد. همچنین، آن دارای E.L. کمتری نسبت به برآوردهای کلاسیک هست.
- برآوردهای نوع استاین معمولاً دارای C.P. بیش‌تر با E.L. کمتر است.
- C.P. بالاتر و E.L. کمتر برای برآوردهای هدف تا زمانی که در نزدیکی $\mathcal{R}_o$ هستند اتفاق می‌افتد. به محض این که مقدار $\mathcal{R}$ از $\mathcal{R}_o$ فاصله می‌گیرد، C.P. کمتر و E.L. بیش‌تر می‌شود.

۴.۲ تحلیل داده‌های درختان سیب

در این بخش می‌خواهیم داده‌های مربوط به درختان سیب که در فصل اول در مثال ۱.۷.۱ معرفی شد رو مورد تحلیل قرار دهیم. قبل از این که به برآورد پارامترها بپردازیم، لازم است که ابتدا نشان دهیم داده‌های اصلی یا به اصلاح داده‌های خام از توزیع نمائی تبعیت می‌کنند. لذا نشان می‌دهیم داده‌های تبدیل شده‌ی RSS به بهترین نحو با توزیع بتا برازش داده می‌شوند. برای این منظور فرض کنید $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ باشد، در این صورت با اعمال تبدیل زیر

$$U = \exp\left(-\frac{Y}{\lambda}\right), \quad (22.2)$$

متغیر تصادفی U دارای تابع چگالی زیر خواهد بود

$$g_i(u_{ij}) = \frac{1}{B(n+1-i, i)} u_{ij}^{(n-i)} (1-u_{ij})^{i-1}, \quad 0 < u_{ij} < 1, \quad (23.2)$$

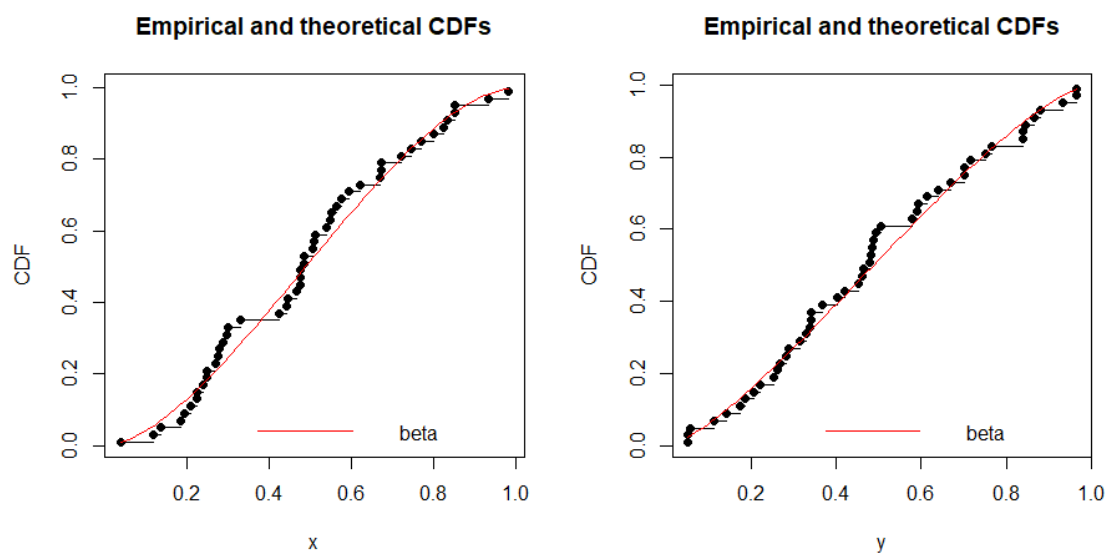
که در آن B تابع بتا می‌باشد. بنابراین، متغیر تصادفی U دارای توزیع بتا با پارامترهای $(n+1-i, i)$ است. این مطلب نشان می‌دهد که اگر داده‌های اصلی از توزیع نمائی یک-پارامتری آمده باشد، پس توزیع داده‌های RSS بتا خواهد بود. حال، تبدیل (۲۲.۲) را روی داده‌های درختان سیب که بصورت نمونه مجموعه‌ی رتبه‌دار هستند اعمال می‌کنیم. برای بررسی خوبی برازش مدل بتا از آزمون کلموگروف-اسمیرنف^{۲۰} (K-S) استفاده می‌کنیم. داده‌های تبدیل شده در جدول ۴.۲ ارائه شده‌است. باتوجه به نتایج جدول ۵.۲ می‌بینیم که مدل بتا مناسب است. هم‌چنین، نمودار توزیع تجمعی تجربی^{۲۱} (ECDF)، نمودار Q-Q و نیز نمودار P-P در شکل‌های ۵.۲، ۶.۲ و ۷.۲، به ترتیب ارائه شده‌اند تا برازش مدل را به‌طور کامل تثبیت کنند.

مقدار برآوردگر MML پارامتر $\mathcal{R}$ براساس طرح RSS، $\hat{\mathcal{R}}_o = 0.587$ به‌دست آمده‌است. ما از برآورد روش کرنل مهدی‌زاده و زمان‌زاده (۲۰۱۶) به‌عنوان اطلاع قبلی درباره $\mathcal{R}$ که عبارت است از $\mathcal{R}_o = 0.6118$ ، استفاده می‌کنیم.

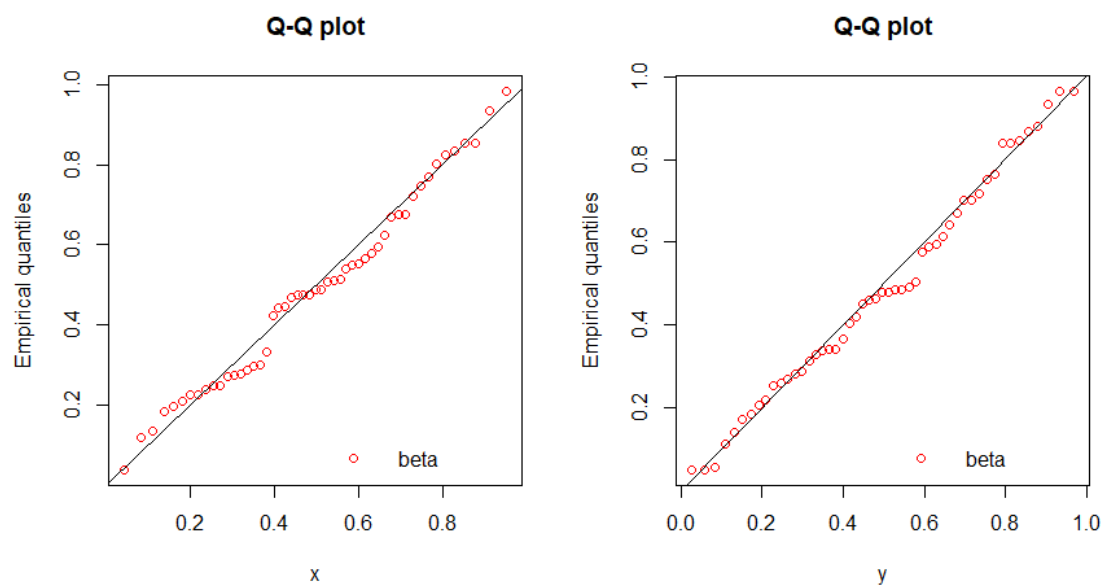
در سطح معناداری $\alpha = 0.01$ و $\eta = 0.07$ ، برآوردگرهای بهبودیافته‌ی هدف به‌دست می‌آیند $\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{ST} = 0.612$ و $\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{SPT} = 0.595$ ، $\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{PT} = 0.611$ بازه‌ی $(0.5, 0.07)$ ، برآوردگرهای هدف محاسبه شده و فواصل اطمینان ۹۵٪ بوت‌استریپی آنها در جدول ۶.۲ ارائه شده‌است. کارائی نسبی بوت‌استریپی محاسبه شده و در شکل ۸.۲ ارائه شده‌است. از شکل ۹.۲ می‌توان دریافت که پهنای باند فواصل اطمینان در نزدیکی $\mathcal{R}_o$ باریکتر بوده و به‌وضوح با دور شده از آن (اطلاع قبلی) پهنای افزایش می‌یابند. درنتیجه باتوجه به فواصل اطمینان می‌توان استنباط کرد که اثر تیمار در سطح ۰.۰۵ معنادار است، چون هیچ‌کدام از فواصل شامل ۰.۵ نیستند.

²⁰Kolmogrov-Smirnov

²¹Empirical Cumulative Distribution Function



شکل ۵.۲: نمودار ECDF برای داده‌های درختان سیب.



شکل ۶.۲: نمودار Q-Q برای داده‌های درختان سیب.

جدول ۴.۲: داده‌های تبدیل شده‌ی درختان سیب.

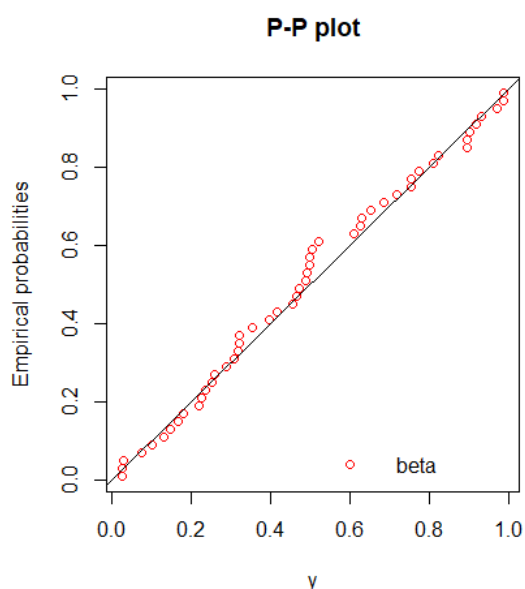
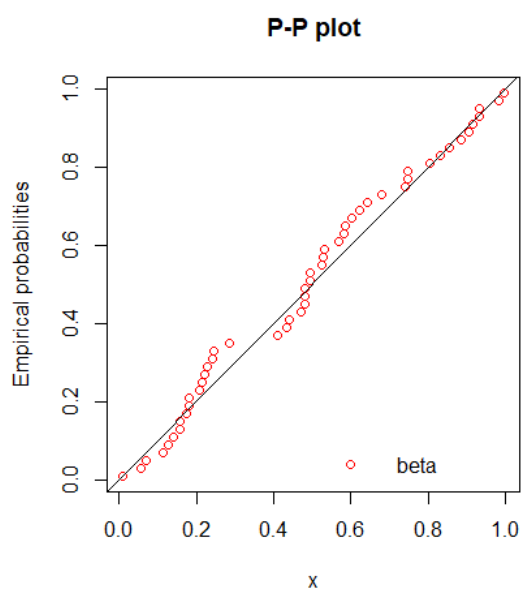
رتبه ۵	رتبه ۴	رتبه ۳	رتبه ۲	رتبه ۱	حلقه	گروه
۰/۴۴۲	۰/۷۲۲	۰/۲۴۸	۰/۸۵۲	۰/۹۸۳	۱	کنترل
۰/۰۳۹	۰/۵۴۹	۰/۴۸۷	۰/۵۰۶	۰/۸۰۰	۲	
۰/۱۸۴	۰/۲۸۸	۰/۴۷۶	۰/۵۰۹	۰/۸۲۳	۳	
۰/۴۲۴	۰/۳۰۱	۰/۳۳۲	۰/۵۵۲	۰/۷۴۷	۴	
۰/۲۷۰	۰/۲۳۹	۰/۴۷۶	۰/۴۴۷	۰/۸۳۳	۵	
۰/۱۹۶	۰/۲۷۶	۰/۲۲۶	۰/۶۷۰	۰/۶۷۴	۶	
۰/۱۳۷	۰/۴۷۶	۰/۲۴۸	۰/۵۹۴	۰/۵۶۵	۷	
۰/۴۶۸	۰/۱۱۹	۰/۶۷۴	۰/۵۷۸	۰/۹۳۳	۸	
۰/۲۱۰	۰/۲۷۹	۰/۴۸۷	۰/۵۱۲	۰/۷۶۹	۹	
۰/۲۲۵	۰/۲۹۸	۰/۵۳۹	۰/۶۲۲۱	۰/۸۵۲	۱۰	
۰/۶۷۰	۰/۴۸۶	۰/۷۰۰	۰/۳۶۷	۰/۸۶۵	۱	تیمار
۰/۷۵۲	۰/۹۶۴	۰/۸۳۸	۰/۸۳۸	۰/۸۴۵	۲	
۰/۹۶۴	۰/۶۴۱	۰/۸۷۹	۰/۴۸۴	۰/۵۷۸	۳	
۰/۵۸۹	۰/۹۳۴	۰/۵۰۴	۰/۷۱۷	۰/۷۰۰	۴	
۰/۴۷۸	۰/۵۹۴	۰/۳۴۰	۰/۳۱۳	۰/۴۸۰	۵	
۰/۲۸۹	۰/۴۱۹	۰/۷۶۴	۰/۴۰۳	۰/۴۵۱	۶	
۰/۳۳۰	۰/۴۶۰	۰/۱۸۷	۰/۲۶۹	۰/۳۳۹	۷	
۰/۲۵۳	۰/۱۷۳	۰/۴۶۳	۰/۴۹۲	۰/۳۴۰	۸	
۰/۶۱۳	۰/۰۵۱	۰/۲۸۳	۰/۰۵۷	۰/۱۴۲	۹	
۰/۲۱۹	۰/۱۱۳	۰/۲۶۰	۰/۰۵۱	۰/۲۰۵	۱۰	

۵.۲ نتیجه‌گیری

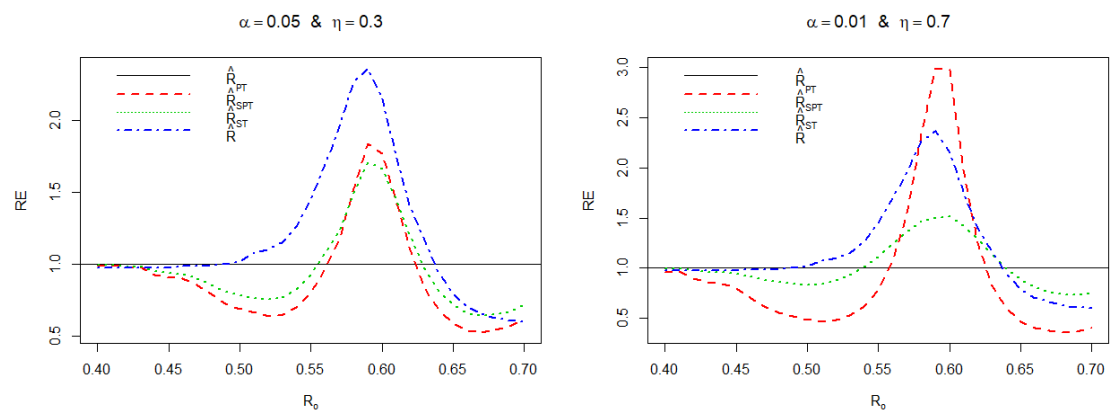
در این فصل، ما برآوردگرهای بهبودیافته را برای پارامتر تنش - مقاومت R را براساس مشاهدات نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار از توزیع نمائی توسعه دادیم. برآوردگرهای نقطه‌ای با معیار کمترین توان دوم خطا نسبت به همدیگر مقایسه شدند. مشاهده شد که برآوردگرهای هدف دارای کارایی بهتری زمانی که پیشنهاد اولیه‌ی R یعنی (R_o) نزدیک به آن باشد. ما فواصل اطمینان بوت‌استرپی براساس همه برآوردگرها را به‌دست آوردیم. باتوجه به نتایج شبیه‌سازی و تحلیل داده‌های واقعی مشاهده کردیم، برآوردگرهای هدف دارای کارایی بیشتری نسبت به برآوردگر کلاسیک حول (R_o) دارند.

جدول ۵.۲: آزمون گلموگروف-اسمیرنف یک-نمونه‌ای برای داده‌های درختان سیب.

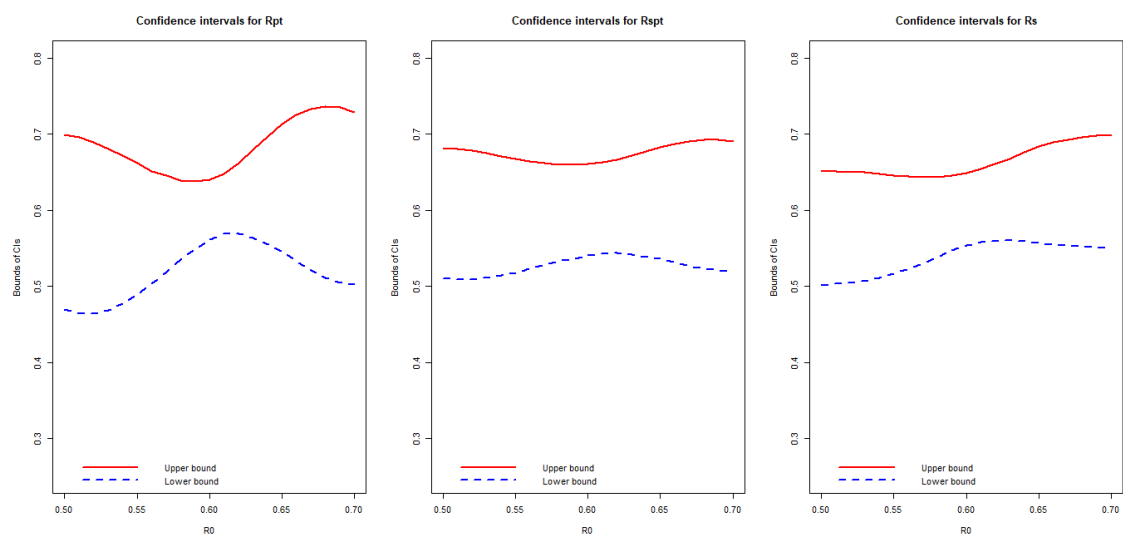
مجموعه‌ی داده‌ها	مقدار آماره آزمون K-S	مقدار P-
کنترل	۰/۰۹۳۶۴	۰/۷۷۳
تیمار	۰/۰۹۹۴۸۹	۰/۷۰۵۴



شکل ۷.۲: نمودار P-P برای داده‌های درختان سیب.



شکل ۸.۲: کارائی نسبی بوت‌استری برای برآوردهای بهبودیافته در داده‌های درختان سیب.



شکل ۹.۲: فواصل اطمینان برای برآوردهای بهبودیافته در داده‌های درختان سیب

جدول ۶.۲: برآوردهای $\mathcal{R}$ برای داده‌های درختان سیب به همراه فواصل اطمینان بوت‌استرپی ۹۵ درصد.

فواصل اطمینان						برآوردها			$\mathcal{R}_o$
$\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{ST}$	$\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{SPT}$	$\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{PT}$	$\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{ST}$	$\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{SPT}$	$\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{PT}$	$\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{ST}$	$\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{SPT}$	$\hat{\mathcal{R}}_{MMRSS}^{PT}$	
۰/۶۵۲	۰/۵۰۱	۰/۶۸۱	۰/۵۰۹	۰/۶۹۹	۰/۴۶۹	۰/۵۶۳	۰/۵۸۷	۰/۵۸۷	۰/۵۰
۰/۶۵۰	۰/۵۰۳	۰/۶۸۰	۰/۵۰۸	۰/۶۹۵	۰/۴۶۴	۰/۵۶۳	۰/۵۶۴	۰/۵۱	۰/۵۱
۰/۶۵۰	۰/۵۰۴	۰/۶۷۷	۰/۵۰۹	۰/۶۸۹	۰/۴۶۴	۰/۵۶۳	۰/۵۶۷	۰/۵۲	۰/۵۲
۰/۶۴۹	۰/۵۰۶	۰/۶۷۴	۰/۵۱۰	۰/۶۸۰	۰/۴۶۷	۰/۵۶۳	۰/۵۷۰	۰/۵۳	۰/۵۳
۰/۶۴۷	۰/۵۱۰	۰/۶۷۱	۰/۵۱۴	۰/۶۷۱	۰/۴۷۶	۰/۵۶۳	۰/۵۷۳	۰/۵۴	۰/۵۴
۰/۶۴۵	۰/۵۱۶	۰/۶۶۷	۰/۵۱۸	۰/۶۶۲	۰/۴۸۸	۰/۵۶۳	۰/۵۷۶	۰/۵۵	۰/۵۵
۰/۶۴۴	۰/۵۲۳	۰/۶۶۳	۰/۵۲۲	۰/۶۵۱	۰/۵۰۲	۰/۵۶۳	۰/۵۷۹	۰/۵۶	۰/۵۶
۰/۶۴۳	۰/۵۲۹	۰/۶۶۱	۰/۵۲۸	۰/۶۴۴	۰/۵۱۸	۰/۵۶۳	۰/۵۸۲	۰/۵۷	۰/۵۷
۰/۶۴۳	۰/۵۳۸	۰/۶۵۹	۰/۵۳۲	۰/۶۳۹	۰/۵۳۴	۰/۵۶۳	۰/۵۸۵	۰/۵۸	۰/۵۸
۰/۶۴۵	۰/۵۴۷	۰/۶۵۹	۰/۵۳۶	۰/۶۳۷	۰/۵۴۷	۰/۶۱۲	۰/۵۸۸	۰/۵۹	۰/۵۹
۰/۶۴۸	۰/۵۵۳	۰/۶۶۰	۰/۵۴۰	۰/۶۳۹	۰/۵۶۰	۰/۶۱۲	۰/۵۹۱	۰/۶۰	۰/۶۰
۰/۶۵۴	۰/۵۵۷	۰/۶۶۲	۰/۵۴۲	۰/۶۴۸	۰/۵۶۸	۰/۶۱۲	۰/۵۹۴	۰/۶۱	۰/۶۱
۰/۶۶۱	۰/۵۵۹	۰/۶۶۶	۰/۵۴۳	۰/۶۶۱	۰/۵۶۹	۰/۶۱۲	۰/۵۹۷	۰/۶۲	۰/۶۲
۰/۶۶۷	۰/۵۵۹	۰/۶۷۱	۰/۵۴۱	۰/۶۷۹	۰/۵۶۳	۰/۶۱۲	۰/۶۰۰	۰/۶۳	۰/۶۳
۰/۶۷۵	۰/۵۵۸	۰/۶۷۷	۰/۵۳۸	۰/۶۹۶	۰/۵۵۴	۰/۶۱۲	۰/۶۰۳	۰/۶۴	۰/۶۴
۰/۶۸۳	۰/۵۵۶	۰/۶۸۲	۰/۵۳۵	۰/۷۱۲	۰/۵۴۵	۰/۶۱۲	۰/۶۰۶	۰/۶۵	۰/۶۵
۰/۶۸۹	۰/۵۵۴	۰/۶۸۷	۰/۵۳۰	۰/۷۲۵	۰/۵۳۲	۰/۶۱۲	۰/۶۰۹	۰/۶۶	۰/۶۶
۰/۶۹۲	۰/۵۵۳	۰/۶۹۰	۰/۵۲۶	۰/۷۳۲۷	۰/۵۲۰	۰/۶۱۲	۰/۵۸۷	۰/۵۸۷	۰/۶۷
۰/۶۹۵	۰/۵۵۲	۰/۶۹۲	۰/۵۲۲	۰/۷۳۶	۰/۵۱۱	۰/۶۱۲	۰/۵۸۷	۰/۵۸۷	۰/۶۸
۰/۶۹۷	۰/۵۵۱	۰/۶۹۲	۰/۵۲۰	۰/۷۳۵	۰/۵۰۴	۰/۶۱۲	۰/۵۸۷	۰/۵۸۷	۰/۶۹
۰/۶۹۸	۰/۵۵۰۷۷۲	۰/۶۹۰	۰/۵۱۹	۰/۷۲۸	۰/۵۰۱	۰/۶۱۲	۰/۵۸۷	۰/۵۸۷	۰/۷۰

فصل ۳

برآوردگرهای بهبود یافته با استفاده از نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی

در فصل قبل به بهبود برآورد پارامتر تنش-مقاومت با استفاده از نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار پرداختیم. در این فصل بهبود برآوردگری که با استفاده از نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی به دست آمده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. از این فصل مقاله‌ی صفریان، آرشی و عربی بلاغی (۲۰۱۹b) نتیجه شده است.

۱.۳ مقدمه

فرض کنید دو نمونه‌ی مستقل RRSS با اندازه‌های n و m از توزیع نمائی با تابع چگالی احتمال نمائی، تنها اطلاعاتی هستند که از جوامع X و Y در اختیار داریم. همچنین فرض کنید $X \sim \mathcal{E}(\mu)$ و $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$ دو متغیر تصادفی مستقل باشند و $\mathcal{R} = \Pr\{X < Y\}$ همان پارامتر تنش-مقاومت باشد، در این صورت به راحتی می‌توان دید که

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}. \quad (1.3)$$

در این فصل برای سادگی، نمادهای زیر را در نظر می‌گیریم.

• بردار $R = (R_{1,1}, R_{2,2}, \dots, R_{n,n})^\top$ یک RRSS بالا به اندازه‌ی n از $\mathcal{E}(\mu)$ (جامعه‌ی X) و

$\mathbf{r} = (r_{1,1}, r_{2,2}, \dots, r_{n,n})^\top$ مقدار مشاهده شده‌ی آن است.

• بردار $\mathbf{S} = (S_{1,1}, S_{2,2}, \dots, S_{m,m})^\top$ یک RRSS بالا به اندازه‌ی m از $\mathcal{E}(\lambda)$ (جامعه‌ی Y) و $\mathbf{s} = (s_{1,1}, s_{2,2}, \dots, s_{m,m})^\top$ مقدار مشاهده شده‌ی آن است.

برای سادگی M و N را به صورت $M = \frac{n(n+1)}{2}$ و $N = \frac{m(m+1)}{2}$ تعریف می‌کنیم. با توجه به مطالب فصل اول، واحدهای RRSS مستقل از یکدیگر می‌باشند. صالحی و احمدی (۱۳۹۴ش) برآوردهای ML پارامترهای μ و λ را به ترتیب به صورت زیر به دست آوردند

$$\hat{\mu}_{(ML)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n R_{i,i}, \quad \hat{\lambda}_{(ML)} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^m S_{j,j}, \quad (2.3)$$

با استفاده از ویژگی پایایی برآوردهای ML، برآوردهای ML پارامتر $\mathcal{R}$ به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{\mathcal{R}}_{ML} = \frac{\hat{\lambda}_{(ML)}}{\hat{\lambda}_{(ML)} + \hat{\mu}_{(ML)}} = \left(1 + \frac{M \sum_{i=1}^n R_{i,i}}{N \sum_{j=1}^m S_{j,j}} \right)^{-1}, \quad (3.3)$$

با توجه به استقلال $R_{i,i}$ ها و هم‌چنین این که $R_{i,i} \sim \mathcal{G}(i, \mu)$ داریم $\sum_{i=1}^n R_{i,i} \sim \mathcal{G}(N, \mu)$ و به طور مشابه $\sum_{j=1}^m S_{j,j} \sim \mathcal{G}(M, \lambda)$ که در آن

$$f_{R_{i,i}}(r_{i,i}; \mu) = \frac{r_{i,i}^{i-1}}{\mathcal{G}(i)\mu} e^{-\frac{r_{i,i}}{\mu}}, r_{i,i} > 0.$$

بنا به ماهیت رکوردها، می‌دانیم که به طور متوسط مشاهدات بسیار زیادی لازم است تا این که یک رکورد جدید در مراتب بالا رخ دهد. بنابراین به طور معمول، تعداد آماره های رکوردی مشاهده شده از یک جامعه‌ی آماری کم هستند. این امر برای RRSS نیز صادق می‌باشد. اما دلیل ذکر شده محققان را برای بررسی نکردن ویژگی های مجانبی رکوردها مجاب نکرده است (آرنولد و همکاران، ۱۹۹۸، صفحات ۱ و ۲، را ببینید). چه بسا پژوهشگرانی از قبیل تاتا (۱۹۶۹)، شرک (۱۹۷۲) و رسنیک (۱۹۷۳ و ۱۹۷۵) نظریه‌ی مجانبی رکوردها را به میزان قابل توجهی گسترش دادند. هم چنین لازم به یادآوری است که یکی از راه کارهای رفع مشکل محدود بودن تعداد رکوردها، استفاده از طرح پیشنهادی سامانیگو و وایتاگر (۱۹۸۸) (دیاگرام ۴.۱) می‌باشد.

حال فرض کنید که تعداد مقادیر رکوردها به اندازه کافی بزرگ باشد. می‌دانیم اگر $n, m \rightarrow \infty$ ، آنگاه $\sqrt{N}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma_1^2)$ و $\sqrt{M}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma_2^2)$ ، که در آن $\sigma_1^2 = \mu^2$ و $\sigma_2^2 = \lambda^2$.

لم ۱.۱.۳. فرض کنید m و n به اندازه کافی بزرگ هستند بطوری که داشته باشیم $\frac{M}{N} \rightarrow p \in (0, 1)$ در این صورت داریم

$$(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \omega^2), \quad (4.3)$$

که در آن

$$\omega = \frac{\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2} \sqrt{\frac{1}{N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)}. \quad (5.3)$$

اثبات مشابه فصل قبلی می‌باشد.

بنابراین برآورد ML پارامتر ω به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{\omega} = \frac{\hat{\mu}_{(ML)} \hat{\lambda}_{(ML)}}{(\hat{\mu}_{(ML)} + \hat{\lambda}_{(ML)})^2} \sqrt{\frac{1}{N} \left(1 + \frac{1}{p}\right)},$$

و بر اساس ویژگی سازگاری برآوردگرهای ML که در آن $\omega = \frac{v}{\sqrt{N}}$ و

$$v = \frac{\mu\lambda}{(\mu + \lambda)^2} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{p}\right)}.$$

۲.۳ استراتژی بهبود برآوردگر

همان طوری که قبلاً اشاره شد، اگر هیچ اطلاعی در خصوص این که پارامتر $\mathcal{R}$ چه مقداری دارد، نداشته باشیم، در این صورت برآوردگر $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ را به کار می‌بریم که به اصطلاح، برآوردگر محدود نشده نامیده می‌شود. حال فرض کنید که ما اطلاعات غیرنمونه‌ای غیرقطعی در مورد پارامتر تنش-مقاومت به صورت $\mathcal{R} = \mathcal{R}_o$ داشته باشیم. بنابراین می‌توانیم از آزمون فرضیه زیر برای بررسی صحت این اطلاع در یک سطح خطای مناسب (α) کمک بگیریم.

$$\begin{cases} H_o : \mathcal{R} = \mathcal{R}_o \\ H_a : \mathcal{R} \neq \mathcal{R}_o \end{cases}$$

برای آزمون فرضیه‌ی صفر، با توجه به رابطه‌ی (۴.۳) از آماره‌ی آزمون والد زیر استفاده می‌کنیم،

$$T_N = \frac{\left\{ \sqrt{N} (\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o) \right\}^2}{\hat{v}^2}, \quad (6.3)$$

که در آن

$$\hat{v} = \frac{\hat{\mu}_{(ML)} \hat{\lambda}_{(ML)}}{(\hat{\mu}_{(ML)} + \hat{\lambda}_{(ML)})^2} \sqrt{\left(1 + \frac{1}{p}\right)}.$$

لم ۱.۲.۳. تحت فرضیه‌ی صفر، اگر $N \rightarrow \infty$ آنگاه $T_N \xrightarrow{\mathcal{D}} \chi_1^2$.

اثبات مشابه است.

اکنون برآوردهای آزمون اولیه و نوع استاین $\mathcal{R}$ را ارائه می‌کنیم. باتوجه به آزمون فرض کلاسیک، فرضیه H_0 رد می‌شود اگر $T_N > c_\alpha$ ، که در آن α سطح معناداری و c_α مقدار بحرانی $\chi^2_{(1)}$ است. بنابراین برآوردهای PT برای $\mathcal{R}$ براساس MLE عبارت است از:

$$\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT} = \hat{\mathcal{R}}_{ML} - (\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o) I(A), \quad (7.3)$$

که در آن مجموعه‌ی A عبارت است از

$$A = \{T_N: T_N < c_\alpha\}, \quad c_\alpha = \chi^2_1(\alpha).$$

همان‌گونه که در فصل قبل نیز اشاره کردیم برآوردهای PT وابستگی زیادی به α دارد لذا برای کاهش تأثیر α و همچنین بهبود برآوردهای PT، برآوردهای انقباضی آزمون اولیه را به‌صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{SPT} = \{\eta \hat{\mathcal{R}}_{ML} + (1 - \eta) \mathcal{R}_o\} I(A) + \hat{\mathcal{R}}_{ML} I(\bar{A}), \quad (8.3)$$

که در آن A ناحیه پذیرش فرضیه صفر و $\bar{A}$ ناحیه‌ی رد آن است. برآوردهای انقباضی نوع استاین (ST) بر مبنای $\mathcal{R}_o$ نیز بصورت زیر معرفی می‌شود

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST} &= \hat{\mathcal{R}}_{ML} - (\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o) d \left| T_N^{\frac{1}{d}} \right|^{-1} \\ &= \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \frac{d \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o}{\sqrt{N} \left| \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right|}, \end{aligned}$$

که در آن d مقداری ثابت نامنفی متناهی مناسب است. در فصل دوم دیدیم که تحت فرضیات مقابل ثابت واریانس برآوردها باهم برابر بوده و عملاً هیچ بهبودی حاصل نمی‌شود، بنابراین فرضیات مقابل محلی^۱ به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:

$$K_N: \mathcal{R} = \mathcal{R}_o + \frac{\delta}{\sqrt{N}}, \quad (9.3)$$

که در آن δ مقداری حقیقی و ثابت است. قضیه زیر، خواص جانبی آماره‌ی آزمون مذکور را تحت فرضیات مقابل محلی توصیف می‌کند.

قضیه ۱.۲.۳. تحت مجموعه‌ی فرضیات مقابل محلی $\{K_N\}$ ، نتایج زیر را داریم:

$$\sqrt{N} (\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}) \xrightarrow{D} N(\delta, v^2) \quad (i)$$

$$T_N \quad (ii) \quad \text{دارای توزیع جانبی } \chi^2_1(\Delta^2) \text{ با پارامتر غیر مرکزی } \Delta^2 = \frac{\delta^2}{v^2} \text{ می‌باشد.}$$

برای اثبات به پیوست ۲.آ مراجعه کنید.

¹Local Alternatives

۱.۲.۳ خواص مجانبی

در این قسمت اریبی مجانبی (ADB) و میانگین توان دوم خطای مجانبی (ADMSE) برآوردگرها را بدست می‌آوریم.

قضیه ۲.۲.۳. تحت مجموعه فرضیات مقابل محلی $\{K_N\}$ ، مقادیر ADB برآوردگرهای $\mathcal{R}$ به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} (۱) \quad & b_1(\hat{\mathcal{R}}_{ML}) = 0, \\ (۲) \quad & b_2(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT}) = -\delta H_2(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2), \\ (۳) \quad & b_3(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{SPT}) = -(1-\eta)\delta H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2), \\ (۴) \quad & b_4(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST}) = -d\nu(2\Phi(\Delta) - 1). \end{aligned}$$

برای اثبات به پیوست ۲.آ مراجعه کنید.

قضیه بعدی مقادیر ADMSE را برای برآوردگرهای فوق ارائه می‌دهد.

قضیه ۳.۲.۳. تحت مجموعه فرضیات مقابل محلی $\{K_N\}$ ، مقادیر ADMSE برآوردگرهای $\mathcal{R}$ به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} (۱) \quad & M_1(\hat{\mathcal{R}}_{ML}) = v^2 \\ (۲) \quad & M_2(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT}) = v^2 \left\{ 1 - H_2(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) \right. \\ & \quad \left. + \Delta^2 \left[2H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - H_5(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) \right] \right\} \\ (۳) \quad & M_3(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{SPT}) = v^2 \left\{ 1 - (1-\eta)H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) \right. \\ & \quad \left. + (1-\eta)\Delta^2 \left[2H_3(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - (1+\eta)H_5(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) \right] \right\} \\ (۴) \quad & M_4(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST}) = v^2 \left[1 - \frac{2}{\pi}(2e^{-\frac{\Delta^2}{4}} - 1) \right]. \end{aligned}$$

برای اثبات به پیوست ۲.آ مراجعه کنید.

مقداری از d که $M_4(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST})$ را مینیمم می‌کند عبارت است از

$$d^* = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{\Delta^2}{4}},$$

که به Δ^2 وابسته است. برای این که d^* مستقل از Δ^2 شود، مقدار بهینه‌ی d را $d_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ انتخاب می‌کنیم. بنابراین مقدار مینیمم $M_4(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST})$ به عبارت زیر تقلیل می‌یابد

$$v^2 \left[1 - \frac{2}{\pi}(2e^{-\frac{\Delta^2}{4}} - 1) \right].$$

۲.۲.۳ مقایسه‌ی برآوردها

در این قسمت با استفاده از قضیه‌های ۲.۲.۳ و ۳.۲.۳ به مقایسه‌ی دقت برآوردهای مختلف می‌پردازیم. بسادگی ملاحظه می‌شود که اگر $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT} \rightarrow \mathcal{R}_o, T_N \rightarrow \infty$ زمانی که $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT} \rightarrow \hat{\mathcal{R}}_{ML}, T_N \rightarrow \infty$ بعلاوه اگر $|T_N|^{\frac{1}{\gamma}} = d$ ، آنگاه $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST} \rightarrow \mathcal{R}_o$. کارائی جانبی نسبی (ARE) برآوردها نسبت به برآوردها برابر است با

$$ARE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT}, \hat{\mathcal{R}}_{ML}) = \frac{M_1(\hat{\mathcal{R}}_{ML})}{M_2(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT})} = \frac{v^2}{v^2 \left\{ 1 - H_{\gamma}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) + \Delta^2 \left[2H_{\gamma}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - H_{\delta}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) \right] \right\}} = \left\{ 1 + g(\Delta^2) \right\}^{-1},$$

که در آن

$$g(\Delta^2) = -H_{\gamma}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) + \Delta^2 \left[2H_{\gamma}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - H_{\delta}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) \right],$$

که با توجه به آن نتیجه می‌گیریم که اگر

$$0 \leq \Delta^2 \leq \frac{H_{\gamma}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2)}{2H_{\gamma}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - H_{\delta}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2)},$$

آنگاه برآوردها $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT}$ بر برآوردها $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ برتری دارد. در غیر این صورت $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ بهتر است. واضح است که برای مقادیر ثابت α و Δ^2 ، MSE برآوردها $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{SPT}$ از برآوردها $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT}$ بزرگتر است.

برآوردها $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{SPT}$ بر برآوردها $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ در ناحیه‌ی $0 \leq \Delta^2 \leq \frac{(1+\eta)H_{\gamma}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2)}{2H_{\gamma}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2) - (1+\eta)H_{\delta}(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2)}$ تسلط دارد. به‌طور مشابه داریم

$$ARE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST}, \hat{\mathcal{R}}_{ML}) = \frac{M_1(\hat{\mathcal{R}}_{ML})}{M_2(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST})} = \left[1 - \frac{2}{\pi} (e^{-\frac{\Delta^2}{2}} - 1) \right]^{-1},$$

که به‌سادگی می‌توان دریافت، برآوردها $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST}$ نسبت به برآوردها $\hat{\mathcal{R}}_{ML}$ کاراتر است، اگر

$$ARE(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST}, \hat{\mathcal{R}}_{ML}) \geq 1$$

$$\left[1 - \frac{2}{\pi} (e^{-\frac{\Delta^2}{2}} - 1) \right]^{-1} \geq 1$$

$$0 < \Delta^2 < \ln 4 (= 1.38).$$

برای انتخاب α و η مناسب می‌توان همانند فصل دوم از جداول ۱.۲ و ۲.۲ استفاده کرد.

۳.۳ مطالعات عددی

همان‌طوری که می‌دانیم نظریه‌ها و نتایج ارائه شده در بخش قبلی فقط برای حجم نمونه زیاد معتبر هستند در حالی که ما در عمل با حجم نمونه‌ی متناهی از جوامع سروکار داریم لذا در این قسمت رفتار کوچک نمونه‌ای برآوردگرهای ارائه شده را با استفاده از شبیه‌سازی مطالعه می‌کنیم. برای این منظور دو نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی بالا را مستقلاً با اندازه‌های $n = 5, m = 7$ ، یعنی $r = (r_{1,1}, r_{2,2}, \dots, r_{5,5})^T$ و $s = (s_{1,1}, s_{2,2}, \dots, s_{7,7})^T$ از $\mathcal{E}(\mu = 7)$ و $\mathcal{E}(\lambda = 3)$ شبیه‌سازی کرده و سپس برآوردگرهای پیشنهادی را (با گمان اولیه‌ی $R_o = 0.3$) به کار می‌بریم و کل این فرآیند را برای ۱۰۰۰ مرتبه تکرار می‌کنیم. سپس MSE همه‌ی برآوردگرها بدست آمده و در شکل زیر رسم شده‌اند. نکات مهم درباره‌ی نتایج شبیه‌سازی بدست آمده:

(۱) برآوردگر نوع استاین در $\Delta = 0$ نسبت به برآوردگرهای دیگر عملکرد بهتری دارد و زمانی که Δ افزایش می‌یابد، کارایی نسبی کاهش می‌یابد. از طرف دیگر کارایی نسبی SPT برای مقادیر بزرگ Δ خیلی دوام نمی‌آورد.

(۲) برآوردگرهای PT هم‌چنین حول $\Delta = 0$ رفتار خوبی دارد اما به محض رشد کردن Δ مقادیر کارایی نسبی افول می‌کند.

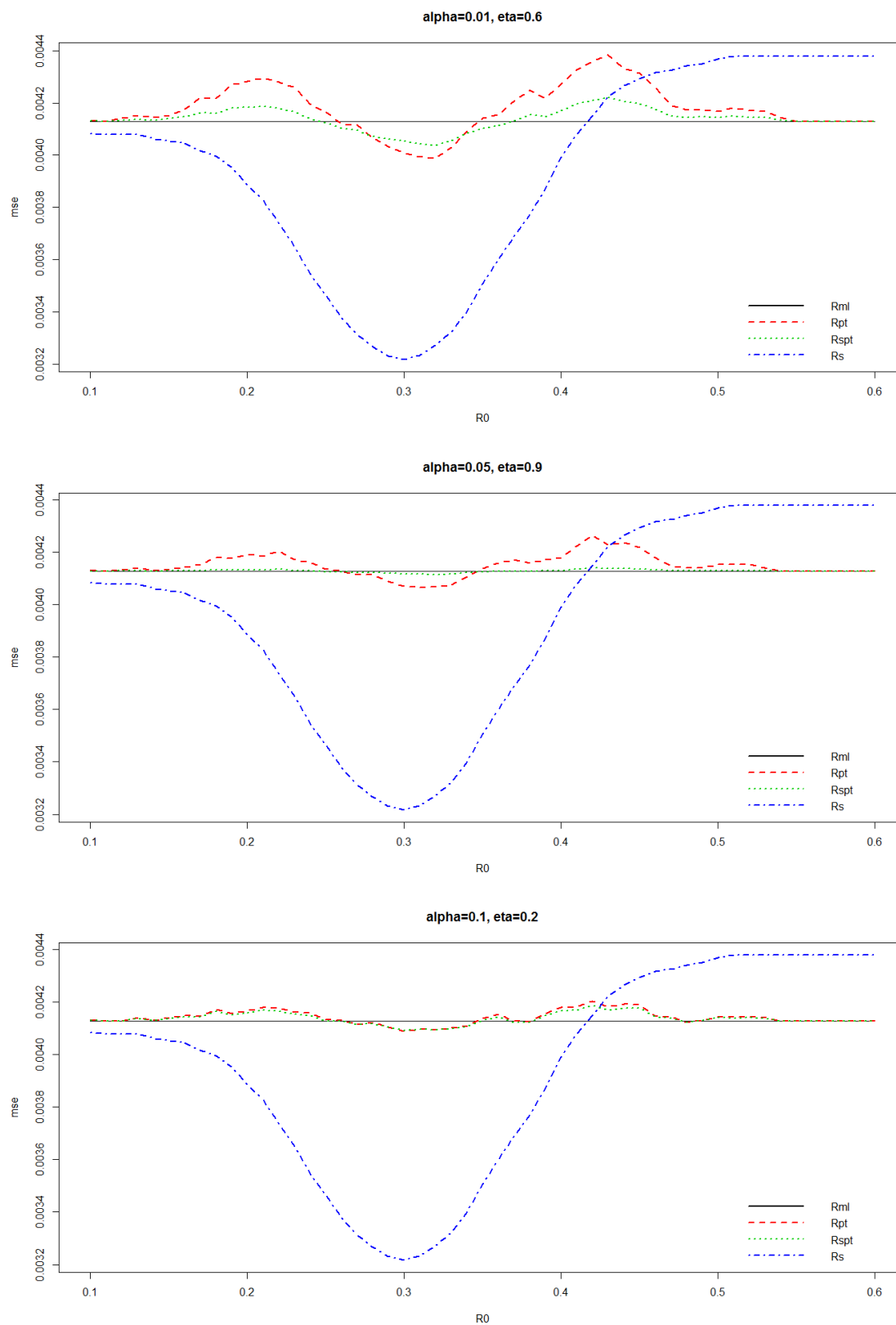
(۳) می‌توان مشاهده کرد که برآوردگرهای نوع استاین در ناحیه‌ی وسیع‌تری نسبت به برآوردگر کلاسیک MLE بهتر عمل می‌کنند. برخی فواصل که برآوردگرها در آن‌ها بهتر عمل کرده‌اند به اختصار در جدول ۱.۳ آورده شده‌اند.

۱.۳.۳ فواصل اطمینان بوت‌استرپی

در ادامه فواصل اطمینان را برای پارامتر R برحسب R و S به دست می‌آوریم. اما از آن‌جا که تمامی نتایج به دست آمده در بخش‌های قبلی براساس $\sum_{j=1}^m S_{j,j}$ و $\sum_{i=1}^n R_{i,i}$ می‌باشند و داریم $\sum_{j=1}^m S_{j,j} \sim \mathcal{G}(M, \lambda)$ و $\sum_{i=1}^n R_{i,i} \sim \mathcal{G}(N, \mu)$ در نتیجه می‌توان از فواصل اطمینان برپایه‌ی بوت‌استرپ پارامتری استفاده نمود. در اینجا با توجه به این که نه توزیع برآوردگرها معلوم است و نه واریانس آنها بنابراین ما از الگوریتم t -بوت‌استرپی با استفاده از الگوریتم ۲ و هم‌چنین فاصله اطمینان جانبی^۲ برای ساخت فاصله اطمینان استفاده

^۲Asymptotic Confidence Interval

۵° برآوردهای بهبود یافته با استفاده از نمونه‌ی مجموعه‌ی رتبه‌دار رکوردی



شکل ۱.۳: مقایسه‌ی MSE برآوردهای پیشنهادی برای برخی مقادیر α و η در RRSS

جدول ۱.۳: فواصلی که برآوردگرهای بهبودیافته در RRSS بهتر عمل کرده‌اند.

$\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST}$	$\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{SPT}$	$\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT}$	η	α	n	m
(۰, ۰/۴۴)	(۰/۲۴, ۰/۳۷)	(۰/۲۵, ۰/۳۶)	۰/۹	۰/۰۵	۵	۵
(۰, ۰/۴۴)	(۰/۲۵, ۰/۳۸)	(۰/۲۶, ۰/۳۷)	۰/۶	۰/۰۱		
(۰, ۰/۴۴)	(۰/۲۶, ۰/۳۵)	(۰/۲۶, ۰/۳۵)	۰/۲	۰/۱		
(۰, ۰/۴۱)	(۰/۲۵, ۰/۳۸)	(۰/۲۷, ۰/۳۴)	۰/۹	۰/۰۵	۷	۷
(۰, ۰/۴۱)	(۰/۲۵, ۰/۳۶)	(۰/۲۶, ۰/۳۴)	۰/۶	۰/۰۱		
(۰, ۰/۴۱)	(۰/۲۵, ۰/۳۴)	(۰/۲۷, ۰/۳۴)	۰/۲	۰/۱		
(۰, ۰/۳۸)	(۰/۲۷, ۰/۳۴)	(۰/۲۸, ۰/۳۲)	۰/۹	۰/۰۵	۱۰	۱۰
(۰, ۰/۳۸)	(۰/۲۸, ۰/۳۳)	(۰/۲۸, ۰/۳۳)	۰/۶	۰/۰۱		
(۰, ۰/۳۸)	(۰/۲۶, ۰/۳۳)	(۰/۲۶, ۰/۳۲)	۰/۲	۰/۱		
(۰, ۰/۴۲)	(۰/۲۵, ۰/۳۸)	(۰/۲۶, ۰/۳۵)	۰/۹	۰/۰۵	۷	۵
(۰, ۰/۴۲)	(۰/۲۵, ۰/۳۸)	(۰/۲۶, ۰/۳۷)	۰/۶	۰/۰۱		
(۰, ۰/۴۲)	(۰/۲۶, ۰/۳۶)	(۰/۲۷, ۰/۳۶)	۰/۲	۰/۱		

می‌کنیم.

۲.۳.۳ مقایسه‌ی برآوردگرهای فاصله‌ای بر اساس شبیه‌سازی

برای مقایسه کردن فواصل اطمینان مطرح شده در بخش بالا، از شبیه‌سازی مونت کارلو استفاده کرده و در آن تمام ترکیب‌های متفاوت $n = ۵, ۷, m = ۵, ۷, \lambda = ۱, \mathcal{R} =$ $\alpha = ۰/۰۱$ و $\alpha = ۰/۳, ۰/۳۱, ۰/۳۲, ۰/۳۳$ را در نظر گرفته‌ایم. در هر ترکیب، ۵۰۰ نمونه از r و s به ترتیب از $\mathcal{E}(\mu)$ و $\mathcal{E}(\lambda)$ شبیه‌سازی شده‌اند. لازم به ذکر است که $B = ۲۰۰$ و با توجه به این که برای برآورد انحراف معیار به روش بوت‌استرپ، نیاز به تکرار زیاد نیست $B' = ۲۵$ در نظر گرفته‌ایم. نتایج در جدول ۲.۳ ارائه شده‌اند.

همان‌طور که در فصل قبل اشاره شد منظور از C.P. و E.L. در جدول ۲.۳ به ترتیب میانگین طول فاصله اطمینان و احتمال پوشش آن می‌باشد. با توجه به جدول ۲.۳ همان‌طوری که انتظار داشتیم برآوردگرهای پیشنهادی اغلب دارای احتمال پوشش بالایی هستند. از طرفی مشاهده می‌شود که برآوردگر نوع استاین همزمان دارای احتمال پوشش بالا و میانگین طول کوچکتر برای انتخاب‌های مختلف n, m و $\mathcal{R}_o$ می‌باشد.

الگوریتم ۲ الگوریتم t-بوت‌استرپ

گام ۱: براساس نمونه‌های مستقل مشاهده شده $r = (r_{1,1}, r_{2,2}, \dots, r_{n,n})^T$ و $s = (s_{1,1}, s_{2,2}, \dots, s_{m,m})^T$ برآوردهای $\hat{\mu}_{(ML)}$ ، $\hat{\lambda}_{(ML)}$ و $\hat{R}_{ML}$ را به ترتیب از روابط (۲.۳) و (۳.۳) به دست آورده و برآوردهای $\hat{R}_{ML}^{ST}$ و $\hat{R}_{ML}^{SPT}$ ، $\hat{R}_{ML}^{PT}$ را به ترتیب از (۷.۳)، (۸.۳) و (۹.۳) به دست می‌آوریم.

گام ۲: نمونه‌های بوت‌استرپی $(i, \hat{\mu}_{(ML)}^*, r_{i,i}^* \sim \mathcal{G}(i, \hat{\mu}_{(ML)}))$ و $(i, \hat{\lambda}_{(ML)}^*, s_{i,i}^* \sim \mathcal{G}(i, \hat{\lambda}_{(ML)}))$ را تولید کنید. و با استفاده از $r^* = (r_{1,1}^*, r_{2,2}^*, \dots, r_{n,n}^*)^T$ و $s^* = (s_{1,1}^*, s_{2,2}^*, \dots, s_{m,m}^*)^T$ برآوردهای بوت‌استرپی $\hat{\mu}_{(ML)}^*$ ، $\hat{\lambda}_{(ML)}^*$ ، $\hat{R}_{ML}^{ST*}$ و $\hat{R}_{ML}^{SPT*}$ ، $\hat{R}_{ML}^{PT*}$ را به دست آورید.

گام ۳: گام دوم را برای $b = 1, \dots, B$ تکرار کنید تا B مشاهده‌ی بوت‌استرپی از برآوردها را به صورت $\hat{R}_{(b)ML}^*$ ، $\hat{R}_{(b)ML}^{ST*}$ ، $\hat{R}_{(b)ML}^{SPT*}$ و $\hat{R}_{(b)ML}^{PT*}$ در اختیار داشته باشید.

گام ۴: به ازای هر تکرار گام سوم، بوت‌استرپ پارامتری دیگری انجام دهید و براساس آن انحراف معیار $\hat{R}_{(b)ML}^*$ را با نام $\hat{\sigma}(\hat{R}_{(b)ML}^*)$ را برآورد کنید و بقیه برآوردها را نیز به همین ترتیب به دست آورید. به طور واضح‌تر، گام دوم الگوریتم را برای $b' = 1, \dots, B'$ با $\hat{\mu}_{(ML)}^*$ و $\hat{\lambda}_{(ML)}^*$ به ترتیب به جای $\hat{\mu}_{(ML)}$ و $\hat{\lambda}_{(ML)}$ تکرار کنید، و سپس انحراف معیار بوت‌استرپی را به صورت زیر به دست آورید

$$\hat{\sigma}(\hat{R}_{(b)ML}^*) = \sqrt{\frac{1}{B'-1} \sum_{b'=1}^{B'} \left(\hat{R}_{(b')ML}^{**} - \bar{R}^{**} \right)^2},$$

که در آن $\bar{R}^{**} = \frac{1}{B'} \sum_{b'=1}^{B'} \hat{R}_{(b')ML}^{**}$

گام ۵: بردار $t^* = (t_{(1)}^*, \dots, t_{(B)}^*)^T$ را در نظر بگیرید، به طوری که $t_{(b)}^* = \frac{\hat{R}_{(b)ML}^* - \hat{R}}{\hat{\sigma}(\hat{R}_{(b)ML}^*)}$ ، $b = 1, \dots, B$

گام ۶: در نهایت، فاصله اطمینان t -بوت‌استرپی $\% (1 - \alpha) 100$ به صورت $\left(\hat{R} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^* \hat{\sigma}(\hat{R}_{ML}), \hat{R} + t_{1-\frac{\alpha}{2}}^* \hat{\sigma}(\hat{R}_{ML}) \right)$ محاسبه نمائید، که در آن t_{γ}^* همان γ امین چندک بردار t^* می‌باشد (که در گام ۵ تعریف شده است) و $\hat{\sigma}(\hat{R}_{ML})$ برآورد بوت‌استرپی انحراف معیار برآوردها $\hat{R}_{ML}$ می‌باشد. و این کار را برای مابقی برآوردها نیز اجرا می‌کنیم.

جدول ۲.۳: میانگین طول فاصله اطمینان (E.L.) و احتمال پوشش (C.P.) برای $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R}_o = 0.3 \text{ و } \alpha = 0.01$$

$\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST}$		$\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{SPT}$		$\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT}$		$\hat{\mathcal{R}}_{ML}$		m	n	$\mathcal{R}$	
Boot.E.L.	Boot.C.P.	Boot.E.L.	Boot.C.P.	Boot.E.L.	Boot.C.P.	Boot.E.L.	Boot.C.P.				
(Asym.C.P.)	(Asym.E.L.)	(Asym.E.L.)	(Asym.C.P.)	(Asym.E.L.)	(Asym.C.P.)	(Asym.E.L.)	(Asym.C.P.)				
0.454	0.997	0.504	0.996	0.503	0.997	0.512	0.996	5	5	0.30	1
(0.313)	(0.972)	(0.347)	(0.960)	(0.349)	(0.963)	(0.350)	(0.960)	7	5	0.30	2
0.378	0.994	0.420	0.991	0.418	0.992	0.428	0.991	5	7	0.30	3
(0.277)	(0.983)	(0.311)	(0.974)	(0.313)	(0.976)	(0.314)	(0.970)	7	7	0.30	4
0.404	0.997	0.442	0.993	0.442	0.994	0.445	0.993	5	5	0.35	5
(0.278)	(0.980)	(0.303)	(0.972)	(0.304)	(0.974)	(0.304)	(0.968)	7	7	0.35	6
0.323	0.995	0.348	0.994	0.348	0.994	0.350	0.994	5	5	0.35	7
(0.238)	(0.975)	(0.257)	(0.966)	(0.258)	(0.967)	(0.258)	(0.965)	7	7	0.35	8
0.492	0.994	0.540	0.994	0.540	0.994	0.545	0.994	5	5	0.40	9
(0.339)	(0.974)	(0.374)	(0.973)	(0.377)	(0.973)	(0.376)	(0.973)	7	5	0.40	10
0.422	0.993	0.455	0.992	0.457	0.995	0.459	0.993	5	5	0.40	11
(0.303)	(0.977)	(0.335)	(0.973)	(0.340)	(0.975)	(0.336)	(0.972)	7	7	0.40	12
0.438	0.997	0.474	0.997	0.474	0.997	0.477	0.997	5	5	0.45	13
(0.301)	(0.966)	(0.326)	(0.960)	(0.328)	(0.964)	(0.327)	(0.960)	7	7	0.45	14
0.356	0.999	0.376	0.999	0.377	0.999	0.377	0.999	5	5	0.45	15
(0.259)	(0.973)	(0.278)	(0.969)	(0.279)	(0.970)	(0.278)	(0.967)	7	7	0.45	16
0.532	0.995	0.567	0.994	0.569	0.994	0.570	0.994	5	5	0.50	17
(0.361)	(0.959)	(0.391)	(0.957)	(0.396)	(0.959)	(0.391)	(0.958)	7	5	0.50	18
0.460	0.995	0.481	0.992	0.487	0.993	0.480	0.992	5	5	0.50	19
(0.324)	(0.960)	(0.351)	(0.960)	(0.357)	(0.962)	(0.349)	(0.959)	7	7	0.50	20
0.468	0.994	0.491	0.991	0.493	0.991	0.492	0.991	5	5	0.55	21
(0.322)	(0.959)	(0.344)	(0.962)	(0.346)	(0.963)	(0.343)	(0.961)	7	7	0.55	22
0.386	0.995	0.392	0.993	0.394	0.993	0.392	0.993	5	5	0.55	23
(0.279)	(0.959)	(0.292)	(0.964)	(0.294)	(0.965)	(0.292)	(0.965)	7	7	0.55	24
0.593	0.991	0.591	0.990	0.599	0.990	0.585	0.991	5	5	0.60	25
(0.394)	(0.946)	(0.408)	(0.959)	(0.413)	(0.958)	(0.405)	(0.961)	7	5	0.60	26
0.516	0.984	0.502	0.992	0.513	0.985	0.493	0.993	5	5	0.60	27
(0.353)	(0.954)	(0.363)	(0.961)	(0.368)	(0.960)	(0.359)	(0.963)	7	7	0.60	28
0.510	0.988	0.504	0.992	0.508	0.988	0.501	0.992	5	5	0.65	29
(0.349)	(0.941)	(0.359)	(0.957)	(0.361)	(0.957)	(0.357)	(0.960)	7	7	0.65	30
0.422	0.992	0.409	0.993	0.411	0.993	0.407	0.993	5	5	0.65	31
(0.301)	(0.970)	(0.304)	(0.970)	(0.305)	(0.970)	(0.303)	(0.971)	7	7	0.65	32

جدول ۳.۳: داده‌های شبیه‌سازی شده

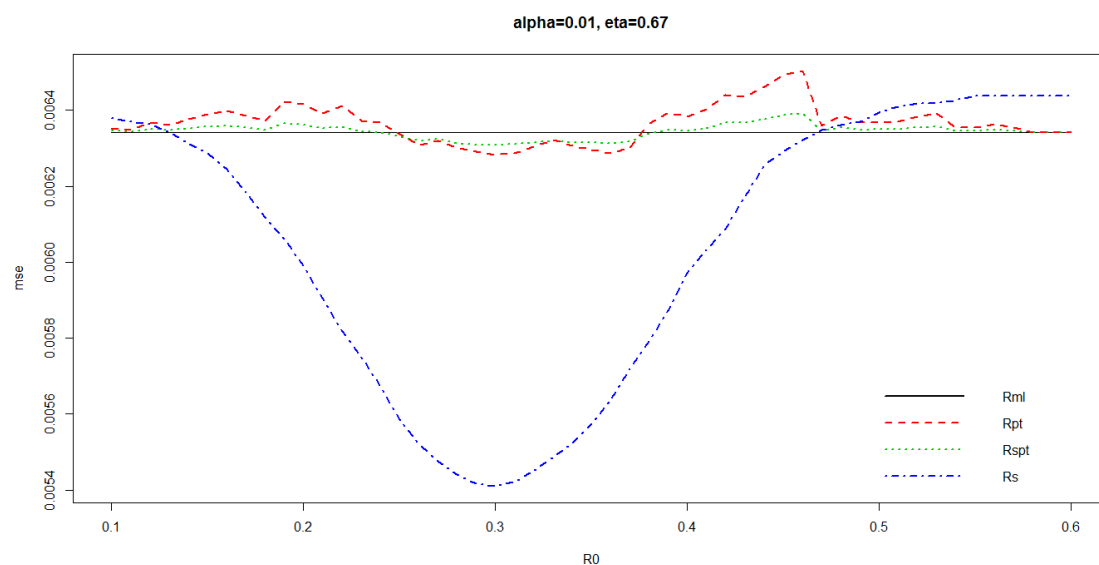
r	۵/۹۰۷	۲۳/۷۱۴	۲۲/۳۵۲	۲۰/۸۷۵	۲۶/۸۰۰	۵۶/۳۴۶	۳۷/۱۹۰
s	۱/۷۱۰	۱۰/۶۷۸	۲/۷۷۳	۵/۰۶۹	۱۹/۹۵۸	۲۹/۹۷۰	۷/۴۲۷

۴.۳ مثال عددی

در بخش قبل کارائی برآوردهای فاصله‌ای را به ازای 1000 نمونه‌ی s و r بررسی کردیم. در این بخش قصد داریم برآوردهای نقطه‌ای و فاصله‌ای معرفی شده را تنها در یک نمونه‌ی s و r آزمایش کنیم. برای این کار، دو نمونه‌ی مستقل RRSS با اندازه‌ی برابر $n = m = 7$ یعنی $r = (r_{1,1}, r_{2,2}, \dots, r_{7,7})^T$ و $s = (s_{1,1}, s_{2,2}, \dots, s_{7,7})^T$ را از توزیع‌های $\mathcal{E}(\mu = 7)$ و $\mathcal{E}(\lambda = 3)$ شبیه‌سازی می‌کنیم. نمونه‌های تولید شده در جدول ۳.۳ قرار دارند. همان طور که قبلاً نیز بیان شد، از این جدول نیز مشاهده می‌شود که $r_{i,i}$ ها و $s_{i,i}$ ها لزوماً مرتب نیستند. مقدار واقعی $\mathcal{R}$ برابر است با $\frac{\lambda}{\lambda + \mu} = 0.3$ و براساس رابطه‌ی (۲.۳) داریم $\hat{\mu} = 6/899429$ و $\hat{\lambda} = 2/770893$ بنابراین از روابط (۳.۳)، (۷.۳)، (۸.۳) و (۹.۳)، $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT}$ ، $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{SPT}$ و $\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{ST}$ برای $\mathcal{R}_o = 0.31$ ، $\eta = 0.8$ و $\alpha = 0.1$ به ترتیب ۰/۲۸۶۵، ۰/۳۱ و ۰/۲۹۱۲۲۹ و ۰/۲۹۴۷۷۴ به دست می‌آیند. بنابراین ملاحظه می‌شود که همه‌ی برآوردهای پیشنهادی نزدیک به مقدار واقعی $\mathcal{R} = 0.3$ هستند. مقادیر مختلف این برآوردها به ازای مقادیر مختلف $\mathcal{R}_o$ در جدول ۴.۳ آورده شده‌اند. می‌توان دید که با دور شدن $\mathcal{R}_o$ از مقدار واقعی $\mathcal{R}$ ، این برآوردها رفتارهای مختلفی را نشان می‌دهند. هم‌چنین برای مقادیر بزرگ $|\mathcal{R}_o - \mathcal{R}|$ ، برآوردها نوع استاین نسبت به بقیه برآوردها بهتر عمل می‌کند. شکل ۲.۳ میانگین توان دوم خطا برآوردها را برای مقادیر $\alpha = 0.1$ و $\eta = 0.67$ نشان می‌دهد که گویای نتایج فوق می‌باشد.

۵.۳ نتیجه‌گیری

در این فصل، برآوردها از آزمون اولیه و برآوردهای انقباضی $\mathcal{R}$ را براساس RRSS از توزیع نمائی را تعریف کردیم. این برآوردهای نقطه‌ای با استفاده از معیار MSE مقایسه شده و مورد بررسی قرار گرفتند. براساس نتایج شبیه‌سازی مشاهده شد که برآوردهای PT و SPT دارای کارائی بهتری در برخی فاصله‌های Δ هستند. اما آنها به شدت به سطح معنی داری آزمون بستگی دارند. بنابراین برآوردها انقباضی نوع استاین ارائه شد و نشان داده شده که این برآوردها، دارای کارائی بالایی نسبت به برآوردها کلاسیک ML در یک



شکل ۲.۳: مقایسه میانگین مربعات خطا برای $\alpha = 0.01$ و $\eta = 0.67$ در مثال عددی فاصله‌ی چشم‌گیری می‌باشد.

جدول ۴.۳: برآوردها به ازای مقادیر مختلف R_o

STE	SPTE	PTE	MLE	R_o
۰/۲۷۸۲۹۷	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲
۰/۲۷۸۲۹۷	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۱
۰/۲۷۸۲۹۷	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۲
۰/۲۷۸۲۹۷	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۳
۰/۲۷۸۲۹۷	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۴
۰/۲۷۸۲۹۷	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۵
۰/۲۷۸۲۹۷	۰/۲۸۱۲۲۹	۰/۲۶۰۰۰۰	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۶
۰/۲۷۸۲۹۷	۰/۲۸۳۲۲۹	۰/۲۷۰۰۰۰	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۷
۰/۲۷۸۲۹۷	۰/۲۸۵۲۲۹	۰/۲۸۰۰۰۰	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸
۰/۲۹۴۷۷۴	۰/۲۸۷۲۲۹	۰/۲۹۰۰۰۰	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۹
۰/۲۹۴۷۷۴	۰/۲۸۹۲۲۹	۰/۳۰۰۰۰۰	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۳
۰/۲۹۴۷۷۴	۰/۲۹۱۲۲۹	۰/۳۱۰۰۰۰	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۳۱
۰/۲۹۴۷۷۴	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۳۲
۰/۲۹۴۷۷۴	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۳۳
۰/۲۹۴۷۷۴	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۳۴
۰/۲۹۴۷۷۴	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۳۵
۰/۲۹۴۷۷۴	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۳۶
۰/۲۹۴۷۷۴	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۳۷
۰/۲۹۴۷۷۴	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۳۸
۰/۲۹۴۷۷۴	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۳۹
۰/۲۹۴۷۷۴	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۲۸۶۵۳۶	۰/۴

فصل ۴

برآوردگرهای بهبود یافته در سانسور فزاینده

همان‌طور که در فصل اول اشاره شد، یکی دیگر از مولفه‌های بقا، احتمال بقا یا احتمال عدم شکست تا زمان t است. در این فصل می‌خواهیم به برآورد پارامتر تنش-مقاومت و تابع احتمال بقا براساس داده‌های سانسور فزاینده در یک خانواده از توزیع‌های طول عمر بپردازیم. برای رسیدن به این هدف، برآوردگرهای آزمون اولیه و انقباضی نوع استاین معرفی شده‌اند و خواص دقیق توزیعی آنها ارائه می‌شوند. برای نشان دادن برتری عددی این برآوردگرها از استراتژی‌های تخمینی پیشنهاد شده، از جمله فواصل اطمینان بوت‌استریپی بهبود یافته استفاده شده‌است. برای بررسی عملکرد روش‌ها، مطالعه شبیه‌سازی گسترده‌ای انجام شده‌است. شواهد شبیه‌سازی نشان داد که استراتژی‌های انقباضی پیشنهاد شده ما برای تخمین پارامترهای مبتنی بر داده‌های سانسور فزاینده، خوب عمل می‌کنند. از این فصل مقاله‌های صفریان، آرشی و عربی بلاغی (۲۰۱۸b, ۲۰۱۹c) نتیجه شده است.

۱.۴ مقدمه

تابع قابلیت اعتماد یا تابع بقا که به صورت $R(t)$ تعریف می‌شود، در واقع احتمال عدم شکست تا زمان t می‌باشد. به عبارت دیگر، اگر متغیر تصادفی X طول عمر یک واحد یا یک سیستم باشد، آن گاه $R(t) = P(X > t)$. اندازه قابلیت اعتماد دیگری که قبلاً با آن آشنا شدیم پارامتر تنش-مقاومت است که عبارت است از احتمال $P = \text{Prob}(X > Y)$ که قابلیت اعتماد یک واحد یا سیستم با مقاومت تصادفی X در برابر فشار تصادفی Y ، تحت یک سیستم دوتایی است. این دو اندازه‌ی قابلیت اعتماد کاربردهای وسیعی در مسائل مهندسی، زیستی، کشاورزی و زمینه‌های مربوطه دارند. بنابراین برآورد آنها اهمیت بالایی دارد. کارهای زیادی در برآورد این پارامترها تحت سانسور فزاینده انجام شده‌اند. از میان این مطالعات مربوطه، ترجیح می‌دهیم پاگ^۱ (۱۹۶۳)، باسو^۲ (۱۹۶۴)، تانگ^۳ (۱۹۷۴ و ۱۹۷۵)، کلی و همکاران^۴ (۱۹۷۶)، سیت و شاه^۵ (۱۹۸۱)، چائو^۶ (۱۹۸۲)، آود و غراف^۷ (۱۹۸۶)، کنستانتین و همکاران^۸ (۱۹۸۶)، باتاچاریا^۹ (۱۹۸۹)، چاتورودی و رانی^{۱۰} (۱۹۹۷ و ۱۹۹۸) و چاتورودی و ساریندر^{۱۱} (۱۹۹۹). بکلیزی^{۱۲} (۲۰۰۳) برآوردهای پارامتر $R(t)$ برای توزیع نمایی یک پارامتری ارائه کرد. چاتورودی و نانچاهال (۲۰۱۶) و چاتورودی و شانتانو (۲۰۱۷)^{۱۳} پارامتر $R(t)$ را با استفاده از داده‌های سانسور نوع I و نوع II و برای پارامتر P را با استفاده از نمونه‌ی ساده برآورد کرد.

سناریوهای زیادی در آزمون بقا یا آزمایش‌های قابلیت اطمینان وجود دارد که در آن واحدها در آزمایش از دست رفته یا قبل از شکست از بین می‌روند. از دست دادن ممکن است به طور غیرمنتظره رخ دهد، یا ممکن است در مطالعه طراحی شده باشد، به عنوان مثال، در مواردی از قبیل، شکستن اتفاقی واحد آزمایشی، یا فردی باشد در صورت تحقق مطالعه، یا آزمایش خود باید متوقف شود به علت برخی از شرایط پیش بینی نشده مانند کاهش بودجه، عدم دسترسی به امکانات آزمایشی، و غیره. با این

¹Pugh²Basu³Tong⁴Keley et al⁵Sathe and Shah⁶Chao⁷Awad and Gharraf⁸Constantine et al⁹Bhattacharya¹⁰Chaturvedi and Rani¹¹Chaturvedi and Surinder¹²Baklizi¹³Chaturvedi and Shantanu

حال، حذف واحدهای آزمایش از پیش برنامه ریزی شده و عمدی است و به منظور آزاد کردن امکانات آزمایشی برای آزمایش های دیگر، برای صرفه جویی در وقت و هزینه، و یا برای استفاده کردن برای تحلیل مستقیم که اغلب نتیجه می دهد، انجام می شود. در میان طرح های مختلف سانسور، سانسور فزاینده که در برخی منابع فارسی پیشرونده نیز گفته می شود، نوع II در دهه اخیر بسیار محبوب شده است، زیرا اجازه حذف واحدهای فعال در طول آزمایش را به آزمایشگر می دهد. بنابراین در این رساله، ما توجه مان را به طرح سانسور فزاینده ی نوع II معطوف می کنیم.

تحت این طرح سانسور، از یک مجموعه n واحدی از آزمون طول عمر، تنها m واحد از آنها تا زمان شکست مشاهده می شوند. در اولین زمان شکست، R_1 واحد از $n-1$ واحد باقی مانده به تصادف انتخاب شده و از آزمایش آزمون بقا خارج می شوند یا اصطلاحاً سانسور می شوند. در زمان شکست واحد بعدی، R_2 واحد از $n-2-R_1$ واحد باقی مانده خارج شده و سانسور می شوند و این کار به همین صورت ادامه می یابد. نهایتاً در زمان شکست m ام، همه ی واحدهای باقیمانده یعنی $R_m = n - m - R_1 - \dots - R_{m-1}$ واحد از آزمایش خارج شده و سانسور می شوند. توجه می کنید که سانسور فزاینده در m مرحله اتفاق می افتند. به وضوح، این طرح شامل موارد خاصی نمونه کامل و سانسور نوع I و II نیز می باشد که در فصل اول مختصراً اشاره شد. همان طور که در فصل اول نیز گفته شد در این طرح سانسور $R_1, R_2, \dots, R_m$ (و بنابراین m) همگی از قبل تثبیت می شوند. به تبع آن، در اینجا زمان ها (T ها) همه تصادفی هستند، اما تعداد واحدها جهت شکست در هر زمان سانسور از قبل تعیین می شوند. کتاب بالاکریشن (۲۰۰۰) یک مرجع کامل درباره ی سانسور فزاینده است. برای آگاهی بیشتر در خصوص تحقیقات انجام شده ی اخیر به عربی بلاغی (۲۰۱۶ و ۲۰۱۸) مراجعه کنید.

فرض کنید n واحد مستقل تحت آزمون طول عمر قرار گرفته و زمانهای شکست مربوط به آنها $X_1, X_2, \dots, X_n$ هم توزیع با تابع توزیع تجمعی $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد. هم چنین، فرض کنید که تعداد شکست ها برای مشاهده شدن m و طرح سانسور فزاینده راست نوع II یعنی $(R_1, R_2, \dots, R_m)$ از قبل تعیین شده باشند.

پس m زمان شکستی که به صورت کامل مشاهده شده اند را به صورت $X_{i:m:n}^{(R_1, R_2, \dots, R_m)}$ ، $i = 1, 2, \dots, m$ در نظر می گیریم. زمانی که طرح سانسورمان واضح هست، برای سادگی در نماد گذاری، به صورت $X_{i:m:n}$ ، $i = 1, 2, \dots, m$ در نظر می گیریم، با عنایت به این مطلب که هنوز می دانیم این متغیرها به انتخاب واحدهای ویژه ی $(R_1, R_2, \dots, R_m)$ وابسته هستند. می توانیم تابع چگالی احتمال توأم m آماره ی ترتیبی سانسور فزاینده ی راست نوع II به صورت زیر به دست آوریم

$$f_{X_{1:m:n}, X_{2:m:n}, \dots, X_{m:m:n}}(x) = c \prod_{i=1}^m f(x_i) \{1 - F(x_i)\}^{R_i}, \quad x_1 < x_2 < \dots < x_m, \quad (1.4)$$

که در آن

$$x = x_1, x_2, \dots, x_m, \quad c = n(n - R_1 - 1) \dots (n - R_1 - R_2 - \dots - R_{m-1} - m + 1).$$

در ادامه، خانواده‌ای از توزیع‌های طول عمر را برای مدل $f(\cdot)$ در (۱.۴) به کار می‌بریم. فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیعی با تابع احتمال زیر باشد

$$f(x; a, \lambda, \theta) = \lambda G'(x; a, \theta) \exp\{-\lambda G(x; a, \theta)\}; x > a \geq 0, \lambda > 0. \quad (2.4)$$

اینجا، $G(x; a, \theta)$ تابعی از x بوده و ممکن است به پارامترهای (معلوم) a و θ که شاید برداری نیز باشند، وابسته باشد. بعلاوه، $G(x; a, \theta)$ تابع صعودی یکنواخت از x با $G(a; a, \theta) = 0$ ؛ $G(\infty; a, \theta) = \infty$ و $G'(x; a, \theta)$ مشتق $G(x; a, \theta)$ نسبت به x است. برای جزئیات بیشتر به مقاله‌ی چاتورودی و ناچاهال (۲۰۱۶) مراجعه کنید. در این حالت می‌نویسیم $X \sim \mathcal{CN}(a, \lambda, \theta, G)$. بنابراین

$$R(t) = \exp(-\lambda G(t; a, \theta)) \quad (3.4)$$

و تابع نرخ خطر به صورت $h(t) = \lambda G'(t; a, \theta)$ است. قرار دهید

$$S_m = \sum_{i=1}^m G(X_i; a, \theta) + \sum_{i=1}^m R_i G(X_i; a, \theta).$$

پس تابع درستنمایی به صورت زیر به دست می‌آید

$$L(\lambda | x_{1:m:n}, x_{2:m:n}, \dots, x_{m:m:n}; a; \theta) = c \lambda^m \prod_{i=1}^m G'(X_i; a, \theta) \exp(-\lambda S_m). \quad (4.4)$$

برآوردگرهای ML پارامترهای λ و $R(t)$ به ترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\hat{\lambda} = \frac{m}{S_m}, \quad (5.4)$$

$$\hat{R}(t) = \exp\left\{-\frac{m}{S_m} G(t; a, \theta)\right\}. \quad (6.4)$$

فرض کنید یک نمونه‌ی تصادفی از $\mathcal{CN}(a, \lambda, \theta_1, G)$ به حجم m_1 و یک نمونه تصادفی از $Y \sim \mathcal{CN}(a, \mu, \theta_2, G)$ به حجم m_2 بطور مستقل از هم در دسترس است. باتوجه به این که پارامتر تنش-مقاومت

$$P = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \quad (7.4)$$

است، برآوردگر ML آن به صورت زیر حاصل می‌شود

$$\hat{P} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\lambda} + \hat{\mu}}, \quad (8.4)$$

که در آن $\hat{\lambda} = \frac{m_1}{S_{m_1}}$ و $\hat{\mu} = \frac{m_2}{T_{m_2}}$

$$S_{m_1} = \sum_{i=1}^{m_1} G(X_i; a, \theta_1) + \sum_{i=1}^{m_1} R_i G(X_i; a, \theta_1),$$

9

$$T_{m_2} = \sum_{i=1}^{m_2} G(Y_i; a, \theta_2) + \sum_{i=1}^{m_2} R_i G(Y_i; a, \theta_2).$$

باتوجه به این که در سانسور فزاینده، بخاطر حذف برخی نمونه‌ها از مطالعه، از میزان اطلاعات ما کاسته می‌شود، کارائی برآوردگرها در مقایسه با طرح‌های سانسور نوع I-II کاهش می‌یابد. بنابراین علاقه‌مندیم کارائی برآوردگرها را بهبود ببخشیم. هدف ما از این مطالعه فراهم کردن شرایطی جهت بهبود برآوردگر ML است. بنابراین برای رسیدن به این هدف از استراتژی انقباض برآوردگرها به سمت نقطه پیشنهاد پیشین^{۱۴} استفاده می‌کنیم. برای این منظور، ابتدا استراتژی بهبود برآوردگرها را برای اندازه‌های قابلیت اعتماد، توسعه می‌دهیم. سپس فرمولهای دقیق خواص آنها ارائه شده و با استفاده از مطالعات شبیه‌سازی کارائی این برآوردگرها مورد ارزیابی قرار می‌گیرند، و در نهایت با اعمال برآوردگرها در نمونه‌های واقعی، نتایج مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲.۴ برآوردگرهای انقباضی

در این بخش، استراتژی بهبود هر دو برآوردگر $R(t)$ و P را ارائه می‌کنیم.

۱.۲.۴ برآورد $R(t)$

همان‌طوری که در فصل‌های قبلی دیدیم، گاهی اطلاعاتی تجربی از قبل در دسترس است که ممکن است آزمایشگر به‌عنوان یک پیشنهاد اولیه روی برخی از پارامترها از آنها استفاده کند. این اطلاع پیشین می‌تواند به‌صورت آزمون فرضیه‌ی زیر بیان شود:

$$\begin{cases} H_o : R(t) = R_o \\ H_a : R(t) \neq R_o \end{cases},$$

که در آن $R_o \in [0, 1]$ مقداری ثابت و معلوم است. از (۳.۴)، $R(t) = R_o$ که معادل است با $\lambda = \frac{\log(1/R(t))}{G(t; a, \theta)}$. بنابراین آزمون فرضیه‌ی مذکور هم‌ارز خواهد بود با $H_o : \lambda = \lambda_o$ در برابر $H_a : \lambda \neq \lambda_o$ ، که در آن $\lambda_o = \frac{\log(1/R_o)}{G(t; a, \theta)}$. کارائی برآوردگر، شدیداً به نتیجه این

¹⁴Prior Point Guess

آزمون بستگی دارد. با استفاده از آزمون فرض کلاسیک، ناحیه بحرانی برای رد فرض H_0 به صورت زیر است

$$\left\{ S_m < \frac{\chi_{(\gamma_m)}^2(1 - \frac{\alpha}{\gamma})}{2\lambda_o} \right\} \cup \left\{ S_m > \frac{\chi_{(\gamma_m)}^2(\frac{\alpha}{\gamma})}{2\lambda_o} \right\}, \quad (9.4)$$

که در آن α سطح معناداری آزمون است. یا به طور معادل، فرضیه H_0 را می پذیریم اگر

$$A = \{L; C_1 \leq L \leq C_2\}, \quad (10.4)$$

که در آن $C_1 = \chi_{(\gamma_m)}^2(\frac{\alpha}{\gamma})$ و $C_2 = \chi_{(\gamma_m)}^2(1 - \frac{\alpha}{\gamma})$ و $L = 2\lambda_o S_m \sim \chi_{(\gamma_m)}^2$ ، چون S_m دارای توزیع گاما است.

پیرو صالح (۲۰۰۶)، برآوردهای آزمون اولیه (PTE) براساس MLE به صورت زیر خواهد بود

$$\hat{R}^{PT}(t) = \hat{R}(t) - (\hat{R}(t) - R_o)I(A). \quad (11.4)$$

همان طور که قبلاً ملاحظه کردید برآوردهای PT به سطح معناداری α بستگی دارد. بعلاوه، برآوردهای $\hat{R}^{PT}(t)$ به ازای تمامی انتخاب‌های فرین $R(t)$ هموار نیست. بنابراین این برآوردهای برای برآورد طول عمر در مطالعات مناسب نیست. برآوردهای نوع استاین می‌توانند همه‌ی مقادیر ممکن در بین دو برآوردهای محدود نشده‌ی $(\hat{R}(t))$ و برآوردهای محدود شده‌ی (R_o) بسته به مقادیر نمونه‌ای آماره‌ی آزمون مربوط به آزمون اولیه، که یا به سمت پارامتر هدف و یا به سمت برآوردهای آن انقباض می‌دهد، تولید کنند. بنابراین، برآوردهای نوع استاین (ST) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\hat{R}^{ST}(t) = \hat{R}(t) - (\hat{R}(t) - R_o)dL^{-1} = \hat{R}(t) - \frac{d(\hat{R}(t) - R_o)}{2\lambda_o S_m}, \quad (12.4)$$

که در آن d یک مقدار ثابت نامنفی مناسب و کراندار است. برای جزئیات بیشتر به خان و صالح^{۱۵} (۲۰۰۱)، صالح (۲۰۰۶)، امین‌نژاد و همکاران (۲۰۱۵) و عربی و همکاران (۲۰۱۶) و مراجع آنها مراجعه کنید.

۲.۲.۴ خواص برآوردها

در این بخش اریبی، واریانس و MSE برآوردهای هدف را به دست می‌آوریم. برای سادگی نمادها فرض کنید داشته باشیم:

$$\begin{aligned}
 - \varphi_1 &= E(\hat{R}(t)I(A)) = \int_{\frac{c_1}{\beta}}^{\frac{c_2}{\beta}} \frac{\exp(-(\frac{\gamma m \lambda G(t; a, \theta)}{w} + \frac{w}{\gamma})) w^{m-1}}{\gamma^m \gamma(m)} dw \\
 - \varphi_2 &= E(\hat{R}^\gamma(t)I(A)) = \int_{\frac{c_1}{\beta}}^{\frac{c_2}{\beta}} \frac{\exp(-(\frac{\gamma m \lambda G(t; a, \theta)}{w} + \frac{w}{\gamma})) w^{m-1}}{\gamma^m \gamma(m)} dw \\
 - \varphi_3 &= E(I(A)) = \left(H_{\gamma m}(\frac{c_2}{\beta}) - H_{\gamma m}(\frac{c_1}{\beta}) \right) \\
 - \varphi_4 &= E(\hat{R}(t)) = \frac{\gamma(m \lambda G(t; a, \theta))^{\frac{m}{\gamma}}}{\Gamma(m)} K_m(\gamma \sqrt{m \lambda G(t; a, \theta)}) \\
 - \varphi_5 &= E(\hat{R}^\gamma(t)) = \frac{\gamma(\gamma m \lambda G(t; a, \theta))^{\frac{m}{\gamma}}}{\Gamma(m)} K_m(\gamma \sqrt{\gamma m \lambda G(t; a, \theta)}) \\
 - \varphi_6 &= E(\frac{1}{S_m^\gamma}) = \frac{\lambda^\gamma}{(m-1)(m-\gamma)} \\
 - \varphi_7 &= E(\frac{\hat{R}(t)}{S_m^\gamma}) = \frac{\lambda}{\gamma^{m-\gamma} \gamma(m)} (\gamma m \lambda G(t; a, \theta))^{\frac{m-1}{\gamma}} K_{m-1}(\gamma \sqrt{m \lambda G(t; a, \theta)}) \\
 - \varphi_8 &= E(\frac{\hat{R}^\gamma(t)}{S_m^\gamma}) = \frac{\lambda}{\gamma^{m-\gamma} \gamma(m)} (\gamma m \lambda G(t; a, \theta))^{\frac{m-1}{\gamma}} K_{m-1}(\gamma \sqrt{\gamma m \lambda G(t; a, \theta)}) \\
 - \varphi_9 &= E(\frac{\hat{R}(t)}{S_m^\gamma}) = \frac{\lambda^\gamma}{\gamma^{m-\gamma} \gamma(m)} (\gamma m \lambda G(t; a, \theta))^{\frac{m-\gamma}{\gamma}} K_{m-\gamma}(\gamma \sqrt{m \lambda G(t; a, \theta)}) \\
 - \varphi_{10} &= E(\frac{\hat{R}^\gamma(t)}{S_m^\gamma}) = \frac{\lambda}{\gamma^{m-\gamma} \gamma(m)} (\gamma m \lambda G(t; a, \theta))^{\frac{m-\gamma}{\gamma}} K_{m-\gamma}(\gamma \sqrt{\gamma m \lambda G(t; a, \theta)}) \\
 - \varphi_{11} &= E(\frac{1}{S_m}) = \frac{\lambda}{(m-1)}
 \end{aligned}$$

که در آن $\beta = \frac{\lambda_0}{\lambda}$ و $H_k(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی (CDF) توزیع کی دو با k درجه آزادی است. همچنین $K_r(\cdot)$ تابع بسل تعدیل یافته^{۱۶} نوع دوم با مرتبه r است. (برای اطلاعات بیشتر به واتسون^{۱۷} (۱۹۹۵) مراجعه کنید). قضیه زیر عبارات اربیی برآوردگرهای $R(t)$ را ارائه می کند.

قضیه ۱.۲.۴. عبارات اربیی برای برآوردگرهای محدود نشده، PT و ST به صورت زیر به دست می آیند

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad \text{Bias}(\hat{R}(t)) &= \varphi_4 - R(t) \\
 \text{(ii)} \quad \text{Bias}(\hat{R}^{\text{PT}}(t)) &= \text{Bias}(\hat{R}(t)) - \varphi_1 + R_o \varphi_3 \\
 \text{(iii)} \quad \text{Bias}(\hat{R}^{\text{ST}}(t)) &= \text{Bias}(\hat{R}(t)) - \frac{d}{d\lambda_o} \varphi_7 + \frac{dR_o}{d\lambda_o} \varphi_{11}.
 \end{aligned}$$

برای اثبات به پیوست ۳.آ مراجعه کنید.

قضیه ی زیر عبارتهای MSE برآوردگرها را به دست می دهد.

قضیه ۲.۲.۴. عبارات MSE برای برآوردگرهای محدود نشده، PT و ST به صورت زیر به دست می آیند

¹⁶Modified Bessel Function

¹⁷Watson

- (i) $MSE(\hat{R}(t)) = \varphi_5 - 2R(t)\varphi_4 + R^2(t)$
- (ii) $MSE(\hat{R}^{PT}(t)) = \varphi_5 - \varphi_4^2 - \varphi_2 - \varphi_1^2 + R_o^2\varphi_3(1 - \varphi_3) + 2R_o\varphi_3(\varphi_1 - \varphi_4) + 2\varphi_1\varphi_4 + \left(\text{Bias}(\hat{R}^{PT}(t))\right)^2$
- (iii) $MSE(\hat{R}^{ST}(t)) = MSE(\hat{R}(t)) + \frac{d^2}{4\lambda_o^2}[\varphi_{1o} + R_o^2\varphi_6 - 2R_o\varphi_9] - \frac{d}{\lambda_o}[\varphi_8 - (R_o + R(t))\varphi_7 + R_oR(t)\varphi_{11}]$.

برای اثبات به پیوست ۳.آ مراجعه کنید.

آن مقدار d که عبارت $MSE(\hat{R}^{ST}(t))$ را مینیمم می کند، عبارت است از

$$d = \frac{2\lambda_o[\varphi_8 - (R_o + R(t))\varphi_7 + R_oR(t)\varphi_{11}]}{[\varphi_{1o} + R_o^2\varphi_6 - 2R_o\varphi_9]}.$$

عبارات کارائی نسبی (REff) برای برآوردهای PT و ST نسبت به برآوردهای کلاسیک MLE به ترتیب عبارت اند از

$$\begin{aligned} REff(\hat{R}^{PT}(t)) &= \frac{MSE(\hat{R}(t))}{MSE(\hat{R}^{PT}(t))} \\ &= \frac{\varphi_5 - 2R(t)\varphi_1 + R^2(t)}{\varphi_5 - \varphi_4^2 - \varphi_2 - \varphi_1^2 + R_o^2\varphi_3(1 - \varphi_3) + 2R_o\varphi_3(\varphi_1 - \varphi_4) + 2\varphi_1\varphi_4 + \left(\text{Bias}(\hat{R}^{PT}(t))\right)^2} \end{aligned}$$

9

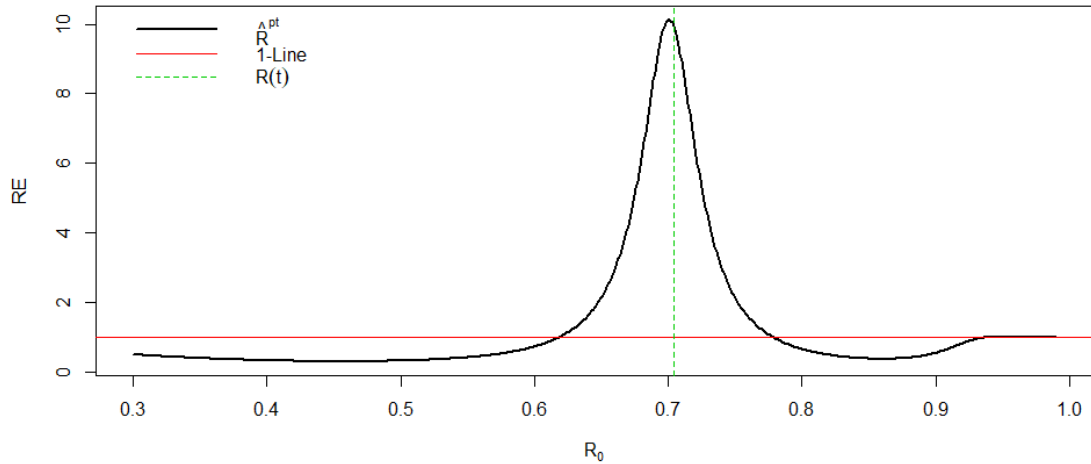
$$\begin{aligned} REff(\hat{R}^{ST}(t)) &= \frac{MSE(\hat{R}(t))}{MSE(\hat{R}^{ST}(t))} \\ &= \frac{\varphi_5 - 2R(t)\varphi_1 + R^2(t)}{\varphi_5 - 2R(t)\varphi_1 + R^2(t) + \frac{d^2}{4\lambda_o^2}[\varphi_7 + R_o^2\varphi_3 - 2R_o\varphi_6] - \frac{d}{\lambda_o}[\varphi_8 - (R_o + R(t))\varphi_4 + R_oR(t)\varphi_8]} \end{aligned}$$

نمودارهای ۱.۴ و ۲.۴ کارائی نسبی برآوردهای PT و ST را برای مدل نمائی $(G(x; a, \theta) = x)$ با $R(t) = 0.7$ نمایش می دهند. با توجه به نمودارهای ۱.۴ و ۲.۴، می توان عملکرد بهتر برآوردهای PT و ST را در نزدیکی $R(t) = 0.7$ ملاحظه کرد، که با دور شدن از آن عملکرد برآوردها افول می کند.

۳.۲.۴ برآورد P

فرض کنید مجموعه ای از فرضیه ها به صورت زیر در دسترس است

$$\begin{cases} H_o : P = P_o \\ H_a : P \neq P_o \end{cases},$$



شکل ۱.۴: نمودار کارائی نسبی برآوردگر PT براساس R_o .

که در آن $P_o \in [0, 1]$ یک مقدار ثابت است. برای $k = P_o / (1 - P_o)$ ، این فرضیه‌ها معادل هستند با $H_o : \lambda = k\mu$ مقابل $H_1 : \lambda \neq k\mu$. همچنین فرض کنید Θ_o و Θ ، به ترتیب، فضای پارامتری محدودشده توسط فرضیه صفر و فضای پارامتری کل است، در این صورت نسبت درستنمایی عبارت است از

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\sup_{\Theta_o} L(\lambda, \mu | \underline{x}, \underline{y})}{\sup_{\Theta} L(\lambda, \mu | \underline{x}, \underline{y})} \\ &= \frac{\left(k \frac{S_{m_1}}{T_{m_2}}\right)^{m_1}}{\left(1 + k \frac{S_{m_1}}{T_{m_2}}\right)^{m_1 + m_2}}. \end{aligned}$$

بنابراین، ناحیه بحرانی عبارت است از

$$c = \left\{ k \frac{S_{m_1}}{T_{m_2}} < k_1 \right\} \cup \left\{ k \frac{S_{m_1}}{T_{m_2}} > k_2 \right\},$$

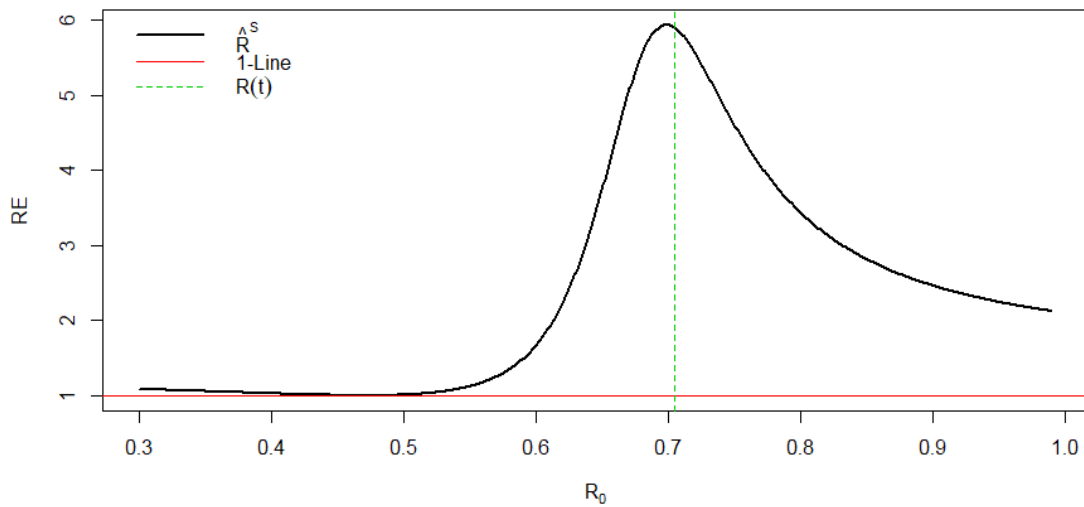
که در آن k_1 و k_2 طوری تعیین می‌شوند که

$$c = \left[(\underline{x}, \underline{y}) : \left\{ 0 < L < \frac{km_1}{m_2} F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2m_1, 2m_2) \right\} \cup \left\{ \frac{km_1}{m_2} F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2m_1, 2m_2) < L < \infty \right\} \right].$$

به‌طور معادل می‌پذیریم که H_o اگر

$$A = \left[(\underline{x}, \underline{y}) : \left\{ \frac{km_1}{m_2} F_{\frac{\alpha}{2}}(2m_1, 2m_2) < L < \frac{km_1}{m_2} F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2m_1, 2m_2) \right\} \right],$$

که در آن $L = \frac{S_{m_1}}{T_{m_2}}$ دارای توزیع $\mathcal{F}$ با درجات آزادی $(2m_1, 2m_2)$ است.



شکل ۲.۴: نمودار کارائی نسبی برآوردگر ST براساس R_o .

لم ۱.۲.۴. فرض کنید، متغیر تصادفی F دارای توزیع فیشر با درجات آزادی $(2m_1, 2m_2)$ است. با اعمال تبدیل زیر

$$W = \left(1 + \frac{\mu}{\lambda} F\right)^{-1},$$

تابع چگالی احتمال W به صورت زیر به دست می آید

$$f(w) = \frac{\left(\frac{m_2 \mu}{m_1 \lambda}\right)^{m_2}}{B(m_1, m_2)} \cdot \frac{w^{m_2-1} (1-w)^{m_1-1}}{\left[1 + \left(\frac{m_2 \mu}{m_1 \lambda} - 1\right) w\right]^{m_1+m_2}}; \quad 0 < w < 1.$$

9

$$\begin{aligned} \psi(l, q) &= E\left(\frac{W^l}{(1-W)^q}\right) = \frac{\left(\frac{m_2 \mu}{m_1 \lambda}\right)^{m_2}}{B(m_1, m_2)} \int_0^1 \frac{w^{m_2+l-1} (1-w)^{m_1-q-1}}{\left[1 + \left(\frac{m_2 \mu}{m_1 \lambda} - 1\right) w\right]^{m_1+m_2}} dw \\ &= \frac{(-1)^{l+m_2-1}}{B(m_1, m_2)} \left(\frac{m_1 \lambda}{m_2 \mu}\right)^l \left(1 - \frac{m_1 \lambda}{m_2 \mu}\right)^{-m_1-m_2-l+q+1} \end{aligned} \quad (13.4)$$

$$\begin{aligned} &\cdot \sum_{i=0}^{m_1-q-1} (-1)^i \binom{m_1-q-1}{i} \left(\frac{m_1 \lambda}{m_2 \mu}\right)^i \\ &\cdot \sum_{j=0}^{m_2+l-1} (-1)^j \binom{m_2+l-1}{j} I\left(\frac{m_2 \mu}{m_1 \lambda}; j+i-m_1-m_2\right). \end{aligned} \quad (14.4)$$

که در آن

$$I(c; p) = \int_1^c t^p dt = \begin{cases} \frac{(c^{p+1}-1)}{p+1}; & p \neq -1 \\ \log c; & p = -1 \end{cases}.$$

اکنون، برآوردگر آزمون اولیه‌ی P را به صورت زیر معرفی می‌کنیم

$$\hat{P}^{PT} = \hat{P} - (\hat{P} - P_o)I(A). \quad (15.4)$$

هم‌چنین برآوردگر نوع استاین P را به صورت زیر پیشنهاد می‌کنیم

$$\hat{P}^{ST} = \hat{P} - (\hat{P} - P_o)dL^{-1} = \hat{P} - (\hat{P} - P_o)d\frac{T_{m_2}}{S_{m_1}}, \quad (16.4)$$

که در آن d یک مقدار ثابت نامنفی مناسب است که با استفاده از روش بهینه سازی به دست می‌آید.

۴.۲.۴ ویژگی‌های برآوردگرها

قضایای زیر عبارات اریبی و مجموع توان دوم خطاهای برآوردگرهای P را ارائه می‌کنند. برای سادگی در علائم، در نظر می‌گیریم

- $\psi_1 = E(\hat{P}) = E\left(1 + \frac{\hat{\mu}}{\hat{\lambda}}\right)^{-1} = E\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}F\right)^{-1} = E(W),$
- $\psi_2 = E(\hat{P}^2) = E(W^2),$
- $\psi_3 = E(\hat{P}I(A)) = \int_{\left(1+kF_{\frac{q}{q}}(\gamma_{m_1}, \gamma_{m_2})\right)^{-1}}^{\left(1+kF_{1-\frac{q}{q}}(\gamma_{m_1}, \gamma_{m_2})\right)^{-1}} wf(w)dw,$
- $\psi_4 = E(\hat{P}^2 I(A)) = \int_{\left(1+kF_{\frac{q}{q}}(\gamma_{m_1}, \gamma_{m_2})\right)^{-1}}^{\left(1+kF_{1-\frac{q}{q}}(\gamma_{m_1}, \gamma_{m_2})\right)^{-1}} w^2 f(w)dw,$
- $\psi_5 = E(I(A)) = \int_{\left(1+kF_{\frac{q}{q}}(\gamma_{m_1}, \gamma_{m_2})\right)^{-1}}^{\left(1+kF_{1-\frac{q}{q}}(\gamma_{m_1}, \gamma_{m_2})\right)^{-1}} f(w)dw.$

قضیه ۳.۲.۴. عبارات اریبی برای برآوردگرهای محدود نشده، PT و ST به دست می‌آیند

- (i) $\text{Bias}(\hat{P}) = \psi_1 - P$
- (ii) $\text{Bias}(\hat{P}^{PT}) = \text{Bias}(\hat{P}) - \psi_3 + P_o\psi_5$

$$(iii) \text{Bias}(\hat{P}^{ST}) = \text{Bias}(\hat{P}) - d \frac{m_2}{m_1} \psi(2, 1) + d P_o \frac{m_2}{m_1} \psi(1, 1).$$

برای اثبات به پیوست ۳.آ مراجعه کنید

قضیه ۴.۲.۴. عبارات MSE برای برآوردهای محدود نشده، PT و ST به دست می آیند

$$\begin{aligned} (i) \text{MSE}(\hat{P}) &= \psi_2 - 2P\psi_1 + P^2 \\ (ii) \text{MSE}(\hat{R}^{PT}(t)) &= \text{MSE}(\hat{P}) - \psi_4 + 2P\psi_3 + P_o(P_o - 2P)\psi_5, \\ (iii) \text{MSE}(\hat{R}^{ST}(t)) &= \text{MSE}(\hat{P}) + d^2 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \left[\psi(4, 2) - 2P_o\psi(3, 2) + P_o^2\psi(2, 2) \right] \\ &\quad - 2d \frac{m_2}{m_1} \left[\psi(3, 1) - (P_o + P)\psi(2, 1) + PP_o\psi(1, 1) \right]. \end{aligned}$$

برای اثبات به پیوست ۳.آ مراجعه کنید.

مقدار d که عبارت $\text{MSE}(\hat{P}^{ST})$ را مینیموم می کند $d = \frac{\psi(3, 1) - (P_o + P)\psi(2, 1) + PP_o\psi(1, 1)}{\psi(4, 2) - 2P_o\psi(3, 2) + P_o^2\psi(2, 2)}$ است. عبارات کارائی نسبی برای برآوردهای PT و ST نسبت به برآوردهای ML به ترتیب عبارتند از

$$\begin{aligned} \text{REff}(\hat{P}^{PT}) &= \frac{\text{MSE}(\hat{P})}{\text{MSE}(\hat{P}^{PT})} \\ &= \frac{\psi_2 - 2P\psi_1 + P^2}{\psi_2 - 2P\psi_1 + P^2 - \psi_4 + 2P\psi_3 + P_o(P_o - 2P)\psi_5}, \end{aligned}$$

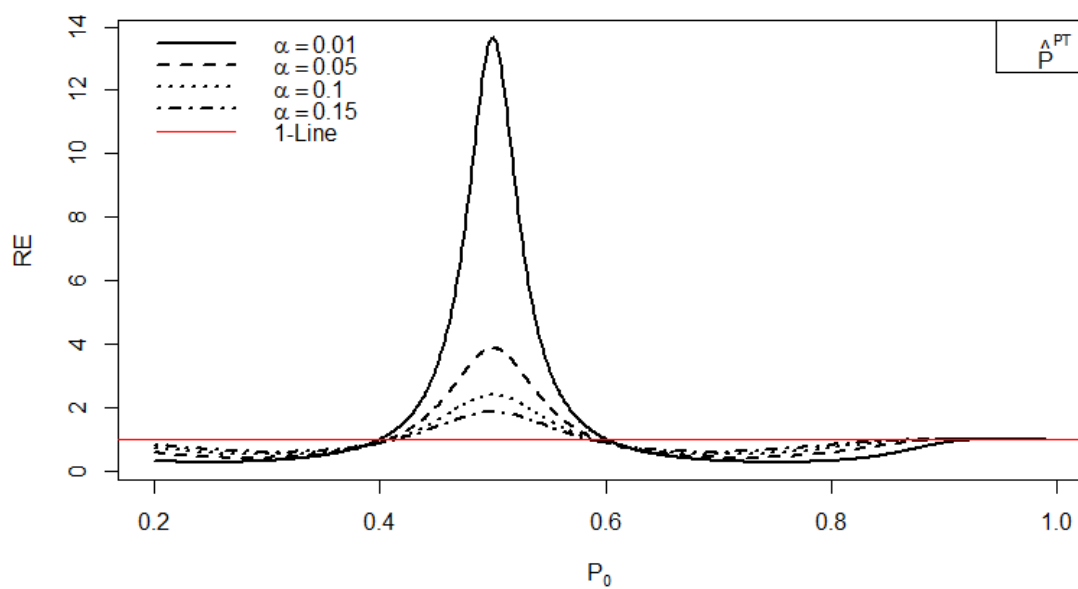
و

$$\begin{aligned} \text{REff}(\hat{P}^{ST}) &= \frac{\text{MSE}(\hat{P})}{\text{MSE}(\hat{P}^{ST})} \\ &= \frac{\psi_2 - 2P\psi_1 + P^2}{\text{MSE}(\hat{P}) + d^2 \left(\frac{m_2}{m_1} \right)^2 \left[\psi(4, 2) - 2P_o\psi(3, 2) + P_o^2\psi(2, 2) \right] - 2d \frac{m_2}{m_1} \left[\psi(3, 1) - (P_o + P)\psi(2, 1) + PP_o\psi(1, 1) \right]}. \end{aligned}$$

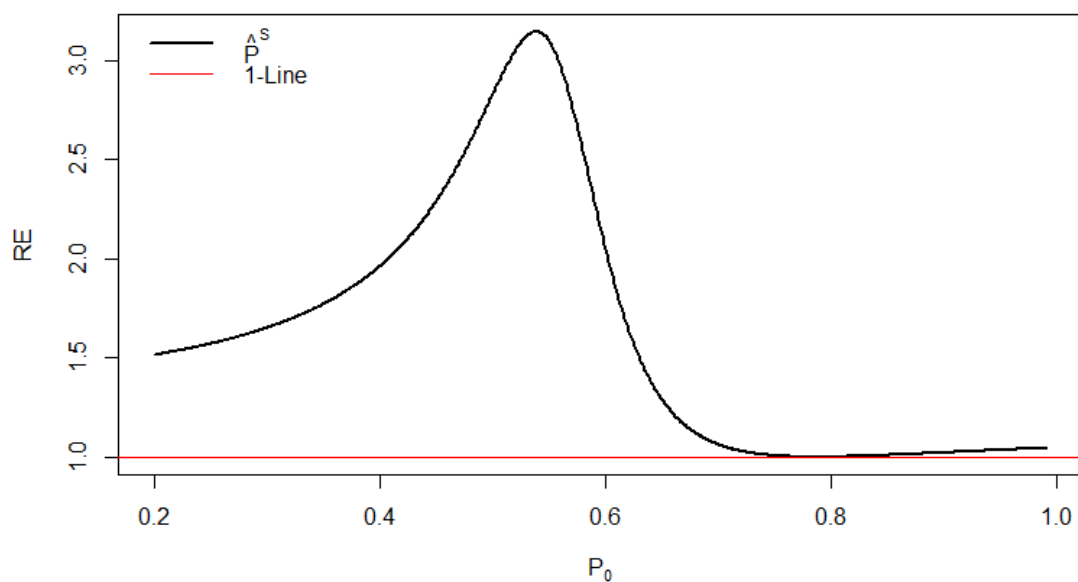
نمودارهای ۳.۴ و ۴.۴ کارائی نسبی برآوردهای PT و ST را در مدل نمائی با پارامتر معلوم $P = 0.5$ را نشان می دهند. با استفاده از این نمودارها، می توان مشاهده کرد که برآوردهای PT در نزدیکی P عملکرد بهتری دارد، و با فاصله گرفتن از آن عملکرد آن کاهش می یابد. اما برآوردهای ST تقریباً همه جا از برآوردهای ML بهتر عمل می کند.

۳.۴ مطالعه شبیه سازی

در اینجا ما یک مطالعه شبیه سازی مونت کارلو با حجم نمونه محدود را برای ارزیابی عملکرد برآوردهای معرفی شده ارائه می دهیم. ترکیب شبیه سازی و مفروضات به شرح زیر هستند:



شکل ۳.۴: کارائی نسبی برآوردگر آزمون اولیه برای $P = 5\%$.



شکل ۴.۴: کارائی نسبی برآوردگر نوع استاین برای $P = 5\%$.

$R(t)$: مقدار واقعی تابع قابلیت اعتماد شامل $\{0/50, 0/55, 0/60, 0/65, 0/70\}$ باشد.
 m : تعداد مشاهدات ۱۰.

λ_0 : از $R_0 = 0/56$ به دست می آید (پیشنهاد قبلی $R(t)$).

$R = (R_1, \dots, R_m)$: طرح سانسور فزاینده‌ی نوع II

$R = (5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 71)$ و $R = (25, 10, 7, 5, 3, 10, 9, 5, 7, 9)$

t : نقطه‌ی زمانی که برش انجام می شود و برابر است با ۳.

برای هر ترکیب R و R_0 ، ۱۰۰۰ نمونه با اندازه‌ی ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ از توزیع (۲.۴) تولید شده با $G(x; a; \theta) = x$. برآوردگرهای هدف $R(t)$ طرح سانسور فزاینده‌ی نوع II محاسبه شده و فواصل اطمینان آنها به دست آمده‌اند. فرض کنید (L, U) فاصله‌ی اطمینان $R(t)$ و (L_i, U_i) ، $i = 1, 2, \dots, 1000$ ، مقادیر مشاهده شده‌ی کران پایین و بالای فاصله اطمینان مورد نظر باشد. جدول‌های ۱.۴ و ۲.۴ احتمال پوشش (C.P.) و فاصله‌ی مورد انتظار (E.L.) برآوردگرهای $R(t)$ تحت طرح سانسور فزاینده‌ی نوع II از یک مدل نمایی را ارائه می کنند. الگوریتم ۳ فواصل اطمینان t -بوت استری‌بی را براساس ایده‌ی افرون (۱۹۸۲) به دست می آورد.

باتوجه به جداول ۱.۴ و ۲.۴ می توان دید که برآوردگرهای هدف تقریباً دارای احتمال پوشش بالایی هستند. مخصوصاً در نزدیکی اطلاع پیشین R_0 ، برآوردگرهای PT و ST همان طوری که انتظار داشتیم دارای C.P. بیشتر و دارای E.L. کوتاهتر هستند. شاخص‌هایی که برای شبیه‌سازی P استفاده شده‌اند به صورت زیر هستند:

P : مقدار واقعی پارامتر $P = P(X > Y)$

از $\{0/5, 0/55, 0/58, 0/6, 0/63, 0/65, 0/68, 0/7, 0/73, 0/75, 0/78, 0/8, 0/85, 0/9\}$ انتخاب شده‌اند.

P_0 : برآورد اولیه‌ی P انتخاب شده است ۰/۷۱.

m_1 : تعداد مشاهدات X برابر ۱۰ انتخاب شده است.

m_2 : تعداد مشاهدات Y برابر ۸ انتخاب شده است.

$R = (R_1, \dots, R_{m_1})$: طرح سانسور فزاینده‌ی نوع II متغیر X به صورت

$R = (25, 10, 7, 5, 3, 10, 9, 5, 7, 9)$ انتخاب شده است.

$R' = (R'_1, \dots, R'_{m_2})$: طرح سانسور فزاینده‌ی نوع II متغیر Y به صورت به صورت $R' =$

$(20, 10, 5, 5, 10, 10, 9, 43)$ انتخاب شده است.

برای هر ترکیب P و P_0 ، ۱۰۰۰ اندازه نمونه $n_1 = 100$ برای X از توزیع (۲.۴) تولید شده است، $\lambda = 0/3$ و $G(x; a_1; \theta_1) = x$ و ۱۰۰۰ نمونه به اندازه‌ی $n_2 = 120$ برای Y از همان توزیع $1 - \frac{1}{P} = \mu$ و $G(y; a_2; \theta_2) = y$ تولید شده است.

برآوردگرهای هدف P تحت سانسور فزاینده‌ی نوع II محاسبه شده و فواصل اطمینان آنها به دست آمده‌اند. الگوریتم ۴ فواصل اطمینان t -بوت استری‌بی را با استفاده از برآوردگرهای هدف برای P به دست می دهد.

نتایج شبیه‌سازی در جدول ۳.۴ ارائه شده‌اند. برخلاف این که برآوردگر آزمون اولیه

برای پارامتر قابلیت اعتماد $R(t)$ دارای عملکرد خوبی بود، در مقایسه این برآوردگر برای پارامتر P عملکرد ضعیفی از خود نشان داد. با این حال می‌توان دید که برآوردگر نوع استاین برای این پارامتر دارای عملکرد نسبتاً خوبی است و بوضوح دارای C.P. بالا و E.L. کوتاهتر نسبت به برآوردگر کلاسیک می‌باشد. از طرفی می‌توان مشاهده کرده که C.P. برآوردگر نوع استاین باوجود این که خیلی زیاد نمی‌شود اما E.L. آن به‌شدت کوتاه‌تر از MLE است. برآوردگر PT تنها دارای فواصل مورد انتظار کوتاهتر در فواصل اطمینان مجانبی است. نمودار ۵.۴، نمودارهای جعبه‌ای برآوردگرهای هدف را در تکرارهای مختلف نشان می‌دهد. همانطور که ملاحظه می‌کنید، برآوردگرها با منحرف شدن از مقدار واقعی پارامتر، اریب می‌شوند.

الگوریتم ۳ فاصله اطمینان t - بوت‌استری برای $R(t)$ براساس واریانس بوت‌استری

- گام ۱. براساس نمونه‌های مشاهده شده مستقل $X_{i:m:n}^{(R_1, R_2, \dots, R_m)}, i = 1, \dots, m$ با طرح سانسور فزاینده‌ی راست نوع II $(R_1, R_2, \dots, R_m)$ ، $\hat{\lambda}$ ، $\hat{R}(t)$ ، $\hat{R}^{PT}(t)$ و $\hat{R}^{ST}(t)$ برآوردگرها به‌ترتیب از (۵.۴)، (۳.۳)، (۱۱.۴) و (۱۲.۴) به‌دست می‌آیند.
- گام ۲. تولید کنید $X_{i:m:n}^* \sim \mathcal{E}(\hat{\lambda}), i = 1, \dots, m$. با استفاده از آنها به‌دست آورید $\hat{\lambda}^*$ ، $\hat{R}^{ST*}(t)$ و $\hat{R}^{PT*}(t)$.
- گام ۳. گام ۲ را برای B مرتبه تکرار کنید و به‌دست بیاورید $\hat{R}_{(b)}^*(t)$ ، $\hat{R}_{(b)}^{PT*}(t)$ و $\hat{R}_{(b)}^{ST*}(t)$ ، $b = 1, \dots, B$.
- گام ۴. برای هر تکرار در مرحله‌ی ۳، روند بوت‌استرپ پارامتری دیگری را جهت برآورد انحراف معیار $\hat{R}_{(b)}^*(t)$ بسازید، و آن را $\hat{\sigma}(\hat{R}_{(b)}^*(t))$ بنامید. هم‌چنین، گام ۲ را برای $b' = 1, \dots, B''$ با $\hat{\lambda}^*$ به‌جای $\hat{\lambda}$ ، تکرار کنید و سپس محاسبه کنید

$$\hat{\sigma}(\hat{R}_{(b)}^*(t)) = \sqrt{\frac{1}{B' - 1} \sum_{b'=1}^{B'} (\hat{R}_{(b')}^{**}(t) - \bar{R}^{**}(t))^2}$$

که در آن $\bar{R}^{**}(t) = \frac{1}{B'} \sum_{b'=1}^{B'} \hat{R}_{(b')}^{**}(t)$.

- گام ۵. فرض کنید $t^* = (t_{(1)}^*, \dots, t_{(B)}^*)^\top$ ، که در آن $t_{(b)}^* = \frac{\hat{R}_{(b)}^*(t) - \hat{R}(t)}{\hat{\sigma}(\hat{R}_{(b)}^*(t))}, b = 1, \dots, B$.
- گام ۶. محاسبه کنید $100(1 - \alpha)\%$ فاصله‌ی اطمینان t - بوت‌استری $R(t)$ طوری که $(\hat{R}(t) - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^* \hat{\sigma}(\hat{R}(t)), \hat{R}(t) - t_{\frac{\alpha}{2}}^* \hat{\sigma}(\hat{R}(t)))$ ، به‌طوری که $t_{\frac{\alpha}{2}}^*$ صدک $100\gamma\%$ ام داده‌شده با استفاده از گام ۵ است. این فرآیند را برای برآوردگرهای دیگر نیز انجام دهید.

الگوریتم ۴ فاصله اطمینان t-بوتاستری برای P براساس واریانس بوتاستری

گام ۱. براساس نمونه‌های مشاهده شده مستقل $X_{i:m_1:n_1}^{(R_1, R_2, \dots, R_{m_1})}$, $i = 1, \dots, m_1$ با طرح سانسور فزاینده‌ی راست نوع II $(R_1, R_2, \dots, R_{m_1})$ و $Y_{j:m_2:n_2}^{(R'_1, R'_2, \dots, R'_{m_2})}$, $j = 1, \dots, m_2$ با طرح سانسور فزاینده‌ی راست نوع II $(R'_1, R'_2, \dots, R'_{m_2})$ $\hat{P}^{ST}$ و $\hat{P}^{PT}$ ، $\hat{P}$ ، $\hat{\mu}$ ، $\hat{\lambda}$ ، $(R'_1, R'_2, \dots, R'_{m_2})$ برآوردها به ترتیب از (۵.۴)، (۸.۴)، (۱۵.۴) و (۱۶.۴) به دست می‌آیند.

گام ۲. تولید کنید $X_{i:m_1:n_1}^* \sim \mathcal{E}(\hat{\lambda})$, $i = 1, \dots, m_1$ و $Y_{j:m_2:n_2}^* \sim \mathcal{E}(\hat{\mu})$, $j = 1, \dots, m_2$ با استفاده از آنها به دست آورید $\hat{\lambda}_1^*$ ، $\hat{\lambda}_2^*$ ، $\hat{P}^*$ و $\hat{P}^{PT*}$ و $\hat{P}^{ST*}$.

گام ۳. گام ۲ را برای B مرتبه تکرار کنید و به دست آورید $\hat{P}_{(b)}^*$ ، $\hat{P}_{(b)}^{PT*}$ و $\hat{P}_{(b)}^{ST*}$ ، $b = 1, \dots, B$.

گام ۴. برای هر تکرار در مرحله‌ی ۳، روند بوتاسترپ پارامتری دیگری را جهت برآورد انحراف معیار $\hat{R}_{(b)}^*(t)$ ، بنامید $\hat{\sigma}(\hat{P}_{(b)}^*(t))$. از طرفی، گام ۲ را برای $b' = 1, \dots, B''$ با $\hat{\lambda}_1^*$ و $\hat{\lambda}_2^*$ به جای $\hat{\lambda}$ و $\hat{\mu}$ ، تولید کنید و سپس محاسبه کنید

$$\hat{\sigma}(\hat{P}_{(b)}^*) = \sqrt{\frac{1}{B' - 1} \sum_{b'=1}^{B'} (\hat{P}_{(b')}^{**} - \bar{P}^{**})^2},$$

که در آن $\bar{P}^{**} = \frac{1}{B'} \sum_{b'=1}^{B'} \hat{P}_{(b')}^{**}$.

گام ۵. فرض کنید $t^* = (t_{(1)}^*, \dots, t_{(B)}^*)^\top$ که در آن $t_{(b)}^* = \frac{\hat{P}_{(b)}^* - \hat{P}}{\hat{\sigma}(\hat{P}_{(b)}^*)}$ ، $b = 1, \dots, B$.

گام ۶. محاسبه کنید $100(1 - \alpha)\%$ فاصله‌ی اطمینان t-بوتاستری برای P طوری که $(\hat{P} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}^* \hat{\sigma}(\hat{P}), \hat{P} - t_{\frac{\alpha}{2}}^* \hat{\sigma}(\hat{P}))$ که در آن فرآیند را برای بقیه برآوردها نیز تکرار کنید.

جدول ۱.۴: C.P. و E.L. برای $R(t)$ با $R_o = 0/56$ ، $R = (25, 10, 7, 5, 3, 10, 9, 5, 7)$ ، و

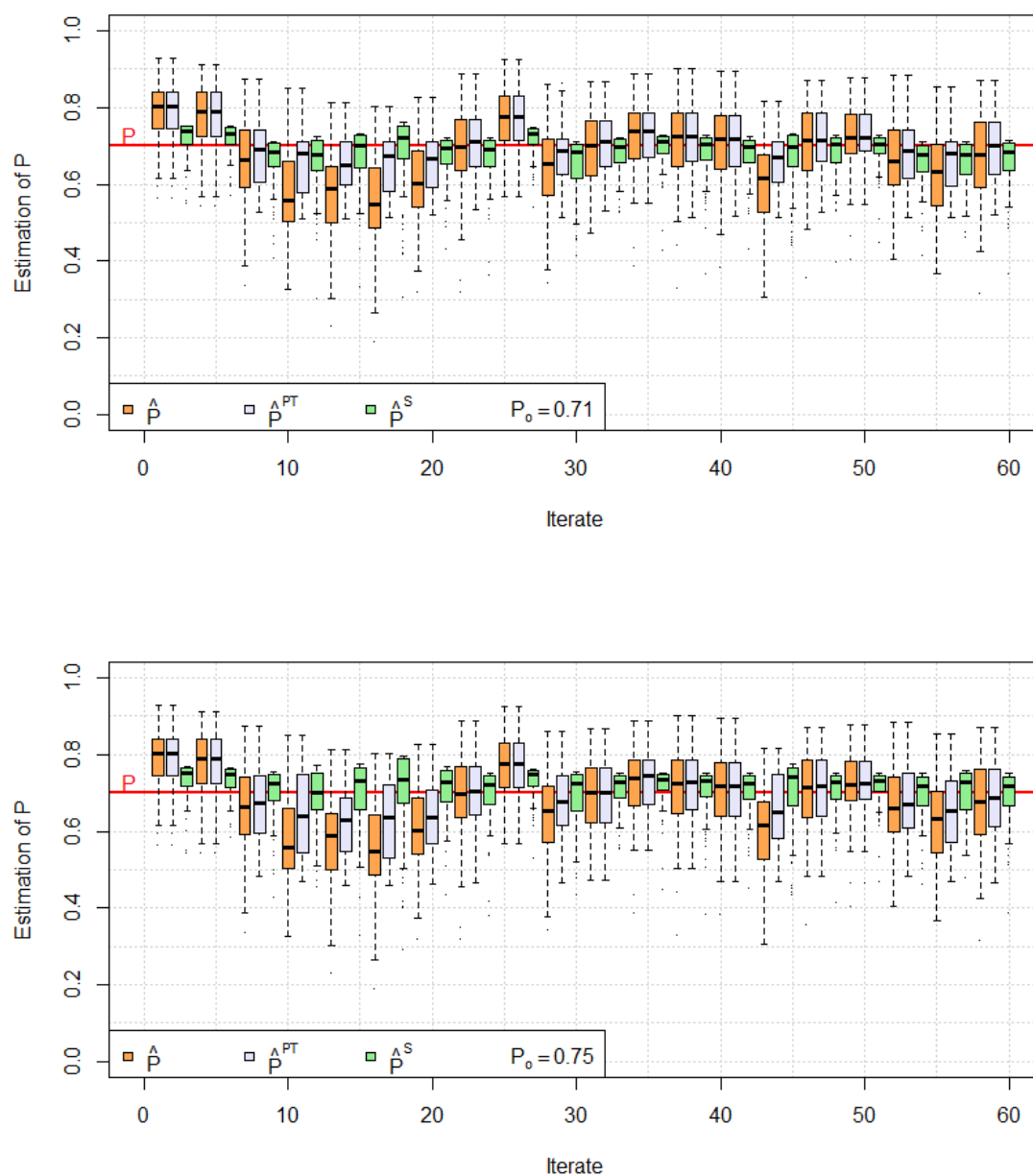
$n = 100, 200$.

$\hat{R}^{ST}(t)$ E.L.	$\hat{R}^{ST}(t)$ C.P.	$\hat{R}^{PT}(t)$ E.L.	$\hat{R}^{PT}(t)$ C.P.	$\hat{R}(t)$ E.L.	$\hat{R}(t)$ C.P.	n	$R(t)$	
0/140	0/980	0/260	0/960	0/340	0/860	100	0/550	۱
0/150	1/000	0/280	0/980	0/340	0/880	200	0/550	۲
0/160	0/980	0/270	0/960	0/330	0/860	100	0/600	۳
0/150	0/970	0/270	0/980	0/330	0/860	200	0/600	۴
0/170	0/840	0/270	0/830	0/320	0/870	100	0/650	۵
0/160	0/820	0/260	0/810	0/310	0/880	200	0/650	۶
0/190	0/750	0/290	0/760	0/280	0/910	100	0/700	۷
0/200	0/740	0/290	0/730	0/290	0/900	200	0/700	۸

جدول ۲.۴: C.P. و E.L. برای $R(t)$ با $R_o = 0/56$ ، $R = (5, 4, 3, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$ ، و

$n = 50, 100$.

$\hat{R}^{ST}(t)$ E.L.	$\hat{R}^{ST}(t)$ C.P.	$\hat{R}^{PT}(t)$ E.L.	$\hat{R}^{PT}(t)$ C.P.	$\hat{R}(t)$ E.L.	$\hat{R}(t)$ C.P.	n	$R(t)$	
0/160	0/990	0/280	0/950	0/350	0/870	50	0/550	۱
0/150	1/000	0/280	0/950	0/340	0/860	100	0/550	۲
0/150	0/940	0/270	0/970	0/330	0/880	50	0/600	۳
0/150	0/980	0/260	0/940	0/330	0/880	100	0/600	۴
0/170	0/840	0/270	0/860	0/320	0/880	50	0/650	۵
0/170	0/820	0/270	0/840	0/310	0/900	100	0/650	۶
0/190	0/760	0/290	0/770	0/280	0/920	50	0/700	۷
0/210	0/770	0/300	0/760	0/280	0/880	100	0/700	۸



شکل ۵.۴: نمودارهای جعبه‌ای 10^6 نمونه‌ی بوت‌استری برای تکرارهای مختلف شبیه‌سازی شده.

جدول ۳.۴: C.P. و E.L. برای P با $P_o = 0.71$

$\hat{P}^{ST}$				$\hat{P}^{PT}$				$\hat{P}$					
مجانبی		بوت		مجانبی		بوت		مجانبی		بوت			
E.L.	C.P.	E.L.	C.P.	E.L.	C.P.	E.L.	C.P.	E.L.	C.P.	E.L.	C.P.	P	
0.430	0.950	0.460	0.980	0.580	0.950	0.530	0.810	0.450	0.950	0.560	0.990	0.50	۱
0.380	0.970	0.450	0.980	0.470	0.840	0.520	0.740	0.450	0.950	0.560	۱.000	0.55	۲
0.330	0.970	0.440	0.990	0.370	0.760	0.510	0.670	0.440	0.960	0.550	0.990	0.58	۳
0.300	0.960	0.440	0.990	0.320	0.680	0.510	0.660	0.440	0.950	0.540	۱.000	0.60	۴
0.270	0.960	0.430	0.990	0.240	0.600	0.500	0.740	0.430	0.960	0.520	0.990	0.63	۵
0.260	0.950	0.420	0.990	0.230	0.600	0.490	0.740	0.420	0.960	0.510	0.990	0.65	۶
0.240	0.930	0.400	0.980	0.200	0.540	0.480	0.770	0.400	0.940	0.490	0.980	0.68	۷
0.230	0.900	0.390	0.960	0.190	0.520	0.470	0.830	0.390	0.940	0.470	0.990	0.70	۸
0.230	0.900	0.370	0.960	0.180	0.520	0.450	0.880	0.370	0.950	0.450	0.980	0.73	۹
0.220	0.890	0.350	0.960	0.190	0.510	0.440	0.890	0.350	0.950	0.420	0.980	0.75	۱0
0.220	0.890	0.330	0.950	0.180	0.510	0.410	0.930	0.330	0.950	0.390	0.980	0.78	۱۱
0.220	0.900	0.310	0.940	0.180	0.480	0.390	0.930	0.310	0.940	0.360	0.970	0.80	۱۲
0.200	0.900	0.250	0.940	0.170	0.550	0.310	0.970	0.250	0.940	0.290	0.950	0.85	۱۳
0.160	0.910	0.180	0.930	0.140	0.630	0.220	0.970	0.180	0.930	0.210	0.930	0.90	۱۴

۴.۴ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش عملکرد برآوردگرهای هدف را با استفاده از دو مجموعه‌ی داده‌ی واقعی بررسی می‌کنیم. اولین داده جهت برآورد $R(t)$ و دومی برای برآورد P استفاده می‌شود.

۱.۴.۴ زمان از کارافتادگی مایع عایق بین الکترودها

داده‌های سانسور فزاینده مثال ۲.۷.۱ مربوط به زمان از کارافتادگی مایع عایق بین الکترودها در فصل اول را در نظر می‌گیریم. چاتورودی و ویاس (۲۰۱۷) با استفاده از آزمون کلموگروف اسمیرنوف و هم‌چنین آزمون کی-دو نشان دادند که توزیع وایبول برای زمان از کارافتادگی در سطح ولتاژ تثبیت شده مناسب است. برآوردگر ML پارامترهای توزیع وایبول به‌دست می‌آیند، $\hat{p} = 0.7708$ ، $\hat{\lambda} = 6/8865$. بنابراین $\hat{R}(t)|_{t=2} = 0.7488538$. از طرفی آنها، $\hat{R}(t)|_{t=2} = 0.7041$ را با استفاده از مقادیر رکورد بالا برآورد کردند. در این مطالعه، ما از این برآورد به عنوان پیشنهاد نقطه‌ای پیشین R_o برابر 0.7041 استفاده می‌کنیم. با در دست داشتن این مقدار برآوردگرهای نتیجه شده در جدول ۴.۴ به‌دست می‌آیند. به‌وضوح با توجه معیارهای واریانس برآوردگرها و فواصل اطمینان ملاحظه می‌شود که برآوردگرهای بهبود یافته از برآوردگر کلاسیک ML بهتر عمل می‌کنند.

جدول ۴.۴: برآوردگرهای $R(t)$ در داده‌های از کارافتادگی مایع عایق با $\hat{R}_0|_{t=2} = 0.7041$.

$\alpha = 0.05$	مقدار برآورد شده	واریانس	فاصله اطمینان بوت‌استری با $B = 200$	فاصله اطمینان مجانبی
$\hat{R}(t)$	0.7041	0.006701088	(0.5949170, 0.8605708)	(0.5884109, 0.9092968)
$\hat{R}^{PT}(t)$	0.7041	0.002431053	(0.6879486, 0.7284052)	(0.6074626, 0.8007374)
$\hat{R}^{ST}(t)$	0.7330892	0.001514806	(0.6942110, 0.9185559)	(0.6568064, 0.8093720)

جدول ۵.۴: برآوردگرهای P برای داده‌های الیاف با پیشنهاد قبلی $P_0 = 0.1788$.

$\alpha = 0.05$	مقدار برآورد شده	فاصله اطمینان مجانبی	فاصله اطمینان بوت‌استری
$\hat{P}$	0.17671507	(0.01563388, 0.33779626)	(0.13115461, 0.25359099)
$\hat{P}^{PT}$	0.17880000	(0.02059383, 0.33700617)	(0.17795744, 0.24715032)
$\hat{P}^{ST}$	0.17779473	(0.10370406, 0.25188540)	(0.16520507, 0.19418754)

۲.۴.۴ تنش-مقاومت فیبرهای کربنی

در این بخش داده‌های گزارش شده توسط بدر و پریست (۱۹۸۲) که در مثال ۳.۷.۱ در فصل اول ارائه شد را تحلیل می‌کنیم. این داده‌ها نشان دهنده مقاومت اندازه‌گیری شده در GPA برای الیاف تک کربن و پنبه فیبر ۱۰۰۰ کربن آغشته شده، می‌باشند. الیاف تک تحت آزمون کشش در اندازه طول‌های 20mm (مجموعه داده ۱) و 10mm (مجموعه داده ۲) به ترتیب با حجم نمونه ۶۹ و ۶۳ قرار گرفتند. کوندو و گوبتا (۲۰۰۶) این مجموعه داده‌ها را پس از کم کردن ۰.۷۵ از کل این مجموعه داده‌ها، با استفاده از توزیع وایبول دو پارامتری، مورد بررسی قرار دادند. پس از کم کردن ۰.۷۵ از کل نقاط این مجموعه داده‌ها، مشاهده کردند که توزیع‌های وایبول با پارامترهای شکل مساوی به این داده‌ها بخوبی برازش می‌یابند. برآوردگرهای ML پارامترهای توزیع وایبول برازش شده به داده‌های مجموعه ۱ به ترتیب عبارتند از $\hat{\lambda} = 0.0046$ و $\hat{p}_1 = 5/5049$. متشابهاً، برای مجموعه داده‌ی ۲ داریم، $\hat{\mu} = 0.0023$ و $\hat{p}_2 = 5/0494$. برای مقایسه‌ی نتایج، ما از نمونه‌ی سانسور فزاینده‌ی مختلف استفاده می‌کنیم که با استفاده از طرح‌های نمونه‌ای مختلف سانسور فزاینده ارائه شده در جدول ۴.۱ که توسط اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۱) به دست آمده‌اند، استفاده می‌کنیم.

از مقدار $P_0 = 0.1788$ ، که توسط اصغرزاده و همکاران (۲۰۱۱) محاسبه شده است، به عنوان اطلاع پیشین استفاده کرده و برآوردگرهای هدف و فواصل اطمینان آنها را به دست آورده و به صورت خلاصه در جدول ۵.۴ ارائه کرده‌ایم. از جدول ۵.۴ می‌توان مشاهده کرد که طول فاصله‌ی اطمینان (هر دو نوع فاصله‌ی اطمینان مجانبی و بوت‌استری) برآوردگرهای بهبود یافته کوتاه‌تر هستند.

۵.۴ نتیجه‌گیری

در این فصل، ما درباره‌ی شاخص‌های قابلیت اعتماد $R(t)$ پارامتر و P در نمونه‌های سانسور فزاینده در یک خانواده از توزیع‌های طول عمر بحث کردیم. با استفاده از گمان پیشین در مورد پارامترها، برآوردهای بهبود یافته را که برآوردهای آزمون اولیه و نوع استاین نامیدیم، توسعه دادیم. مثال‌های عددی عملکرد بهتر برآوردهای بهبود یافته را حول اطلاع پیشین نسبت به برآوردهای کلاسیک ML نشان دادند. به‌ویژه این که برآوردهای نوع استاین در همه‌ی سناریوها دارای عملکرد خیلی خوبی هستند.

فصل ۵

پیشنهادهای برای پژوهش‌های آینده

- در تمامی مباحث این رساله می‌توان برآوردگرهای رهیافت بیزی را نیز در نظر گرفته و با برآوردگرهای انقباضی مطرح شده مقایسه نمود.
- می‌توان نتایج را برای حالت ناپارامتری تعمیم داد. برای اطلاعات بیشتر به مقاله‌ی مهدی‌زاده و زمان‌زاده (۲۰۱۸) مراجعه کنید.
- می‌توان برآوردگر انقباضی کلی

$$\hat{P}^{Shrinkage} = \hat{P} + g(\hat{P})$$

- را که در آن g یک تابع اندازه‌پذیر برل است، به کار برده و نتایج را تحلیل کرد.
- برآوردگرهای بهبود یافته‌ی شاخص‌های قابلیت اعتماد را برای نمونه‌های مجموعه رتبه‌دار با توزیع نمائی تعمیم یافته‌ی $\mathcal{CN}(a, \lambda, \theta, G)$ به دست آورد.

پیوست آ

اثبات قضایا

در این فصل به اختصار به اثبات قضایایی که در فصل‌های ۲، ۳ و ۴ ارائه شده‌اند، می‌پردازیم.

۱.آ اثبات قضایای فصل دوم

در این بخش اثبات قضایای فصل دوم را ارائه می‌کنیم:

اثبات قضیه ۱.۱.۲: با استفاده از چن و همکاران (۲۰۰۳)، زمانی که $r, k \rightarrow \infty$ ، $\sqrt{kn}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(\circ, \sigma_\lambda^2)$ و $\sqrt{rm}(\hat{\mu} - \mu) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(\circ, \sigma_\mu^2)$ که در آن $\sigma_\lambda^2 = -kn/E\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \log L(\lambda, \underline{y})\right)$ و $\sigma_\mu^2 = -rm/E\left(\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \log L(\mu, \underline{x})\right)$ چون محاسبات مقادیر امید ریاضی طولانی هستند، ما تنها یک مورد را ارائه می‌کنیم و بقیه شبیه آن هستند. بنابراین برای محاسبه $E\left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \log L(\lambda, \underline{y})\right)$ داریم

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \log L(\lambda, \underline{y}) = \frac{-kn}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (n-i+1) y_{ij} - \frac{1}{\lambda^2} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \frac{(i-1) y_{ij}}{e^{y_{ij}/\lambda} - 1}. \quad (1. \bar{A})$$

با استفاده از معادله ی (۱.۴)، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \log L(\lambda, \underline{y}) &= \frac{kn}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (n-i+1) y_{ij} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^4} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \frac{(i-1) y_{ij}}{(e^{y_{ij}/\lambda} - 1)^2} \left[2\lambda (e^{y_{ij}/\lambda} - 1) - y_{ij} e^{y_{ij}/\lambda} \right] \\ &= \frac{kn}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^3} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (n-i+1) y_{ij} + \frac{2}{\lambda^3} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \frac{(i-1) y_{ij}}{e^{y_{ij}/\lambda} - 1} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda^4} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (i-1) y_{ij}^2 \left(\frac{1}{e^{y_{ij}/\lambda} - 1} - \frac{1}{(e^{y_{ij}/\lambda} - 1)^2} \right). \quad (2.1) \end{aligned}$$

مقدار امید ریاضی عبارت در معادله ی (۲.۴) به صورت زیر به دست می آید

$$\begin{aligned} E \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \log L(\lambda, \underline{y}) \right) &= \frac{kn}{\lambda^2} - \frac{kn(n+2)}{2\lambda^2} \\ &\quad + \frac{2}{\lambda^2} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n (i-1) c_{n,i}^* \left(\sum_{u=0}^{i-2} c_{iu} - \sum_{v=0}^{i-2} c_{iv} - \sum_{s=0}^{i-2} c_{is} \right) \quad (3.1) \end{aligned}$$

که در آن $c_{is} = 0$ $c_{iv} = \frac{\binom{i-2}{v} (-1)^{i-2-v}}{(n-v)^2}$ $c_{iu} = \frac{\binom{i-2}{u} (-1)^{i-2-u}}{(n-u)^2}$ $c_{n,i}^* = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}$ $\frac{\binom{i-2}{s} (-1)^{i-2-s}}{(n-s)^2}$ توجه کنید.

$$\begin{aligned} E \left(\frac{Y_{ij}}{\exp \left(\frac{Y_{ij}}{\lambda} \right) - 1} \right) &= \int_0^\infty \frac{y_{ij}}{\exp \left(\frac{y_{ij}}{\lambda} \right) - 1} g_i(y_{ij}) dy_{ij} \\ &= \frac{c_{n,i}^*}{\lambda} \int_0^\infty \left(1 - e^{-y_{ij}/\lambda} \right)^{i-2} e^{-(n-i+2)y_{ij}/\lambda} dy_{ij} \\ &= \frac{c_{n,i}^*}{\lambda} \sum_{u=0}^{i-2} \binom{i-2}{u} (-1)^{i-2-u} \int_0^\infty y_{ij} e^{-(n-u)y_{ij}/\lambda} dy_{ij} \\ &= c_{n,i}^* \lambda \sum_{u=0}^{i-2} c_{iu}, \quad (4.1) \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} E \left(\frac{Y_{ij}^2}{\exp \left(\frac{Y_{ij}}{\lambda} \right) - 1} \right) &= \int_0^\infty \frac{y_{ij}^2}{\exp \left(\frac{y_{ij}}{\lambda} \right) - 1} g_i(y_{ij}) dy_{ij} \\ &= \frac{c_{n,i}^*}{\lambda} \sum_{v=0}^{i-2} \binom{i-2}{v} (-1)^{i-2-v} \int_0^\infty y_{ij}^2 e^{-(n-v)y_{ij}/\lambda} dy_{ij} \\ &= 2 c_{n,i}^* \lambda^2 \sum_{v=0}^{i-2} c_{iv}, \quad (5.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \left(\frac{Y_{ij}^{\mathfrak{r}}}{\left(\exp \left(\frac{Y_{ij}}{\lambda} \right) - 1 \right)^{\mathfrak{r}}} \right) &= \int_0^\infty \frac{y_{ij}^{\mathfrak{r}}}{\left(\exp \left(\frac{y_{ij}}{\lambda} \right) - 1 \right)^{\mathfrak{r}}} g_i(y_{ij}) dy_{ij} \\
&= \frac{c_{n,i}^*}{\lambda} \sum_{s=0}^{i-\mathfrak{r}} \binom{i-\mathfrak{r}}{s} (-1)^{i-\mathfrak{r}-s} \int_0^\infty y_{ij}^{\mathfrak{r}} e^{-(n-s)y_{ij}/\lambda} dy_{ij} \\
&= \mathfrak{r} c_{n,i}^* \lambda^{\mathfrak{r}} \sum_{s=0}^{i-\mathfrak{r}} c_{is}. \tag{۶.آ}
\end{aligned}$$

همچنین داریم

$$\sum_{i=\mathfrak{r}}^n \sum_{u=0}^{i-\mathfrak{r}} \frac{\binom{i-\mathfrak{r}}{u} (-1)^{i-\mathfrak{r}-u}}{(n-u)^{\mathfrak{r}}} \frac{n!(i-1)}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{1}{\mathfrak{r}} n(n-1), \tag{۷.آ}$$

$$\sum_{i=\mathfrak{r}}^n \sum_{v=0}^{i-\mathfrak{r}} \frac{\binom{i-\mathfrak{r}}{v} (-1)^{i-\mathfrak{r}-v}}{(n-v)^{\mathfrak{r}}} \frac{n!(i-1)}{(i-1)!(n-i)!} = \frac{1}{\lambda} n(n-1), \tag{۸.آ}$$

$$\sum_{i=\mathfrak{r}}^n \sum_{s=0}^{i-\mathfrak{r}} \frac{\binom{i-\mathfrak{r}}{s} (-1)^{i-\mathfrak{r}-s}}{(n-s)^{\mathfrak{r}}} \frac{n!(i-1)}{(i-1)!(n-i)!} = n(n-1)C_n, \tag{۹.آ}$$

که در آن $C_n = \sum_{i=\mathfrak{r}}^n \sum_{s=0}^{i-\mathfrak{r}} \frac{\binom{i-\mathfrak{r}}{s} \binom{n-\mathfrak{r}}{i-\mathfrak{r}} (-1)^{i-\mathfrak{r}-s}}{(n-s)^{\mathfrak{r}}}$. تکنیک اثبات این عبارتها با استفاده از تعویض مجموعها می باشد. برای نمونه در عبارت اول داریم

$$\begin{aligned}
\mathfrak{r} &\leq i \leq n \\
0 &\leq u \leq i - \mathfrak{r} \\
\mathfrak{r} &\leq i \leq n \\
\mathfrak{r} &\leq u + \mathfrak{r} \leq i \leq n \\
0 &\leq u \leq n - \mathfrak{r} \\
u + \mathfrak{r} &\leq i \leq n
\end{aligned}$$

بنابراین خواهیم داشت

$$\begin{aligned}
&\sum_{u=0}^{n-\mathfrak{r}} \sum_{i=u+\mathfrak{r}}^n \frac{\binom{i-\mathfrak{r}}{u} (-1)^{i-\mathfrak{r}-u}}{(n-u)^{\mathfrak{r}}} \frac{n!(i-1)}{(i-1)!(n-i)!} \\
&= \sum_{u=0}^{n-\mathfrak{r}} \frac{n(n-1)}{(n-u)^{\mathfrak{r}}} \sum_{i=u+\mathfrak{r}}^n (-1)^{i-\mathfrak{r}-u} \binom{n-\mathfrak{r}}{i-\mathfrak{r}} \binom{i-\mathfrak{r}}{u} \\
&= n(n-1) \sum_{u=0}^{n-\mathfrak{r}} \frac{1}{(n-u)^{\mathfrak{r}}} \sum_{i=u}^{n-\mathfrak{r}} (-1)^{i-u} \binom{i}{u} \binom{n-\mathfrak{r}}{i} \\
&= n(n-1) \sum_{u=0}^{n-\mathfrak{r}} \frac{1}{(n-u)^{\mathfrak{r}}} \sum_{k=0}^{n-\mathfrak{r}-u} (-1)^k \binom{i}{u} \binom{n-\mathfrak{r}-u}{k}
\end{aligned}$$

که به غیر از به ازای $u = n - 2$ بقیه صفر هستند. بنابراین

$$= \frac{n(n-1)}{(n-(n-2))^2} = \frac{n(n-1)}{4}.$$

با جایگذاری معادلات (۴.آ) - (۹.آ) در معادله (۳.آ)، نتیجه به دست می آید.

اثبات لم ۱.۱.۲: به آسانی نتیجه می گیریم

$$\sqrt{rm} \begin{pmatrix} \hat{\mu} - \mu \\ \hat{\lambda} - \lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}_2 \left(\begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\mu^2}{\frac{m+2}{4} + 2(m-1)C_m} & \circ \\ \circ & \frac{\lambda^2}{p(\frac{n+2}{4} + 2(n-1)C_n)} \end{pmatrix} \right).$$

بنابراین در نظر بگیرید $g(t_1, t_2) = \frac{t_2}{t_1 + t_2}$ و سپس با اعمال ساده‌ی روش دلتای چندمتغیره [برای مطالعه‌ی بیشتر به کتاب واسرمن (۲۰۰۶، صفحه‌ی ۵-۶) مراجعه کنید.]

$$(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}) = (g(\hat{\mu}_{\text{MMRSS}}, \hat{\lambda}_{\text{MMRSS}})) - g(\mu, \lambda) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\circ, \omega^2).$$

اثبات لم ۱.۲.۲: چون $\omega \xrightarrow{\mathcal{P}} \hat{\omega}$ ، با استفاده از قضیه اسلاتسکی در لم ۱.۱.۲، تحت فرض صفر $\frac{\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o}{\hat{\omega}} \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\circ, 1)$ ، نتیجه می شود.

اثبات قضیه‌ی ۱.۲.۲: تحت A_δ ، با توجه به این که همگرایی در l^2 همگرایی در احتمال را نیز ایجاب می کند، بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} \lim_{rm \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[rm \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{PT} - \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} \right)^2 \right] &= \lim_{rm \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[rm \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right)^2 I(L_r < c_\alpha) \right] \\ &= \lim_{rm \rightarrow \infty} \left\{ v^2 \mathbb{E} [L_r I(L_r < c_\alpha)] \right\} \\ &\leq v^2 \chi_1^2(\alpha) \lim_{rm \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[I(L_r < \chi_1^2(\alpha)) \right] = \circ. \end{aligned}$$

چون $L_r \rightarrow \infty$ زمانی که $rm \rightarrow \infty$ ، بنابراین (i) اثبات می شود. متشابهاً،

$$\lim_{rm \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[rm \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^S - \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} \right)^2 \right] = \lim_{rm \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{d^2 \hat{v}^2 \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right)^2}{rm \left| \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right|^2} \right] = \circ.$$

بنابراین (ii) اثبات می شود.

اثبات قضیه‌ی ۳.۲.۲: برای $b_1(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}) = B_1(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}) = \circ$ اثبات واضح است. توجه کنید $b_2(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{PT})$.

$$\begin{aligned} b_2(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{PT}) &= \lim_{rm \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sqrt{rm} \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{PT} - \mathcal{R} \right) \\ &= \lim_{rm \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sqrt{rm} \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right) I(A) - \mathcal{R} \right) \\ &= - \lim_{rm \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sqrt{rm} \left(\frac{\left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right)}{v} v I(L_r < c_\alpha) \right) \\ &= -v \mathbb{E} I(Z^2 < c_\alpha) = -\delta H_2(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2). \end{aligned}$$

بنابراین، $B_{\Psi}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{PT}) = \delta^{\Psi} [H_{\Psi}(\chi_{\Psi}^{\Psi}(\alpha), \Delta^{\Psi})]^{\Psi}$ ، متشابهاً،

$$\begin{aligned} b_{\Psi}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^S) &= \lim_{rm \rightarrow \infty} E\sqrt{rm} \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \frac{d\hat{\nu}}{\sqrt{rm}} \frac{(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o)}{|\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o|} - \mathcal{R} \right) \\ &= \lim_{rm \rightarrow \infty} E\sqrt{rm} (\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}) \\ &\quad - \lim_{rm \rightarrow \infty} E\sqrt{rm} \left(\frac{d\hat{\nu}}{\sqrt{rm}} \frac{(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o)}{|\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o|} \right) \\ &= -dvE\left(\frac{Z}{|Z|}\right) = -dv(\Psi\Phi(\Delta) - 1), \quad Z \sim \mathcal{N}(\Delta, 1). \end{aligned}$$

بنابراین، $B_{\Psi}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^S) = d^{\Psi} v^{\Psi} (\Psi\Phi(\Delta) - 1)^{\Psi}$ ، در نهایت، برای مورد (۳) می‌توان تکنیک‌های بالا را به کار برد و نتیجه را به دست آورد.

اثبات قضیه ۴.۲.۲: با تعریف

$$\begin{aligned} M_1(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}) &= \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R})^{\Psi} = \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm} \frac{(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R})^{\Psi}}{v^{\Psi}} v^{\Psi} \\ &= \lim_{rm \rightarrow \infty} EZ^{\Psi} v^{\Psi} = v^{\Psi}. \end{aligned}$$

چون با توجه به **۱.۱.۲** متغیر Z دارای توزیع نرمال استاندارد است. در ادامه، توجه کنید

$$\begin{aligned} M_{\Psi}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{PT}) &= \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{PT} - \mathcal{R})^{\Psi} \\ &= \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R})^{\Psi} + \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o)^{\Psi} I(A) \\ &\quad - \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}) (\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o) I(A) \\ &= v^{\Psi} + \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm} \frac{(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o)^{\Psi}}{v^{\Psi}} v^{\Psi} I(A) \\ &\quad - \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o + \mathcal{R}_o - \mathcal{R}) (\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o) I(A) \\ &\quad + \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm}(\mathcal{R} - \mathcal{R}_o) (\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o) I(L_r < c_{\alpha}) \\ &= v^{\Psi} + v^{\Psi} E(Z^{\Psi} I(Z^{\Psi} < c_{\alpha})) - \Psi v^{\Psi} (Z^{\Psi} I(Z^{\Psi} < c_{\alpha})) \\ &\quad + \Psi \delta v E(Z I(Z^{\Psi} < c_{\alpha})) \\ &= v^{\Psi} \left\{ 1 - H_{\Psi}(\chi_{\Psi}^{\Psi}(\alpha), \Delta^{\Psi}) \right. \\ &\quad \left. + \Delta^{\Psi} [\Psi H_{\Psi}(\chi_{\Psi}^{\Psi}(\alpha), \Delta^{\Psi}) - H_{\Delta}(\chi_{\Psi}^{\Psi}(\alpha), \Delta^{\Psi})] \right\}. \end{aligned}$$

$$M_{\Psi}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{SPT}) = \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm}(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^{SPT} - \mathcal{R})^{\Psi}$$

$$\begin{aligned}
 &= v^{\gamma} + (1 - \eta)^{\gamma} v^{\gamma} \left(H_{\gamma} \left(\chi_{\gamma}^{\gamma}(\alpha), \Delta^{\gamma} \right) + \Delta^{\gamma} H_{\delta} \left(\chi_{\gamma}^{\gamma}(\alpha), \Delta^{\gamma} \right) \right) \\
 &- \gamma (1 - \eta) v^{\gamma} \left(H_{\gamma} \left(\chi_{\gamma}^{\gamma}(\alpha), \Delta^{\gamma} \right) + \Delta^{\gamma} H_{\delta} \left(\chi_{\gamma}^{\gamma}(\alpha), \Delta^{\gamma} \right) \right) \\
 &+ \gamma (1 - \eta) v^{\gamma} \Delta^{\gamma} H_{\gamma} \left(\chi_{\gamma}^{\gamma}(\alpha), \Delta^{\gamma} \right) \\
 &= v^{\gamma} \left\{ 1 - (1 - \eta)^{\gamma} H_{\gamma} \left(\chi_{\gamma}^{\gamma}(\alpha), \Delta^{\gamma} \right) \right. \\
 &+ (1 - \eta) \Delta^{\gamma} \left[\gamma H_{\gamma} \left(\chi_{\gamma}^{\gamma}(\alpha), \Delta^{\gamma} \right) - (1 + \eta) H_{\delta} \left(\chi_{\gamma}^{\gamma}(\alpha), \Delta^{\gamma} \right) \right] \left. \right\} .
 \end{aligned}$$

در نهایت،

$$\begin{aligned}
 M_{\gamma} \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}}^S \right) &= \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm} \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \frac{d\hat{v}}{\sqrt{rm}} \frac{\left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right)}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right|} - \mathcal{R} \right)^{\gamma} \\
 &= \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm} \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R} \right)^{\gamma} + \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm} \frac{d^{\gamma} \hat{v}^{\gamma} \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right)}{rm \left| \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right|^{\gamma}} \\
 &\quad - \gamma \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{Erm} \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R} \right) \frac{d\hat{v}}{\sqrt{rm}} \frac{\left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right)}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right|} \\
 &= v^{\gamma} + d^{\gamma} v^{\gamma} \\
 &\quad - \gamma \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{E}\sqrt{rm} \left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o + \mathcal{R}_o - \mathcal{R} \right) \frac{d\hat{v}}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right|} \frac{\left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right)}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right|} \\
 &= v^{\gamma} + d^{\gamma} v^{\gamma} - \gamma \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{E}\sqrt{rm} \frac{d\hat{v}}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right|} \frac{\left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right)}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right|} \\
 &\quad - \lim_{rm \rightarrow \infty} \text{E}\sqrt{rm} (\mathcal{R}_o - \mathcal{R}) \frac{d\hat{v}}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right|} \frac{\left(\hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right)}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{\text{MMRSS}} - \mathcal{R}_o \right|} \\
 &= v^{\gamma} + d^{\gamma} v^{\gamma} - \gamma d v^{\gamma} \left(\text{E} |Z| - \Delta \text{E} \left(\frac{Z}{|Z|} \right) \right) \\
 &= v^{\gamma} + d^{\gamma} v^{\gamma} - \gamma d v^{\gamma} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} e^{-\frac{\Delta^{\gamma}}{\gamma}} \\
 &= v^{\gamma} \left[1 + d^{\gamma} - \gamma d \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} e^{-\frac{\Delta^{\gamma}}{\gamma}} \right]
 \end{aligned}$$

۲.آ اثبات قضایای فصل سوم

اثبات قضیه ۱.۲.۳:

تحت A_δ ، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[N \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT} - \hat{\mathcal{R}} \right)^2 \right] &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[N \left(\hat{\mathcal{R}} - \mathcal{R}_o \right)^2 I(T_N < c_\alpha) \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ v^2 E [T_N I(T_N < c_\alpha)] \right\} \\ &= v^2 \lim_{N \rightarrow \infty} E [T_N I(T_N < c_\alpha)] \\ &\leq v^2 \chi_1^2(\alpha) \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[I(T_N < \chi_1^2(\alpha)) \right] = 0. \end{aligned}$$

چون $T_N \rightarrow \infty$ زمانی که $N \rightarrow \infty$. بنابراین (i) اثبات می‌شود. متشابهاً،

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E \left[N \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^S - \hat{\mathcal{R}}_{ML} \right)^2 \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\frac{d^2 \hat{v}^2 \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right)^2}{N \left| \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right|^2} \right] = 0.$$

بنابراین (ii) اثبات می‌شود.

اثبات قضیه ۲.۲.۳:

برای موارد $b_1(\hat{\mathcal{R}}_{ML}) = B_1(\hat{\mathcal{R}}_{ML}) = 0$ و $b_2(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT})$ موارد $b_4(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^S)$ را در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} b_2(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \sqrt{N} \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT} - \mathcal{R} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \sqrt{N} \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right) I(A) - \mathcal{R} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} E \sqrt{N} \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R} \right) - \lim_{N \rightarrow \infty} E \sqrt{N} \left(\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right) I(A) \right) \\ &= 0 - \lim_{N \rightarrow \infty} E \sqrt{N} \left(\frac{\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right)}{v} v I(T_N < c_\alpha) \right) \\ &= -v E I(Z^2 < c_\alpha) = -v \Delta H_{\mathfrak{F}} \left(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2 \right) \\ &= -v \frac{\delta}{v} H_{\mathfrak{F}} \left(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2 \right) = -\delta H_{\mathfrak{F}} \left(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2 \right), \end{aligned}$$

بنابراین،

$$B_2(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT}) = \delta^2 \left[H_{\mathfrak{F}} \left(\chi_1^2(\alpha), \Delta^2 \right) \right]^2.$$

به طور مشابه،

$$\begin{aligned} b_{\mathfrak{F}}(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^S) &= \lim_{N \rightarrow \infty} E\sqrt{N} \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \frac{d\hat{v}}{\sqrt{N}} \frac{(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o)}{|\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o|} - \mathcal{R} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} E\sqrt{N} (\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}) - \lim_{N \rightarrow \infty} E\sqrt{N} \left(\frac{d\hat{v}}{\sqrt{N}} \frac{(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o)}{|\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o|} \right) \\ &= \circ - dvE\left(\frac{Z}{|Z|}\right) = -dv(\mathfrak{V}\Phi(\Delta) - \mathfrak{V}), \quad Z \sim N(\Delta, \mathfrak{V}), \end{aligned}$$

بنابراین

$$B_{\mathfrak{F}}(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^S) = d^{\mathfrak{V}}v^{\mathfrak{V}}(\mathfrak{V}\Phi(\Delta) - \mathfrak{V})^{\mathfrak{V}}.$$

در نهایت برای مورد $b_{\mathfrak{F}}(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{SPT})$ می‌توان تکنیک مشابه را به کار برد و نتیجه را به دست آورد.

اثبات قضیه ۳.۲.۳: برآوردگرهای $\mathcal{R}$ را در نظر بگیرید. در این مورد،

$$M_{\mathfrak{V}}(\hat{\mathcal{R}}_{ML}) = \lim_{N \rightarrow \infty} EN(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R})^{\mathfrak{V}} = \lim_{N \rightarrow \infty} EN \frac{(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R})^{\mathfrak{V}}}{v^{\mathfrak{V}}} v^{\mathfrak{V}} = v^{\mathfrak{V}} \lim_{N \rightarrow \infty} Z^{\mathfrak{V}} = v^{\mathfrak{V}}.$$

چون $\lim_{N \rightarrow \infty} EZ^{\mathfrak{V}} = \mathfrak{V}$ در ادامه، در نظر بگیرید

$$\begin{aligned} M_{\mathfrak{V}}(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} EN(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{PT} - \mathcal{R})^{\mathfrak{V}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} EN(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - (\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o)I(A) - \mathcal{R})^{\mathfrak{V}} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} EN(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R})^{\mathfrak{V}} + \lim_{N \rightarrow \infty} EN(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o)^{\mathfrak{V}} I(A) \\ &\quad - \mathfrak{V} \lim_{N \rightarrow \infty} EN(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R})(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o)I(A) \\ &= v^{\mathfrak{V}} + \lim_{N \rightarrow \infty} EN \frac{(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o)^{\mathfrak{V}}}{\hat{v}^{\mathfrak{V}}} \hat{v}^{\mathfrak{V}} I(A) \\ &\quad - \mathfrak{V} \lim_{N \rightarrow \infty} EN(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o + \mathcal{R}_o - \mathcal{R})(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o)I(A) \\ &= v^{\mathfrak{V}} + v^{\mathfrak{V}} \lim_{N \rightarrow \infty} EZ^{\mathfrak{V}} I(T_N < c_{\alpha}) - \mathfrak{V} \lim_{N \rightarrow \infty} EN(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o)^{\mathfrak{V}} I(T_N < c_{\alpha}) \\ &\quad + \mathfrak{V} \lim_{N \rightarrow \infty} EN(\mathcal{R} - \mathcal{R}_o)(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o)I(T_N < c_{\alpha}) \\ &= v^{\mathfrak{V}} + v^{\mathfrak{V}} E(Z^{\mathfrak{V}} I(Z^{\mathfrak{V}} < c_{\alpha})) - \mathfrak{V} v^{\mathfrak{V}} (Z^{\mathfrak{V}} I(Z^{\mathfrak{V}} < c_{\alpha})) + \mathfrak{V} \delta v E(ZI(Z^{\mathfrak{V}} < c_{\alpha})) \\ &= v^{\mathfrak{V}} - v^{\mathfrak{V}} (H_{\mathfrak{F}}(\chi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{V}}) + \Delta^{\mathfrak{V}} H_{\Delta}(\chi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{V}})) \\ &\quad + \mathfrak{V} v^{\mathfrak{V}} \Delta^{\mathfrak{V}} H_{\mathfrak{F}}(\chi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{V}}) \tag{۱۰.آ} \\ &= v^{\mathfrak{V}} \left\{ 1 - H_{\mathfrak{F}}(\chi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{V}}) \right. \\ &\quad \left. + \Delta^{\mathfrak{V}} [\mathfrak{V} H_{\mathfrak{F}}(\chi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{V}}) - H_{\Delta}(\chi_{\mathfrak{V}}^{\mathfrak{V}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{V}})] \right\}. \tag{۱۱.آ} \end{aligned}$$

و همچنین داریم

$$\begin{aligned}
M_{\mathfrak{r}}\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{SPT}\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} N \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^{SPT} - \mathcal{R} \right)^{\mathfrak{r}} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} (\sqrt{N} \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R} \right))^{\mathfrak{r}} + (1 - \eta)^{\mathfrak{r}} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} (\sqrt{N} \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right) I(A))^{\mathfrak{r}} \\
&\quad - \mathfrak{r} (1 - \eta) \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} N \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R} \right) \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right) I(A) \\
&= v^{\mathfrak{r}} + (1 - \eta)^{\mathfrak{r}} v^{\mathfrak{r}} \left(H_{\mathfrak{r}} \left(\chi_1^{\mathfrak{r}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{r}} \right) + \Delta^{\mathfrak{r}} H_{\Delta} \left(\chi_1^{\mathfrak{r}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{r}} \right) \right) \\
&\quad - \mathfrak{r} (1 - \eta) v^{\mathfrak{r}} \left(H_{\mathfrak{r}} \left(\chi_1^{\mathfrak{r}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{r}} \right) + \Delta^{\mathfrak{r}} H_{\Delta} \left(\chi_1^{\mathfrak{r}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{r}} \right) \right) \\
&\quad + \mathfrak{r} (1 - \eta) v^{\mathfrak{r}} \Delta^{\mathfrak{r}} H_{\mathfrak{r}} \left(\chi_1^{\mathfrak{r}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{r}} \right) \\
&= v^{\mathfrak{r}} \left\{ 1 - (1 - \eta)^{\mathfrak{r}} H_{\mathfrak{r}} \left(\chi_1^{\mathfrak{r}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{r}} \right) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \eta) \Delta^{\mathfrak{r}} \left[\mathfrak{r} H_{\mathfrak{r}} \left(\chi_1^{\mathfrak{r}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{r}} \right) - (1 + \eta) H_{\Delta} \left(\chi_1^{\mathfrak{r}}(\alpha), \Delta^{\mathfrak{r}} \right) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

در نهایت،

$$\begin{aligned}
M_{\mathfrak{f}}\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML}^S\right) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} N \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \frac{d\hat{v}}{\sqrt{N}} \frac{\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right)}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right|} - \mathcal{R} \right)^{\mathfrak{r}} \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} N \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R} \right)^{\mathfrak{r}} + \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} N \frac{d^{\mathfrak{r}} \hat{v}^{\mathfrak{r}} \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right)^{\mathfrak{r}}}{N \left| \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right|^{\mathfrak{r}}} \\
&\quad - \mathfrak{r} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} N \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R} \right) \frac{d\hat{v}}{\sqrt{N}} \frac{\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right)}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right|} \\
&= v^{\mathfrak{r}} + d^{\mathfrak{r}} v^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sqrt{N} \left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o + \mathcal{R}_o - \mathcal{R} \right) \frac{d\hat{v}}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right|} \frac{\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right)}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right|} \\
&= v^{\mathfrak{r}} + d^{\mathfrak{r}} v^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sqrt{N} \frac{d\hat{v}}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right|} \frac{\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right)^{\mathfrak{r}}}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right|^{\mathfrak{r}}} \\
&\quad - \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sqrt{N} (\mathcal{R}_o - \mathcal{R}) \frac{d\hat{v}}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right|} \frac{\left(\hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right)}{\left| \hat{\mathcal{R}}_{ML} - \mathcal{R}_o \right|} \\
&= v^{\mathfrak{r}} + d^{\mathfrak{r}} v^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r} d v^{\mathfrak{r}} \mathbb{E} |Z| + \delta d v \mathbb{E} \left(\frac{Z}{|Z|} \right) \\
&= v^{\mathfrak{r}} + d^{\mathfrak{r}} v^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r} d v^{\mathfrak{r}} \left(\mathbb{E} |Z| - \Delta \mathbb{E} \left(\frac{Z}{|Z|} \right) \right) \\
&= v^{\mathfrak{r}} + d^{\mathfrak{r}} v^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r} d v^{\mathfrak{r}} \left[\sqrt{\frac{\mathfrak{r}}{\pi}} e^{-\frac{\Delta^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}}} + \Delta (\mathfrak{r} \Phi(\Delta) - 1) - \Delta (\mathfrak{r} \Phi(\Delta) - 1) \right] \\
&= v^{\mathfrak{r}} + d^{\mathfrak{r}} v^{\mathfrak{r}} - \mathfrak{r} d v^{\mathfrak{r}} \sqrt{\frac{\mathfrak{r}}{\pi}} e^{-\frac{\Delta^{\mathfrak{r}}}{\mathfrak{r}}}.
\end{aligned}$$

۳.آ اثبات قضایای فصل چهارم

در این بخش اثبات قضایای فصل چهارم ارائه می شود.

اثبات قضیه ۱.۲.۴:

$$\begin{aligned}
 \text{Bias}(\hat{R}(t)) &= E(\hat{R}(t) - R(t)) = E(e^{-\frac{m}{S_m}G(t;a,\theta)}) - R(t) \\
 &= \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{mG(t;a,\theta)}{S_m}\right\} \frac{\lambda^m S_m^{m-1} e^{-\lambda S_m}}{\Gamma(m)} ds_m - R(t) \\
 &= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty w^{m-1} \exp\left\{-\left(\frac{\Upsilon m \lambda G(t;a,\theta)}{w} + \frac{w}{\Upsilon}\right)\right\} dw - R(t) \\
 &= \frac{\Upsilon}{\Gamma(m)} \{m \lambda G(t;a,\theta)\}^{\frac{m}{\Upsilon}} K_m(\Upsilon \sqrt{m \lambda G(t;a,\theta)}) - R(t) = \varphi_\Upsilon - R(t),
 \end{aligned}$$

9

$$\begin{aligned}
 \text{Bias}(\hat{R}^{PT}(t)) &= E(\hat{R}(t) - (\hat{R}(t) - R_o)I(A) - R(t)) \\
 &= E(\hat{R}(t) - R(t)) - E(\hat{R}(t)I(A)) + R_o E(I(A)) \\
 &= \text{Bias}(\hat{R}(t)) - E(\hat{R}(t)I(C_1 \leq L \leq C_\Upsilon)) + R_o E(I(C_1 \leq L \leq C_\Upsilon)),
 \end{aligned}$$

که در آن $C_1 = \chi_{(\Upsilon_m)}^2(\frac{\alpha}{\Upsilon})$ ، $C_\Upsilon = \chi_{(\Upsilon_m)}^2(1 - \frac{\alpha}{\Upsilon})$ و $L = \Upsilon \lambda_o S_m \sim \chi_{(\Upsilon_m)}^2$. حال فرض کنید $\beta = \frac{\lambda_o}{\lambda}$ ، داریم

$$\begin{aligned}
 \text{Bias}(\hat{R}^{PT}(t)) &= \text{Bias}(\hat{R}(t)) - E\left(e^{-\frac{\Upsilon m \lambda}{w}G(t;a,\theta)} I\left(\frac{C_1}{\beta} \leq w \leq \frac{C_\Upsilon}{\beta}\right)\right) \\
 &\quad + R_o E\left(\frac{C_1}{\beta} \leq w \leq \frac{C_\Upsilon}{\beta}\right) \\
 &= \text{Bias}(\hat{R}(t)) - \int_{\frac{C_1}{\beta}}^{\frac{C_\Upsilon}{\beta}} \frac{\exp\left(-\left(\frac{\Upsilon m \lambda G(t;a,\theta)}{w} + \frac{w}{\Upsilon}\right)\right) w^{m-1}}{\Upsilon^m \gamma(m)} dw \\
 &\quad + R_o \left(H_{\Upsilon_m}\left(\frac{C_\Upsilon}{\beta}\right) - H_{\Upsilon_m}\left(\frac{C_1}{\beta}\right)\right) \\
 &= \text{Bias}(\hat{R}(t)) - \varphi_1 + R_o \varphi_\Upsilon,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Bias}(\hat{R}^S(t)) &= E\left(\hat{R}^S(t) - R(t)\right) = E\left(\hat{R}(t) - \frac{d(\hat{R}(t) - R_o)}{\Upsilon \lambda_o S_m} - R(t)\right) \\
&= \text{Bias}(\hat{R}(t)) - \frac{d}{\Upsilon \lambda_o} E\left(\frac{\hat{R}(t)}{S_m}\right) + \frac{R_o d}{\Upsilon \lambda_o} E\left(\frac{1}{S_m}\right) \\
&= \text{Bias}(\hat{R}(t)) - \frac{d}{\Upsilon \lambda_o} E\left(\frac{e^{-\frac{mG(t; a, \theta)}{S_m}}}{S_m}\right) + \frac{R_o d}{\Upsilon \lambda_o} E\left(\frac{\Upsilon \lambda}{\Upsilon \lambda S_m}\right) \\
&= \text{Bias}(\hat{R}(t)) - \frac{d\lambda}{\lambda_o} \int_0^\infty \frac{\exp(-(\frac{\Upsilon m \lambda G(t; a, \theta)}{w} + \frac{w}{\Upsilon})) w^{m-\Upsilon}}{\Upsilon^m \gamma(m)} dw + \frac{R_o d}{\Upsilon \lambda_o} E\left(\frac{\Upsilon \lambda}{w}\right) \\
&= \text{Bias}(\hat{R}(t)) - \frac{d\lambda}{\Upsilon^{m-1} \lambda_o \Gamma(m)} (\Upsilon m \lambda G(t; a, \theta))^{\frac{m-1}{\Upsilon}} K_{m-1}(\Upsilon \sqrt{m \lambda G(t; a, \theta)}) \\
&\quad + \frac{R_o d}{\Upsilon \lambda_o} \frac{\lambda}{\Gamma(m)} \\
&= \text{Bias}(\hat{R}(t)) - \frac{d}{\Upsilon \lambda_o} \varphi_{\Upsilon} + \frac{R_o d}{\Upsilon \lambda_o} \varphi_{11}.
\end{aligned}$$

اثبات قضیه ۲.۲.۴:

$$\begin{aligned}
\text{MSE}(\hat{R}(t)) &= E\left(\hat{R}(t) - R(t)\right)^{\Upsilon} = E\left(\hat{R}^{\Upsilon}\right) - \Upsilon R(t)E(\hat{R}) + R^{\Upsilon}(t) \\
&= E\left(\exp(-\frac{\Upsilon m \lambda G(t; a, \theta)}{w})\right) - \Upsilon R(t)E\left(\exp(-\frac{\Upsilon m \lambda G(t; a, \theta)}{w})\right) + R^{\Upsilon}(t) \\
&= \frac{\Upsilon (\Upsilon m \lambda G(t; a, \theta))^{\frac{m}{\Upsilon}}}{\Gamma(m)} K_m(\Upsilon \sqrt{\Upsilon m \lambda G(t; a, \theta)}) \\
&\quad - \Upsilon R(t) \frac{(m \lambda G(t; a, \theta))^{\frac{m}{\Upsilon}}}{\Gamma(m)} K_m(\Upsilon \sqrt{m \lambda G(t; a, \theta)}) + R^{\Upsilon}(t) \\
&= \varphi_{\Delta} - \Upsilon R(t) \varphi_{\Upsilon} + R^{\Upsilon}(t).
\end{aligned}$$

با توجه به رابطه ی $\text{MSE}(\hat{R}^{PT}(t)) = \text{Var}(\hat{R}^{PT}(t)) + (\text{Bias}(\hat{R}^{PT}(t)))^{\Upsilon}$ ابتدا، واریانس برآوردگر آزمون اولیه را ارائه می کنیم،

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\hat{R}^{PT}(t)) &= \text{Var}\left((\hat{R}(t) - (\hat{R}(t) - R_o)I(A))\right) \\
&= \text{Var}(\hat{R}(t)) + \text{Var}\left[\hat{R}(t) - R_o I(A)\right] - \Upsilon \text{Cov}\left(\hat{R}(t), \hat{R}(t) - R_o I(A)\right) \\
&= E(\hat{R}^{\Upsilon}(t)) - E^{\Upsilon}(\hat{R}(t)) - E(\hat{R}^{\Upsilon}(t)I(A)) - E^{\Upsilon}(\hat{R}(t)I(A)) \\
&\quad + R_o^{\Upsilon} \left[E(I(A)) - E^{\Upsilon}(I(A))\right] + \Upsilon R_o E(\hat{R}(t)I(A)E(I(A))) \\
&\quad + \Upsilon E(\hat{R}(t))E(\hat{R}(t)I(A)) - \Upsilon R_o E(\hat{R}(t))E(I(A)) \\
&= \varphi_{\Delta} - \varphi_{\Upsilon}^{\Upsilon} - \varphi_{\Upsilon} - \varphi_1^{\Upsilon} + R_o^{\Upsilon} \varphi_{\Upsilon} (1 - \varphi_{\Upsilon}) + \Upsilon R_o \varphi_{\Upsilon} (\varphi_1 - \varphi_{\Upsilon}) + \Upsilon \varphi_1 \varphi_{\Upsilon}.
\end{aligned}$$

سپس، داریم

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{R}^{PT}(t)) &= \varphi_{\delta} - \varphi_{\epsilon}^{\gamma} - \varphi_{\gamma} - \varphi_{\lambda}^{\gamma} + R_o^{\gamma} \varphi_{\gamma} (\lambda - \varphi_{\gamma}) + \gamma R_o \varphi_{\gamma} (\varphi_{\lambda} - \varphi_{\epsilon}) + \gamma \varphi_{\lambda} \varphi_{\epsilon} \\ &\quad + \left(\text{Bias}(\hat{R}^{PT}(t)) \right)^{\gamma}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{R}^S(t)) &= E \left(\hat{R}^S(t) - R(t) \right)^{\gamma} = E \left(\hat{R}(t) - \frac{d(\hat{R}(t) - R_o)}{\gamma \lambda_o S_m} - R(t) \right)^{\gamma} \\ &= \text{MSE}(\hat{R}(t)) + \frac{d^{\gamma}}{\gamma \lambda_o^{\gamma}} E \left(\frac{(\hat{R}(t) - R_o)^{\gamma}}{S_m^{\gamma}} \right) \\ &\quad - \frac{d}{\lambda_o} E \left(\frac{(\hat{R}(t) - R(t))(\hat{R}(t) - R_o)}{S_m} \right) \\ &= \text{MSE}(\hat{R}(t)) + \frac{d^{\gamma}}{\gamma \lambda_o^{\gamma}} \left[E \left(\frac{\hat{R}^{\gamma}(t)}{S_m^{\gamma}} \right) + R_o^{\gamma} E \left(\frac{\lambda}{S_m^{\gamma}} \right) - \gamma R_o E \left(\frac{\hat{R}(t)}{S_m^{\gamma}} \right) \right] \\ &\quad - \frac{d}{\lambda_o} \left[E \left(\frac{\hat{R}^{\gamma}(t)}{S_m} \right) - (R_o + R(t)) E \left(\frac{\hat{R}(t)}{S_m} \right) + R_o R(t) E \left(\frac{\lambda}{S_m} \right) \right] \\ &= \text{MSE}(\hat{R}(t)) + \frac{d^{\gamma}}{\gamma \lambda_o^{\gamma}} [\varphi_{\lambda^{\circ}} + R_o^{\gamma} \varphi_{\epsilon} - \gamma R_o \varphi_{\lambda}] \\ &\quad - \frac{d}{\lambda_o} [\varphi_{\lambda} - (R_o + R(t)) \varphi_{\gamma} + R_o R(t) \varphi_{\lambda \lambda}]. \end{aligned}$$

اثبات قضیه ۳.۲.۴:

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{P}) &= E(\hat{P}) - P = E(W) - P = \psi_{\lambda} - P, \\ \text{Bias}(\hat{P}^{PT}) &= E(\hat{P}^{PT}) - P = E \left(\hat{P} - (\hat{P} - P_o) I(A) \right) - P \\ &= \text{Bias}(\hat{P}) - E(\hat{P} I(A)) + P_o E(I(A)) = \text{Bias}(\hat{P}) - \psi_{\gamma} + P_o \psi_{\delta}, \\ \text{Bias}(\hat{P}^S) &= E(\hat{P}^S) - P = E \left(\hat{P} - (\hat{P} - P_o) dL^{-1} \right) - P \\ &= \text{Bias}(\hat{P}) - dE(\hat{P} L^{-1}) + dP_o E(L^{-1}), \end{aligned}$$

باتوجه به $L^{-1} = \frac{m_{\gamma}}{m_{\lambda}} \frac{\hat{P}}{1 - \hat{P}}$ و ۱۳.۴، بنابراین داریم،

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{P}^S) &= \text{Bias}(\hat{P}) - d \frac{m_{\gamma}}{m_{\lambda}} E \left(\frac{\hat{P}^{\gamma}}{1 - \hat{P}} \right) + dP_o \frac{m_{\gamma}}{m_{\lambda}} E \left(\frac{\hat{P}}{1 - \hat{P}} \right) \\ &= \text{Bias}(\hat{P}) - d \frac{m_{\gamma}}{m_{\lambda}} \psi(\gamma, \lambda) + dP_o \frac{m_{\gamma}}{m_{\lambda}} \psi(\lambda, \lambda). \end{aligned}$$

پیوست ب

گزیده‌ای از برنامه‌های رایانه‌ای

در این بخش به‌خاطر حجم بالای برنامه‌های نوشته شده برای این رساله تنها تعدادی از کدهای R مربوط به نمودارها و جداول ارائه شده در رساله آورده می‌شوند. **شکل ۱.۲**

```
deltaa=seq(0,8,.001)
2 are1=are2=are3=ar=are4=are5=c();
  eta1=0.0; eta2=0.0;
4 alpha1=0.01; alpha2=0.05; alpha3=0.1; alpha4=0.25; alpha5=0.5
  r1=qchisq(1-alpha1,(1))
6 r2=qchisq(1-alpha2,(1))
  r3=qchisq(1-alpha3,(1))
8 r4=qchisq(1-alpha4,(1))
  r5=qchisq(1-alpha5,(1))
10 for(i in 1:length(deltaa)){
  delta=deltaa[i]
12 are1[i]={1-(1-eta1^2)*pchisq(r1, 3, delta^2, lower.tail = TRUE,
    log.p = FALSE)+(delta^2)*(1-eta1)*(2*
(1-eta1)*pchisq(r1, 3, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE, log.p =
  FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r1, 5, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE,
    log.p = FALSE))}
```

```

14 are2[i]={1-(1-eta2^2)*pchisq(r2, 3, delta^2, lower.tail = TRUE,
    log.p = FALSE)+(delta^2)*(1-eta2)*(2*
    (1-eta2)*pchisq(r2, 3, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE, log.p =
    FALSE)-(1+eta2)*pchisq(r2, 5, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE,
    log.p = FALSE))}
16 are3[i]={1-(1-eta2^2)*pchisq(r3, 3, delta^2, lower.tail = TRUE,
    log.p = FALSE)+(delta^2)*(1-eta2)*(2*
    (1-eta2)*pchisq(r3, 3, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE, log.p =
    FALSE)-(1+eta2)*pchisq(r3, 5, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE,
    log.p = FALSE))}
18 are4[i]={1-(1-eta2^2)*pchisq(r4, 3, delta^2, lower.tail = TRUE,
    log.p = FALSE)+(delta^2)*(1-eta2)*(2*
    (1-eta2)*pchisq(r4, 3, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE, log.p =
    FALSE)-(1+eta2)*pchisq(r4, 5, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE,
    log.p = FALSE))}
20 are5[i]={1-(1-eta2^2)*pchisq(r5, 3, delta^2, lower.tail = TRUE,
    log.p = FALSE)+(delta^2)*(1-eta2)*(2*
    (1-eta2)*pchisq(r5, 3, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE, log.p =
    FALSE)-(1+eta2)*pchisq(r5, 5, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE,
    log.p = FALSE))}
22 }
    plot(c(deltaa, deltaa, deltaa, deltaa, deltaa), c(are1^(-1), are2^(-1),
        are3^(-1), are4^(-1), are5^(-1)), pch=" ", xlab=expression(Delta^2)
        , ylab="ARE")
24 lines(deltaa, are1^(-1), type="l", col=1, lty=1, lwd=2)
    lines(deltaa, are2^(-1), type="l", col=2, lty=2, lwd=2)
26 lines(deltaa, are3^(-1), type="l", col=3, pch=" ", lty=3, lwd=2)
    lines(deltaa, are4^(-1), type="l", col=4, pch=" ", lty=4, lwd=2)
28 lines(deltaa, are5^(-1), type="l", col=5, pch=" ", lty=5, lwd=2)
    abline(a = 1, b = 0, col = "blue")
30 legend("topright", c("alpha1=0.01", "alpha2=0.05", "alpha3=0.1", "
    alpha4=0.25", "alpha5=0.5"), lty = c(1, 2, 3, 4, 5),
    col = c(1, 2, 3, 4, 5), lwd=2, bty="n")

```

شکل ۳.۲

alpha1=0.01; alpha2=0.05

2 deltaa=seq(0,8,.001)


```

are1=are2=c()
4 eta1=0.9; eta2=0.1
r1=qchisq(1-alpha1,(1))
6 r2=qchisq(1-alpha2,(1))
for(i in 1:length(deltaa)){
8 delta=deltaa[i]
are1[i]={1-(1-eta1^2)*pchisq(r1, 3, delta^2, lower.tail = TRUE,
log.p = FALSE)+(delta^2)*(1-eta1)*(2*
10 (1-eta1)*pchisq(r1, 3, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE, log.p =
FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r1, 5, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE,
log.p = FALSE))}
are2[i]={1-(1-eta2^2)*pchisq(r2, 3, delta^2, lower.tail = TRUE,
log.p = FALSE)+(delta^2)*(1-eta2)*(2*
12 (1-eta2)*pchisq(r2, 3, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE, log.p =
FALSE)-(1+eta2)*pchisq(r2, 5, ncp=delta^2, lower.tail = TRUE,
log.p = FALSE))}
}
14 plot(c(deltaa, deltaa), c(are1^(-1), are2^(-1)), pch="", xlab=
expression(Delta^2), ylab="ARE")
lines(deltaa, are1^(-1), type="l", col=1, lty=1)
16 lines(deltaa, are2^(-1), type="l", col=2, lty=2)
abline(a = 1, b = 0, col = "blue")
18 legend("topright", c("eta1=0.9 and alpha1=0.01", "eta2=0.1 and
alpha2=0.05"), lty = c(1, 2),
col = c(1, 2), lwd=1, bty="n")

```

شكل ٢.٢

```

deltaa<-seq(0,20,0.01)
2 se=c()
for(i in 0:length(deltaa)){
4 delta=deltaa[i]
se[i]=1-(2/pi)*(2*exp(-(delta^2)/2)-1)
6 }
plot(deltaa, se^(-1), type="l", pch="", xlab=expression(Delta^2), ylab=
"ARE (Se)")
8 lines(deltaa, se^(-1), type="l", col=2, lty=1, lwd=2)

```

```
abline(a=1,b=0,col=1,lty=3)
```

جدول ۱.۲

```

min1=min(are1^(-1)); max1=max(are1^(-1))
2 min2=min(are2^(-1)); max2=max(are2^(-1))
  min3=min(are3^(-1)); max3=max(are3^(-1))
4 min4=min(are4^(-1)); max4=max(are4^(-1))
  min5=min(are5^(-1)); max5=max(are5^(-1))
6 paste(min1,min2,min3,min4,min5)
  paste(max1,max2,max3,max4,max5)
8 # ..... bounds ..... library
  (rootSolve)
f1<-function(x){(1-(1-eta1^2)*pchisq(r1, 3, x^2, lower.tail = TRUE
  , log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r1, 3, ncp=
  x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r1, 5,
  ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)-1}
10 uniroot.all(f1, c(0,8))
f2<-function(x){(1-(1-eta1^2)*pchisq(r2, 3, x^2, lower.tail = TRUE
  , log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r2, 3, ncp=
  x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r2, 5,
  ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)-1}
12 uniroot.all(f2, c(0,8))
f3<-function(x){(1-(1-eta1^2)*pchisq(r3, 3, x^2, lower.tail = TRUE
  , log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r3, 3, ncp=
  x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r3, 5,
  ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)-1}
14 uniroot.all(f3, c(0,8))
f4<-function(x){(1-(1-eta1^2)*pchisq(r4, 3, x^2, lower.tail = TRUE
  , log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r4, 3, ncp=
  x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r4, 5,
  ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)-1}
16 uniroot.all(f4, c(0,8))
f5<-function(x){(1-(1-eta1^2)*pchisq(r5, 3, x^2, lower.tail = TRUE
  , log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r5, 3, ncp=
  x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r5, 5,
  ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)-1}
18 uniroot.all(f5, c(0,8))

```

```

# ..... min delta .....
20 f1<-function(x){(1-(1-eta1^2)*pchisq(r1, 3, x^2, lower.tail = TRUE
, log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r1, 3, ncp=
x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r1, 5,
ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)}
optimize(f1,c(0,8))
22 f2<-function(x){(1-(1-eta1^2)*pchisq(r2, 3, x^2, lower.tail = TRUE
, log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r2, 3, ncp=
x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r2, 5,
ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)}
optimize(f2,c(0,8))
24 f3<-function(x){(1-(1-eta1^2)*pchisq(r3, 3, x^2, lower.tail = TRUE
, log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r3, 3, ncp=
x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r3, 5,
ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)}
optimize(f3,c(0,8))
26 f4<-function(x){(1-(1-eta1^2)*pchisq(r4, 3, x^2, lower.tail = TRUE
, log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r4, 3, ncp=
x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r4, 5,
ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)}
optimize(f4,c(0,8))
28 f5<-function(x){(1-(1-eta1^2)*pchisq(r5, 3, x^2, lower.tail = TRUE
, log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r5, 3, ncp=
x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r5, 5,
ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)}
optimize(f5,c(0,8))

```

جدول ٢.٢

```

# ..... min and max of ARE .....
2 min1=min(are1^(-1)); max1=max(are1^(-1))
min2=min(are2^(-1)); max2=max(are2^(-1))
4 paste(c(min1,min2,max1,max2))
# ..... min and max ARE .....
6 library(rootSolve)
f1<-function(x){(1-(1-eta1^2)*pchisq(r1, 3, x^2, lower.tail = TRUE
, log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r1, 3, ncp=
x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r1, 5,

```

```

ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)-1}
8 uniroot.all(f1, c(0,8))
f2<-function(x){(1-(1-eta1^2)*pchisq(r2, 3, x^2, lower.tail = TRUE
, log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r2, 3, ncp=
x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r2, 5,
ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)-1}
10 uniroot.all(f2,c(0,8))
# ..... min delta .....
12 f1<-function(x){(1-(1-eta1)^2*pchisq(r1, 3, x^2, lower.tail = TRUE
, log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r1, 3, ncp=
x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r1, 5,
ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)}
optimize(f1,c(0,8))
14 f2<-function(x){(1-(1-eta1)^2*pchisq(r2, 3, x^2, lower.tail = TRUE
, log.p = FALSE)+(x^2)*(1-eta1)*(2*(1-eta1)*pchisq(r2, 3, ncp=
x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)-(1+eta1)*pchisq(r2, 5,
ncp=x^2, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)))^(-1)}
optimize(f2,c(0,8))

```

شکل ۴.۲

```

rm(list=ls(all=TRUE))
2 R00<-seq(.4,.9,.01)
comb = function(n, x) {
4 return( factorial(n)/( factorial(x)*factorial(n-x)))}
R=.6;mu=3;m=3;r=7;n=3;k=7
6 I=(m*r>=n*k)
lambda=mu*(1/R-1)
8 Cn=0
for(i in 3:n){
10 for(s in 0:(i-3)){
Cn=Cn+(comb(i-3,s)*comb(n-2,i-2)*(-1)^(i-3-s))/(n-s)^3
12 }}
Cm=0
14 for(i in 3:m){
for(s in 0:(i-3)){
16 Cm=Cm+(comb(i-3,s)*comb(m-2,i-2)*(-1)^(i-3-s))/(m-s)^3
}}

```

```

18 R.hat=mu.hat=lambda.hat=nu.hat=c()
   p=min(k*n,m*r)/max(k*n,m*r)
20 for(b in 1:1000){
   xrss=matrix(0,ncol=r,nrow=m)
22 for(j in 1:r){
   for(i in 1:m){
24 xrss[i,j]<-sort(rexp(m,rate=mu),decreasing = F)[i]
   }}
26 yrss=matrix(0,ncol=k,nrow=n)
   for(j in 1:k){
28 for(i in 1:n){
   yrss[i,j]<-sort(rexp(n,rate=lambda),decreasing = F)[i]
30 }}
   ssx=0
32 for(j in 1:r){
   for(i in 1:m){
34 ssx=ssx+(m-i+1)*xrss[i,j]
   }}
36 ssy=0
   for(j in 1:k){
38 for(i in 1:n){
   ssy=ssy+(n-i+1)*yrss[i,j]
40 }}
   mu.hat[b]=ssx/((1/4)*r*m*(m+3))
42 lambda.hat[b]=ssy/((1/4)*k*n*(n+3))
   R.hat[b]=lambda.hat[b]/(lambda.hat[b]+mu.hat[b])
44 nu.hat[b]=((lambda.hat[b]*mu.hat[b])/((lambda.hat[b]+mu.hat[b])^2)
   )*sqrt(1/(((m+3)/4)+2*(m-1)*Cm)+1/(p*(((n+3)/4)+2*(n-1)*Cn)))
   }
46 alpha=0.05;eta=.3
   Rpt.hat=Rspt.hat=Rs.hat=Rsp.hat=Lr=matrix(0,ncol=length(R.hat),
   nrow=length(R0))
48 mseR=mseRpt=mseRspt=mseRs=c()
   for(R0 in R00){
50 for(j in 1:length(R.hat)){
   Lr[R0*100-39,j]<-(m*r*I+n*k*(1-I))*(R.hat[j]-R0)^2/((nu.hat[j])^2)
52 Rpt.hat[R0*100-39,j]=R.hat[j]-(R.hat[j]-R0)*(Lr[R0*100-39,j]<
   qchisq(1-alpha, 1, ncp=0 ,lower.tail = TRUE, log.p = FALSE))

```

```

Rspt.hat[R0*100-39,j]=(eta*R.hat[j]+(1-eta)*R0)*(Lr[R0*100-39,j]<
  qchisq(1-alpha, 1, ncp=0, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE))+(
  R.hat[j])*(Lr[R0*100-39,j]>qchisq(1-alpha, 1, ncp=0, lower.
  tail = TRUE, log.p = FALSE))
54 d=sqrt(2/pi)
Rs.hat[R0*100-39,j]=R.hat[j]-d*(R.hat[j]-R0)*((Lr[R0*100-39,j])
  ^(-.5))
56 }
mseR=mean((R.hat-R)^2)
58 mseRpt[R0*100-39]=mean((Rpt.hat[R0*100-39,]-R)^2)
mseRspt[R0*100-39]=mean((Rspt.hat[R0*100-39,]-R)^2)
60 mseRs[R0*100-39]=mean((Rs.hat[R0*100-39,]-R)^2)
}
62 mse=cbind(mseR, mseRpt, mseRspt, mseRs)
R0<-R00
64 plot(c(R0,R0,R0,R0),c(mse[,1],mse[,2],mse[,3],mse[,4]),main="alpha
  =0.05, eta=0.3",pch="",xlab="R0",ylab="mse")
lines(R0,mse[,1],type="l",col=1,lty=1,lwd=1)
66 lines(R0,mse[,2],type="l",col=2,lty=2,lwd=2)
lines(R0,mse[,3],type="l",col=3,lty=3,lwd=2)
68 lines(R0,mse[,4],type="l",col=4,lty=4,lwd=2)
legend("topright",c("Rmmrss","Rpt","Rspt","Rs"),col=c
  (1,2,3,4),lwd=2,lty=c(1,2,3,4),bty="n")
70 abline(v=R,lty=2)

```

جدول ۳.۲

```

rm(list=ls(all=TRUE))
2 library(xtable)
set.seed(123456789)
4 comb = function(n, x) {
  return(factorial(n)/(factorial(x)*factorial(n-x)))}
6 f.boot_t1=function(n,k,m,r,mu,R,R0,alpha,eta){
  #n=m=3;k=r=5;mu=2;R=.3;R0=.35;alpha=.01;eta=.3
8 I=(m*r>=n*k)
Cn=0
10 for(i in 3:n){
  for(s in 0:(i-3)){

```

```

12 Cn=Cn+(comb(i-3,s)*comb(n-2,i-2)*(-1)^(i-3-s))/(n-s)^3
    }}
14 Cm=0
    for(i in 3:m){
16   for(s in 0:(i-3)){
      Cm=Cm+(comb(i-3,s)*comb(m-2,i-2)*(-1)^(i-3-s))/(m-s)^3
18   }}
    p=min(k*n,m*r)/max(k*n,m*r)
20 lambda=mu*(1/R-1)
    xrss=matrix(0,ncol=r,nrow=m)
22   for(j in 1:r){
     for(i in 1:m){
24     xrss[i,j]<-sort(rexp(m,rate=1/mu),decreasing = F)[i]
        }}
26   yrss=matrix(0,ncol=k,nrow=n)
     for(j in 1:k){
28     for(i in 1:n){
        yrss[i,j]<-sort(rexp(n,rate=1/lambda),decreasing = F)[i]
30     }}
    ssx=0
32   for(j in 1:r){
     for(i in 1:m){
34     ssx=ssx+(m-i+1)*xrss[i,j]
        }}
36   ssy=0
     for(j in 1:k){
38     for(i in 1:n){
        ssy=ssy+(n-i+1)*yrss[i,j]
40     }}
    mu.hat=ssx/((1/4)*r*m*(m+3))
42   lambda.hat=ssy/((1/4)*k*n*(n+3))
    R.hat=mu.hat/(lambda.hat+mu.hat)
44   nu.hat=((lambda.hat*mu.hat)/((lambda.hat+mu.hat)^2))*sqrt(1/(((m
      +3)/4)+2*(m-1)*Cm)+1/(p*(((n+3)/4)+2*(n-1)*Cn)))
    Lr<-(m*r*I+n*k*(1-I))*(R.hat-R0)^2/((nu.hat)^2)
46   Rpt.hat=R.hat-(R.hat-R0)*(Lr<qchisq(1-alpha, 1, ncp=0 ,lower.tail
      = TRUE, log.p = FALSE))
    Rspt.hat=(eta*R.hat+(1-eta)*R0)*(Lr<qchisq(1-alpha, 1, ncp=0 ,

```

```

lower.tail = TRUE, log.p = FALSE))+(R.hat)*(Lr>qchisq(1-alpha ,
  1, ncp=0 ,lower.tail = TRUE, log.p = FALSE))
48 d=sqrt(2/pi)
Rs.hat=R.hat-d*(R.hat-R0)*((Lr)^(-.5))
50 #B=200
R.star=Rpt.star=Rspt.star=Rs.star=Lr.star=nu.star=SD1=SD2=SD3=SD4=
  rep(NA,B)
52 for(b in 1:B){
  xrss.star=matrix(0,ncol=r,nrow=m)
54 for(j in 1:r){
  for(i in 1:m){
56 xrss.star[i,j]<-sort(rexp(m,rate=1/mu.hat),decreasing = F)[i]
  }}
58 yrss.star=matrix(0,ncol=k,nrow=n)
  for(j in 1:k){
60 for(i in 1:n){
  yrss.star[i,j]<-sort(rexp(n,rate=1/lambda.hat),decreasing = F)[i]
62 }}
  ssx.star=0
64 for(j in 1:r){
  for(i in 1:m){
66 ssx.star=ssx.star+(m-i+1)*xrss.star[i,j]
  }}
68 ssy.star=0
  for(j in 1:k){
70 for(i in 1:n){
  ssy.star=ssy.star+(n-i+1)*yrss.star[i,j]
72 }}
  mu.star=ssx.star/((1/4)*r*m*(m+3))
74 lambda.star=ssy.star/((1/4)*k*n*(n+3))
  R.star[b]=mu.star/(lambda.star+mu.star)
76 nu.star[b]=((lambda.star*mu.star)/((lambda.star+mu.star)^2))*sqrt
  (1/(((m+3)/4)+2*(m-1)*Cm)+1/(p*(((n+3)/4)+2*(n-1)*Cn)))
  Lr.star[b]<-(m*r*I+n*k*(1-I))*(R.star[b]-R0)^2/((nu.star[b])^2)
78 Rpt.star[b]=R.star[b]-(R.star[b]-R0)*(Lr.star[b]<qchisq(1-alpha ,
  1, ncp=0 ,lower.tail = TRUE, log.p = FALSE))
  Rspt.star[b]=(eta*R.star[b]+(1-eta)*R0)*(Lr.star[b]<qchisq(1-alpha
  , 1, ncp=0 ,lower.tail = TRUE, log.p = FALSE))+(R.star[b])*(Lr

```

```

      .star[b]>qchisq(1-alpha , 1, ncp=0 ,lower.tail = TRUE, log.p =
      FALSE))
80 d=sqrt(2/pi)
      Rs.star[b]=R.star[b]-d*(R.star[b]-R0)*((Lr.star[b])^(-.5))
82 R.tilde=Rpt.tilde=Rspt.tilde=Rs.tilde=Lr.tilde=nu.tilde=c()
      for(bb in 1:20){
84 xrss.tilde=matrix(0,ncol=r,nrow=m)
      for(j in 1:r){
86 for(i in 1:m){
          xrss.tilde[i,j]<-sort(rexp(m,rate=1/mu.star),decreasing = F)[i]
88 }}
          yrss.tilde=matrix(0,ncol=k,nrow=n)
90 for(j in 1:k){
          for(i in 1:n){
92 yrss.tilde[i,j]<-sort(rexp(n,rate=1/lambda.star),decreasing = F)[i
          ]
          }}
94 ssx.tilde=0
      for(j in 1:r){
96 for(i in 1:m){
          ssx.tilde=ssx.tilde+(m-i+1)*xrss.tilde[i,j]
98 }}
          ssy.tilde=0
100 for(j in 1:k){
          for(i in 1:n){
102 ssy.tilde=ssy.tilde+(n-i+1)*yrss.tilde[i,j]
          }}
104 mu.tilde=ssx.tilde/((1/4)*r*m*(m+3))
      lambda.tilde=ssy.tilde/((1/4)*k*n*(n+3))
106 R.tilde[bb]=mu.tilde/(lambda.tilde+mu.tilde)
      nu.tilde[bb]=((lambda.tilde*mu.tilde)/((lambda.tilde+mu.tilde)^2))
          *sqrt(1/(((m+3)/4)+2*(m-1)*Cm)+1/(p*(((n+3)/4)+2*(n-1)*Cn)))
108 Lr.tilde[bb]<-(m*r*I+n*k*(1-I))*(R.tilde[bb]-R0)^2/((nu.tilde[bb])
          ^2)
      Rpt.tilde[bb]=R.tilde[bb]-(R.tilde[bb]-R0)*(Lr.tilde[bb]<qchisq(1-
          alpha , 1, ncp=0 ,lower.tail = TRUE, log.p = FALSE))
110 Rspt.tilde[bb]=(eta*R.tilde[bb]+(1-eta)*R0)*(Lr.tilde[bb]<qchisq
          (1-alpha , 1, ncp=0 ,lower.tail = TRUE, log.p = FALSE))+(R.

```

```

    tilde[bb])*(Lr.tilde[bb]>qchisq(1-alpha, 1, ncp=0, lower.tail
    = TRUE, log.p = FALSE))
d=sqrt(2/pi)
112 Rs.tilde[bb]=R.tilde[bb]-d*(R.tilde[bb]-R0)*((Lr.tilde[bb])^(-.5))
    }
114 SD1[b]=sqrt(var(R.tilde))
    SD2[b]=sqrt(var(Rpt.tilde))
116 SD3[b]=sqrt(var(Rspt.tilde))
    SD4[b]=sqrt(var(Rs.tilde))
118 }
    z.tilde1=(R.star-R.hat)/SD1
120 z.tilde2=(Rpt.star-R.hat)/SD2
    z.tilde2=z.tilde2[!is.infinite(z.tilde2)]
122 z.tilde3=(Rspt.star-R.hat)/SD3
    z.tilde4=(Rspt.star-R.hat)/SD4
124 t11=quantile(z.tilde1, alpha/2, type=1);
    t12=quantile(z.tilde1, 1-alpha/2, type=1)
126 int.bootR=c(R.hat-t12*sqrt(var(R.star)), R.hat-t11*sqrt(var(R.star))
    ))
    t21=quantile(z.tilde2, alpha/2, type=1);
128 t22=quantile(z.tilde2, 1-alpha/2, type=1)
    int.bootRpt=c(Rpt.hat-t22*sqrt(var(Rpt.star)), Rpt.hat-t21*sqrt(var
    (Rpt.star)))
130 t31=quantile(z.tilde3, alpha/2, type=1);
    t32=quantile(z.tilde3, 1-alpha/2, type=1)
132 int.bootRspt=c(Rspt.hat-t32*sqrt(var(Rspt.star)), Rspt.hat-t31*sqrt
    (var(Rspt.star)))
    t41=quantile(z.tilde4, alpha/2, type=1);
134 t42=quantile(z.tilde4, 1-alpha/2, type=1)
    int.bootRs=c(Rs.hat-t42*sqrt(var(Rs.star)), Rs.hat-t41*sqrt(var(Rs.
    star)))
136 return(c(int.bootR, int.bootRpt, int.bootRspt, int.bootRs, R.hat, Rpt.
    hat, Rspt.hat, Rs.hat))}
repl=1000
138 B=200
    f.boot_t1(n=3, k=1, m=5, r=1, mu=2, R=.3, R0=.33, alpha=0.01, eta=.56)
140 table=c()
    for(R in c(0.3, 0.35, 0.4, .5))

```

```

142 for(n in c(3,5))
    for(m in c(3,5)){
144 total=t(replicate(repl,expr=f.boot_t1(n,k=1,m,r=1,mu=2,R,R0=.31,
        alpha=0.01,eta=.7)))
        L.BootR=pmax(total[,1],0);U.BootR=pmin(total[,2],1)
146 L.BootRpt=pmax(total[,3],0);U.BootRpt=pmin(total[,4],1)
        L.BootRspt=pmax(total[,5],0);U.BootRspt=pmin(total[,6],1)
148 L.BootRs=pmax(total[,7],0);U.BootRs=pmin(total[,8],1)
        CV.BootR=mean((L.BootR<=R)&(R<=U.BootR))
150 L.BootR=mean(U.BootR-L.BootR)
        CV.BootRpt=mean((L.BootRpt<=R)&(R<=U.BootRpt))
152 L.BootRpt=mean(U.BootRpt-L.BootRpt)
        CV.BootRspt=mean((L.BootRspt<=R)&(R<=U.BootRspt))
154 L.BootRspt=mean(U.BootRspt-L.BootRspt)
        CV.BootRs=mean((L.BootRs<=R)&(R<=U.BootRs))
156 L.BootRs=mean(U.BootRs-L.BootRs)
        table=rbind(table,c(CV.BootR,L.BootR,CV.BootRpt,L.BootRpt,CV.
            BootRspt,L.BootRspt,CV.BootRs,L.BootRs))}
158 colnames(table)=c("CV.R","L.R","CV.Rpt","L.Rpt","CV.Rspt","L.Rspt",
    ,"CV.Rs","L.Rs")
        R=rep(c(0.3,0.35,0.4,.5),each=4)
160 n=rep(c(3,5),each=2,times=4)
        m=rep(c(3,5),times=8)
162 xtable(round(cbind(R,n,m,table),3),digits=3)

```


مراجع

- [۱] آرشی، م. (۱۳۸۸ ش). برآوردگرهای بهبود یافته در مدل رگرسیون خطی چندگانه با خطاهای دارای توزیع بیضی گون، رساله ی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۲] بصیرت، م. (۱۳۹۳ ش). استنباط آماری برای پارامتر تنش-مقاومت بر اساس داده‌های ترتیبی، رساله ی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۳] زمان زاده، ا. (۱۳۹۰ ش). مباحثی بر آزمون‌های نیکویی برازش بر مبنای آنتروپی و نمونه‌گیری مجموعه رتبه دار، رساله دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۴] سنجری فارسی پور، ن. و ریاحی، ه. (۱۳۹۲ ش)، استنباط درست‌نمایی و بیزی مدل تنش-نیرو بر اساس داده های رکوردی در خانواده های نرخ خطر متناسب و معکوس متناسب. مجله ی علوم آماری، جلد ۷، شماره ی ۲۰۷، ۲۳۲.
- [۵] صالحی، م. (۱۳۹۴ ش). نمونه ی مجموعه ی رتبه دار بر مبنای داده های رکوردی: پیش بینی و برآورد، رساله دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۶] عربی بلاغی، ر. (۱۳۹۳ ش). برآوردگرهای بهبود یافته در رکوردها، رساله ی دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۷] مربی هروی، ح. (۱۳۹۴ ش). برآورد چندکها بر اساس طرحهای نمونه‌گیری دومرحله‌ای و مجموعه رتبه‌دار وابسته، رساله دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد.
- [۸] مهدی زاده، م. (۱۳۹۰ ش). استنباط آماری بر مبنای طرح نمونه‌گیری مجموعه رتبه دار، رساله دکتری، دانشگاه فردوسی مشهد.

[9] Arabi Belaghi, R. , Arashi, M., & Tabatabaey, S. M. M. (2014). Improved confidence intervals for the scale parameter of Burr XII model based on record values. *Computational Statistics*, 29(5), 1153-1173.

[10] Arabi Belaghi, R. , Arashi, M., & Tabatabaey, S. M. M. (2015). Improved estimators of the distribution function based on lower record values. *Statistical Papers*, 56(2), 453-477.

- [11] Arabi Belaghi, R. , Alma, Ö. G., & Aminnejad, M. (2015). IMPROVED ESTIMATORS OF THE EXPONENTIAL MODEL BASED ON TYPE TWO CENSORED DATA. *İstatistik Türk İstatistik Derneği Dergisi*, 7(3), 71-79.
- [12] Arabi Belaghi R., Gurunlu Alma, O. & M Noori Asl (2016). On the estimation of the extreme value and normal distribution parameters based on progressive type-ii hybrid-censored data. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 569-596.
- [13] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. & Nagaraja, H. N. (1998), *Records*, John Wiley & Sons, New York.
- [14] Asgharzadeh, A., Valiollahi, R., & Raqab, M. Z. (2011). Stress-strength reliability of Weibull distribution based on progressively censored samples. *SORT*, 35(2), 103-124.
- [15] Awad, A. M., & Gharraf, M. K. (1986), Estimation of $P(Y < X)$ in the Burr case: A comparative study. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 15(2), 389-403.
- [16] Bader, M. G., & Priest, A. M. (1982). Statistical aspects of fibre and bundle strength in hybrid composites. *Progress in science & engineering of composites*, 1129-1136.
- [17] Baklizi, A. (2003). Shrinkage estimation of the exponential reliability with censored data. *Focus on Applied Statistics*, 11(4), 195-204.
- [18] Balakrishnan, N. & Aggarwala, R. (2000). *Progressive censoring: theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media.
- [19] Balakrishnan, N., Basu, A. P. (Eds.) (1995), *The Exponential Distribution; Theory, Methods and Applications*. Gordon & Breach Science Publishers, Newark, New Jersey.
- [20] Baklizi, A. (2008). Estimation of $Pr(X < Y)$ using record values in the one and two parameter exponential distributions. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 37(5), 692-698.
- [21] Baklizi, A. (2008). Likelihood and Bayesian estimation of $Pr(X < Y)$ using lower record values from the generalized exponential distribution. *Computational Statistics & Data Analysis*, 52(7), 3468-3473.
- [22] Baklizi, A. (2014). Interval estimation of the stress–strength reliability in the two-parameter exponential distribution based on records. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 84(12), 2670-2679.

- [23] Basu, A. P. (1964). Estimates of reliability for some distributions useful in life testing. *Technometrics*, 6(2), 215-219.
- [24] Birnbaum, Z. W., & McCarty, R. C. (1958). A Distribution-Free Upper Confidence Bound for $Pr(Y < X)$, Based on Independent Samples of X and Y . *The Annals of Mathematical Statistics*, 558-562.
- [25] Chao, A. (1982). On comparing estimators of $PrY < X$ in the exponential case. *IEEE Transactions on Reliability*, 31(4), 389-392.
- [26] Chaturvedi, A., & Nandchahal, S. (2016). Shrinkage estimators of the reliability characteristics of a family of lifetime distributions. *Statistica*, 76(1), 57-82.
- [27] Chaturvedi, A., & Rani, U. (1997). Estimation procedures for a family of density functions representing various life-testing models. *Metrika*, 46(1), 213.
- [28] Chaturvedi, A., & Rani, U. (1998). Classical and Bayesian reliability estimation of the generalized Maxwell failure distribution. *Journal of Statistical Research*, 32(1), 113-120.
- [29] Chaturvedi, A., & Surinder, K. (1999). Further remarks on estimating the reliability function of exponential distribution under type I and type II censorings. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 29-39.
- [30] Chaturvedi, A., & Vyas, S. (2017). Estimation and testing procedures for the reliability functions of exponentiated distributions under censorings. *Statistica*, 77(1), 13-31.
- [31] Constantine, K., Tse, S. K., & Karson, M. (1986). Estimation of $P(Y < X)$ in the gamma case. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 15(2), 365-388.
- [32] Chen, Z., Bai, Z. & Sinha, B., *Ranked Set Sampling: Theory and Applications*, Springer-Verlag, (2004) New York.
- [33] Dell, T. R., & Clutter, J. L. (1972). Ranked set sampling theory with order statistics background. *Biometrics*, 545-555.
- [34] Deshpande, J. V., Frey, J., & Ozturk, O. (2006). Nonparametric ranked-set sampling confidence intervals for quantiles of a finite population. *Environmental and Ecological Statistics*, 13(1), 25-40.
- [35] Efron, B. (1982). *The jackknife, the bootstrap, and other resampling plans* (Vol. 38). Siam.

-
- [36] Efron, B. and Tibshirani, R., *An Introduction to the Bootstrap*, Chapman and Hall, (1993) New York.
- [37] Jafari Jozani, M. , & Johnson, B. C. (2011). Design based estimation for ranked set sampling in finite populations. *Environmental and ecological statistics*, 18(4), 663-685.
- [38] Jafari Jozani, M. , & Johnson, B. C. (2012). Randomized nomination sampling for finite populations. *Journal of Statistical Planning and inference*, 142(7), 2103-2115.
- [39] Jafari Jozani, M. , & Ahmadi, J. (2014). On uncertainty and information properties of ranked set samples. *Information Sciences*, 264, 291-301.
- [40] Kelley, G. D., Kelley, J. A., & Schucany, W. R. (1976). Efficient estimation of $P(Y < X)$ in the exponential case. *Technometrics*, 18(3), 359-360.
- [41] Khan, S., & Saleh, A. M. E. (2001). On the comparison of the pre-test and shrinkage estimators for the univariate normal mean. *Statistical Papers*, 42(4), 451-473.
- [42] Kotz, S., & Pensky, M. (2003). *The stress-strength model and its generalizations: theory and applications*. World Scientific.
- [43] Kundu, D., & Gupta, R. D. (2006). Estimation of $P[Y < X]$ for Weibull distributions. *IEEE Trans. Reliability*, 55(2), 270-280.
- [44] Kundu, D., & Raqab, M. Z. (2009). Estimation of $R = P(Y < X)$ for three-parameter Weibull distribution. *Statistics & Probability Letters*, 79(17), 1839-1846.
- [45] Kundu, D., & Raqab, M. Z. (2009). Estimation of $R = P(Y < X)$ for three-parameter Weibull distribution. *Statistics & Probability Letters*, 79(17), 1839-1846.
- [46] Kvam, P. H., & Samaniego, F. J. (1994). Nonparametric maximum likelihood estimation based on ranked set samples. *Journal of the American Statistical Association*, 89(426), 526-537.
- [47] Lawless, J. F. (2011). *Statistical models and methods for lifetime data* (Vol. 362). John Wiley & Sons.
- [48] Mehrotra, K. G., & Nanda, P. (1974). Unbiased estimation of parameters by order statistics in the case of censored samples. *Biometrika*, 601-606.
- [49] Mahdizadeh, M., & Zamanzade, E. (2016). Kernel-based estimation of $P(X > Y)$ in ranked set sampling. *SORT-Statistics and Operations Research Transactions*, 1(2), 243-266.

- [50] Mahdizadeh, M., and Zamanzade, E. (2018a). Smooth estimation of a reliability function in ranked set sampling. *Statistics*, 52(4), 750-768.
- [51] Mahdizadeh, M., and Zamanzade, E. (2018b). Interval estimation of $P(X < Y)$ in ranked set sampling. *Computational Statistics*, 33(3), 1325-1348.
- [52] Malhotra, A. (2017). *Inferential Procedures For Some Reliability Models Based on Records*. Doctor of Philosophy, The University of Delhi.
- [53] McIntyre, G. A. (1952). A method for unbiased selective sampling, using ranked sets. *Australian Journal of Agricultural Research*, 3(4), 385-390.
- [54] Modarres, R., Hui, T. P., & Zheng, G. (2006). Resampling methods for ranked set samples. *Computational statistics & data analysis*, 51(2), 1039-1050.
- [55] Murray, R. A., Ridout, M. S., & Cross, J. V. (2000). The use of ranked set sampling in spray deposit assessment. *Aspects of Applied Biology*, 57, 141-146.
- [56] Muttlak, H. A., Abu-Dayyeh, W. A., Saleh, M. F., & Al-Sawi, E. (2010). Estimating $P(Y < X)$ using ranked set sampling in case of the exponential distribution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 39(10), 1855-1868.
- [57] Nelson, R. R. (2009). *An evolutionary theory of economic change*. harvard university press.
- [58] Noori Asl, M. , Arabi Belaghi, R. , & Bevrani, H. (2018). Classical and Bayesian inferential approaches using Lomax model under progressively type-I hybrid censoring. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 343, 397-412.
- [59] Noori Asl, M. , Arabi Belaghi, R. A, & Bevrani, H. (2017). On Burr XII distribution analysis under progressive type-ii hybrid censored data. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 19(2), 665-683.
- [60] Owen, D. B., Craswell, K. J., & Hanson, D. L. (1964). Nonparametric upper confidence bounds for $PrY < X$ and confidence limits for $PrY < X$ when X and Y are normal. *Journal of the American Statistical Association*, 59(307), 906-924.
- [61] Pugh, E. L. (1963). The best estimate of reliability in the exponential case. *Operations Research*, 11(1), 57-61.
- [62] Raqab, M. Z., & Kundu, D. (2005). Comparison of different estimators of $P[Y < X]$ for a scaled Burr type X distribution. *Communications in Statistics—Simulation and Computation®*, 34(2), 465-483.

-
- [63] Rizzo, M. L., *Statistical Computing with R*. Chapman & Hall, (2008) Taylor & Francis Group, LLC.
- [64] Safariyan, A., M. Arashi, & R. Arabi Belaghi (2017). "Some Asymptotic Results on The Preliminary Test Estimator of Stress-Strength Reliability", International Imam Khomeini University of Qazvin, Iran.
- [65] Safariyan, A., M. Arashi, & R. Arabi Belaghi (2018a). "Estimation for the Reliability Characteristic of a Family of Lifetime Distributions under Progressive Censoring", Shahrood University of Technology, Iran.
- Safariyan2018b Safariyan, A., Arashi, M., Ahmed, S. E., & Belaghi, R. A. (2018, August). Reliability Analysis Using Ranked Set Sampling. In *International Conference on Management Science and Engineering Management* (pp. 711-722). Springer, Cham.
- [66] Safariyan, A., Arashi, M., & Arabi Belaghi, R. (2019). Improved estimators for stress-strength reliability using record ranked set sampling scheme. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, 1-22.
- [67] Safariyan, A., Arashi, M., & Arabi Belaghi, R. (2019). Improved point and interval estimation of the stress–strength reliability based on ranked set sampling. *Statistics*, 53(1), 101-125.
- [68] Saleh, A.K.Md. Ehsanes,. *Theory of Preliminary Test and Stein-Type Estimation with Applications*. Wiley, (2006) United States of America.
- [69] Al-Saleh, M. F., & Zheng, G. (2002). Theory & Methods: Estimation of bivariate characteristics using ranked set sampling. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, 44(2), 221-232.
- [70] Al-Saleh, M. F., & Samawi, H. M. (2007). A note on inclusion probability in ranked set sampling and some of its variations. *Test*, 16(1), 198-209.
- [71] Salehi, M., & Ahmadi, J. (2015). Estimation of stress-strength reliability using record ranked set sampling scheme from the exponential distribution. *Filomat*, 29(5), 1149-1162.
- [72] Salehi, M., & Ahmadi, J. (2014). Record ranked set sampling scheme. *Metron*, 72(3), 351-365.

- [73] Salehi, M., Ahmadi, J., & Dey, S. (2016). Comparison of two sampling schemes for generating record-breaking data from the proportional hazard rate models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 45(13), 3721-3733.
- [74] Saleh, A. K. Md. Ehsanes & Kibria, B.M.G. (1993), Performance of some new preliminary test ridge regression and their properties. *Communications in Statistics Theory and Method*, 22, 2747-2764.
- [75] Samawi, H. M., & Al-Sagheer, O. A. (2001). On the estimation of the distribution function using extreme and median ranked set sampling. *Biometrical Journal: Journal of Mathematical Methods in Biosciences*, 43(3), 357-373.
- [76] Sathe, Y. S., & Shah, S. P. (1981). On estimating $P(X > Y)$ for the exponential distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 10(1), 39-47.
- [77] Tong, H. (1974). A note on the estimation of $P(Y < X)$ in the exponential case. *Technometrics*, 16(4), 625-625.
- [78] Tong, H. (1975). THE EDITOR *Technometrics*. *Technometrics*, 17(3), 393-393.
- [Bhattacharya (1989)] Tyagi, R. K., & Bhattacharya, S. K. (1989). A note on the MVU estimation of reliability for the Maxwell failure distribution. *Estadistica*, 41(137), 73-79.
- [79] Watson, G. N. (1995). *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge university press.
- [80] Zamanzade, E., & Mahdizadeh, M. (2019). Using ranked set sampling with extreme ranks in estimating the population proportion. *Statistical methods in medical research*, 0962280218823793.

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

Preliminary Test	آزمون اولیه
Bias	اریبی
Coverage Probability	احتمال پوشش
Uncertain Prior Information	اطلاعات پیشین غیر قطعی
Visual Inspection	بازدید چشمی
Shrinkage estimation	برآورد انقباضی
Restricted Estimator	برآوردگر محدودشده
Unrestricted Estimator	برآوردگر محدودنشده
Dominant	برتری
Survival	بقا
Bootstrap	بوت استرپ
Optimal	بهینه
Improved	بهبود یافته
Assumption	پذیره
Continuous	پیوسته
Density function	تابع چگالی
Differentiable function	تابع مشتق‌پذیر
Indicator Function	تابع نشان‌گر
Empirical	تجربی
Stress-Strength	تنش – مقاومت
Cumulative Distribution	توزیع تجمعی
Asymptotic distribution	توزیع مجانبی
Likelihood	درست‌نمایی
Record	رکورد
Characteristic	شاخص

Consistant	سازگار
Progressive Censoring	سانسور فزاینده
Monte Carlo Simulation	شبیه‌سازی مونت کارلو
Expected Length	طول مورد انتظار
Life Time	طول عمر
Hypothesis	فرضیه
Reliability	قابلیت اعتماد
Judgment	قضاوتی
Efficiency	کارایی
Auxiliary	کمکی
Asymptotic	مجانبی
Ranked Set	مجموعه رتبه‌دار
Initial value	مقدار اولیه
Local Alternative	مقابل محلی
Unbiased	نااریب
Relational	نسبی
Prior point Guess	نقطه پیشنهاد پیشین
Smooth	هموار

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

Assumption	پذیره
Asymptotic	مجانبی
Asymptotic distribution	توزیع مجانبی
Auxiliary	کمکی
Bias	اریبی
Bootstrap	بوت استرپ
Characteristic	شاخص
Consistent	سازگار
Continuous	پیوسته
Coverage Probability	احتمال پوشش
Cumulative Distribution	توزیع تجمعی
Density function	تابع چگالی
Differentiable function	تابع مشتق‌پذیر
Dominant	برتری
Efficiency	کارایی
Empirical	تجربی
Expected Length	طول مورد انتظار
Hypothesis	فرضیه
Indicator Function	تابع نشان‌گر
Initial value	مقدار اولیه
Improved	بهبود یافته
Judgment	قضاوتی
Life Time	طول عمر
Likelihood	درست‌نمایی
Local Alternative	مقابل محلی

Monte Carlo Simulation	شبیه‌سازی مونت کارلو
Optimal	بهینه
Preliminary Test	آزمون اولیه
Prior point Guess	نقطه پیشنهاد پیشین
Progressive Censoring	سانسور فزاینده
Ranked Set	مجموعه رتبه‌دار
Record	رکورد
Restricted Estimator	برآوردگر محدودشده
Relational	نسبی
Reliability	قابلیت اعتماد
Shrinkage estimation	برآورد انقباضی
Smooth	هموار
Stress-Strength	تنش-مقاومت
Survival	بقا
Unbiased	نااریب
Uncertain Prior Information	اطلاعات پیشین غیر قطعی
Unrestricted Estimator	برآوردگر محدودنشده
Visual Inspection	بازدید چشمی

Abstract

In this thesis, the probability of failure-free operation until time t , along with the probability of stress-strength, based on different sampling designs consist of ranked set sampling, record ranked set sampling and progressive censoring data is studied in a family of lifetime distributions, specially exponential distribution. For estimation and improving purposes, the preliminary test and Stein-type shrinkage estimators are proposed and their exact distributional properties are derived. For numerical superiority demonstration of the proposed estimation strategies, some improved bootstrap confidence intervals, are constructed. An extensive simulation study is carried out in order to assess the performance of the methods. Simulation evidences revealed that our proposed shrinkage strategies perform well in the estimation of parameters based on mentioned sampling designs. These strategies applied on some real data and evaluated their results.

Keywords: Shrinkage Estimator, Survival Function, Stress-Strength Reliability, Ranked Set Sampling, Progressive censoring, Preliminary Test Estimator, Bootstrap confidence interval



Shahrood University of Technology

Faculty of Mathematical Sciences

PhD Thesis in: Statistics

Improved Estimators of Some Reliability Characteristics

By: Alireza Safariyan

Supervisor

Mohammad Arashi

Advisor

Reza Arabi belaghi

September 2019